INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

DANIELE DE SOUZA OLIVEIRA

TATIANA DA SILVA PEREIRA

RAÍZES DE POLINÔMIOS: UM ENFOQUE GEOMÉTRICO

Monografia apresentada ao IFFluminense (Campus Campos-Centro), como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª MSc. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ

2010

DANIELE DE SOUZA OLIVEIRA

TATIANA DA SILVA PEREIRA

RAÍZES DE POLINÔMIOS: UM ENFOQUE GEOMÉTRICO

Monografia apresentada ao IFFluminense (Campus Campos-Centro), como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 13 de julho de 2010.

Banca Avaliadora:

Prof.ª Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro (orientadora)
Mestre em Educação Matemática
IFFluminense Campus Campos-Centro

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática
IFFluminense Campus Campos-Centro

Prof.ª Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática
IFFluminense Campus Campos-Centro

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, por iluminar nossa caminhada possibilitando a realização deste trabalho e por ter nos ajudado nas dificuldades encontradas, dando-nos forças para prosseguir.

Aos nossos pais, pela educação que nos deram, pelo exemplo de vida e por terem nos proporcionado o estudo adequado para chegarmos até aqui.

Em especial a nossa professora e orientadora Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro, pelo seu empenho, dedicação e profissionalismo durante a elaboração deste trabalho e pela amizade jamais esquecida.

Aos nossos amigos de infância, pela compreensão da nossa ausência e pelos momentos de distração.

Aos nossos colegas, amigos da Licenciatura, pelo companheirismo e apoio durante nossa caminhada na elaboração deste trabalho, que sempre com palavras de força nos ajudaram a superar os momentos de dificuldades.

Às professoras Gilmara Teixeira Barcelos e Carla Antunes Fontes, pelas sugestões que enriqueceram nosso trabalho.

Aos professores da licenciatura, que sempre nos incentivaram, contribuindo não só na formação profissional como na formação humana, transmitindo conhecimentos que foram úteis para a realização deste trabalho.

À coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense (Campus Campos-Centro).

Aos alunos que participaram ativamente das aplicações das atividades do projeto.

Enfim, a todas as pessoas que participaram de nossa vida acadêmica e que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

A presente monografia tem como proposta preparar e aplicar atividades que permitam identificar, graficamente, as raízes reais de polinômios de coeficientes reais e estudar o aspecto gráfico desses polinômios nas vizinhanças de suas raízes reais de multiplicidade par e ímpar. A motivação para desenvolver as atividades dessa monografia ocorreu devido à pouca ênfase dada por muitos autores de livros do Ensino Médio à representação gráfica de polinômios. Inicialmente, as atividades desse trabalho foram aplicadas para alunos de uma Licenciatura em Matemática, sob a forma de oficina, e constituiu-se em teste exploratório. A partir da observação e análise das linguagens oral e escrita dos licenciandos, foi possível fazer algumas reformulações nas atividades para que essas fossem aplicadas para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio. A aplicação das atividades dessa monografia ocorreu em um Laboratório de Informática de uma Instituição Federal de ensino, no Município de Campos dos Goytacazes/RJ, tendo o *software* Winplot como instrumento auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Raízes de Polinômios. Multiplicidade. Interpretação geométrica.

ABSTRACT

The present monograph intends to prepare and apply activities that allow the graphical identification of the real roots of polynomials with real coefficients and to study the aspect of the graphic of these polynomials in the neighborhood of its real roots of even and odd multiplicity. The motivation to develop the activities of this monograph appeared due to the little emphasis given by many authors of high school books to the graphical representation of polynomials. Initially, the activities in this work had been applied to students of a Major in Mathematics as a workshop, and consisted of an exploring test. From the observation and analysis of the verbal and writing comments made by the undergraduates, it was possible to reformulate the activities so that these were applied to high school third year's students. The application of the activities in this monograph occurred in a laboratory of computer science of a Federal Institution of education, in the city of Campos dos Goytacazes/RJ, having Winplot software as an auxiliary tool in the process of teaching and learning.

Keywords: Roots of Polynomials. Multiplicity. Geometric interpretation.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em diversas situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998a), a Matemática está presente na vida das pessoas, em diferentes situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999) destacam que, no Ensino Médio, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano fundamental para a formação dos jovens, contribuindo para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Segundo Moraes (1997), a educação deve ser voltada para a formação integral do indivíduo, para o desenvolvimento da sua inteligência, do seu pensamento, capacitando-o a viver numa sociedade em constante transformação. A educação deverá oferecer condições que o ajudem a formular hipóteses, construir caminhos e tomar decisões.

É importante destacar que o ensino de Matemática prestará sua contribuição na medida em que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, visando ao ensino e à aprendizagem, a partir de argumentações, análises e reflexões.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999) ressaltam a necessidade de educadores adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo, criando situações em que o aluno é desafiado a participar, questionar e refletir sobre suas ações.

Considerando que o ensino de Matemática deve ser voltado para atividades desafiadoras que despertem no aluno o prazer em aprender, propomos neste trabalho um estudo sobre a interpretação geométrica de raízes reais de polinômios tendo o Winplot como um *software* de apoio.

O Winplot é um programa de simples utilização, interativo, gratuito e é sempre atualizado. Foi desenvolvido por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, por volta de 1985. É possível encontrá-lo na Internet na versão em português (http://math.exeter.edu/rparris). O trabalho de tradução resultou da iniciativa do professor Adelmo Ribeiro de Jesus.

O *software* Winplot esboça gráficos no plano e no espaço. Devido a sua facilidade de manuseio e à diversidade de recursos, ele possibilitou, neste trabalho, um estudo dinâmico e proporcionou explorações algébricas e gráficas simultaneamente.

As novas tecnologias computacionais facilitam a incorporação mais abrangente de pontos de vista importantes como o gráfico e o numérico ao estudo algébrico de diversos conceitos e processos (PALIS, p.37, 1997).

Segundo Palis (1994), *softwares* gráficos produzem em pouquíssimo tempo esboços de gráficos de funções difíceis de desenhar à mão; permitindo uma ampliação significativa no estudo de funções polinomiais de maior grau.

De acordo com Moraes (1997), os computadores têm contribuído para que a ciência cognitiva tenha avanços significativos na compreensão das estruturas mentais e nos processos subjacentes de aquisição, construção e representação do conhecimento. O computador constitui-se como ferramenta que permite a reflexão sobre o objeto de estudo, o desenvolvimento da ação e a reorganização do pensamento.

Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) destacam que o uso do computador possibilita o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo, estimulando a atitude crítica e investigativa e enriquecendo a capacidade de raciocínio e comunicação dos alunos.

Assim, os computadores constituem-se em instrumentos importantes, colaborando na melhoria do processo de ensino-aprendizagem, estimulando a criação de novos ambientes educacionais.

A motivação para desenvolver as atividades relacionadas ao tema desta monografia ocorreu devido à pouca ênfase dada por muitos autores de livros do Ensino Médio à representação gráfica de polinômios.

No capítulo desta monografia intitulado “Análise de Livros do Ensino Médio”, temos o resultado de uma pesquisa bibliográfica feita em 45 livros de Matemática do Ensino Médio, cujas edições variavam de 1980 a 2005. Dos 45 livros pesquisados, 31 livros (aproximadamente 68,9%) não apresentam gráficos de polinômios no desenvolvimento da teoria.

Para Lima (2001), muitos autores dão aos polinômios um tratamento exclusivamente algébrico, não apresentando qualquer gráfico durante o estudo de polinômios, ou seja, não há um enfoque no que diz respeito ao aspecto analítico. Ele ainda ressalta que os polinômios devem ser estudados tanto sob o ponto de vista algébrico como geométrico e numérico.

Segundo Carneiro (1999), fala-se muito na necessidade de motivar os temas da Matemática a partir de problemas interessantes e realistas, porém, muitas oportunidades são perdidas ao deixar fora dos programas do Ensino Médio a resolução de equações polinomiais de grau superior a dois.

Eisenberg e Dreyfus (1994), in Coxford e Shulte (1994), ressaltam que os polinômios são onipresentes em Matemática, sendo possível aprender muitos aspectos do pensamento matemático por meio do estudo dos polinômios e que há um vínculo muito forte entre polinômios e os problemas de construção geométrica da Antiguidade, ou seja, os polinômios são importantes e devem fazer parte dos currículos escolares.

Larson, Hostetler e Edwards (1998) destacam que durante os últimos 300 anos, à medida que o Cálculo se desenvolvia até atingir a forma atual, muitas funções se revelaram de grande importância em modelos da vida real, dentre elas destacam-se as funções polinomiais.

Hoffmann e Bradley (1999) complementam que as funções polinomiais aparecem em todo o Cálculo, como exemplos e cumprindo um papel útil em diversas aplicações práticas.

Pelo exposto, consideramos que os polinômios constituem um tópico importante nos currículos escolares e o seu estudo deve ser voltado tanto para o aspecto algébrico quanto geométrico. Sendo assim, o objetivo geral desta monografia consiste em preparar e aplicar atividades que permitam identificar, graficamente, as raízes reais de polinômios de coeficientes reais e estudar o aspecto gráfico desses polinômios nas vizinhanças das suas raízes reais de multiplicidade par e ímpar.

Para polinômios, há uma estreita relação entre a multiplicidade de uma raiz e o comportamento gráfico nas suas vizinhanças (ANTON, p.309, 2000).

Para atingir o objetivo geral deste trabalho, algumas ações foram delineadas:

- Revisão bibliográfica;
- Elaboração de atividades voltadas para o estudo proposto;
- Aplicação das atividades para licenciandos em Matemática e para alunos do Ensino Médio;
- Análise das atividades aplicadas.

A revisão bibliográfica foi realizada em livros do Ensino Médio, livros de Cálculo, artigos, sites e revistas. Ela nos deu suporte para a inserção nesta monografia, de dois capítulos: “Tecnologia e Educação” e “Análise de livros do Ensino Médio”.

Após a revisão bibliográfica, foram elaborados um questionário e as atividades que foram aplicados inicialmente para os licenciandos em Matemática.

A aplicação das atividades para os alunos da Licenciatura ocorreu em forma de oficina e se constituiu em teste exploratório. A partir da observação das linguagens oral e escrita dos participantes, foi possível fazer algumas reformulações nas atividades, para que essas fossem aplicadas para os alunos do 3.° ano do Ensino Médio. Tanto para os licenciandos quanto para os alunos do Ensino Médio, a aplicação das atividades ocorreu em um Laboratório de Informática, tendo um computador disponível para cada aluno. Na etapa seguinte, analisamos a aplicação de todas as atividades.

Dessa forma, esta monografia encontra-se estruturada em três capítulos, além dessa introdução e das considerações finais.

No primeiro capítulo intitulado “Tecnologia e Educação”, são apresentadas algumas considerações sobre a importância da tecnologia na educação, que se constituíram em fundamentação teórica para o presente trabalho.

No segundo capítulo “Análise de livros do Ensino Médio”, apresenta-se o resultado de uma pesquisa bibliográfica realizada em livros de Matemática do Ensino Médio sobre alguns tópicos relacionados ao estudo de polinômios.

No terceiro capítulo “Comentários das Aplicações das Atividades”, encontra-se a análise dos questionários aplicados aos licenciandos e os comentários das aplicações das atividades para esses alunos. Nesse capítulo, também tem-se o comentário das atividades aplicadas para os alunos do Ensino Médio.

Nas considerações finais, destaca-se a importância do estudo, faz-se um relato da pesquisa, enfocando-se os resultados considerados importantes e também são apontadas sugestões de continuidade do trabalho.

Finalizando, são apresentadas as referências bibliográficas e os apêndices onde constam o questionário aplicado aos licenciandos, as definições e os teoremas utilizados, os tutoriais, a primeira versão das atividades I e II e as versões reformuladas das mesmas, bem como os cadernos de respostas e os exercícios aplicados.

1- TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO

> O papel fundamental da educação no desenvolvimento das pessoas e das sociedades amplia-se ainda mais no despertar do novo milênio e aponta para a necessidade de se construir uma escola voltada para a formação de cidadãos. Vivemos numa era marcada pela competição e pela excelência, em que progressos científicos e os avanços tecnológicos definem exigências novas para os jovens que ingressarão no mundo do trabalho (BRASIL, PCN, p.5, 1998a).

Segundo Tajra (2008), a maior parte dos empregos que irão surgir utilizarão as novas tecnologias de informação e comunicação, portanto cabe à escola prestar sua contribuição na formação de indivíduos para atuarem nas economias do futuro. Ele ainda destaca que a informática na educação, quando bem utilizada, desenvolve as habilidades de pensamento, comunicação e estrutura lógica, estimula a criatividade, tornando-se um importante agente motivador para o processo de ensino e aprendizagem.

Perrenoud (2000) ressalta que as novas tecnologias podem reforçar a contribuição dos trabalhos pedagógicos e didáticos contemporâneos, pois permitem a criação de situações de aprendizagem ricas, complexas e diversificadas.

> As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem que continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional (BRASIL, PCN, p.44, 1998b).

Nogueira e Andrade (2004) afirmam que não há mais como “se esquivar” das novas tecnologias, não cabendo mais dúvidas sobre sua utilização. Os recursos tecnológicos proporcionam novas formas de ler, escrever, se comunicar e, portanto, de pensar e agir.

A importância da utilização da tecnologia computacional na área educacional é indiscutível como necessária, seja no sentido pedagógico, seja no sentido social (TAJRA, p.104, 2008).

Não tendo mais espaço para discutir sobre a inserção da tecnologia na educação, cabe, então, questionar como essa tecnologia será utilizada.

Segundo Nogueira e Andrade (2004), não se trata apenas de inserir a informática nos currículos escolares, é preciso modificar os pressupostos do processo educativo, possibilitando a construção e a elaboração de conhecimentos a partir das características específicas das novas tecnologias computacionais. Eles ainda ressaltam que o uso da tecnologia constitui-se como uma possibilidade de ação pedagógica e metodológica para a superação de dificuldades no ensino da Matemática em todos os níveis.

Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) destacam que a Matemática tem dado importantes contribuições para a Informática e que a Matemática também vem sendo fortemente influenciada pela Informática e essa relação reforça a ideia da importância da utilização dos instrumentos computacionais no processo de ensino e aprendizagem.

> Nesse contexto, é preciso pensar no novo papel do professor e da escola, que não são mais as únicas fontes de informação dos jovens. O educador assume agora a função de conectar os conteúdos curriculares com conhecimentos que vêm de fora da escola e de ajudar os alunos a relacionar o aprendizado com o mundo (MELLO, p.20, 2005).

> A educação para a cidadania, que é um dos grandes objetivos da educação de hoje, exige uma “apreciação” do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia. Assim, o papel do professor de matemática é particularmente importante para ajudar o aluno nessa apreciação, assim como para destacar alguns dos importantes princípios éticos a ela associados (D’AMBRÓSIO, p.87, 1996).

Abrahão e Palis (2004) destacam que certamente a qualidade do aprendizado está relacionada, em grande parte, à qualidade das tarefas propostas aos alunos e não somente à disponibilidade ou emprego de tecnologias computacionais.

É fundamental que os professores aprendam a utilizar as novas tecnologias com o objetivo de empregá-las durante as aulas, proporcionando aos alunos ambientes de aprendizagem que possibilitem a construção do conhecimento.

Ponte, Oliveira e Varandas (2003) ressaltam que o papel do professor, nesse novo contexto, será de criar situações de aprendizagem estimulantes, desafiando os alunos a pensar. Eles ainda ressaltam que os professores de Matemática precisam saber usar as tecnologias de informação e comunicação em sua prática, pois estas promovem mudanças inovadoras no ensino da Matemática, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação.

Há um consenso entre pesquisadores de que é preciso aliar tecnologia e ações educativas, cabendo ao professor um trabalho de orientação.

Gravina e Santarosa (1998) destacam que os desafios propostos pelo professor, em ambientes informatizados, promovem a orientação do trabalho e que estes desafios devem despertar o interesse dos alunos e não privá-los de suas ações e explorações. Ainda comentam que os ambientes informatizados são ferramentas de grande potencial, oferecendo suporte na superação de obstáculos inerentes ao processo de construção do conhecimento matemático, bem como na aceleração da apropriação do conhecimento.

Outros autores, como Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), também concordam que o trabalho com o computador, se for baseado em tarefas interessantes e desafiadoras, pode promover a formulação de conjecturas por parte dos alunos, estimular a investigação e enriquecer o raciocínio e os argumentos utilizados por eles.

> A tecnologia deve ser utilizada na escola para ampliar as opções de ação didática, com o objetivo de criar ambientes de ensino e aprendizagem que favoreçam a postura crítica, a curiosidade, a observação e análise, a troca de idéias, de forma que o aluno possa ter autonomia no seu processo de aprendizagem, buscando e ampliando conhecimentos (BRASIL, PCN, p.156, 1998b).

2- ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO MÉDIO

Com o objetivo de desenvolver um trabalho sobre a interpretação geométrica das raízes reais de polinômios, iniciamos uma pesquisa bibliográfica.

Foram consultados 45 livros de Matemática do Ensino Médio que abordam polinômios, com edições variando de 1980 a 2005, sendo 12 desses livros de 1980 a 1989, 18 de 1990 a 1999 e 15 de 2000 a 2005.

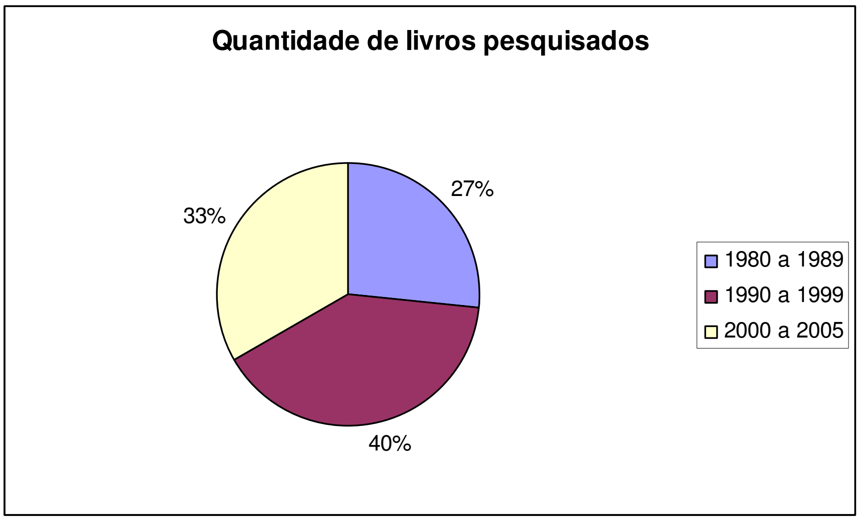


Gráfico 2.1: Quantidade de livros pesquisados

Os capítulos pesquisados faziam referência a polinômios e equações polinomiais e as questões levantadas foram:

1) Apresenta gráficos de polinômios no desenvolvimento da teoria?

2) Interpreta geometricamente que as raízes reais de um polinômio são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico do polinômio com o eixo x?

3) Apresenta exercícios em que o aluno precise identificar graficamente as raízes reais de um polinômio?

4) Faz a interpretação geométrica das raízes reais de um polinômio em relação às suas multiplicidades par ou ímpar?

5) Apresenta exercícios em que o aluno precise identificar graficamente se a multiplicidade da raiz é par ou ímpar?

A tabela 2.1 e o gráfico 2.2 mostram os resultados dos 45 livros pesquisados.

Itens analisados	Quantidade de livros	Percentual aproximado em relação ao total de livros pesquisados
1) Apresenta gráficos de polinômios no desenvolvimento da teoria.	14	31,1%
2) Interpreta geometricamente que as raízes reais de um polinômio são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico do polinômio com o eixo x.	15	33,3%
3) Apresenta exercícios em que o aluno precise identificar graficamente as raízes reais de um polinômio.	11	24,4%
4) Faz a interpretação geométrica das raízes reais de um polinômio em relação às suas multiplicidades par ou ímpar.	03	6,7%
5) Apresenta exercícios em que o aluno precise identificar graficamente se a multiplicidade da raiz é par ou ímpar.	11	24,4%

Tabela 2.1: Análise de livros didáticos

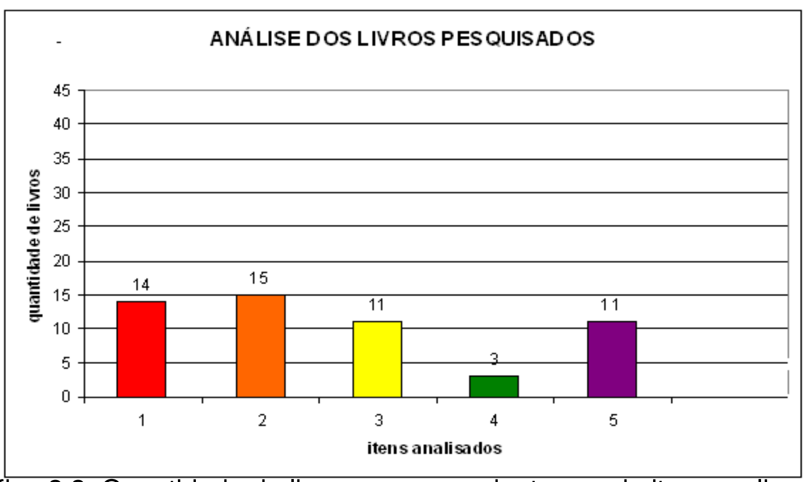


Gráfico 2.2: Quantidade de livros correspondente a cada item analisado

Vale ressaltar que, dos 11 livros que apresentavam exercícios em que o aluno precisava identificar graficamente as raízes reais de um polinômio, sete (aproximadamente 63%) não faziam referência à interpretação geométrica de que as raízes reais de um polinômio são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico do polinômio com o eixo x, cujas edições eram de 1991(1 livro), 1993(1 livro), 1997(1 livro),1999(1 livro), 2001(2 livros) e 2005(1 livro).

Dos 11 livros que apresentavam exercícios, em que o aluno precisava identificar graficamente se a multiplicidade de uma raiz é par ou ímpar, dez (aproximadamente 91%) não faziam referência, no desenvolvimento da teoria, à interpretação geométrica das raízes reais de um polinômio em relação as suas multiplicidades par ou ímpar, cujas edições eram de 1991(1 livro), 1993(2 livros), 1995(1 livro), 1997(1 livro), 1999(1 livro), 2001(2 livros) e 2005(2 livros).

No apêndice VIII, encontram-se exemplos de exercícios presentes nos livros do Ensino Médio, em que o aluno precisa identificar graficamente as raízes reais de um polinômio ou se a multiplicidade da raiz é par ou ímpar.

O fato de encontrarmos livros que não apresentaram gráficos de polinômios no desenvolvimento da teoria, muito menos interpretações geométricas das raízes reais e de suas multiplicidades e que inseriam em suas listas de exercícios questões em que o aluno precisasse de tal teoria para resolvê-las, nos causou estranheza e nos incomodou.

> [...] o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe. Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amiga e confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual (LIMA, p.1, 2001).

Atualmente com o desenvolvimento de recursos tecnológicos e a acessibilidade a *softwares* gráficos que traçam gráficos com precisão e qualidade, não há mais desculpas para que estes não sejam explorados por alunos, professores e autores de livros didáticos no tratamento de tópicos relevantes sobre o ponto de vista geométrico.

Nos anos de 1980, a introdução de instrumentos gráficos, de fácil manejo, acarretou outra revolução na forma de estudar matemática. Com esta nova tecnologia, podemos estabelecer e analisar modelos matemáticos de forma muito mais simples do que anteriormente (LARSON, HOSTETLER, EDWARDS, p.24, 1998).

3- COMENTÁRIOS DAS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES

3.1- Aplicação das atividades para os alunos da Licenciatura em Matemática.

Aplicamos as atividades como forma de oficina para os alunos dos 1º, 3º, 5º e 7º períodos da Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino federal a fim de validá-las para, posteriormente, serem aplicadas a alunos do Ensino Médio.

A primeira aplicação ocorreu no dia 27 de junho de 2009, para 13 licenciandos que cursavam o 1º período ou o 3º período, durante 4 horas. Estes alunos não haviam estudado polinômios na Licenciatura.

A segunda aplicação para 9 licenciandos dos 5º ou 7º períodos ocorreu nos dias 29 de junho e 27 de julho de 2009, perfazendo um total de 4 horas. Os alunos que participaram dessa aplicação já haviam estudado polinômios na Licenciatura.

As atividades foram aplicadas em um Laboratório de Informática de uma Instituição de ensino, tendo um computador disponível para cada aluno. Os alunos estavam dispostos lado a lado, o que facilitou a interação entre eles.

3.1.1- Aplicação das atividades para os alunos dos 1º e 3º períodos

Os alunos receberam, inicialmente, um questionário com perguntas que se encontram na figura 3.1.

QUESTIONÁRIO

1- Você já estudou polinômios?
( ) Sim ( )Não
1.1- Em que nível(is) de ensino?
( ) Fundamental ( ) Médio ( )Superior
Outros cursos: ____________________

2- Caso tenha estudado polinômios, marque os tópicos abordados.
( ) operações com polinômios
( ) grau de um polinômio
( ) raiz de um polinômio
( ) multiplicidade de uma raiz
( ) representação gráfica de polinômios
( ) interpretação geométrica das raízes de um polinômio

VOCÊ É ALUNO DO: ( ) PRIMEIRO PERÍODO
( ) TERCEIRO PERÍODO
( ) QUINTO PERÍODO
( ) SÉTIMO PERÍODO

Figura 3.1: Questionário

Analisando os questionários, constatamos que, dos 13 alunos participantes, dois não tinham estudado polinômios, conforme mostra o gráfico 3.1.

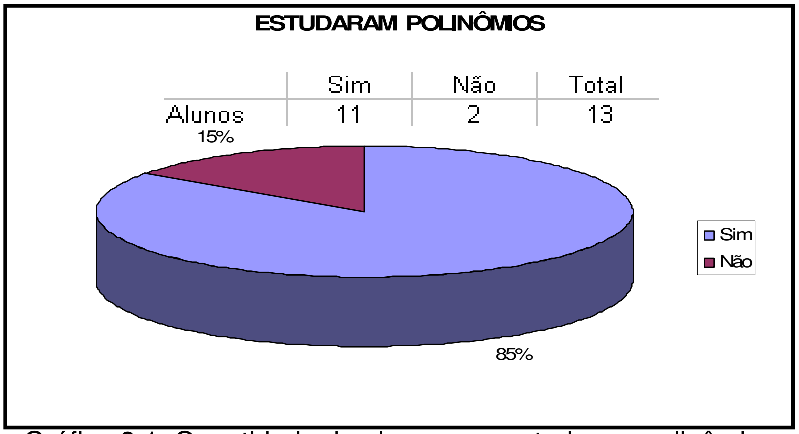


Gráfico 3.1: Quantidade de alunos que estudaram polinômios

O gráfico 3.2 mostra em que nível de ensino os alunos estudaram polinômios. Ressaltamos que, dos 11 alunos que estudaram polinômios, dois declararam que o estudo ocorreu tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

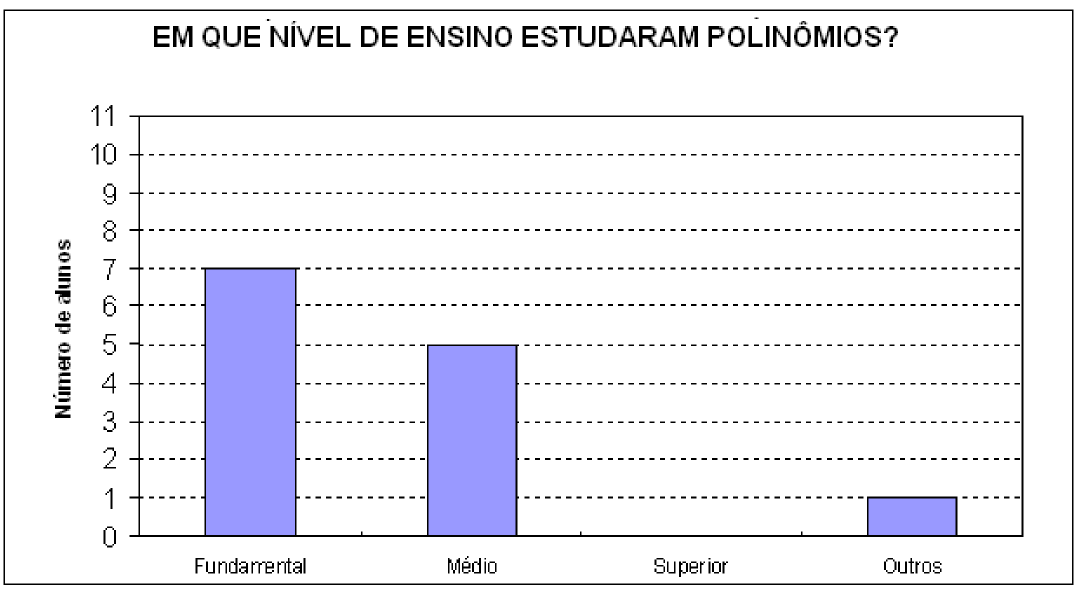


Gráfico 3.2: Nível de ensino que estudaram polinômios

Ao estudarem polinômios, os 11 alunos marcaram no questionário alguns tópicos abordados durante o estudo. O gráfico 3.3 apresenta os tópicos abordados e a quantidade de alunos referente a cada um deles.

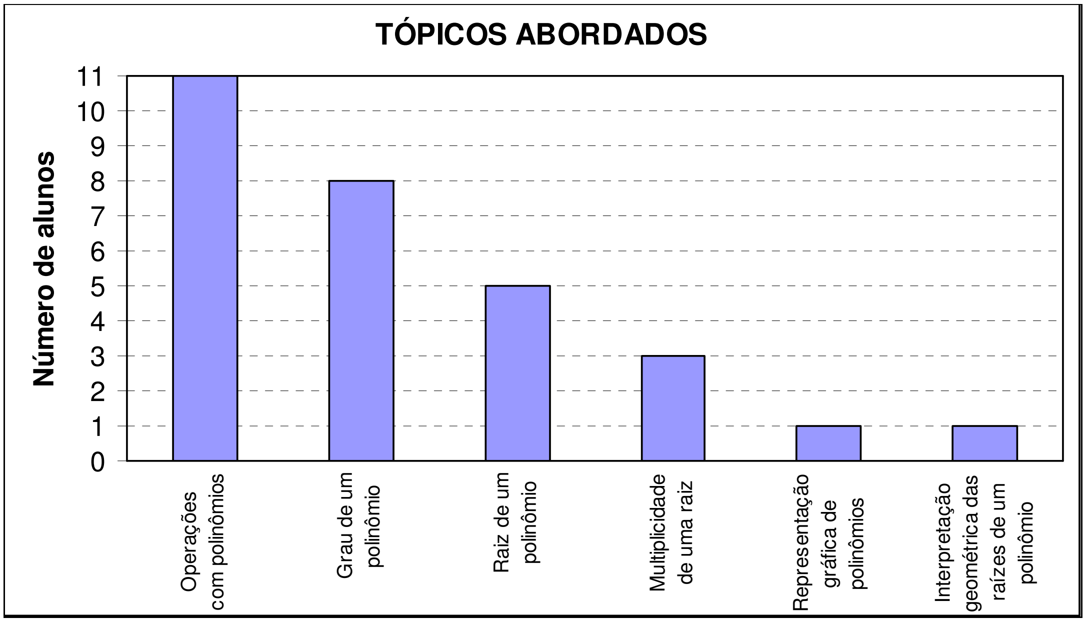


Gráfico 3.3: Tópicos abordados

Os dados demonstram que alguns tópicos foram pouco abordados para estes alunos. Dentre eles, destacamos raiz de polinômios e multiplicidade de uma raiz, ficando quase esquecidos os tópicos relacionados à representação gráfica e à interpretação geométrica das raízes de polinômios. Hoje em dia, com o auxílio da tecnologia, esses tópicos poderiam ser abordados de forma dinâmica e interessante. Larson, Hostetler e Edwards (1998) destacam que a introdução de instrumentos gráficos, de fácil manuseio, provocou uma revolução na forma de estudar Matemática. De acordo com Hartzler (1982) e Nicely (1985), apud Eisenberg e Dreyfus (1994), nos últimos vinte anos parece ter havido, no currículo da escola média, uma nítida redução da ênfase nos tópicos relacionados com polinômios.

Após a aplicação dos questionários, os alunos receberam um material contendo definições e teoremas (Apêndice II) necessários ao desenvolvimento do estudo. Estes foram apresentados em *Power Point* e, durante a exposição oral, alguns exemplos foram dados para facilitar a compreensão dos alunos.

Dando continuidade ao trabalho, apresentamos o *software* Winplot (Apêndice III), por meio de um tutorial (Apêndice IV) desenvolvido no *software*

Wink[1]. À medida que os comandos eram apresentados pelo tutorial, os alunos tinham a oportunidade de executá-los no Winplot.

Todo o trabalho feito, inicialmente, teve o objetivo de fornecer um suporte teórico para que os alunos desenvolvessem a Atividade I.

A seguir, cada aluno recebeu a Atividade I (Apêndice V) e um caderno de respostas (Apêndice VI). A Atividade I apresentava polinômios com coeficientes reais, com o objetivo de identificar graficamente as raízes reais de um polinômio e também estudar o aspecto gráfico nas vizinhanças das raízes reais de multiplicidade par ou ímpar, tendo o *software* Winplot como instrumento de apoio. Anton (2000) afirma que no que diz respeito a polinômios, há uma estreita relação entre a multiplicidade de uma raiz e o comportamento do gráfico nas suas vizinhanças.

A primeira questão da Atividade I era composta de polinômios com raízes reais que apresentavam multiplicidade ímpar. Após encontrar as raízes, suas respectivas multiplicidades, representar cada polinômio no Winplot e esboçar no caderno de respostas o gráfico visualizado no computador, foi pedido que os alunos analisassem os gráficos e as raízes reais encontradas de cada um dos polinômios desta questão e descrevessem o que observaram.

A seguir, temos algumas frases que expressam a observação feita pelos alunos.

"O gráfico corta o eixo x exatamente na raiz."

"A raiz pode ser observada no gráfico é só observar no eixo x onde o gráfico o corta."

Já a segunda questão da Atividade I era composta de polinômios com raízes reais que apresentavam multiplicidade par.

Como na primeira questão, os alunos encontraram as raízes, suas respectivas multiplicidades, representaram cada polinômio no Winplot e esboçaram no caderno de respostas o gráfico visualizado no computador. Ao analisarem os gráficos e as raízes reais encontradas de cada um dos polinômios desta questão, eles fizeram descrições conforme a seguir.

[1] *Software* basicamente destinado a apoiar a produção de tutoriais, que são formas de mostrar como utilizar determinado *software* ou *site.* BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. , 2008.

"As raízes encontradas continuam sendo o valor onde o gráfico corta o eixo x."

"A curva toca o eixo x na sua respectiva raiz."

"As raízes são onde elas tocam o eixo x. Todas as multiplicidades são pares."

"Novamente corta x nas raízes e todas multiplicidades são par."

Ao fazer a segunda questão, os alunos despertaram para o fato de que nesta as raízes apresentavam multiplicidade par e na primeira questão multiplicidade ímpar.

Nas figuras 3.2 e 3.3, temos os gráficos referentes aos polinômios das questões 1 e 2, respectivamente, traçados no Winplot e, posteriormente, esboçados pelos alunos no caderno de respostas.

Questão 1:

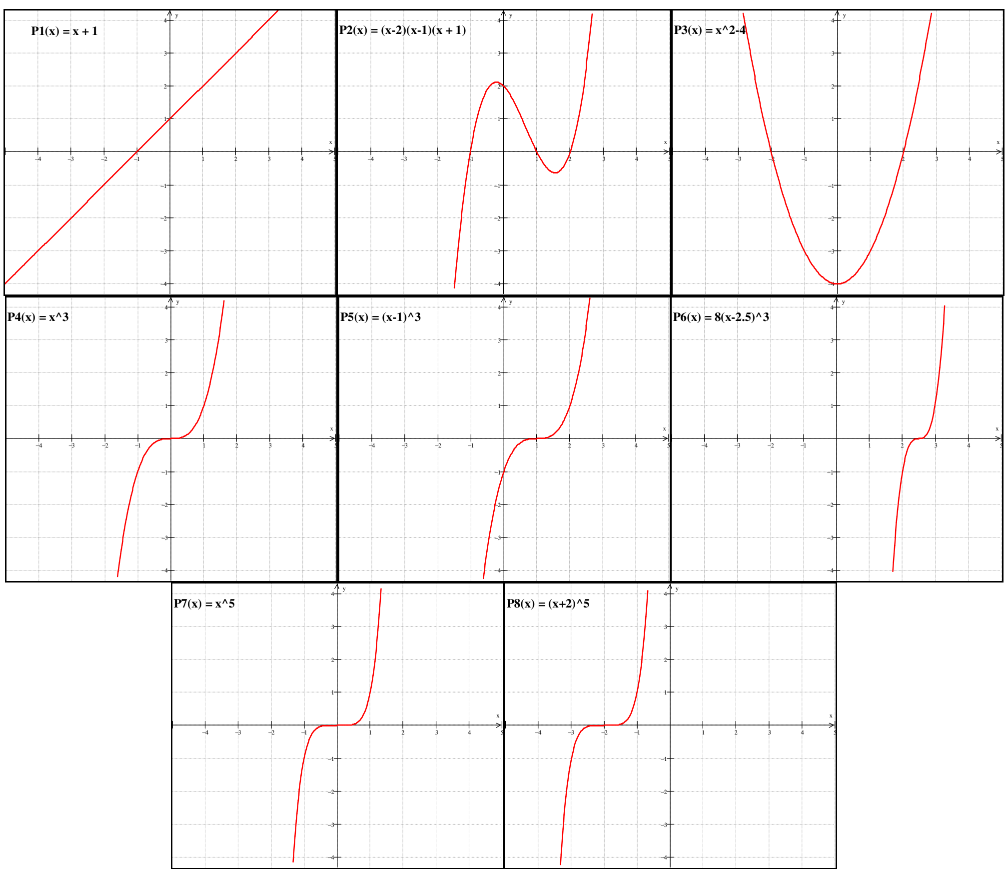


Figura 3.2: Gráficos da questão 1

Questão 2:

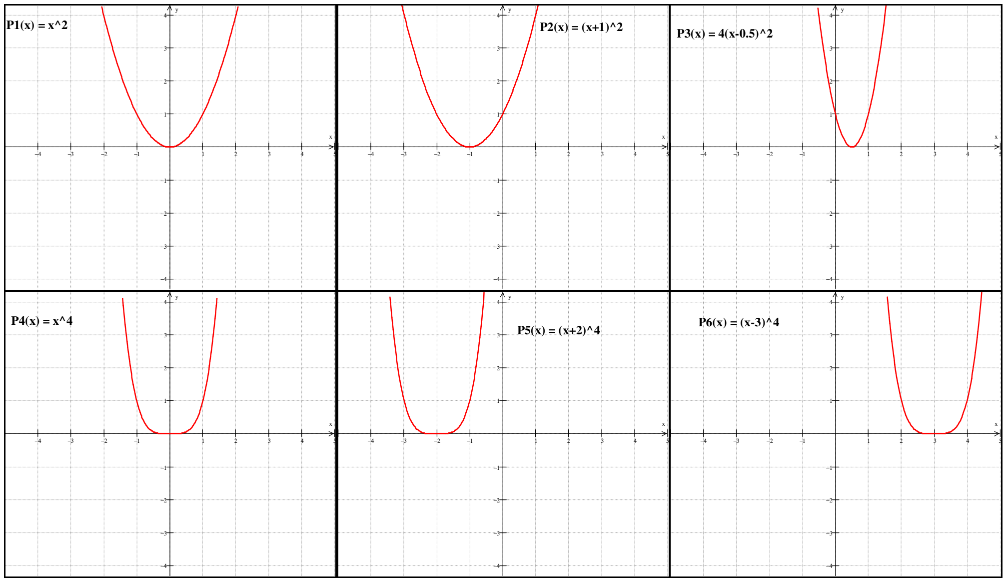


Figura 3.3: Gráficos da questão 2

A terceira questão pedia que se examinassem atentamente as intersecções de cada gráfico das questões 1 e 2 com o eixo das abscissas e observassem o aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar.

Os alunos observaram os gráficos referentes às questões 1 e 2, esboçados por eles, no caderno de respostas e então fizeram observações tais como:

“A multiplicidade par toca o eixo x e não atravessa e a multiplicidade ímpar toca o eixo x e atravessa.”

“Os gráficos com raízes de multiplicidade ímpar atravessam o eixo x, já os gráficos com raízes de multiplicidade par apenas tocam o eixo x e voltam.”

“Quando a multiplicidade é ímpar o gráfico corta o eixo x e quando a multiplicidade é par o gráfico toca o eixo x (encosta e volta).”

Ao pedir para que os alunos comentassem suas observações, percebemos que além das anteriores, alguns alunos comentaram que, quando as multiplicidades são pares, os gráficos se localizam acima do eixo x, apresentam concavidade voltada para cima e as imagens são sempre IR_+. Observamos que os exemplos dados na segunda questão propiciaram esta conclusão enganosa.

Pedimos, então, que fizessem a quarta questão, que apresentava exemplos de raízes de multiplicidade par e ímpar num único polinômio. Nesta era solicitada aos alunos a representação gráfica de cada polinômio com o auxílio do Winplot e a reprodução destes gráficos no caderno de respostas.

Na figura 3.4, temos os gráficos dos polinômios da 4.ª questão.

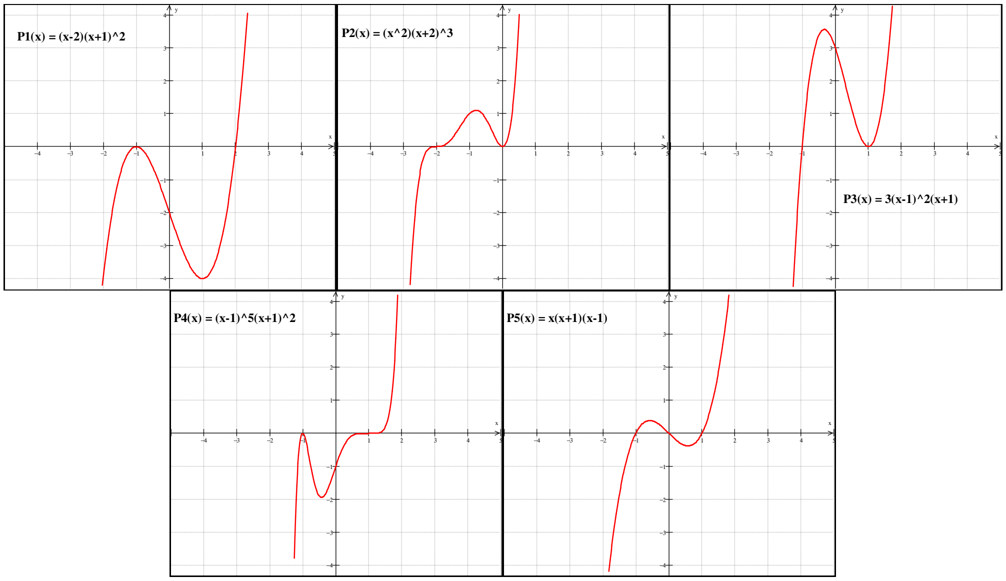


Figura 3.4: Gráficos da questão 4

Mais uma vez eles observaram o aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar. Ao observar os gráficos dos polinômios P_1 e P_4, os alunos perceberam que estavam enganados em relação à multiplicidade par, quando diziam que o gráfico estaria sempre acima do eixo x, apresentando concavidade voltada para cima e as imagens sempre IR_+.

Com o objetivo de formalizar as observações e conjecturas feitas pelos alunos, projetamos no quadro:

> Se a multiplicidade é par, o gráfico da função, nas proximidades da raiz, permanece de um só lado do eixo x.
>
> Se a multiplicidade é ímpar, o gráfico da função "atravessa" o eixo x.

CASTRUCCI, NETO, MENDONÇA, SMITH. Matemática. p.128. 2.º grau. v.3.s/d

Na figura 3.5, temos um exemplo de exercício dado pelos autores CASTRUCCI, NETO, MENDONÇA e SMITH, p.129.

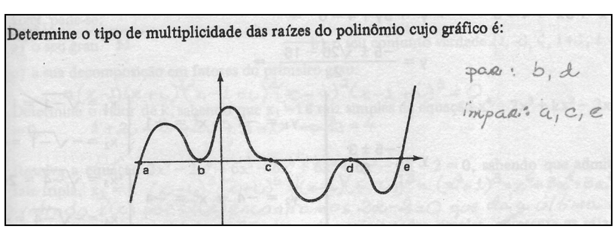


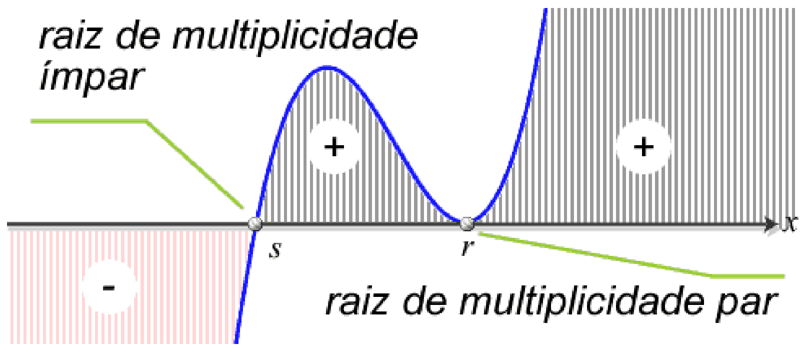
Figura 3.5: Exemplo de um exercício

Ainda complementamos:

Tendo o gráfico de uma função polinomial f no plano cartesiano podemos discutir algo sobre as raízes reais de f. Se houver intersecção do gráfico com o eixo Ox no trecho apresentado. É muito importante destacar que:

Se o sinal de f nas vizinhanças de uma raiz é o mesmo, então esta raiz tem multiplicidade par.

Se o sinal de f nas vizinhanças de uma raiz não é o mesmo, então esta raiz tem multiplicidade ímpar.



http://www.profcardy.com/cardicas/polinomio3.php. Acesso em 20/06/2009

Consideramos interessante comentar sobre o sinal nas proximidades das raízes de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar, visto que nenhum aluno fez esta observação.

As questões anteriores apresentavam polinômios na forma fatorada ou que pudessem ser fatorados facilmente, o que viabilizou encontrar as raízes reais e descobrir as suas multiplicidades, fundamentados teoricamente nas definições e teoremas (Apêndice II), que foram apresentados aos alunos inicialmente e serviram de material de consulta durante a aplicação das atividades.

A quinta questão apresentava polinômios que não estavam na forma fatorada. Pedimos que os representassem graficamente no Winplot e, a seguir, os esboçassem no caderno de respostas. A partir do gráfico, os alunos destacaram as raízes reais e identificaram se elas eram de multiplicidade par ou ímpar, considerando o aspecto gráfico na vizinhança das raízes. As questões anteriores propiciaram a observação e descoberta de fatos que puderam ser formalizados e conduziram os alunos à resolução correta desta questão, a partir da interpretação gráfica.

Os gráficos da questão 5, esboçados por um aluno no caderno de respostas e a identificação das raízes reais e de suas multiplicidades, em par ou ímpar, encontram-se na figura 3.6.

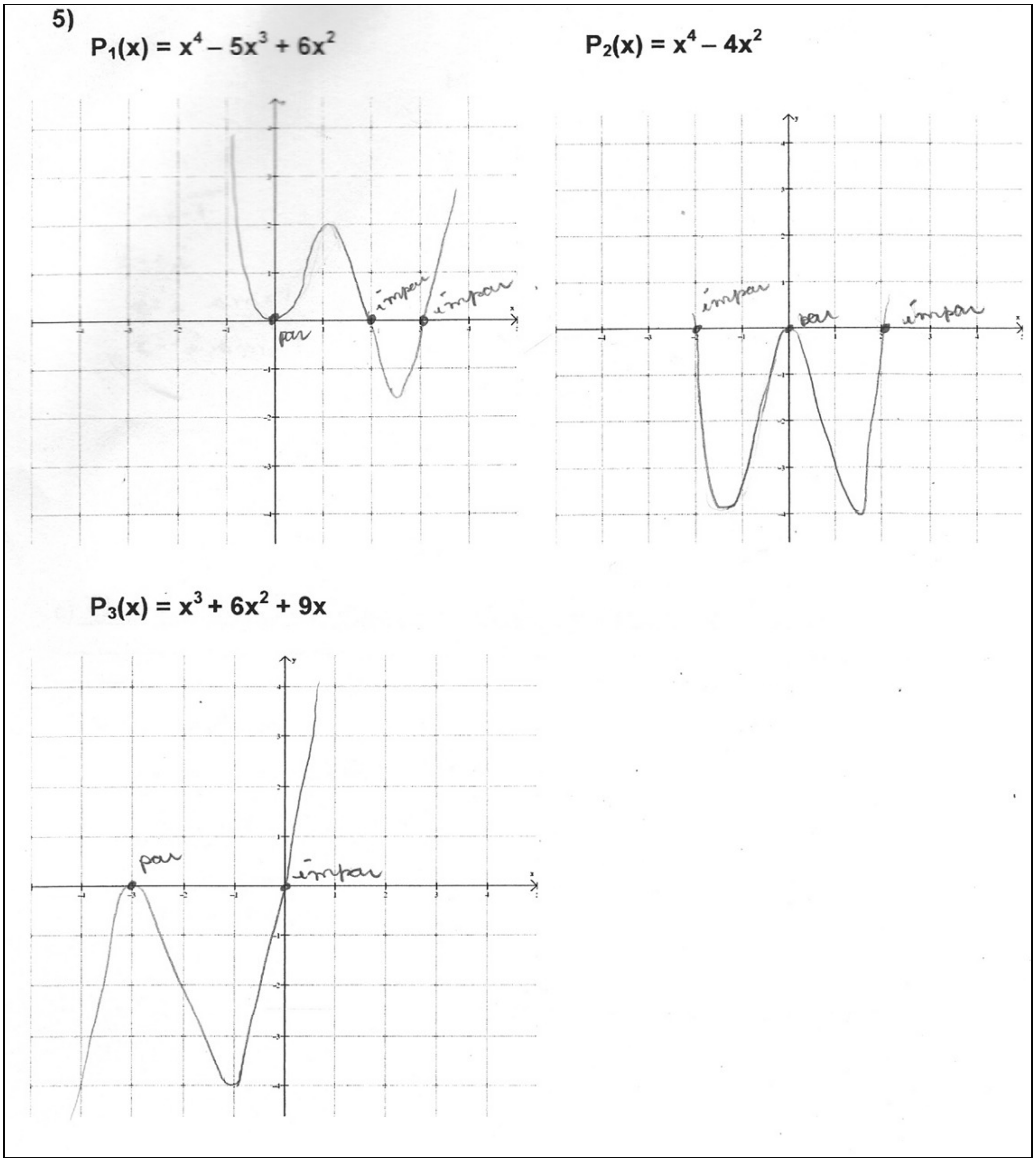


Figura 3.6: Esboço dos gráficos dos polinômios da questão 5

A sexta questão apresentava cinco polinômios de coeficientes reais e raízes complexas. No item a, foi pedido que os alunos determinassem, no conjunto dos números complexos, as raízes de cada polinômio e suas respectivas multiplicidades. Este item foi resolvido pelos alunos sem maiores problemas e ao encontrarem x = $\pm\sqrt{-1}$ identificaram que x = $\pm i$ (fato revisado no início da aula).

A seguir, os alunos representaram graficamente cada polinômio no computador com o auxílio do programa Winplot e reproduziram no caderno de respostas o esboço de cada gráfico.

Na figura 3.7, temos os gráficos relativos aos polinômios da questão 6:

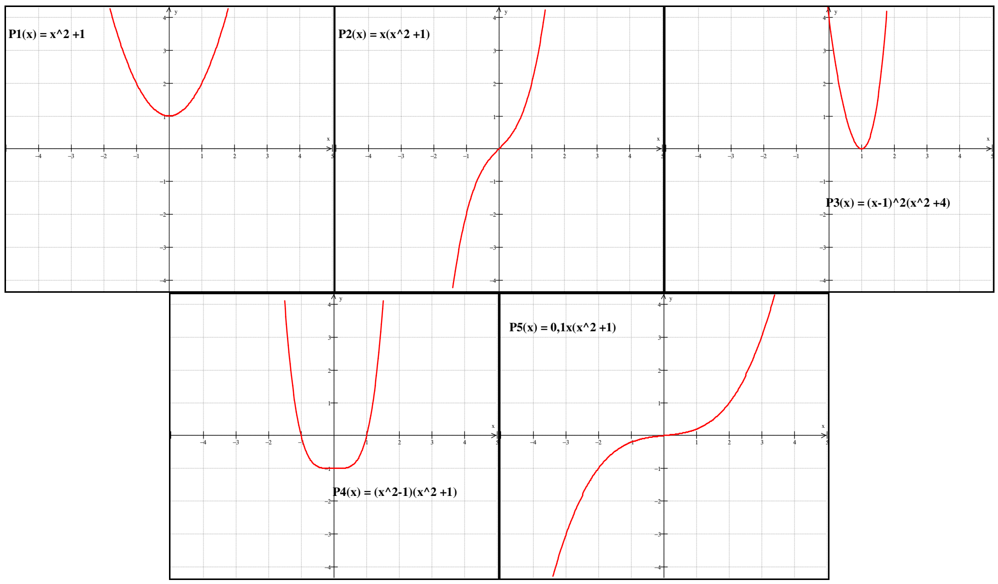


Figura 3.7: Gráficos da questão 6

No item c, foi pedido que os alunos analisassem o gráfico esboçado e as raízes encontradas e descrevessem o que observavam.

A seguir, temos algumas observações feitas pelos alunos:

Em relação ao polinômio $P_1(x) = x^2 + 1$:

"Não tem raízes reais e o gráfico não tocou o eixo x."

"As raízes não pertencem a IR, logo não toca o eixo x."

"O polinômio só toca o eixo x nas raízes reais."

"Não possui raízes reais por isso não tocou o eixo x."

"O gráfico não corta nem toca o eixo x, pois não existem raízes reais."

Em relação ao polinômio $P_2(x) = x(x^2 + 1)$:

"O gráfico só tocou o eixo Ox na raiz real."

"Há somente uma raiz real 0. Portanto só intersecta o eixo x no zero."

Alguns alunos fizeram observações como *"possui uma raiz real e duas complexas e o gráfico só intersecta o eixo x na raiz real".* Chamamos a atenção dos alunos que todas as raízes encontradas para este polinômio eram números complexos, visto que todo real é complexo, porém os números $\pm i$ são complexos não reais.

Em relação ao polinômio $P_3(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$:

"O gráfico toca na raiz um, pois é uma raiz real e nas outras duas ($\pm 2i$*) não toca, pois são imaginárias."*

"O gráfico toca o eixo x apenas na raiz real".

A partir da análise do que foi pedido na questão 6 os alunos observaram mais uma vez que as abscissas dos pontos de intersecção de cada gráfico com o eixo x correspondem às raízes reais dos polinômios e a essa observação incorporaram o fato de que as raízes complexas não reais não aparecem no gráfico.

As observações feitas pelos alunos, no que diz respeito ao aspecto gráfico nas vizinhanças das raízes reais de multiplicidades par ou ímpar, continuaram sendo confirmadas.

Notamos que em relação ao aspecto gráfico nas vizinhanças das raízes de multiplicidade par, os alunos usaram muito os termos "tocar no eixo" no sentido de não atravessar o eixo x e "cortar o eixo" como atravessar o eixo x.

Os alunos participaram da atividade I ativamente, questionando e respondendo a todas as indagações e sempre solicitando ajuda dos colegas e nossa, quando necessário.

Continuando a oficina, foi apresentado um tutorial referente à Atividade II (Apêndice XII), que foi desenvolvida diretamente com o *software* Winplot. O tutorial teve o objetivo de apresentar os comandos necessários para o desenvolvimento da atividade.

No Winplot, os alunos utilizaram o recurso Adivinhar, que possibilitava encontrar a equação de um polinômio a partir da análise do gráfico que aparecia na tela ao selecionar Equa/Novo exemplo. Este gráfico representava sempre um polinômio cujo grau variava de 1 a 8, conforme escolhido pelos alunos anteriormente, na janela habilitar tipos. Vale ressaltar que os gráficos que surgiam ao selecionar Novo exemplo eram de funções polinomiais que possuíam somente raízes inteiras, opção esta do desenvolvedor do *software*.

Ao "adivinhar" cada equação correspondente ao gráfico que aparecia na tela, percebemos que os alunos se empolgavam e partiam para outros exemplos. Após digitar a equação, o software indicava "perfeito" caso o aluno tivesse acertado, caso contrário aparecia "tentativa outra vez?" e o aluno poderia repensar sua resposta, tendo outras chances.

Ao observar o aspecto gráfico nas proximidades das raízes, os alunos digitavam as equações na forma fatorada, utilizando o “Teorema da decomposição” e os conhecimentos adquiridos sobre a multiplicidade de uma raiz.

Percebemos que os alunos conseguiam, a partir da análise gráfica, encontrar as raízes e suas respectivas multiplicidades, porém apresentaram dificuldades para determinar o coeficiente dominante do polinômio quando este era diferente de um.

Ao identificarmos esta dificuldade, pedimos para que os alunos observassem o ponto de intersecção de cada curva com o eixo das ordenadas, este fornecia o valor de y quando x = 0.

Sendo assim, eles escreviam a equação na forma fatorada e substituíam o x por zero e p(x) por p(0) que era o valor de y do ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e achavam o valor do coeficiente dominante. Na figura 3.8, temos um exemplo que ilustra esta situação.

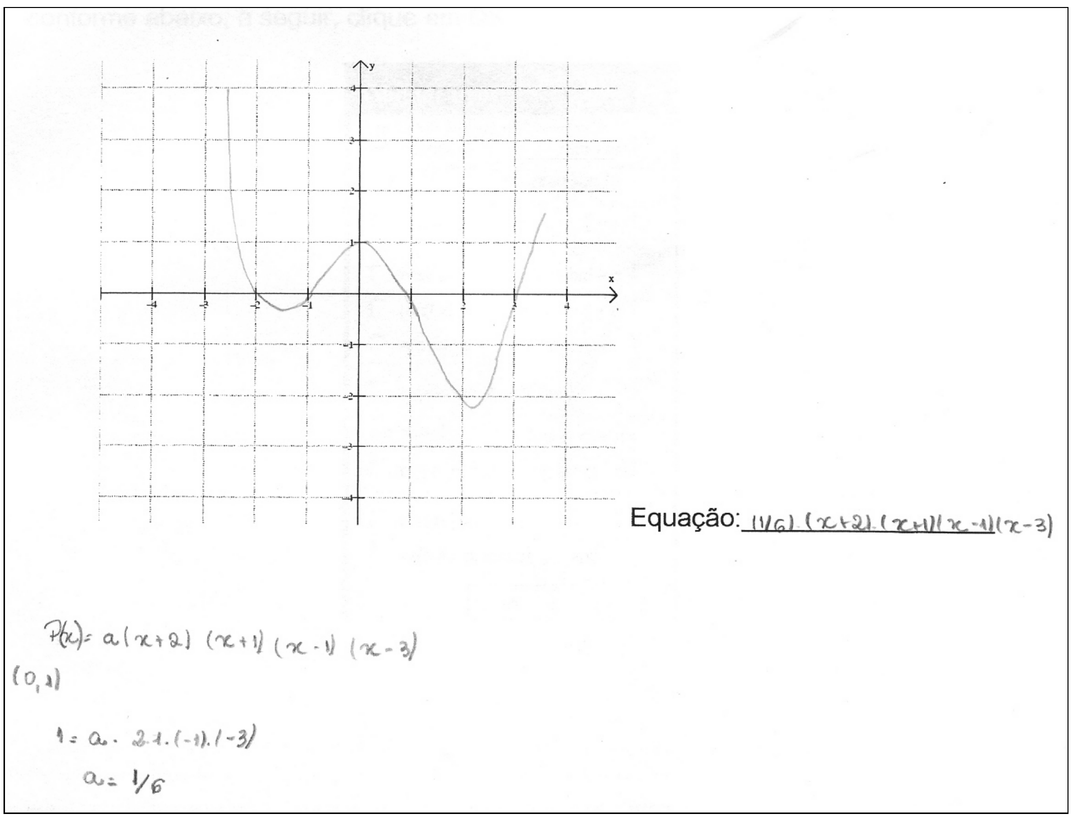


Figura 3.8: Exemplo ilustrativo

Esta atividade possibilitou ao aluno aperfeiçoar, aplicar e consolidar conhecimentos adquiridos anteriormente.

Após a atividade II, os alunos responderam uma lista de cinco exercícios (Apêndice VIII), envolvendo o conteúdo trabalhado. Estes exercícios foram escolhidos a partir de uma pesquisa em livros didáticos do Ensino Médio e alguns apresentavam questões de vestibular. Todo o trabalho desenvolvido anteriormente possibilitou que os alunos chegassem às respostas sem maiores dificuldades.

Finalizando, pedimos aos alunos que relatassem as contribuições que a oficina lhes proporcionou e dessem sugestões.

Todos os alunos que participaram da oficina nos deixaram comentários favoráveis à aplicação desse trabalho, o que nos proporcionou confiança na aplicação dessas atividades ao nosso público alvo, os alunos do Ensino Médio.

Destacamos, a seguir, alguns relatos dos alunos sobre as contribuições proporcionadas pela oficina.

Foi a 1ª vez que estudei C, achei interessante. Já tinha visto polinômios antes, mas de forma menos aprofundada. A utilização do Winplot facilitou a compreensão do conteúdo. Aprendi bastante sobre polinômios em pouco tempo.

Contribuiu para refletir melhor sobre o aprender com a tecnologia, aprender fazendo. Sem falar no conhecimento que nos acrescentou não só sobre polinômios, mas como em outra matéria que ter um pouco haver com multiplicidades, gráficos e equações.

Raciocínio mais rápido na análise dos gráficos;

Tudo que foi dado (menos números complexos) eu não sabia, então contribui muito para meu aprendizado na Faculdade, pois quando eu der essa matéria já terei uma boa noção do que se trata. E eu também, não sabia que todo número real era um número complexo.

> a oficina me proporcionou muitas contribuições
> pois, não tinha aprendido polinômios dessa maneira.
> e não sabia também que no gráfico só cortava o
> eixo x quando a raiz fosse real

Destacamos, a seguir, algumas sugestões deixadas pelos alunos.

> Sugestão → ótima apresentação, principalmente com
> a ajuda do software,

> Pode haver mais oficinas durante o o curso, pois proporcio-
> nou um bom aprendizado tanto para nós que ouvimos quanto
> para quem ensinou.

Fotografia 3.1: Aplicação das atividades para alunos dos 1.º e 3.º períodos

3.1.2 - Aplicação das atividades para os alunos dos 5º e 7º períodos

No dia 29 de junho de 2009, iniciamos a aplicação das atividades para os nove alunos que estavam cursando o 5.º período ou o 7.º período da Licenciatura em Matemática.

Inicialmente, esses alunos responderam o mesmo questionário (Apêndice I) aplicado aos alunos dos 1º e 3º períodos.

Como foi dito anteriormente, esse grupo de alunos já havia estudado Polinômios na Licenciatura e isso pôde ser constatado no questionário, no qual todos relataram ter visto Polinômios no Ensino Superior e apenas um aluno relatou ter visto o assunto tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

No gráfico 3.4, destacamos os tópicos estudados, relacionados a polinômios, e a quantidade de alunos correspondente. Por meio do gráfico, percebe-se que dentre os alunos pesquisados, poucos declararam ter visto representação gráfica e interpretação geométrica das raízes de um polinômio, fato que também foi observado em relação aos alunos dos 1.º e 3.º períodos.

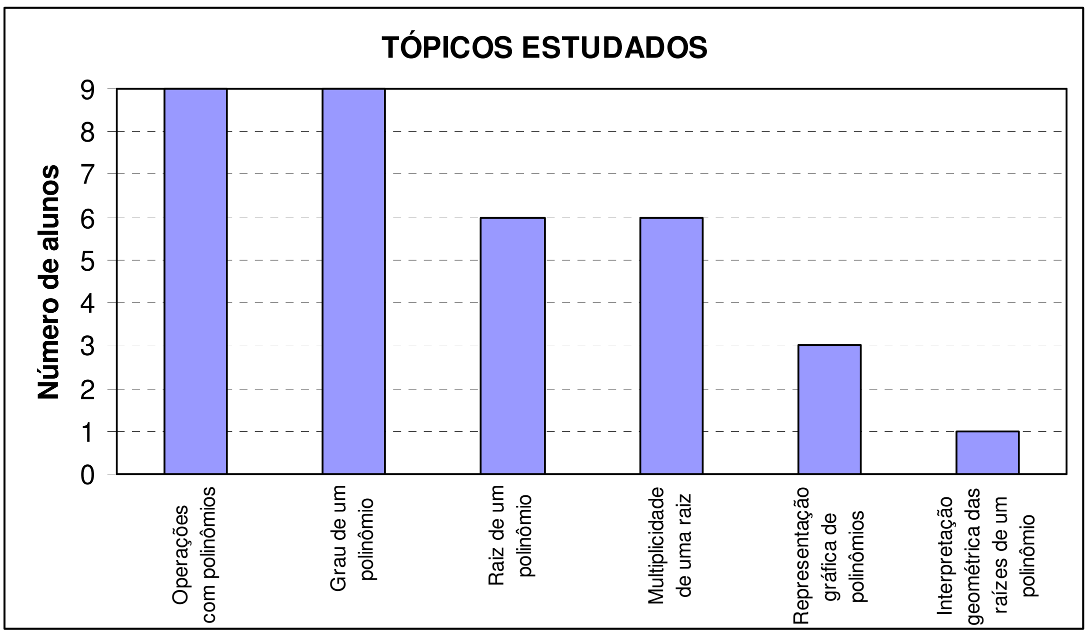


Gráfico 3.4: Tópicos estudados

Como tínhamos conhecimento de que este grupo de alunos já havia estudado polinômios e também trabalhado com o *software* Winplot, não fizemos a apresentação em Power Point, mas disponibilizamos para eles as definições e teoremas (Apêndice II) e o material contendo as informações de como representar um polinômio no *software* Winplot (Apêndice III) para que pudessem consultar, em caso de dúvida.

Sendo assim, iniciamos a oficina com a Atividade I, a mesma que foi aplicada para os alunos dos 1.º e 3.º períodos.

As duas primeiras questões foram resolvidas pelos alunos sem maiores dificuldades. Eles observaram que a primeira questão era composta apenas de polinômios que apresentavam raízes de multiplicidade ímpar e a segunda de polinômios que tinham raízes de multiplicidade par. Também perceberam que as raízes reais encontradas são as abscissas dos pontos de intersecção de cada gráfico com o eixo x.

Ao analisarem o aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar, fizeram algumas observações, como a que se encontra a seguir:

"Na questão 1 as raízes são de multiplicidade ímpar e os gráficos cortam (atravessam) o eixo das abscissas nas raízes do polinômio e na questão 2 as raízes são de multiplicidade par e os gráficos tocam (sem atravessar) o eixo das abscissas na raiz do polinômio."

Em relação à segunda questão, alguns alunos comentaram que todos os gráficos apresentavam concavidade voltada para cima e sugeriram que colocássemos gráficos também com concavidade voltada para baixo. Achamos pertinente esta observação, visto que na aplicação para os 1.º e 3.º períodos este fato gerou algumas dúvidas que foram esclarecidas e comentadas anteriormente.

Ao resolverem a quarta questão, eles puderam observar mais uma vez o aspecto gráfico nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e ímpar.

Com o objetivo de consolidar as observações feitas pelos alunos deste grupo, também foram projetadas no quadro as transcrições dos professores Castrucci, Neto, Mendonça, Smith e Cardy, tais como se encontram nas páginas 30 e 31 dessa monografia.

Em suas anotações, na folha de respostas, nenhum aluno comentou a respeito do sinal do polinômio nas proximidades das raízes de multiplicidade par ou de multiplicidade ímpar, porém ao chamar a atenção deles para este fato, os alunos acharam que ao aplicarmos esta atividade para o Ensino Médio, deveríamos incluir uma questão que pudesse despertar o aluno para esta observação. Achamos pertinente este questionamento e falamos para eles que iríamos fazer as modificações sugeridas.

Na quinta questão, foram dados alguns polinômios que não estavam na forma fatorada. Os alunos traçaram seus gráficos no Winplot, com o objetivo de analisar o aspecto gráfico nas vizinhanças das raízes e identificar se estas apresentavam multiplicidade par ou ímpar. Esta questão, baseada na interpretação gráfica, foi resolvida corretamente pelos alunos.

Finalizando a atividade I, os alunos responderam à sexta questão que apresentava cinco polinômios de coeficientes reais e raízes complexas.

Ao observar o gráfico de cada polinômio, traçado com o auxílio do *software* Winplot, os alunos mais uma vez confirmaram o aspecto do gráfico nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e ímpar e também perceberam que as raízes complexas não reais não aparecem no gráfico.

No dia 27 de julho de 2009, demos continuidade à aplicação das atividades.

Iniciamos o segundo momento desta oficina apresentando o tutorial da Atividade II, com o objetivo de mostrar para os alunos os comandos do Winplot, necessários para a realização dessa atividade. Vale ressaltar que a Atividade II foi a mesma que aplicamos para os alunos dos 1.º e 3.º períodos.

Esta atividade teve como objetivo encontrar a equação de um polinômio, a partir da análise gráfica. Ao observar o aspecto gráfico nas proximidades das raízes, os alunos digitavam no Winplot as equações na forma fatorada, utilizando os conhecimentos adquiridos anteriormente.

Assim como os alunos dos 1.º e 3.º períodos, os alunos dos 5.º e 7.º períodos também apresentaram dificuldades para determinar o coeficiente dominante do polinômio quando este era diferente de um. Sendo assim, pedimos para que eles observassem, no gráfico, o ponto de intersecção de cada curva com o eixo das ordenadas, pois neste temos o valor de y quando $x = 0$. Dessa forma o termo dominante era encontrado ao substituir x por zero e p(x) por $y = p(0)$ na equação fatorada.

A cada resposta correta, os alunos se sentiam motivados a trabalhar com outros exemplos.

Dando continuidade ao trabalho, os alunos responderam com muita tranquilidade a uma lista de cinco exercícios (Apêndice VIII) envolvendo o conteúdo trabalhado. Esses exercícios foram os mesmos aplicados aos alunos dos 1.º e 3.º períodos.

Os alunos destacaram as contribuições que a oficina lhes proporcionou. Vejamos, a seguir, algumas delas.

Esta oficina me proporcionou visualizar graficamente as raizes dos polinômios, a observar que quando a multiplicidade é ímpar o gráfico corta e atravessa o eixo x e quando é par, não atravessa

Proporcionou a descobrir algumas coisas que passaram despercebidos nas aulas de polinômios e nós ajudou a recordar o conteúdo

além de obter novos conhecimento, ou seja, interagindo a informática com o estudo de polinômio e numeros complexos, serviu de preparação para fundamentos IV

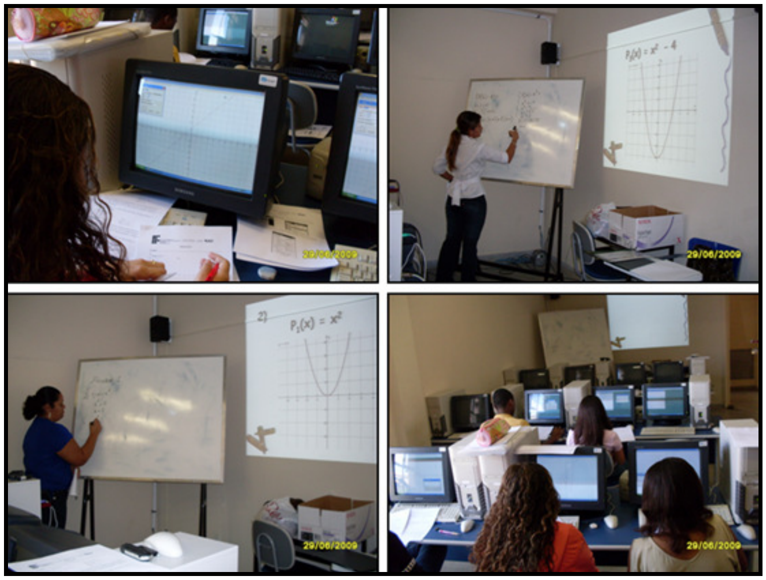
Me proporcionou um aprendizado, de maneira mais fácil, para observar graficamente os polinômios, principalmente eu que tenho um pouco de dificuldade em gráficos. É também uma forma fácil de explicar para o público alvo.

Esta oficina me proporcionou um aprofundamento no estudo de raízes de polinômios. Até então quando estudei raízes de polinômios não tive um contato com o software winplot.

A seguir, temos algumas sugestões dadas pelos alunos.

A oficina foi muito boa, as explicações foram claras e só acho que na parte da atividade 1, já que utilizamos o software Winplot não haveria tanta necessidade de constrUir os gráficos na folha, já que o gráficos já foram construidos no computador.

O trabalho está bom, as atividades foram bem selecionadas e as integrantes foram atenciosas e colaboraram bastante



Fotografia 3.2: Aplicação das atividades para alunos dos 5.º e 7.º períodos.

3.2- Aplicação das atividades para os alunos do Ensino Médio.

Após o teste exploratório aplicado aos alunos da Licenciatura, fizemos as modificações necessárias e aplicamos as atividades reformuladas para alunos da terceira série do Ensino Médio nos dias 13 e 14 de novembro de 2009, com duração de 2 horas e 3 horas, respectivamente, perfazendo um total de 5 horas.

As atividades foram desenvolvidas em um Laboratório de Informática, tendo um computador disponível para cada aluno, porém estes estavam posicionados lado a lado, o que proporcionou um trabalho integrado e participativo.

Participaram dessa aplicação 14 alunos que já haviam estudado polinômios na série a qual estavam cursando.

Solicitamos à professora da turma que nos relatasse os tópicos abordados sobre polinômios. Ela nos informou que os alunos haviam estudado operações com polinômios, grau de um polinômio, raiz de um polinômio e multiplicidade de uma raiz, porém não tinham visto representação gráfica de polinômios e interpretação geométrica das raízes. Pesquisamos o livro adotado e este também não apresentava os dois tópicos não abordados pela professora, ao estudar polinômios.

Iniciamos o primeiro dia de aplicação entregando a cada aluno um envelope contendo todas as atividades que seriam desenvolvidas.

Mesmo sabendo que os alunos haviam estudado polinômios recentemente, fizemos uma apresentação em Power Point das definições e teoremas (Apêndice II) necessários ao desenvolvimento do nosso estudo. Para melhor entendimento dos alunos, a cada teorema e definição apresentados, alguns exemplos foram dados.

Os alunos participaram ativamente dessa etapa e, quando surgiam dúvidas, estes não deixavam de tirá-las, o que foi muito importante, pois a compreensão dos teoremas e definições era de fundamental importância na resolução das atividades posteriores.

Continuando a aula, apresentamos em html um tutorial desenvolvido no *software* Wink: Como representar um polinômio com o auxílio do Winplot (Apêndice IV). Esse material bem como as definições e teoremas foram entregues aos alunos para que os mesmos pudessem ser consultados, caso houvesse necessidade.

Após, pedimos para que os mesmos iniciassem a Atividade I (Apêndice IX), na qual apresentamos polinômios de coeficientes reais com o objetivo de identificar graficamente as raízes reais de um polinômio e também estudar as implicações geométricas da multiplicidade de uma raiz. Essa atividade é composta por seis questões, nas quais exploram-se a determinação de raízes e suas respectivas multiplicidades, a representação gráfica de polinômios com o auxílio do *software* Winplot, a identificação das raízes reais graficamente, a análise do aspecto do gráfico do polinômio nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar e ainda a análise do sinal do polinômio nas proximidades das raízes reais. As resoluções e observações dessa atividade foram registradas pelos alunos em um caderno de respostas (Apêndice X).

Em função das sugestões e observações resultantes do teste exploratório, fizemos algumas alterações na Atividade I. A Atividade I aplicada no teste exploratório encontra-se no Apêndice V e a Atividade I, reformulada, e que foi aplicada para os alunos do Ensino Médio está no Apêndice IX.

A questão 1 apresentava oito polinômios com raízes reais de multiplicidade ímpar.

Inicialmente, alguns alunos apresentaram dificuldade para achar as raízes do polinômio $P_2(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$. Eles queriam aplicar a propriedade distributiva. Explicamos que, ao fazer isso, encontrariam um polinômio do 3.º grau e que seria mais simples lembrar que um produto é nulo se, e somente se, um dos seus fatores se anula. Sendo assim, eles retomaram a equação $(x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$ e escreveram $x - 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$, encontrando $x = 2$ ou $x = 1$ ou $x = -1$, que são as raízes do polinômio, todas de multiplicidade 1, ou seja, multiplicidade ímpar.

Após determinar as raízes reais de cada polinômio, identificar se essas são de multiplicidade par ou ímpar e observar cada polinômio representado no Winplot, os alunos analisaram as intersecções de cada gráfico com o eixo x e as raízes reais dos polinômios e fizeram as observações:

"As intersecções são exatamente as raízes das equações, ou seja, os pontos em que o gráfico toca no eixo x".

"Em todos os gráficos, as raízes se localizam nos mesmos pontos das intersecções".

"O ponto de intersecção é igual à raiz".

"De acordo com o que foi observado nos gráficos as intersecções são iguais as raízes dos polinômios".

"As raízes são os pontos em que o eixo x é cortado".

"As raízes são as intersecções dos gráficos com o eixo x".

"As intersecções são sempre nos mesmos pontos das raízes".

Os alunos não apresentaram dificuldades na resolução da questão 2, que apresentava apenas polinômios com raízes de multiplicidade par.

Um aluno, ao representar graficamente o polinômio $P_3(x) = 4(x-0{,}5)^2$, representou também o polinômio $P(x) = (x-0{,}5)^2$ e percebeu que seus gráficos intersectaram o eixo das abscissas em $x = 0{,}5$ e que o gráfico de $P_3(x) = 4(x-0{,}5)^2$ ficou mais "fechado", portanto o número 4 interferiu na abertura da parábola. Um outro aluno falou: *"o número 4 não alterou em nada, o gráfico continuou a tocar o eixo x no valor da raiz".*

Estas observações foram socializadas com os outros alunos, de modo que as discussões e descobertas pudessem servir para o aprendizado de todos.

Ao analisarem as intersecções dos gráficos dos polinômios com o eixo x e as raízes reais de cada um deles, os alunos fizeram observações como às descritas anteriormente, na questão 1 desta atividade.

A partir do que os alunos descreviam por meio das linguagens oral ou escrita, percebemos que eles chegavam às conclusões esperadas por nós, porém, por meio de uma linguagem própria, sem muitos refinamentos. Sendo assim, para fazer um fechamento desta primeira parte comentamos que a intersecção do gráfico de cada polinômio P(x) com o eixo x ou eixo das abscissas é o ponto cuja abscissa é a raiz do polinômio, ou seja, é a raiz da equação P(x) = 0.

Nas questões 1 e 2, após representar cada polinômio no Winlplot, os alunos puderam utilizar o recurso Um/Zeros... e solicitar a marcação de todos os zeros. Este recurso do software determina as raízes reais do polinômio e as marca no gráfico, possibilitando uma melhor visualização em relação às raízes reais e a abscissa do ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

Nas figuras 3.9 e 3.10, respectivamente, temos os gráficos referentes aos polinômios das questões 1 e 2, traçados no Winplot, pelos alunos.

Questão 1:

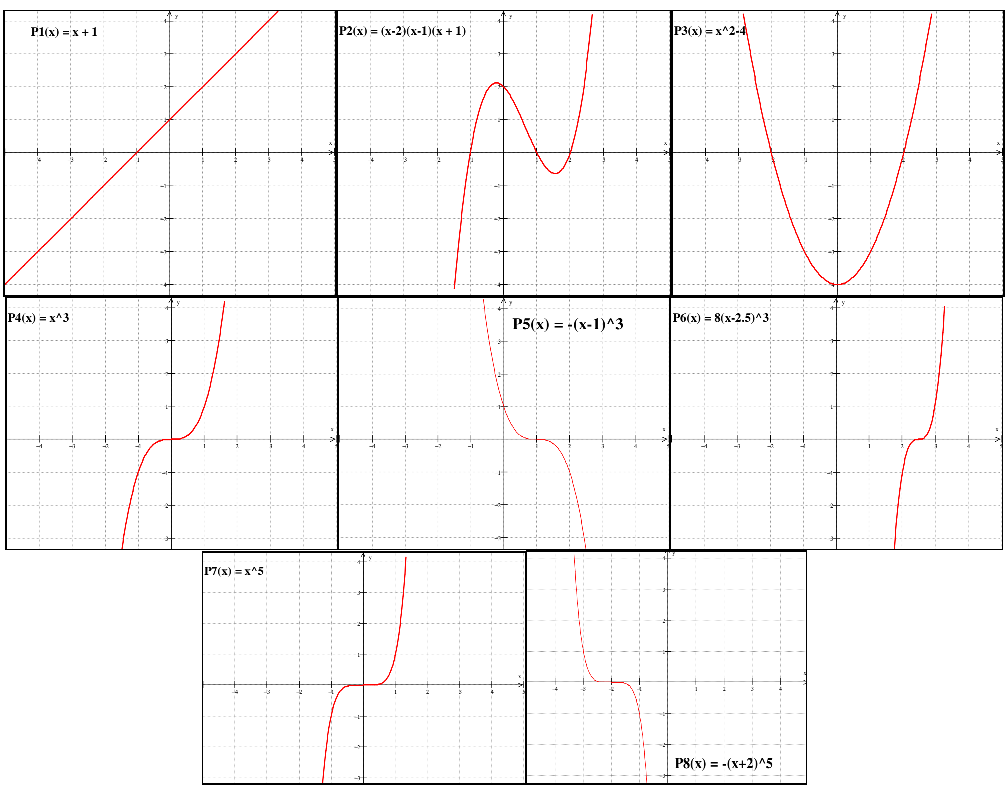


Figura 3.9: Gráficos dos polinômios da questão 1

Questão 2:

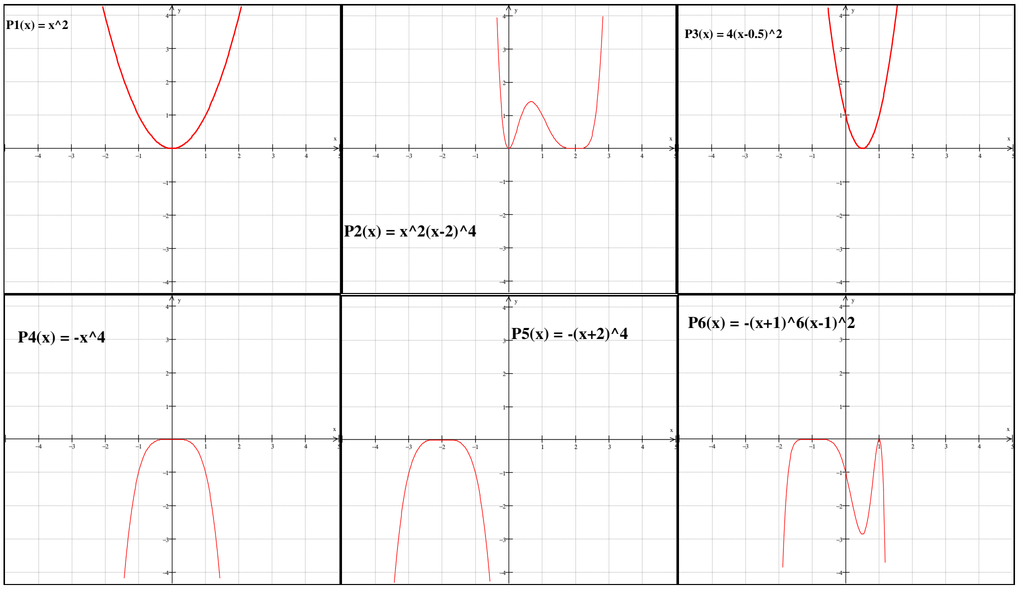


Figura 3.10: Gráficos dos polinômios da questão 2

Os polinômios da 1.ª questão da Atividade I – reformulada, não sofreram muita alteração em relação aos da Atividade I aplicada no teste exploratório, porém os da 2.ª questão tiveram um reformulação maior, em virtude das observações do teste exploratório.

Na terceira questão, os alunos tiveram que analisar as questões 1 e 2 e relatar o que eles observaram em relação ao aspecto gráfico dos polinômios nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar. A seguir, temos algumas observações feitas pelos alunos:

"Na multiplicidade ímpar o gráfico corta o eixo x, na multiplicidade par o gráfico só toca".

"Quando a multiplicidade é par, o gráfico somente toca o eixo x, e na ímpar ele o corta".

"Na multiplicidade ímpar o gráfico atravessa o eixo x e na par ele só toca, mas não atravessa".

"Quando a multiplicidade é ímpar o gráfico atravessa o eixo x e quando a multiplicidade é par o gráfico, somente, toca o eixo x".

"Na ímpar atravessa o eixo x, já na par só encosta no eixo x".

"Quando a multiplicidade foi ímpar o gráfico atravessou o eixo x, e quando foi par o gráfico só tocou o eixo x".

"Na multiplicidade ímpar o gráfico atravessa o eixo x, e na de multiplicidade par ele não atravessa, toca e volta".

"Quando a multiplicidade é ímpar o gráfico toca e atravessa o eixo x, porém quando a multiplicidade é par o gráfico apenas toca o eixo x".

"Na multiplicidade ímpar o gráfico corta o eixo x, na multiplicidade par ele só toca".

"Nas ímpares eles oscilam entre o lado positivo e negativo e nas pares eles ou ficam só no positivo ou só no negativo".

Assim como no teste exploratório, percebemos que os alunos usaram "tocar no eixo" no sentido de tocar no eixo não atravessá-lo , e "cortar o eixo" como atravessar o eixo x.

No item 3.2, da questão 3, foi pedido que os alunos analisassem o sinal de cada polinômio nas proximidades das raízes reais e descrevessem o que eles observaram em relação às raízes de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar. Algumas respostas dadas, estão listadas a seguir:

"Na multiplicidade ímpar há a variação do sinal, quando a multiplicidade é par o sinal é sempre o mesmo".

"Na multiplicidade ímpar o polinômio assume valores tanto negativos quanto positivos em relação ao eixo y, já na multiplicidade par, o polinômio só assume valores positivos ou só negativos em relação ao eixo y".

"Na multiplicidade par o sinal não se altera (+ ou –), já na multiplicidade ímpar o sinal se altera (+ e –)".

"Na multiplicidade ímpar o sinal se altera quando o gráfico atravessa o eixo x, já na multiplicidade par o sinal não se altera ao tocar o eixo x".

"Quando a multiplicidade foi par o sinal não se alterou, e quando a multiplicidade foi ímpar o sinal se alterou no gráfico".

"Na multiplicidade ímpar os sinais do gráfico se alteram, pois o gráfico atravessa o eixo x. Na multiplicidade par o sinal do gráfico se mantém, pois o gráfico não ultrapassa o eixo x".

A quarta questão também apresentava polinômios na forma fatorada, como as anteriores, porém continha exemplos de raízes de multiplicidade par e ímpar num mesmo polinômio. Foi pedido que os alunos representassem no Winplot cada polinômio e observassem o aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e ímpar e também analisassem o sinal de cada polinômio nas proximidades das raízes reais.

Os alunos perceberam que as observações feitas por eles nas questões anteriores são válidas, mesmo quando temos polinômios que apresentam raízes de multiplicidades par e/ou ímpar.

Na figura 3.11, temos os gráficos da quarta questão.

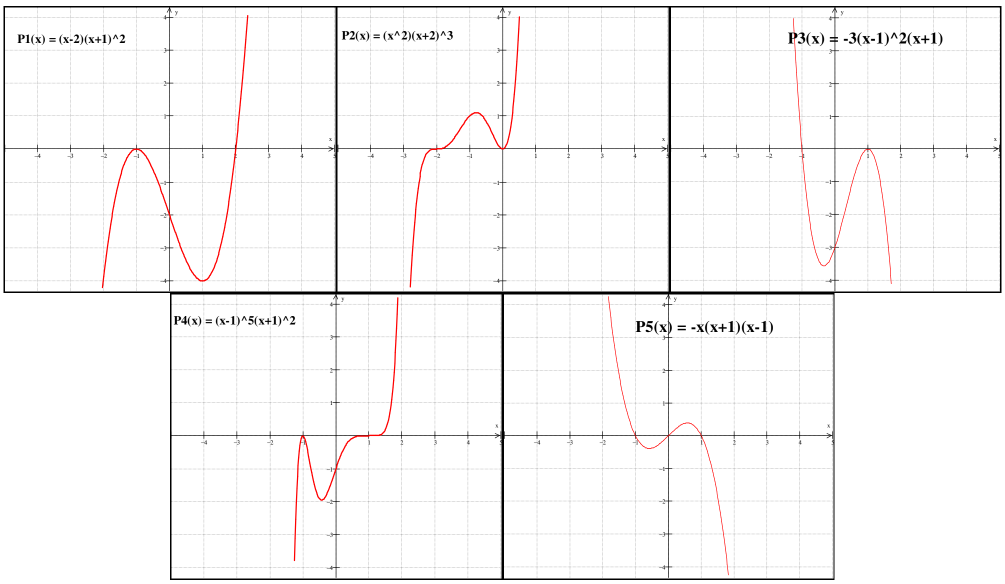
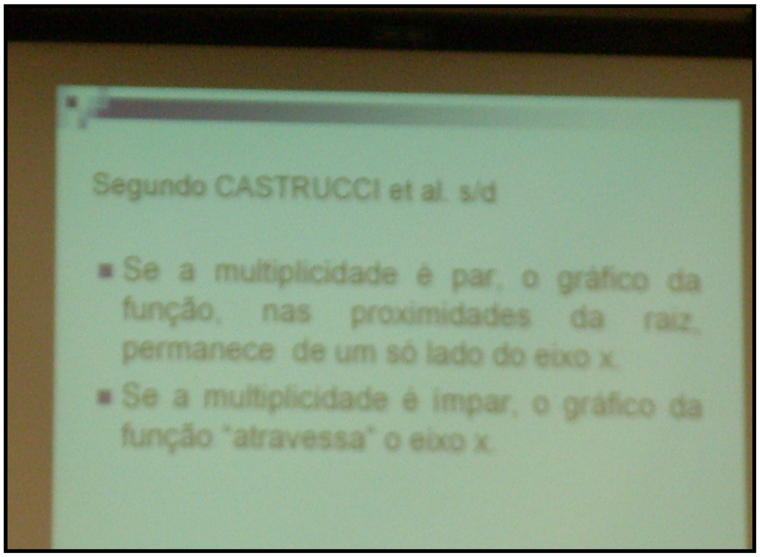
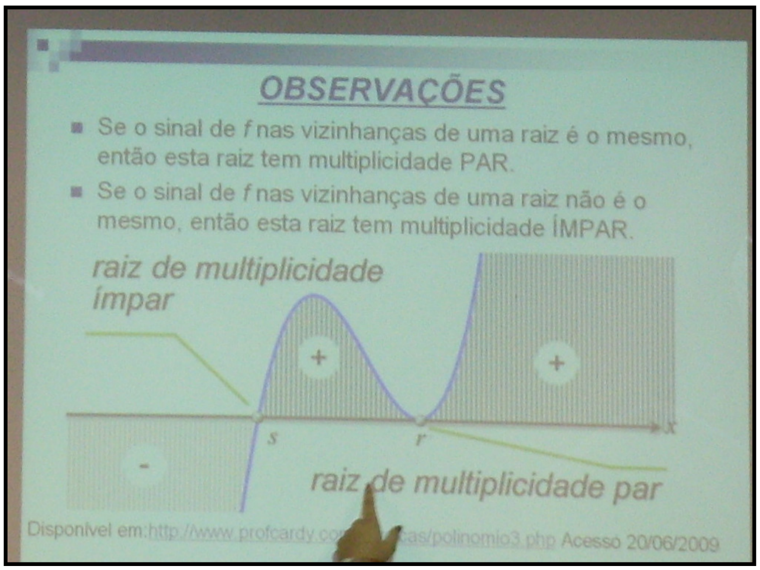


Figura 3.11: Gráficos dos polinômios da questão 4

Assim como no teste exploratório, para dar um fechamento e fundamentar as questões levantadas pelos alunos até o presente momento, foram projetadas no quadro as transcrições do professores Castrucci, Neto, Mendonça, Smith e Cardy, tais como se encontram nas páginas 30 e 31 dessa monografia e que podem ser observadas nas fotografias 3.3 e 3.4.



Fotografia 3.3: Observações segundo Castrucci et al.



Fotografia 3.4: Observações segundo Cardy

Na questão 5, pedimos para os alunos representarem graficamente cada polinômio dado, com o auxílio do *software* Winplot e reproduzissem o esboço dos mesmos no sistema de eixos dado na folha de respostas, destacando as raízes reais e identificando as de multiplicidade par e as de multiplicidade ímpar, a partir do aspecto gráfico. Os alunos não apresentaram nenhuma dúvida na resolução desta questão. Vale ressaltar que os polinômios desta questão não estavam na forma fatorada e a identificação de cada raiz e de sua multiplicidade ser par ou ímpar aconteceu a partir da visualização gráfica.

Na figura 3.12, encontram-se a reprodução dos gráficos da quinta questão esboçados por um aluno, no caderno de respostas e a identificação das raízes reais e de suas respectivas multiplicidades, em par ou ímpar.

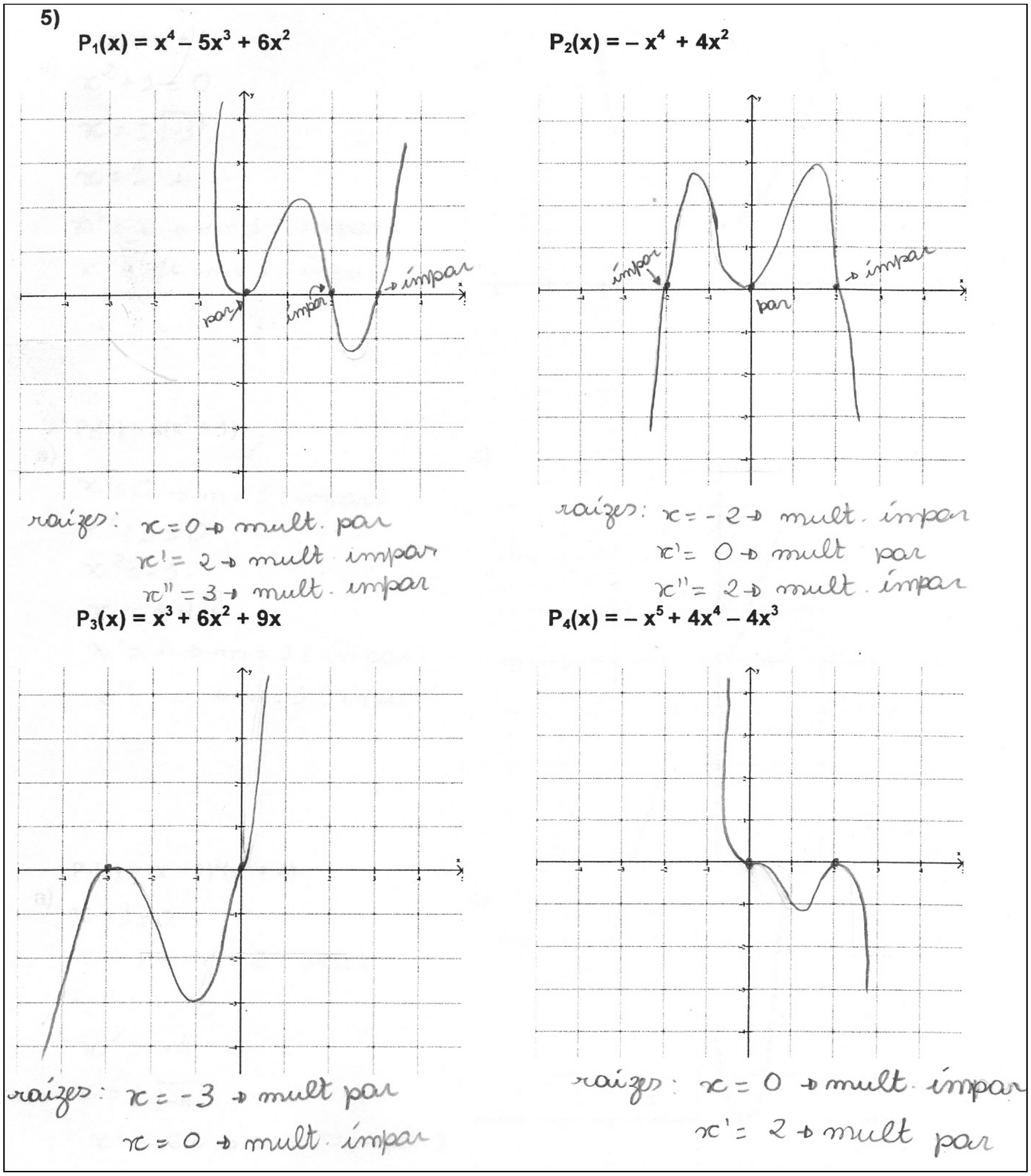


Figura 3.12: Reprodução dos gráficos da questão 5

Iniciamos o segundo dia da aplicação das atividades pedindo aos alunos para resolverem a sexta questão que apresenta polinômios de coeficientes reais com raízes complexas.

No item a dessa questão, foi pedido para que os alunos determinassem as raízes de cada polinômio, no conjunto dos números complexos, e suas respectivas multiplicidades.

A maioria dos alunos não apresentou dificuldades, porém quando havia alguma dúvida cada aluno era atendido de modo que a continuidade do trabalho não fosse prejudicada.

No item b, foi pedido que os alunos representassem graficamente os polinômios dados, com o auxílio do *software* Winplot e marcassem todas as raízes reais dos polinômios por meio da ferramenta Um/ Zeros.

Na figura 3.13, temos os gráficos de cada polinômio que foram reproduzidos por um aluno, nos sistemas de eixos dados nas folhas de respostas.

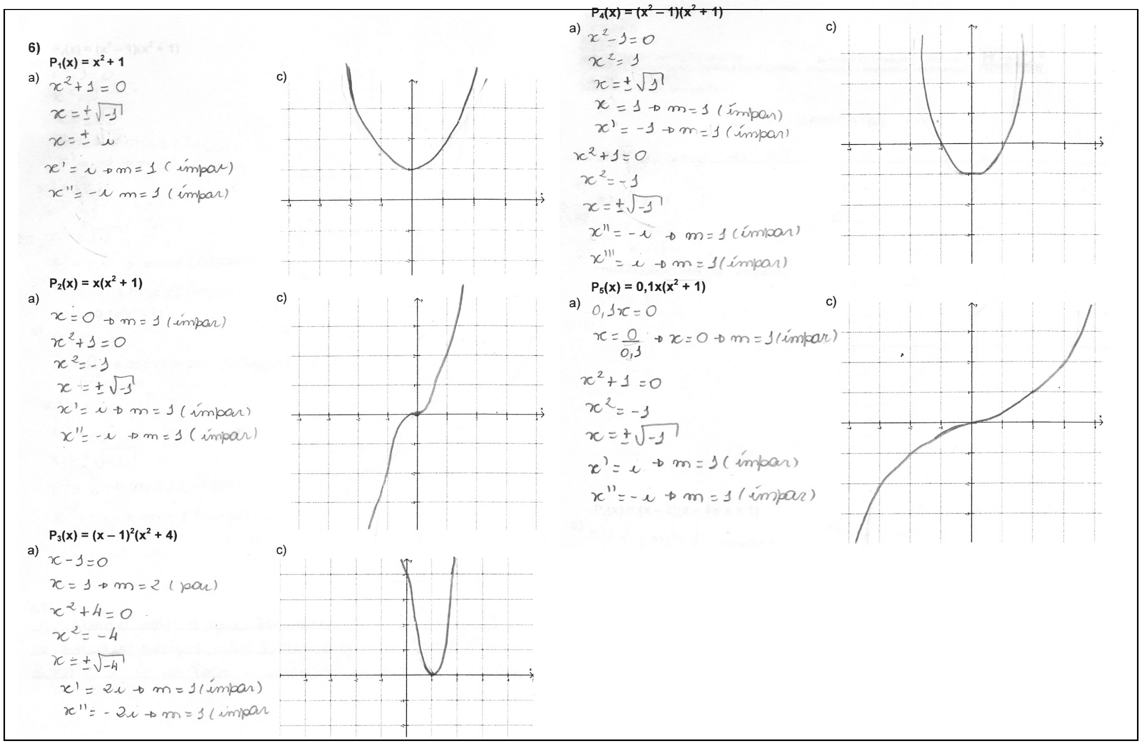


Figura 3.13: Questão 6

No item 6.1, os alunos analisaram o gráfico e as raízes encontradas no item a, de cada polinômio, e descreveram o que eles observaram:

”Eu observei que o gráfico só toca o eixo x nas raízes reais, nas imaginarias não”.

“Olhando o gráfico só conseguimos ver as raízes reais. Se a raiz não for real, não toca o eixo x”.

“De acordo com o que foi observado nos gráficos, se houver raízes não reais o gráfico não toca o eixo x e só toca o eixo x se houver raízes reais”.

“Que há em todos os itens a presença de pelo menos uma raiz não real, e que pelo gráfico não dá para perceber que há raízes não reais, porque só tocam no eixo x as raízes reais”.

“Que não dá para identificar as raízes não reais somente pelo gráfico porque somente as reais tocam no eixo x”.

“O gráfico só tocará o eixo x se a raiz for real, se não for real não tocará o eixo x”.

“Aparece no gráfico somente as raízes que forem reais”.

“Só é possível identificar pelo gráfico as raízes reais. As raízes complexas (não reais) não aparecem no gráfico”.

Essa questão proporcionou mais uma vez a observação de que as abscissas dos pontos de intersecção de cada gráfico com o eixo x são as raízes reais do polinômio e a este fato acrescentou a observação de que as raízes complexas não reais não aparecem no gráfico. As observações referentes ao aspecto gráfico nas vizinhanças das raízes reais de multiplicidade par ou ímpar continuaram sendo confirmadas.

A atividade I proporcionou ao aluno observar que: Para polinômios, há uma estreita relação entre a multiplicidade de uma raiz e o comportamento do gráfico nas suas vizinhanças (ANTON, 2000, p.309).

Esta estreita relação de que fala o autor pôde ser visualizada e viabilizada a partir do traçado dos gráficos com o *software* Winplot que facilitou e agilizou as observações. O uso do Winplot proporcionou explorações algébricas e gráficas simultaneamente.

Segundo Abrahão e Palis (2004), a utilização de novas tecnologias educacionais viabiliza a incoporação dos pontos de vista numérico e gráfico, ressaltam ainda que softwares gráficos produzem em pouquíssimo tempo esboços de gráficos difíceis de desenhar a mão, favorecendo a ampliação de estudos e promovendo a construção do conhecimento.

No anexo I dessa monografia, há uma transcrição do livro “A Matemática do Ensino Médio”, volume 3, cujos autores são Lima, Carvalho, Wagner e Morgado. Essa transcrição também vem fundamentar teoricamente o comportamento gráfico dos polinômios quanto às multiplicidades das raízes.

Dando continuidade, apresentamos um tutorial, desenvolvido também no *software* Wink, da Atividade II (Apêndice XI). Este tutorial traz uma orientação dos comandos destinados à realização da Atividade II (Apêndice XII) no Winplot.

A atividade II que foi aplicada, inicialmente, para os licenciandos, sofreu apenas algumas modificações na redação, para então ser aplicada aos alunos do Ensino Médio. Sendo assim, o tutorial dessa atividade não precisou ser alterado.

Iniciando a Atividade II, é pedido que o aluno selecione: Janela/Adivinhar e em seguida Equa/Selecionar. Dessa forma será aberta a janela **habilitar tipos**, nesta o aluno deve selecionar polinômio e preencher os campos grau inf com **1** e grau sup com **8**. Isto garantirá que os gráficos que aparecerão na tela do computador, quando o aluno utilizar o recurso Adivinhar e neste selecionar Equa/Novo exemplo serão de polinômios que possuem somente raízes inteiras (opção do desenvolvedor do software) cujo grau irá variar de 1 a 8.

A cada gráfico que surgia, percebíamos que os alunos conseguiam identificar, graficamente, as raízes dos polinômios e a multiplicidade destas, mas o coeficiente dominante do polinômio, quando diferente de um, foi motivo de dificuldades, assim como para os alunos do teste exploratório.

Ao perceber esta dificuldade, pedimos para que os alunos observassem o ponto de intersecção da curva com o eixo das ordenadas, pois este fornece o valor de y quando x = 0 e assim o coeficiente dominante pode ser encontrado substituindo x por zero e p(x) por y = p(0) na equação fatorada.

Os alunos entenderam a explicação e fizeram vários exemplos. Digitavam a equação referente a cada polinômio em um campo em branco da janela adivinhe minha equação, caso a resposta estivesse correta, aparecia “perfeito”, caso a resposta estivesse errada era escrito “tentativa outra vez?” e então eles repensavam o que poderia estar errado na equação.

Os alunos optaram por escrever as equações na forma fatorada e no que diz respeito às multiplicidades, quando percebiam que a raiz era de multiplicidade ímpar primeiro experimentavam o expoente um e nas de multiplicidade par, inicialmente usavam expoente dois.

A cada resposta correta, percebemos que os alunos se empolgavam e se sentiam motivados a trabalhar com outros exemplos.

Pedimos para que os alunos escolhessem um gráfico que apareceu e o reproduzisse no sistema de eixos dado, bem como a equação encontrada por ele. Na figura 3.14, temos um exemplo selecionado por um aluno.

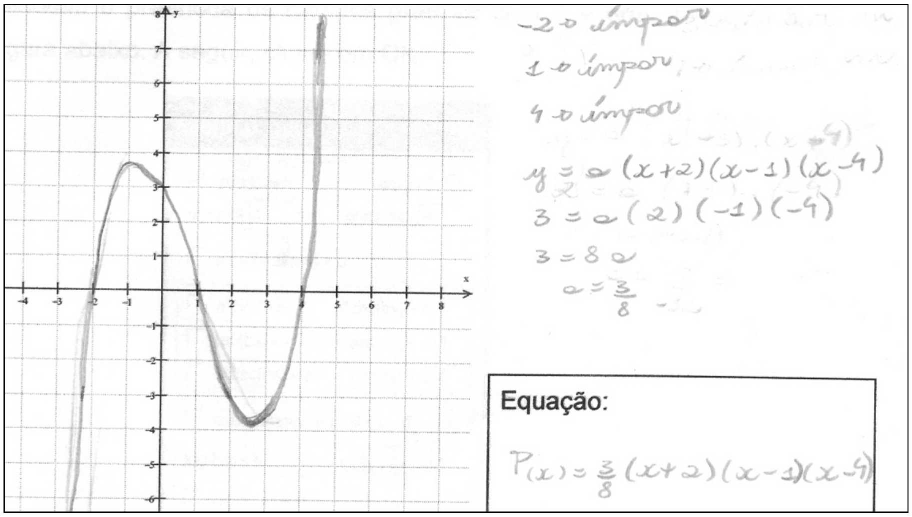


Figura 3.14: Exemplo de um aluno

Esta atividade propiciou a cada aluno aplicar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

O recurso de simulação permite a realização de experimentos envolvendo conceitos mais avançados. Neste caso, a complexidade analítica do modelo fica por conta do programa e os alunos exploram qualitativamente as relações matemáticas que se evidenciam no dinamismo da representação de caráter visual (GRAVINA, SANTAROSA, p.12, 1998).

Após a aplicação da Atividade II, os alunos resolveram cinco exercícios, os mesmos dados no teste exploratório, abrangendo o tema estudado. No Apêndice XIII, é possível encontrar essa lista de exercícios resolvida por um aluno do Ensino Médio.

Eles responderam às questões com muita atenção e motivação, pois havia questões de vestibulares que abordavam o conteúdo trabalhado. Vale ressaltar que todos os alunos estavam no terceiro ano do Ensino Médio e iriam prestar vestibular no fim do ano.

A seguir, temos alguns relatos dos alunos sobre as contribuições proporcionadas pela oficina.

"Este curso me fez relembrar o que estudei e esclarecer dúvidas que ainda tinha. Além disso, me fez conseguir analisar gráficos, o que facilita na hora de resolver questões de provas até de vestibulares".

"Esta oficina me proporcionou aumentar meus conhecimentos sobre polinômios que pode me ajudar futuramente".

"Adquiri mais conhecimento de polinômios, numa aula dinâmica e com bastantes exercícios de fixação".

"Os conhecimentos obtidos na oficina irão me auxiliar, muito, nos vestibulares que irei fazer".

"Aprendi a usar o aplicativo Winplot, além de me ajudar a interpretar os polinômios de melhor forma".

"Esta oficina me ajudou a interpretar os gráficos dos polinômios. E isso me ajudará no futuro".

"Me proporcionou a aprendizagem de uma matéria na qual não dominava, e ainda que pode ser útil para futuros vestibulares".

"Esta oficina contribui para uma maior compreensão sobre polinômios, e uma nova visão que possibilitou uma maior clareza no entendimento dos gráficos, comprovando os conceitos aprendidos algebricamente".

A seguir temos algumas observações e sugestões deixadas pelos alunos:

"A oficina foi muito boa e de grande importância para mim, pois aprendi bastante com a aula".

"Gostei muito do curso, foi muito interessante e com certeza me auxiliou bastante. Acredito que o método utilizado pelas professoras, não tão formal quanto geralmente é, facilitou bastante a compreensão".

"Poderia haver outros cursos para aprendermos mais sobre outros conteúdos".

"Aumentar a carga horária para o aprendizado de outros conteúdos, além de raízes de polinômios".

"Muito bem desenvolvido o tema e muito atenciosas as professoras".

"Para mim, o que foi aprendido nesta oficina foi muito útil. Penso que esta oficina foi bem planejada, possibilitando, assim, que os seus objetivos fossem alcançados".

A partir dos registros dos alunos, foi possível constatar que eles acharam a aula dinâmica e que o uso do *software* Winplot auxiliou na análise e na interpretação gráfica.

O que se espera com a utilização do computador na educação é a realização de aulas mais criativas, motivadoras, dinâmicas e que envolvam os alunos para novas descobertas e aprendizagem (TAJRA, p. 49, 2008).

Durante a aplicação das atividades, percebemos que os alunos apresentaram bastante interesse e o uso do *software* proporcionou a construção do conhecimento.

Segundo Tajra (2008), o computador é um elemento inovador que pode auxiliar a construção coletiva do conhecimento, ela ainda ressalta que a educação precisa estar atenta às mudanças e que muitas delas podem ser feitas pelo professor que, refletindo criticamente sobre sua prática, torna-se um agente ativo no sistema educacional.

Segundo Abrahão e Palis (2004), a análise de gráficos com a ajuda da tecnologia pode gerar uma dinâmica de sala de aula que coloca o aluno frente a desafios constantes, encoraja a investigação e pode aumentar sua participação na construção da aprendizagem.

Fotografia 3.5: Aplicação das atividades para alunos do Ensino Médio

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Eisenberg e Dreyfus (1994), in Coxford e Shulte (1994), consideram que os polinômios são importantes e devem fazer parte dos currículos escolares.

Alguns autores como Larson, Hostetler e Edwards (1998) e ainda Hoffmann e Bradeley (1999) ressaltam que as funções polinomiais se destacam em aplicações práticas.

Lima (2001) chama a atenção para o fato de que muitos autores dão um enfoque puramente algébrico para os polinômios, e que estes devem ser estudados tanto sob o ponto de vista algébrico quanto geométrico.

Sendo assim, os polinômios constituem um tópico importante e seu estudo deve ser voltado tanto para o aspecto algébrico quanto geométrico.

Refletindo sobre a pouca ênfase dada por autores de livros de Matemática do Ensino Médio em relação à representação geométrica de polinômios, nos motivamos em desenvolver um estudo que permitisse identificar, graficamente, as raízes reais de polinômios de coeficientes reais e também estudar o aspecto gráfico desses polinômios nas proximidades das suas raízes reais de multiplicidade par e ímpar, tendo o *software* Winplot como apoio.

As atividades dessa monografia foram desenvolvidas em um Laboratório de Informática, tendo um computador disponível para cada aluno. Os alunos estavam sentados um ao lado do outro, o que favorecia a troca de experiências e a integração entre eles. A construção do conhecimento se processava a partir das interações aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor.

Segundo Moraes (2002), a relação aluno-computador-professor permite observar como o aluno constrói o conhecimento, como manipula a representação simbólica e organiza o seu raciocínio.

O uso do Winplot agilizou o trabalho, liberando o aluno para se deter no aspecto gráfico com mais precisão.

Os gráficos traçados no Winplot foram reproduzidos pelos alunos no caderno de respostas. Esse registro gráfico, bem como das raízes com suas respectivas multiplicidades, viabilizou a comparação e a retomada dos traçados gráficos, pelos alunos, quantas vezes fossem necessárias.

As atividades dessa monografia foram aplicadas inicialmente para alunos de uma Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de ensino e serviu como teste exploratório. Essa fase do trabalho foi importantíssima para que pudessem ser feitos alguns ajustes nas atividades para que estas fossem aperfeiçoadas e aplicadas para o público alvo: alunos da terceira série do Ensino Médio.

Levando em consideração os questionamentos e as sugestões dos licenciandos, fizemos algumas reformulações que consideramos pertinentes.

Dentre elas, podemos destacar a inclusão na primeira atividade, que foi aplicada para o Ensino Médio, de uma questão que despertasse o aluno quanto à observação do sinal do polinômio nas proximidades das raízes de multiplicidade par e ímpar.

Visando realizar o estudo proposto, fizemos uma revisão bibliográfica que nos serviu de base para que pudéssemos fundamentar teoricamente este trabalho. A análise de 45 livros de Matemática do Ensino Médio nos revelou que a representação gráfica e a interpretação geométrica relativas ao estudo polinômios, realmente, vem sendo deixada de lado por muitos autores, sendo dado aos polinômios um tratamento exclusivamente algébrico, como destaca Lima (2001).

O estudo de polinômios, sob o ponto de vista geométrico, pode ser viabilizado e dinamizado a partir do uso de *softwares* gráficos, conforme mostra este trabalho. Segundo Tajra (2008), a utilização da tecnologia na educação é indiscutível como necessária.

Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) destacam que o uso do computador associado a atividades interessantes e desafiadoras, estimula e enriquece o raciocínio.

Nesse contexto, o professor desempenha um papel importante de orientador e dinamizador no processo de construção do conhecimento.

Ponte, Oliveira e Varandas (2003) ressaltam que os professores de Matemática devem saber usar as tecnologias de informação, visto que estas reforçam o papel da linguagem gráfica.

A partir da revisão bibliográfica, foram preparadas atividades para que o objetivo desse trabalho se concretizasse.

A atividade I, que foi aplicada para os alunos da Licenciatura, bem como a reformulação desta, que foi aplicada para os alunos do Ensino Médio, apresentava polinômios de coeficientes reais, tendo como objetivo determinar as raízes dos polinômios e suas respectivas multiplicidades, representar graficamente os polinômios com o auxílio do *software* Winplot, identificar graficamente as raízes reais e observar o aspecto gráfico dos polinômios nas proximidades das raízes reais, levando em consideração a multiplicidade das mesmas.

Tanto os licenciandos quanto os alunos do Ensino Médio participaram com empenho da resolução das questões dessa atividade. Sempre que tinham dúvidas, eles as socializavam, quer com seus colegas ou conosco. Isso foi muito importante para o crescimento de todos.

Os teoremas e definições relativos a polinômios, organizados por nós e apresentados para os alunos, serviu de material de consulta e suporte teórico para eles durante o trabalho.

O uso do *software* Winplot viabilizou o estudo integrado dos pontos de vista algébrico e geométrico e proporcionou ao aluno observar que: para polinômios, há uma estreita relação entre a multiplicidade de uma raiz e o comportamento do gráfico nas suas vizinhanças (ANTON, 2000, p.309).

A atividade II, aplicada para os licenciandos e também para os alunos do Ensino Médio, trabalhava no Winplot com o recurso Janela/Adivinhar. Este permitia ao aluno encontrar a equação de um polinômio a partir da análise do gráfico que surgia na tela do computador ao selecionar Equa/Novo exemplo.

É importante ressaltar que os exemplos apresentados pelo Winplot eram de gráficos de polinômios que possuíam somente raízes inteiras (opção do desenvolvedor do *software*) e grau variando de 1 a 8, conforme selecionado pelos alunos na janela habilitar tipos.

As observações decorrentes das resoluções das questões da Atividade I serviram de embasamento teórico para que os alunos encontrassem as equações dos polinômios referentes aos gráficos que surgiam ao selecionar Novo exemplo.

Observamos que os alunos conseguiram determinar graficamente as raízes reais dos polinômios e identificar, também graficamente, as raízes de multiplicidade par ou ímpar.

A atividade II possibilitou reflexões sobre o estudo, despertou o interesse dos alunos a partir das simulações e também propiciou a reflexão e a experimentação que os auxiliaram a superar dificuldades, construir conceitos e consolidar os conhecimentos já adquiridos.

Após a aplicação das atividades I e II, os licenciandos e os alunos do Ensino Médio responderam a uma lista contendo cinco exercícios envolvendo o conteúdo estudado. Eles chegaram às respostas dos exercícios, demonstrando domínio em relação aos conhecimentos adquiridos.

Em particular, os alunos do Ensino Médio ficaram muito motivados, pois perceberam que na lista havia questões de vestibulares sobre o tema estudado. Essa motivação está relacionada ao fato de que esses alunos iriam prestar vestibular no fim do ano.

Os alunos que participaram dessa pesquisa já tinham utilizado o Winplot em outras ocasiões, porém apresentamos os comandos necessários para o desenvolvimento das atividades no Winplot sob a forma de tutorial. Este foi importante pois os alunos recordaram e aprenderam alguns comandos.

As linguagens oral e escrita revelaram que o uso da tecnologia foi importante neste trabalho.

Observamos que o uso da tecnologia aliado ao estudo das implicações geométricas das raízes de multiplicidade par e ímpar se revelou como algo novo tanto para os alunos da Licenciatura como para os alunos do Ensino Médio.

Esse estudo nos mostrou a importância de se elaborarem atividades que desafiem o aluno a participar, questionar, refletir sobre suas ações e formular hipóteses.

Segundo Jordane e Paula (2004), é urgente repensar as aulas de Matemática, abrindo espaço para as atividades de investigação.

Os resultados dessa pesquisa nos mostram que o uso da tecnologia constitui-se em uma metodologia que favoreceu a construção do conhecimento tanto para alunos do Ensino Médio quanto para os alunos do curso superior.

Como forma de continuidade do trabalho, recomendamos que o estudo proposto nessa monografia possa ser aprofundado nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, proporcionando ao estudante a observação de aspectos importantes e particulares dos polinômios, aliados aos conhecimentos adquiridos em Cálculo nas Universidades.

Por fim, esperamos que este trabalho possa servir de apoio para professores e alunos de Matemática, suscitando reflexões entre professores sobre o tema levantado nessa pesquisa, bem quanto ao uso da tecnologia na sua formação e atualização profissional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHÃO, Ana Maria Carneiro; PALIS, Gilda de La Rocque. *A questão da escala e as concepções de professores ao analisarem gráficos de funções f: $R \to R$ obtidos em calculadoras.* In: Educação Matemática em Revista. N.º 16. Ano 11, 2004.

ANTON, Howard. *Cálculo, um novo horizonte*. 6.ª edição. Volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BARCELOS, Gilmara T.; BATISTA, Silvia C. F. *Elaboração de tutoriais utilizando o software wink.* In: 2º Encontro de Educação a Distância E@D: Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação, 2008. Campos dos Goytacazes. Anais do 2º Encontro de Educação a Distância E@D: Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação, Campos dos Goytacazes: Essentia, 2008, p. 37 – 39.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Introdução. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998a.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998b.

CARDY. *Polinômios – Multiplicidade das raízes*. Disponível em: http://www.profcardy.com/cardicas/polinomio3.php. Acesso em 20/06/2009.

CARNEIRO, José Paulo Q. *Equações Algébricas de grau maior de dois: assunto para o Ensino Médio?* In: Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. N.º 40. 1999.

CASTRUCCI, Benedito; NETO, Ernesto Rosa; MENDONÇA, Eliana Riscalla de; SMITH, Maria Lúcia M. *Matemática*. 2.º grau. v.3. São Paulo: Editora FTD S.A. s/d.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P (organizadores). *As ideias da álgebra.* São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: Da teoria à prática*. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas, São Paulo: Pairos, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Ática, 2005.

EISENBERG, Teodore; DREYFUS, Tommy. *Os polinômios no currículo da escola média.* In: As idéias de álgebra. Organizadores Arthur F. Coxford; Alberto P. Shulte. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: http://.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_tese. Acesso em 22/05/2009.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. Cálculo: *Um curso moderno e suas aplicações*. 6.ª edição. Rio de Janeiro. LTC Editora S.A. 1999.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Volume 6. 6.ª edição. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David Mauro. PÉRIGO, Roberto. *Matemática*. Volume único. 3.ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

LARSON, Roland E; HOSTETLER, Robert P; EDWARDES, Bruce H. *Cálculo com aplicações*. 4.ª edição. Rio de Janeiro. LTC. 1998.

LIMA, Elon Lages (editor). *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Analistas: Augusto César Morgado, Edson Durão Júdice. Eduardo Wagner. Elon Lages Lima. João Bosco Pitombeira de Carvalho. José Paulo Quinhões Carneiro. Maria Laura Magalhães Gomes. Paulo Cezar Pinto Carvalho. VITAE. IMPA. SBM. Rio de Janeiro, 2001.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Auguto César. A *Matemática do Ensino Médio*. Volume 3. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MELLO, Guiomar Namo de. *A escola na era da tecnologia*. In: Revista Escola, 2005.

MELLO, José Luiz Pastore; BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática: construção e significado*. Ensino Médio. Volume único. 1.ª edição. São Paulo: Moderna, 2005.

MORAES, Maria Cândida. *O paradigma educacional emergente*. 8.ª edição. Campinas, São Paulo: Papirus, 1997.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. ANDRADE, Doherty. *Você quer discutir com o computador ?* Educação Matemática em Revista, n.º 16, ano 11. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*. 3.ª série. Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 1995.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática.* Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PALIS, Gilda de La Rocque. *Tecnologia, Gráficos e Equações*. In: Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. N.º 26, 1994.

__________. *Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel*. In: Revista da Associação de Professores de Matemática: Educação e Matemática. N.º 45, 1997.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PONTE, João Pedro da; BOAVIDA, Ana Maria; GRAÇA, Margarida. ABRANTES, Paulo. *Didáctica da Matemática*, 1997.

PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; VARANDAS, José Manuel. *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. J. P. da Ponte: Artigos e Trabalhos em Português. 2003. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm. Acesso em 02/05/2008.

TAJRA, Sanmya Feitosa. *Informática na Educação*: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. São Paulo: Érica, 8.ª edição, 2008.

APÊNDICES E ANEXOS

APÊNDICE I: Questionário

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

QUESTIONÁRIO

1- Você já estudou polinômios?

( ) Sim ( )Não

1.1- Em que nível(is) de ensino?

( ) Fundamental ( ) Médio ( )Superior

Outros cursos: ____

2- Caso tenha estudado polinômios, marque os tópicos abordados.

( ) operações com polinômios
( ) grau de um polinômio
( ) raiz de um polinômio
( ) multiplicidade de uma raiz
( ) representação gráfica de polinômios
( ) interpretação geométrica das raízes de um polinômio

VOCÊ É ALUNO DO: ( ) PRIMEIRO PERÍODO
( ) TERCEIRO PERÍODO
( ) QUINTO PERÍODO
( ) SÉTIMO PERÍODO

APÊNDICE II: Definições e Teoremas

DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Número complexo

Um número complexo é um número da forma $x + yi$, com x e y reais e $i = \sqrt{-}$.

LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO, p.161, 2001

Exemplos:

a) $2 - 3i$ b) $0 + 5i = 5i$ c) $6 + 0i = 6$

É importante notar que todo número real **a** é o número complexo **a** + 0i. Sendo assim, $IR \subset \mathbb{C}$.

Função Polinomial ou Polinômio

São dados os números complexos $a_n, a_{n-1},...,a_2, a_1, a_0$ e seja x uma variável complexa. Consideremos a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que a cada x associa o número $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $n \in IN$.

A função f é denominada *função polinomial* ou *polinômio* na variável x.

Os números complexos $a_n, a_{n-1},...,a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio.

Adaptado de IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.626, 2005

Exemplos:
a) $f(x) = 7x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ b) $p(x) = 5ix^6 - 2x^2 + 3x - 8i$

Não são polinômios:
a) $g(x) = 5x^{-2} + 2x + 3$ b) $h(x) = 5\sqrt{x} + 4x^2$

Grau de um polinômio

Grau de um polinômio P(x), $P(x) \neq 0$, é o maior expoente que apresenta a variável x, dentre os termos de coeficientes não-nulos.

Indicamos o grau de um polinômio P(x) por ∂P (lê-se: “del-P”).

Nota: Se o grau de um polinômio P(x) é n, então o coeficiente a_n de x^n é denominado “**coeficiente dominante** de P(x)”.

PAIVA, Manoel. p.313, 1995

Exemplo: $P(x) = 4 + 7x + 2x^3 - 6x^4 \quad \Rightarrow \quad \partial P = 4$

Valor numérico

Seja α um número complexo e $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, um polinômio dado por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

O *valor numérico* de p em α é o valor obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0$$

Observação: Quando $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é **raiz** do polinômio p(x).

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.626, 2005

Exemplo:
Seja $p(x) = 3x^3 - 4x + 1$.
$p(2) = 3.2^3 - 4.2 + 1 = 24 - 8 + 1 = 17$
$p(1) = 3.1^2 - 4.1 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$, logo 1 é uma raiz de p

Equação polinomial ou algébrica

Equação polinomial ou *algébrica* é toda equação redutível à forma p(x) = 0, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes em $\mathbb{C}$ e a variável x assume um valor qualquer em $\mathbb{C}$.

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.626, 2005

Exemplos:

a) $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

Raiz

Um número complexo r é raiz de uma equação polinomial p(x) = 0, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, quando, substituindo x por r na equação e efetuando os cálculos, obtemos $p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0$.

Em outras palavras, r é raiz de uma equação p(x) = 0 ser for raiz do polinômio p(x).

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.640, 2005

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.641, 2005

Teorema da Decomposição

Seja p(x) um polinômio de grau n, n ≥ 1, dado por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Então, p(x) pode ser decomposto em n fatores do 1.º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3).\cdots.(x - r_n),$$

em que r_1, r_2 ,... r_n, são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente dominante de p(x).

Observação: Com exceção da ordem dos fatores do produto, a decomposição de p(x) em termos de suas raízes é única.

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.641, 2005

Exemplo:

Sabendo que as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ são –1, 1 e 2, podemos fatorá-lo como: p(x) = 1.(x+1).(x–1).(x–2)

Consequência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau n, n≥ 1, admite exatamente n raízes complexas.

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.642, 2005

Multiplicidade de uma raiz

Quando resolvemos a equação do 2.º grau $x^2 - 10x + 25 = 0$, encontramos duas raízes iguais a 5. Usando o teorema da decomposição, fatoramos o polinômio dado: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = (x - 5)^2$

Dizemos, então, que 5 é raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação proposta.

Se a forma fatorada de um polinômio p é: $p(x) = (x + 4)^3.(x - 2).\ (x + 1)^2$, concluímos que:

$x = -4$ é raiz com multiplicidade 3 ou raiz tripla da equação $p(x) = 0$

$x = 2$ é raiz com multiplicidade 1 ou raiz simples da equação $p(x) = 0$

$x = -1$ é raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação $p(x) = 0$

De modo um pouco mais formal, dizemos que r é uma raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação $p(x) = 0$ se: $p(x) = (x - r)^m.q(x)$; com $q(r) \neq 0$

Notemos que:

1.º) $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$

2.º) A condição $q(r) \neq 0$ significa que r não é raiz de $q(x)$ e garante, então, que a multiplicidade de r não é maior que m.

IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.644, 2005

Raízes complexas

Teorema

Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$ é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Observações:

1.º) Se o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$ é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, $b \neq 0$ também é raiz com multiplicidade m dessa equação.

2.º) Esse teorema nos garante que, numa equação de coeficientes reais, raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares ($a + bi$ e $a - bi$). Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real.

Adaptado de IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO. p.645 e p.646, 2005

APÊNDICE III: Como representar um polinômio no *software* Winplot

COMO REPRESENTAR UM POLINÔMIO NO *SOFTWARE* WINPLOT

1- No Winplot selecione: Janela 2-dim.

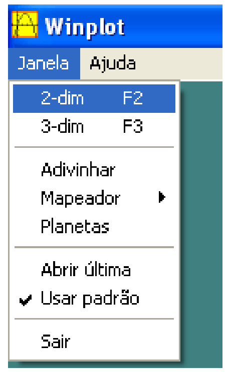


Figura 1

2- Selecione Ver/ Grade e preencha conforme a Figura 2.

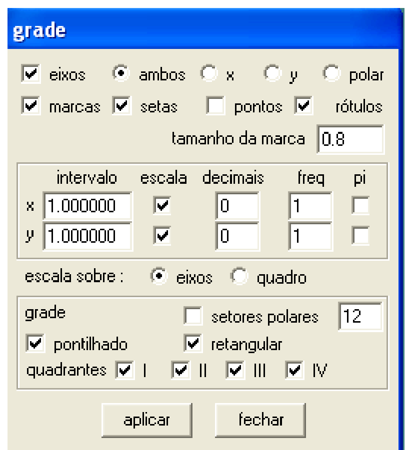


Figura 2

Ao clicar em aplicar, aparecerá o sistema de eixos (Figura 3).

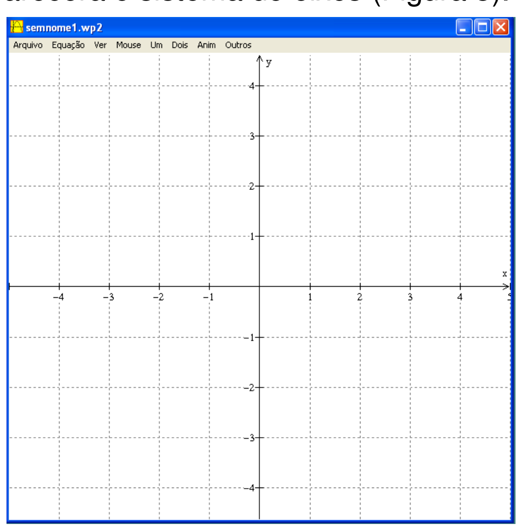
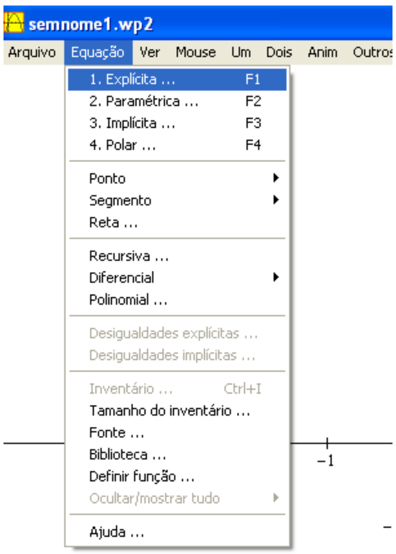


Figura 3

3- Para representar graficamente um polinômio, selecione no menu Equação/ Explícita (Figura 4). A seguir, aparecerá a janela y = f(x) (Figura 5) e no campo em branco (f(x)=), você deve digitar a expressão referente ao polinômio desejado. Nessa janela, você terá como escolher a espessura da linha e a cor do gráfico.



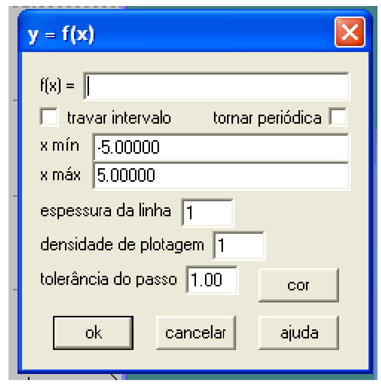


Figura 5

Figura 4

Após clicar em ok, aparecerá na tela o gráfico do polinômio digitado, como mostra a Figura 6.

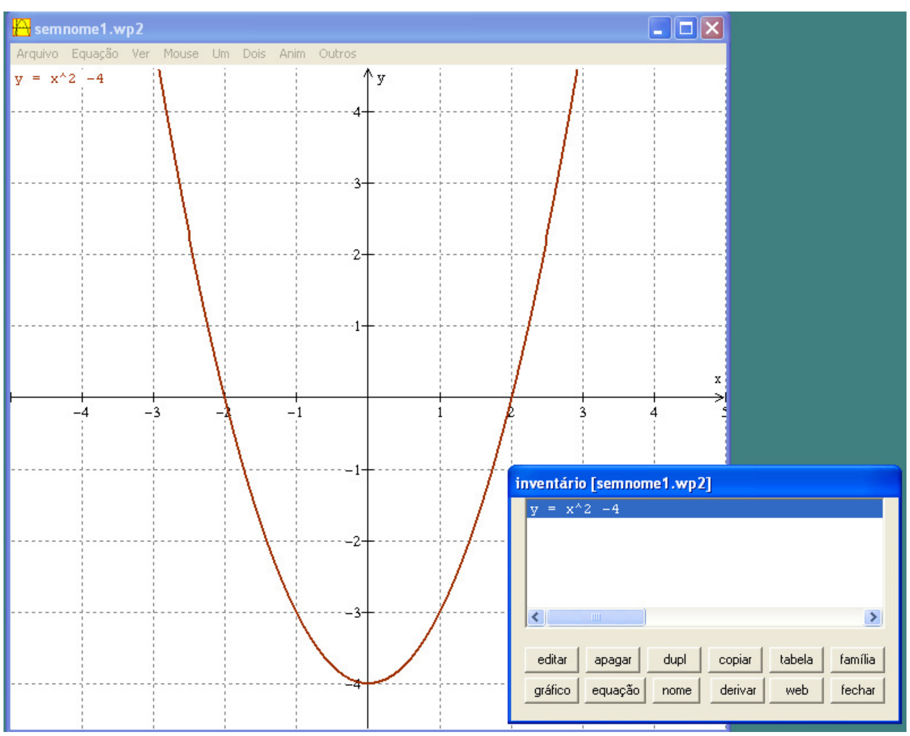


Figura 6

Na janela inventário, ao clicar em equação, aparecerá na parte superior da tela a equação do polinômio (Figura 6).

Observação: Para representar x^2 você deve digitar x^2.

Para solicitar as raízes reais do polinômio, você deve clicar em Um/ Zeros... e aparecerá a janela abaixo (Figura 7).

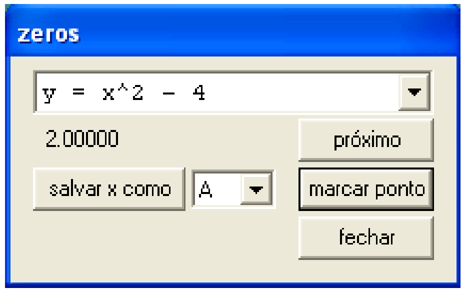


Figura 7

Ao clicar em próximo e em marcar ponto, sucessivamente, você terá a marcação das raízes reais do polinômio no gráfico (Figura 8).

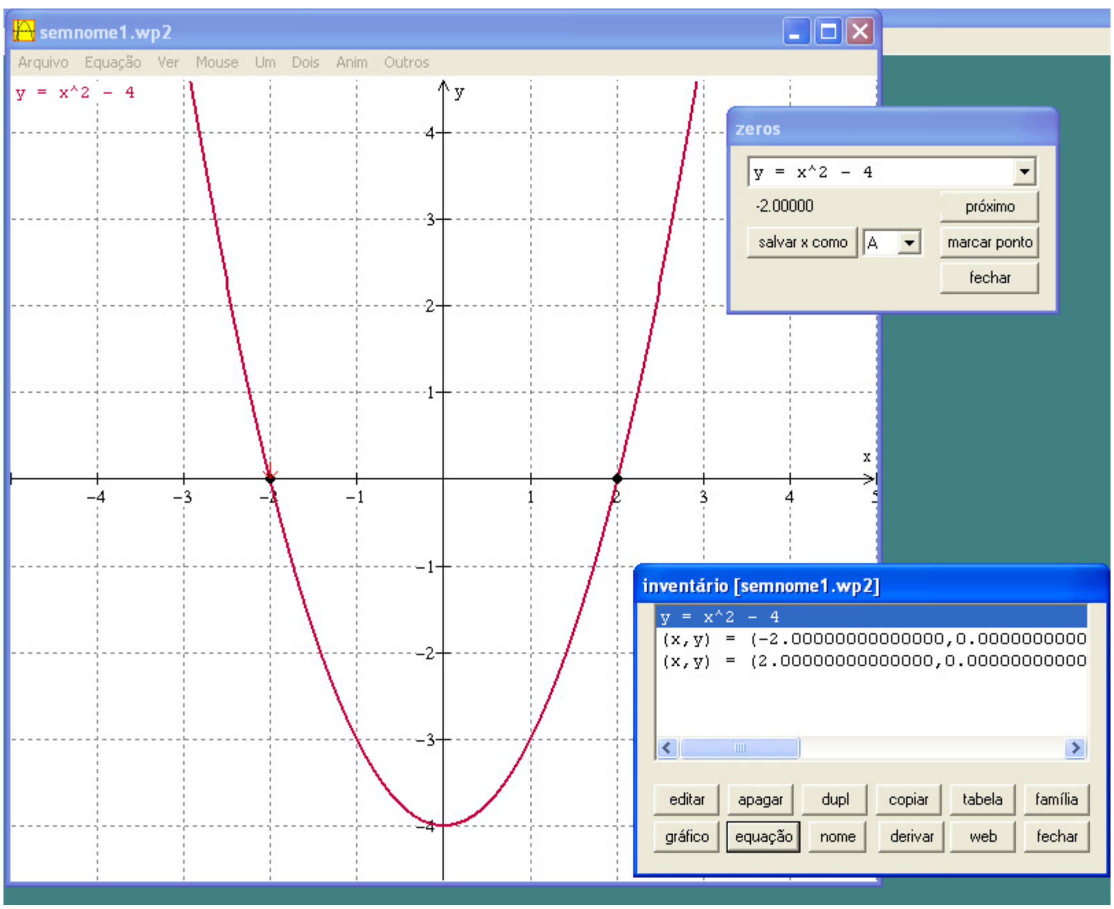
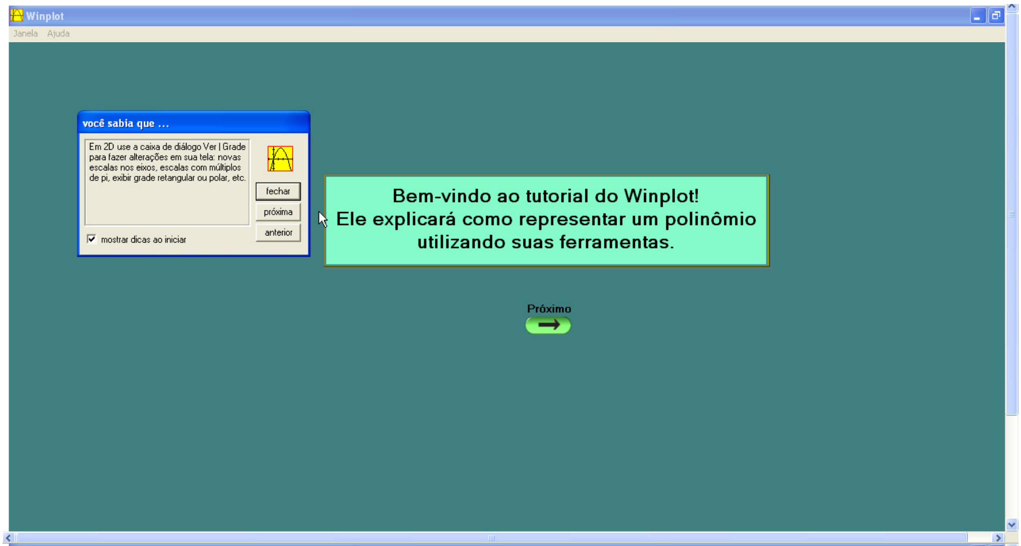
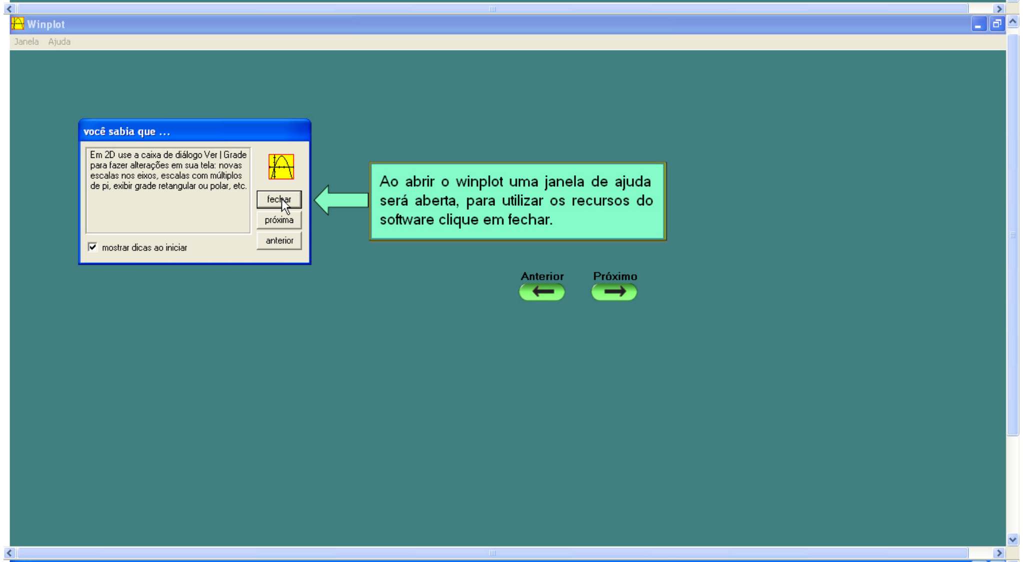


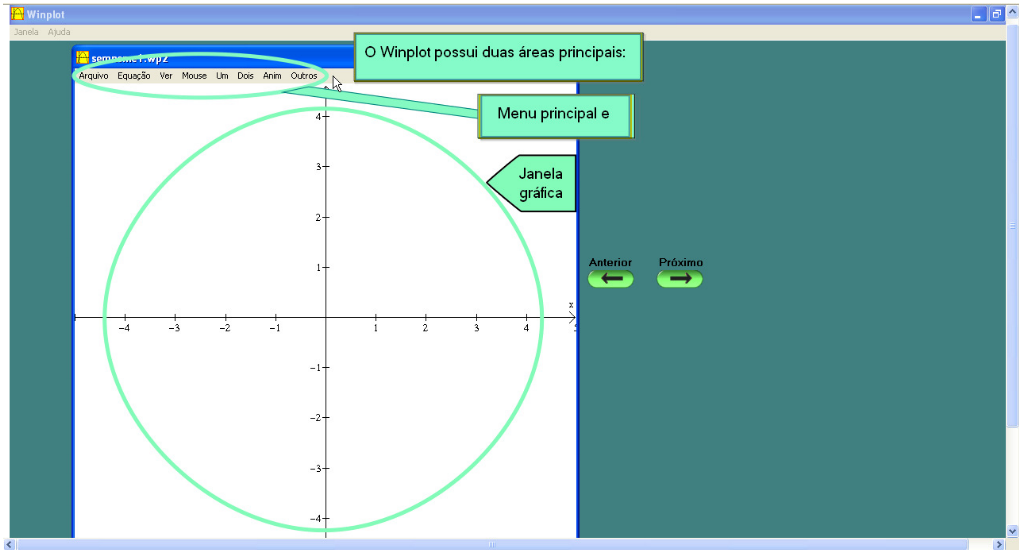
Figura 8

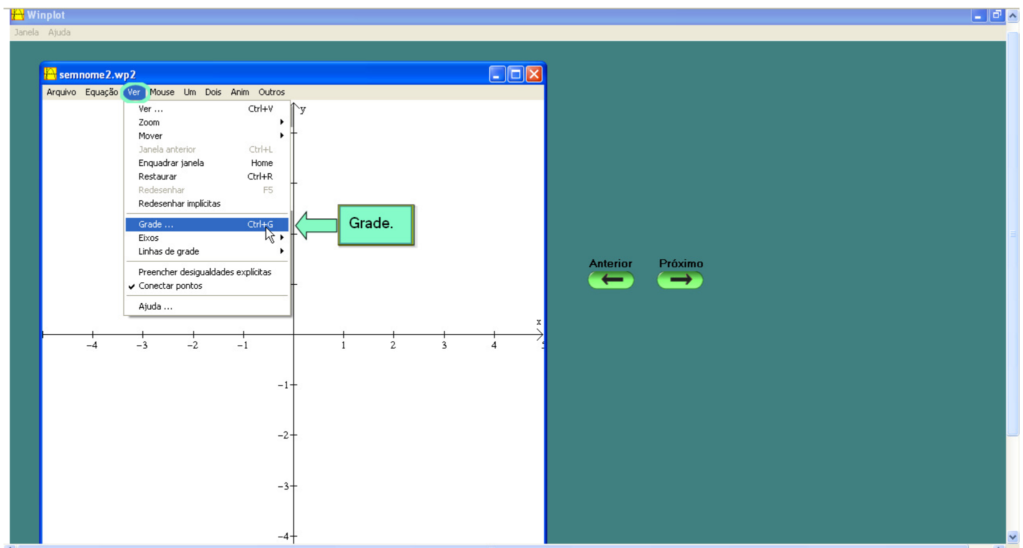
APÊNDICE IV: TUTORIAL: COMO REPRESENTAR UM POLINÔMIO COM AUXÍLIO DO WINPLOT

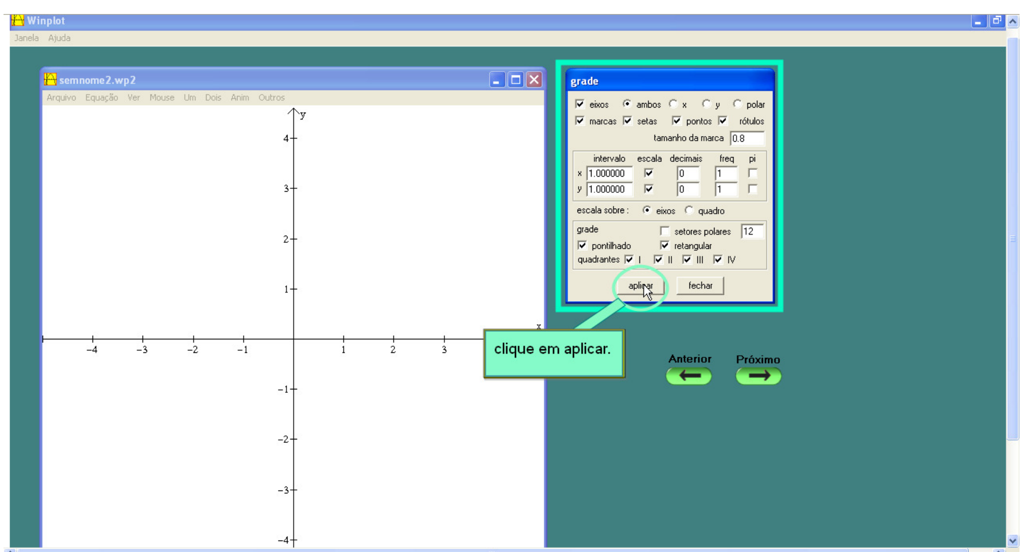
TUTORIAL: COMO REPRESENTAR UM POLINÔMIO COM AUXÍLIO DO WINPLOT

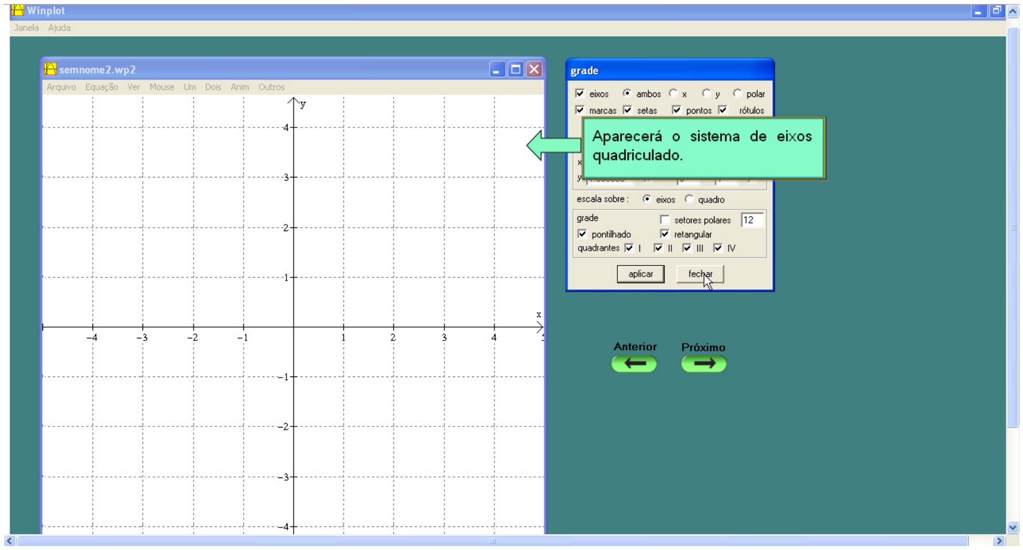


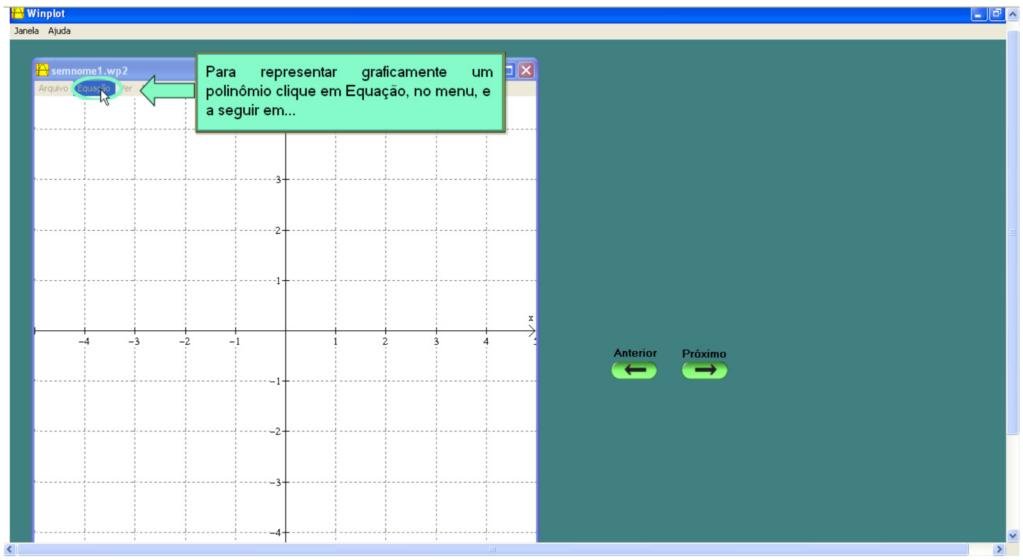


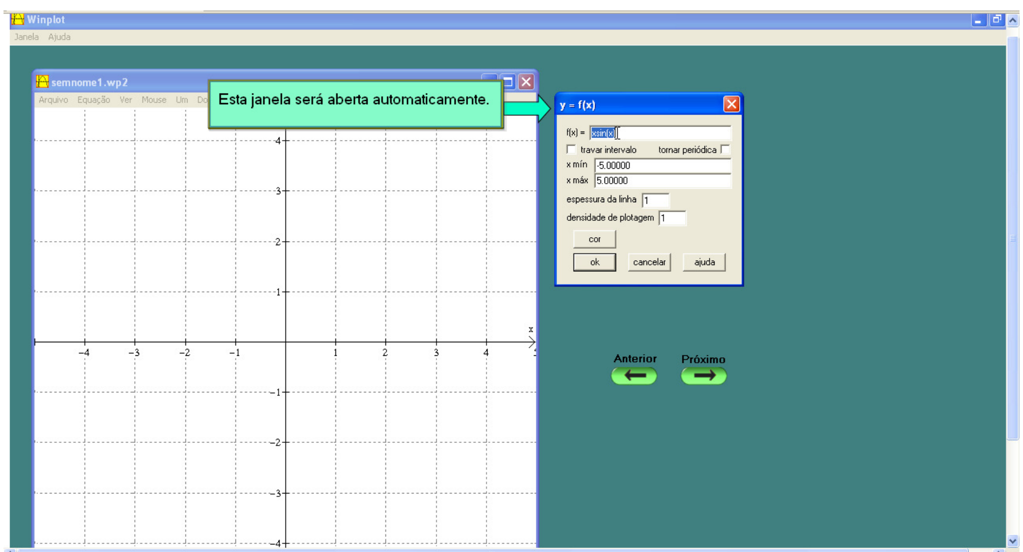

O Winplot possui duas áreas principais:
Menu principal e
Janela gráfica
Anterior
Próximo

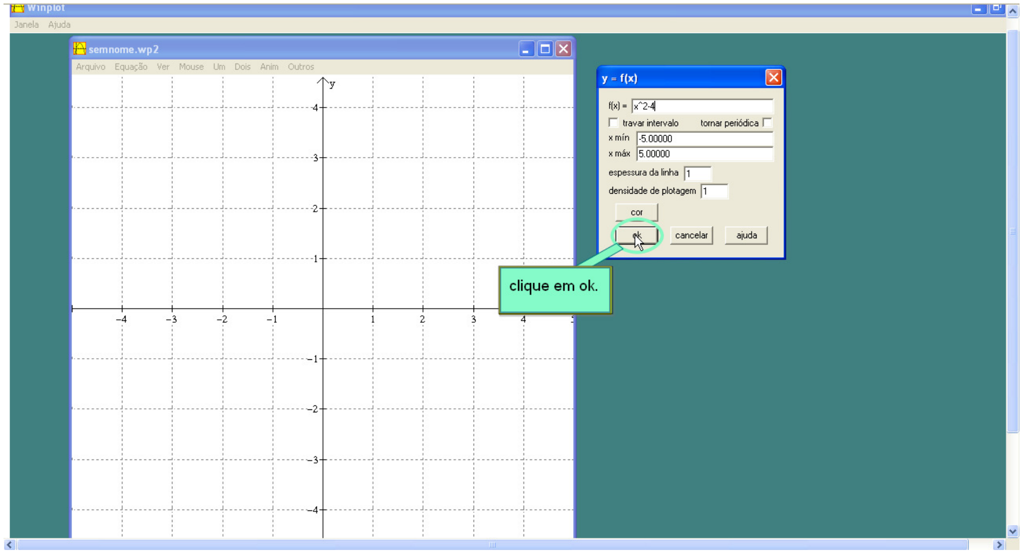

Grade.
Anterior
Próximo


clique em aplicar.
Anterior
Próximo

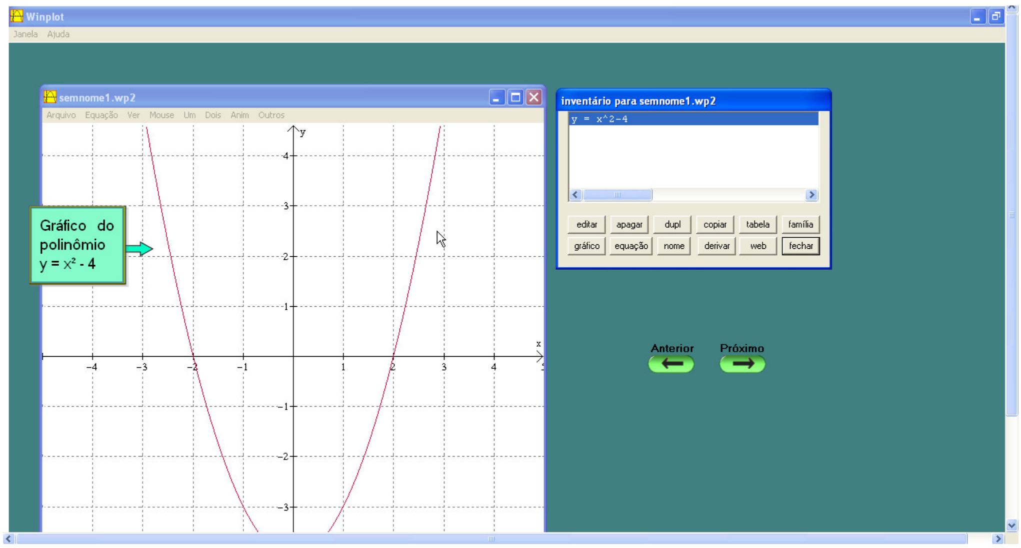

Winplot
semnome2.wp2
grade
Aparecerá o sistema de eixos quadriculado.
aplicar
fechar
Anterior
Próximo


Winplot
semnome1.wp2
Para representar graficamente um polinômio clique em Equação, no menu, e a seguir em...
Anterior
Próximo

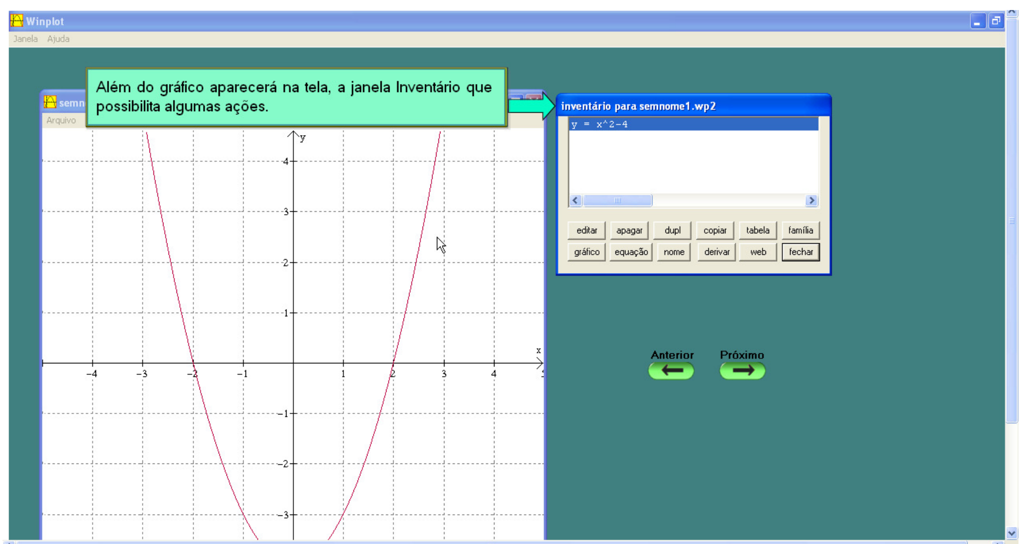

Winplot
semnome1.wp2
Esta janela será aberta automaticamente.
y = f(x)
ok
cancelar
ajuda
Anterior
Próximo



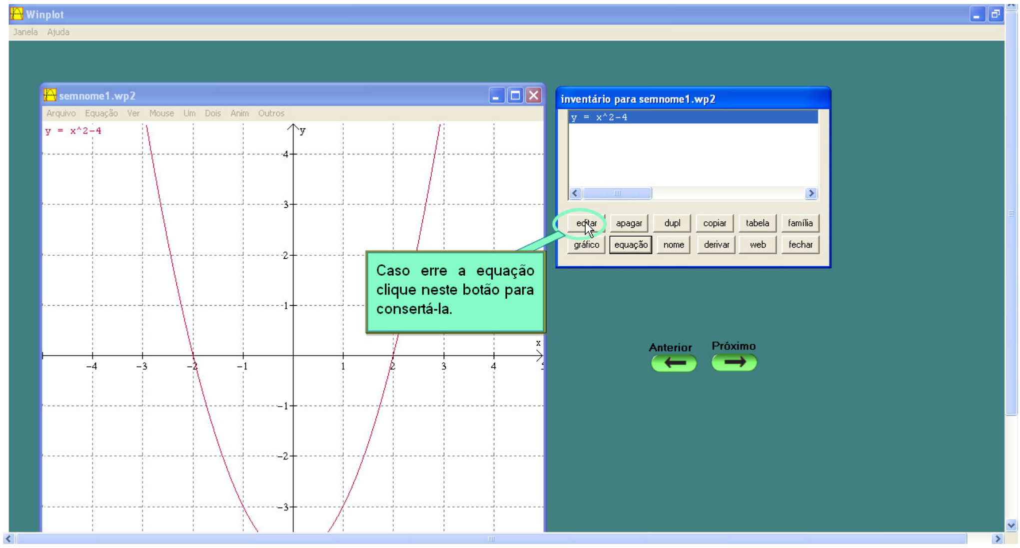
Winplot
semnome.wp2
y = f(x)
f(x) = x^2-4
travar intervalo
tornar periódica
x mín -5.00000
x máx 5.00000
espessura da linha 1
densidade de plotagem 1
cor
ok
cancelar
ajuda
clique em ok.

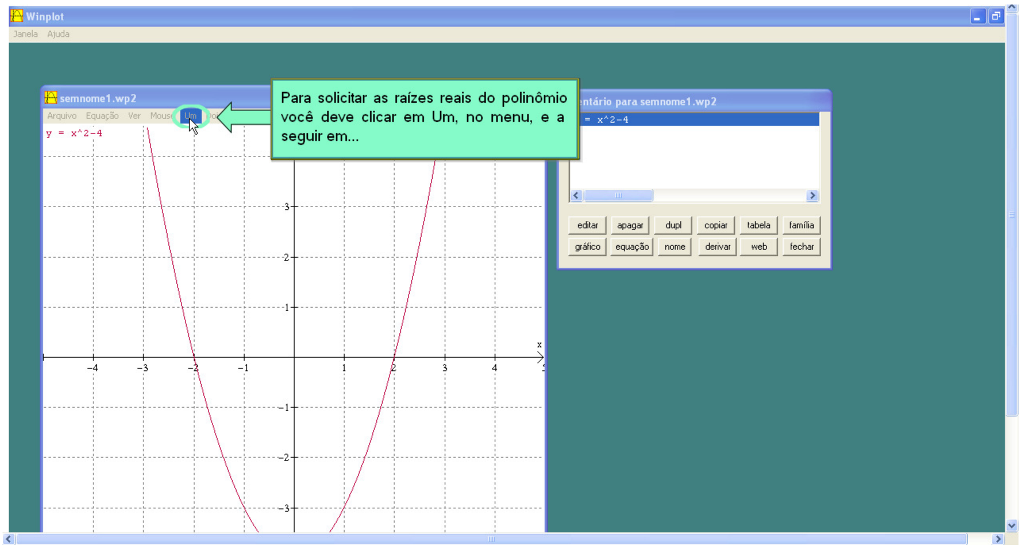


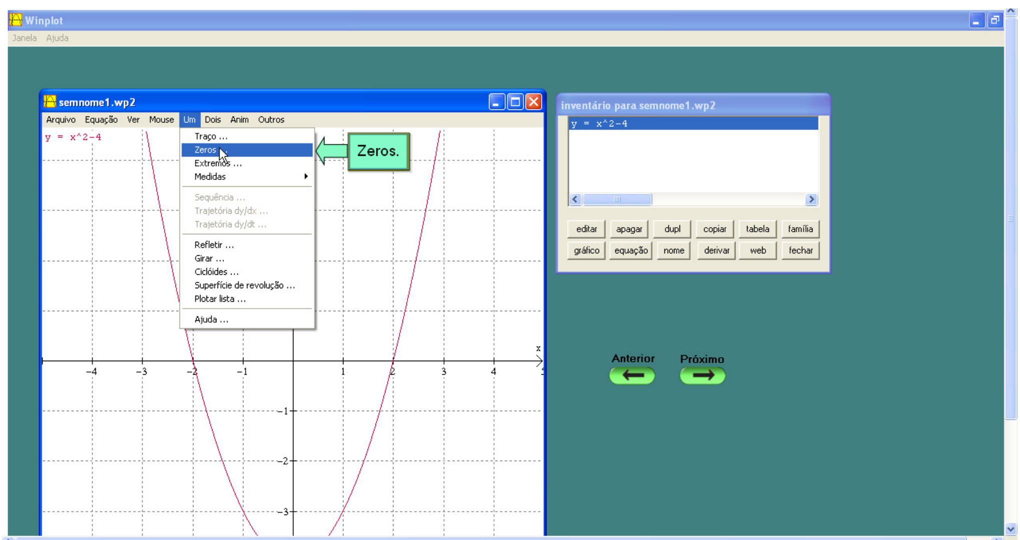
Winplot
semnome1.wp2
inventário para semnome1.wp2
y = x^2-4
Gráfico do polinômio y = x² - 4
editar
apagar
dupl
copiar
tabela
família
gráfico
equação
nome
derivar
web
fechar
Anterior
Próximo

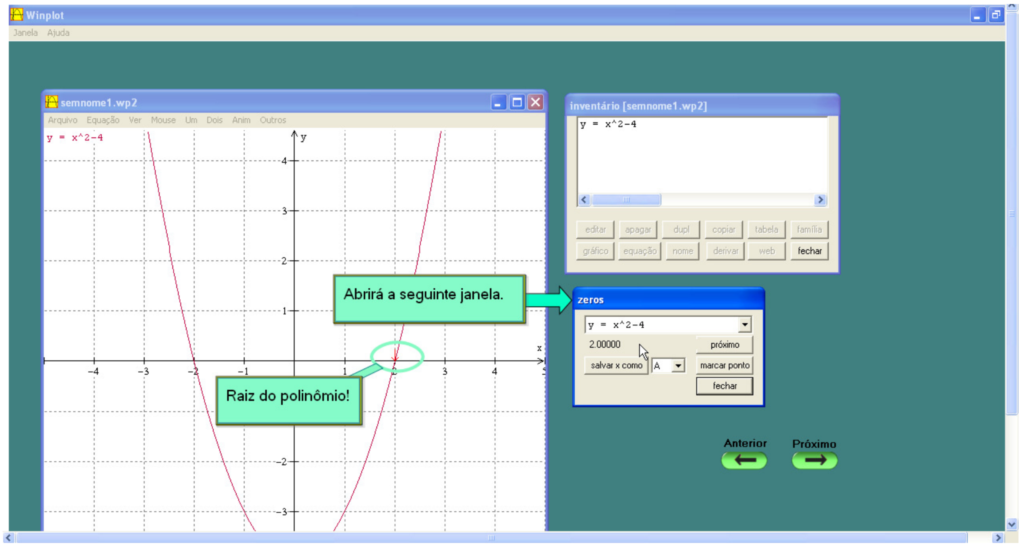


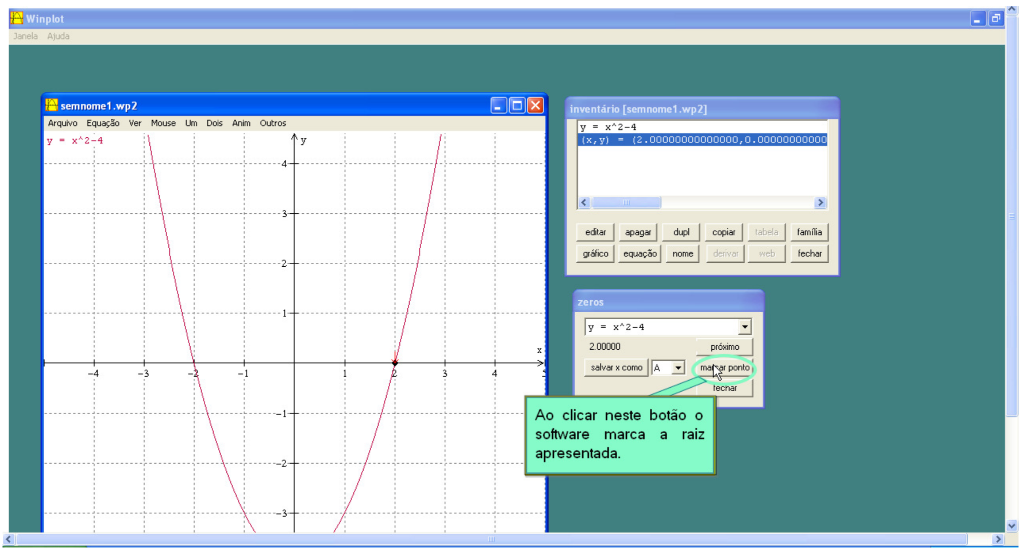
Winplot
Além do gráfico aparecerá na tela, a janela Inventário que possibilita algumas ações.
inventário para semnome1.wp2
y = x^2-4
editar
apagar
dupl
copiar
tabela
família
gráfico
equação
nome
derivar
web
fechar
Anterior
Próximo

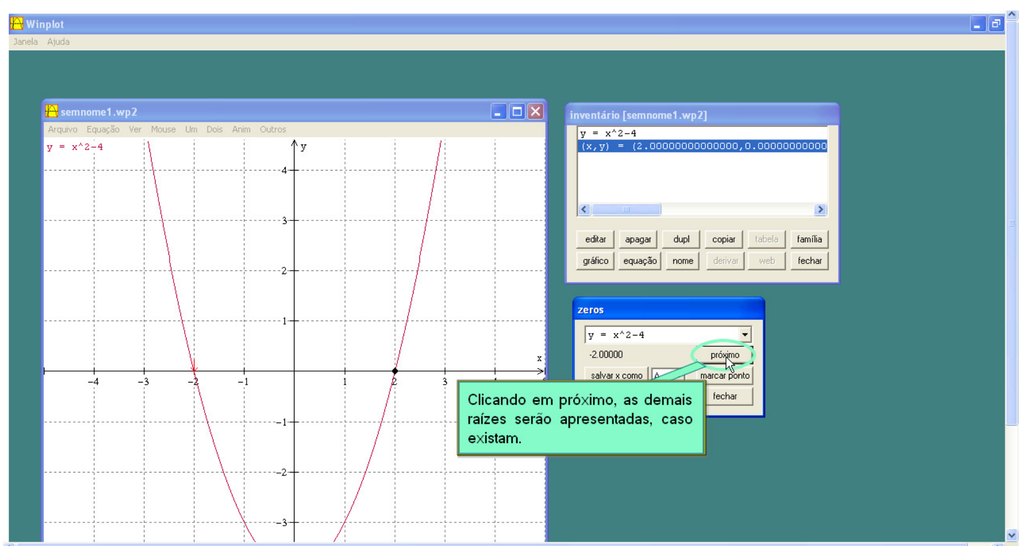

Winplot
semnome1.wp2
y = x^2-4
inventário para semnome1.wp2
editar
apagar
dupl
copiar
tabela
família
gráfico
equação
nome
derivar
web
fechar
Caso erre a equação clique neste botão para consertá-la.
Anterior
Próximo

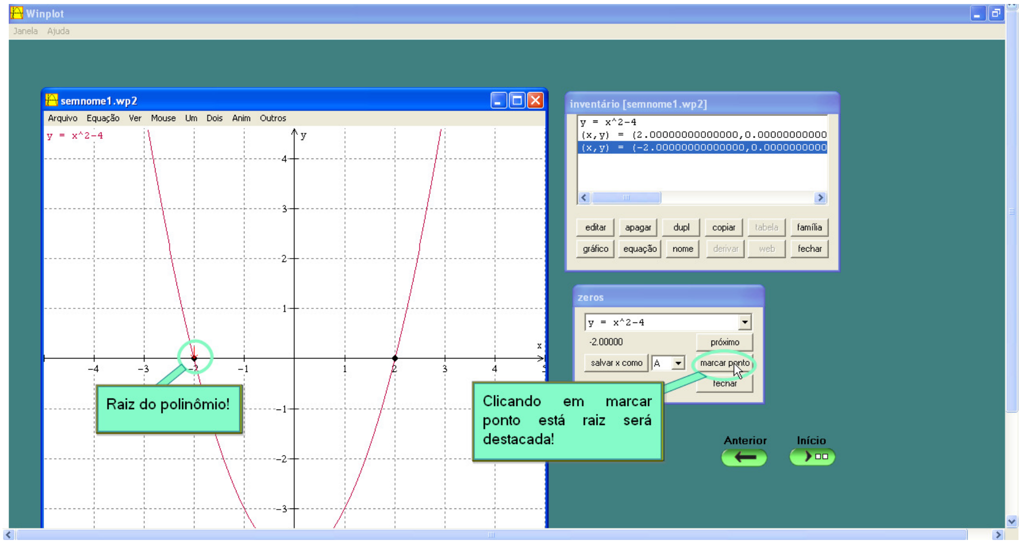

Winplot
semnome1.wp2
y = x^2-4
Para solicitar as raízes reais do polinômio você deve clicar em Um, no menu, e a seguir em...


Winplot
semnome1.wp2
Arquivo
Equação
Ver
Mouse
Um
Dois
Anim
Outros
y = x^2-4
Traço ...
Zeros
Extremos ...
Medidas
Sequência ...
Trajetória dy/dx ...
Trajetória dy/dt ...
Refletir ...
Girar ...
Ciclóides ...
Superfície de revolução ...
Plotar lista ...
Ajuda ...
Zeros.
inventário para semnome1.wp2
Anterior
Próximo


Abrirá a seguinte janela.
Raiz do polinômio!
Anterior
Próximo


Ao clicar neste botão o software marca a raiz apresentada.


Clicando em próximo, as demais raízes serão apresentadas, caso existam.


Winplot
semnome1.wp2
y = x^2-4
inventário [semnome1.wp2]
zeros
Raiz do polinômio!
Clicando em marcar ponto está raiz será destacada!
Anterior
Início

APÊNDICE V: ATIVIDADE I (1.ª VERSÃO)

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ATIVIDADE I

ALUNO: ____

1) Dados os polinômios:

$P_1(x) = x + 1$ | $P_5(x) = (x - 1)^3$

$P_2(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$ | $P_6(x) = 8(x - 2{,}5)^3$

$P_3(x) = x^2 - 4$ | $P_7(x) = x^5$

$P_4(x) = x^3$ | $P_8(x) = (x + 2)^5$

a) Determine as raízes reais de cada polinômio e suas respectivas multiplicidades.
b) Represente graficamente cada polinômio, com o auxílio do *software* Winplot. A seguir, reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado.

1.1) Analise os gráficos e as raízes reais encontradas, de cada polinômio, e descreva o que você observa.

2) Dados os polinômios abaixo:

$P_1(x) = x^2$ | $P_4(x) = x^4$

$P_2(x) = (x + 1)^2$ | $P_5(x) = (x + 2)^4$

$P_3(x) = 4(x - 0{,}5)^2$ | $P_6(x) = (x - 3)^4$

a) Determine as raízes reais de cada polinômio e suas respectivas multiplicidades.
b) Represente graficamente cada polinômio, com o auxílio do *software* Winplot. A seguir, reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado.

2.1) Analise os gráficos e as raízes reais encontradas, de cada polinômio, e descreva o que você observa.

3) Examine atentamente as intersecções de cada gráfico das questões 1 e 2 com o eixo das abscissas. O que você observa em relação ao aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e às de multiplicidade ímpar?

4) Represente graficamente cada polinômio abaixo, com o auxílio do *software* Winplot. Reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado. Observe o aspecto gráfico referente às raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar.

$P_1(x) = (x - 2)(x + 1)^2$

$P_3(x) = 3(x - 1)^2(x + 1)$

$P_2(x) = x^2 (x + 2)^3$

$P_4(x) = (x - 1)^5(x + 1)^2$

$P_5(x) = x(x + 1)(x - 1)$

5) Represente graficamente cada polinômio abaixo, com o auxílio do *software* Winplot. Reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado. Destaque as raízes reais representadas no gráfico e identifique se estas têm multiplicidade par ou ímpar.

$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

$P_2(x) = x^4 - 4x^2$

$P_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

6) Dados os polinômios:

$P_1(x) = x^2 + 1$

$P_3(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$

$P_2(x) = x(x^2 + 1)$

$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$P_5(x) = 0{,}1x(x^2 + 1)$

a) Determine as raízes, no conjunto dos números complexos, de cada polinômio e suas respectivas multiplicidades.

b) Represente graficamente cada polinômio, com o auxílio do *software* Winplot. Reproduza no sistema de eixos dado, na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado.

c) Analise o gráfico e as raízes encontradas, de cada polinômio, e descreva o que você observa.

APÊNDICE VI : Caderno de respostas da Atividade I (1.ª versão)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

RESPOSTAS

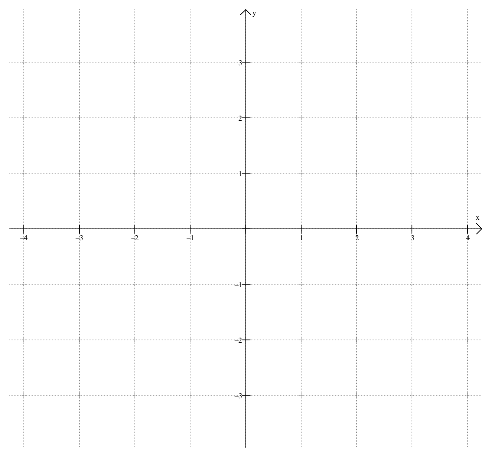
ALUNO: ____

1)

$P_1(x) = x + 1$

a)

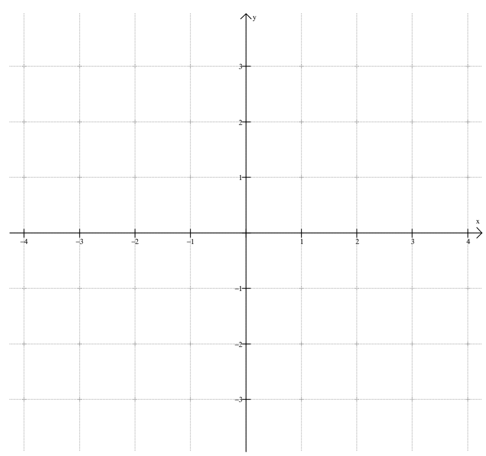
b)



$P_2(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$

a)

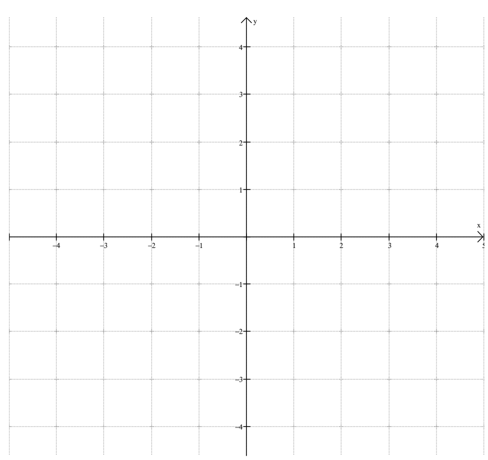
b)



$P_3(x) = x^2 - 4$

a)

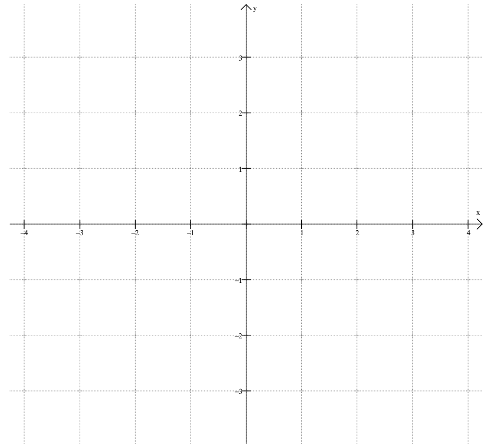
b)



$P_4(x) = x^3$

a)

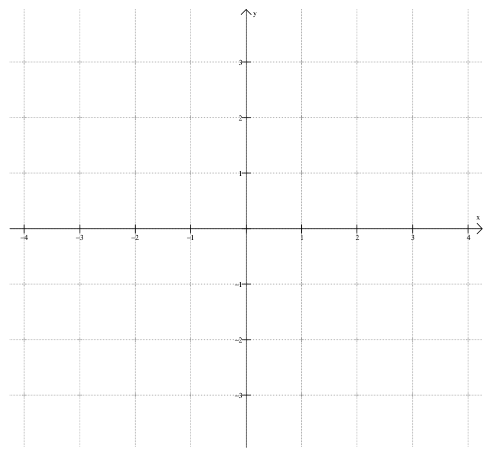
b)



$P_5(x) = (x - 1)^3$

a)

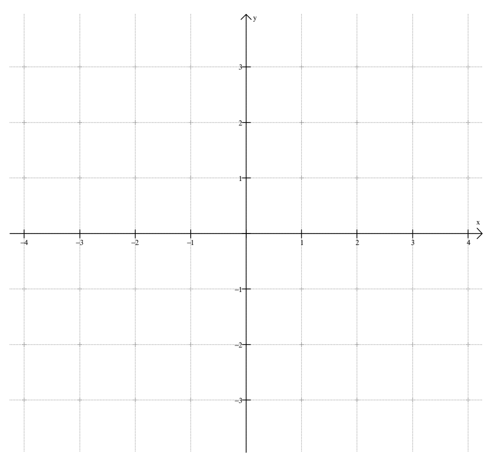
b)



$P_6(x) = 8(x - 2{,}5)^3$

a)

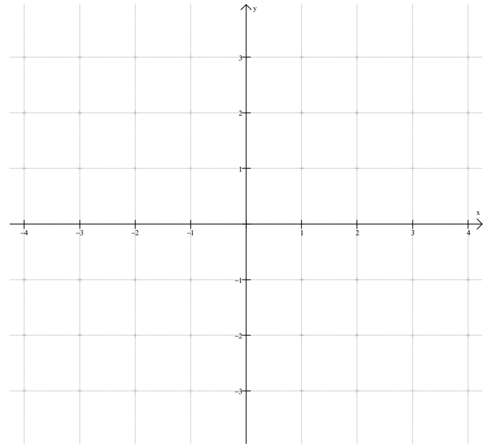
b)



$P_7(x) = x^5$

a)

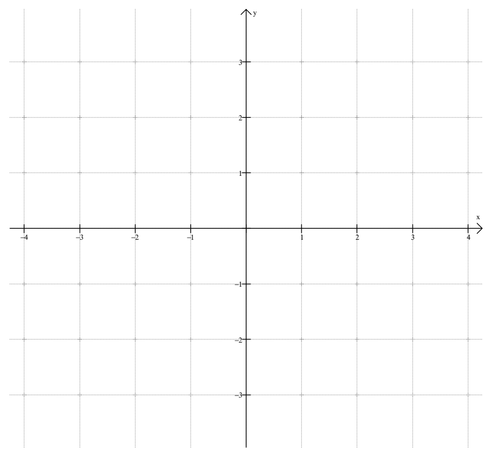
b)



$P_8(x) = (x + 2)^5$

a)

b)



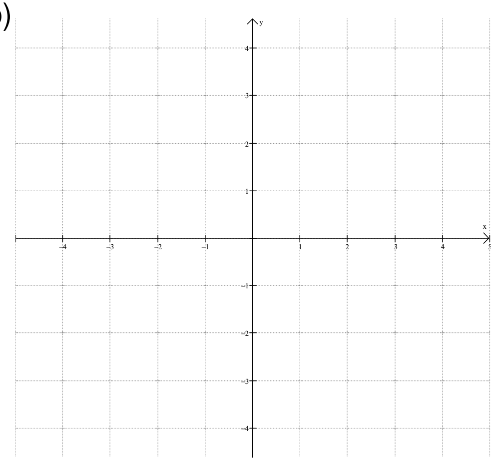
1.1)

2)

$P_1(x) = x^2$

a)

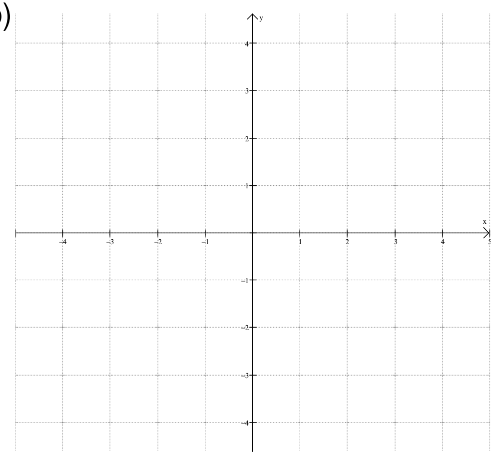
b)



$P_2(x) = (x + 1)^2$

a)

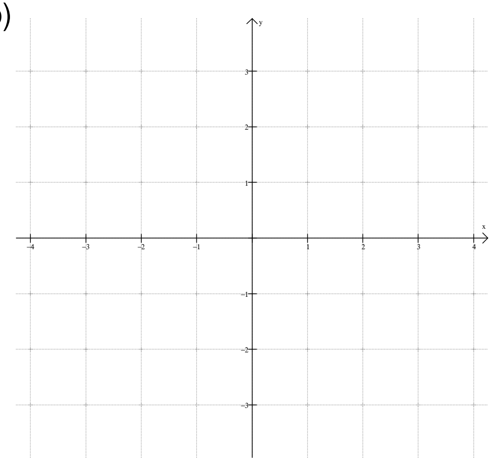
b)



$P_3(x) = 4(x – 0,5)^2$

a)

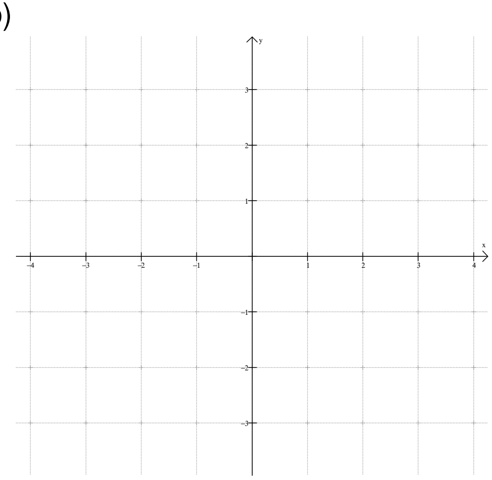
b)



$P_4(x) = x^4$

a)

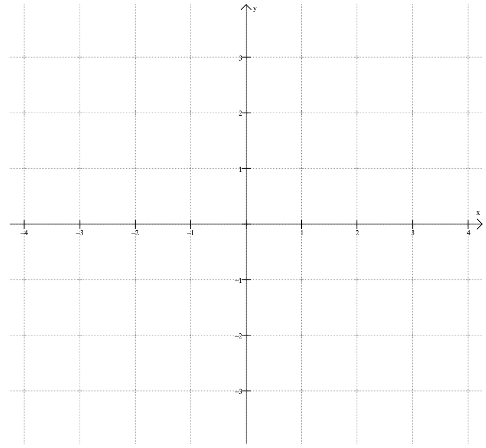
b)



$P_5(x) = (x + 2)^4$

a)

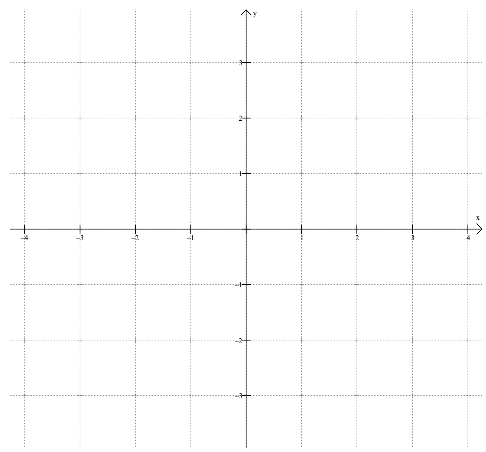
b)



$P_6(x) = (x - 3)^4$

a)

b)

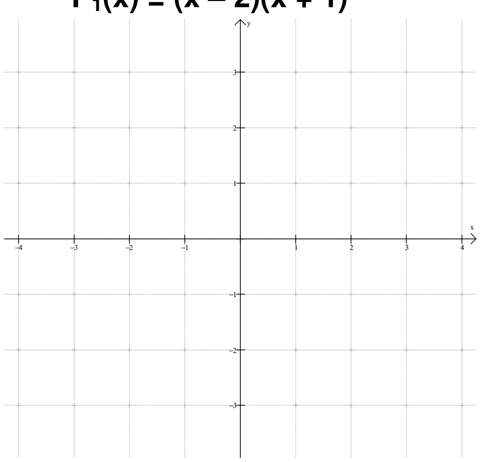


2.1)

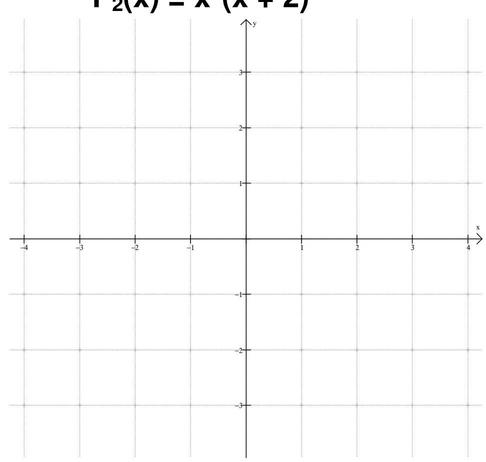
3)

4)

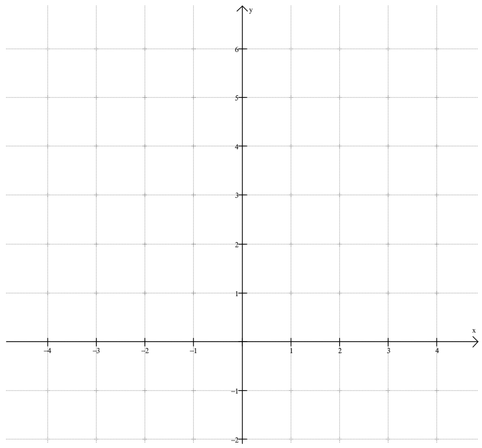
$P_1(x) = (x - 2)(x + 1)^2$



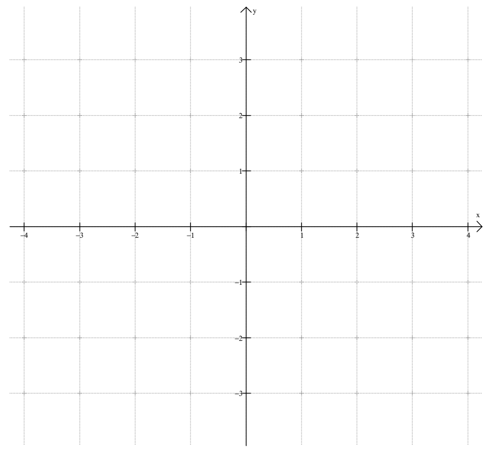
$P_2(x) = x^2(x + 2)^3$



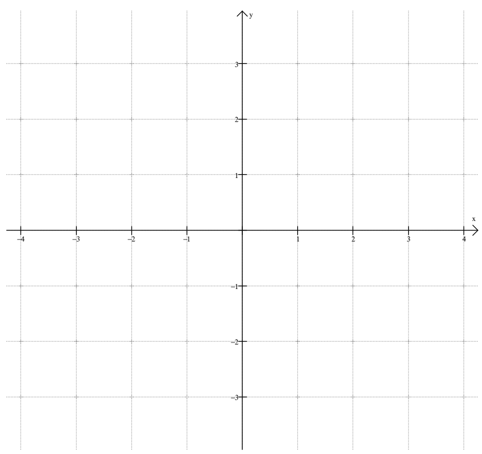
$P_3(x) = 3(x-1)^2(x+1)$



$P_4(x) = (x-1)^5(x+1)^2$

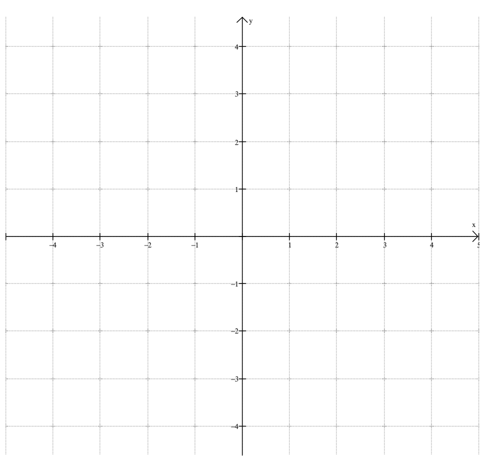


$P_5(x) = x(x+1)(x-1)$

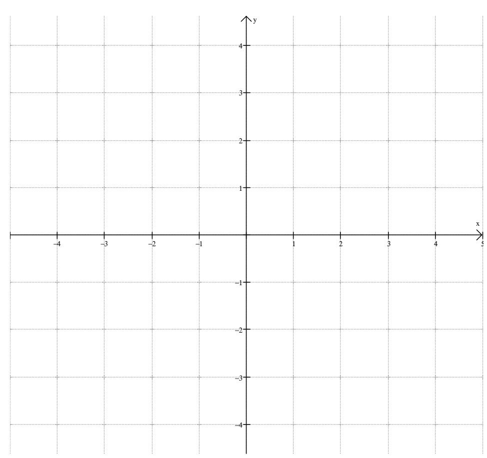


5)

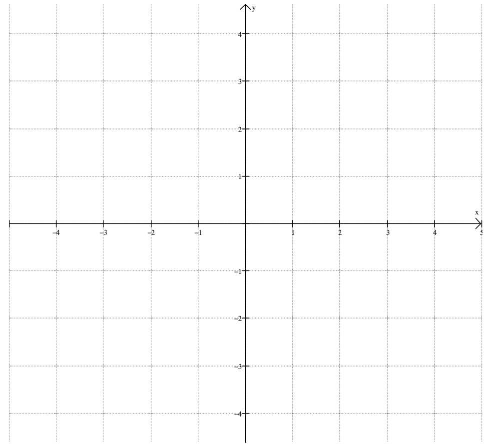
$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$



$P_2(x) = x^4 - 4x^2$



$P_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

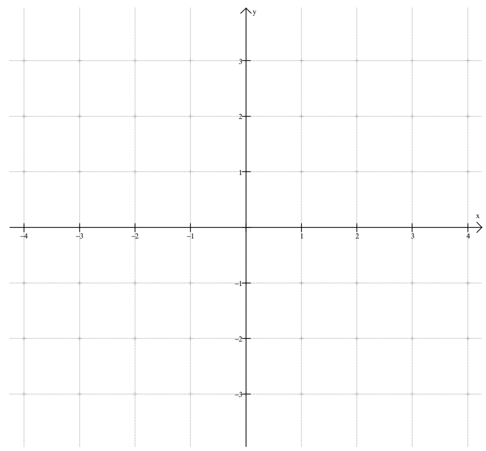


6)

$P_1(x) = x^2 + 1$

a)

b)



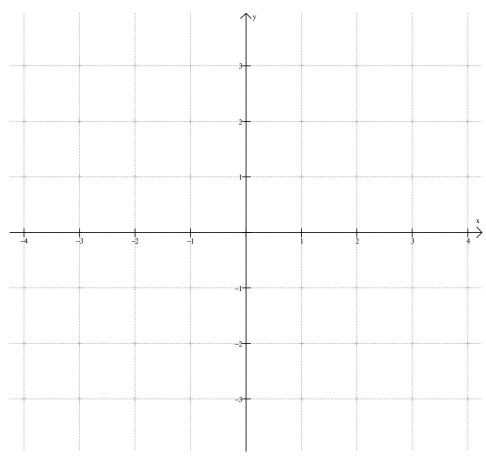
c)____

____

$P_2(x) = x(x^2 + 1)$

a)

b)



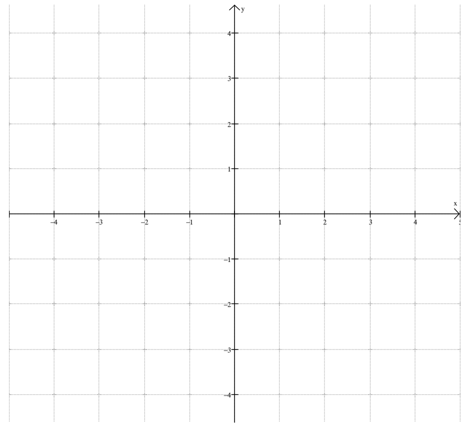
c)____

____

$P_3(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$

a)

b)

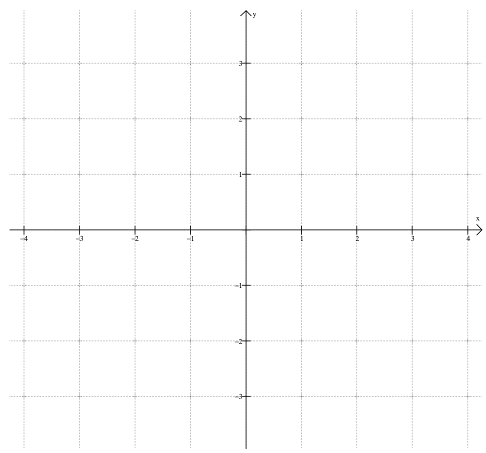


c)

$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

a)

b)

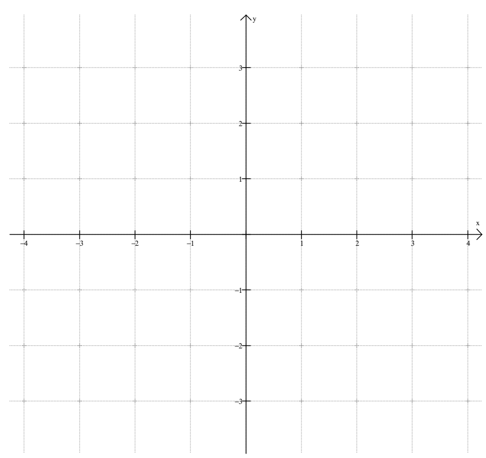


c)

$P_5(x) = 0,1x(x^2 + 1)$

a)

b)



c)

APÊNDICE VII: Atividade II (1.ª versão)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

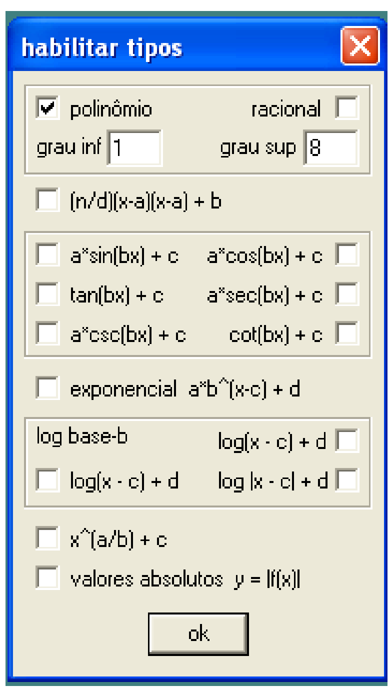
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação

ATIVIDADE II

ALUNO: ____

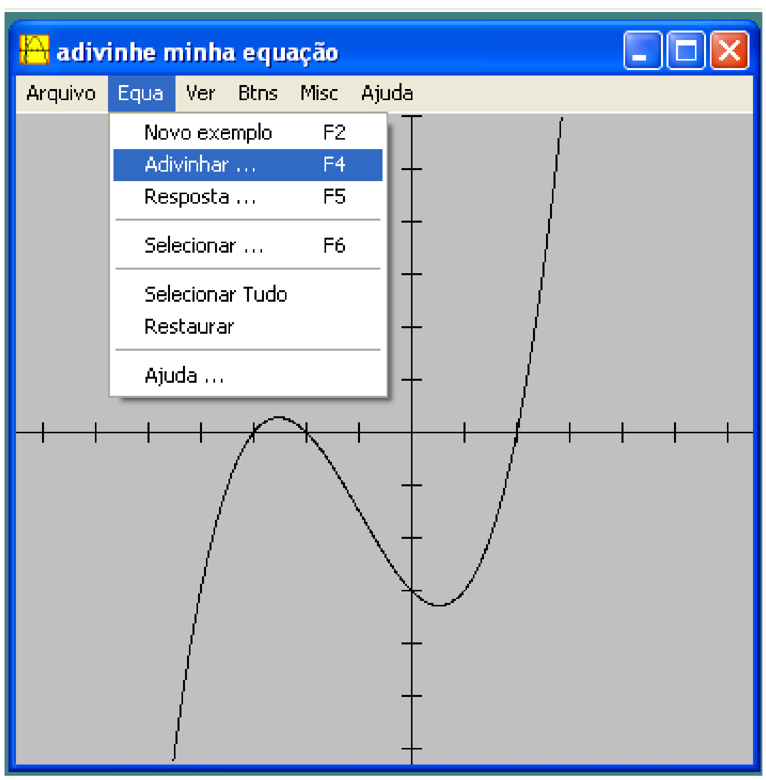
1- No Winplot selecione: Janela/ Adivinhar. Aparecerá a janela adivinhe minha equação, então selecione Equa/Selecionar...

2- Após optar por Selecionar… abrirá a janela **habilitar tipos**. Nesta janela, selecione polinômio e preencha os campos grau inf com **1** e grau sup com **8**, conforme abaixo, a seguir, clique em OK.

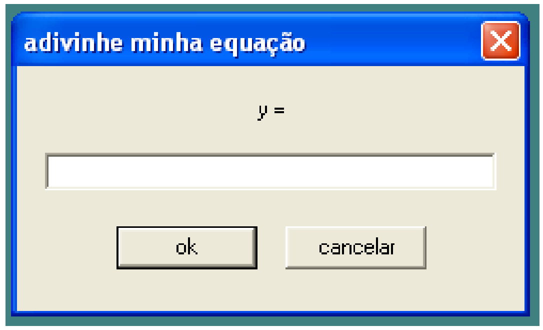


3- No menu Equa, selecione Novo exemplo.

Ao selecionar Novo exemplo, abrirá a janela adivinhe minha equação. Nesta janela, você irá visualizar um exemplo de gráfico e, a partir deste, tente adivinhar sua equação (para isto, selecione Equa/ Adivinhar...).



4- Ao selecionar Equa/Adivinhar, a seguinte janela será aberta.



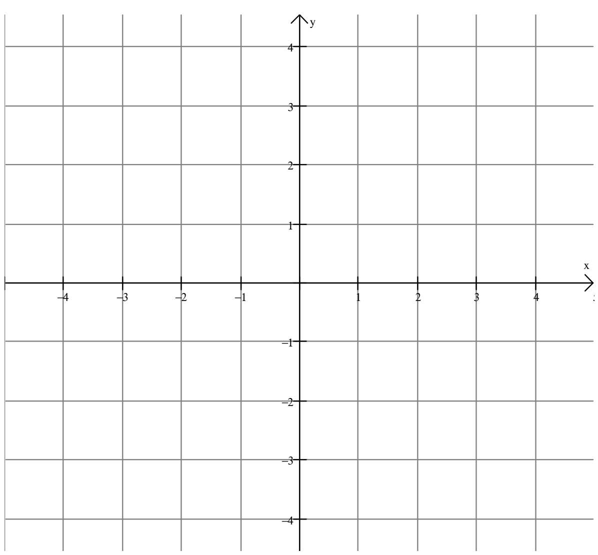
No campo em branco, você deve digitar, na forma fatorada, a equação que corresponde à curva visualizada e, após, clique ok.

Se você acertar a equação aparecerá **perfeito!**

Caso contrário, irá aparecer **tentativa outra vez?** E você deverá selecionar novamente Equa/Adivinhar ou usar o atalho F4 para ter outras chances de encontrar a equação correta.

Observação: Vale ressaltar que os gráficos sugeridos ao selecionar Novo Exemplo são de funções polinomiais que possuem somente raízes inteiras.

Dentre os exemplos de gráficos que apareceram, escolha um e faça seu esboço no sistema de eixos abaixo. Dê a equação que você encontrou.



Equação:________________

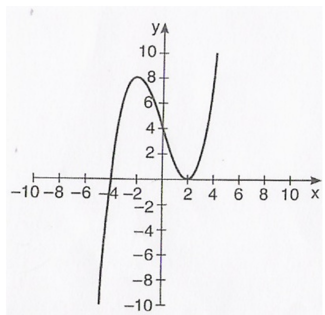
APÊNDICE VIII: Exercícios

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

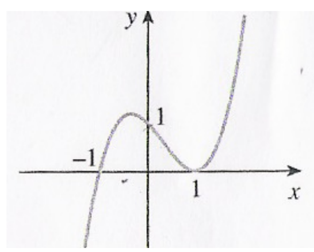
ALUNO: ____

EXERCÍCIOS

1- (PUC–RS. Adaptada) Na figura, tem-se o gráfico de p(x)= $ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que todos os coeficientes são reais. Qual das raízes é dupla?



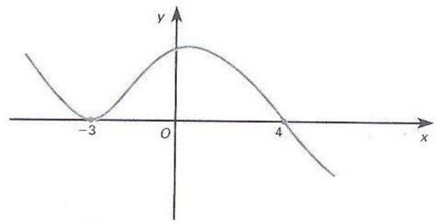
2- (MELLO e BARROSO, p.607, 2005) O gráfico abaixo representa o polinômio $P(x) = x^3 - x - x^2 + 1$.



a) Determine as raízes de P(x) e escreva-o na forma fatorada.

b) Indique a multiplicidade de cada uma das raízes de P(x).

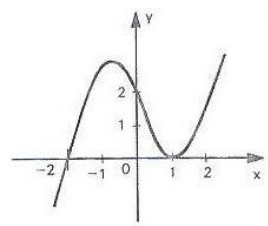
3- (PAIVA, p.377, 1995) O gráfico de uma função $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$, $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0\} \subset IR$, é:



Assinale a afirmação verdadeira:
a) – 3 é raiz simples.
b) – 3 é raiz de multiplicidade par.
c) 4 pode ser raiz dupla.
d) Se não houver mais raízes reais além de –3 e 4, então o menor valor possível de n é 5.
e) Se não houver mais raízes reais e $\alpha > 4$, então se pode ter $f(\alpha) > 0$.

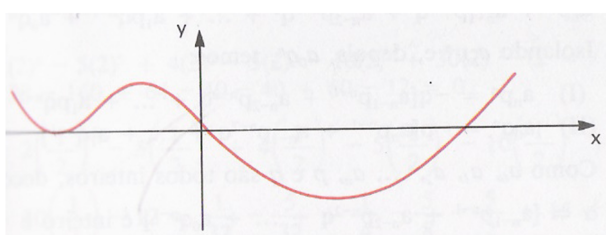
4- (PUC-RS-80) O gráfico na figura é de uma função $f: IR \rightarrow IR$ em que f(x) é um polinômio do 3.º grau. Para a equação f(x) =0, afirmamos:

I) o termo independente de x é igual a 2,
II) suas raízes são –2, 2 e 1,
III) suas raízes são –2, –2 e 1,
IV) suas raízes são –2, 1 e 1.



Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):
a) II b) III c) I e II d) I e III e) I e IV

5- (IEZZI, 1993. Adaptada) Seja P(x) um polinômio de coeficientes reais, cujas raízes reais estão todas representadas no esboço do gráfico a seguir:



Qual das proposições abaixo, sobre o polinômio P(x), é correta?
a) Pode ser do 3.º grau.
b) Pode ser do 5.º grau.
c) Pode ser do 6.º grau.

APÊNDICE IX: Atividade I - reformulada

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação — BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ATIVIDADE I

ALUNO: ____

1) Para cada um dos polinômios abaixo, dê o que se pede:

$P_1(x) = x + 1$	$P_5(x) = -(x-1)^3$
$P_2(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$	$P_6(x) = 8(x-2{,}5)^3$
$P_3(x) = x^2 - 4$	$P_7(x) = x^5$
$P_4(x) = x^3$	$P_8(x) = -(x+2)^5$

a) Determine suas raízes reais e identifique se essas são de multiplicidade par ou ímpar.

b) Represente-o graficamente, com o auxílio do *software* Winplot. Em seguida, clique em Um/ Zeros... e solicite a marcação de todos os zeros. O recurso zeros... do software determina as raízes reais do polinômio.

c) Reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço do gráfico representado no Winplot, destacando as raízes reais.

1.1) Analise as intersecções dos gráficos dos polinômios com o eixo x e as raízes reais de cada um deles. O que você observa?

2) Para cada um dos polinômios abaixo, dê o que se pede:

$P_1(x) = x^2$	$P_4(x) = -x^4$
$P_2(x) = x^2(x-2)^4$	$P_5(x) = -(x+2)^4$
$P_3(x) = 4(x-0{,}5)^2$	$P_6(x) = -(x+1)^6(x-1)^2$

a) Determine suas raízes reais e identifique se essas são de multiplicidade par ou ímpar.

b) Represente-o graficamente, com o auxílio do *software* Winplot. Em seguida, clique em Um/ Zeros... e solicite a marcação de todos os zeros. O recurso zeros... do software determina as raízes reais do polinômio.

c) Reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço do gráfico representado no Winplot, destacando as raízes reais.

2.1) Analise as intersecções dos gráficos dos polinômios com o eixo x e as raízes reais de cada um deles. O que você observa?

3) Examine atentamente os gráficos das questões 1 e 2.

3.1) O que você observa em relação ao aspecto do gráfico nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar?

3.2) Analise o sinal de cada polinômio nas proximidades das raízes reais e descreva o que você observa em relação às raízes de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar.

4) Para cada um dos polinômios abaixo, dê o que se pede:

$P_1(x)= (x – 2)(x + 1)^2$

$P_2(x)= x^2 (x + 2)^3$

$P_3(x)= –3(x – 1)^2(x + 1)$

$P_4(x) = (x – 1)^5(x + 1)^2$

$P_5(x) = –x(x + 1)(x – 1)$

a) Determine suas raízes reais e identifique se essas são de multiplicidade par ou ímpar.

b) Represente-o graficamente, com o auxílio do *software* Winplot. Em seguida, clique em Um/ Zeros... e solicite a marcação de todos os zeros.

c) Reproduza no sistema de eixos, dado na folha de respostas, o esboço do gráfico representado no Winplot, destacando as raízes reais.

4.1) O que você observa em relação ao aspecto do gráfico nas proximidades das raízes reais de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar?

4.2) Analise o sinal de cada polinômio nas proximidades das raízes reais e descreva o que você observa em relação às raízes de multiplicidade par e de multiplicidade ímpar.

5) Represente graficamente cada polinômio abaixo, com o auxílio do *software* Winplot. Reproduza no sistema de eixos dado, na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado, destaque as raízes reais e identifique as de multiplicidade par e as de multiplicidade ímpar, a partir do aspecto gráfico.

$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

$P_2(x) = -x^4 + 4x^2$

$P_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

$P_4(x) = -x^5 + 4x^4 - 4x^3$

6) Para cada polinômio abaixo:

$P_1(x) = x^2 + 1$

$P_2(x) = x(x^2 + 1)$

$P_3(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$

$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$P_5(x) = 0,1x(x^2 + 1)$

a) Determine as raízes, no conjunto dos números complexos, e suas respectivas multiplicidades.

b) Represente-o graficamente, com o auxílio do *software* Winplot. Clique em Um/ Zeros... e solicite a marcação de todas as raízes reais do polinômio.

c) Reproduza no sistema de eixos dado, na folha de respostas, o esboço de cada gráfico representado.

6.1) Analise o gráfico e as raízes encontradas no item a de cada polinômio e descreva o que você observa.

APÊNDICE X: Caderno de respostas da Atividade I - reformulada

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

RESPOSTAS

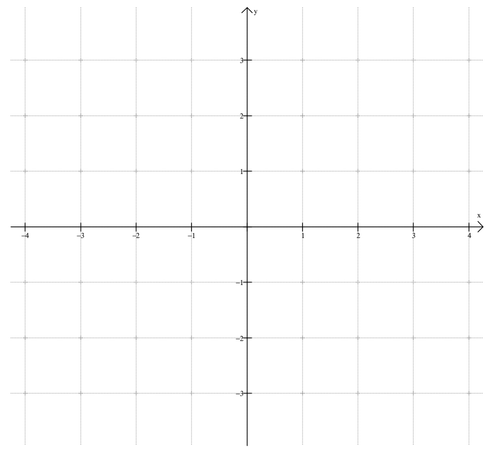
ALUNO: ____

1)

$P_1(x) = x + 1$

a)

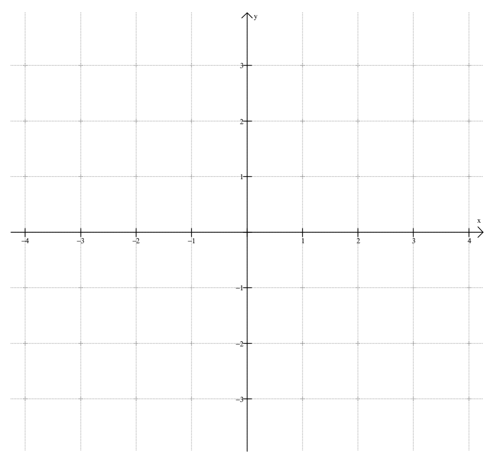
c)



$P_2(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$

a)

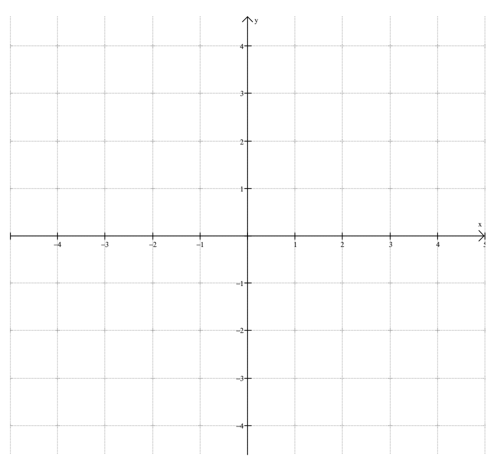
c)



$P_3(x) = x^2 - 4$

a)

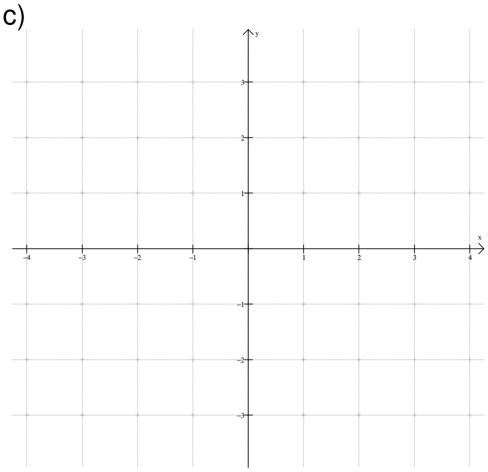
c)



$P_4(x) = x^3$

a)

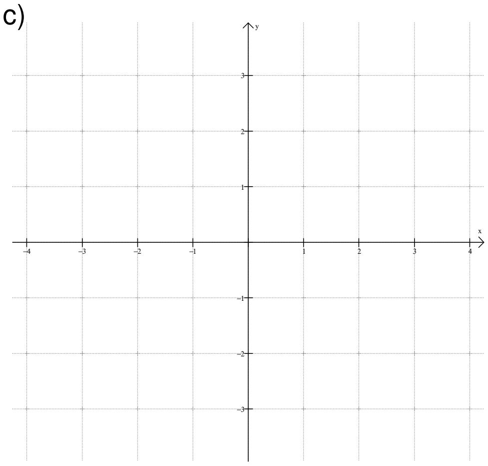
c)



$P_5(x) = -(x-1)^3$

a)

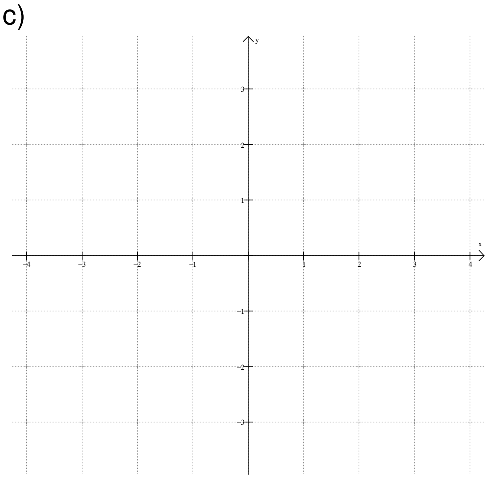
c)



$P_6(x) = 8(x-2{,}5)^3$

a)

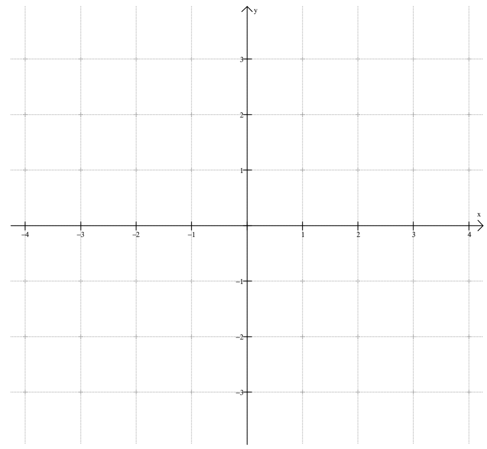
c)



$P_7(x) = x^5$

a)

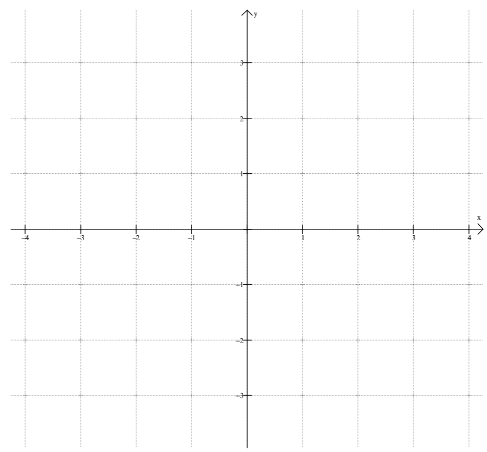
c)



$P_8(x) = -(x + 2)^5$

a)

c)



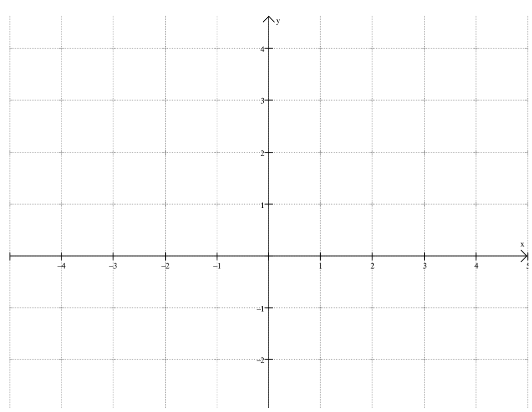
1.1)____

2)

$P_1(x) = x^2$

a)

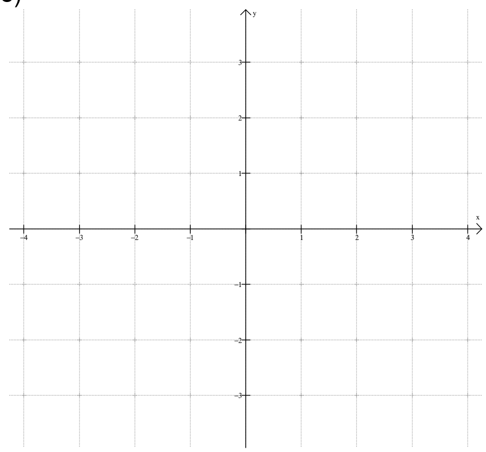
c)



$P_2(x) = x^2 (x - 2)^4$

a)

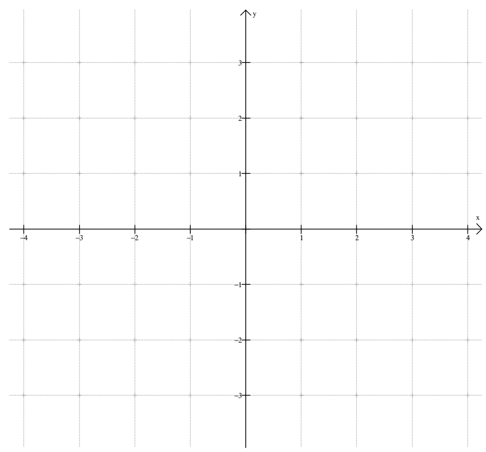
c)



$P_3(x) = 4(x - 0,5)^2$

a)

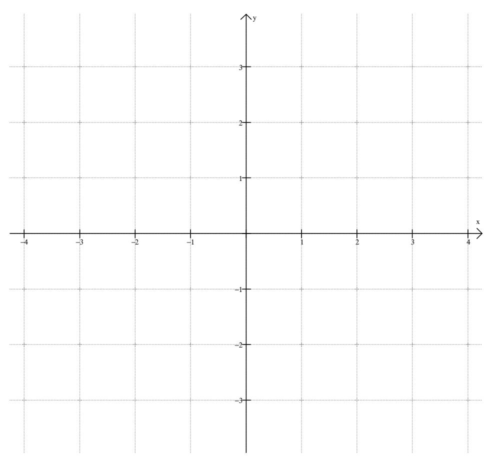
c)



$P_4(x) = -x^4$

a)

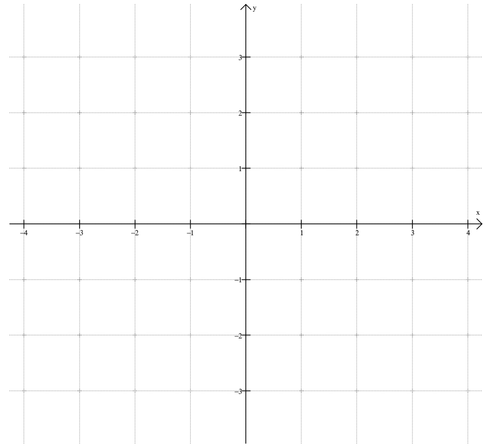
c)



$P_5(x) = -(x + 2)^4$

a)

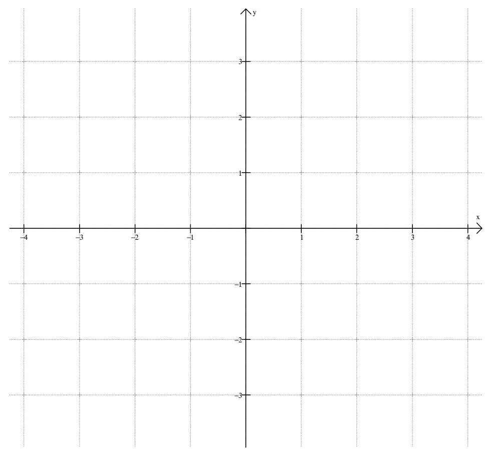
c)



$P_6(x) = -(x + 1)^6(x - 1)^2$

a)

c)



2.1)____

3)

3.1)____

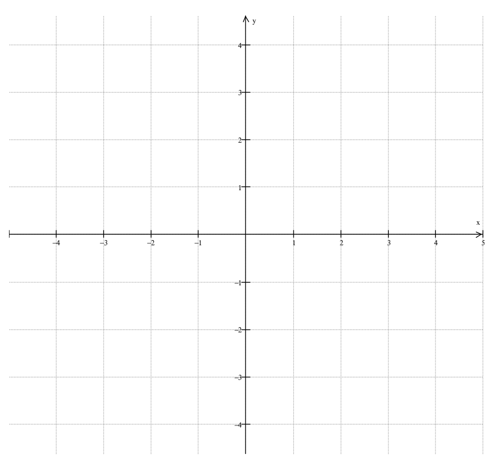
3.2)____

4)

$P_1(x) = (x - 2)(x + 1)^2$

a)

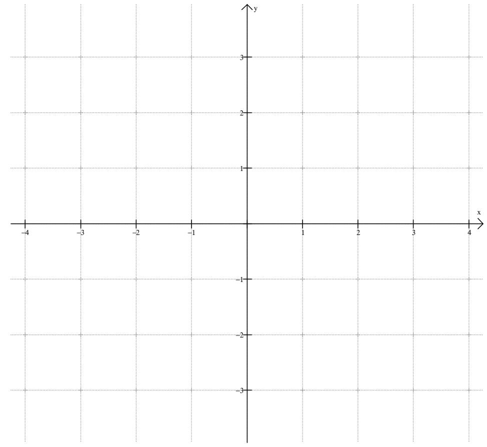
c)



$P_2(x) = x^2(x + 2)^3$

a)

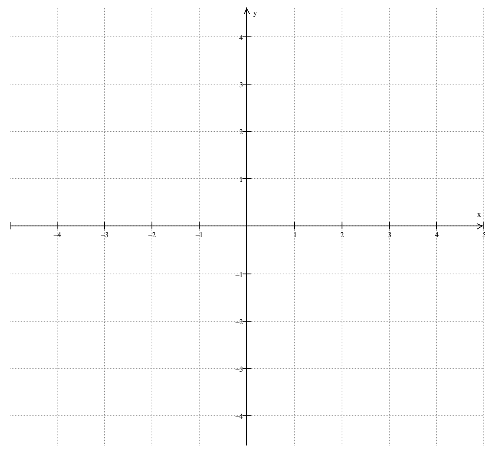
c)



$P_3(x) = -3(x - 1)^2(x + 1)$

a)

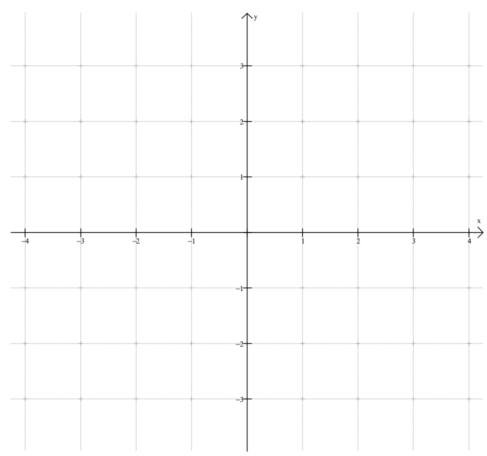
c)



$P_4(x) = (x - 1)^5(x + 1)^2$

a)

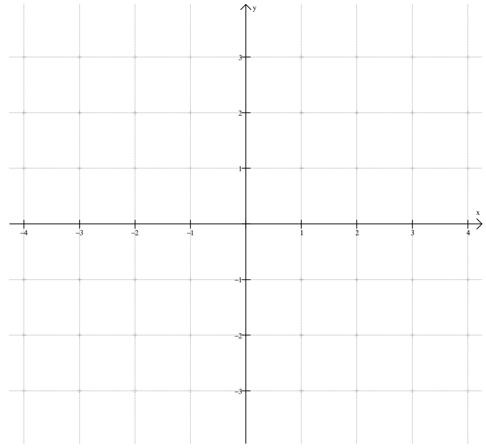
c)



$P_5(x) = -x\,(x + 1)(x - 1)$

a)

c)

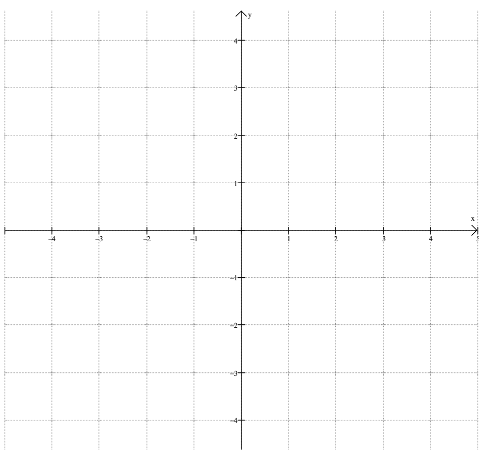


4.1)____

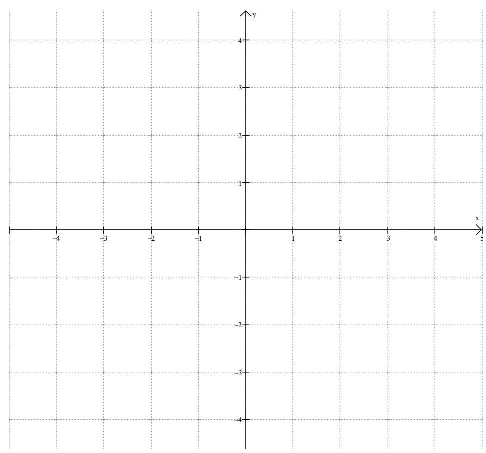
4.2)____

5)

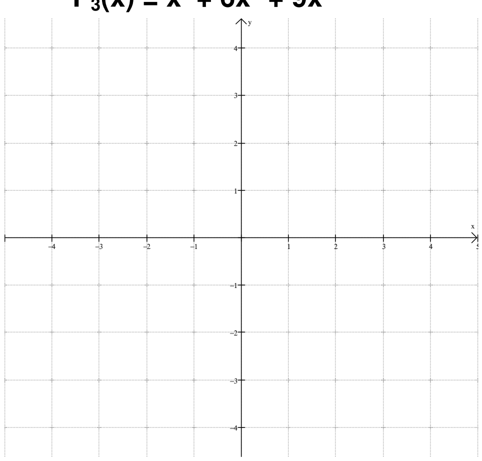
$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$



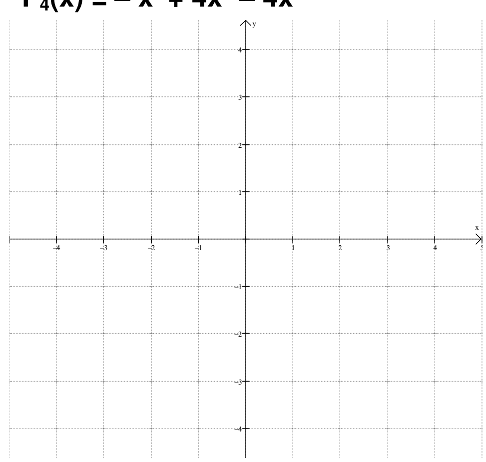
$P_2(x) = -x^4 + 4x^2$



$P_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$



$P_4(x) = -x^5 + 4x^4 - 4x^3$

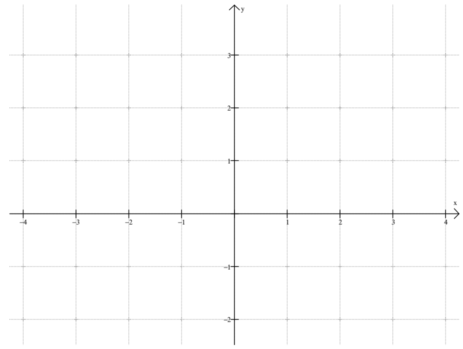


6)

$P_1(x) = x^2 + 1$

a)

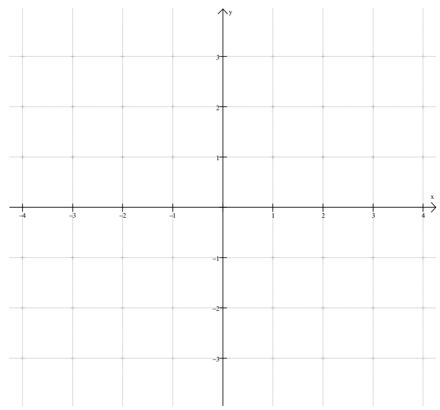
c)



$P_2(x) = x(x^2 + 1)$

a)

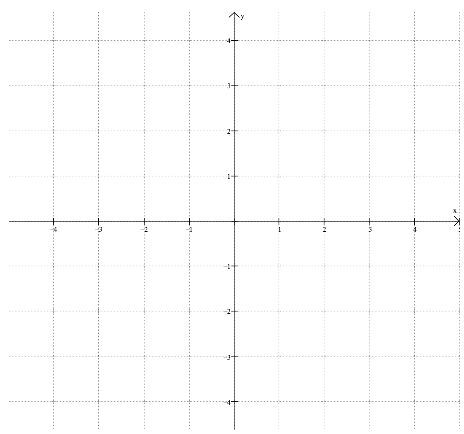
c)



$P_3(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$

a)

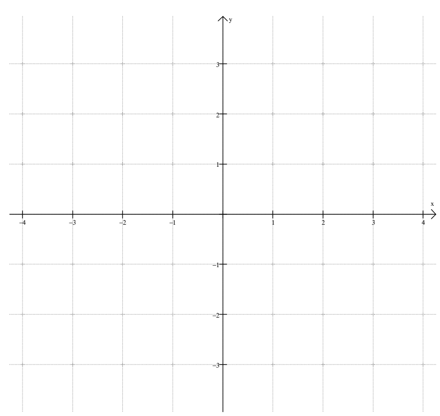
c)



$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

a)

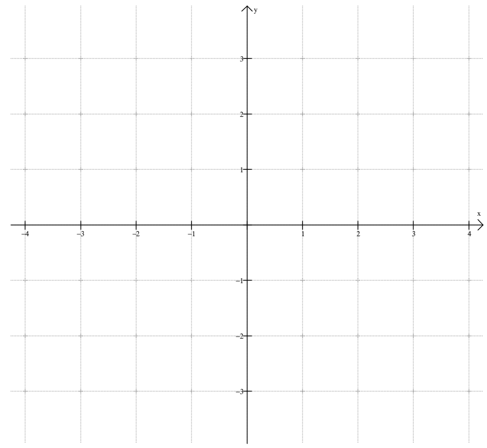
c)



$P_5(x) = 0{,}1x(x^2 + 1)$

a)

c)



6.1)____

APÊNDICE XI: Atividade II - reformulada

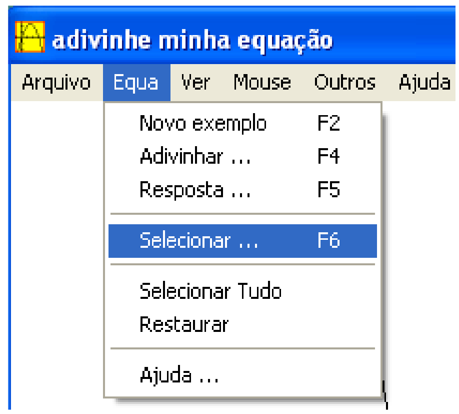
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica | Ministério da Educação | BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

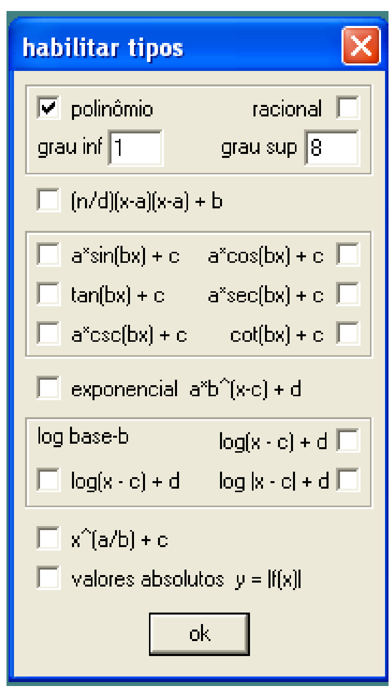
ATIVIDADE II

ALUNO: ____

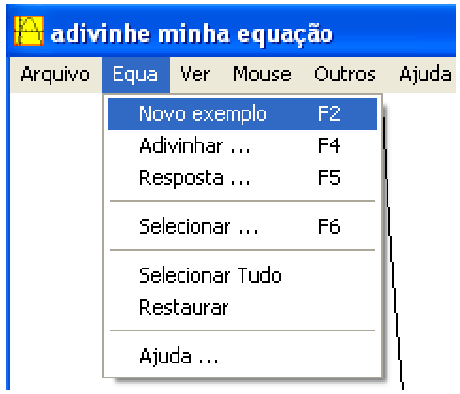
1- No Winplot selecione: Janela/ Adivinhar. Aparecerá a janela adivinhe minha equação, então selecione Equa/Selecionar...



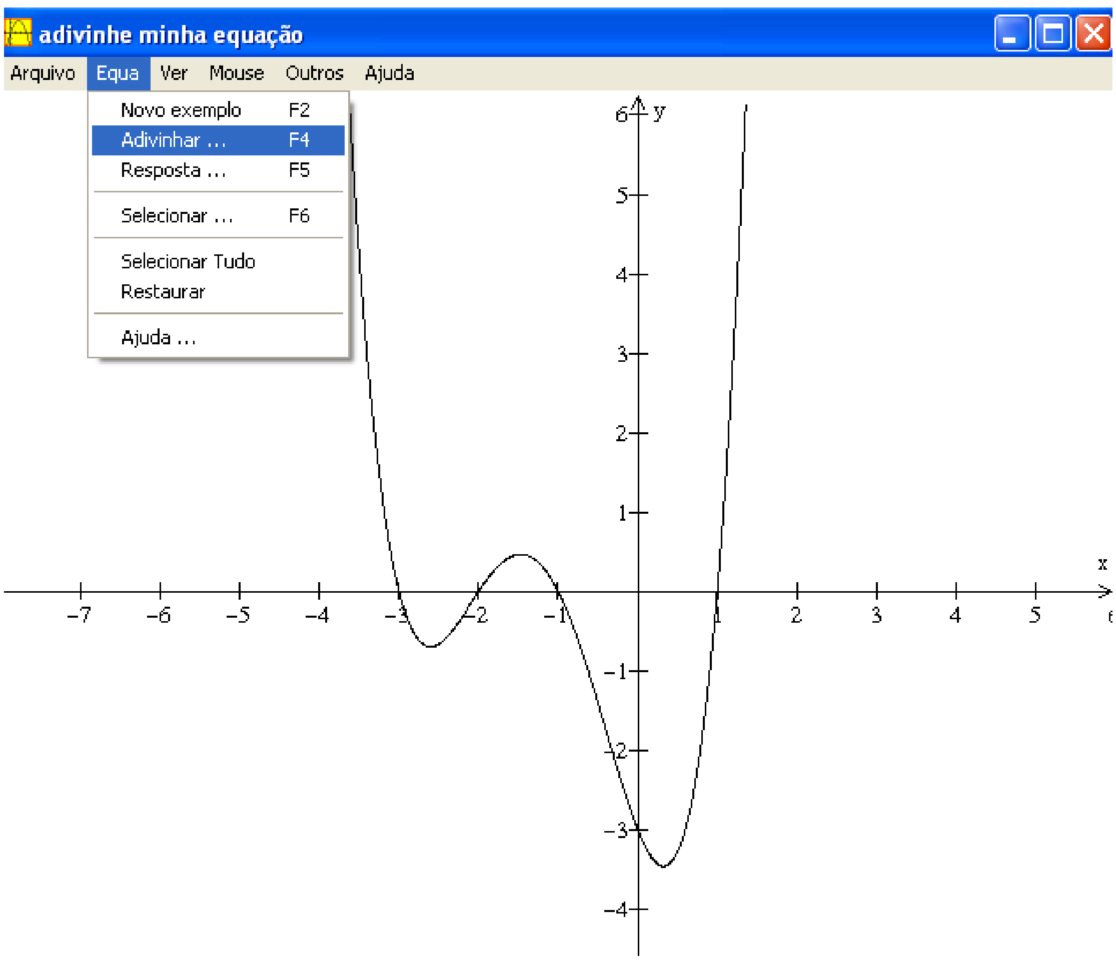
2- Após optar por Selecionar… abrirá a janela **habilitar tipos**. Nesta janela, selecione polinômio e preencha os campos grau inf com **1** e grau sup com **8**, conforme a figura abaixo, a seguir, clique em OK.



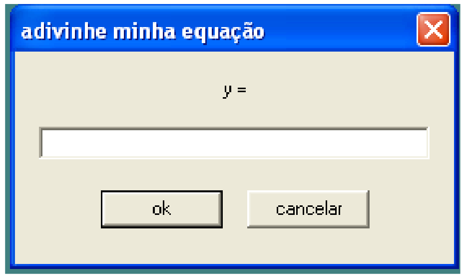
3- No menu Equa, selecione Novo exemplo.



Ao selecionar Novo exemplo, abrirá a janela adivinhe minha equação. Nesta, você irá visualizar um gráfico.



4- Selecione Equa/Adivinhar e a seguinte janela será aberta.



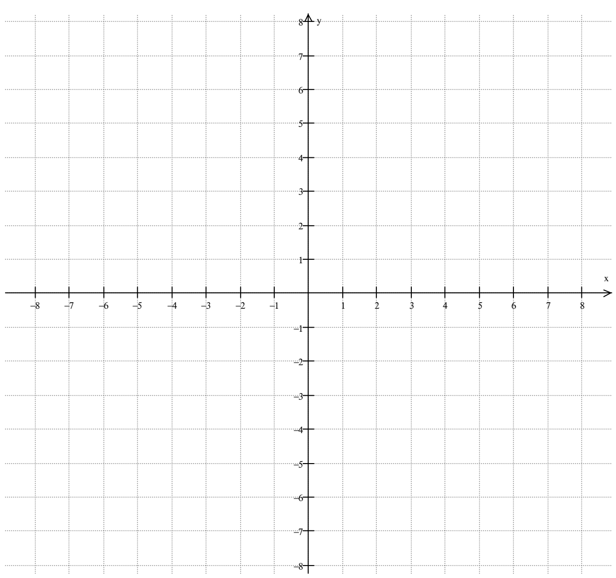
No campo em branco, você deve digitar a equação referente à curva visualizada e clicar ok.

Se você acertar a equação, aparecerá **perfeito!**

Caso contrário, irá aparecer **tentativa outra vez?** E você deverá selecionar novamente Equa/Adivinhar ou usar o atalho F4 para ter outras chances de determinar a equação correta.

Observação: Vale ressaltar que os gráficos que aparecem ao selecionar Novo Exemplo são de funções polinomiais que possuem somente raízes inteiras (opção do desenvolvedor do software).

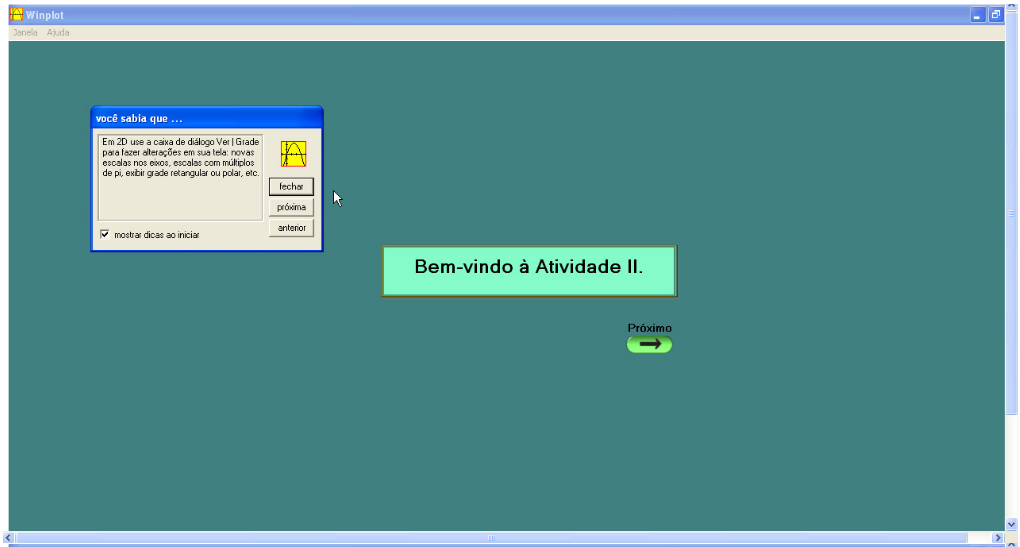
Dentre os exemplos de gráficos que apareceram, escolha um e faça seu esboço no sistema de eixos abaixo. Dê a equação que você encontrou.

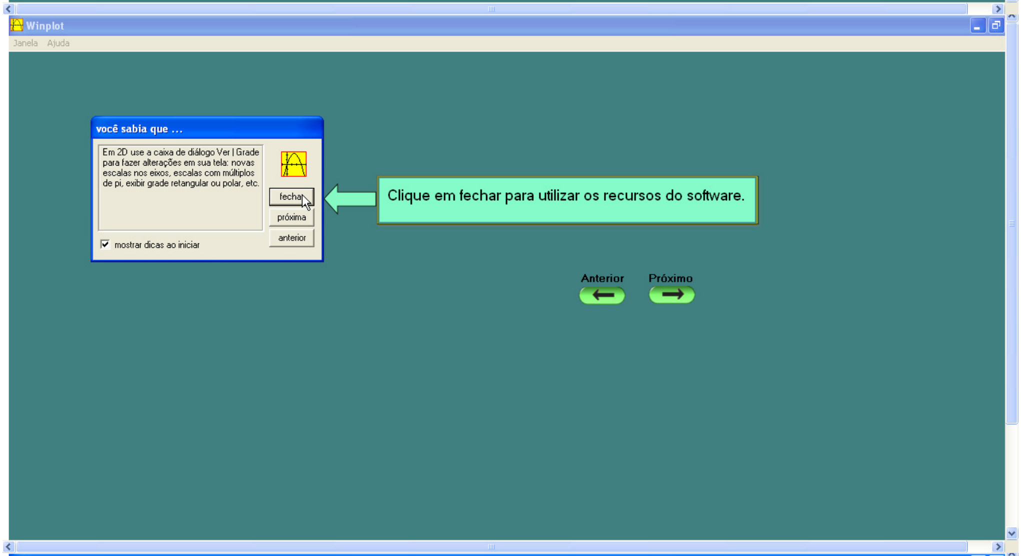


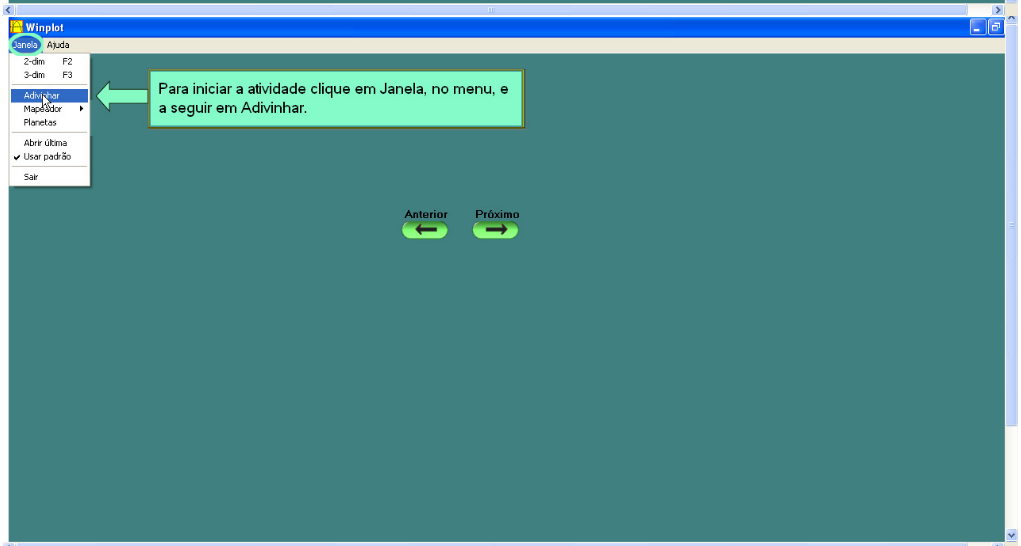
Equação:

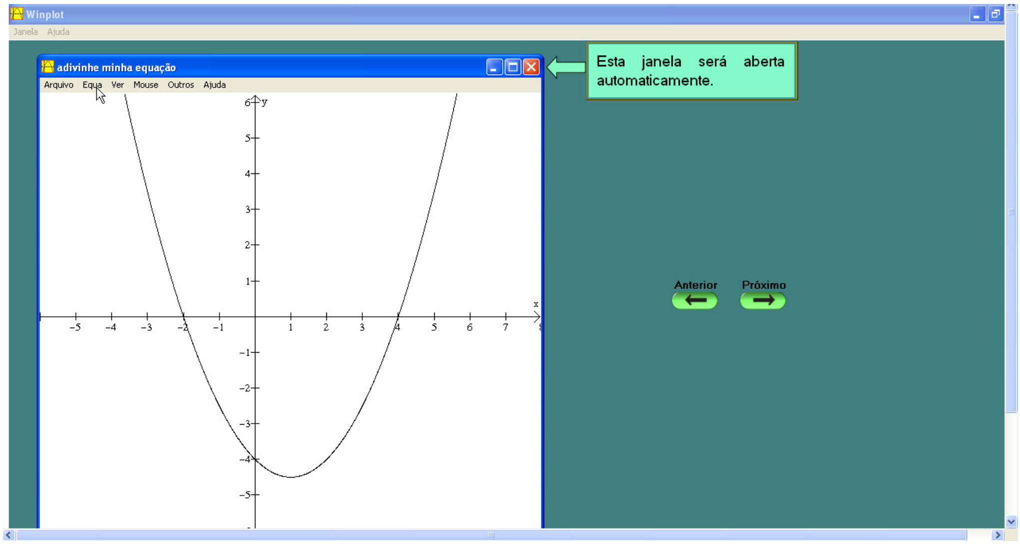
APÊNDICE XII: Tutorial da Atividade II

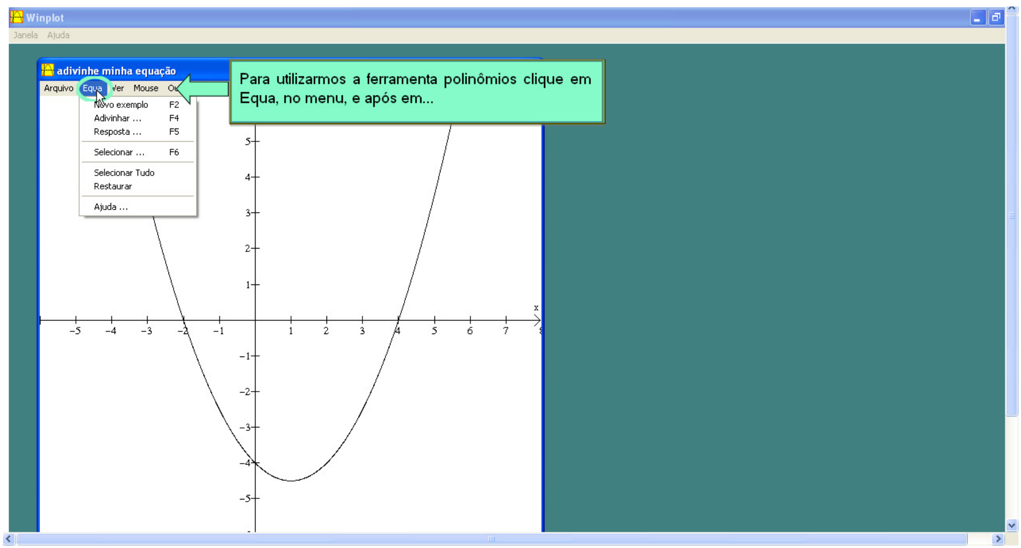
TUTORIAL DA ATIVIDADE II

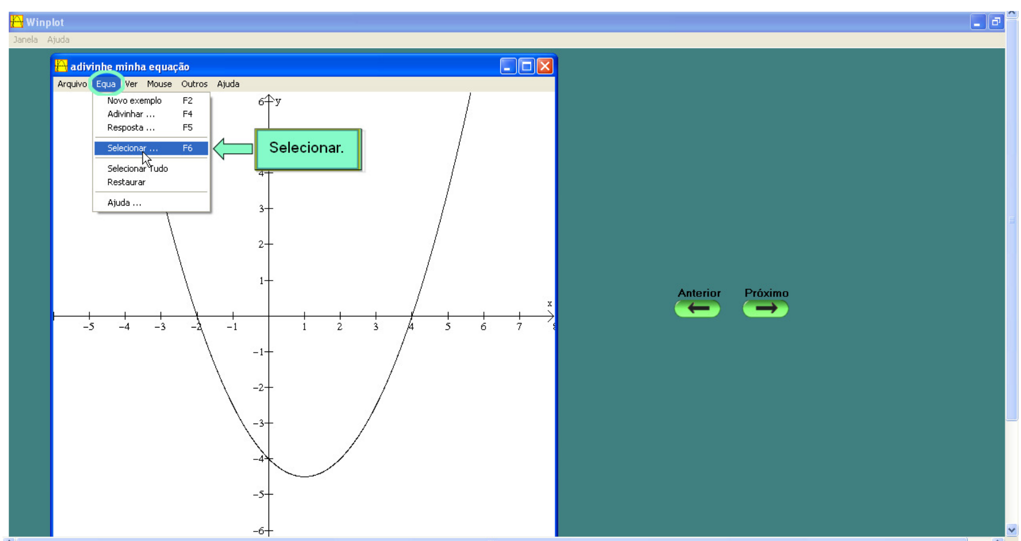


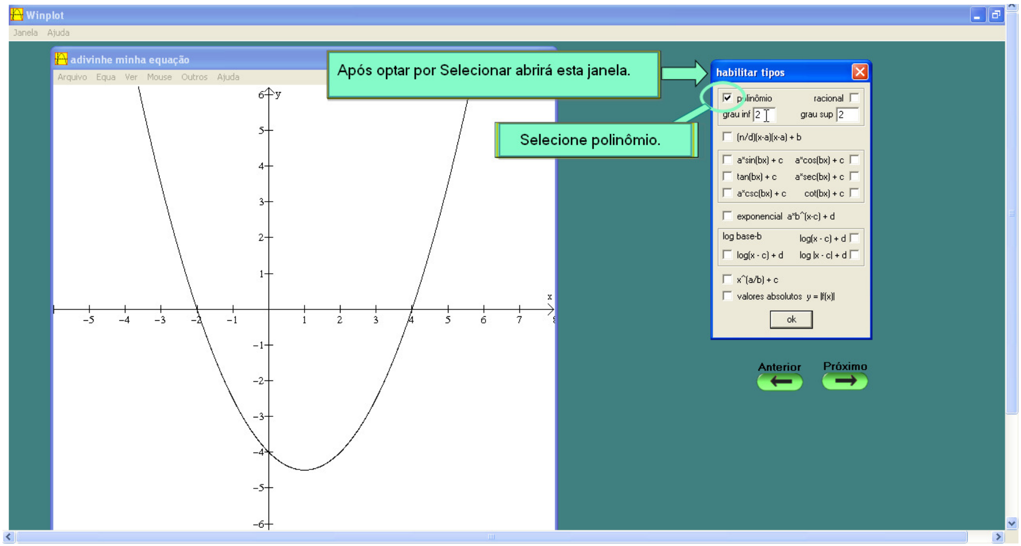


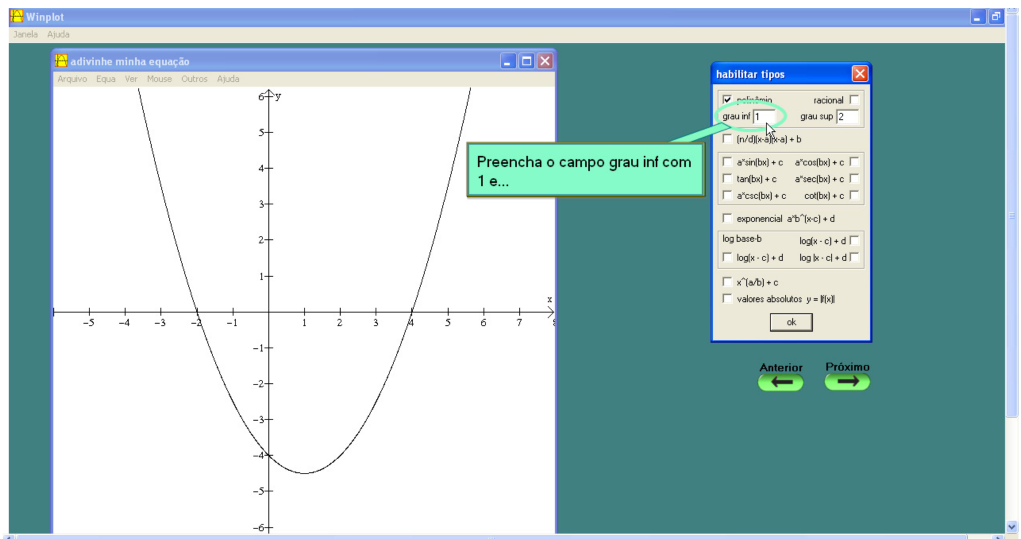


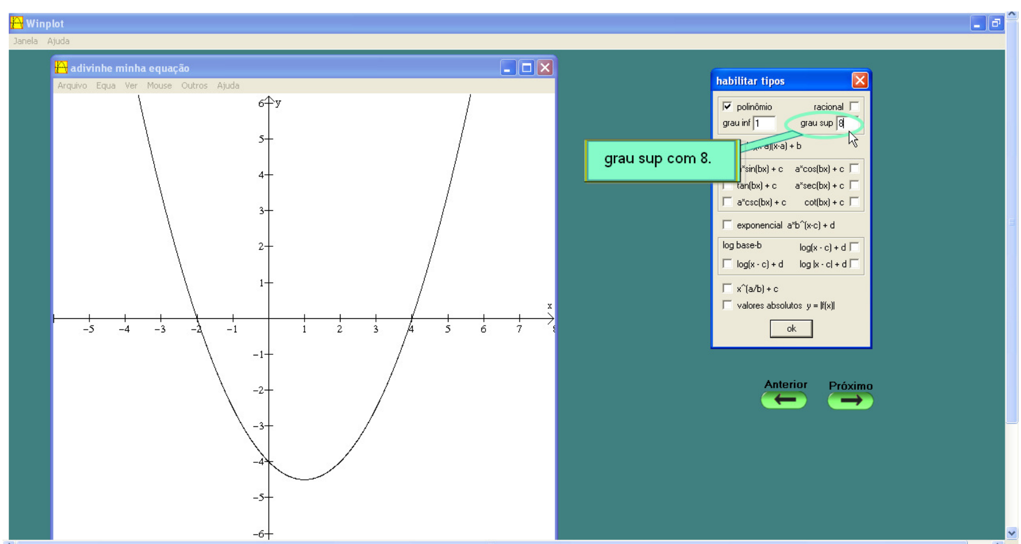

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
Esta janela será aberta automaticamente.
Anterior
Próximo

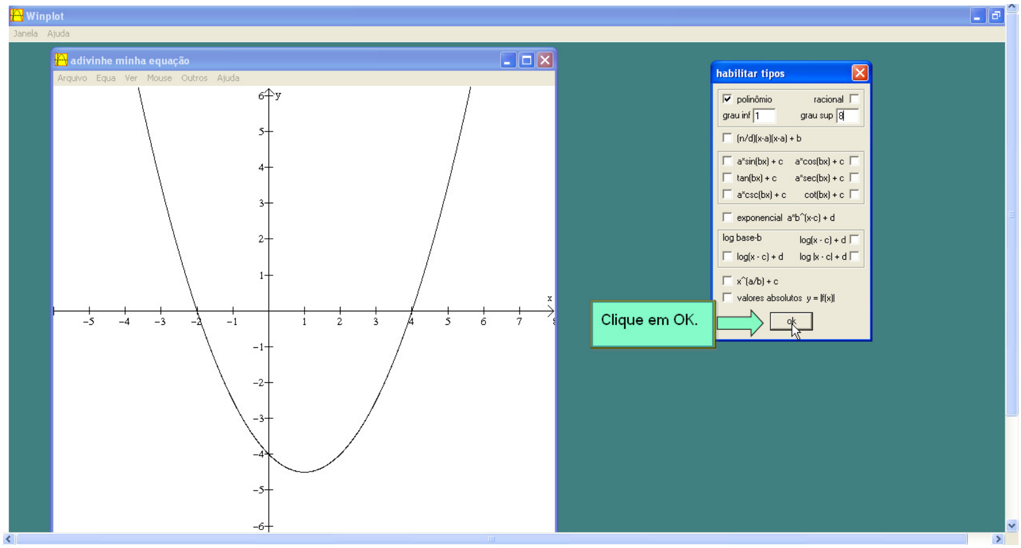

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse
Novo exemplo F2
Adivinhar ... F4
Resposta ... F5
Selecionar ... F6
Selecionar Tudo
Restaurar
Ajuda ...
Para utilizarmos a ferramenta polinômios clique em Equa, no menu, e após em...

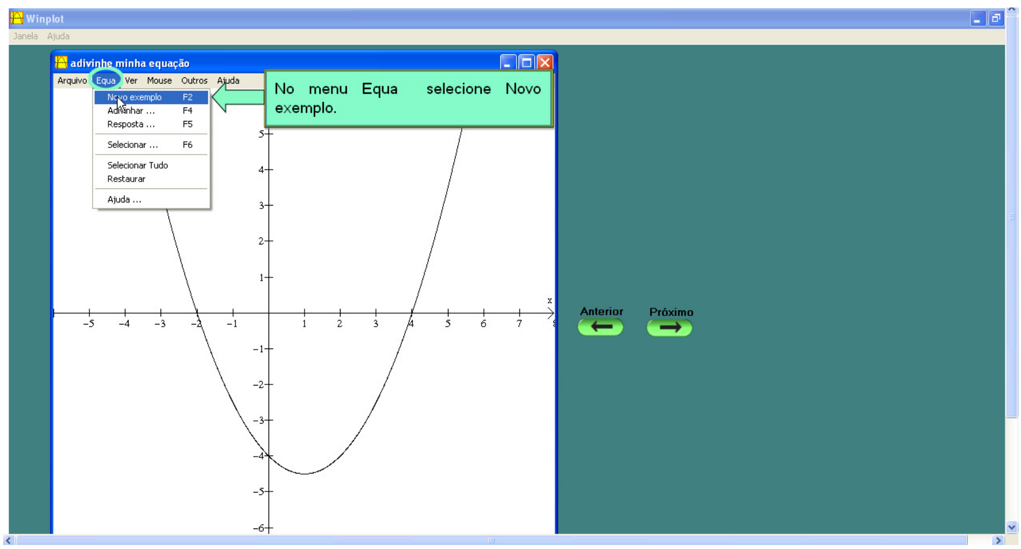

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
Novo exemplo F2
Adivinhar ... F4
Resposta ... F5
Selecionar ... F6
Selecionar Tudo
Restaurar
Ajuda ...
Selecionar.
Anterior
Próximo

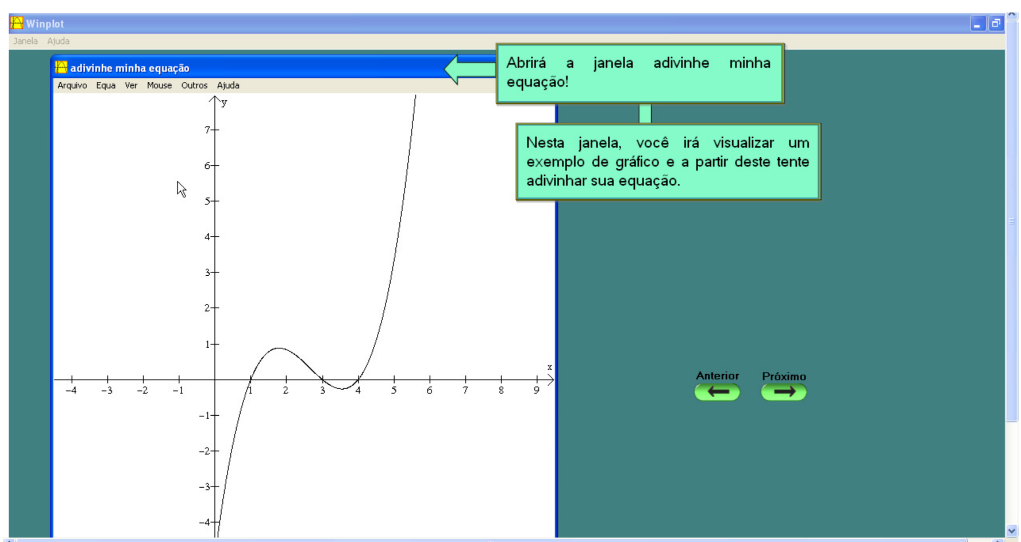

Winplot
adivinhe minha equação
Após optar por Selecionar abrirá esta janela.
Selecione polinômio.
habilitar tipos
Anterior
Próximo

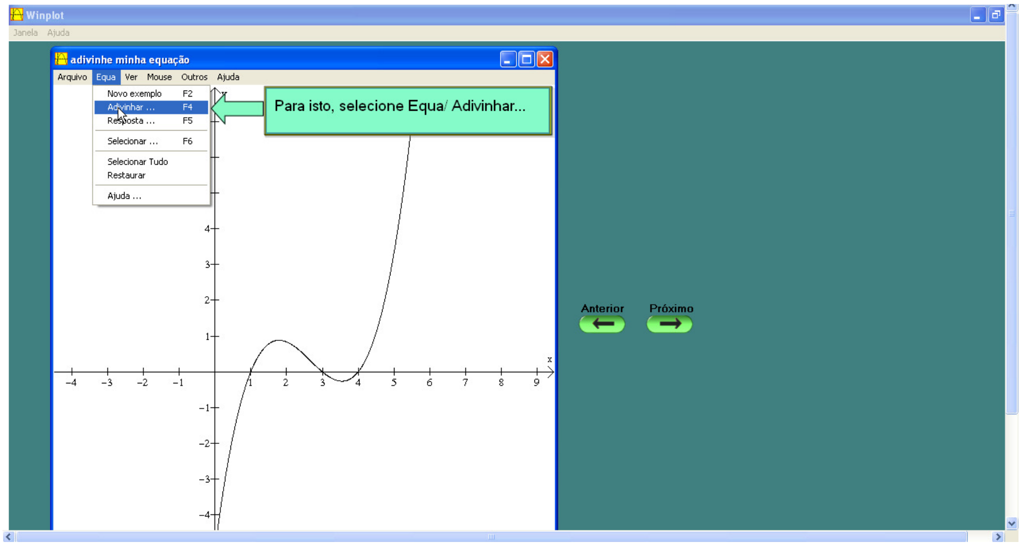

Winplot
adivinhe minha equação
habilitar tipos
Preencha o campo grau inf com 1 e...
Anterior
Próximo

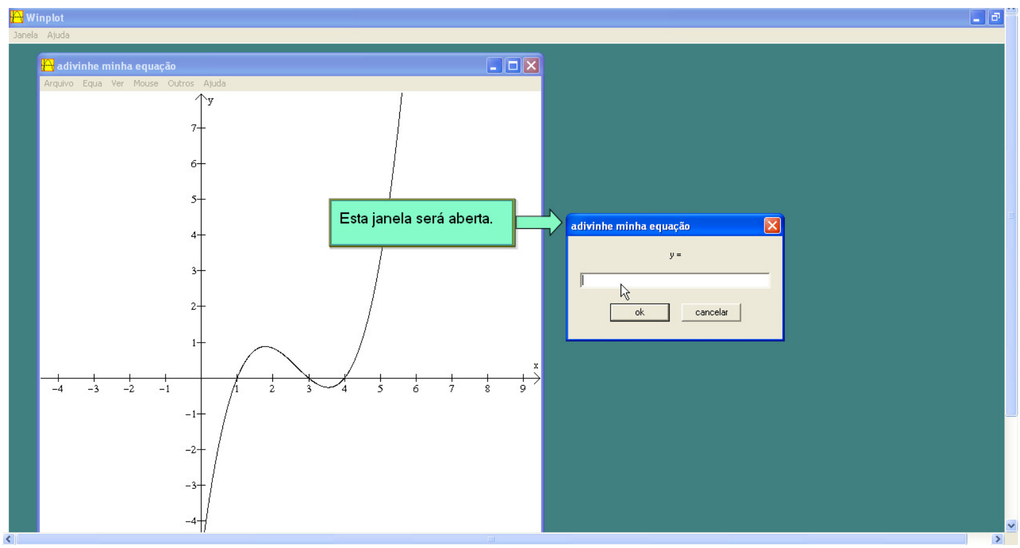

Winplot
adivinhe minha equação
habilitar tipos
grau sup com 8.
Anterior
Próximo

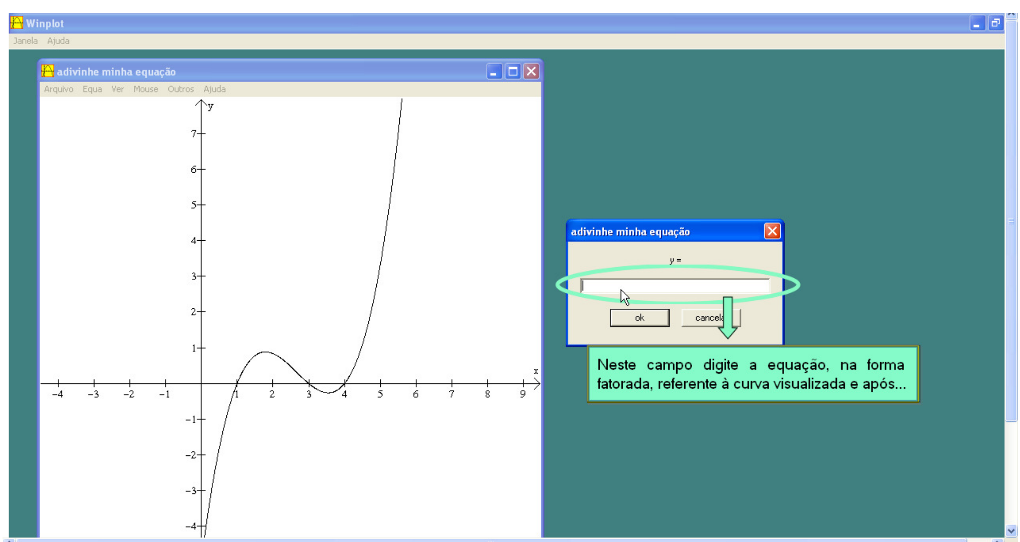

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
habilitar tipos
polinômio
racional
grau inf 1
grau sup 8
Clique em OK.
ok

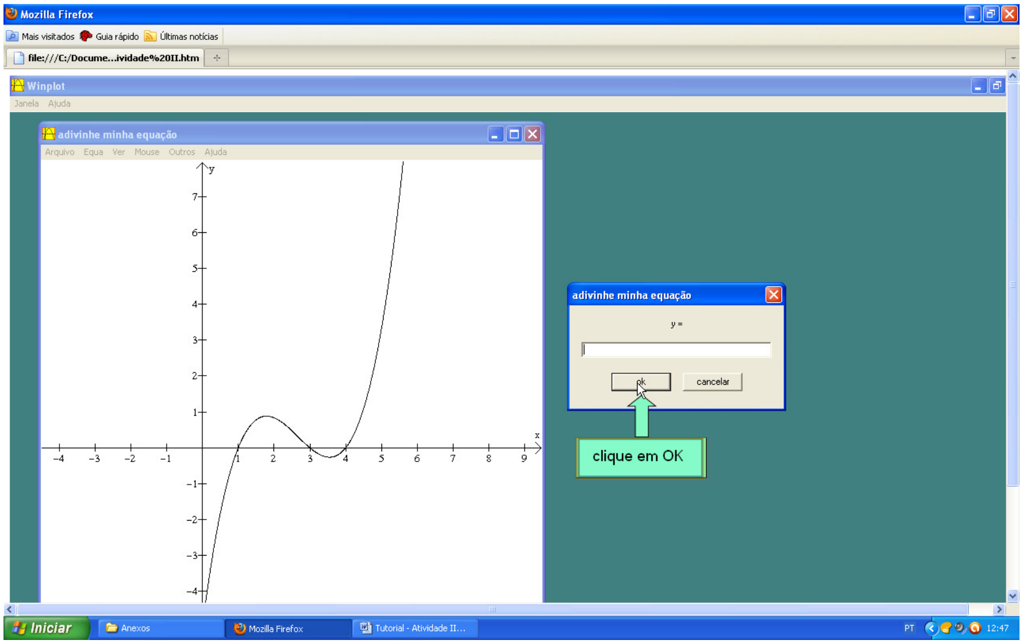

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
Novo exemplo F2
Adivinhar ... F4
Resposta ... F5
Selecionar ... F6
Selecionar Tudo
Restaurar
Ajuda ...
No menu Equa selecione Novo exemplo.
Anterior
Próximo

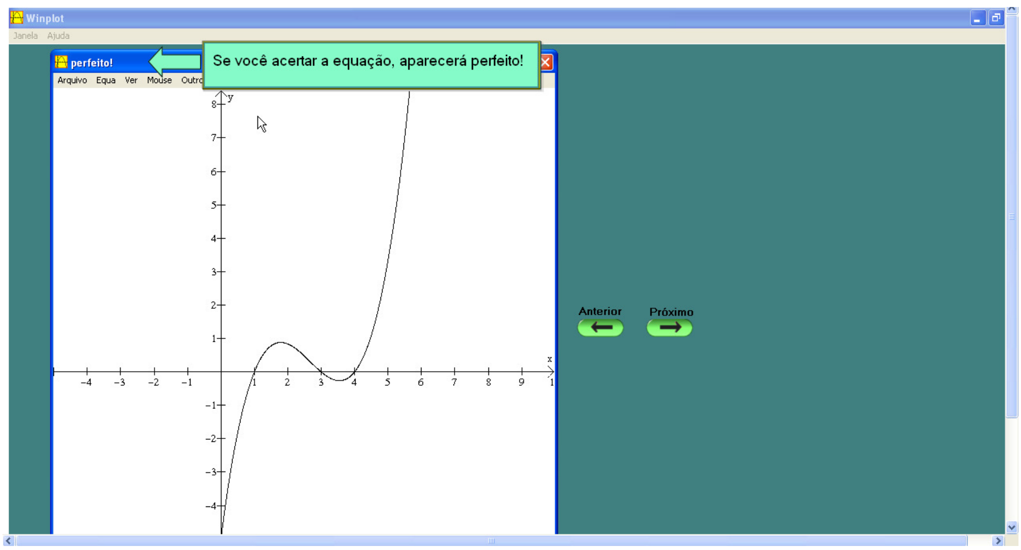

Winplot
Janela Ajuda
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
Abrirá a janela adivinhe minha equação!
Nesta janela, você irá visualizar um exemplo de gráfico e a partir deste tente adivinhar sua equação.
Anterior
Próximo

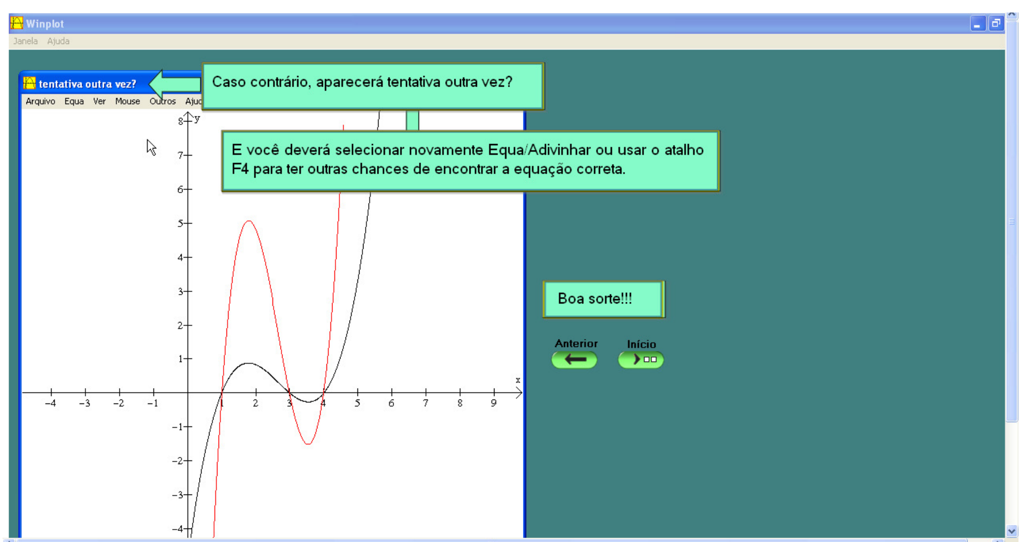

Winplot
adivinhe minha equação
Arquivo Equa Ver Mouse Outros Ajuda
Novo exemplo F2
Adivinhar ... F4
Resposta ... F5
Selecionar ... F6
Selecionar Tudo
Restaurar
Ajuda ...
Para isto, selecione Equa/ Adivinhar...
Anterior
Próximo


Winplot
adivinhe minha equação
Esta janela será aberta.
adivinhe minha equação
y =
ok
cancelar


Winplot
adivinhe minha equação
adivinhe minha equação
y =
ok
Neste campo digite a equação, na forma fatorada, referente à curva visualizada e após...


Mozilla Firefox
Winplot
adivinhe minha equação
y =
cancelar
clique em OK
Iniciar
Anexos
Mozilla Firefox
12:47


Winplot
perfeito!
Se você acertar a equação, aparecerá perfeito!
Anterior
Próximo


Winplot
tentativa outra vez?
Caso contrário, aparecerá tentativa outra vez?
E você deverá selecionar novamente Equa/Adivinhar ou usar o atalho F4 para ter outras chances de encontrar a equação correta.
Boa sorte!!!
Anterior
Início

APÊNDICE XIII: Lista de exercícios resolvida por um aluno do Ensino Médio

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

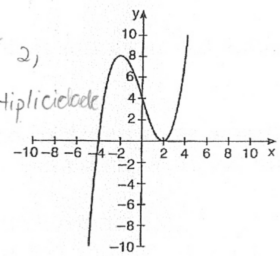
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ALUNO: ______________________________

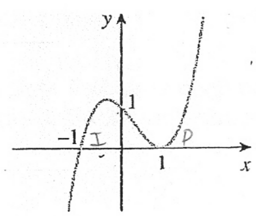
EXERCÍCIOS

1- (PUC –RS. Adaptada) Na figura, tem-se o gráfico de $p(x)= ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que todos os coeficientes são reais. Qual das raízes é dupla?

A raiz dupla é 2, porque sua multiplicidade é par.



2- (MELLO, p.607, 2005) O gráfico abaixo representa o polinômio $P(x) = x^3 – x – x^2 + 1$.



a) Determine as raízes de P(x) e escreva-o na forma fatorada.

$P(x) = (x+1)(x-1)^2$

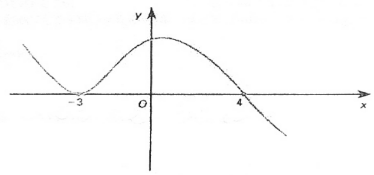
Raízes = 1 e −1

b) Indique a multiplicidade de cada uma das raízes de P(x).

1 → multiplicidade par

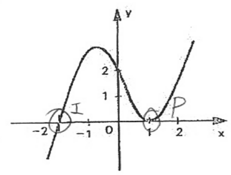
−1 → " ímpar

3- (PAIVA, p.377, 1995) O gráfico de uma função f: $IR \to IR$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset IR$, é:



Assinale a afirmação verdadeira:
a) – 3 é raiz simples. n
b) – 3 é raiz de multiplicidade par.
c) 4 pode ser raiz dupla. n
d) Se não houver mais raízes reais além de –3 e 4, então o menor valor possível de n é 5. n
e) Se não houver mais raízes reais e $\alpha > 4$, então se pode ter $f(\alpha) > 0$. n

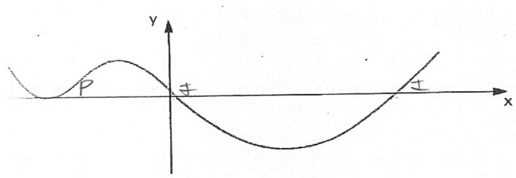
4- (PUC-RS-80) O gráfico na figura é de uma função f: $IR \to IR$ em que f(x) é um polinômio do 3.º grau. Para a equação f(x) =0, afirmamos:



I) o termo independente de x é igual a 2,
II) suas raízes são –2, 2 e 1, F
III) suas raízes são –2, –2 e 1, F
IV) suas raízes são –2, 1 e 1.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):
a) II b) III c) I e II d) I e III e) I e IV

5- (IEZZI, 1993. Adaptada) Seja P(x) um polinômio de coeficientes reais, cujas raízes reais estão todas representadas no esboço do gráfico a seguir:



Qual das proposições abaixo, sobre o polinômio P(x) é correta?
a) Pode ser do 3.º grau.
b) Pode ser do 5.º grau.
c) Pode ser do 6.º grau.

ANEXO I

A figura 94, a seguir, mostra o gráfico da função polinomial de 3.º grau

$$p(x) = x^3 - 3x + c$$

para c = 1, c = 2 e c = 3.

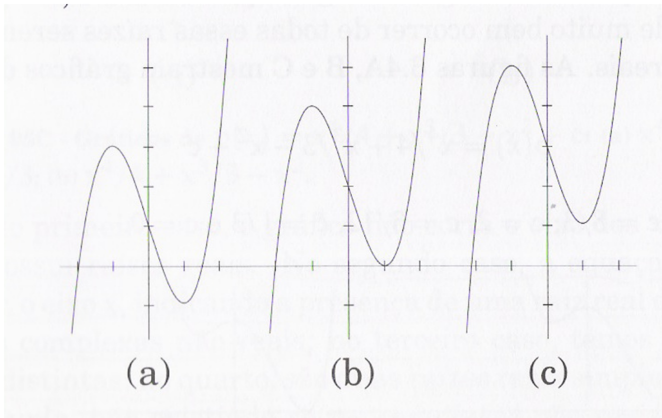


Figura 94 – Gráficos de $p(x) = x^3 - 3x + c$: (a) $p(x) = x^3 - 3x + 1$; (b) $p(x) = x^3 - 3x + 2$; $p(x) = x^3 - 3x + 3$

No primeiro caso, p tem três raízes reais, não existindo raízes complexas não reais. No terceiro caso, p tem uma única raiz real; concluímos, portanto, que as duas outras raízes de p são complexos conjugados. No entanto, o segundo caso pode, à primeira vista, provocar confusão, já que existem apenas dois valores reais de x para os quais p(x) = 0 (esses valores são 1 e –2). Assim, poderíamos ser levados a acreditar que p possui exatamente uma raiz complexa não real, o que seria uma contradição com tudo que discutimos nessa seção. A resposta a esta aparente contradição está na contagem das raízes de uma equação polinomial, que leva em conta a multiplicidade das raízes da equação. Na verdade, p tem uma raiz dupla real em 1 e uma raiz simples em –2, para um total de três raízes reais e nenhuma raiz complexa. O fato de 1 ser raiz dupla pode ser inferido do comportamento do gráfico. Se um fosse uma raiz simples de p (ou mais geralmente uma raiz de multiplicidade ímpar) o expoente do fator (x – 1) na forma fatorada de p seria ímpar; em conseqüência, p mudaria de sinal em 1. mas isso não ocorre: os valores de p(x) são positivos tanto para valores de x imediatamente à esquerda de 1 quanto para valores de x imediatamente à direita.

Funções polinomiais reais de grau par têm número par de raízes e pode muito bem ocorrer de todas essas raízes serem complexas não reais. As figuras 95 A, B e C mostram os gráficos de

$$p(x) = \frac{x}{\;} + \frac{x}{\;} - x + c$$

Para c = 3, c = 8/3, c =2, c = 5/12, c = 1/3 e c = 0

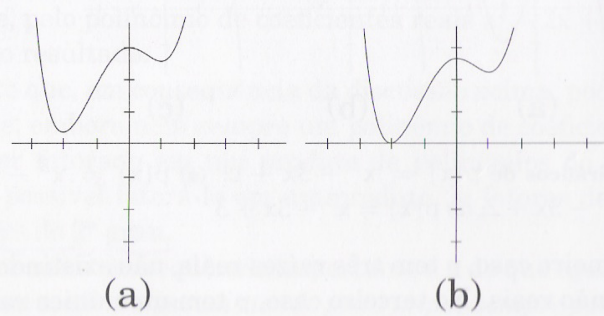


Figura 95A - Gráficos de $p(x) = x^4/4+x^3/3-x^2+c$: **(a)** $x^4/4+x^3/3-x^2+3$ **(b)** $x^4/4+x^3/3+x^2+8/3$.

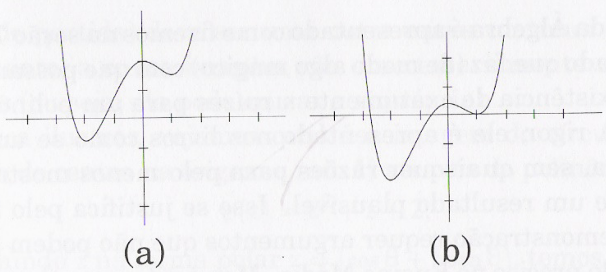


Figura 95B - Gráficos de $p(x) = x^4/4+x^3/3-x^2+c$: **(a)** $x^4/4+x^3/3-x^2+2$ **(b)** $x^4/4+x^3/3-x^2+5/12$.

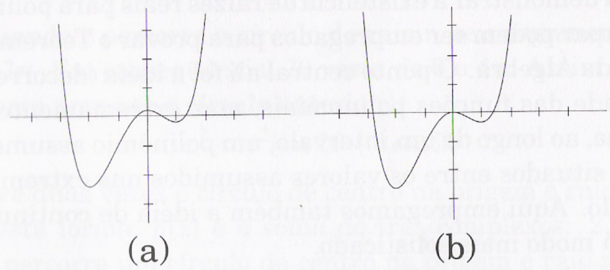


Figura 95C - Gráficos de $p(x) = x^4/4+x^3/3-x^2+c$: **(a)** $x^4/4+x^3/3-x^2+1/3$; **(b)** $x^4/4+x^3/3-x^2$.

No primeiro caso, o gráfico não corta o eixo x: a equação não possui raízes reais. No segundo caso, a equação toca, sem cortar, o eixo x, indicando a presença de uma raiz real dupla e duas raízes complexas não reais; no terceiro caso, temos duas raízes reais distintas; no quarto, são duas raízes reais simples e uma raiz real dupla, não existindo raízes complexas não reais. No quinto caso, temos quatro raízes reais distintas. Finalmente, no último caso, temos mais uma vez quatro raízes reais, sendo uma raiz dupla e duas simples.

LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO. (p. 227, p.228 e p. 229). 2001