INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALINE NOGUEIRA PIRES

ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

RESOLVENDO EQUAÇÕES POR MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

2010

ALINE NOGUEIRA PIRES

ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

RESOLVENDO EQUAÇÕES POR MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Carla Antunes Fontes

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

2010

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

P667r Pires. Aline Nogueira.
Resolvendo equações por métodos não algébricos / Aline Nogueira Pires, André Luiz da Cunha Alves. - Campos dos Goytacazes, RJ : [s.n.], 2010.
150 f. ; il.

Orientadora: Carla Antunes Fontes

Monografia. (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes, RJ, 2010.
Bibliografia: f. 101 – 106.

1. Educação matemática. 2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. I. Alves, André Luiz da Cunha. II. Fontes, Carla Antunes, orient. III. Título.

CDD – 510.7

ALINE NOGUEIRA PIRES

ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

RESOLVENDO EQUAÇÕES POR MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 21 de dezembro de 2010.

Banca Avaliadora:

____

Profª. Carla Antunes Fontes (orientadora)
Mestre em Matemática / UFRJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

____

Profª. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial / UCAM
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

____

Profª. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática / USU
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a DEUS, nosso criador, pela inteligência e sabedoria concedidas em todas as etapas deste trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais Regina Maria da Silva Nogueira e José Murilo Sales Pires, e também à minha madrinha Sonia Laura Pimentel Pires, pelo incentivo e apoio de sempre.

À orientadora professora Carla Antunes Fontes, por não poupar esforços no desenvolvimento e execução desta monografia, pelos conselhos profissionais, dos quais sempre lembrarei no momento em que eu estiver em sala de aula, pelo carinho e paciência demonstrados ao longo deste trabalho.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática deste Instituto Federal Fluminense, pelas orientações e troca de experiências.

Aos colegas que participaram do teste exploratório. Sem as observações de vocês não teríamos chegado ao produto final que planejamos.

Aos alunos do Pré IFF por terem aceitado nosso convite para participar da aplicação das atividades.

Às professoras Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo e Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro, por terem aceitado nosso convite para participar da banca avaliadora.

Por fim, ao meu grande colega André Luiz da Cunha Alves, pelo companheirismo, desempenho e apoio constantes na execução deste trabalho.

Aline Nogueira Pires

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, autor e criador de todas as coisas, por nos conceder a graça e a alegria de chegarmos até aqui, na conclusão deste curso, que a partir de então será carregado em nossos nomes.

A seguir, à nossa querida e grande companheira Carla Antunes Fontes, vulgo orientadora de todo este trabalho. Sem sua participação ativa e dedicação suprema, com certeza não chegaríamos aqui com sucesso.

Aos amigos e professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro, por todo carinho, dedicação e incentivo dispensados em todas as etapas desse longo trajeto até aqui.

Aos companheiros de classe, por terem dividido conosco todo espaço de aprendizagem e também pelas trocas de experiências, cumplicidade, amizade, fidelidade, diversão e tantos outros aspectos que contribuíram de forma direta ou indireta para nossa formação.

Aos nossos amigos particulares, por todo incentivo, encorajamento, dedicação, zelo e, sobretudo, paciência pelos afastamentos ou ausências pertinentes a todas as etapas de encontro ao diploma.

Por fim, à minha grande e eterna amiga Aline Nogueira Pires, irmã e companheira de trabalho, por me conceder a alegria de compartilhar com ela esta experiência única e gratificante na vida de todos nós, unidos num só objetivo: nos formarmos professores para daí definirmos em que áreas, locais, pessoas, devemos semear ideias para colhermos grandes riquezas, frutos do conhecimento.

André Luiz da Cunha Alves

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pela saúde, fé e sabedoria concedidas.

A meus familiares, aos quais sou grata pelos ensinamentos, amor, carinho, lealdade e zelo.

A todos os professores e professoras que muito contribuíram para a minha formação, dos quais tenho boas lembranças e à professora mestra Carla Antunes Fontes pela orientação dada ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

E por fim aos amigos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desta monografia.

Aline Nogueira Pires

Dedico este trabalho única e exclusivamente à minha família, onde encontro os meus verdadeiros amigos.

À minha mãe (Neilda) por ter ensinado a seus filhos, pela sua experiência de vida, que só há vitória lutando e sem olhar pra trás.

Aos meus irmãos (Andrezza e Jonathan) pela cumplicidade, dedicação e por me ensinar a cada dia o verdadeiro sentido de “amor de irmãos”.

Aos meus únicos e eternos avós (Pedro e Paulina), meus aliados, responsáveis por toda esta vitória, que me alimentaram e ensinaram a ser gente, a ser homem e a saber amar.

Por fim, ao meu grande e eterno amor Cíntia Gomes, porque a cada dia me ensina a desvendar os mistérios por trás do mais belo e precioso sentimento presente na humanidade: O AMOR!

André Luiz da Cunha Alves

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor atividades que motivem alunos concluintes do Ensino Médio a estudar funções reais e seus gráficos. Para estimular a investigação, a qual segundo Ponte (2009, p. 23) traz para a sala de aula o espírito genuíno da atividade matemática, é proposta uma abordagem diferente de um tema bastante conhecido: a resolução de equações. De acordo com Shigue (2009, p. 31-32), a maioria das equações que surge de situações práticas não possui método de resolução analítico. Suas soluções reais são aproximadas por métodos gráficos e refinadas por métodos numéricos, cujo aprendizado torna-se elemento motivador do estudo por nós almejado. Tal contexto é um campo fértil para discussões sobre Domínio, Imagem, aspecto do gráfico, estudo do crescimento, variação de sinal e número de raízes reais de vários tipos de funções, estudados ou não no Ensino Médio. Uma ideia informal de limite pode ser desenvolvida mediante a análise do gráfico, o mesmo acontecendo com as noções de assíntota horizontal e vertical, e de continuidade. Nossa pesquisa é qualitativa, e constitui-se de um estudo de caso realizado com um grupo de alunos residentes na cidade de Campos dos Goytacazes. Como o tema favorece o uso de tecnologia, em um primeiro momento, em sala de aula, os alunos utilizaram calculadoras científicas. Posteriormente, já no laboratório de informática, foram empregados os *softwares Graphmática*, para o traçado de gráficos; *Excel*, para o cálculo em planilhas; e *Word*, para registrar as soluções encontradas nos exercícios e responder ao questionário avaliativo das atividades. As aulas foram bastante interativas. A todo momento havia solicitações de esclarecimento de dúvidas, e o interesse dos alunos ficou evidente, não apenas por responderem nossos questionamentos, mas por formularem seus próprios. Os encontros foram ricos em aprendizagem, tanto para nós quanto para eles. Isto foi não só observado, mas também evidenciado por suas respostas ao questionário avaliativo.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Raízes reais de funções. Resolução de equações. Gráficos. Educação e tecnologia.

ABSTRACT

SOLVING EQUATIONS BY NON-ALGEBRAIC METHODS

The objective of this work is to propose activities that motivate senior High School students to study real functions and its graphs. Our research is qualitative, and it's a case study applied to a group of students living in the city of Campos dos Goytacazes. To stimulate investigation, which, as states Ponte (2009, p. 23), brings the genuine mathematical activity spirit into the classroom, a different approach from a well-known subject is proposed: solving equations. According to Shigue (2009, p. 31-32), most of the equations that arouse from practical situations don't have an analytical resolution method. Their real solutions are approached by graphic methods and refined by numerical methods, of which learning becomes a motivational factor to the study we aim to achieve. Such context is a fruitful field to discussions about Domain, Image, graph's aspect, growth study, signal variation and number of real roots of many types of functions, studied or not in High School. An informal idea of limit can be developed from graph analysis, the same happening with the notions of horizontal and vertical asymptote, and that of continuity. As the theme favors the use of technology, at the first moment, in classroom, students used scientific calculators. Later, already in the informatics lab, the softwares Graphmática, a graph plotter; Excel, a spreadsheet handler; and Word, a text editor, were used by the students to perform, calculate and register the solutions of the exercises and to answer the activities' evaluation form. The classes were very interactive. At any moment there were calls to clear doubts, and the interest of the students became clear, not only by answering our questions, but by proposing their own. The meetings were rich in learning, to us as to the students. This was not just observed, but also confirmed by their answers to the evaluation form.

KEY WORDS: Mathematics Education. Functions' real roots. Solving equations. Graphs. Education and technology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

SIGLA	NOME
ANPED	Associação Nacional de Pesquisa em Educação
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior
CEMPEM	Centro de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
IBICT	Instituto Brasileiro de Informações em Ciências e Tecnologia
IES	Instituição de Ensino Superior
IFF	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais(Ensino Médio)
Qn	Questão número n
TE	Teste Exploratório
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TS	Teste de Sondagem
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

1. MOTIVAÇÃO PARA A ESCOLHA DO TEMA

Ao nos depararmos com propostas para a abordagem de novos temas de Matemática no Ensino Médio, já tão "inchado" de assuntos impostos por exames de vestibular, é inevitável pensar: "Mais conteúdo? Isso não vai dar certo. Mal temos tempo de cumprir o programa...".

Neste trabalho, porém, a resolução de equações[1] por métodos não algébricos é utilizada como elemento motivador e facilitador do estudo de funções e seus gráficos. Ao ser apresentado a tais métodos, o aluno se depara com diversos tipos de funções, algumas já conhecidas, outras não. Todas, porém, são (re)vistas de forma diferente da usual abordagem dos livros didáticos, marcadamente algébrica e repleta de exercícios repetitivos (LIMA, 2001, p. 463-464).

Uma das diferenças é a ênfase dada ao estudo do gráfico da função. Sua construção cuidadosa, permeada pela análise da expressão algébrica, possibilita a retomada de conceitos como domínio, imagem e raízes reais. Sua observação permite a visualização de várias características importantes da função, desde crescimento, extremos, sinais, até seu "comportamento no infinito", abrindo espaço para a introdução de noções intuitivas sobre limite e continuidade, se for o caso.

A outra é a maneira pela qual as raízes reais da função são obtidas, exata ou aproximadamente. Ao utilizar um método iterativo, o método da bissecção, amplia-se o horizonte do aluno para além da resolução analítica de equações e relaciona-se a Matemática às outras ciências. O cálculo numérico, área de estudo na qual se insere o método da bissecção, é largamente empregado em modelagem matemática. A maioria das equações que surgem de situações práticas não possui método de resolução analítico. Suas soluções são aproximadas por métodos gráficos e refinadas por métodos numéricos. (SHIGUE, 2009)

Segundo Elon Lages Lima, o estudo de Matemática no Ensino Médio brasileiro ,"[...] conforme praticado hoje, é quase inteiramente desligado da realidade, desprovido de atrativos e desafios interessantes, muito voltado para o formalismo algébrico, além de dividido em setores desconectados." (LIMA, 2007, p. 173)

Um exemplo clássico do que aponta o autor ocorre no estudo de funções. Em geral, o que se encontra nos livros didáticos são definições apresentadas sem

[1] Em nosso trabalho, adotamos a forma simplificada "Resolução de equações" para representar o cálculo das raízes reais de equações de coeficientes reais.

maiores explicações e a priorização de métodos puramente algébricos para determinar domínio, imagem, resolver equações ou inequações. Gráficos são utilizados apenas em alguns problemas clássicos, como a resolução de inequações ou a determinação de valores extremos de funções polinomiais de segundo grau. Mesmo assim, aparecem apenas para justificar "regras" que serão memorizadas, dispensando análises gráficas posteriores. Marina Menna Barreto (2007), em sua dissertação de mestrado, corrobora tais afirmações. Ela chama atenção para o fato de que

> [...] o estudo deste tópico no currículo médio brasileiro segue uma ordenação ainda tradicional e ditada, na maioria das vezes, pela sequência sugerida pelos livros didáticos. Os temas geralmente são tratados de forma independente e sem conexão alguma entre eles. Por exemplo, as funções afim e exponencial são trabalhadas no primeiro ano do Ensino Médio, enquanto que as progressões aritméticas e geométricas são estudadas no segundo ano e, pior ainda, sem que se faça qualquer relação entre elas. Além disso, poucas são as situações em que se fazem referências às aplicações da Matemática às outras ciências. (BARRETO, 2007, p. 87)

Tendo por base estas e outras referências, optamos por desenvolver um trabalho que contemplasse não só a análise de gráficos, como também a aplicação de métodos matemáticos em outras ciências. O objetivo era que o aluno visse o estudo de funções sob um prisma diferente, que o tornasse mais interessante e acessível.

Acessível porque, segundo inúmeras pesquisas, o aluno tem dificuldade no conceito mesmo de função, e tal dificuldade está associada, em grande parte, à forma pela qual o assunto é abordado. Marcos José Ardenghi (2008), em sua dissertação de mestrado, analisou quarenta e seis teses e dissertações sobre ensino e aprendizagem de função, concluídas no Brasil, no período de 1970 a 2005, além de dois artigos internacionais e um capítulo de livro. Neste trabalho do tipo estado da arte, foram destacadas doze pesquisas cujo tema era voltado para a dificuldade de aprendizagem de funções. "Como resultados das doze pesquisas, podemos apresentar que os professores, de modo geral e os livros didáticos apresentam a noção de função com uma linguagem técnica e distante da realidade do aluno." (ARDENGHI, 2008, p. 71.)

> Diante das dificuldades apresentadas e das possibilidades de superação, inferimos que os autores de livro didático têm um papel fundamental na contribuição da melhoria do ensino de funções, no que tange à forma de apresentação do conceito, visando a auxiliar os docentes em suas práticas. (ARDENGHI, 2008, p. 72.)

À primeira vista, tais conclusões podem parecer um tanto desanimadoras. Após trinta e cinco anos de pesquisa sobre o assunto, ainda há dificuldades a serem superadas e muito a ser feito. Porém, refletindo um pouco sobre o assunto, nos recordamos que a Educação Matemática é uma área de pesquisa que trabalha, antes de tudo, com pessoas. Seus sujeitos são alunos e professores, envolvidos em processos de ensino e aprendizagem que evoluem com o tempo, sofrendo mudanças e trazendo novos desafios para ocupar o lugar de outros que já foram superados.

Por outro lado, quarenta e seis pesquisas em um período de trinta e cinco anos de produção científica nacional é um número muito pequeno para um tema tão importante. No mesmo ano em que Marcos Ardenghi concluiu sua pesquisa (2008), outra era concluída, por Eduardo Monteiro de Souza Júnior, mostrando que menos de 3% das teses e dissertações defendidas de 1997 a 2006 na área de Educação Matemática abordava funções no Ensino Básico. (SOUZA JÚNIOR, 2008)

Além disso, segundo Ponte (1992), o próprio conceito de função teve, ao longo da História da Matemática, uma construção demorada e cheia de percalços, logo é natural que isto se reflita em seu processo de ensino e aprendizagem. À época, ele alertava para a importância de estudar funções sob vários aspectos.

> A maioria dos estudantes chega à escola secundária com muita dificuldade de abstração. Para muitos, lidar com gráficos cartesianos e expressões algébricas, não é uma tarefa fácil. O ensino de funções precisa articular equilibradamente as três formas mais importantes de representação, nomeadamente a numérica, a gráfica e a algébrica. Seria um grave erro de interpretação da importância histórica das representações analítica e geométrica deixar que fosse subestimado o papel dos aspectos numéricos na aprendizagem de funções, notadamente tabelas e cálculos. Em situações reais, valores numéricos concretos fundamentam as expressões numéricas e as curvas geométricas. Matemáticos dos séculos XVII e XVIII gastavam um longo tempo fazendo operações aritméticas, procurando padrões e relações. (PONTE, 1992, p. 10-11)

Nesse mesmo artigo, o uso de tecnologia já é citado como possível facilitador do processo de ensino e aprendizagem de funções.

> Vários avanços tecnológicos recentes podem ter um papel bastante significativo no estudo de funções. Especialmente importantes são as calculadoras gráficas e computadores com *softwares* apropriados tais como planilhas, plotadores de gráficos e programas de manipulação de símbolos. Estes instrumentos tecnológicos, sabiamente usados nas aulas de matemática, podem ajudar os estudantes a desenvolver um tipo mais profundo de entendimento matemático, facilitando o processo de conjecturar, e testar e fazer generalizações. (PONTE, 1992, p. 12)

De fato, nos últimos anos várias pesquisas têm demonstrado que o (bom) uso da tecnologia facilita o processo de ensino e aprendizagem de funções.

> Vários pesquisadores, dentre eles Machado (1995), Borba (2001), Souza (1996) e Scheffer (2002), recomendam o uso das tecnologias, as quais se destacam como fortes aliadas do ensino de Matemática, visando a desenvolver um trabalho com maior componente empírico e ênfase na visualização que passa a fazer parte do processo de descobrimento matemático, incentivando a compreensão e significação matemática. (DALLAZEN, 2005, p. 1)

Hoje já se sabe também que o uso de tecnologia motiva o aluno a participar e interagir. "O computador, sim, é que era o diferencial e, como sentiu o professor, parece que sua utilização deixou os alunos mais motivados." (ALLEVATO, 2005, p. 310.)

Como o tema escolhido por nós favorecia o uso da tecnologia, e sendo este um elemento motivador para o aluno, resolvemos então utilizá-la. A partir daí surgiram as ideias de atividades e foi construído todo o nosso trabalho, que será apresentado nos capítulos subsequentes. Ficaram também delimitados nossa questão de pesquisa e nosso público alvo.

Questão de pesquisa: a resolução de equações por métodos não algébricos constitui elemento motivador e facilitador do estudo de funções e seus gráficos?

Público alvo: alunos concluintes do Ensino Médio.

2. FUNÇÕES: IMPORTÂNCIA E PESQUISAS NA ÁREA

O estudo de funções vem dando margem a grandes reflexões, desde tempos primordiais, por parte de diferentes autores. Tendo em vista suas aplicações, trouxe — e ainda traz — importantes contribuições para a Matemática. Pode ser considerada, grosso modo, como um objeto matemático que retrata problemas de variação e quantificação de fenômenos.

Analisando dois dos documentos oficiais sobre o currículo de Matemática do Ensino Médio, os PCNEM (BRASIL, 2000) e suas orientações complementares – PCN+ (BRASIL, 2002), é possível encontrar diversas alusões à importância do estudo de funções e suas aplicações.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 43-44)

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.
> [...] em relação às competências a serem desenvolvidas pela Matemática, a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático. (BRASIL, 2002, p. 121-122)

Não existe um consenso, entre os pesquisadores, sobre quando ou quem usou a palavra "função" pela primeira vez. Para Edna Maura Zuffi (2001), Newton teria sido o primeiro a utilizar o termo; para Morris Kline (1972), seria Leibniz, em

1673, para expressar quantidade associada a uma curva; Youschkevich (1976), por sua vez, afirma que foi Bernoulli, em 1718, em um artigo apresentado à Academia Real de Ciências de Paris. É inegável, porém, sua importância, não só na Matemática como em outras ciências.

> O estudo de funções é, certamente, um dos mais importantes tópicos de toda a Matemática fundamental. Com aplicações em todas as áreas, sua utilização vai desde problemas cotidianos até modelagens sofisticadas de situações da astronomia, engenharias ou medicina. Seu domínio é indispensável por alunos de todos os níveis. (SILVA, 2006, p. 2)

"O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem." (BARRETO, 2007, p. 87)

> O conceito de função é nuclear para a construção do conhecimento matemático. É um conceito abordado em todos os níveis de ensino quer seja implícita ou explicitamente, e se faz presente na busca de entendimento dos mais variados fenômenos. (ARDENGHI, 2008, p. 14)

> Em resumo, podemos perceber que o conceito de função é um dos elos entre diferentes assuntos dentro da própria Matemática e que, além disso, desempenha um papel central em diversas áreas do conhecimento, visto que é uma das ferramentas para a compreensão de certos fenômenos e a representação das variações dos mesmos. (THEES, 2009, p. 25)

Apesar disso, parece que o tema não tem recebido a devida atenção de pesquisadores brasileiros da área de Educação Matemática. Já foram citadas, no Capítulo 1, as pesquisas concluídas em 2008 por Marcos Ardenghi (ARDENGHI, 2008) e por Eduardo de Souza Júnior (SOUZA JÚNIOR, 2008). Na primeira, foram encontrados quarenta e seis trabalhos sobre funções, entre teses e dissertações, concluídos de 1970 a 2005.

> Nosso objetivo principal é a identificação de dificuldades [no ensino e aprendizagem de funções] e de fatores que possam ser causadores das mesmas, bem como formas de intervenção no ensino que possam contribuir com a superação das mesmas. (ARDENGHI, 2008, p. 15)
> Os objetivos almejados poderão ser atingidos por meio do mapeamento das pesquisas produzidas no Brasil com foco no ensino aprendizagem de função. (ARDENGHI, 2008, p. 16)

> Os dados foram coletados em diversos Programas de Pós-Graduação [...]; em bancos de teses e dissertações da CAPES, do IBICT, do CEMPEM – Unicamp, da ANPED; nos catálogos bibliográficos existentes na Fundação Carlos Chagas (SP); nas Bibliotecas Digitais de Teses e Dissertações disponíveis na *Web* e nas referências bibliográficas presentes em teses, dissertações e artigos. Houve ainda alguns casos em que os trabalhos foram coletados com os próprios autores por *e-mail*.
> [...]
> O critério adotado para a seleção das pesquisas foi o título. Constaram de nosso rol as dissertações e teses cujos títulos expressam de forma explícita ou implícita o estudo do tema função.
> Quase a totalidade das pesquisas foi lida integralmente e fichada. A leitura integral das pesquisas justifica-se pelo fato de o resumo ser insuficiente para atingir os objetivos deste trabalho [...] (ARDENGHI, 2008, p. 18)

Apesar do número de pesquisas encontrado por Marcos Ardenghi parecer expressivo, talvez ele de fato não seja. Na segunda dissertação de mestrado citada, defendida também em 2008, Eduardo de Souza Júnior analisou teses e dissertações constantes do *site* da CAPES, concluídas no período de 1997 a 2006.

> O objetivo geral da pesquisa é verificar o grau de importância que a comunidade científica que investiga o ensino de Matemática tem dado a esse conceito [função].
> Nesse sentido, fizemos um estudo de dissertações e teses produzidas a partir de 1997, inicialmente selecionando-as pelos seus resumos e palavras-chave, e, depois, fazendo uma leitura das que mais interessaram para o estudo. (SOUZA JÚNIOR, 2008, p. 12-13)
> [...] realizamos uma pesquisa qualitativa em relação à produção de dissertações e teses no período de 1997 a 2006 [sobre funções], e considerando a análise da produção acadêmica no mesmo período no que tange os enfoques das pesquisas produzidas.
> Nesse aspecto, recorremos ao site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, site esse que se apresenta com o objetivo de facilitar o acesso a informações sobre teses e dissertações defendidas junto a programas de pós-graduação do país. Temos por hipótese que o tema "função", de vital importância dentro da Educação Matemática, tem merecido pouca atenção por parte dos pesquisadores. (SOUZA JÚNIOR, 2008, p. 6)
> No referido banco, utilizamos como palavras de busca as expressões "educação matemática" e "história da matemática". (SOUZA JÚNIOR, 2008, p. 39)

Na referida pesquisa qualitativa, foi constatado que, das setecentas e seis dissertações e cento e trinta e oito teses na área de Educação Matemática constantes do *site* da CAPES, apenas 2,7% eram sobre funções no Ensino Básico, sendo vinte e uma dissertações e duas teses (SOUZA JÚNIOR, 2008). A partir destes resultados, o autor concluiu que o assunto tem merecido pouca atenção por parte de pesquisadores em Educação Matemática.

Essa aparente disparidade de resultados resultou de várias diferenças existentes entre as duas dissertações, tais como as fontes de pesquisa, os critérios de busca e, principalmente, os objetivos de cada uma. A primeira buscava pesquisas sobre funções e, entre elas, as que se referiam às dificuldades de aprendizagem, trabalhando com números absolutos. A segunda procurava identificar, no universo de pesquisas realizadas em Educação Matemática, quantas versavam sobre funções, comparando em seguida os números obtidos.

Na verdade, os resultados nem podem ser comparados, pois os universos considerados são diferentes, assim como o enfoque de cada pesquisa.

O que pode se depreender da dissertação de Marcos Ardenghi é que há uma grande preocupação, dentre os que pesquisam sobre o ensino e a aprendizagem de funções, em compreender as dificuldades dos alunos e oferecer alternativas que as minimizem.

Já a partir da dissertação de Eduardo de Souza Júnior conclui-se que, em comparação ao total de pesquisas em Educação Matemática, é surpreendentemente pequeno o número das que versam sobre funções no Ensino Básico, dada a importância do tema. Isto significa que, apesar de ser um assunto bastante comentado no meio docente, não há tantas dissertações e teses sobre ensino e aprendizagem de funções, como se poderia supor.

Divergências à parte, considerando o número de trabalhos sobre funções suficiente ou não, o tema não perdeu sua importância, muito menos se esgotou. Prova é que suscitou a elaboração das duas dissertações supracitadas, e de várias outras estudadas por nós ao longo de nossa revisão bibliográfica, concluídas desde 2006 até os dias atuais.

3. ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Há muito a ser dito sobre ensino e aprendizagem de funções. Pode-se discorrer sobre a importância da abordagem histórica, da contextualização, do uso de tecnologia, etc. Dois aspectos relevantes para nossa pesquisa são destacados nas primeiras seções. Na terceira, é apresentado o ponto de vista de Marina Menna Barreto, que tivemos em mente ao longo de nosso trabalho.

3.1. ORIENTAÇÕES OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

A primeira referência ao ensino e aprendizagem de funções aparece já nos PCN de 3º e 4 º ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), nos conteúdos a serem abordados em "Números e Operações".

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.
> Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p. 50-51)

Mais adiante, reaparece nos conteúdos específicos do quarto ciclo.

> Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador. (BRASIL, 1998, p. 84)

A partir da leitura desses dois trechos, gostaríamos de tecer dois comentários. Segundo os próprios PCN, o conceito de função "nasce" na Álgebra. Não há que estranhar, portanto, o caráter eminentemente algébrico de sua abordagem nos livros didáticos. É, digamos, a "ordem natural das coisas", já que as coleções têm que estar de acordo com as orientações dos PCN. Aliás, também nas orientações complementares para o Ensino Médio (PCN+), as funções constituem, junto com os números, um dos três eixos estruturadores da Matemática (Álgebra: Números e funções) (BRASIL, 2002), e só aparecem destacadas como um bloco de conteúdo *per si* nas OCEM (BRASIL, 2006).

Consideramos ainda que há certa divergência sobre o que é dito em cada trecho. No primeiro, é recomendada apenas a "exploração da noção de função", enquanto no segundo "é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função", incluindo "a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica". Isto significa o trabalho com dois registros, o gráfico e o algébrico, o que vai muito além de uma simples "noção de função". (Ou seja, as próprias orientações oficiais são um tanto confusas.)

Feitos os comentários, voltemos ao cerne da questão. As OCEM (BRASIL, 2006) chamam atenção para o fato de que

> O livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que "o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa". Nesse processo, o professor termina perdendo sua autonomia como responsável pelo processo de transposição didática interna. É importante, pois, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais. (BRASIL, 2006, p.86)

Em 2001, Elon Lages Lima já abordava a relação entre o professor e o livro didático, mas sob outro ponto de vista. Segundo ele, na maioria dos casos, o livro didático é a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos. Assim, é necessário que tal livro seja, além de acessível e atraente para o aluno, uma base confiável para o professor, levando-o a ser claro, objetivo e preciso. Deve também explicitar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual. (LIMA, 2001)

> Muitas vezes (quase sempre) o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou alguma) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo escolar. (LIMA, 2001, p. 462)

Com a colaboração de diversos professores, o supracitado autor editou um trabalho de análise de 36 volumes que compunham 12 coleções de livros didáticos de Matemática, utilizados nos três anos do Ensino Médio das escolas brasileiras.

> Ao concluirmos este trabalho, temos plena consciência de que não examinamos todos os livros adotados em nosso Ensino Médio. Por outro lado, estamos certos de que as coleções aqui analisadas são adotadas pela absoluta maioria dos professores. Por isso não hesitamos em considerar a amostra da qual dispomos como representativa o suficiente para permitir, a partir dela, falar genericamente, sem mencionarmos as exceções de praxe, caso existam. (LIMA, 2001, p. 462)

Falando sobre o "livro genérico", que representa o padrão seguido pela maioria dos livros, são apontados mais defeitos do que qualidades.

> • Ele é muito bem impresso e diagramado, em várias cores, com belas ilustrações, embora as figuras matemáticas contenham muitas imprecisões e erros.
> • Seu texto não induz o leitor (aluno) a pensar. [...]
> • Transmite sistematicamente a impressão de que as conclusões gerais da Matemática resultam do exame superficial de dois ou três casos particulares. […]
> • Usa uma terminologia peculiar, que o aluno deverá esquecer em estudos posteriores, na Universidade. Exemplos: ciclo trigonométrico, [...] função afim não pode ser constante. [...]
> • Não estabelece conexões entre os assuntos estudados em diferentes capítulos ou volumes. Exemplo: progressão geométrica e função exponencial.
> • [...] A parte conceitual é extremamente deficiente e as aplicações reais contextualizando os temas estudados, praticamente inexistem. (LIMA, 2001, p. 462-463)

Em outras palavras, a maioria dos livros está na contramão do que preconizam os documentos oficiais sobre currículo, ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. Segundo eles, o aluno deve ser levado a questionar, conjecturar e generalizar, além de estabelecer relações entre diferentes assuntos e aplicá-los em outras áreas do conhecimento. Também é bastante ressaltada a importância da contextualização. (BRASIL, 2000, 2002, 2006)

Quando o assunto é função, o livro genérico não se apresenta de forma diferente da que foi comentada. O quadro da Figura 1 compara as conclusões de Elon Lages Lima com algumas das orientações oficiais.

LIVRO GENÉRICO	ORIENTAÇÕES OFICIAIS
[...] Funções são definidas como relações binárias, ponto de vista que nenhum matemático nem usuário da Matemática adota em seu dia-a-dia. Pior: esta generalidade inútil é rapidamente abandonada e todas as funções que surgem depois são bolinhas e flechinhas, ou então dadas por fórmulas. (LIMA, 2001, p. 463)	[...] o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser [...]em parte deixada de lado [...] (BRASIL, 2002, p. 121) O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações [...] (BRASIL, 2006, p. 72)
Função afim. A importantíssima noção de proporcionalidade, que o aluno não aprendeu corretamente no Ensino Fundamental, não é retomada de forma adequada. A caracterização da função afim (acréscimos iguais a x provocam acréscimos iguais em $f(x)$) nunca é mencionada. Que seu gráfico é uma reta é uma conclusão nunca provada, mas afirmada a partir de três pontos particulares num exemplo particular. [...] (LIMA, 2001, p. 463-464)	[...] ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. (BRASIL, 2002, p. 121) As idéias de crescimento, modelo linear ($f(x) = a{\cdot}x$) e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. (BRASIL, 2006, p. 72)
Função quadrática. Um acúmulo de impropriedades. O método de completar quadrados, instrumento essencial para o estudo deste tópico, não é usado [...] A forma canônica do trinômio, idem. A parábola não é definida geometricamente nem é feita a conexão com a curva de mesmo nome (a mesma curva) estudada na terceira série. Os inúmeros e interessantes problemas contextuais [...] se reduzem a um único. Empregos importantes da parábola, como antenas de televisão [...] não são mencionados. (LIMA, 2001, p. 464)	[...]a ênfase deve estar no conceito de função e em seu uso para modelar situações contextualizadas e na interpretação de gráficos [...] (BRASIL, 2002, p. 129) [...] a forma fatorada ($f(x) = a.\ (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola [...] (BRASIL, 2006, p. 73)
Funções exponenciais e logarítmicas. São tratadas separadamente e só de passagem é dito que uma é a inversa da outra. Há [...] pouco uso da calculadora. Os variados, atuais e importantes exemplos em que estas funções são aplicadas são escassos e apresentados sob a forma enganosa em que a exponencial e o logaritmo já vêm junto com o enunciado do problema. As propriedades características destas funções não são mencionadas, logo não é possível propor questões em que elas sejam usadas na resolução mas não ocorram no enunciado. Nunca é observado que progressões geométricas são discretizações de funções exponenciais. (LIMA, 2001, p. 464)	As funções exponencial e logarítmica [...] são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem [...] ser suprimidas. Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. (BRASIL, 2002, p. 121) É pertinente discutir o alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo de crescimento/ decrescimento exponencial ($f(x) = a^x$). (BRASIL, 2006, p. 74)

Figura 1: Funções, Livro genérico e Orientações oficiais

Precisávamos "ver de perto" a situação retratada por Elon Lages Lima em 2001. Procedemos, então, à análise da parte referente à introdução de funções e gráficos de três livros utilizados no ensino básico (Fundamental ou Médio), escritos por autores renomados. Foram levantadas a forma de abordagem do ensino de funções e as metodologias adotadas pelos referidos autores. A análise completa constitui o Apêndice A, mas adiantamos que os resultados foram condizentes com as observações feitas pelo referido autor, mesmo em livros editados posteriormente ao ano de 2001.

Os polinômios, por exemplo, continuam sendo apresentados pelos livros em um capítulo à parte, apesar de serem funções. Nós os apresentamos aqui destacados por outro motivo: o que é dito sobre eles tem especial importância para nós.

> **Polinômios.** O livro genérico não traz gráficos de polinômios de grau superior a 2. Não traz exemplos de problemas contextuais que requeiram a resolução de uma equação de grau superior ao segundo. Não deixa claro ao leitor que as fórmulas que expressam as raízes das equações do terceiro e quarto graus são inúteis e que os métodos numéricos (como o de Newton) são eficientes e estão ao alcance dos alunos, principalmente com auxílio de uma boa calculadora ou de um computador. (LIMA, 2001, p. 467)

> As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta, podem estar presentes no estudo de funções. Funções do tipo $f(x) = x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x, x^n) em relação à reta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0 < x < 1$ ou $x > 1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico. Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os “zeros” da função. (BRASIL, 2006, p. 74)

Além disso, as OCEM deixam bem claro que, ao discutir o modelo de crescimento linear, "também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa ($f(x) = a/x$)" (BRASIL, 2006, p. 72).

Percebe-se então que o estudo de funções não deve necessariamente restringir-se às usuais, e a alusão a métodos numéricos feita por Elon Lages Lima é corroborada pelas orientações complementares (PCN+), quando se referem à importância do trabalho com valores aproximados.

> É ainda importante para o aluno, nessa etapa de sua formação, o desenvolvimento da capacidade de estimativa da ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e da capacidade de tratar com valores numéricos exatos ou aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível. (BRASIL, 2002, p. 122)

Essas referências formaram um dos pilares da base teórica para a construção de nossa monografia. Todas indicam que a estratégia de abordagem escolhida por nós é reconhecidamente "eficiente e está ao alcance dos alunos, principalmente com auxílio de uma boa calculadora ou de um computador" (LIMA, 2001, p. 467). O incentivo ao estudo de outros tipos de funções, bem como ao trabalho com valores aproximados, encontradas em documentos oficiais, nos deram a certeza de que estávamos no caminho certo.

3.2. DIFICULDADES DE ALUNOS E DE PROFESSORES

Segundo Chaves (2004), a vivência docente, além de várias pesquisas na área da Educação Matemática, têm nos mostrado que a maioria dos alunos chega ao final do Ensino Médio sem atribuir qualquer significado ao conceito de função. Ao entrar na Universidade, se solicitados quanto a tais conhecimentos, o resultado não é nada satisfatório. Como professores de Matemática, o que podemos fazer? Como levar o aluno ao entendimento do conceito de função? O que há de errado com o ensino de funções?

Na visão de Beatriz D'Ambrósio, em 1989 a aula de Matemática no Ensino Médio era expositiva, e o professor ensinava aquilo que julgasse necessário.

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 1.)

Entre 1989 e os dias atuais houve mudanças, é claro, mas o "processo de transmissão de conhecimento" ao qual se refere a autora persiste.

Isto leva os alunos a pensarem que a Matemática é um corpo de conceitos verdadeiro e estático, do qual não se duvida ou questiona — nem mesmo se preocupa em compreender porque funciona. Em geral, creem também que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. Ao acreditar e supervalorizar o poder da Matemática formal, o aluno perde a confiança em sua intuição matemática, deixando para trás, aos poucos, também seu "bom-senso" matemático. Além disso, passa a acreditar que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema em uma situação real. (D'AMBRÓSIO, 1989)

Conforme comentamos na seção anterior, a maioria dos cursos de Ensino Médio, seguindo a tendência do livro didático, aborda apenas o estudo de funções típicas, restringindo-se à sua classificação e a uma série de propriedades operacionais. Nem sempre é dada ênfase à aplicabilidade de funções na resolução de problemas, quando este deveria ser um dos pontos fundamentais na formação matemática dos alunos. (SILVA, 2007)

Em contrapartida, as orientações complementares (PCN+) afirmam que "[...] a ênfase deve estar no conceito de função e em seu uso para modelar situações contextualizadas e na interpretação de gráficos [...]" (BRASIL, 2002, p. 129)

O conceito de função é complexo para o aluno, pois envolve ideias abstratas de variável, Domínio, Contradomínio, Imagem e regra de correspondência. "Além disso, não podemos esperar que o nosso aluno o apreenda em poucas aulas, visto que a própria humanidade levou séculos para formalizar e entender tal conceito." (CHAVES, 2004, p. 16) Isto vai ao encontro do que diz Ponte (1992), conforme citado no Capítulo 1.

Ao mesmo tempo, o conceito de função é tratado por muitos professores de Matemática do Ensino Médio de forma "fechada", não só por influência do livro didático, como também por outros fatores, marcadamente a exigência da comunidade escolar (educadores, alunos e seus responsáveis) do cumprimento do programa, além de sua própria formação, que o faz transmitir um saber desconectado do contexto do aluno, indivíduo dotado de saberes, níveis de cognição e imaginação. (CHAVES, 2004)

Ao analisar o desenvolvimento do conceito de função ao longo do tempo, percebemos que esse processo construtivo do saber pode acontecer, também, na aprendizagem em sala de aula. Cabe ao professor, a partir dos conhecimentos já adquiridos por seus alunos, provocar questionamentos que os levem, pouco a pouco, à elaboração de novos conceitos.

> Assim, os professores devem compreender que a Matemática desempenha um papel formativo e técnico com ênfase na formação dos alunos como cidadãos plenos, capazes de pensar matematicamente quando necessário e utilizar a Matemática no seu dia-a-dia, e não só para aqueles que pretendem dar continuidade aos estudos nesta área ou em áreas afins. (THEES, 2009, p. 25)

Mas, como o professor poderá fazer isto, se não estiver preparado? As dificuldades não são apenas do aluno em aprender, mas também do docente em ensinar.

Oliveira (1997), em sua dissertação de mestrado, aplicou um questionário a um grupo de dezessete professores, a fim de investigar as dificuldades de alunos e docentes em relação ao ensino e à aprendizagem de funções.

> De acordo com a opinião dos professores, as maiores dificuldades dos alunos com relação às funções são:
> - a transposição dos problemas (linguagem escrita) para a expressão (linguagem algébrica);
> - transferir para a realidade;
> - o domínio da função;
> - representação gráfica;
> - análise dos gráficos;
> - associar grandeza à variável;
> - abstração, com rigores matemáticos, dos conceitos;
> - a simbologia;
> - a lei de correspondência;
> - a definição abstrata;
> - As diversas representações de uma função. (OLIVEIRA, 1997, p. 41)

Quando questionados sobre "O que é mais difícil ensinar com relação a função", nove responderam "o conceito de função"; sete a "representação gráfica de uma função" e um não se referiu nem ao conceito, nem ao gráfico. (OLIVEIRA, 1997, p. 41)

Visando enfrentar tais dificuldades, alguns pesquisadores sugerem, em consonância com as orientações oficiais, que o estudo das funções deve se iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual. Para eles, os métodos algébricos e os aspectos de formalização devem ser reservados para um segundo momento. (BARRETO, 2007)

Há, também, autores que propõem práticas a serem trabalhadas em sala de aula para minimizar tais dificuldades e tornar a aprendizagem mais prazerosa, levando o aluno a descobrir as múltiplas utilidades das funções em seu dia-a-dia ou a aprimorar sua compreensão sobre este objeto matemático. Um exemplo pode ser encontrado na próxima seção.

3.3. UM PONTO DE VISTA INTERESSANTE

Segundo Barreto (2007), o ensino das funções deve atender à necessidade de articular diversas formas de representação. "Apesar das muitas dificuldades constatadas na compreensão do conceito de função, algumas mudanças simples na ênfase, nos pontos de vista ou nas abordagens podem contribuir para amenizá-las." (BARRETO, 2007, p. 94)

A autora destaca alguns aspectos que considera importantes no estudo de funções ao longo do Ensino Médio: a) a natureza algébrica; b) as diferentes formas de representação; c) a aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências; d) a articulação com outros tópicos da própria Matemática.

A seguir, faremos um breve resumo de cada aspecto.

a) Natureza algébrica: de acordo com a autora, se for priorizada a ideia de relação que está por trás da noção de função, valorizando os aspectos mais intuitivos e relacionais e dando menor ênfase às equações e expressões algébricas, ocorrerá uma aprendizagem com mais significado.

b) Diferentes formas de representação: funções podem ser representadas de várias maneiras, tais como tabelas, gráficos, regras verbais, regras matemáticas ou modelos. Estas múltiplas representações, se utilizadas de forma articulada, podem contribuir significativamente para o ensino e a aprendizagem, levando o aluno a compreender o conceito de forma mais objetiva e coerente.

c) Aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências: as aplicações da Matemática em outras ciências ou contextos são, de modo geral, valorizadas por diversos educadores. O estudo de funções favorece o uso de aplicações. Segundo Ponte (1992, p. 7), "Funções são excelentes ferramentas para estudar problemas de variação e trazem consigo, de sua origem histórica, a ideia de instrumento matemático indispensável ao estudo qualitativo de fenômenos naturais."

d) Articulação com outros tópicos da própria Matemática: a articulação deste tópico com as progressões é considerada fundamental. (BARRETO, 2007)

> Entendemos que, a compreensão do conceito de variável, a capacidade de se mover nas múltiplas representações e de representar matematicamente as relações, assim como a capacidade de relacionar o conceito a outras áreas e contextos e de associar funções a outros tópicos da matemática são competências importantes para uma compreensão ampla das funções. (BARRETO, 2007, p. 92)

4. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E USO DE TECNOLOGIA

Apesar de poderem ser incluídos em aspectos do processo de ensino e aprendizagem de funções, destacamos estes tópicos por considerá-los, também, pilares sobre os quais assentamos nosso trabalho.

Segundo Monteiro (1999) o desenvolvimento sócio-histórico dos gráficos está associado à necessidade de tratar informações quantitativas. Neste sentido, os gráficos tornaram-se poderosos sistemas de representação que permitem sistematizar dados, possibilitando a compreensão do todo e não apenas de aspectos isolados das informações tratadas.

A apresentação gráfica é frequentemente associada à coordenação de informações quantitativas dispostas em dois eixos perpendiculares; um horizontal (eixo das abscissas) e um vertical (eixo das ordenadas).

No que diz respeito ao estudo das funções, os gráficos são particularmente importantes, pois, além do apelo visual, favorecem a observação de determinados comportamentos que, em outras representações (tabular ou algébrica), são difíceis de perceber (BARRETO, 2007).

As OCEM (BRASIL, 2006), por sua vez, enfatizam a importância da compreensão do que é descrito pelo gráfico da função.

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. (BRASIL, 2006, p. 72)

Em contrapartida, várias pesquisas mostram que há dificuldade na leitura e interpretação de gráficos.

> O fato de inúmeros estudos mostrarem as dificuldades dos alunos, na leitura e interpretação das representações gráficas, levou vários pesquisadores a proporem alternativas como o uso de sequências didáticas, o uso de meios informáticos, na busca de minimizar tais dificuldades. O uso de software no ensino de gráficos de função se mostrou uma possibilidade de superar as dificuldades apontadas em diversas pesquisas com relação ao registro de representação gráfica, na mudança de um registro para outro, já que os resultados apresentados foram bastante satisfatórios para os objetivos propostos nas pesquisas. (ARDENGHI, 2008, p. 72)

Conforme aponta Marcos Ardenghi na citação anterior, uma saída apontada para minimizar tal dificuldade é o uso de tecnologia.

Segundo os PCNEM (BRASIL, 2000), esse impacto da tecnologia exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento, sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos, com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Assim, aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados. "A aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático." (BRASIL, 2000, p. 41)

Já de acordo com suas orientações complementares (PCN+), o uso do computador no ensino é particularmente importante nos dias de hoje. A busca e a articulação de informações são facilitadas pelos dados disponíveis na rede mundial de computadores. É claro que a confiabilidade das fontes de informações deve ser objeto de atenção do professor, já que esse recurso pode ser usado pelo professor ou pelo aluno para a criação de seus próprios materiais: na redação de textos, simulação de experimentos, construção de tabelas e gráficos. É também um meio ágil de comunicação entre o professor e os alunos, possibilitando, por exemplo, a troca de informações na resolução de exercícios, na discussão de um problema, ou na elaboração de relatórios. (BRASIL, 2002)

Por fim, as OCEM chamam atenção para o fato de que os programas de computador (*softwares)* apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas e criam estratégias para resolver problemas. São características destes programas: conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; permitir a manipulação dos objetos que estão na tela. (BRASIL, 2006)

Há várias pesquisas relacionando funções, gráficos e tecnologia como, por exemplo, a dissertação de Diana Maia (2007).

> A utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que o educando faça simulações em busca de um resultado que satisfaça o objetivo proposto, desenvolvendo a capacidade analítica de fazer previsões e questionar resultados. (MAIA, 2007, p. 14)

O computador pode ser uma rica fonte de imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso. O exemplo utilizado por Tall (1989) para ilustrar esse aspecto, é a possibilidade de ampliação, ou seja, de aumentar significativamente partes específicas de um gráfico e, visualmente, analisar a linearidade local para complementar a noção de diferenciabilidade de uma função em um ponto.

Norma Levy Allevato (2005) elaborou sua tese de doutorado com o objetivo de analisar como os alunos relacionam o que fazem em sala com papel e lápis ao que é feito quando utilizam o computador para resolver problemas sobre funções, e comenta os resultados de várias pesquisas realizadas sobre o uso do computador em Educação Matemática.

> Na Educação Matemática, várias pesquisas vêm sendo realizadas e é, também, bastante extensa e variada a produção. A literatura mostra, no caso específico do computador, que a maneira de utilizá-lo no ensino de Matemática foi gradualmente modificada. De qualquer modo as observações, feitas nos estudos já realizados, geralmente indicam que o comportamento dos estudantes que usam essa tecnologia informática (TI) parecia diferente dos demais, ou seja, daqueles que não tinham contato com ela. Em linhas gerais, essas pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. (ALLEVATO, 2005, p. 73)

Ressalte-se aqui que o computador não é uma "panaceia", capaz de "curar todos os males". Como bem observa Norma Allevato no trecho supracitado, "os modos de pensar são, **por vezes**, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos."

Ainda segundo a autora, "Ao professor cabe examinar cuidadosamente seus objetivos a fim de escolher os recursos mais apropriados, planejar e avaliar conscientemente a forma de utilizá-los." (ALLEVATO, 2005, p. 93)

Uma das dificuldades apontadas no uso de computadores advém das ambiguidades e limitações de algumas representações visuais. Villarreal (1999) e Benedetti (2003) afirmam que tais ambiguidades são típicas desse recurso e exigem, dos usuários, habilidade de lidar com questões relativas à escala e à parte do plano cartesiano que estão sendo apresentados na tela. Essas situações podem, por vezes, ser aproveitadas pelos professores para explorar os recursos do computador ou, até mesmo, para conduzir os alunos a atividades de investigação. Porém, nem sempre o professor percebe essa oportunidade, ou, embora perceba, não sabe como encaminhar adequadamente a situação.

Francisco Carlos Benedetti (2003), em sua dissertação de mestrado, investigou, especificamente, as potencialidades de um *software* gráfico em processos de ensino e aprendizagem de conceitos relativos a funções não comumente estudadas pelos alunos participantes da pesquisa — exatamente o que pretendíamos fazer. Ele concluiu que a alternância entre as diversas representações (algébrica, gráfica e tabular) dessas funções possibilitou minimizar o efeito do tratamento prototípico do ensino, que enfatiza características das funções afim e quadrática, ampliando a compreensão dos estudantes no que diz respeito à análise do crescimento, determinação de Domínio e raízes de funções.

A leitura desta última dissertação nos trouxe um forte indicativo de que obteríamos resultados positivos.

5. ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo faremos um breve relato do processo de criação ou adaptação de questões e discorreremos sobre a dinâmica idealizada. Explicaremos a escolha do método numérico da bissecção bem como das TIC utilizadas e teceremos ainda alguns comentários sobre o material elaborado para as atividades.

5.1. QUESTÕES SECUNDÁRIAS DE PESQUISA

Em primeiro lugar, vamos relembrar nossa questão de pesquisa e nosso público alvo, explicitados ao final do Capítulo 1.

Questão de pesquisa: a resolução de equações por métodos não algébricos constitui elemento motivador e facilitador do estudo de funções e seus gráficos?

Público alvo: alunos concluintes do Ensino Médio.

Tendo em mente tanto a questão de pesquisa quanto o público alvo, começamos a elaborar as atividades e as questões que as comporiam. Durante esta elaboração, outras perguntas surgiram, e foram chamadas por nós de questões secundárias.

1ª) Diante do problema de resolver uma equação, o aluno é capaz de lançar mão de recursos que não sejam algébricos?

2ª) O aluno relaciona raízes de equações com raízes de funções?

3ª) A relação do aluno com *softwares* que traçam gráficos de funções ou lidam com planilhas eletrônicas é a de mero usuário, ou ele também se utiliza destes recursos para investigar e aprender?

4ª) O que motiva mais o aluno: aprender uma forma diferente (de resolver equações) ou aprender de forma diferente (usando TIC)?

Agora, vejamos como surgiram estas questões, e os instrumentos que criamos para respondê-las.

A primeira questão surgiu ao elaborar o teste de sondagem (TS), quando nos questionamos se haveria possibilidade de algum aluno resolver uma equação por um método que não fosse algébrico. Criamos, então, a terceira questão (Figura 2).

> 3) Você conhece algum método de resolução de equações que não seja algébrico? Caso conheça, diga qual é.

Figura 2: TE, TS, Q3

Para responder à segunda questão secundária, foram incluídos na Lista 2, onde deveriam ser encontradas aproximações das raízes reais, itens em forma de equação, (c), (d) e (e) (Figura 3).

Nos itens (a) e (b), encontre aproximações para as raízes reais das funções. Nos itens (c), (d) e (e), resolva as equações. Em todos os itens, adote erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

c) $e^x - \frac{1}{x} = 0$

d) $ln(x) + x^3 = 0$

e) $e^x + x^2 - 4 = 0$

Figura 3: TE, L2

A terceira questão secundária seria respondida pelo registro das observações feitas durante a utilização dos *softwares* no laboratório de informática.

Para responder à quarta questão secundária, foi criado um item no questionário que seria respondido ao fim das atividades (Figura 4).

Você acredita que este tipo de atividade possa motivar o aluno de Ensino Médio no estudo de funções e seus gráficos? Por quê?

Figura 4: TE, Item do questionário

Este item figurou no questionário aplicado no Teste Exploratório (TE). No questionário elaborado para a validação, o item foi reformulado (Figura 5).

O que você destacaria como mais interessante?

( ) Ter aprendido uma forma diferente de resolver equações.

( ) Ter utilizado recursos tecnológicos (calculadora, computador) para aprender.

( ) Os dois itens acima, sem ordem de preferência.

( ) Nenhum dos itens anteriores.

Figura 5: Validação, Item do questionário

Através dos instrumentos apresentados, conseguimos respostas para todas as questões secundárias de pesquisa.

5.2. MÉTODOS NUMÉRICOS E ENSINO MÉDIO

Nossa intenção era abordar o método gráfico e em seguida um método iterativo para a resolução de equações. O método gráfico, que consiste basicamente na determinação dos pontos de interseção de dois gráficos "conhecidos", nos permite localizar as raízes reais em intervalos da reta real, mas não fornece maiores informações sobre os valores aproximados destas raízes. Para obtê-los, é necessário utilizar um método iterativo, que quando executado em máquina através de algoritmo específico, é denominado método numérico.

Em cálculo numérico, diz-se que o método gráfico é utilizado para isolar as raízes reais, localizando-as em intervalos que podem ter como extremos, por exemplo, números inteiros consecutivos. Obtém-se um intervalo para cada raiz, e o ponto médio deste intervalo é usado como aproximação inicial no método numérico escolhido para refiná-la (é o "ponto de partida" do método numérico).

Existem vários métodos numéricos específicos para a obtenção de aproximações de raízes reais de funções, tais como o da bissecção, o da falsa posição, o do ponto fixo, o de Newton-Raphson e o da secante (que requer duas aproximações iniciais distintas).

Os métodos podem ser analisados quanto à convergência e sua velocidade.

O método mais simples e robusto é o da bissecção, que tem a grande vantagem de convergir sempre. Os cálculos necessários em cada iteração – valores da função e divisões por dois – não trazem maiores complicações ou erros de máquina (daí a robustez). Porém, é muito lento, e converge para a raiz sempre com a mesma velocidade, independente da função.

O método da falsa posição também converge sempre. Em alguns casos, é equivalente ao método da secante e converge com velocidade razoável; em outros, a convergência é muito lenta. Não é tão simples de explicar quanto o método da bissecção, além de apresentar cálculos mais trabalhosos e sujeitos a erros de máquina, em cada iteração.

O método do ponto fixo é mais rápido que o da bissecção, mas nem sempre converge. Além disso, a escolha da função $\boldsymbol{g(x)}$ ao reescrever $\boldsymbol{f(x)} = 0$ como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g(x)}$ deve ser feita de modo a satisfazer a condição de convergência do método.

O método de Newton-Raphson é sem dúvida o método que converge mais rapidamente, no entanto tem algumas desvantagens. Para que este método seja convergente é necessário que certas condições sejam satisfeitas. Além disso, exige o cálculo, em cada iteração, não só da função como também da sua derivada. Este último pode consumir muito tempo de computação por ser difícil, ou então ser mesmo impossível (por exemplo, se a função for definida por pontos). Pode também acarretar erros razoáveis de máquina se o valor da derivada for próximo de zero.

Analisando todos os métodos, escolhemos o da bissecção, por ser o mais simples de acordo com a análise apresentada, e também segundo Arenales (2008), Galvão (2009), Oliveira (2009), Ruggiero (1998) e Shigue (2009).

Justamente por sua simplicidade, é o primeiro método para aproximação de raízes reais de funções a ser abordado nos livros de cálculo numérico pesquisados. Não há problemas relacionados à sua convergência, nem são exigidos conceitos de cálculo diferencial. É necessária a ideia de continuidade e a compreensão de que, se uma função contínua muda de sinal em um intervalo, então nele há pelo menos uma raiz real desta função. Ambas podem ser informalmente explicadas através da análise do gráfico, o que, juntamente com a simplicidade do cálculo efetuado em cada iteração, torna o método da bissecção ideal para a introdução de métodos iterativos no Ensino Médio.

O método gráfico, muito além de servir para isolar raízes, tem especial importância em nosso trabalho. Ao construirmos os gráficos, estaremos revendo vários conceitos ligados a funções, tais como Domínio, Imagem, análise de crescimento e de sinais, máximos e mínimos, raízes, etc. Pretendemos com isso reforçar o aprendizado e esclarecer quaisquer dúvidas que existam em relação às funções usualmente estudadas no Ensino Médio. Além disso, os alunos terão também a oportunidade de estudar funções diferentes das usuais, tais como as cúbicas e as racionais, o que ampliará seus horizontes e sua capacidade de compreensão dos conceitos (BENEDETTI, 2003; BRASIL, 2006).

No trabalho com funções e seus gráficos, utilizamos como referência um dos poucos livros de Ensino Médio que trata mais a fundo algumas funções diferentes das "típicas": *Matemática por Assunto, Volume 1*, de Nilson José Machado (MACHADO, 1988). Algumas das páginas estudadas por nós constituem o Anexo A deste trabalho.

A pesquisa sobre métodos numéricos foi feita nos livros já citados, e também em apostilas de Cálculo Numérico. Uma das mais concisas da qual consta a explicação completa do método da bissecção, de Shigue (2009), constitui o Anexo B desta pesquisa.

A abordagem do método da bissecção foi elaborada por nós, com auxílio de nossa orientadora, que já ministrou aulas para o Ensino Médio e também a disciplina de Cálculo Numérico em nosso curso.

5.3. USO DA CALCULADORA

Na primeira parte da atividade, feita em sala, os gráficos seriam construídos à mão, tanto pelos alunos ao resolver as questões quanto por nós ao explicá-las. Para auxiliar os professores em formação, foram preparadas grades idênticas às que havia na Lista 1, em tamanho A4, a serem coladas no quadro (Figura 6).

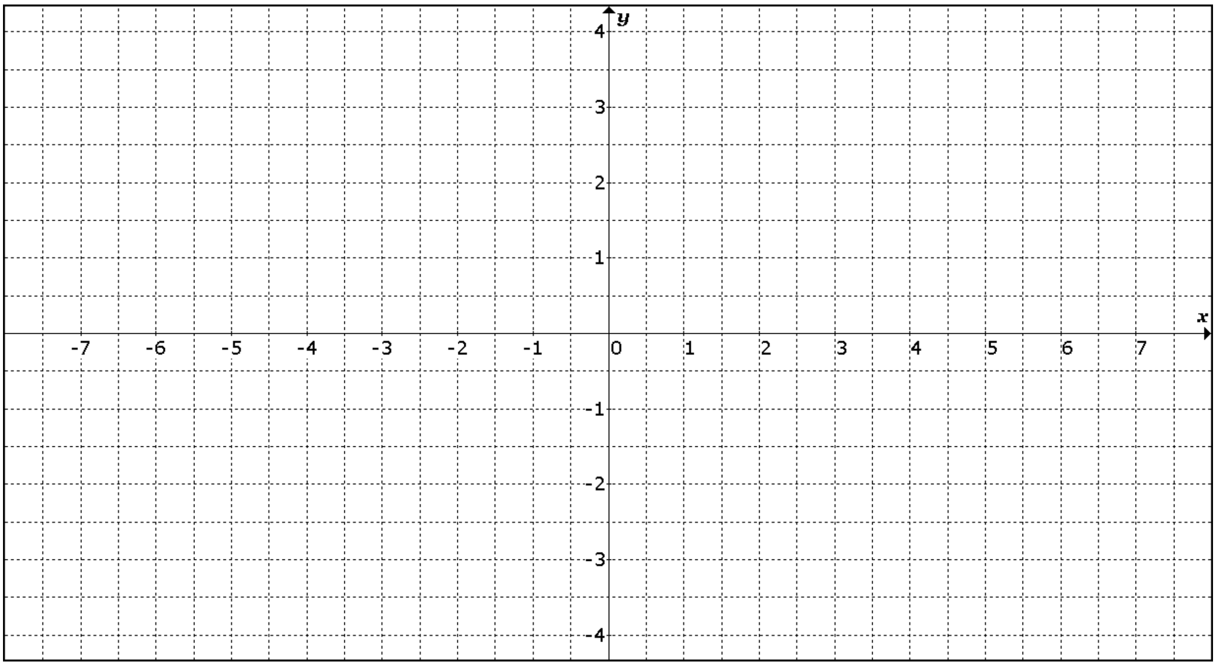


Figura 6: TE, Lista 1, Grade

A dinâmica proposta era fazer um primeiro exemplo do método gráfico junto com os participantes, no qual já seriam dadas algumas explicações. Em seguida, definir o método gráfico, fazer um segundo exemplo e, neste novo exemplo, aplicar também o método da bissecção junto com os participantes, explicando-o à medida que fosse sendo feito.

No método da bissecção, porém, haveria necessidade do uso de calculadora científica, uma vez que seriam efetuadas, por exemplo, exponenciais de base e, além de logaritmos naturais. Isto nos daria a oportunidade de observar se os alunos sabiam utilizá-la corretamente e demandaria a tarefa de orientá-los caso necessário.

Segundo Oliveira (1999), o uso da calculadora deve ser acompanhado de perto pelo professor, para que seja correto e criativo, potencializando a aprendizagem dos conteúdos de Matemática através da busca e percepção de regularidades e o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas.

O autor supracitado salienta que a calculadora, como instrumento que possibilita trabalhar a resolução de problemas sem que dificuldades de cálculo interfiram no processo, facilita a organização e a gestão dos dados.

Como a ênfase de nosso trabalho era na compreensão do método, tudo que agilizasse os cálculos e auxiliasse na organização de cada iteração seria bem-vindo. Haveria, aí, uma boa oportunidade de investigar se os alunos saberiam efetivamente utilizar os recursos da calculadora, e mais ainda, se perceberiam quando o resultado de algum cálculo estava errado pelo uso incorreto desses recursos.

5.4. ESCOLHA DOS *SOFTWARES*

A segunda parte da atividade seria feita no laboratório de informática, e precisávamos escolher um *software* que construísse gráficos de funções, outro que trabalhasse com planilhas e ainda um editor de texto.

Tal como a calculadora, os programas que constroem gráficos de funções, ou "plotadores de gráficos", são largamente utilizados para minimizar o trabalho de construção e dar lugar a uma análise mais aprofundada do gráfico em si. (PONTE, 1992)

O plotador de gráficos escolhido por nós para ser utilizado na segunda parte da atividade foi o *Graphmática*, criado por Keith Hertzer. Nossa escolha se deu pelo fato de ser um *software* gratuito, fácil de usar e "transportar" — requer pouca memória, podendo ser executado a partir de mídia removível (*pendrive*, etc.), sem necessidade de instalação. Além disso, os gráficos construídos podem ser copiados e "colados" em outros arquivos, como por exemplo, aqueles criados em editores de texto.

Para Cátia Djamila dos Santos Neves (2008),

> [...] este *software* permite o estudo e a exploração de funções e suas propriedades, podendo motivar os alunos e auxiliá-los na sua aprendizagem. [...] Também tem sua utilidade prática para o professor, pois ele pode usá-lo na sala de aula para representar os gráficos e deste modo poupar tempo que iria utilizar para desenhar no quadro, para analisar a função junto com os alunos. (NEVES, 2008, p. 75)

Os dois outros programas foram utilizados porque já estavam instalados nas máquinas do laboratório, além de serem, é claro, *softwares* de excelente qualidade e comumente empregados neste tipo de atividade: o *Excel*, que lida com planilhas, e o *Word*, editor de texto, ambos com licença da *Microsoft*.

> As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática oferecendo um ambiente adequado para experimentar sequências numéricas e explorar algumas de suas propriedades. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análises de dados extraídos de situações reais. É possível organizar atividades em que os alunos têm a oportunidade de lidar com as diversas etapas do trabalho de análise de dados reais: tabular, manipular, classificar, obter medidas como média e desvio padrão e obter representações gráficas variadas. (BRASIL, 2006, p. 89)

Utilizaríamos as planilhas não só para agilizar os cálculos, como para avaliar a compreensão do método da bissecção, já que não viriam "prontas": aos alunos caberia a escolha dos extremos, em cada iteração. As planilhas foram preparadas para calcular o valor da função nos extremos e no ponto médio, em cada iteração, de forma organizada.

O editor de texto foi utilizado para que os alunos fizessem as atividades propostas sem precisar, a todo momento, alternar entre o papel e lápis e o computador. Além disso, estariam exercitando o uso simultâneo de vários *softwares*.

A dinâmica proposta era a seguinte: primeiro seria utilizado o *Graphmática* para o traçado dos gráficos, que seriam "colados" no arquivo em *Word*, onde também seriam anotados o número de raízes reais e o intervalo de localização de cada uma. Em seguida, os extremos do intervalo seriam digitados na planilha do *Excel* (uma para cada raiz real), onde seria aplicado o método da bissecção. Cada aproximação encontrada seria, então, digitada no arquivo em *Word*.

Os arquivos preparados, dos enunciados da Lista 2 em *Word* e das planilhas em *Excel*, seriam disponibilizados em um endereço eletrônico, especialmente criado para este fim. A senha seria informada aos participantes, para que pudessem "baixar" os arquivos.

Como recurso adicional seria utilizado o projetor multimídia, onde resolveríamos as questões da Lista 2 para que todos acompanhassem e pudessem conferir suas respostas, além de manterem aproximadamente o mesmo ritmo de trabalho.

6. METODOLOGIA DE PESQUISA

Antes de iniciar o relato de nossa experiência, com a apresentação dos dados e resultados das aplicações das atividades elaboradas, é imprescindível ressaltar a metodologia de pesquisa por nós utilizada, fortemente referenciada no artigo de João Pedro da Ponte, “Estudos de caso em educação matemática”. (PONTE, 2006)

Nossa metodologia de pesquisa é a análise qualitativa, com enfoque no estudo de caso. O principal objetivo é investigar se a resolução de equações por métodos não algébricos – no caso, método gráfico e método da bissecção – pode estimular ou facilitar o estudo de funções. Nosso público alvo são alunos concluintes do Ensino Médio.

As pesquisas sobre o assunto e a análise dos livros didáticos de Matemática atualmente adotados no Ensino Médio, citadas nos capítulos 1 e 3, evidenciam a existência de uma lacuna. Enquanto as diretrizes oficiais reforçam a necessidade de estimular o raciocínio do aluno, a maioria esmagadora dos livros didáticos apresenta funções como um assunto "pronto e acabado", sem margem para dúvidas ou investigações.

O levantamento bibliográfico foi imprescindível, já que um dos aspectos que tornam válidos os resultados de um estudo de caso é um forte referencial teórico. Porém, apenas a teoria não é suficiente. Para verdadeiramente saber o que ocorre em sala de aula, é preciso investigar *in loco*. Nosso universo, contudo, é limitado. Também por isso nos identificamos com tal metodologia de pesquisa.

> Um estudo de caso pode com vantagem apoiar-se numa orientação teórica bem definida; além disso, pode seguir uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes ou uma perspectiva pragmática, tendo em vista proporcionar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente do objecto *(sic)* de estudo. (PONTE, 2006, p. 1)

Sempre tendo como referência o artigo supracitado, faremos um resumo das características da metodologia, ou, como prefere João Pedro da Ponte, do “*design*” de investigação que é o estudo de caso (PONTE, 2006) e teceremos alguns comentários sobre o tipo de conhecimento por ele produzido.

Um estudo de caso é uma investigação feita em uma situação particular, conduzida de forma a descobrir as características mais importantes do objeto estudado, que contribuam para a sua compreensão global (do objeto).

“Um caso funciona sobretudo como um exemplo.”(PONTE, 2006, p. 4)

Um estudo de caso é em geral uma investigação *in loco* — nesta pesquisa, a sala de aula. Fundamenta-se em uma descrição que seja a mais completa possível de seu objeto de estudo (*thick description*) — em nosso caso, a aprendizagem de funções, sobre a qual pesquisamos.

> Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação. (PONTE, 2006, p. 8)

Em nosso trabalho, pretendemos apresentar, para alunos de Ensino Médio, um assunto que normalmente é abordado no Ensino Superior. Isto é, de certa forma, uma quebra de paradigma, que apesar de não trazer resultados generalizáveis, pode suscitar outras pesquisas sobre o tema.

Apesar de seu empirismo, este tipo de investigação não é intervencionista. Não se pretende modificar a situação, e sim compreendê-la. (PONTE, 2006) Não temos a pretensão de que os alunos saberão mais sobre funções após uma ou duas aulas. A finalidade das atividades é, antes de tudo, despertar o interesse sobre o estudo do tema e, se possível, facilitar sua compreensão. Por outro lado, poderemos ter ideia do conhecimento que os alunos concluintes de Ensino Médio têm sobre funções e compará-lo com os resultados das pesquisas analisadas.

> Na verdade, para se descobrir aspectos novos, escondidos, de uma dada situação, é essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo muito livre os acontecimentos. (PONTE, 2006, p. 8)

Seu relato pode ser feito na forma de uma narrativa, desde que também sejam apresentados os dados da investigação. Até aqui, viemos “contando nossa estória”. Este capítulo foi introduzido para deixar clara a metodologia de investigação e o tipo de conhecimento produzido, antes da apresentação de qualquer resultado.

Segundo Ponte (2006, p. 12), “[...] um estudo de caso produz sempre um conhecimento de tipo particularístico, em que, como diz Erickson (1986), se procura encontrar algo de muito universal no mais particular."

> Deste modo, num estudo de caso não faz sentido formular conclusões sob a forma de proposições gerais. Poderá haver, isso sim, a formulação de *hipóteses de trabalho* a testar em novas investigações. Além disso, parte da tarefa de pensar em que medida certos aspectos se podem ou não aplicar a outros casos fica a cargo dos leitores que deles têm um conhecimento mais directo *(sic)* ou seja, tem lugar a *generalização pelo próprio leitor* (Merriam, 1988). Não devemos menosprezar o facto *(sic)* que muito do valor dos estudos de caso deriva das questões que ajudam a levantar. Na verdade, a importância da investigação educacional tem muito a ver com as questões que coloca e não apenas com as respostas que formula (Nóvoa, 1991; Yin, 1984). (PONTE, 2006, p. 16)

> Em síntese, os estudos de caso *não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população*. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno *(sic)*, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias. *O seu objectivo (sic) fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa*. (PONTE, 2006, p. 17)

As conclusões não podem ser generalizadas, mas de acordo com a base teórica apresentada nos capítulos anteriores, nossa pesquisa é um estudo de caso solidamente referenciado. Logo, produzirá resultados válidos e uma análise confiável, ainda que particular.

Deixemos claro, também, que os resultados não devem e nem podem ser considerados representativos dos grupos aos quais pertencem os participantes, pela própria metodologia de investigação adotada.

Não bastasse isto, uma boa razão seria o reduzido número de indivíduos presentes em cada aplicação das atividades. Por exemplo, apenas sete alunos de um curso de Licenciatura em Matemática participaram do Teste Exploratório. Com certeza, não representam amostra confiável para generalização de conclusões acerca do conhecimento de funções de todos os professores em formação do curso. O mesmo ocorreu com o grupo de concluintes do Ensino Médio.

Outra forte razão seria o fato de não termos realizado testes de avaliação sobre o conhecimento de funções, até porque o estudo de caso não tem caráter intervencionista, mas investigativo. Foram feitos, portanto, registros de observações e aplicação de questionários, tanto no TE quanto na validação das atividades, a fim de saber se o estudo de equações por métodos não algébricos suscitou o interesse pelo estudo de funções e facilitou a compreensão de conceitos relacionados ao assunto.

Esclarecidos os aspectos metodológicos, procederemos ao relato e à análise do TE e da validação das atividades.

7. TESTE EXPLORATÓRIO

O TE foi aplicado a sete alunos do 6º período de um curso de Licenciatura em Matemática do município de Campos dos Goytacazes, no dia 20 de agosto de 2010. Iniciou-se às 8 horas, na sala 202 do bloco F, e teve continuidade no laboratório de informática – sala F 201, terminando às 12h30min. Constituiu-se do TS e de duas listas de exercícios (Lista 1 e Lista 2), sendo que a segunda foi feita no laboratório de informática, utilizando os *softwares Graphmática*, *Excel* e *Word*.

As atividades elaboradas para o TE, à exceção das planilhas em *Excel*, constituem o Apêndice B.

7.1. TESTE DE SONDAGEM (TS)

Iniciamos com a aplicação do TS, cujo objetivo era investigar os conhecimentos dos participantes sobre raízes reais e construção de gráficos de funções. Trinta minutos foram suficientes para que todos terminassem.

O quadro da Figura 7 apresenta o enunciado da primeira questão do TS, o tipo de função e o resultado obtido em cada item.

1) Encontre as raízes reais das funções a seguir.		
	Tipo de função	Corretas
a) $f(x) = 3x - 4$	Polinomial do 1º grau	7 (100%)
b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$	Polinomial do 2º grau	7 (100%)
c) $f(x) = x^3 - x - 3$	Polinomial do 3º grau	0 (0%)
d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$	Transcendente	0 (0%)

Figura 7: TE, TS, Q1, Resultados

Os itens (c) e (d) foram, na verdade, deixados em branco.

Na segunda questão, pedia-se a quantidade de raízes de uma função transcendente. A Figura 8 traz o enunciado e os resultados.

2) Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) - x + 1$?

CORRETAS: 2 (28,6%)

EM BRANCO: 5 (71,4%)

SUGESTÕES: Uma $\rightarrow$ alterar *f(x)* de modo que se tenha mais de uma raiz.

Figura 8: TE, TS, Q2, Resultados

Esta questão foi proposta porque, segundo Bongiovanni (1993), em muitos problemas não é preciso encontrar as soluções, mas apenas o número de raízes da equação. Nestes casos, o método gráfico pode ser mais rápido e eficaz.

Para obter algebricamente as raízes da função $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{sen(x)} - \boldsymbol{x} + 1$, escrevemos $\boldsymbol{sen(x)} - \boldsymbol{x} + 1 = 0$. Esta é uma equação transcendente. Segundo Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1993) uma equação é transcendente quando não é algébrica, ou seja, não pode ser expressa em termos de somas, diferenças, produtos, quocientes ou raízes de funções polinomiais. Em geral, as equações transcendentes não têm fórmulas resolutivas, assim como as equações polinomiais de grau maior que 4. (BONGIOVANNI, 1993)

Os participantes incluídos na porcentagem de acertos desenvolveram um raciocínio a partir da função afim. Todos sabiam determinar a quantidade de raízes de uma função afim, que é apenas uma. Deduziram então que haveria apenas uma raiz, que é a resposta correta. Porém, o raciocínio estava errado, já que não consideraram a expressão algébrica da função **como um todo**.

Foi sugerido então, pelos participantes, que alterássemos a expressão algébrica da função, para que houvesse mais de uma raiz real.

Na terceira questão, perguntávamos sobre o conhecimento de outros métodos de resolução de equações, visando responder a primeira questão secundária de pesquisa (*Diante do problema de resolver uma equação, o aluno é capaz de lançar mão de recursos que não sejam algébricos?*).

A Figura 9 traz a questão e seus resultados.

3) Você conhece algum método de resolução de equações que não seja algébrico? Caso conheça, diga qual é.

SIM: 6 (85,7%) dos quais 4 (57,1%) responderam que conhecem o "método gráfico (*sic*)", 1 (14,3%) respondeu "por meio de resolução de equações de 2º grau através de construções geométricas (*sic*)" e 1 (14,3%) respondeu "método da intercessão (*sic*) ".

NÃO: 1 (14,3%)

Figura 9: TE, TS, Q3, Resultados

Vale ressaltar que um dos participantes já havia cursado a disciplina de Cálculo Numérico, na qual são estudados vários métodos de resolução de equações.

Curiosamente, apesar de seis dentre os sete afirmarem conhecer o "método gráfico", nenhum lançou mão de tal método nos itens (c) e (d) da questão 1, que foram deixados em branco, nem na questão 2, onde os acertos foram provenientes de raciocínio incorreto. Há várias explicações possíveis para esta aparente incoerência nas respostas, mas apenas uma conclusão: conhecendo ou não algum método não algébrico para resolução de equações, os participantes não souberam aplicá-lo. (Ou seja, a resposta à primeira questão secundária de pesquisa, no âmbito do TE, seria ***não***.)

Na quarta questão do TS, pedíamos que indicassem as funções cujo gráfico saberiam esboçar. O propósito era identificar eventuais dificuldades, para que fossem trabalhadas no momento da construção dos gráficos. Ela foi reproduzida na Figura 10, já com os resultados.

4) Marque com um (X) as funções cujo gráfico você saberia esboçar.

(6 ou 85,7%) $f(x) = 2^{x}$	(7 ou 100%) $f(x) = x^{3}$
(7 ou 100%) $f(x) = x^{2} - 4x + 3$	(1 ou 14,3%) $f(x) = e^{x} - x^{2}$
(3 ou 42,9%) $f(x) = e^{x}$	(3 ou 42,9%) $f(x) = ln(x)$
(7 ou 100%) $f(x) = \frac{1}{x}$	(3 ou 42,9%) $f(x) = 2^{x} + 2^{-x}$

QUANTOS MARCARAM X EM CADA UMA

SUGESTÕES: nenhuma

Figura 10: TE, TS, Q4, Resultados

Conforme o esperado, todos ou a grande maioria sabia traçar os gráficos de polinômios de segundo e terceiro graus, da função exponencial de base 2 e da função racional $f(x) = 1/x$. Também dentro das expectativas, menos da metade sabia construir os gráficos de $f(x) = e^{x} - x^{2}$ e de $f(x) = 2^{x} + 2^{-x}$. Causou-nos surpresa, no entanto, o fato de menos da metade saber traçar os gráficos da exponencial de base e , e do logaritmo natural. Atribuímos isto à dificuldade em lidar com o número irracional e , o que foi confirmado pelos participantes durante a construção dos gráficos.

Os testes de sondagem foram analisados pela professora orientadora logo após seu término, antes do início da Lista 1. Assim, os professores em formação estavam cientes de quais gráficos deveriam construir com mais cuidado, dando oportunidade aos participantes de sanarem suas dúvidas.

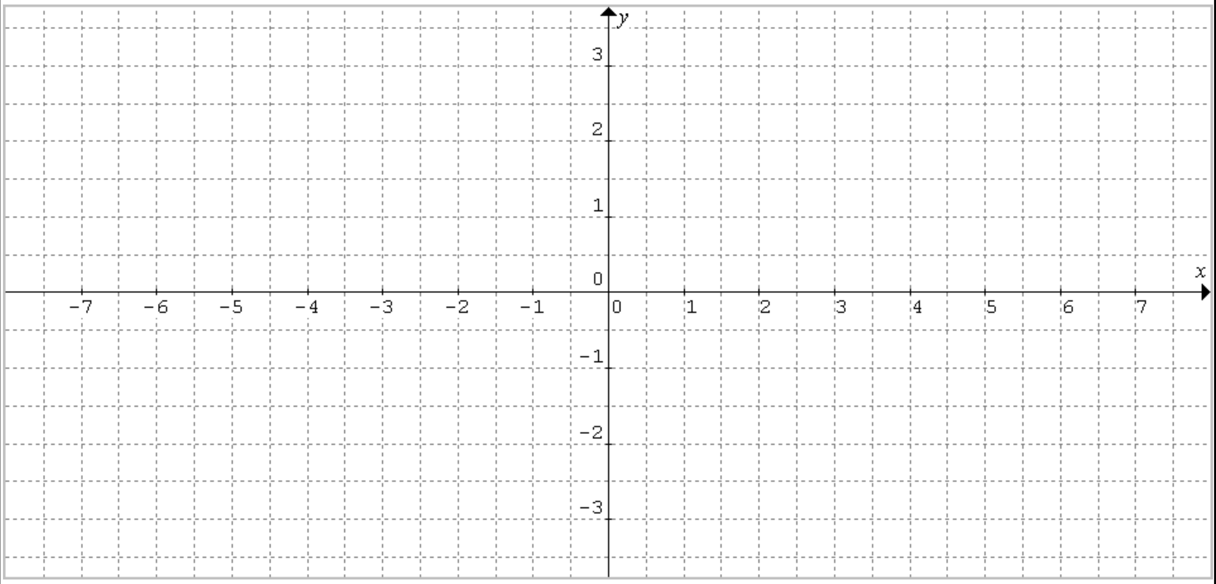
7.2. LISTA 1

Às 8h30min, após o TS, foi distribuída a Lista 1, na qual eram apresentados os métodos gráfico e da bissecção. Constavam desta lista vários exercícios, que foram feitos em conjunto pelos participantes e ministrantes. O último exercício foi resolvido por cada participante, individualmente, e utilizado como parâmetro para aferir se houve entendimento dos métodos apresentados.

A Figura 11 traz a primeira questão da Lista 1, que propunha, como motivação, a resolução da segunda questão do TS.

1) MOTIVAÇÃO: Quantas raízes reais existem da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} + 1$?

a) Na malha quadriculada abaixo, construa o gráfico das funções $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 1$.



b) Marque o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 1$.

c) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), responda à questão proposta na MOTIVAÇÃO: quantas são as raízes reais da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} + 1$ e em que intervalos se encontram?

Figura 11: TE, Lista 1, Q1

Fizemos uma breve introdução, relembrando a definição de raízes reais de funções, sua localização no gráfico, e não houve questionamentos dos participantes. Prosseguimos, explicando que uma equação do tipo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ poderia ser reescrita como $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, onde $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ seriam funções reais cujos gráficos soubéssemos construir, e que as raízes reais de $g(x) = h(x)$ seriam dadas pelas abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de g e h. Os participantes do TE acompanharam a explicação sem problemas.

Procedemos então à análise da equação $f(x) = 0$ na questão 1, ou seja, $sen(x) - x + 1 = 0$. Perguntamos se esta seria uma equação linear, quadrática, exponencial, logarítmica, etc., e se haveria algum método algébrico para sua resolução. Explicamos então o que era uma equação transcendente.

Visto que não haveria método algébrico para sua resolução, introduzimos o método gráfico, reescrevendo a equação original como $sen(x) = -1 + x$, e definindo $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = x - 1$. Esboçamos, em conjunto, os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$, na mesma malha quadriculada (Figura 12).

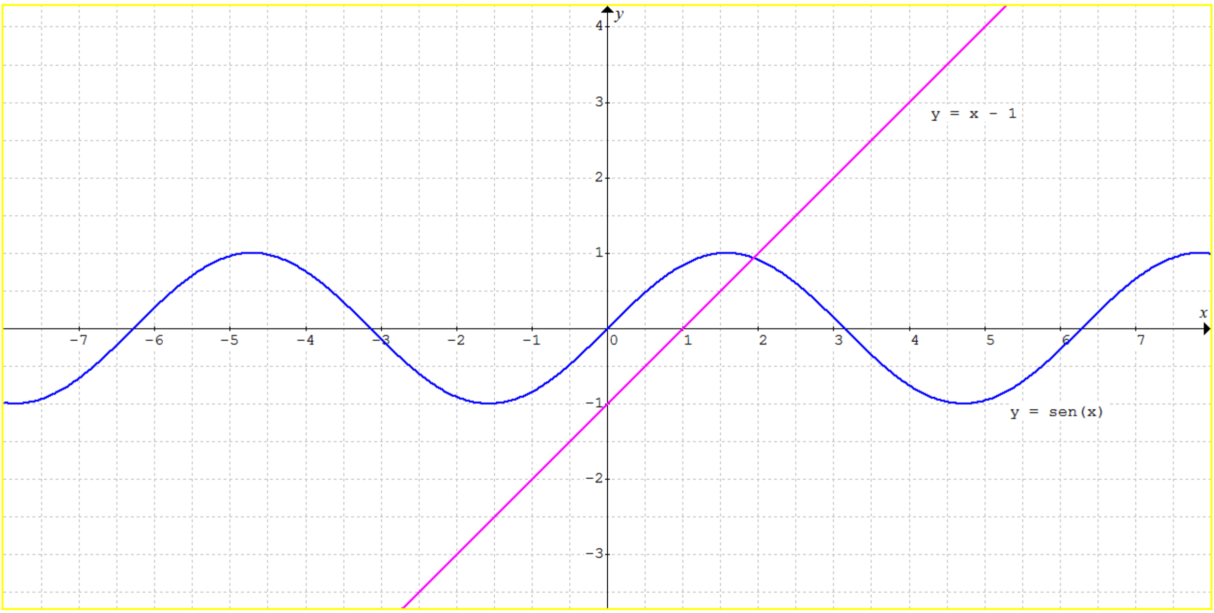


Figura 12: TE, Lista 1, Q1(a), Gráficos

(Gráficos feitos com auxílio do *software Graphmática*.)

Feitos os gráficos, apenas uma raiz real foi visualizada, e perguntamos aos participantes se haveria outras, estimulando a análise gráfica. Todos responderam que só haveria uma raiz real, já que o gráfico de $h(x) = x - 1$ era uma reta, e não voltaria a intersectar o gráfico de $g(x) = sen(x)$. Estabelecido o número de raízes reais da equação, os itens (b) e (c) foram resolvidos pelos participantes. Todos responderam corretamente, visto que haviam compreendido o raciocínio.

Explicamos que o método utilizado na questão 1 era chamado de método gráfico, e foi lida e esclarecida a parte teórica referente ao assunto (Figura 13).

Este exemplo ilustra o **método gráfico** para obtenção de aproximações de raízes reais de funções. Ele nos possibilita **localizar a raiz em um intervalo cujos extremos são números inteiros**. O ponto médio deste intervalo é a **aproximação inicial** da raiz.

A partir do intervalo encontrado no método gráfico, é possível obter valores mais precisos para a raiz, utilizando **métodos iterativos, ou métodos numéricos**. Neste trabalho, escolhemos o **método da bissecção**.

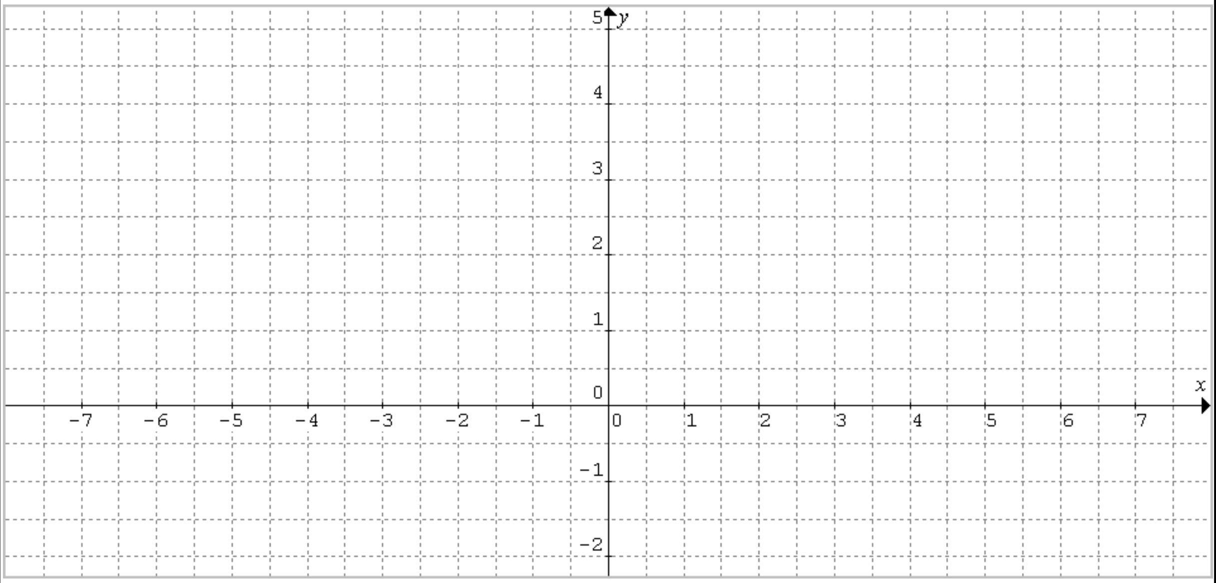
Figura 13: TE, Lista 1, Método gráfico

Passamos então ao item (a) da segunda questão (Figura 14).

2) Encontre aproximações das raízes reais positivas das funções a seguir, com erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = x^3 - x - 3$

Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Figura 14: TE, Lista 1, Q2(a)

Nesse item, utilizamos a mesma função do item (c) da questão 1 do TS, pois já esperávamos que os participantes do TE não conseguissem resolvê-la. Aplicamos novamente o método gráfico, em conjunto, encontrando uma raiz real no intervalo [1; 2] (Figura 15).

Construímos o gráfico de $g(x) = x^3$, e foram feitas algumas observações sobre seu formato, comparando-o com o de $y = x^2$. Também analisamos sinais, paridade e simetria do gráfico, Imagem, crescimento, concavidade, existência de assíntotas, etc.

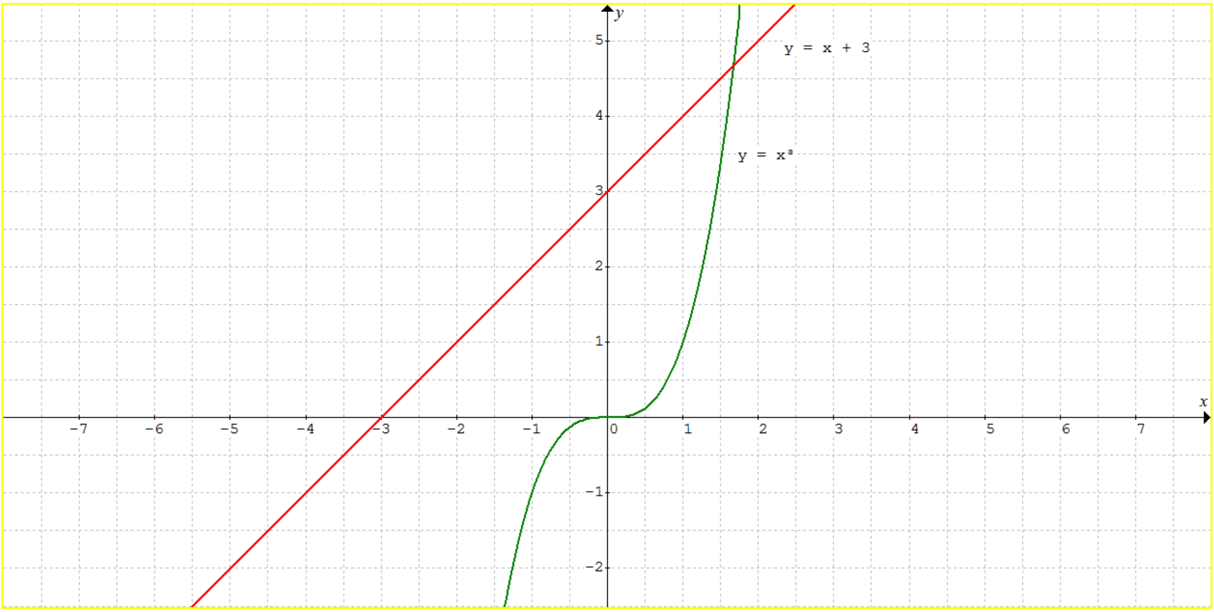


Figura 15: TE, Lista 1, Q2(a), Gráficos

(Gráficos feitos com auxílio do *software Graphmática*.)

Utilizando o intervalo obtido para a raiz real, [1; 2], foi apresentado o raciocínio do método da bissecção, explicado mais detalhadamente à medida que fazíamos as iterações, sempre acompanhados pelos participantes. Ao longo deste primeiro exemplo, com os esclarecimentos dados pelos professores em formação, todos compreenderam como era feita a escolha dos extremos do intervalo em cada iteração, e também a dinâmica de aplicação do método.

Na 1ª iteração, partindo do intervalo [1; 2], encontramos seu ponto médio (1,5) e calculamos $f(1)$, $f(2)$ e $f(1{,}5)$, lembrando que $f(x) = x^3 - x - 3$.

Para garantir a existência de pelo menos uma raiz real no intervalo, o valor da função nos extremos deve ter sinais opostos. Assim, o novo intervalo será [1,5; 2], e outra iteração será iniciada. Eis as três primeiras iterações deste item:

1ª iteração: intervalo = [1; 2]   ponto médio = 1,5

$f(1) = -3 < 0$

$f(2) = 3 > 0$

$f(1{,}5) = -1{,}125 < 0$

Os sinais da função nos extremos devem ser distintos, logo o novo intervalo será [1,5; 2].

$\rightarrow$ novo intervalo = [1,5; 2]

2ª iteração: intervalo = [1,5; 2]   ponto médio = 1,75

$f(1{,}5) = -1{,}125 < 0$

$f(2) = 3 > 0$

$f(1{,}75) \cong 0{,}609 > 0$

Os sinais da função nos extremos devem ser distintos, logo o novo intervalo será [1,5; 1,75].

→ novo intervalo = [1,5; 1,75]

3ª iteração: intervalo = [1,5; 1,75]   ponto médio = 1,625

$\boldsymbol{f}(1{,}5) = -1{,}125 < 0$

$\boldsymbol{f}(1{,}75) \cong 0{,}609 > 0$

$\boldsymbol{f}(1{,}625) \cong -0{,}334 < 0$

Os sinais da função nos extremos devem ser distintos, logo o novo intervalo será [1,625; 1,75].

→ novo intervalo = [1,625; 1,75]

As iterações foram acompanhadas pelos participantes, alertados previamente para que trouxessem calculadora científica, enquanto os professores em formação organizavam-nas no quadro, conforme mostra a Figura 16.

Figura 16: Organização do método da bissecção no quadro

O significado do "erro inferior a 0,01", que constava do enunciado da questão, foi explicado no momento em que os participantes perceberam a necessidade de um *critério de parada*, ou seja, algum indicativo de que o número de iterações feitas havia sido suficiente, para que pudéssemos parar de iterar. Sem tal critério, iteraríamos indefinidamente, já que sempre é possível calcular o ponto médio de um intervalo e comparar o sinal da função neste ponto com seu sinal em cada extremo do intervalo, a fim de definir o próximo e dar início a outra iteração.

A parte teórica sobre o assunto, constante da Lista 1, foi utilizada para explicar que há vários critérios de parada, e iríamos adotar um deles, com erro de aproximação inferior a um centésimo (Figura 17).

O critério de parada apresenta pequenas variações neste método, bem como a escolha da resposta, de acordo com a fonte consultada.

Sejam ε o erro máximo admitido, $[a_k ; b_k]$ o intervalo considerado na iteração k e m_k o ponto médio deste intervalo.

Para ARENALES e DAREZZO, o critério de parada é $|f(m_k)| \leq \varepsilon$ ou (erro relativo) < ε, o que ocorrer primeiro, sendo o erro relativo igual a $\dfrac{|m_k - m_{k-1}|}{|m_k|}$. A aproximação (resposta) é então m_k, truncado na ordem decimal dada por ε.

Por exemplo, se $\varepsilon < 10^{-3}$, m_k será truncado na terceira ordem decimal; se $\varepsilon < 10^{-6}$, m_k será truncado na sexta ordem decimal. Lembrando que truncar significa "cortar" ou "abandonar" as ordens decimais posteriores, sem arredondamento algum. O número 1,324 truncado na segunda ordem decimal é igual a 1,32, assim como o número 1,329.

Já para RUGGIERO e LOPES, o critério de parada é $(b_k - a_k) < \varepsilon$, e a resposta pode ser qualquer $x \in [a_k ; b_k]$, em geral o ponto médio, truncado na ordem decimal dada por ε.

Em GALVÃO e NUNES, e também segundo OLIVEIRA, o critério de parada é $(b_k - a_k)/2 < \varepsilon$, e a resposta é o ponto médio de $[a_k ; b_k]$, truncado na ordem decimal dada por ε.

Adotaremos neste trabalho o critério de parada $|f(m_k)| \leq \varepsilon$, sendo $\varepsilon < 0{,}01$.

Figura 17: TE, Lista 1, Critérios de parada

No item (a), feito como exemplo, foram necessárias seis iterações a fim de encontrar a aproximação $x \cong 1{,}67$ para o valor da raiz real da função.

No item (b), a função era $f(x) = e^x + x^2 - 2$, a mesma do item (d) da questão 1 do TS, que também não havia sido resolvido pelos participantes. A equação $f(x) = 0$ foi reescrita como $e^x = -x^2 + 2$, e foram construídos os gráficos de $g(x) = e^x$ e de $h(x) = -x^2 + 2$, em uma mesma malha quadriculada.

Os professores em formação haviam sido informados, pela professora orientadora, das dificuldades dos participantes na construção do gráfico de $g(x) = e^x$, constatadas na análise dos resultados do TS. Logo, este gráfico foi construído detalhadamente, permitindo que os participantes sanassem suas dúvidas.

Foram feitos alguns comentários sobre o número e, seu valor aproximado e sua importância no estudo de fenômenos naturais. Na construção do gráfico foram destacadas a existência de uma assíntota horizontal, $y = 0$, e a inexistência de raízes reais de $g(x) = e^x$.

Neste item, $f(x)$ possuía duas raízes reais, uma positiva e outra negativa. Porém, a fim de evitar o acúmulo de cálculos, restringimo-nos a raízes positivas.

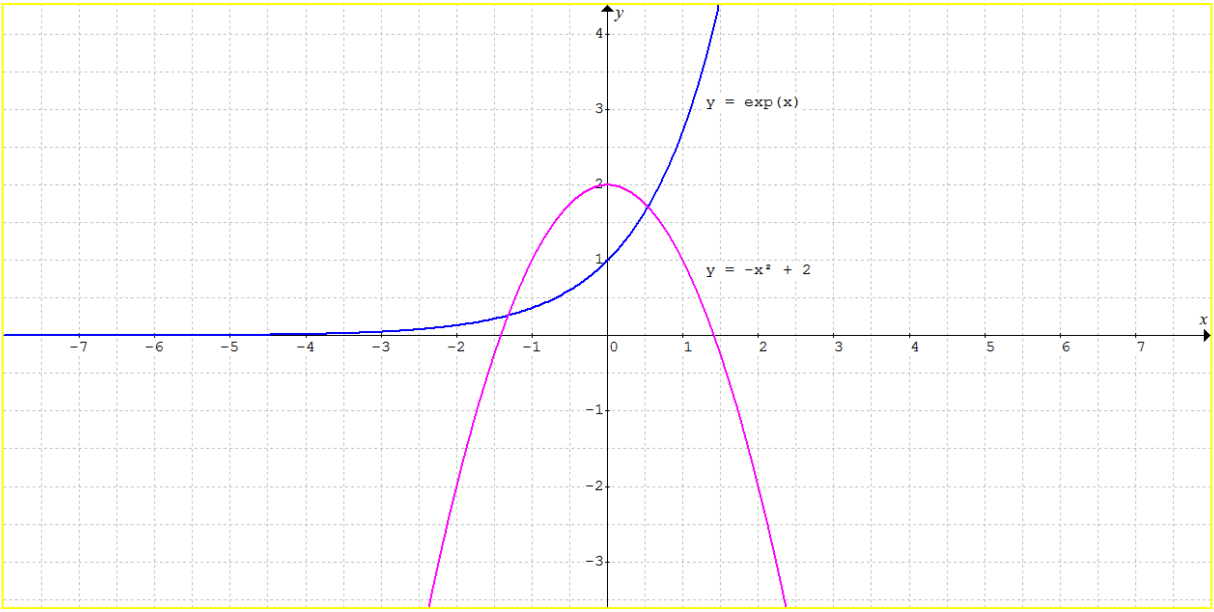


Figura 18: TE, Lista 1, Q2(b), Gráficos

(Gráficos feitos com auxílio do *software Graphmática*.)

Todo o processo de resolução do item (a) foi refeito no item (b), e os professores em formação deram mais explicações sobre o método da bissecção. O intervalo inicial para a raiz real positiva foi [0; 1], e foram necessárias sete iterações para chegar à aproximação 0,53 com erro inferior a um centésimo.

Nos cálculos deste item, percebemos que os participantes não dominavam todos os recursos da calculadora cientifica. Algumas aproximações da raiz eram apresentadas pela calculadora em forma de notação cientifica, e muitos não conseguiram fazer a leitura correta. Foi sugerido pelos participantes que isto fosse aproveitado, na validação, para explicar a escrita em notação científica.

Este fato nos remeteu ao que dizem Villarreal (1999) e Benedetti (2003), citados no capítulo 4, sobre aproveitar os imprevistos que advêm do uso da tecnologia, transformando a dificuldade de lidar com a calculadora em oportunidade de aprender sobre as várias representações de um número.

No item seguinte da questão (item (c)), a função era $f(x) = ln(x) + x - 2$. A equação $f(x) = 0$ foi reescrita como $ln(x) = -x + 2$, e foram construídos os gráficos de $g(x) = ln(x)$ e de $h(x) = -x + 2$, em uma mesma malha quadriculada.

O método gráfico foi feito em conjunto, especialmente porque o resultado do TS havia apontado dificuldades na representação de $y = ln(x)$. Visando minimizá-las, os professores em formação adotaram a seguinte estratégia: escreveram $e^y = x$, atribuíram valores a y e calcularam os correspondentes de x (Figura 19).

Y	$x = e^y$	$(x; y)$
–2	$e^{-2} \cong 0{,}13$	(0,13; –2)
–1	$e^{-1} \cong 0{,}37$	(0,37; –1)
0	$e^{0} = 1$	(1; 0)
1	$e^{1} \cong 2{,}72$	(2,72; 1)
2	$e^{2} \cong 7{,}39$	(7,39; 2)

Figura 19: TE, Lista 1, Q2(b), Gráfico de $y = ln(x)$, Estratégia

Tal estratégia realmente facilitou a compreensão, além de promover a recordação de vários assuntos importantes: a definição e as condições de existência do logaritmo, o Domínio e a Imagem da função logarítmica e sua característica de inversa da função exponencial, com destaque para a simetria dos gráficos de $y = e^x$ e de $y = ln(x)$ em relação à reta $y = x$. Registramos a surpresa e a satisfação dos participantes do TE ao conseguirem de fato entender o que antes havia sido apenas memorizado. ("Ah, então é assim!" (*sic*); "Sempre tinha dúvida nesse gráfico." (*sic*))

Esta experiência nos trouxe a "prova viva" do que afirma Barreto (2007, p. 94), "Apesar das muitas dificuldades constatadas na compreensão do conceito de função, algumas mudanças simples na ênfase, nos pontos de vista ou nas abordagens podem contribuir para amenizá-las."

O método da bissecção, por sua vez, foi aplicado pelos participantes sem intervenção dos professores em formação. O intervalo inicial era [1; 2] (Figura 20), e foram necessárias quatro iterações para encontrar a raiz aproximada, 1,56.

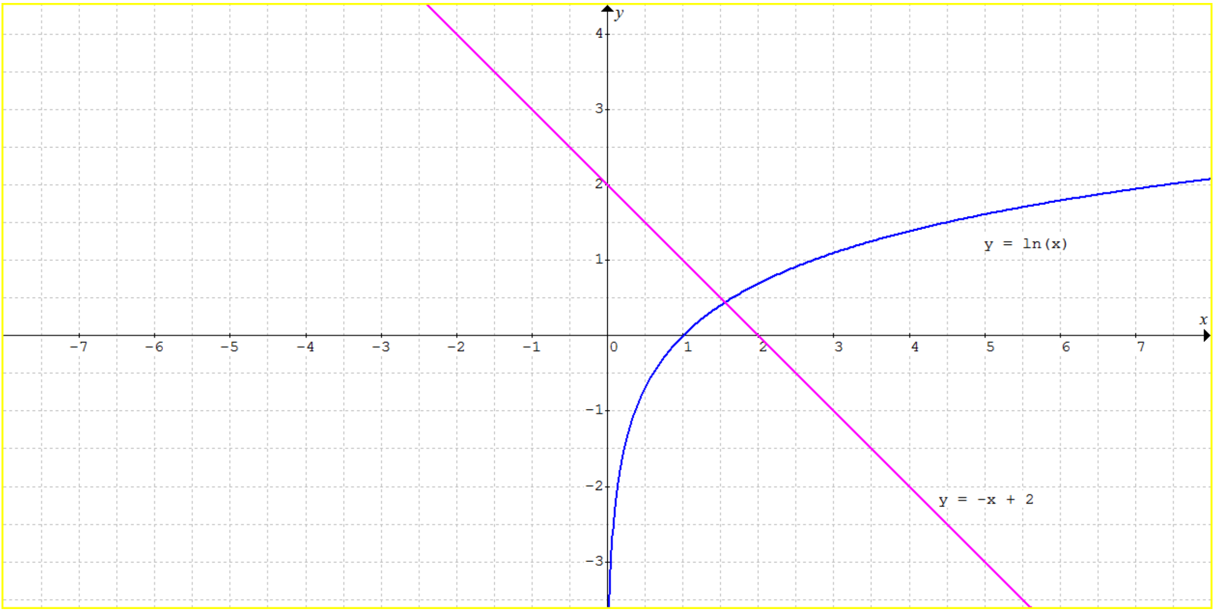


Figura 20: TE, Lista 1, Q2(c), Gráficos

(Gráficos feitos com auxílio do *software Graphmática*.)

Ao utilizar o método da bissecção, todos seguiram o registro sequencial dos itens anteriores. Nenhum utilizou tabelas para organizar as iterações. O fato nos chamou atenção, já que em todos os livros de Cálculo Numérico pesquisados, o método é organizado de forma tabular. Talvez isto tenha acontecido porque, ao explicar o método, os professores em formação fizeram os cálculos sequencialmente, em conjunto com os participantes, e eles então adotaram o mesmo tipo de registro.

O item (d) foi inteiramente feito pelos participantes, sem auxílio dos professores em formação, e serviu como avaliação da aprendizagem tanto do método gráfico quanto da bissecção. Todos reescreveram a equação $2^x - 2x - 1 = 0$ como $2^x = 2x + 1$ e fizeram os gráficos de $g(x) = 2^x$ e de $h(x) = 2x + 1$. Notaram, então, que havia uma raiz real exata, $x = 0$, e outra no intervalo [2; 3] (Figura 21).

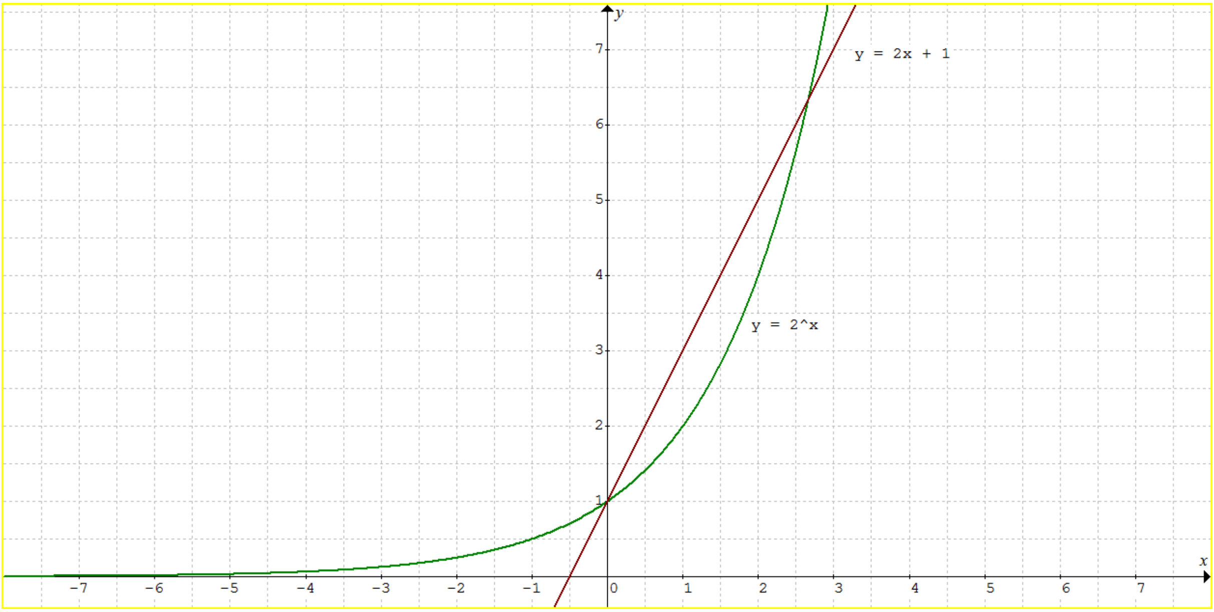


Figura 21: TE, Lista 1, Q2(d), Gráficos

(Gráficos feitos com auxílio do *software Graphmática*.)

Todos os participantes utilizaram o método da bissecção correta e organizadamente, o que facilitou a descoberta da raiz. Apenas um, por distração, na última iteração repetiu o mesmo número para um extremo do intervalo, encontrando assim outro valor para a raiz.

Às 10h os participantes haviam concluído a resolução da Lista 1.

Todos os participantes do teste exploratório, os professores em formação e a professora orientadora se dirigiram para o laboratório de informática, onde, após um breve intervalo, iniciaríamos a segunda parte das atividades.

7.3. LISTA 2

No laboratório de informática, os participantes tiveram acesso aos arquivos em *Word* e em *Excel*, previamente confeccionados, e ao *software Graphmática*, também já configurado para que todos utilizassem a mesma grade. O arquivo em *Word* trazia a Lista 2, bem como as instruções para resolvê-la (Figura 22).

Nos itens (a) e (b), encontre aproximações para as raízes reais das funções. Nos itens (c), (d) e (e), resolva as equações. Em todos os itens, adote erro menor do que 0,01.
Para isto, siga as instruções:
1°) Faça o(s) gráfico(s) usando o GRAPHMÁTICA e cole–os neste arquivo.
2°) Escreva quantas são as raízes reais e localize-as entre dois números inteiros.
2°) Usando a planilha do Excel dada, encontre as aproximações e transcreva-as para este arquivo.

a) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

c) $e^x - \dfrac{1}{x} = 0$

d) $ln(x) + x^3 = 0$

e) $e^x + x^2 - 4 = 0$

Figura 22: TE, Lista 2

Após uma breve explicação das instruções, foi feito, como exemplo, o item (a), que era exatamente o último item da Lista 1, resolvido pelos participantes sem nosso acompanhamento. Dessa forma, puderam verificar se haviam chegado à aproximação correta para a raiz real positiva, que era 2,65.

A partir daí, os participantes do TE resolveram os outros itens com autonomia, solicitando ajuda apenas na visualização dos dados na planilha do *Excel*. Não houve dificuldade no uso dos recursos do *software Graphmática*.

No método gráfico, alguns continuaram a reescrever a igualdade $f(x) = 0$ na forma $g(x) = h(x)$, fazendo os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ e observando suas intersecções. Outros fizeram diretamente o gráfico de $f(x)$ e observaram as intersecções com o eixo das abscissas.

Nos itens (c), (d) e (e), a escrita em forma de equação confundiu alguns dos participantes. Eles as digitaram diretamente no *Graphmática*, e obtiveram retas verticais (correspondentes aos valores das raízes reais) ao invés do gráfico da função. Foi sugerido então que apresentássemos todos os itens da mesma forma – como raízes de funções. (A resposta à 2ª questão secundária de pesquisa seria ***sim***.)

No método da bissecção, de início os participantes mostraram-se receosos em utilizar o *Excel*. Aos poucos, foram se familiarizando, e ao final a maioria declarou preferir o *Excel* à calculadora. Acreditamos que a dificuldade no uso do *Excel*, que persistiu para alguns, deveu-se à organização dos dados nas planilhas, feita de forma tabular, e não sequencial como na Lista 1. Havia uma planilha para cada item da Lista 2. A planilha do item (a) está representada na Figura 23.

	função: $f(x) = 2^x - 2x - 1$			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial:				Aproximação inicial: x_0 =	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
2			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
3			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
4			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
5			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
6			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
7			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
8			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
9			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!
10			0,0000	0,0000	#DIV/0!	#DIV/0!

Figura 23: TE, Lista 2, Item (a), Planilha

A intenção era que, a cada iteração, os participantes fossem escolhendo os extremos e completando a planilha, até obter $|f(m_k)| < 0,01$ (Figuras 24 a 28).

	função: $f(x) = 2^x - 2x - 1$			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial: [2; 3]				Aproximação inicial: x_0 = 2,5	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1	2,0000	3,0000	-1,0000	1,0000	2,5000	-0,3431

Figura 24: TE, Lista 2, Item (a), 1ª iteração

	função: $f(x) = 2^x - 2x - 1$			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial: [2; 3]				Aproximação inicial: x_0 = 2,5	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1	2,0000	3,0000	-1,0000	1,0000	2,5000	-0,3431
2	2,5000	3,0000	-0,3431	1,0000	2,7500	0,2272

Figura 25: TE, Lista 2, Item (a), 2ª iteração

	função: f(x) = 2^x - 2x - 1			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial: [2; 3]				Aproximação inicial: x_0 = 2,5	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1	2,0000	3,0000	-1,0000	1,0000	2,5000	-0,3431
2	2,5000	3,0000	-0,3431	1,0000	2,7500	0,2272
3	2,5000	2,7500	-0,3431	0,2272	2,6250	-0,0812

Figura 26: TE, Lista 2, Item (a), 3ª iteração

	função: f(x) = 2^x - 2x - 1			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial: [2; 3]				Aproximação inicial: x_0 = 2,5	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1	2,0000	3,0000	-1,0000	1,0000	2,5000	-0,3431
2	2,5000	3,0000	-0,3431	1,0000	2,7500	0,2272
3	2,5000	2,7500	-0,3431	0,2272	2,6250	-0,0812
4	2,6250	2,7500	-0,0812	0,2272	2,6875	0,0670

Figura 27: TE, Lista 2, Item (a), 4ª iteração

	função: f(x) = 2^x - 2x - 1			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$		
	Intervalo inicial: [2; 3]				Aproximação inicial: x_0 = 2,5	
					Aproximação final: x = 2,65	
iteração	**a_k**	**b_k**	**$f(a_k)$**	**$f(b_k)$**	**$m_k = (a_k + b_k)/2$**	**$f(m_k)$**
1	2,0000	3,0000	-1,0000	1,0000	2,5000	-0,3431
2	2,5000	3,0000	-0,3431	1,0000	2,7500	0,2272
3	2,5000	2,7500	-0,3431	0,2272	2,6250	-0,0812
4	2,6250	2,7500	-0,0812	0,2272	2,6875	0,0670
5	2,6250	2,6875	-0,0812	0,0670	2,6563	-0,0086

Figura 28: TE, Lista 2, Item (a), 5ª e última iteração

Nos itens (c) e (d), sem que nada fosse dito pelos professores em formação, os participantes encontraram o intervalo [0,5; 1] no método gráfico e usaram-no para iniciar o método da bissecção. Isto demonstra compreensão e desenvoltura na utilização dos métodos e do *software Graphmática*. (Em resposta à 3ª. questão de pesquisa, podemos dizer que os participantes conseguiram utilizar o software que traça gráficos para aprender, mas comportaram-se como meros usuários ao lidar com planilhas no *Excel*.)

Ao final da Lista 2, havia o questionário que aparece na Figura 29, já com os percentuais de resposta dos três primeiros itens. O objetivo do questionário era avaliar alguns aspectos das atividades, tais como o conhecimento acrescentado e a duração de cada etapa, e também colher sugestões que contribuíssem para a melhoria do trabalho.

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:
(0%) nada. (0%) algumas informações novas. (5 ou 71,4%) muitas informações novas.
(2 ou 28,6%) tudo foi novidade.

Quanto à duração da primeira parte das atividades:
(0%) muito longa. (3 ou 42,9%) um pouco longa. (4 ou 57,1%) normal.
(0%) passou rápido.

Quanto à duração da segunda parte das atividades:
(1 ou 14,3%) muito longa. (1 ou 14,3%) um pouco longa. (4 ou 57,1%) normal.
(1 ou 14,3%) passou rápido.

Você acredita que este tipo de atividade possa motivar o aluno de Ensino Médio no estudo de funções e seus gráficos? Por quê?

Figura 29: TE, Lista 2, Questionário, Resultados

As respostas dos alunos à última pergunta do questionário constam, na íntegra, do Apêndice B. Adiantamos que, dos sete participantes, cinco (71,4%) responderam "sim", um (14,3%) respondeu "em parte" e um (14,3%) não respondeu. Partes das respostas foram transcritas a seguir.

"Sim, pois é uma maneira diferente de estudar funções [...]"

"Sim, pois acredito que essa forma motiva o aluno por ser diferente das maneiras que ele aprende no E.M., além do uso de tecnologia, que torna o aprendizado mais dinâmico e interativo."

"Gostei também, pois para resolver um mesmo exercício vocês mostraram duas alternativas de resolução."

"Sim, pois além de acrescentar conhecimentos novos, os alunos de ensino médio se interessam muito por trabalhos feitos com tecnologia."

"Em parte, pois normalmente os alunos não se interessam muito em fazer cálculos e a primeira parte é basicamente isso."

Às 12h30min, todos os alunos já haviam terminado a Lista 2.

As respostas ao questionário, bem como o interesse e a interação constante dos participantes ao longo de toda a atividade, tirando dúvidas, fazendo observações ou dando sugestões, nos entusiasmaram bastante. Reiteramos nossos agradecimentos aos colegas que se disponibilizaram e se dispuseram a nos ajudar.

> Uma aula com diálogo, na qual os alunos fazem uso da palavra para manifestar suas ideias, pode ser fonte de informação para o professor conhecer como pensam seus alunos, podendo detectar suas dificuldades, problemas de aprendizagem e interesses. (BRASIL, 2002, p. 129)

O teste exploratório foi muito importante não só para o ajuste das questões, como também para estimar o tempo necessário à validação.

A Lista 1 foi concluída em uma hora e meia, o que significava que precisaríamos do dobro do tempo na validação, pois teríamos que explicar mais detalhadamente a construção dos gráficos e o raciocínio do método da bissecção, além do uso da calculadora.

A resolução da Lista 2 durou duas horas, e fizemos a estimativa de quatro horas para o Ensino Médio, pois não sabíamos se haveria dificuldade na utilização dos *softwares*.

Isto significava que precisaríamos de dois dias para a validação das atividades: um para a primeira parte (Lista 1) e outro para a segunda parte (Lista 2).

Após o teste exploratório e a apresentação de resultados parciais, reformulamos as atividades e preparamos a validação.

8. REELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Durante a aplicação do teste exploratório, foram feitas várias observações, por nós, pela professora orientadora e também pelos participantes. Algumas já foram, inclusive, comentadas no capítulo anterior. Além disso, ao apresentarmos os resultados parciais, recebemos preciosas sugestões. Reelaboramos então algumas questões e reorganizamos os dados nas planilhas, para que tudo corresse da melhor forma possível na validação.

As atividades reelaboradas, utilizadas na validação, à exceção das planilhas em *Excel*, constituem o Apêndice C.

8.1. TESTE DE SONDAGEM (TS)

A primeira alteração foi a introdução de uma folha de rosto, para explicar seu objetivo aos alunos (Figura 30). Tal modificação ocorreu em virtude de um comentário, feito durante a apresentação de resultados, de que os alunos poderiam não ter muita seriedade ao responder às questões.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POR MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS

Caro(a) aluno(a), o objetivo deste teste de sondagem não é avaliativo, por isso não é preciso colocar seu nome.

É importante para nós que você seja sincero ao responder às questões, pois só assim prepararemos nossa aula de forma a realmente ajudá-lo a vencer suas dificuldades.

Se não souber responder algum item, não "chute", deixe-o em branco e saberemos que aquele assunto terá que ser abordado.

Desde já agradecemos seu interesse em participar de nossa atividade, que será realizada na sexta-feira, 08/10, com início às 8 horas, na sala F 202.

Figura 30: Validação, TS, Folha de rosto

Também incluímos, na primeira questão, uma equação irracional, em geral estudada no 9º ano do Ensino Fundamental. Se os alunos soubessem resolvê-la, poderíamos utilizar a análise de gráficos para explicar o aparecimento de *raízes estranhas* neste tipo de equação.

1) Encontre as raízes reais das funções a seguir.

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = x^3 - x - 3$

d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$

e) $f(x) = \sqrt{x+2} - 4 + x$

Figura 31: Validação, TS, Q1

Além disso, modificamos a função da segunda questão, para que houvesse três raízes reais, e não apenas uma.

2) Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$?

Figura 32: Validação, TS, Q2

Acrescentamos várias funções na quarta questão, a fim de obter resultados mais precisos.

4) Marque com um (X) as funções cujo gráfico você saberia esboçar.

( ) $f(x) = 2^x$

( ) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

( ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

( ) $f(x) = e^x$

( ) $f(x) = sen(x)$

( ) $f(x) = \frac{1}{x}$

( ) $f(x) = x^3$

( ) $f(x) = x^3 - x$

( ) $f(x) = e^x - x^2$

( ) $f(x) = ln(x)$

( ) $f(x) = \sqrt{x}$

( ) $f(x) = \frac{x-2}{4}$

Figura 33: Validação, TS, Q4

Incluímos ainda a questão 5.

5) Você possui calculadora científica? ( ) Sim. ( ) Não.
Caso possua, traga-a no dia da atividade.

Figura 34: Validação, TS, Q5

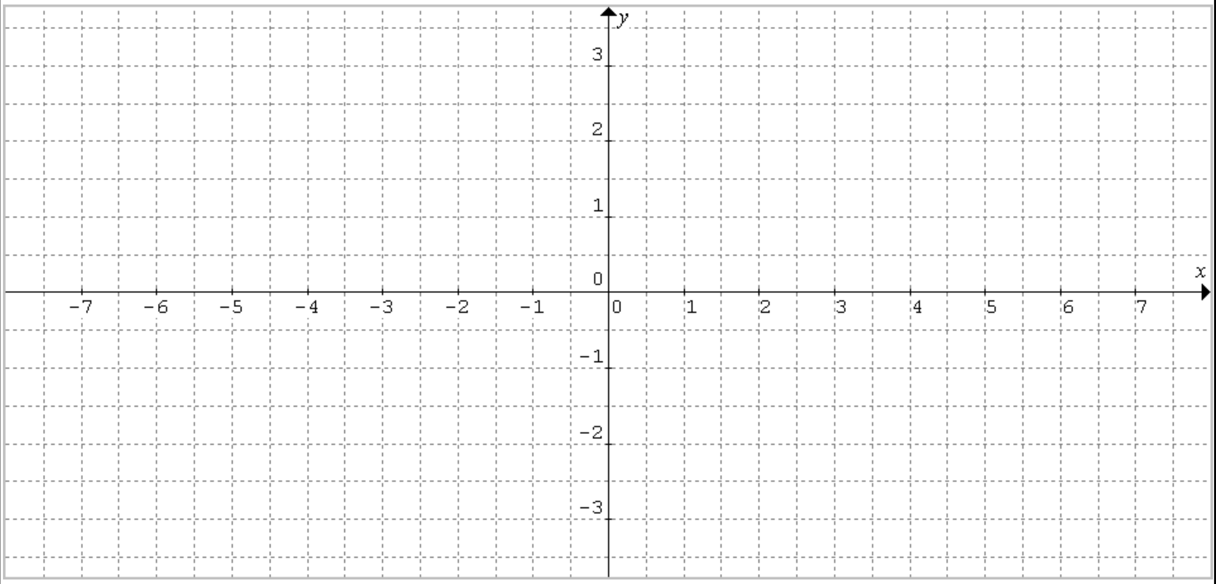
8.2. LISTA 1

As grades preparadas para serem utilizadas no quadro ficaram muito pequenas, e foram rapidamente deixadas de lado.

A função da primeira questão foi modificada em consonância com a segunda questão do TS (Figura 35).

1) MOTIVAÇÃO: Quantas raízes reais a função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$ possui ?

a) Na malha quadriculada abaixo, construa o gráfico das funções $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.



b) Marque o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.

c) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), responda à questão proposta na MOTIVAÇÃO: quantas são as raízes reais da função $f(x) = sen(x) - \frac{x}{3} + 1$? Em que intervalos se encontram?

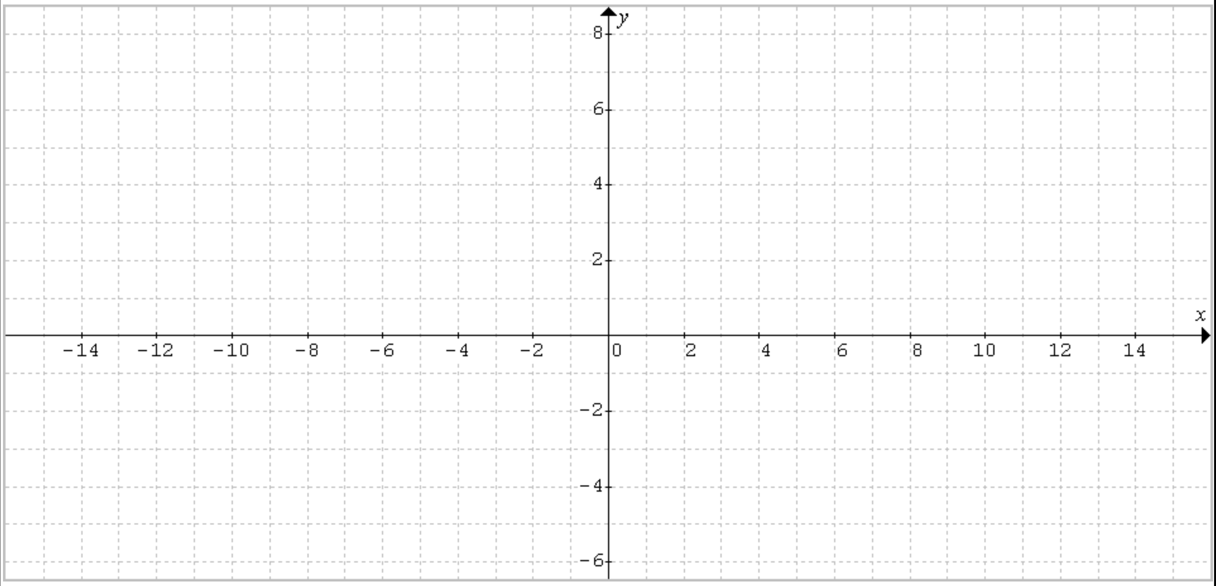
Figura 35: Validação, Lista 1, Q1

Entre as questões 1 e 2 antigas, havia explicações tanto sobre o método gráfico quanto sobre o método da bissecção. Perguntamos aos participantes se, em sua opinião, deveríamos manter a teoria sobre o método da bissecção ali ou colocá-la após o primeiro exemplo do referido método. Todos concordaram que a teoria deveria vir após o exemplo. Foi feita então a modificação, e foram acrescentadas as referências dos autores nela citados.

Além disso, o enunciado da antiga questão 2 já falava em "erro menor do que 0,01", antes de qualquer explicação sobre isso. Seu enunciado foi então modificado, e ela passou a ser constituída de um exercício apenas (o antigo item (a)) (Figura 36).

2) Encontre uma aproximação da raiz real da função $f(x) = x^3 - x - 3$.

Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação.

Figura 36: Validação, Lista 1, Q2

Os demais itens da antiga questão 2 passaram a compor a nova questão 3, resumida na Figura 37.

3) Encontre a aproximação de uma das raízes reais das funções a seguir, com erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = e^x - x^2$

Aproximação inicial: localizar a raiz real negativa entre dois números inteiros, usando o método gráfico.

Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

b) $f(x) = ln(x) + x - 2$

Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.

Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

c) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.

Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Figura 37: Validação, Lista 1, Q3

No questionário, três dos sete participantes consideraram a primeira parte longa. Por isso, trocamos $f(x) = e^x + x^2 - 2$ por $f(x) = e^x - x^2$, para que houvesse um número menor de iterações na aplicação para o Ensino Médio, e também para trabalharmos com raízes negativas. As outras funções foram mantidas.

A nova Lista 1 ficou assim estruturada:

Questão 1 – Motivação, na qual seria apresentado o método gráfico;

Explicações sobre o método gráfico;

Questão 2 – na qual seria apresentado o método da bissecção;

Explicações sobre o método da bissecção, critérios de parada e erros;

Questão 3 – itens abrangendo os dois métodos.

8.3. LISTA 2

A seguir faremos observações sobre os resultados, pois alguns deles nos levaram a fazer modificações na Lista 2.

Um participante apresentou corretamente todas as respostas, de todos os itens e outro escreveu todas as raízes aproximadas com quatro casas decimais ao invés de duas. Cinco participantes deixaram de mencionar pelo menos uma das raízes exatas que havia nos itens (a) e (b), sendo que dois deles arredondaram as aproximações, ao invés de truncá-las, e um apresentou todas as raízes aproximadas com quatro casas decimais ao invés de duas.

Esses resultados nos indicaram que deveríamos ter sido mais claros em relação à apresentação das raízes aproximadas (número de casas decimais e truncamento), além de enfatizar que as raízes exatas teriam que constar da resposta.

Foram então modificadas as instruções, para que enfatizassem os aspectos supracitados (Figura 38).

Encontre aproximações para as raízes reais das funções a seguir, com erro inferior a 0,01.

Para isto, siga as instruções:

- Faça o(s) gráfico(s) usando o GRAPHMÁTICA, copie–os e cole–os neste arquivo.
- Escreva quantas são as raízes reais e localize cada uma em um intervalo.
- Usando a planilha do Excel dada, encontre as aproximações com erro inferior a 0,01.
- Escreva todas as raízes da função, exatas ou aproximadas com erro inferior a 0,01.

Figura 38: Validação, Lista 2, Instruções

De acordo com as sugestões dos participantes do TE, foram reformulados os itens (c), (d) e (e), para que fossem apresentados da mesma forma que os dois primeiros itens da lista. Além disso, os enunciados foram reescritos a fim de proporcionar mais clareza e organização (Figura 39). A função retirada da antiga Lista 1 foi acrescentada como um exemplo, em substituição ao item (e) da antiga Lista 2, muito semelhante a ele.

Acompanhe o exemplo:

$f(x) = e^x + x^2 - 2$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

Agora, faça o mesmo para cada função.

1) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

2) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

3) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

4) $f(x) = ln(x) + x^3$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

Figura 39: Validação, Lista 2, Enunciados

Um dos participantes do TE respondeu, na última pergunta do questionário, que não havia gostado da disposição dos dados na planilha do *Excel*. A esta resposta juntou-se nossa própria observação de que vários outros também tiveram dificuldade em lidar com a referida planilha. Isto nos fez reformular a disposição dos dados, organizando-os sequencialmente ao invés de formar tabelas (Figura 40).

	função: $f(x) = e^x + x^2 - 2$			erro = $\varepsilon < 10^{-2}$
	Raiz negativa			
	Intervalo inicial:]a, b[=			
	Aproximação inicial: x_0 =			Resposta:
iteração				
1	**a**		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
2	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
3	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
4	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
5	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!

Figura 40: Validação, Lista 2, Exemplo, Planilha

Por fim, foi modificado o questionário, que agora seria direcionado aos alunos (Figura 41). Foram incluídos itens específicos sobre os softwares Graphmática e Excel, que nos permitissem responder de forma mais clara à terceira questão secundária de pesquisa. Foram também modificados o penúltimo e o último itens, a fim de responder à quarta questão secundária de pesquisa.

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.

DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:

( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Graphmática, a participação nessas atividades acrescentou:

( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Excel, a participação nessas atividades acrescentou:

( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Quanto à duração da primeira parte (primeiro dia) das atividades:

( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Quanto à duração da segunda parte (segundo dia) das atividades:

( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

O que você destacaria como mais interessante?

( ) Ter aprendido uma forma diferente de resolver equações.

( ) Ter utilizado recursos tecnológicos (calculadora, computador) para aprender.

( ) Os dois itens acima, sem ordem de preferência.

( ) Nenhum dos itens anteriores.

Se quiser, escreva aqui sua opinião ou sugestão para a melhoria de nosso trabalho.

OBRIGADO POR SUA PARTICIPAÇÃO!

Figura 41: Validação, Lista 2, Questionário

9. VALIDAÇÃO

Para validar as atividades elaboradas, foi oferecido um minicurso aos alunos de um curso de pré-vestibular diurno do município de Campos dos Goytacazes, a ser realizado em turno contrário ao que estudavam. Foram abertas quinze vagas, tendo em vista as limitações do laboratório de informática.

9.1. TESTE DE SONDAGEM (TS)

Primeiramente, visitamos o curso para explicar a proposta e convidar os alunos a se inscreverem no minicurso que ofereceríamos, indagando também qual seria o horário mais favorável à sua realização. Agendamos ainda o TS, que seria realizado na semana seguinte, no ato da inscrição.

O TS foi aplicado no dia 15 de setembro de 2010, durante a inscrição dos alunos, para que fosse feito o levantamento dos pré-requisitos antes da validação das listas. Oito alunos fizeram o teste, em um tempo máximo de trinta minutos. Um dos alunos possuía baixa visão, porém nada nos disse, realizando o teste padrão, com tamanho de fonte regular (12).

O quadro da Figura 42 apresenta o enunciado da Questão 1 do TS, o tipo de função e o percentual de acerto em cada item.

1) Encontre as raízes reais das funções a seguir.		
Item	Tipo de função	Corretas
a) $f(x) = 3x - 4$	Polinomial do 1º grau	7 (87,5%)
b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$	Polinomial do 2º grau	4 (50%)
c) $f(x) = x^3 - x - 3$	Polinomial do 3º grau	0 (0%)
d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$	Transcendente	0 (0%)
e) $f(x) = \sqrt{x+2} - 4 + x$	Irracional	1 (12,5%)

Figura 42: Validação, TS, Q1, Resultados

Por este levantamento, percebemos que os estudantes pouco dominavam sobre raízes reais de uma função, fato um tanto surpreendente para nós, por serem alunos de pré-vestibular. Um deles errou a raiz de uma função polinomial de primeiro grau, e metade não calculou corretamente as raízes reais de uma função quadrática, observando que bastava chegar ao discriminante negativo para concluir que não havia raízes reais. Neste item (b), houve muitos erros no cálculo do discriminante, e ninguém chegou às raízes complexas. Soubemos então que teríamos de lidar com deficiências de conteúdo e dificuldades de cálculo. Isto nos fez manter apenas este número de participantes (oito), ao invés dos quinze inicialmente propostos, para que pudéssemos dar atenção a todos, esclarecendo suas dúvidas.

No item (c), havia uma função do terceiro grau, pouco explorada no ensino regular, conforme já comentamos. Tal resultado era portanto esperado, o mesmo acontecendo no item (d), do qual constava uma função transcendente. É importante ressaltar que este último foi, na verdade, deixado em branco.

Cabe aqui uma explicação sobre a inserção do item (e), já que não havia equações irracionais na versão inicial do TS. A intenção era mostrar aos alunos, graficamente, porque aparecem raízes estranhas em tais equações. Para isto, porém, precisávamos averiguar se eles sabiam resolvê-las algebricamente, caso contrário a demanda de tempo seria muito grande. Infelizmente, apenas um dos alunos esboçou uma tentativa de resposta, o que nos levou a deixar esse estudo para outra oportunidade.

Na Figura 43, resumimos os resultados das demais questões do TS.

2) Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$?

acertos: 0 em 8

3) Você conhece algum método de resolução de equações que não seja algébrico? Caso conheça, diga qual é.

NÃO: 8 em 8

4) Marque com um (X) as funções cujo gráfico você saberia esboçar.

(4 ou 50%) $f(x) = 2^x$	(3 ou 37,5%) $f(x) = x^3$
(2 ou 25%) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$	(3 ou 37,5%) $f(x) = x^3 - x$
(7 ou 87,5%) $f(x) = x^2 - 4x + 3$	(0 ou 0%) $f(x) = e^x - x^2$
(0 ou 0%) $f(x) = e^x$	(1 ou 12,5%) $f(x) = ln(x)$
(2 ou 25%) $f(x) = sen(x)$	(3 ou 37,5%) $f(x) = \sqrt{x}$
(5 ou 62,5%) $f(x) = \frac{1}{x}$	(5 ou 62,5%) $f(x) = \frac{x-2}{4}$

4) Você possui calculadora científica? (4 ou 50%) Sim. (4 ou 50%) Não.
Caso possua, traga-a no dia da atividade.

Figura 43: Validação, TS, Q2 a Q4, Resultados

A segunda questão, com a função devidamente modificada após o TE, trouxe o resultado esperado: nenhum acerto. Também na terceira questão, a expectativa era a de que ninguém conhecesse métodos não algébricos para resolver equações, o que se confirmou.

Na quarta questão houve várias surpresas, começando pela função afim. Em nossa análise, inferimos que o "problema" foram os coeficientes fracionários. Ou os alunos não reconheceram a função afim por estar escrita sob a forma de fração, ou não saberiam lidar com frações para poder encontrar dois pontos e traçar a reta. Além disso, nem todos saberiam traçar o gráfico da função quadrática, e apenas 25% esboçariam a senóide.

O fato de mais da metade responder que saberia traçar o gráfico de $f(x) = 1/x$ foi por nós atribuído à possibilidade de tal representação ter sido vista nas aulas do pré-vestibular que cursavam, o mesmo ocorrendo com as cúbicas, a função exponencial de base dois e a irracional.

Outro fato que nos chamou atenção foi nenhum aluno ter marcado a exponencial de base e, apesar de 50% conhecerem o gráfico de $f(x) = 2^x$. Atribuímos isto à presença do número e na base da função.

Estes resultados corroboram o que lemos em nossas pesquisas: muitos alunos terminam o Ensino Médio sem que o conceito de função faça sentido para eles. Apenas as funções "típicas" são reconhecidas, quando muito (CHAVES, 2004).

Após esta análise, percebemos que seria necessário, na validação das atividades, dar bastante atenção à construção do gráfico de funções e explicar detalhadamente o significado da intersecção de dois gráficos.

Por fim, foi-lhes perguntado se possuíam calculadora cientifica, para que trouxessem no dia do minicurso. Quatro responderam que não, e tivemos que providenciá-las para a primeira parte da validação das atividades (Lista 1).

9.2. LISTA 1

A aplicação das atividades foi realizada em dois dias, de acordo com o que havíamos previsto.

A primeira parte da aplicação foi no dia 17 de setembro de 2010, com início às 13h30min, na sala 202 do bloco F do IFF, Campus Campos-Centro. Estavam presentes sete alunos de uma turma de pré-vestibular do município de Campos dos

Goytacazes. Destes alunos, dois haviam concluído o Ensino Médio em outros municípios e cinco eram concluintes de escolas públicas ou particulares do próprio município. Um deles possuía necessidades especiais – baixa visão. Entretanto, não conversou conosco a respeito, nem solicitou material ou recurso específico que pudesse facilitar o acompanhamento das aulas. Isto muito nos preocupou, já que estaríamos lidando com gráficos, informações eminentemente visuais.

Foi distribuída a Lista 1. Após todas as explicações sobre a finalidade do curso e apresentações formais dos professores em formação e da professora orientadora, recordamos a definição de raízes reais de uma função, lembrando que podem ser encontradas algebricamente resolvendo a equação $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, ou graficamente pelas abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de $\boldsymbol{f}$ com o eixo das abscissas. Em seguida, propusemos um problema: supondo que não saibamos resolver algebricamente a equação $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, nem tampouco esboçar o gráfico de $\boldsymbol{f}$, como encontraremos as raízes reais? A partir daí, explicamos o método gráfico.

Reescrevemos então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ como $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, onde $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ são duas funções cujos gráficos sabemos esboçar. As abscissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos são os valores reais de $\boldsymbol{x}$ tais que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, ou seja, exatamente as soluções de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, que por sua vez são as raízes reais de $\boldsymbol{f}$.

Até este momento, não houve dúvidas ou qualquer questionamento por parte dos alunos, que acompanhavam o raciocínio. Após concluirmos, porém, alguns deles pediram para explicarmos novamente, o que foi feito com o auxílio da primeira questão da Lista 1.

A primeira questão da Lista 1, conforme comentamos no capítulo 8, foi reelaborada após o TE, e constituía o primeiro exemplo do método gráfico.

Ao explicarmos tal método nesta questão, fizemos as construções com bastante cuidado para garantir que todos acompanhassem e tirassem suas dúvidas. Foi dada especial atenção ao traçado da senóide, pois pelos resultados do TS sabíamos que este era um "ponto fraco" do grupo.

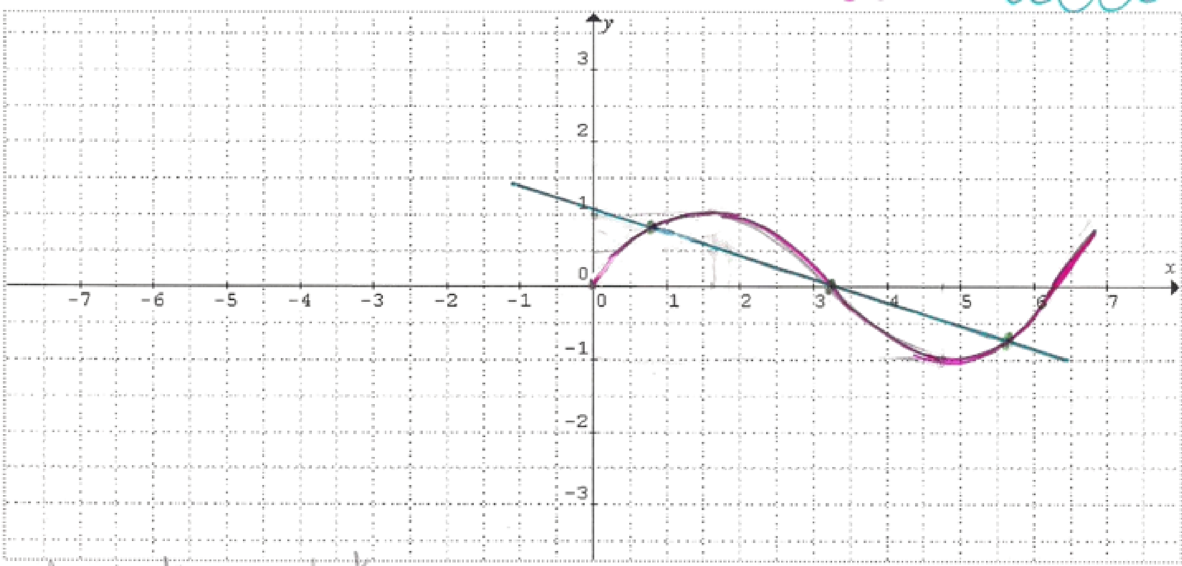
Aqui, recordamos os conceitos de Domínio e Imagem, máximos e mínimos, periodicidade e paridade de funções. Relembramos com os alunos os sinais da função seno em cada quadrante da circunferência trigonométrica, bem como alguns de seus valores "notáveis" (0º, 90º, 180º, 270º e 360º), e ainda a conversão entre as unidades de medida de ângulos — grau e radiano.

Feitos os gráficos, foram visualizadas três intersecções, correspondentes a três raízes reais. Perguntamos aos participantes se haveria outras, incentivando-os a analisar os gráficos. Todos responderam que não, pois a reta não voltaria a intersectar o gráfico de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$. Estabelecido o número de raízes reais da equação e sua localização, foi respondido em conjunto o item (c).

O registro da resposta, feito por um aluno, é apresentado na Figura 44. Apesar da imperfeição do gráfico de $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, foram destacados os três pontos de interseção dos gráficos de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, além de corretamente respondido o item (c).

1) MOTIVAÇÃO: Quantas raízes reais a função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$ possui ?

a) Na malha quadriculada abaixo, construa o gráfico das funções $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.



função transcendente

b) Marque o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.

c) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), responda à questão proposta na MOTIVAÇÃO: quantas são as raízes reais da função $f(x) = sen(x) - \frac{x}{3} + 1$? Em que intervalos se encontram?

3 raízes, intervalos:]0;1[/]3;4[/]5;6[

Figura 44: Validação, Lista 1, Q1, Registro de aluno

Ao longo de todas as etapas, os questionamentos de cada aluno eram compartilhados com o restante do grupo, lançados como perguntas, para saber se algum deles responderia, estimulando-os a refletir e, ao mesmo tempo, a participar, conforme preconizam as orientações complementares (PCN+) já citadas por nós

(BRASIL, 2002). Criou-se assim um ambiente favorável à aprendizagem, pois os alunos sentiam-se à vontade para fazer perguntas ou respondê-las em voz alta, ao invés de chamar o professor em formação à sua carteira.

Ressalte-se que o fato do grupo ser pequeno (apenas sete alunos) possibilitou o atendimento a todos, esclarecendo dúvidas e acompanhando a resolução de questões.

Todas as etapas da resolução desta questão foram minuciosamente explicadas pelos professores em formação, por ser a primeira vez que os alunos resolviam um exercício deste tipo. Registramos grande interesse e surpresa na reação dos estudantes, por conhecerem uma aplicação de gráficos inteiramente nova para eles.

A segunda questão da Lista 1, modificada após o TE, trazia o primeiro exemplo do método da bissecção. Primeiramente, aplicamos novamente o método gráfico, em conjunto, encontrando uma raiz real no intervalo [1; 2].

Para construir o gráfico de $g(x) = x^3$, foram feitas algumas observações sobre seu formato, comparando-o com o de $y = x^2$. Quando x for um número entre 0 e 1, x^3 será menor do que x^2, ou seja, o gráfico de $g(x) = x^3$ estará "abaixo" do gráfico de $y = x^2$. Para valores de x maiores do que 1, x^3 será maior do que x^2, ou seja, o gráfico de $g(x) = x^3$ estará "acima" do gráfico de $y = x^2$. Também analisamos sinais (se $x < 0$, então $x^3 < 0$), paridade ($y = x^2$ é função par; $y = x^3$ é função ímpar) e simetria do gráfico (funções pares têm gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas e funções ímpares, em relação à origem), Imagem, crescimento, concavidade, e demos uma noção intuitiva de limites no infinito, usando inclusive a simbologia $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Perguntamos ainda se, após as explicações sobre os gráficos de $y = x^2$ e $y = x^3$, eles teriam ideia de como seriam os gráficos de $y = x^4$, $y = x^5$, etc. Os alunos responderam que, quando o grau fosse par, o gráfico "teria um formato parecido com o de $y = x^2$ (*sic*)", e quando o grau fosse ímpar, seria "parecido com o de $y = x^3$ (*sic*)". Tais conclusões demonstravam compreensão do que havia sido explicado. Alguns ainda complementaram, dizendo que, quanto maior o grau, "mais em pé (*sic*)" ficaria o gráfico, ou seja, mais próximo da vertical. O interesse por "gráficos diferentes (*sic*)", segundo palavras dos alunos, ficou evidente no cuidado com que registravam tudo o que era explicado. A maioria optou inclusive por escrever em seu próprio caderno, para que houvesse mais espaço e "não ficassem sem as explicações (*sic*)" quando recolhêssemos a lista.

A Figura 45 traz o registro da resolução feito por um aluno, no qual foram traçados, além dos gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 3$, também o de $y = x^2$, e anotadas algumas comparações entre os valores de x^2 e x^3 (destaque nosso, em vermelho). Observe que foram feitas anotações sobre as denominações das curvas representativas dos gráficos, sendo que a cúbica foi corrigida posteriormente, uma vez que foi denominada simplesmente "curva".

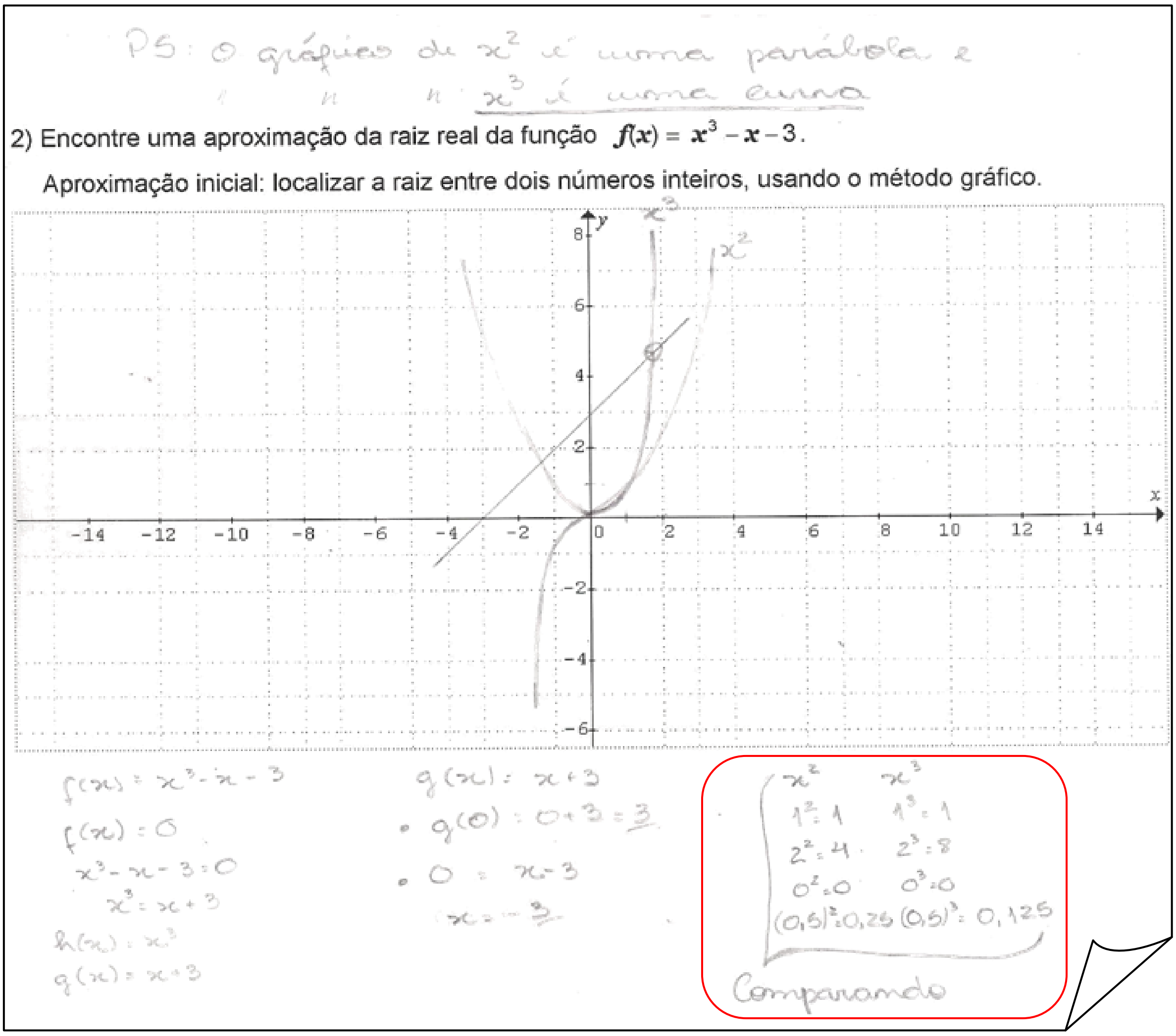


Figura 45: Validação, L1, Q2, Método gráfico, Registro de aluno

Nesta mesma questão havia o item "Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação." Na justificativa deste método, foi dada uma noção intuitiva de continuidade, utilizando gráficos. Informalmente, dissemos que o gráfico de uma função contínua não "dá pulos", ou que é possível traçá-lo "sem tirar o lápis do papel". Em seguida, sempre utilizando gráficos, explicamos que, se uma função contínua tem sinais opostos nos extremos de um intervalo, então naquele intervalo há pelo menos uma raiz real (pois o gráfico tem que intersectar o eixo das abscissas pelo menos uma vez). Ainda graficamente, mostramos que, se a função não for contínua, isto não pode ser garantido. Alguns dos desenhos e explicações feitos no quadro estão exemplificados na Figura 46.

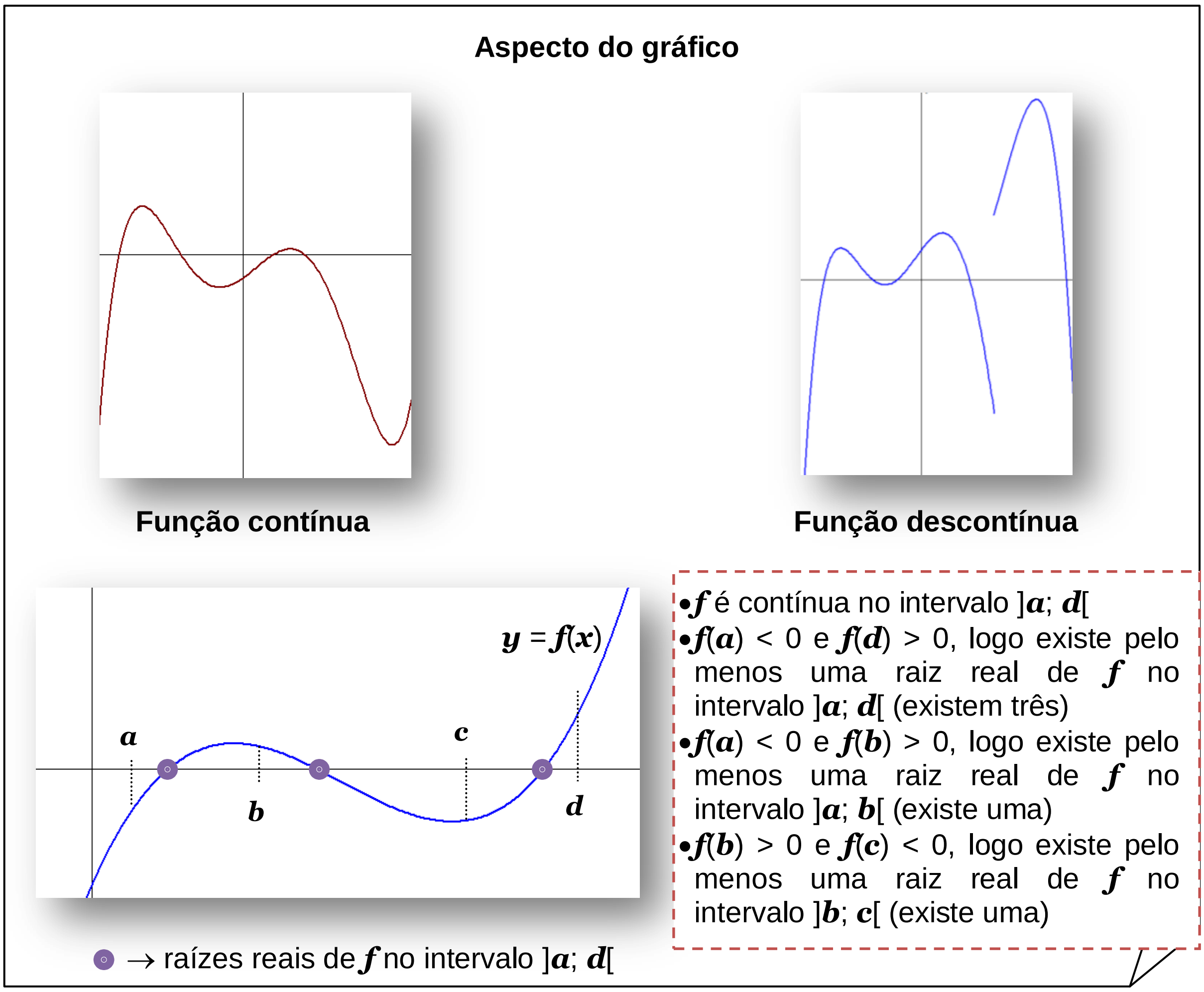


Figura 46: Validação, Lista 1, Q2, Método da bissecção, Aula

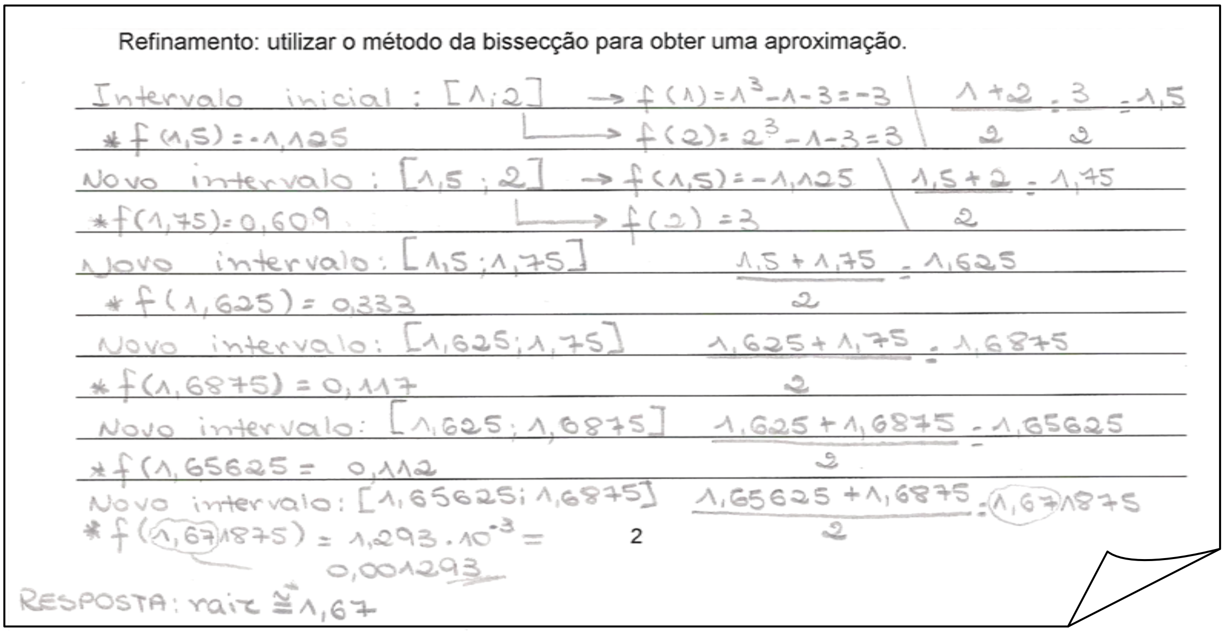
Uma vez fundamentado, o método da bissecção foi aplicado na questão dois, partindo do intervalo encontrado pelo método gráfico,]1; 2[. Apresentou-se o raciocínio por trás do método, explicado mais detalhadamente à medida que fazíamos as iterações, sempre acompanhados pelos alunos. Todas as etapas foram cuidadosamente explicadas e reexplicadas pelos professores em formação, em todas as iterações, até que alguns alunos começaram a questionar: "Mas quando é que eu sei que posso parar de fazer? (*sic*)", "Ué, a gente não vai parar nunca? (*sic*)".

Explicou-se então o significado do erro de aproximação, e estabelecemos um critério de parada, que seria utilizado em todas as questões, deste ponto em diante. Quando $|f(x)|$ fosse menor do que 0,01, consideraríamos x como uma aproximação da raiz até a segunda casa decimal, ou seja, com erro da ordem de um centésimo.

Alguns alunos logo entenderam o método, outros precisaram de mais explicações. Porém, ao final do primeiro exemplo pudemos perceber que todos haviam compreendido o processo de aproximação, ou seja, que cada intervalo é sempre dividido ao meio (daí o nome bissecção) de forma que, nos extremos, a função tenha sinais opostos. Este fato nos surpreendeu (positivamente, é claro), pois esperávamos encontrar dificuldades maiores. Talvez o fato de ter sido explicado mediante um exemplo numérico, que os alunos foram acompanhando, "de calculadora em punho", inclusive ajudando a encontrar os valores da função em cada iteração, tenha facilitado o entendimento.

Já que mencionamos a calculadora, vale recordar que, assim como no TE, houve dificuldade de leitura das aproximações da raiz que eram apresentadas em forma de notação cientifica. Aproveitamos o momento para falar sobre o assunto, e conseguimos que alguns deles explicassem para o restante do grupo.

Tomando por base o ocorrido no TE, frisamos que a aproximação encontrada deveria ser truncada na ordem dos centésimos. A Figura 47 mostra o registro de um aluno, com as iterações do método da bissecção e a resposta correta.


Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação.

Intervalo inicial: [1;2] → f(1) = 1³ − 1 − 3 = −3 | (1 + 2)/2 = 3/2 = 1,5
* f(1,5) = −1,125 → f(2) = 2³ − 1 − 3 = 3
Novo intervalo: [1,5 ; 2] → f(1,5) = −1,125 | (1,5 + 2)/2 = 1,75
* f(1,75) = 0,609 → f(2) = 3
Novo intervalo: [1,5 ; 1,75] (1,5 + 1,75)/2 = 1,625
* f(1,625) = 0,333
Novo intervalo: [1,625 ; 1,75] (1,625 + 1,75)/2 = 1,6875
* f(1,6875) = 0,117
Novo intervalo: [1,625 ; 1,6875] (1,625 + 1,6875)/2 = 1,65625
* f(1,65625 = 0,112
Novo intervalo: [1,65625 ; 1,6875] (1,65625 + 1,6875)/2 = 1,671875
* f(1,671875) = 1,293 . 10⁻³ = 0,001293
2
RESPOSTA: raiz ≅ 1,67

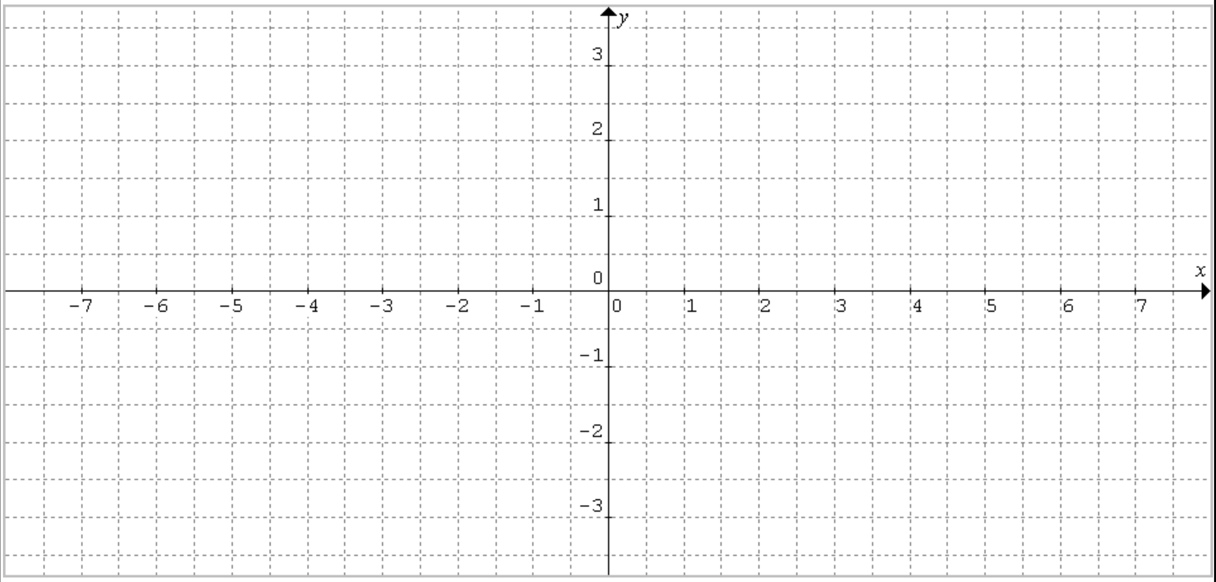
Figura 47: Validação, Lista 1, Q2, Método da bissecção, registro de aluno

Finda a segunda questão, demos início à terceira, cujo enunciado está representado na Figura 48, junto com seu primeiro item.

3) Encontre a aproximação de uma das raízes reais das funções a seguir, com erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = e^x - x^2$

Aproximação inicial: localizar a raiz real negativa entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Figura 48: Validação, Lista 1, Q3(a)

Novamente, o método gráfico foi feito em conjunto, reescrevendo $e^x - x^2 = 0$ como $e^x = x^2$ e definindo $g(x) = e^x$, $h(x) = x^2$. Especial atenção foi dada à construção do gráfico de $g(x) = e^x$, que já sabíamos ser outro "ponto fraco" do grupo. Comentamos sua característica de crescimento extremamente rápido e perguntamos se haveria raízes reais, ou seja, se o gráfico "encostaria" no eixo das abscissas. Eles demoraram um pouco a responder, então escrevemos no quadro a equação $e^x = 0$, perguntando se isto "seria possível". Todos responderam que e^x nunca seria igual a zero, ou seja, $g(x) = e^x$ não possuía raízes reais. Logo, seu gráfico não "encostaria" no eixo das abscissas. A Figura 49 mostra que um dos alunos fez questão de registrar isto em seu desenho, para não esquecer. Comentamos ainda que o eixo das abscissas, ou a reta $y = 0$, era uma assíntota do gráfico de $g(x) = e^x$, pois quando $x \to -\infty$, $e^x \to 0$.

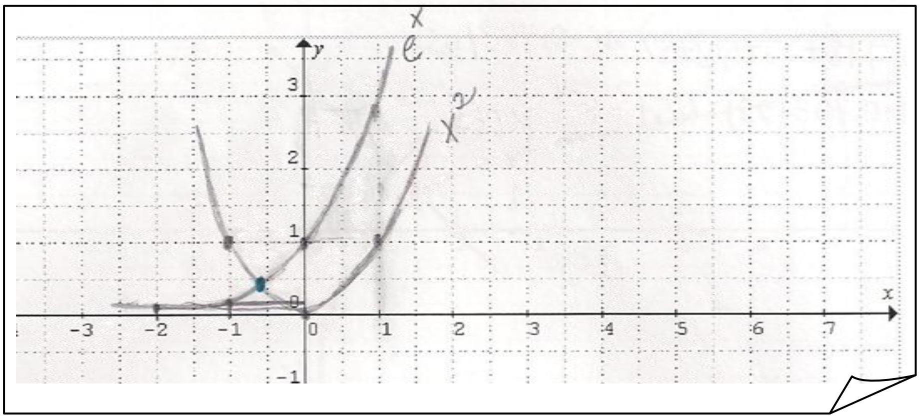
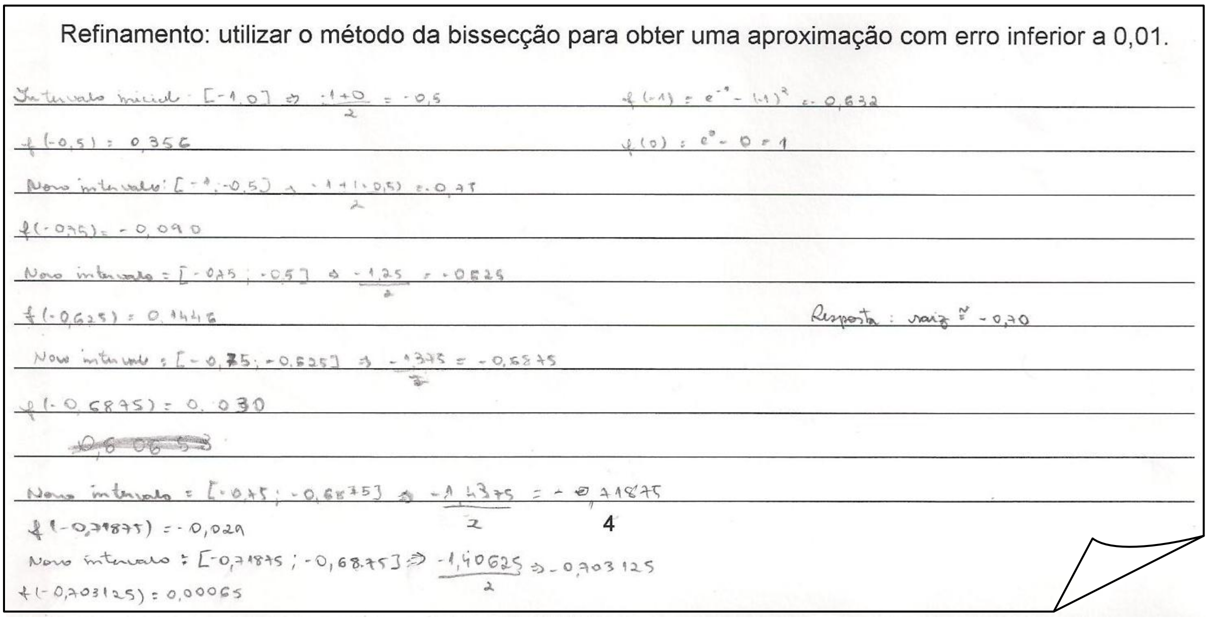


Figura 49: Validação, Q3(a), Método gráfico, registro de aluno

Foi visualizada a raiz real negativa, mencionada no enunciado da questão, e perguntamos se haveria outras raízes, positivas ou negativas. Os alunos de imediato responderam que não, pois, "se o x é negativo, antes da raiz o gráfico de e^x está abaixo do de x^2, e se o x é positivo, o gráfico de e^x está acima do de x^2 (*sic*)". Explicamos que isto acontecia porque, para valores de x menores que a raiz, $e^x < x^2$, já para valores de x menores que a raiz, $e^x > x^2$.

Encontrado o intervalo inicial]-1; 0[, foi aplicado o método da bissecção. As etapas foram novamente explicadas, para nos certificarmos que haviam sido compreendidas. Todos acompanharam de forma bastante tranquila, sendo que alguns chegaram ao resultado correto antes mesmo que fizéssemos. A Figura 50 mostra a resolução feita por um aluno, sem auxílio dos professores em formação.


Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Intervalo inicial: [-1, 0] ⇒ $\frac{-1+0}{2} = -0,5$ $\quad f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 = -0,632$

$f(-0,5) = 0,356$ $\quad f(0) = e^0 - 0 = 1$

Novo intervalo: [-1; -0,5] ⇒ $\frac{-1+(-0,5)}{2} = -0,75$

$f(-0,75) = -0,090$

Novo intervalo = [-0,75; -0,5] ⇒ $\frac{-1,25}{2} = -0,625$

$f(-0,625) = 0,1446$ $\quad$ Resposta: raiz ≅ -0,70

Novo intervalo: [-0,75; -0,625] ⇒ $\frac{-1,375}{2} = -0,6875$

$f(-0,6875) = 0,030$

~~0,6 06 53~~

Novo intervalo = [-0,75; -0,6875] ⇒ $\frac{-1,4375}{2} = -0,71875$

$f(-0,71875) = -0,029$

Novo intervalo: [-0,71875; -0,6875] ⇒ $\frac{-1,40625}{2}$ ⇒ -0,703125

$f(-0,703125) = 0,00065$

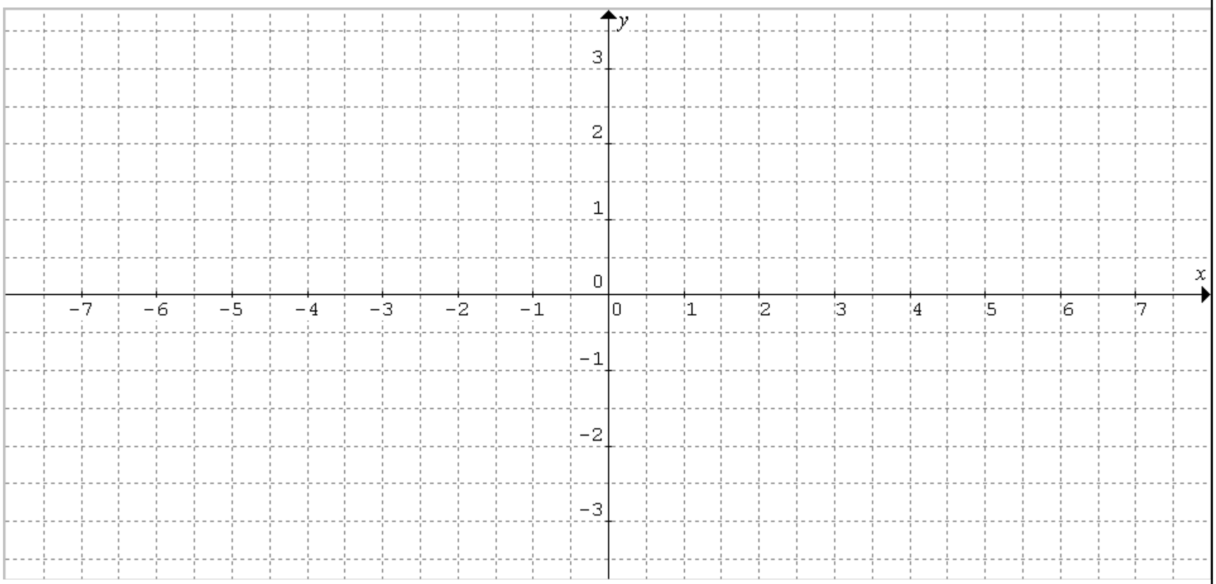
4

Figura 50: Validação, Lista 1, Q3(a), Método da bissecção, registro de aluno

No item (b) dessa mesma questão (Figura 51), fizemos em conjunto o método gráfico, reescrevendo $\ln(x) + x - 2 = 0$ como $\ln(x) = -x + 2$ e definindo $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = -x + 2$. Um dos objetivos era comentar sobre o gráfico do logaritmo natural, do qual, aliás, alguns não conheciam nem o símbolo.

b) $f(x) = \ln(x) + x - 2$

Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Figura 51: Validação, Lista 1, Q3(b)

Relembramos a definição de logaritmo e explicamos que o logaritmo natural tem base e. Para traçar o gráfico de $y = \ln(x)$, utilizamos a mesma estratégia do TE, ou seja, que $y = \ln(x)$ equivale a $x = e^y$. Atribuímos valores a y e calculamos os correspondentes de x. Assim como havia acontecido com os participantes do TE, tal estratégia facilitou a compreensão do gráfico por parte dos alunos.

Ao construirmos o gráfico de $y = \ln(x)$, propusemos vários questionamentos aos alunos: "A função $y = \ln(x)$ tem raízes reais?"; "O gráfico "encosta" no eixo das ordenadas?", "O gráfico tem assíntota horizontal?". A primeira pergunta foi rapidamente respondida por eles: "Tem sim, o gráfico corta o eixo x. (*sic*)"; "É o $x = 1$, porque o y é zero. Dá pra ver na tabela. (*sic*)"; "Só tem uma raiz, o 1. (*sic*)". Quanto ao gráfico "encostar" no eixo das ordenadas, os alunos intuitivamente sabiam que não aconteceria. A justificativa não tardou a aparecer, quando um deles lembrou que, em $y = \ln(x)$, "O x tem que ser maior que zero, então só pode ter gráfico do lado de cá [à direita] do y. (*sic*)". Ajudamos então a formalizar esta justificativa, explicando que o Domínio da função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ é $\mathbb{R}_+^*$. O eixo das ordenadas é uma assíntota vertical do gráfico de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$. Para valores de $\boldsymbol{x}$ próximos de zero, ou seja, quando $\boldsymbol{x} \to 0$, temos $\boldsymbol{y} \to -\infty$, o que foi concluído substituindo $\boldsymbol{x}$ por 0,00001; 0,0000001; 0,0000000001; etc., em $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$, e calculando o $\boldsymbol{y}$ correspondente. Em relação à assíntota horizontal, disseram que não existiria, pois "quanto maior o $\boldsymbol{x}$, maior o $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ (*sic*)". Procedemos de maneira semelhante à pergunta anterior, explicando que, quando $\boldsymbol{x} \to +\infty$, temos $\boldsymbol{y} \to +\infty$ (ainda que lentamente), o que foi concluído substituindo $\boldsymbol{x}$ por 100000; 10000000; 10000000000; etc., em $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$, e calculando o $\boldsymbol{y}$ correspondente. Logo, realmente não há assíntota horizontal.

A Figura 52 mostra a resolução de um aluno, na qual foram destacadas por nós as anotações da denominação de $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ (logaritmo neperiano), a definição de logaritmo e a tabela com os valores de $\boldsymbol{y}$ e de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}$, registradas pelo aluno (em vermelho).

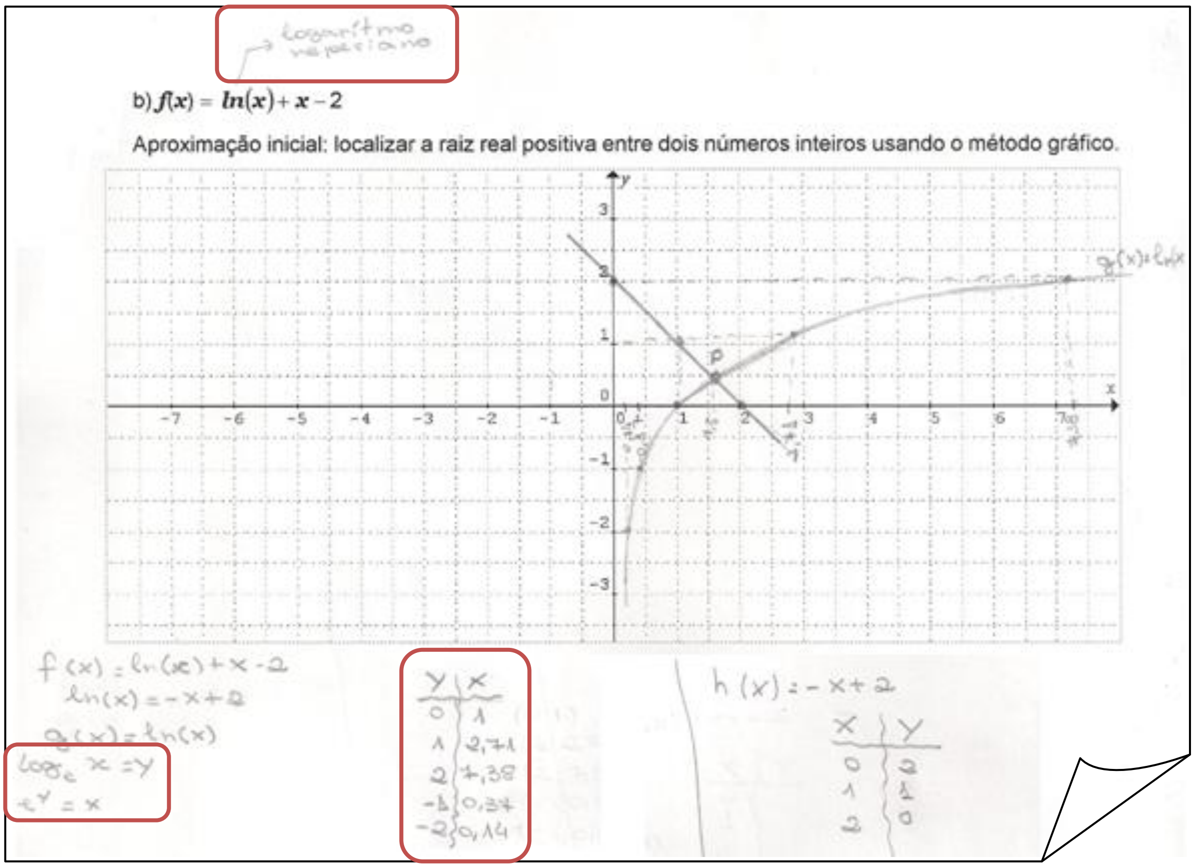
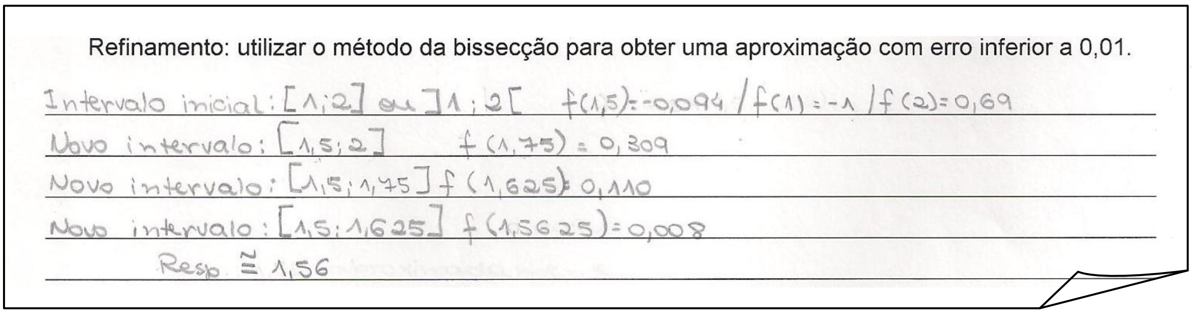


Figura 52: Validação, Lista 1, Q3(b), Método gráfico, registro de aluno

Assim, como no item (a), uma vez localizada a raiz no intervalo]1; 2[, os alunos prosseguiram com autonomia, aplicando o método da bissecção por si mesmos, sem necessitar de maiores explicações, como na Figura 53.


Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Intervalo inicial: [1;2] ou]1; 2[f(1,5) = -0,094 / f(1) = -1 / f(2) = 0,69

Novo intervalo: [1,5; 2] f(1,75) = 0,309

Novo intervalo: [1,5; 1,75] f(1,625) = 0,110

Novo intervalo: [1,5; 1,625] f(1,5625) = 0,008

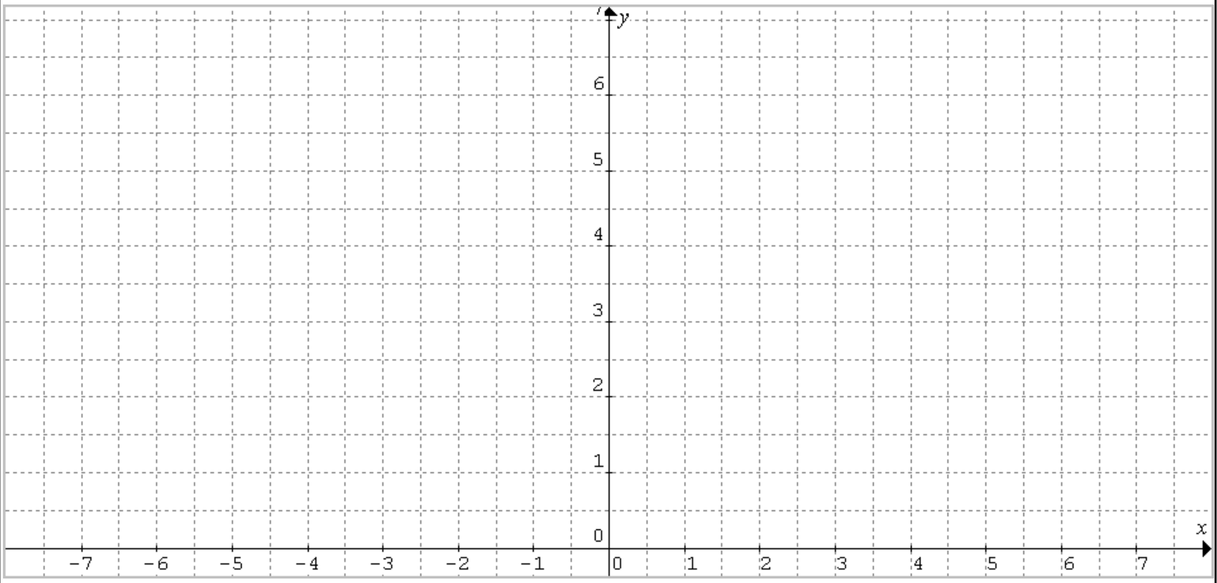
Resp ≅ 1,56

Figura 53: Validação, Lista 1, Q3(b), Método da bissecção, registro de aluno

O item (c) (Figura 54) foi feito inteiramente pelos alunos. Fomos apenas acompanhando, orientando e tirando eventuais dúvidas no traçado dos gráficos. Eles realmente se apropriaram dos métodos e foram capazes de aplicá-los com autonomia. Curiosamente, o gráfico de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 2^{\boldsymbol{x}}$, que aparecia neste item, foi feito sem maiores problemas, confirmando nossa impressão inicial de que a dificuldade se concentrava no número $\boldsymbol{e}$.

c) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2^{\boldsymbol{x}} - 2\boldsymbol{x} - 1$

Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Figura 54: Validação, Lista 1, Q3(c)

Ao traçar os gráficos de $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 2x + 1$, foi encontrada uma raiz exata, $x = 0$, imediatamente reconhecida pelos alunos. A raiz positiva a ser aproximada encontrava-se no intervalo]2; 3[. A Figura 55 traz o processo de construção dos gráficos feito por um aluno.

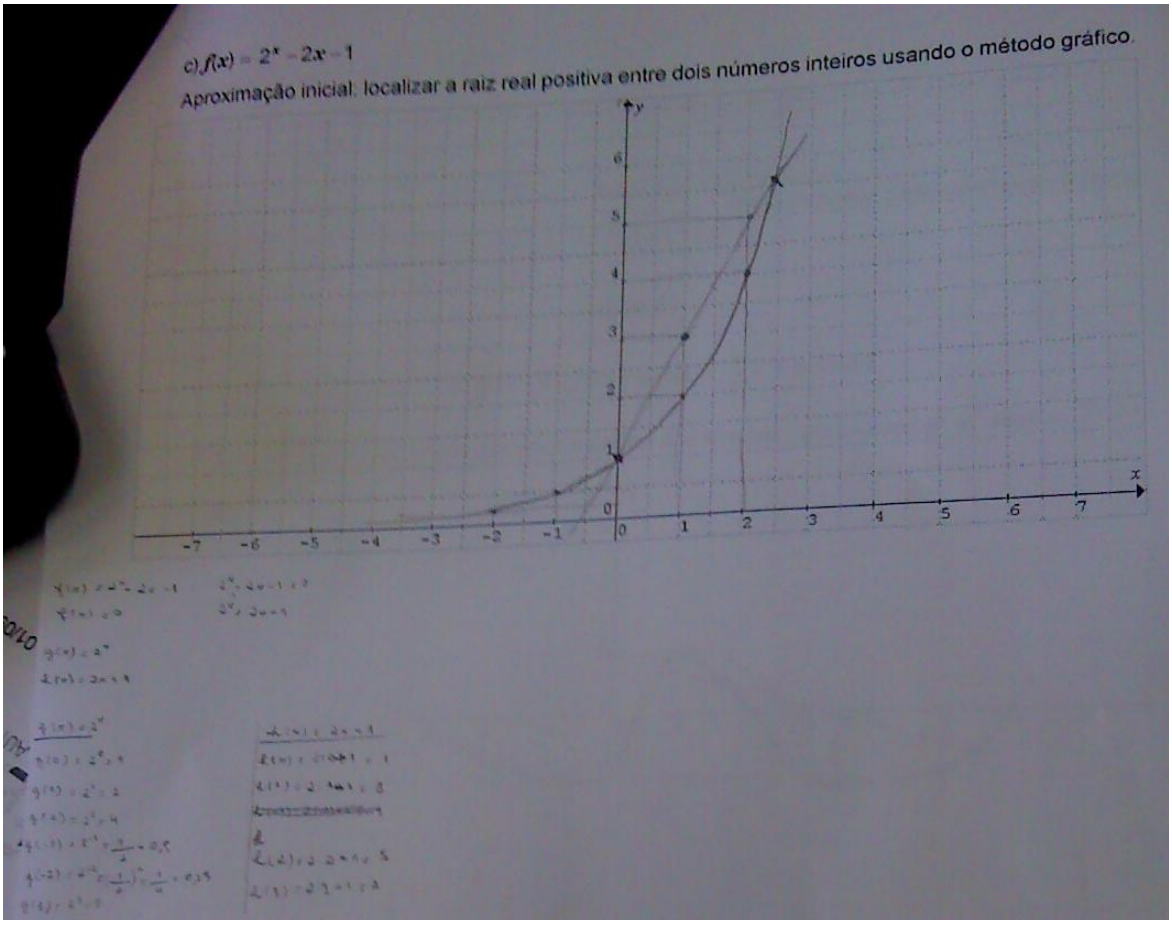
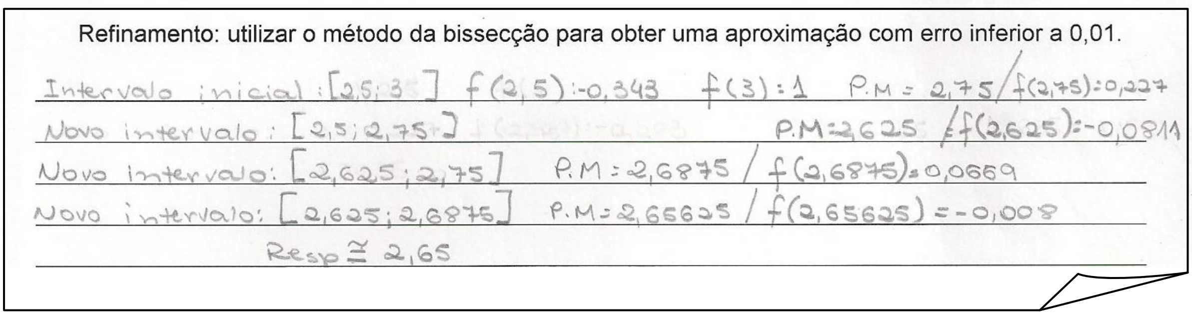


Figura 55: Validação, Lista 1, Q3(c), Método gráfico, registro de aluno

Conforme comentamos, o método da bissecção foi aplicado sem problemas. A resolução de um aluno consta da Figura 56.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

Intervalo inicial: [2,5; 3] f(2,5): -0,343 f(3): 1 P.M = 2,75 / f(2,75): 0,227
Novo intervalo: [2,5; 2,75] P.M: 2,625 / f(2,625): -0,0811
Novo intervalo: [2,625; 2,75] P.M: 2,6875 / f(2,6875): 0,0669
Novo intervalo: [2,625; 2,6875] P.M: 2,65625 / f(2,65625) = -0,008
Resp ≅ 2,65

Figura 56: Validação, Lista 1, Q3(b), Método da bissecção, resolução de aluno

Vale ressaltar que o aluno com baixa visão participou com entusiasmo de todas as etapas da aula, solicitando nossa atenção sempre que sentia necessidade.

Finalizamos a primeira parte da aplicação às 17h, e combinamos um novo encontro, no dia 24 de setembro de 2010 às 13h, na sala F201 (laboratório de informática) para aplicação e finalização da segunda atividade (Lista 2).

9.3. LISTA 2

Na segunda parte da atividade, iniciamos a aula recordando com os alunos o método da bissecção, visto na semana anterior, para que pudessem acompanhar a Lista 2 sem problemas. Havia cinco alunos presentes.

Todos os procedimentos foram explicados oralmente e também realizados no *datashow*. Divulgamos o endereço eletrônico a ser acessado para obter os arquivos, e ensinamos como fazê-lo. Acompanhamos de perto até que todos obtivessem a Lista 2, em *Word*, e as planilhas de cálculo, em *Excel*. O *software Graphmática* já havia sido iniciado nas máquinas, e uma breve explicação sobre seus comandos foi dada. Vale ressaltar que os alunos ficaram encantados com os recursos do programa, que desconheciam, e alguns pediram inclusive para que copiássemos em seus *pendrives*. Esta é uma das vantagens de utilizar um programa gratuito.

Iniciando com o arquivo em *Word* projetado no *datashow*, do qual constavam os enunciados da Lista 2, foram lidas as instruções e, junto com os alunos, resolvido o exemplo.

<u>LISTA 2</u>

Encontre aproximações para as raízes reais das funções a seguir, com erro inferior a 0,01.
Para isto, siga as instruções:

❋ Faça o(s) gráfico(s) usando o GRAPHMÁTICA, copie–os e cole–os neste arquivo.
❋ Escreva quantas são as raízes reais e localize cada uma em um intervalo.
❋ Usando a planilha do Excel dada, encontre as aproximações com erro inferior a 0,01.
❋ Escreva todas as raízes da função, exatas ou aproximadas com erro inferior a 0,01.

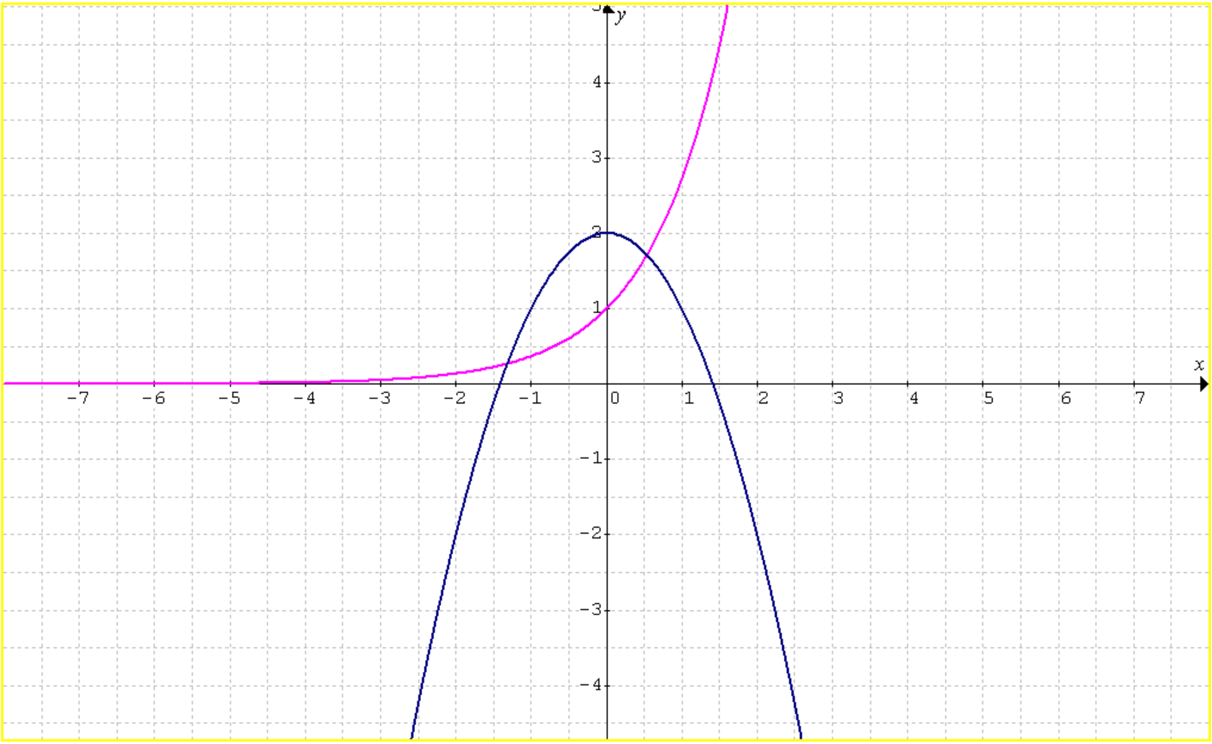
Acompanhe o exemplo:

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^2 - 2$

Figura 57: Validação, Lista 2, Instruções, Exemplo

No exemplo, pedimos aos alunos que escolhessem as funções cujos gráficos seriam feitos. Optaram por $g(x) = e^x$ e $h(x) = -x^2 + 2$. No *software Graphmática*, orientamos a digitarem "$y = e$^x", ou "$y = exp(x)$" para traçar o gráfico de $g(x) = e^x$ e "$y = -x$^2 + 2" para o de $h(x) = -x^2 + 2$. Todos fizeram com sucesso e demonstraram especial satisfação por verem os gráficos traçados tão rapidamente. A Figura 58 mostra os gráficos feitos no *Graphmática* já "colados" no arquivo em *Word*, o número de raízes reais e o intervalo em que se encontram. Conforme ressaltado por Ponte (1992) e Neves (2008), anteriormente citados, o uso deste tipo de *software* não dispensa a análise do gráfico. Aqui, por exemplo, comentamos que a curva $y = e^x$ parece "encostar" no eixo das abscissas, o que de fato não acontece. Estas imprecisões na representação, decorrentes de limitações inerentes à máquina, têm de ser destacadas.

a) GRÁFICO:



b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

Duas raízes reais. Intervalos:]-2; -1[e]0; 1[.

Figura 58: Validação, Lista 2, Exemplo, Resolução itens (a) e (b)

Uma vez determinados os intervalos, passamos às planilhas do *Excel*, a fim de determinar a aproximação de cada raiz. Conforme comentado, os dados foram reorganizados após o TE, a fim de facilitar o cálculo das iterações. A parte inicial da planilha preparada para a raiz real pertencente ao intervalo]-2; -1[é mostrada na Figura 59.

	função: $f(x) = e^x + x^2 - 2$			erro $\varepsilon < 10^{-2}$
	Raiz negativa			
	Intervalo inicial:]a, b[=			
iteração				
1	**a**		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
2	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!
3	**novo intervalo**			
	a		**f(a)**	-1,0000
	b		**f(b)**	-1,0000
	m	#DIV/0!	**f(m)**	#DIV/0!

Figura 59: Validação, Lista 2, Exemplo, Planilha inicial

A organização dos dados é sequencial. A cada iteração, **a** e **b** são os extremos do intervalo, e **m** é seu ponto médio. Dados **a** e **b**, a planilha calcula **m**, **f(a)**, **f(b)** e **f(m)**, e o aluno decide qual será o novo intervalo, escrevendo-o na iteração seguinte. Partindo do intervalo inicial]-2; -1[, são apresentados os preenchimentos da planilha, em cada iteração, nas Figuras 60 a 63.

iteração				
1	**a**	-2,0000	**f(a)**	2,1353
	b	-1,0000	**f(b)**	-0,6321
	m	-1,5000	**f(m)**	0,4731

Figura 60: Validação, Lista 2, Exemplo, Iteração 1

Como **f(m)** > 0 e **f(b)** < 0, o aluno deverá escolher os valores de **m** e **b** como extremos do próximo intervalo (Figura 61).

iteração				
1	**a**	-2,0000	**f(a)**	2,1353
	b	-1,0000	**f(b)**	-0,6321
	m	-1,5000	**f(m)**	0,4731
2	**novo intervalo**			
	a	-1,5000	**f(a)**	0,4731
	b	-1,0000	**f(b)**	-0,6321
	m	-1,2500	**f(m)**	-0,1510

Figura 61: Validação, Lista 2, Exemplo, Iteração 2

Na iteração 2, **f(m)** < 0 e **f(a)** > 0, o aluno deverá escolher os valores de **a** e **m** como extremos do próximo intervalo (Figura 62).

iteração				
1	**a**	-2,0000	**f(a)**	2,1353
	b	-1,0000	**f(b)**	-0,6321
	m	-1,5000	**f(m)**	0,4731
2	**novo intervalo**			
	a	-1,5000	**f(a)**	0,4731
	b	-1,0000	**f(b)**	-0,6321
	m	-1,2500	**f(m)**	-0,1510
3	**novo intervalo**			
	a	-1,5000	**f(a)**	0,4731
	b	-1,2500	**f(b)**	-0,1510
	m	-1,3750	**f(m)**	0,1435

Figura 62: Validação, Lista 2, Exemplo, Iteração 3

Na iteração 3, **f(m)** > 0 e **f(b)** < 0, logo os valores de **m** e **b** serão os extremos do próximo intervalo (Figura 63).

iteração				
1	a	-2,0000	f(a)	2,1353
	b	-1,0000	f(b)	-0,6321
	m	-1,5000	f(m)	0,4731
2	novo intervalo			
	a	-1,5000	f(a)	0,4731
	b	-1,0000	f(b)	-0,6321
	m	-1,2500	f(m)	-0,1510
3	novo intervalo			
	a	-1,5000	f(a)	0,4731
	b	-1,2500	f(b)	-0,1510
	m	-1,3750	f(m)	0,1435
4	novo intervalo			
	a	-1,3750	f(a)	0,1435
	b	-1,2500	f(b)	-0,1510
	m	-1,3125	f(m)	-0,0082

Figura 63: Validação, Lista 2, Exemplo, Iteração 4

Na iteração 4, já obtivemos **f(m)** = -0,0082, ou seja, |**f(m)**| < 0,01, que é nosso critério de parada. Assim, a raiz é aproximadamente igual a -1,31.

Ao encontrar a aproximação da raiz negativa, solicitamos aos alunos que, sozinhos, utilizassem a planilha seguinte do *Excel* para determinar a aproximação da raiz positiva do exemplo, cujo intervalo inicial era]0; 1[. Iniciaram bastante seguros, mas ao chegar à quinta ou sexta iteração, acharam que "estava demorando muito (*sic*)", e ficaram receosos de estarem fazendo algo errado. Sugerimos, então, que conferissem os intervalos entre si. Como todos haviam chegado aos mesmos intervalos, ficaram mais confiantes. Um dos alunos mais rápidos perguntou se "precisava ir até a sétima iteração (*sic*)". Respondemos que sim, e a partir daí todos prosseguiram, chegando à aproximação correta, que era 0,53. Explicamos também que, intencionalmente, os exercícios nos quais um maior número de iterações era necessário foram escolhidos para serem feitos com auxílio do *Excel*.

A Figura 64 mostra a planilha do exemplo, preenchida por um aluno.

Ressalte-se aqui que a organização sequencial das iterações na planilha, feita a partir do TE, surtiu um efeito muitíssimo melhor do que o esperado. Os alunos não tiveram dificuldade em utilizá-la, e todos, sem exceção, disseram desde o início preferir o *Excel* à calculadora.

	função: $f(x) = e^x + x^2 - 2$			erro $\varepsilon < 10^{-2}$
	Raiz positiva			
	Intervalo inicial:]a, b[= [0,1]			
iteração				
1	**a**	0,0000	**f(a)**	-1,0000
	b	1,0000	**f(b)**	1,7183
	m	0,5000	**f(m)**	-0,1013
2	**novo intervalo [0,5,1]**			
	a	0,5000	**f(a)**	-0,1013
	b	1,0000	**f(b)**	1,7183
	m	0,7500	**f(m)**	0,6795
3	**novo intervalo[0,5 , 0,75]**			
	a	0,5000	**f(a)**	-0,1013
	b	0,7500	**f(b)**	0,6795
	m	0,6250	**f(m)**	0,2589
4	**novo intervalo[0,5, 0,625]**			
	a	0,5000	**f(a)**	-0,1013
	b	0,6250	**f(b)**	0,2589
	m	0,5625	**f(m)**	0,0715
5	**novo intervalo [0,5 , 0,562**			
	a	0,5000	**f(a)**	-0,1013
	b	0,5620	**f(b)**	0,0700
	m	0,5310	**f(m)**	-0,0174
6	**novo intervalo [0,531 , 0,562**			
	a	0,5310	**f(a)**	-0,0174
	b	0,5620	**f(b)**	0,0700
	m	0,5465	**f(m)**	0,0259
7	**novo intervalo [0,5313 , 0,5469**			
	a	0,5313	**f(a)**	-0,0166
	b	0,5469	**f(b)**	0,0270
	m	0,5391	**f(m)**	0,0051

Figura 64: Validação, Lista 2, Exemplo, Planilha preenchida por aluno

Depois de encontrar os valores aproximados das raízes, voltamos ao arquivo em *Word* para registrar as aproximações obtidas, aproveitando para ressaltar a forma correta de apresentação, truncada na segunda casa decimal. Além disso, lembramos que raízes exatas, caso existiam, também devem constar da resposta.

Ao término do exemplo, os alunos indagaram se poderiam começar a fazer os exercícios propostos na lista (Figura 65), sendo que alguns já haviam inclusive iniciado. Respondemos que sim, e novamente o pequeno número de alunos do grupo possibilitou que cada um seguisse seu próprio ritmo, assistido por nós. Quando percebíamos que todos haviam terminado um determinado exercício, o resolvíamos no *datashow*, para que os resultados fossem conferidos e quaisquer outras dúvidas esclarecidas.

Agora, faça o mesmo para cada função.

1) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

2) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

3) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

4) $f(x) = ln(x) + x^3$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

Figura 65: Validação, Lista 2, Exercícios propostos

Na resolução dos exercícios, os alunos solicitavam nossa atenção para confirmar os resultados ou perguntar sobre a finalidade de alguns comandos dos *softwares*. Aos poucos, foram "se soltando", e começaram a utilizar o *Graphmática* para traçar outros gráficos, às vezes de $f(x)$, ou de outras funções sobre as quais tivessem curiosidade. Isto demonstrou que eram capazes de utilizar este tipo de programa para investigar e aprender. No uso do *Excel*, não se sentiram à vontade para "experimentar", mas foram usuários eficientes dos recursos de cálculo, movimentando-se com desenvoltura pelas planilhas.

No exercício 1, indagaram se poderiam utilizar o intervalo inicial]2,5; 3[, pois a precisão do gráfico permitia visualizar que a raiz estava no intervalo]2; 3[e era maior do que 2,5. Respondemos que poderiam, sim, e que isto inclusive reduziria o número de iterações necessárias no método da bissecção.

No exercício 2, após fazerem os gráficos perceberam que haveria três raízes, sendo uma exata, $\boldsymbol{x}$ = 1, outra positiva, no intervalo]0,5; 1[, e uma terceira, negativa, em]-2; -1,5[. Pensamos que surgiria uma dúvida ao aproximar a raiz positiva, pois um dos extremos do intervalo inicial era raiz da função, $\boldsymbol{x}$ = 1. Porém, como o sinal da função em $\boldsymbol{x}$ = 0 era positivo, e em $\boldsymbol{x}$ = 0,5 era negativo, o intervalo foi]0; 0,5[, não dando margem a maiores problemas. Perguntamos aos alunos o que teriam feito se $\boldsymbol{f}$(0) e $\boldsymbol{f}$(0,5) possuíssem o mesmo sinal, ao que eles responderam que usariam, no lugar de 1, um número "próximo (*sic*)" cujo sinal da função fosse oposto ao de $\boldsymbol{f}$(0). Esta resposta demonstrou a compreensão adquirida sobre o método da bissecção, bem como desenvoltura ao aplicá-lo.

No exercício 3, alguns alunos fizeram perguntas sobre o aspecto do gráfico de $\boldsymbol{y}$ = 1/$\boldsymbol{x}$. ("Por que tinha duas partes separadas (*sic*)"; "Porque tinha essa forma (*sic*)", etc.) Aguardamos até que todos chegassem ao exercício, e analisamos o gráfico junto com eles, perguntando sobre aspectos que já tinham sido comentados em outras funções: Domínio, limites no infinito e assíntotas. Os alunos responderam acertadamente, revelando que tais conceitos haviam sido apreendidos. Perguntamos ainda qual seria o comportamento da função "ao nos aproximarmos de $\boldsymbol{x}$ = 0 pelo lado positivo" e "ao nos aproximarmos de $\boldsymbol{x}$ = 0 pelo lado negativo", ou seja, intuitivamente abordamos a noção de limites laterais. Nosso raciocínio foi acompanhado pelos alunos, o que nos deixou muito satisfeitos.

Não houve dúvidas ou questionamentos no exercício 4.

O aluno com deficiência visual – baixa visão – apresentou bom domínio dos comandos dos programas e também do conteúdo, mas precisava de atenção constante de um de nós, o que fez com que a aula se estendesse mais um pouco.

Os alunos demonstraram muita satisfação por estar utilizando o computador, e fizeram todos os itens propostos na Lista 2. Às 17h, todos já haviam terminado e enviado os arquivos para o endereço eletrônico divulgado no início da aula. Ao final da Lista 2 havia um questionário, apresentado já com os resultados, na Figura 66.

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. (60%) muitas informações novas.
(40%) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Graphmática, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. (40%) muitas informações novas.
(60%) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Excel, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. (20%) algumas informações novas.
(40%) muitas informações novas. (40%) tudo foi novidade.

Quanto à duração da primeira parte (primeiro dia) das atividades:
( ) muito longa. (20%) um pouco longa. (60%) normal.
(20%) passou rápido.

Quanto à duração da segunda parte (segundo dia) das atividades:
( ) muito longa. (40%) um pouco longa. (20%) normal.
(40%) passou rápido.

O que você destacaria como mais interessante?
(40%) Ter aprendido uma forma diferente de resolver equações.
( ) Ter utilizado recursos tecnológicos (calculadora, computador) para aprender.
(60%) Os dois itens acima, sem ordem de preferência.
( ) Nenhum dos itens anteriores.

Se quiser, escreva aqui sua opinião ou sugestão para a melhoria de nosso trabalho.
OBRIGADO POR SUA PARTICIPAÇÃO!

Figura 66: Validação, Lista 2, Questionário dos alunos, resultados

Nem todos os alunos responderam à última questão, por terem outros compromissos marcados para as 17h. Abaixo estão algumas respostas.

"Gostaria que tivesse sempre este tipo de estudo em outras matérias!!!
[...]
Valeu, EQUIPE ESTÁ DE PARABENS TANTA DEDICAÇÃO! (*sic*)"

"Achei o trabalho muito interessante, pois, dentre outros aspectos,nos ajudou a desenvolver o lado do raciocínio para a resolução de questões,aparentemente complicadas,de uma forma mais simples e segura. ADOREI. (*sic*)"

"Adorei o trabalho,obrigada!me chame mais vezes!!!!adoro aprender coisas novas!!! (*sic*)"

"Muito obrigada a vocês pelo carinho e toda a atenção mantida conosco,parabéns e que Deus os abençoe.
Um grande beijo e abraços (*sic*)"

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Lançamos a pergunta “Você acredita que este tipo de atividade possa motivar o aluno de Ensino Médio no estudo de funções e seus gráficos? Por quê?” aos participantes do teste exploratório. A maioria respondeu que a atividade proposta pode sim motivar o estudo de funções e seus gráficos. Além disso, responderam que desconheciam o conteúdo e que ao final foram adquiridos muitos conhecimentos novos, além de esclarecidos outros. Afirmaram ainda que os recursos tecnológicos utilizados por nós foram de grande valia, pois o uso de tecnologia associada a um conteúdo novo conseguiu motivar o estudo de funções

Diante dessas observações, podemos dizer que o estudo foi de grande importância para os participantes, visto que muitos deles desconheciam equações transcendentes e seus métodos de resolução.

Na validação, elaboramos um pequeno questionário com a finalidade de saber "o que ficou" para o aluno em termos de conhecimento do assunto. Mais de 50 por cento responderam que foram acrescentadas muitas informações novas, que gostaram de aprender uma forma diferente de resolver equações e também da utilização dos recursos tecnológicos para aprender.

Com esses dados, podemos dizer que o estudo proposto aos alunos trouxe uma aprendizagem significativa para o estudo de funções, contribuindo assim para sua formação.

Ao final das atividades, consideramos nossa questão principal de pesquisa plenamente respondida. O estudo dos métodos de resolução de equações não algébricos (gráfico e da bissecção) tanto motiva quanto facilita a aprendizagem de funções. Ao longo das atividades, pudemos observar que conceitos antes obscuros para os alunos foram esclarecidos através de uma construção e análise atentas do gráfico.

Vejamos as respostas obtidas para as questões secundárias:

1ª) Diante do problema de resolver uma equação, o aluno é capaz de lançar mão de recursos que não sejam algébricos?

Resposta: Antes da realização das atividades, não. Após as aulas ministradas, sim. Isto ficou claro na resolução da Lista 2.

2ª) O aluno relaciona raízes de equações com raízes de funções?

Resposta: Sim. Isto ficou claro desde o TS.

3ª) A relação do aluno com *softwares* que traçam gráficos de funções ou lidam com planilhas eletrônicas é a de mero usuário, ou ele também se utiliza destes recursos para investigar e aprender?

Resposta: Durante a resolução da Lista 2, ficou claro que os alunos se utilizaram do *software Graphmática* para investigar, traçando gráficos de outras funções além das requeridas nos exercícios. Quanto ao *Excel*, percebemos que eles não se sentiram à vontade para explorar seus recursos, sendo, portanto, meros usuários.

4ª) O que motiva mais o aluno: aprender uma forma diferente (de resolver equações) ou aprender de forma diferente (usando TIC)?

Resposta: Tendo por base a resposta dada pelos alunos ao último item do questionário da Lista 2, concluímos que ambos são motivadores para o aluno.

Obtivemos um retorno bastante significativo por parte dos alunos, principalmente, segundo eles mesmos nos disseram, por apresentar algo que não era usual.

A presença da tecnologia foi muito favorável, pois levou os alunos a entenderem significativamente a presença das "máquinas" em uma aula de Matemática. A visualização gráfica, o manuseio da calculadora, a disposição em planilhas eletrônicas, tudo foi de grande valia para o processo de aprendizagem.

Percebemos, também, que é possível trabalhar, no Ensino Médio, com determinados conteúdos matemáticos do Ensino Superior. Tudo depende da forma pela qual este conteúdo é abordado.

Todos gostam do que é novo, podem não gostar da forma que lhe foi apresentado. Cabe a nós, professores, descobrirmos as melhores maneiras de enriquecer o processo de aprendizagem do aluno e contribuirmos favoravelmente em seu processo escolar.

Fica então declarada a nossa responsabilidade enquanto formadores de cidadãos, pois devemos ter em mente qual é o tipo de cidadão que desejamos para o futuro, consciente de seu dever no mundo ou totalmente displicente com aquilo que está apto a fazer.

Oferecer uma educação de qualidade requer interesse, vontade e disponibilidade dos reais formadores, pois é possível extrair do aluno aquilo que queremos. Assim, é possível conceder a ele aquilo que ele merece.

11. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

> Diante das dificuldades apresentadas e das possibilidades de superação, inferimos que os autores de livro didático têm um papel fundamental na contribuição da melhoria do ensino de funções, no que tange à forma de apresentação do conceito, visando a auxiliar os docentes em suas práticas. Além dos autores, o professor, que é o destinatário do livro didático, precisa conhecer os resultados de pesquisa, para melhor contribuir com a qualidade do ensino e apresentando aos alunos situações novas que sejam significativas. Só o professor pode, a cada situação, perceber quais resultados de pesquisa podem auxiliá-lo em sua prática, pois esses resultados são sempre permeados pela situação da sala de aula. (ARDENGHI, p. 72-73.)

Diante das respostas positivas dos questionários aplicados, tanto aos alunos do Ensino Médio como aos professores em formação, a respeito da contribuição do tema para sua aprendizagem, sugerimos que seja dada continuidade a este trabalho, como capacitação profissional para professores de Ensino Médio. Acreditamos que este tipo de atividade tem muito a acrescentar na vida profissional, pois não é algo comum no currículo escolar.

Nós, formadores, necessitamos nos preencher cada vez mais do que é novo. Será de grande valia a apreensão e discussão desta pesquisa com os professores. Assim, estaríamos investindo na formação deste público alvo e, consequentemente, em uma educação de maior qualidade e com profissionais mais capacitados.

Outra sugestão seria a inserção, no Ensino Médio, de temas trabalhados no Ensino Superior, com o objetivo de facilitar a aprendizagem de assuntos nos quais haja reconhecidamente dificuldade de aprendizagem. Com esta experiência, percebemos que é possível, sim, esperar e alcançar um retorno significativo por parte dos alunos com a abordagem de conteúdos que, a princípio, não seriam próprios de tal nível de ensino.

O desenvolvimento desta monografia aconteceu em dois semestres, nos quais realizamos diversas pesquisas em livros, monografias, artigos e internet. Durante as etapas de escolha do tema, pesquisas, elaboração das atividades e escrita, tivemos um crescimento bastante significativo como licenciandos, pois foram muitas ideias e experiências trocadas com nossa orientadora, nossos colegas do teste exploratório e com os próprios alunos na aplicação. Podemos dizer que hoje estamos mais preparados para desenvolver um trabalho diferenciado com nossos futuros alunos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. Tese (Doutorado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Rio Claro: [s.n.], 2005. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/allevato_nsg_dr_rcla.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

ARDENGHI, M. J. *Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP, 2008. Sâo Paulo: PUC-SP, 2008. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_jose_ardenghi.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

ARENALES, S.; DAREZZO, A. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

BARRETO, M. M. *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários.* Dissertação (Mestrado Profissionalizante) - UFRGS. Porto Alegre: UFRGS, 2007. Disponível em: <http://143.54.226.61/~vclotilde/orientacoes/dissert_marinambarreto_2008_inteiro.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

BARROSO , L.C. et al. *Cálculo numérico: com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1992.

BENEDETTI, F. C. *Funções, Software gráfico e Coletivos Pensantes*. 2003. 316 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2003. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/benedetti_fc_me_rcla.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O. R.; LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida. 2º Grau*. V.3. São Paulo: Ática, 1993.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais(Ensino Médio). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino médio. Volume 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/SEB, 2006.

CHAVES, M. I.; CARVALHO, H. C. *Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio: Uma sequência de ensino-aprendizagem*. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM. Disponível em: <http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Formalizacao%20Conceito%20Funcao%20Ensino%20Medio.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

CLÁUDIO, D.M. et al. *Cálculo numérico computacional*. São Paulo: Atlas, 1998.

DALLAZEN, A. B.; SCHEFFER, N. *Estudo de Tópicos de Matemática com a Calculadora Gráfica no Ensino Médio e Superior*. In: IV Encontro Ibero-Americano de Coletivos Escolares e Redes de Professores que Fazem Investigação na sua Escola. Lajeado: UNIVATES, 2005. *Anais...* Disponível em: <http://ensino.univates.br/~4iberoamericano/>. Acesso em: out. 2009.

D'AMBROSIO, B. S. *Como ensinar matemática hoje?* Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. p. 15-19. Brasília: SBEM, 1989.

DANTE, L. R. *Matemática, volume único*. São Paulo: Ática, 2005.

ERICKSON, F. *Qualitative methods in research on teaching*. In: M. C. WITTROCK (Ed.). Handbook of research on teaching. New York, NY: Macmillan, 1986, p. 119-161.

FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GALVÃO, L. C.; NUNES, L. F. *Apostila de Cálculo Numérico*. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://www.pessoal.utfpr.edu.br/laurogalvao/aulas/calculo_numerico/.../calc_num_a.pdf>. Acesso em: set. 2009.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI Jr, J. R. *Matemática Fundamental, 2° grau: volume único*. São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, G. et al. *Matemática: volume único*. São Paulo: Atual, 1997.

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. The Function Concept*. New York: Oxford University Press, 1972. p. 335-340.

LIMA, E. L. et al. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. 3.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática*. 2 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, N. J. *Matemática por Assunto*. V.1. Rio de Janeiro: Scipione, 1988.

MAIA, D. *Função quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP, 2007. Sâo Paulo: PUC-SP, 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_arquivos/3/TDE-2007-06-15T12:42:14Z-3515/Publico/dissertacao_diana_maia.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

MERRIAM, S. *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass, 1988.

MONTEIRO, C. E. F. *Interpretação de gráficos: atividade social e conteúdo de ensino*. 22ª reunião da ANPEd, GT 19. Caxambu, MG, out. 1999. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_22/carlos.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

NEVES, C. D. S. *Uso de Tecnologias no Estudo de Funções Reais de Variável Real*. Monografia (Licenciatura em Ensino de Matemática). Universidade Jean Piaget de Cabo Verde - Campus Universitário da Cidade da Praia, 2008. Disponível em: <http://bdigital.cv.unipiaget.org:8080/jspui/handle/123456789/108>. Acesso em: ago. 2010.

NÓVOA, A. *As ciências da educação e os processos de mudança*. In: NÓVOA, A. et al. Ciências de educação e mudança. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1991. p. 18-67.

OLIVEIRA, J. C. G. *A visão dos professores de matemática do Estado do Paraná em relação ao uso de calculadora nas aulas de matemática*. Tese (Doutorado) - UNICAMP, Faculdade de Educação. Campinas, SP: [s.n.], 1999. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?down=vtls000189152>. Acesso em: ago. 2010.

OLIVEIRA, N. *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). PUC-SP, 1997. São Paulo: PUC-SP, 1997. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Oliveira.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

OLIVEIRA, R. *Curso de Cálculo Numérico*. Rio de Janeiro: UFRJ. Disponível em: <http://www.raymundodeoliveira.eng.br/programa.html>. Acesso em: set. 2009.

PONTE, J. P. *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Vol. 19, Ano 25, 2006. p. 105-132.
Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf>. Acesso em: jun. 2010.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. The Mathematics Educator, v. 2, n. 3, p. 3-8, 1992. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/ind_uk.htm>. Acesso em: ago. 2010.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

ROQUE, W.L. *Introdução ao cálculo numérico*. São Paulo: Atlas, 2000.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

SCHEFFER, N. F. *Corpo-Tecnologias-Matemática: uma interação possível no Ensino Fundamental*. Erechim, RS: EdiFAPES, 2002.

SHIGUE, C. Y. *Notas de Aula de Cálculo Numérico*. Atualizado em 22 de janeiro de 2009. Disponível em: <http://www.alunos.eel.usp.br/numerico/notas.html>. Acesso em: set. 2009.

SILVA, M. V. *Dificuldade na representação gráfica quando apresentado num contexto real*. In: Anais do IX ENEM, Belo Horizonte, 2007. Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Resumos/CC10805075828R.doc>. Acesso em: ago. 2010.

SILVA, M. E. *Aprendizagem significativa e o ensino de função do segundo grau*. In: Anais do X Seminário de Pesquisa da UTP. Curitiba: UTP, 2006. Disponível em: <http://www.utp.br/proppe/x%20seminario_pesquisa/Artigos%20completos/FCHLA/APRENDIZAGEM%20SIGNIFICATIVA%20E%20O%20ENSINO%20DE%20FUN%C7%C3O%20DO%20SEGUNDO%20GRAU.doc>. Acesso em: ago. 2010.

SOUZA JÚNIOR, E. M. *Uma análise de pesquisas acadêmicas em educação matemática sobre o enfoque histórico do conceito de função*. Dissertação (Mestrado em Educação) – PUC/Campinas, 2008. Campinas: PUC-Campinas, 2008. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.puc-campinas.edu.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=515>. Acesso em: ago. 2010.

SOUZA, T. A. *Calculadora Gráfica: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções*. Dissertação (Mestrado). Rio Claro, SP: UNESP, 1996. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/dissertacao_telma.zip>. Acesso em: ago. 2010.

SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; MONKEN e SILVA, L. H. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson, 2003.

TALL, D. *Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change*. For the Learning of Mathematics, Canada, n. 9(3), p.37-42, 1989. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

THEES, A. V. *Um Estudo de Caso do Conhecimento do Professor de Matemática da Educação Básica Sobre o Comportamento Variacional das Funções Afim e Quadrática*. Monografia (Especialização) - UFF. Niterói: UFF, 2009.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*. 1999. 402 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1999. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/tese_monica.zip>. Acesso em: ago. 2010.

YIN, R. *Case study research: Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage, 1984.

YOUSCHKEVICH, A. P. *The Concept of Function*. In: Archives for History of Exact Sciences, v. 16. n. 1. Editions Springer, 1976. p. 37-85.

ZUFFI, E. M. et al. *Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função*. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A: PEQUENA PESQUISA EM LIVROS DIDÁTICOS

Voltando aos livros didáticos, precisávamos "ver de perto" a situação retratada por Elon Lages Lima. Procedemos, então, à análise da parte referente à introdução de funções e gráficos de três livros utilizados no ensino básico (Fundamental ou Médio), escritos por autores renomados. Foram levantadas a forma de abordagem do ensino de funções e as metodologias adotadas pelos referidos autores.

A seguir, relatamos estes levantamentos e as conclusões obtidas.

Livro A: Observamos que os autores introduziram o conteúdo de gráficos apresentando alguns tipos de gráficos retirados de jornais e revistas, cuja finalidade é levar o leitor a descobrir algumas propriedades das funções apresentadas, como crescimento, decrescimento, máximo, mínimo, etc.

Logo após, os autores propõem uma noção básica de plano cartesiano, para, a partir disto, abordarem a construção de gráficos. Feito isto, finalizam esta parte do conteúdo com a análise de gráficos. É o momento em que formalizam as propriedades descobertas e analisadas pelos leitores, acrescentando o estudo do sinal da função, raízes de funções e finalizam o capítulo com uma rápida apresentação de paridade de funções através do gráfico.

Livro B: O autor introduz o conteúdo de gráficos apresentando alguns ao leitor, retirados de reportagens em jornais e revistas e também de outros livros. Nesta análise, a única ênfase foi nos valores máximo e mínimo. Assim, ele inicia as coordenadas cartesianas de maneira rápida e bem sucinta, depois do sistema de eixos ortogonais.

A partir daí, ele inicia a geometria analítica e só depois de falar da distância entre dois pontos e da equação de uma circunferência, retoma a construção de gráficos. Desta forma, ensina a determinar o Domínio e a Imagem de uma função através do gráfico; a verificar se um conjunto de pontos é o gráfico de uma função e depois a analisar gráficos, classificando a função em crescente, decrescente, par e ímpar. O autor só aborda zero da função de maneira mais atenta no capítulo seguinte, que trata da função afim.

Livro C: Os autores não iniciam o conteúdo de gráficos apresentando exemplos ao leitor. Eles são mais objetivos e introduzem o sistema cartesiano ortogonal, onde englobam tudo. Não separam por item, como fazem os autores anteriores. A partir daí, passaram à construção de gráficos, sem dizerem ao leitor o que estavam fazendo de fato. Depois, fizeram um estudo rápido do gráfico no plano cartesiano, abordando Domínio e Imagem.

Passaram então para função par e função ímpar, finalizando com função crescente, decrescente, e função composta. Até este momento, observamos que os autores não falaram sobre zeros da função.

Após essas análises e algumas reflexões, percebemos que os autores que apresentaram alguns tipos de gráficos para introduzirem o conteúdo, não os exploraram de fato nem retornaram a eles para comparação ou finalização após explicarem detalhadamente as propriedades encontradas na análise de gráficos.

Vale também ressaltar que nenhum dos autores pesquisados sequer citou equações transcendentes. Resolveram, apenas, aquelas referentes aos tipos de funções: quadráticas, exponenciais, modulares e logarítmicas. Além disso, falaram muito pouco sobre os zeros das funções, isso quando seu estudo não ocorreu em capítulo diferente daquele em que realmente deveria ser abordado.

APÊNDICE B: ATIVIDADES INICIAIS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

TESTE DE SONDAGEM

1) Encontre as raízes reais das funções a seguir.

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = x^3 - x - 3$

d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$

2) Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) - x + 1$?

3) Você conhece algum método de resolução de equações que não seja algébrico? Caso conheça, diga qual é.

4) Marque com um (X) as funções cujo gráfico você saberia esboçar.

( ) $f(x) = 2^x$
( ) $f(x) = x^3$
( ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
( ) $f(x) = e^x - x^2$
( ) $f(x) = e^x$
( ) $f(x) = ln(x)$
( ) $f(x) = \frac{1}{x}$
( ) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

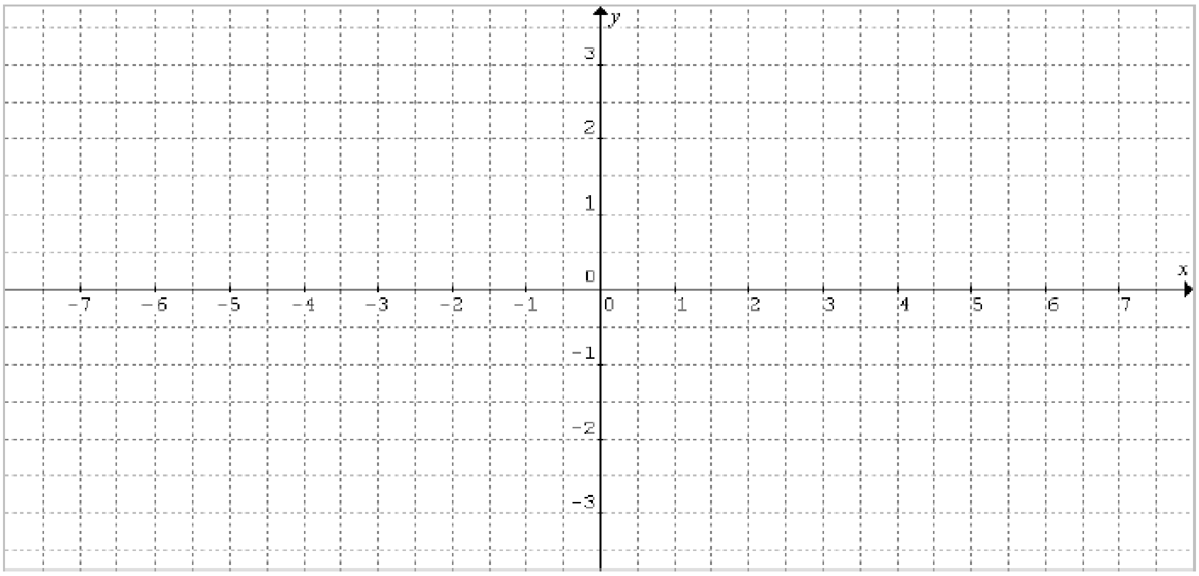
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES

ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

LISTA 1

1) MOTIVAÇÃO: Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) - x + 1$?

a) Na malha quadriculada abaixo, construa o gráfico das funções $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = x - 1$.



b) Marque o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = x - 1$.

c) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), responda à questão proposta na MOTIVAÇÃO: quantas são as raízes reais da função $f(x) = sen(x) - x + 1$ e em que intervalos se encontram?

Este exemplo ilustra o **método gráfico** para obtenção de aproximações de raízes reais de funções. Ele nos possibilita **localizar a raiz em um intervalo cujos extremos são números inteiros**. O ponto médio deste intervalo é a **aproximação inicial** da raiz.

A partir do intervalo encontrado no método gráfico, é possível obter valores mais precisos para a raiz, utilizando **métodos iterativos, ou métodos numéricos**. Neste trabalho, escolhemos o **método da bissecção**.

O método da bissecção consiste em repetir os passos descritos a seguir, até que se atinja a precisão desejada. Cada repetição é chamada de **iteração**:

1°) dado um intervalo, calcula-se o valor da função em cada extremo do intervalo;

2°) calcula-se o ponto médio do intervalo, m, e em seguida $f(m)$;

3°) o extremo do intervalo no qual a função tem sinal oposto ao de $f(m)$ permanece, o outro extremo é substituído por m;

4°) um novo intervalo é formado, e voltamos ao 1° passo da iteração.

O critério de parada apresenta pequenas variações neste método, bem como a escolha da resposta, de acordo com a fonte consultada.

Sejam ε o erro máximo admitido, $[a_k; b_k]$ o intervalo considerado na iteração k e m_k o ponto médio deste intervalo.

Para ARENALES e DAREZZO, o critério de parada é $|f(m_k)| \leq \varepsilon$ ou (erro relativo) < ε, o que ocorrer primeiro, sendo o erro relativo igual a $\dfrac{|m_k - m_{k-1}|}{|m_k|}$. A aproximação (resposta) é então m_k, truncado na ordem decimal dada por ε.

Por exemplo, se $\varepsilon < 10^{-3}$, m_k será truncado na terceira ordem decimal; se $\varepsilon < 10^{-6}$, m_k será truncado na sexta ordem decimal. Lembrando que truncar significa "cortar" ou "abandonar" as ordens decimais posteriores, sem arredondamento algum. O número 1,324 truncado na segunda ordem decimal é igual a 1,32, assim como o número 1,329.

Já para RUGGIERO e LOPES, o critério de parada é $(b_k - a_k) < \varepsilon$, e a resposta pode ser qualquer $x \in [a_k; b_k]$, em geral o ponto médio, truncado na ordem decimal dada por ε.

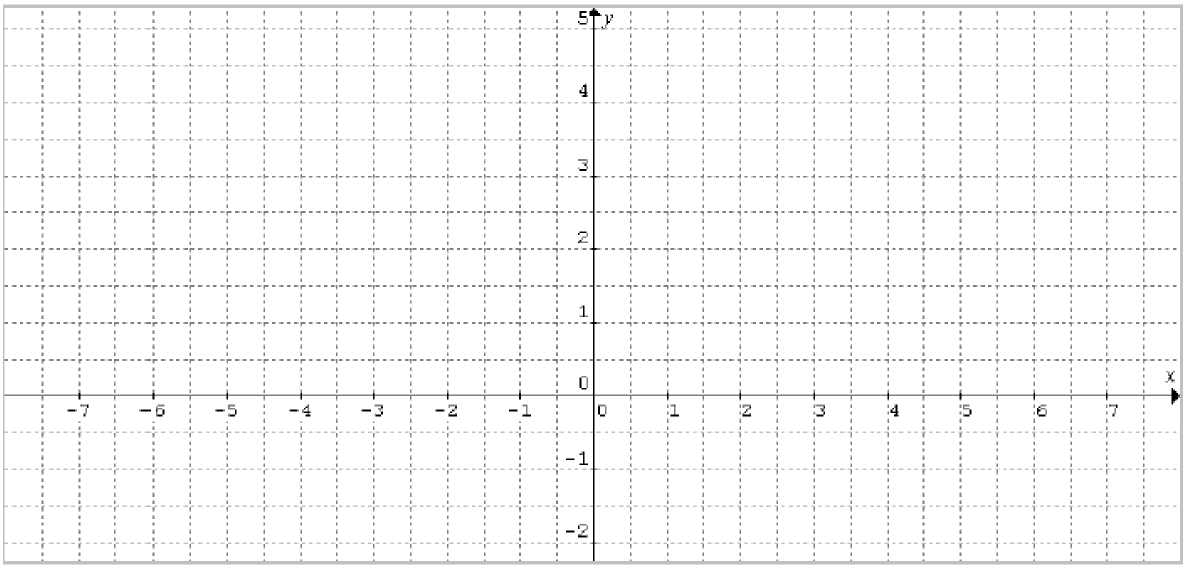
Em GALVÃO e NUNES, e também segundo OLIVEIRA, o critério de parada é $(b_k - a_k)/2 < \varepsilon$, e a resposta é o ponto médio de $[a_k; b_k]$, truncado na ordem decimal dada por ε.

Adotaremos neste trabalho o critério de parada $|f(m_k)| \leq \varepsilon$, sendo $\varepsilon < 0{,}01$.

2) Encontre aproximações das raízes reais positivas das funções a seguir, com erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = x^3 - x - 3$

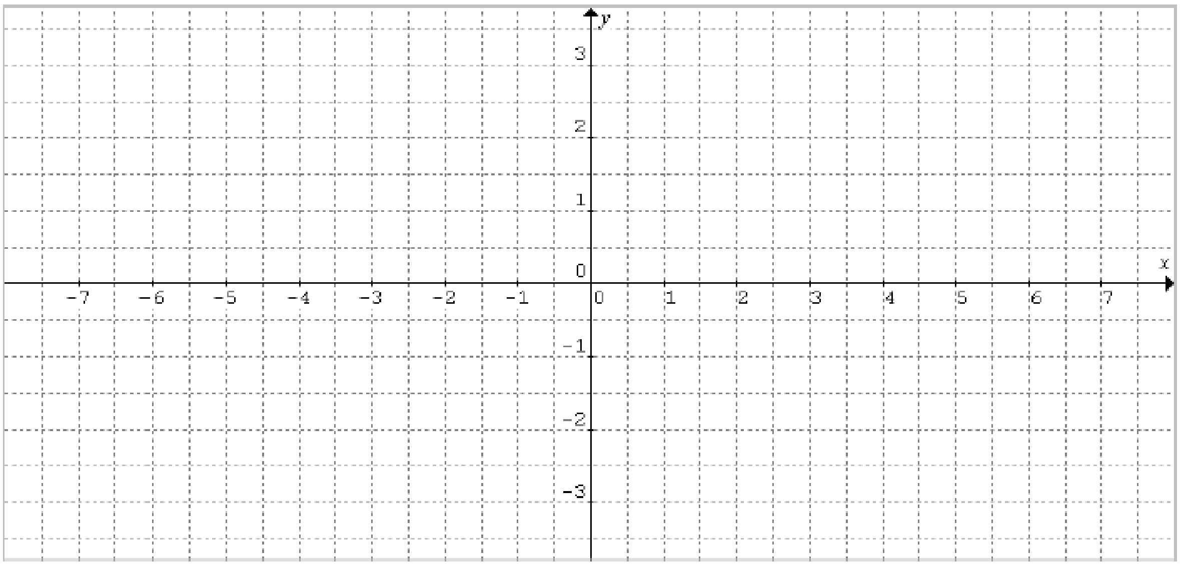
Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

b) $f(x) = e^x + x^2 - 2$

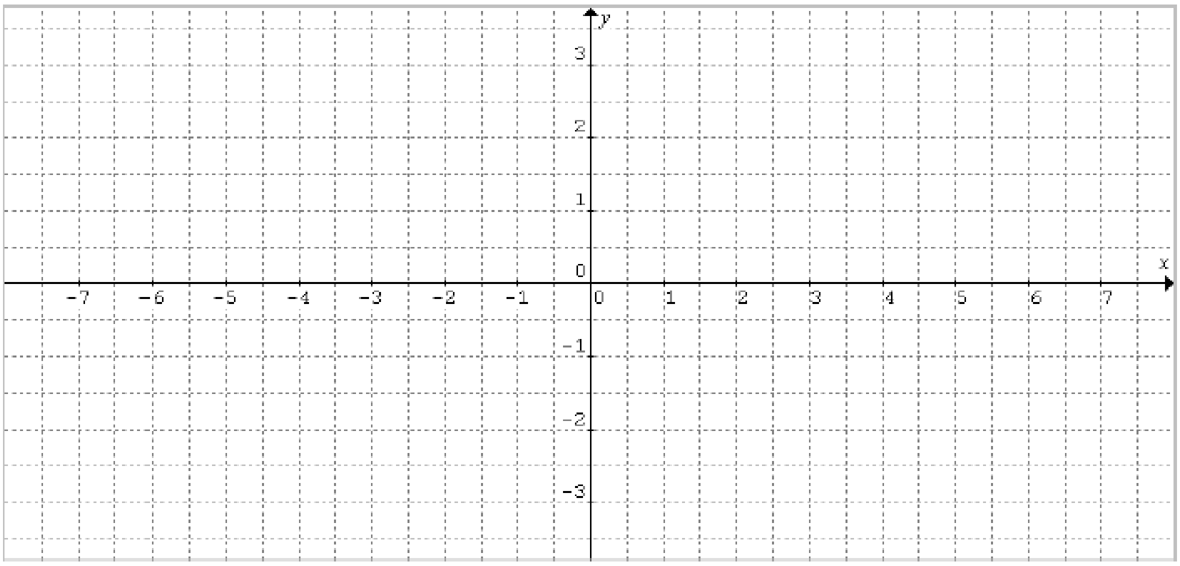
Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

c) $f(x) = ln(x) + x - 2$

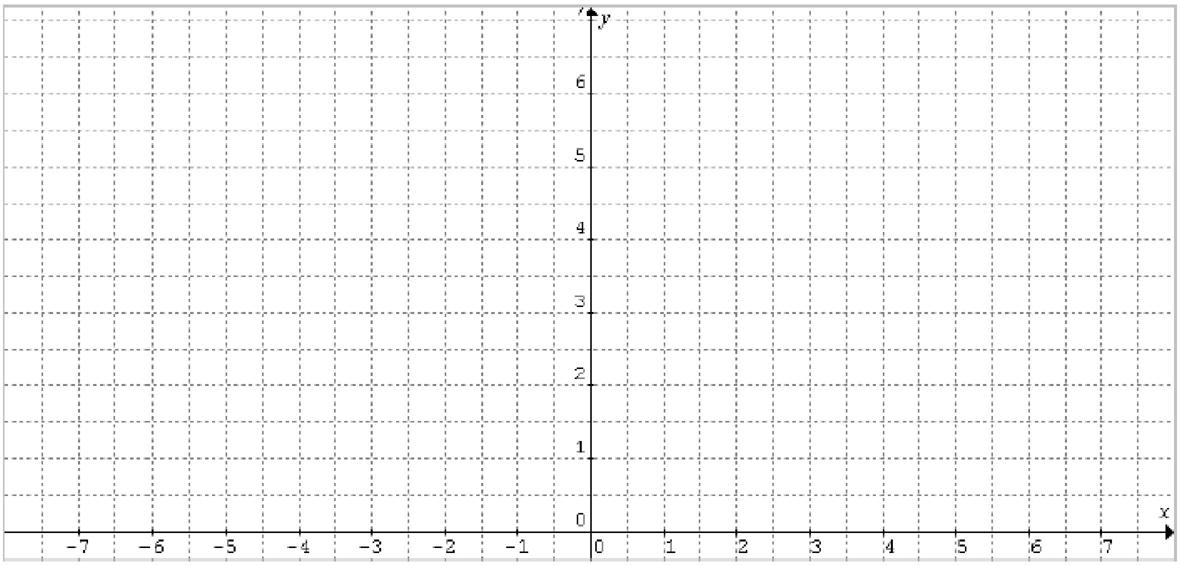
Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

d) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

LISTA 2

Nos itens (a) e (b), encontre aproximações para as raízes reais das funções. Nos itens (c), (d) e (e), resolva as equações. Em todos os itens, adote erro menor do que 0,01.

Para isto, siga as instruções:

1°) Faça o(s) gráfico(s) usando o GRAPHMÁTICA e cole–os neste arquivo.

2°) Escreva quantas são as raízes reais e localize-as entre dois números inteiros.

2°) Usando a planilha do Excel dada, encontre as aproximações e transcreva-as para este arquivo.

a) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

GRÁFICO:

NÚMERO DE RAÍZES E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

APROXIMAÇÕES DAS RAÍZES:

b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

GRÁFICO:

NÚMERO DE RAÍZES E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

APROXIMAÇÕES DAS RAÍZES:

c) $e^x - \frac{1}{x} = 0$

GRÁFICO:

NÚMERO DE RAÍZES E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

APROXIMAÇÕES DAS RAÍZES:

d) $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^3 = 0$

GRÁFICO:

NÚMERO DE RAÍZES E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

APROXIMAÇÕES DAS RAÍZES:

e) $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^2 - 4 = 0$

GRÁFICO:

NÚMERO DE RAÍZES E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

APROXIMAÇÕES DAS RAÍZES:

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Quanto à duração da primeira parte das atividades:
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Quanto à duração da segunda parte das atividades:
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Você acredita que este tipo de atividade possa motivar o aluno de Ensino Médio no estudo de funções e seus gráficos? Por quê?

LISTA 2
RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES À ÚLTIMA PERGUNTA DO QUESTIONÁRIO

AS RESPOSTAS FORAM TRANSCRITAS EXATAMENTE DA FORMA COMO FORAM ESCRITAS.

Você acredita que este tipo de atividade possa motivar o aluno de Ensino Médio no estudo de funções e seus gráficos? Por quê?

Participante A:

Sim, pois é uma maneira diferente de estudar funções e principalmente de achar as raízes aproximadas de funções que eu nem imaginava como poderia achar.

Participante B:

Não gostei da disposição do excel, prefiro fazer na calculadora.
Obs. Sugestão acatada.

Participante C:

Sim , acho que os alunos estão acostumados a verem as funções de forma simples ,sem esses tipos de equações diferentes que são importantíssimas pois muita das vezes esses tipos de equações caem em concurso.Acho que poderia se acrescentado o nome e que são essas equações pois acho importante os alunos saberem o que são equações transcendental.

Participante D:

Sim, pois acredito que essa forma motiva o aluno por ser diferente das maneiras que ele aprende no E.M., além do uso de tecnologia, que torna o aprendizado mais dinâmico e interativo.
Gostei também, pois para resolver um mesmo exercício vocês mostraram duas alternativas de resolução.
Mas isso não se realizaria tão bem se não fosse a paciência de vocês ao explicar e a atenção dada a cada um de nós (alunos)! Parabéns! Espero que na turma do E.M. vocês continuem assim.
Muito sucesso!!!

Participante E:

Sim, pois além de acrescentar conhecimentos novos, os alunos de ensino médio se interessam muito por trabalhos feitos com tecnologia.

Participante F:

Em parte, pois normalmente os alunos não se interessam muito em fazer cálculos e a primeira parte é basicamente isso. Não possuo muito conhecimento sobre o assunto, mas se fosse possível encontrar atividades menos trabalhosas para primeira parte acredito que seria mais vantajoso, já que o interesse de vocês não é saber se o aluno sabe calcular mas sim que ele aprenda o conteúdo proposto. Já a segunda parte pode ser motivadora, pois utiliza como recurso a tecnologia o que desperta interesse nos alunos (um ambiente fora da sala de aula). Apesar do uso do excel ser um pouco complexo os alunos provavelmente irão gostar por estarem utilizando o computador.

Essa atividade foi de grande importância para mim, pois, através dela adquiri muitos conhecimentos novos além de esclarecer outros. Parabéns ao grupo e a professora orientadora.

Participante G:

Sim. Acredito que utilizando as tecnologias, no caso a calculadora, o graphmática e o excel, venha estimular o aluno, pois é uma realidade nova e o aluno gosta interagir com essas tecnologias que são ferramentas de grande importância para aprendizagem.

APÊNDICE C: ATIVIDADES REFORMULADAS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POR MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS

Caro(a) aluno(a), o objetivo deste teste de sondagem não é avaliativo, por isso não é preciso colocar seu nome.

É importante para nós que você seja sincero ao responder às questões, pois só assim prepararemos nossa aula de forma a realmente ajudá-lo a vencer suas dificuldades.

Se não souber responder algum item, não "chute", deixe-o em branco e saberemos que aquele assunto terá que ser abordado.

Desde já agradecemos seu interesse em participar de nossa atividade, que será realizada na sexta-feira, 08/10, com início às 8 horas, na sala F 202.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES

ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

TESTE DE SONDAGEM

1) Encontre as raízes reais das funções a seguir.

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = x^3 - x - 3$

d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$

e) $f(x) = \sqrt{x+2} - 4 + x$

2) Quantas raízes reais existem da função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$?

3) Você conhece algum método de resolução de equações que não seja algébrico? Caso conheça, diga qual é.

4) Marque com um (X) as funções cujo gráfico você saberia esboçar.

( ) $f(x) = 2^x$

( ) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

( ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

( ) $f(x) = e^x$

( ) $f(x) = sen(x)$

( ) $f(x) = \frac{1}{x}$

( ) $f(x) = x^3$

( ) $f(x) = x^3 - x$

( ) $f(x) = e^x - x^2$

( ) $f(x) = ln(x)$

( ) $f(x) = \sqrt{x}$

( ) $f(x) = \frac{x-2}{4}$

4) Você possui calculadora científica? ( ) Sim. ( ) Não.

Caso possua, traga-a no dia da atividade.

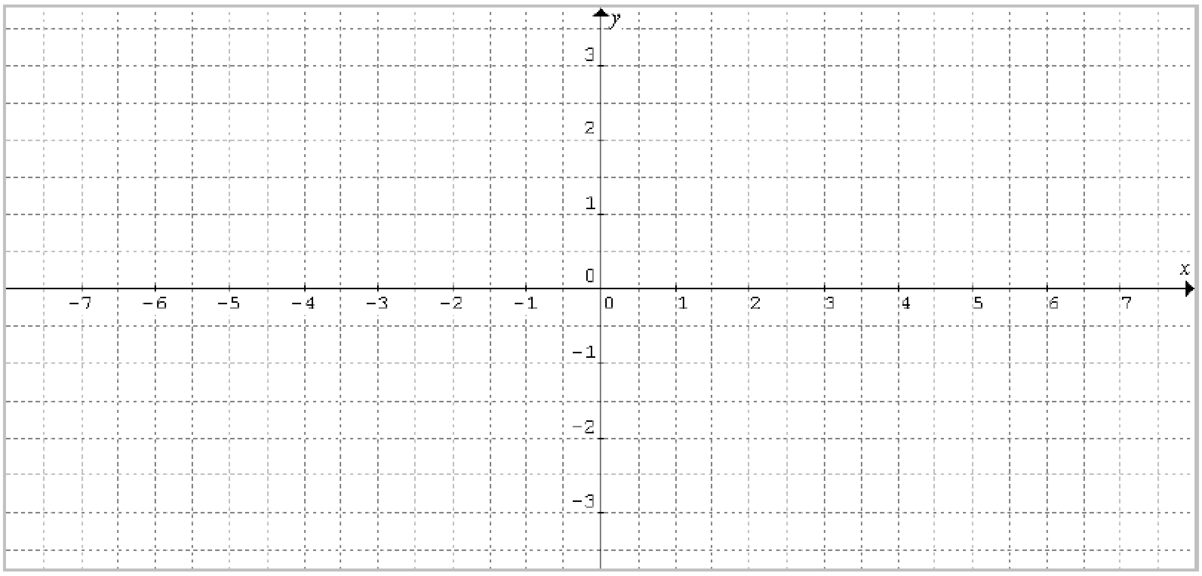
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

LISTA 1

1) MOTIVAÇÃO: Quantas raízes reais a função $f(x) = sen(x) + \frac{x}{3} - 1$ possui ?

a) Na malha quadriculada abaixo, construa o gráfico das funções $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.



b) Marque o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -\frac{x}{3} + 1$.

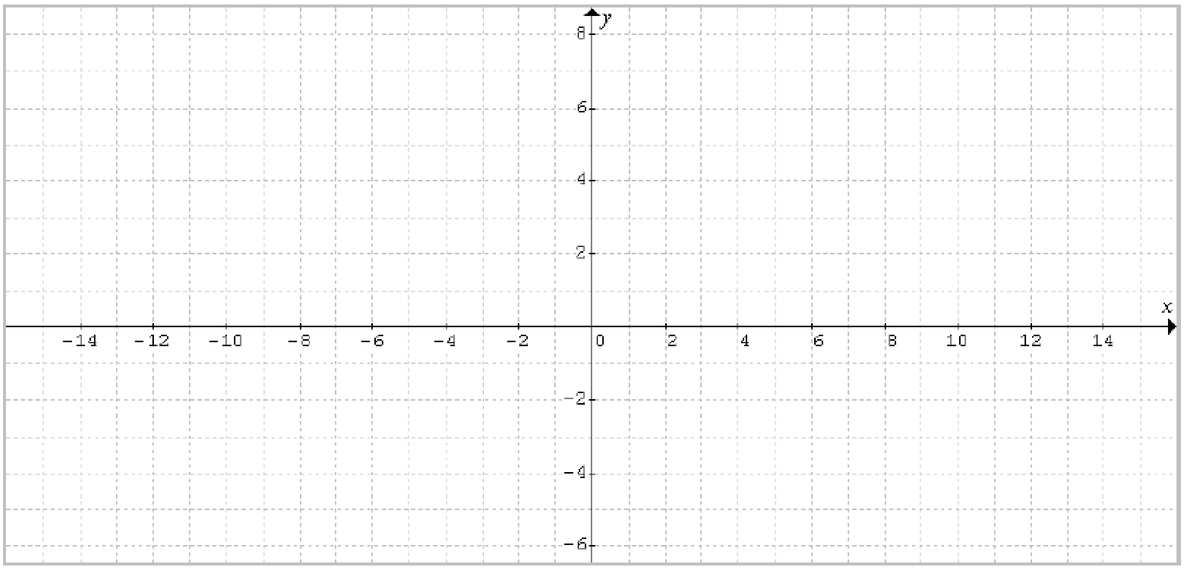
c) Com base nos resultados dos itens (a) e (b), responda à questão proposta na MOTIVAÇÃO: quantas são as raízes reais da função $f(x) = sen(x) - \frac{x}{3} + 1$? Em que intervalos se encontram?

Este exemplo ilustra o **método gráfico** para obtenção de aproximações de raízes reais de funções. Ele nos possibilita **localizar a raiz em um intervalo cujos extremos são números inteiros**. O ponto médio deste intervalo é a **aproximação inicial** da raiz.

A partir do intervalo encontrado no método gráfico, é possível obter valores mais precisos para a raiz, utilizando **métodos iterativos, ou métodos numéricos**. Neste trabalho, escolhemos o **método da bissecção**.

2) Encontre uma aproximação da raiz real da função $f(x) = x^3 - x - 3$.

Aproximação inicial: localizar a raiz entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação.

O método da bissecção consiste em repetir os passos descritos a seguir, até que se atinja a precisão desejada. Cada repetição é chamada de **iteração**:

1°) dado um intervalo, calcula-se o valor da função em cada extremo do intervalo;

2°) calcula-se o ponto médio do intervalo, m, e em seguida $f(m)$;

3°) o extremo do intervalo no qual a função tem sinal oposto ao de $f(m)$ permanece, o outro extremo é substituído por m;

4°) um novo intervalo é formado, e voltamos ao 1° passo da iteração.

O critério de parada apresenta pequenas variações neste método, bem como a escolha da resposta, de acordo com a fonte consultada.

Sejam ε o erro máximo admitido, $[a_k ; b_k]$ o intervalo considerado na iteração k e m_k o ponto médio deste intervalo.

Para ARENALES e DAREZZO[1], o critério de parada é $|f(m_k)| \leq \varepsilon$ ou (erro relativo) $< \varepsilon$, o que ocorrer primeiro, sendo o erro relativo igual a $\frac{|m_k - m_{k-1}|}{|m_k|}$. A aproximação (resposta) é então m_k, truncado na ordem decimal dada por ε.

Por exemplo, se $\varepsilon < 10^{-3}$, m_k será truncado na terceira ordem decimal; se $\varepsilon < 10^{-6}$, m_k será truncado na sexta ordem decimal. Lembrando que truncar significa "cortar" ou "abandonar" as ordens decimais posteriores, sem arredondamento algum. O número 1,324 truncado na segunda ordem decimal é igual a 1,32, assim como o número 1,329.

Já para RUGGIERO e LOPES[2], o critério de parada é $(b_k - a_k) < \varepsilon$, e a resposta pode ser qualquer $x \in [a_k ; b_k]$, em geral o ponto médio, truncado na ordem decimal dada por ε.

Em GALVÃO e NUNES[3], e também segundo OLIVEIRA[4], o critério de parada é $(b_k - a_k)/2 < \varepsilon$, e a resposta é o ponto médio de $[a_k ; b_k]$, truncado na ordem decimal dada por ε.

Adotaremos neste trabalho o critério de parada $|f(m_k)| \leq \varepsilon$, sendo $\varepsilon < 0{,}01$.

[1]ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

[2]RUGGIERO, Márcia. A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

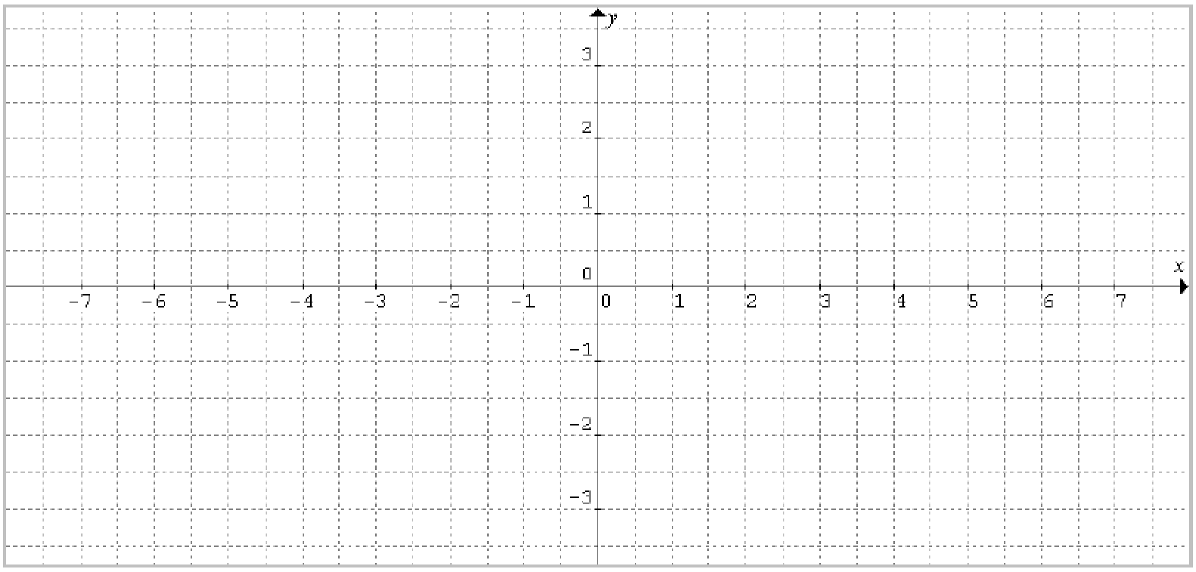
[3]GALVÃO, Lauro César; NUNES, Luiz Fernando. *Apostila de Cálculo Numérico*. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://www.pessoal.utfpr.edu.br/laurogalvao/aulas/calculo_numerico/.../calc_num_a.pdf>. Acesso em: set. 2009.

[4]OLIVEIRA, Raymundo. *Curso de Cálculo Numérico*. Rio de Janeiro: UFRJ. Disponível em: <http://www.raymundodeoliveira.eng.br/programa.html>. Acesso em: set. 2009.

3) Encontre a aproximação de uma das raízes reais das funções a seguir, com erro menor do que 0,01.

a) $f(x) = e^x - x^2$

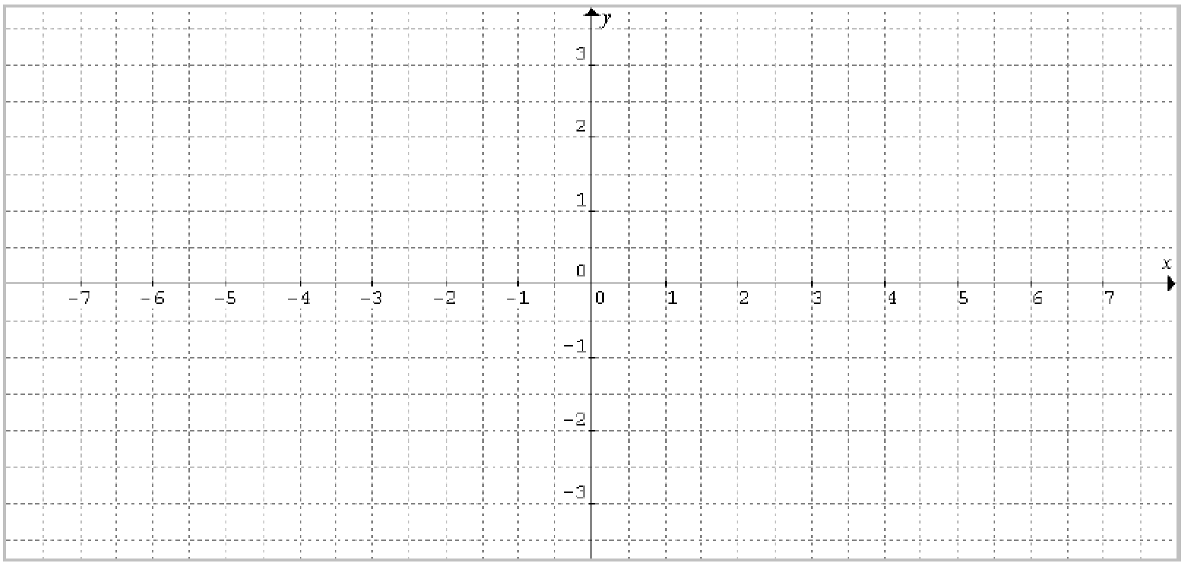
Aproximação inicial: localizar a raiz real negativa entre dois números inteiros, usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

b) $f(x) = ln(x) + x - 2$

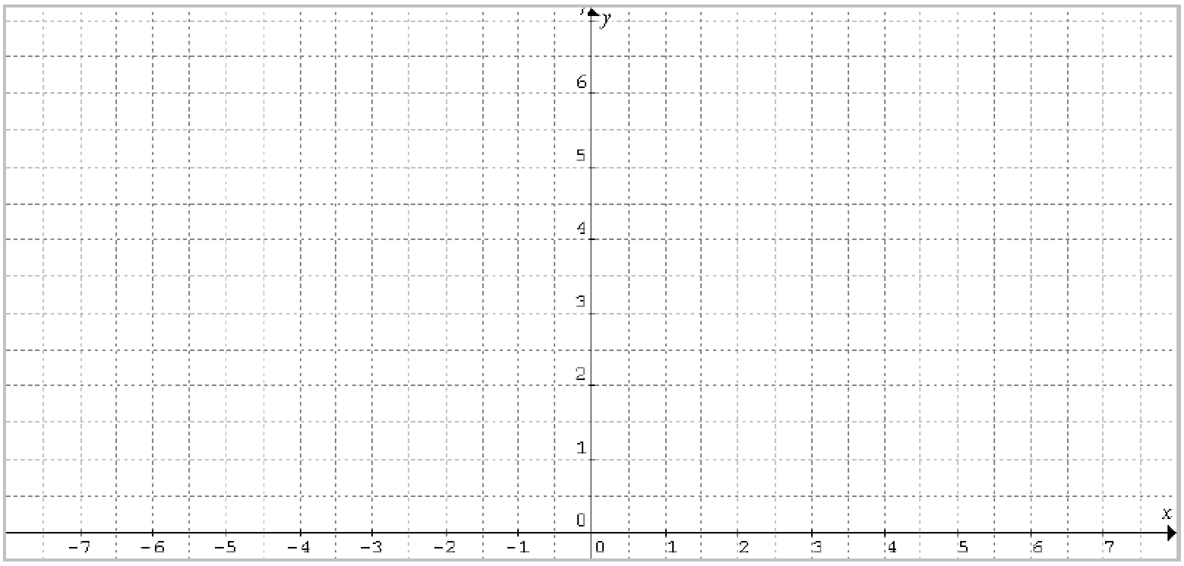
Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

c) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

Aproximação inicial: localizar a raiz real positiva entre dois números inteiros usando o método gráfico.



Refinamento: utilizar o método da bissecção para obter uma aproximação com erro inferior a 0,01.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNOS: ALINE NOGUEIRA PIRES E ANDRÉ LUIZ DA CUNHA ALVES

LISTA 2

Encontre aproximações para as raízes reais das funções a seguir, com erro inferior a 0,01.

Para isto, siga as instruções:

- Faça o(s) gráfico(s) usando o GRAPHMÁTICA, copie–os e cole–os neste arquivo.
- Escreva quantas são as raízes reais e localize cada uma em um intervalo.
- Usando a planilha do Excel dada, encontre as aproximações com erro inferior a 0,01.
- Escreva todas as raízes da função, exatas ou aproximadas com erro inferior a 0,01.

Acompanhe o exemplo:

$f(x) = e^x + x^2 - 2$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

Agora, faça o mesmo para cada função.

1) $f(x) = 2^x - 2x - 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

2) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

3) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

4) $f(x) = ln(x) + x^3$

a) GRÁFICO:

b) NÚMERO DE RAÍZES REAIS E INTERVALOS EM QUE ESTÃO LOCALIZADAS:

c) RAÍZES REAIS:

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.
Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Graphmática, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Em termos de conhecimento do *software* Excel, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Quanto à duração da primeira parte (primeiro dia) das atividades:
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Quanto à duração da segunda parte (segundo dia) das atividades:
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

O que você destacaria como mais interessante?
( ) Ter aprendido uma forma diferente de resolver equações.
( ) Ter utilizado recursos tecnológicos (calculadora, computador) para aprender.
( ) Os dois itens acima, sem ordem de preferência.
( ) Nenhum dos itens anteriores.

Se quiser, escreva aqui sua opinião ou sugestão para a melhoria de nosso trabalho.
OBRIGADO POR SUA PARTICIPAÇÃO!

ANEXOS

ANEXO A: MATEMÁTICA POR ASSUNTO

capítulo **5**

APROFUNDAMENTO SOBRE FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

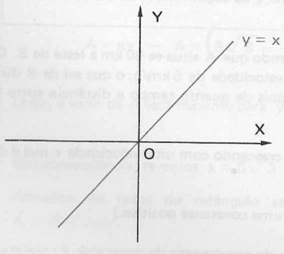
Vamos agora complementar as noções iniciais sobre funções apresentadas até aqui. Teremos um primeiro contato com outros tipos de função, além das polinomiais do 1º e 2º graus, e trataremos de certas transformações básicas sobre funções, como a composição e a inversão. Nossa complementação, no entanto, será ministrada em nível introdutório, como ocorreu com as noções iniciais, tornando-se mais efetiva apenas no final do percurso pelas três séries do 2º grau, em outro volume. Ali, então, após estudarmos funções de variados tipos, como as trigonométricas, a exponencial, a logarítmica e outras, teremos condições de tirar proveito dos exemplos analisados, alcançando um real aprofundamento.

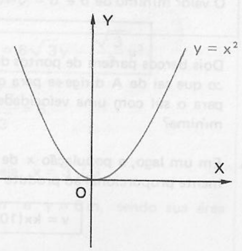
ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS

Função $f(x) = kx^n$ (*n* natural, *k* constante, não-nulos)

Comecemos com funções $f(x) = x^n$

Já sabemos construir os gráficos correspondentes nos casos em que n = 1 ou n = 2:

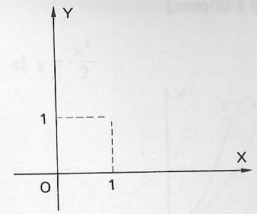




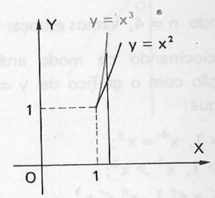
Sendo n = 3, vamos esboçar o gráfico de $\boxed{y = x^3}$

Comparando com $y = x^2$, temos:

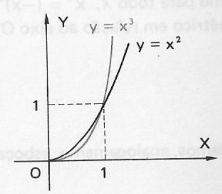
- se $x = 1$, então $x^3 = x^2 = 1$ (ambos os gráficos passam pelo ponto (1; 1));



- se $x > 1$, então $x^3 > x^2$ (o gráfico de $y = x^3$ está acima do de $y = x^2$);



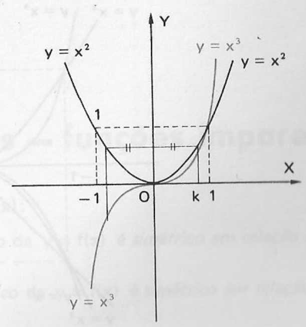
- se $0 < x < 1$, então $x^3 < x^2$ (o gráfico de $y = x^3$ está abaixo do de $y = x^2$);



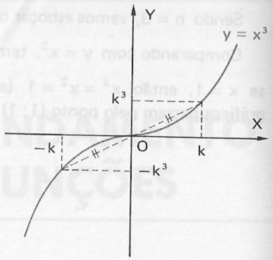
- enquanto em $y = x^2$, a valores simétricos de *x* corresponde o mesmo valor de *y*, em $y = x^3$, a valores simétricos de *x* correspondem valores simétricos de *y*:

$$y = x^2 \begin{cases} \text{se } x = k, & y = k^2 \\ \text{se } x = -k, & y = k^2 \end{cases}$$

$$y = x^3 \begin{cases} \text{se } x = k, & y = k^3 \\ \text{se } x = -k, & y = (-k)^3 = -k^3 \end{cases}$$



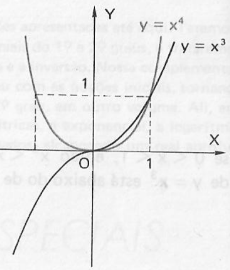
(O gráfico de $y = x^3$ não é simétrico em relação ao eixo OY; é simétrico em relação à origem.)



Sendo $n = 4$, vamos esboçar o gráfico de $\boxed{y = x^4}$

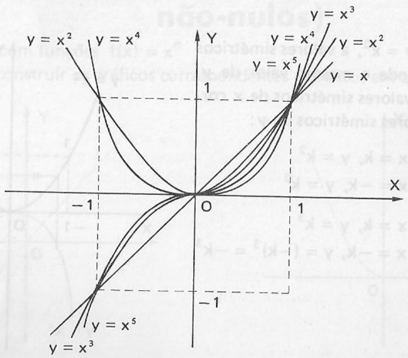
Raciocinando de modo análogo, na comparação com o gráfico de $y = x^3$ concluímos que:

- se $x = 1$, $x^4 = x^3$;
- se $x > 1$, $x^4 > x^3$;
- se $0 < x < 1$, $x^4 < x^3$.



Como para todo x, $x^4 = (-x)^4$, o gráfico é simétrico em relação ao eixo OY.

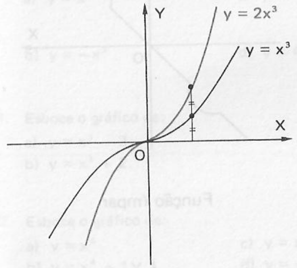
Podemos, analogamente, esboçar o gráfico de $\boxed{y = x^n}$ para todo natural n:



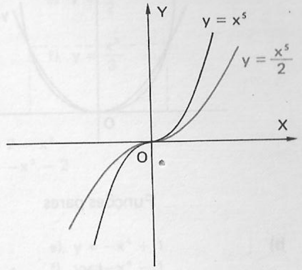
Para obter o gráfico de $y = kx^n$, construímos o de $y = x^n$ e multiplicamos, ponto a ponto, os valores de y por k.

Exemplos

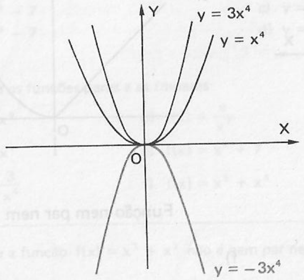
a) $y = 2x^3$



c) $y = \frac{x^5}{2}$



b) $y = -3x^4$



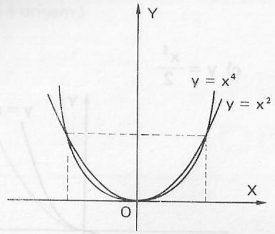
Simetria — funções pares — funções ímpares

Em geral, para uma função qualquer $y = f(x)$:

- se $f(-x) = f(x)$ para todo x, então o gráfico de $y = f(x)$ é *simétrico em relação ao eixo OY* e a função é chamada *função par*;
- se $f(-x) = -f(x)$ para todo x, então o gráfico de $y = f(x)$ é *simétrico em relação à origem* e a função é chamada *função ímpar*.

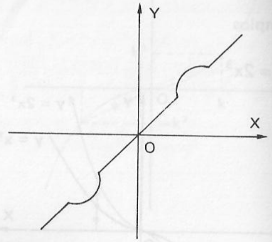
Exemplos

a)



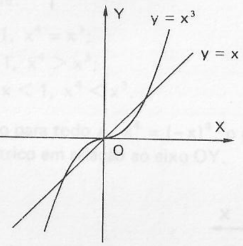
Funções pares

d)



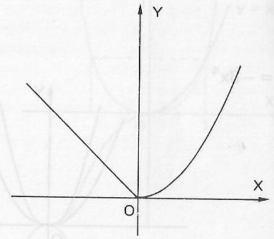
Função ímpar

b)



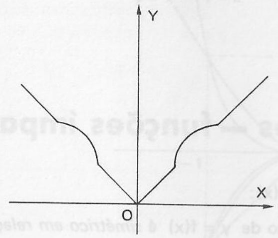
Funções ímpares

e)



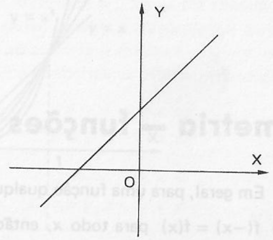
Função nem par nem ímpar

c)



Função par

f)



Função nem par nem ímpar

EXERCÍCIOS

290. Esboce o gráfico de:

a) $y = x^3$
b) $y = -x^3$
c) $y = -2x^3$
d) $y = 4x^3$
e) $y = \frac{x^3}{2}$
f) $y = \frac{x^3}{3}$

291. Esboce o gráfico de:

a) $y = x^3 - 2$
b) $y = x^3 + 2$
c) $y = 2 - x^3$
d) $y = -x^3 - 2$

292. Esboce o gráfico de:

a) $y = x^4$
b) $y = x^4 + 1$
c) $y = x^4 - 1$
d) $y = -x^4$
e) $y = -x^4 + 1$
f) $y = -x^4 - 1$

293. Esboce o gráfico de:

a) $y = 2x^3 - 7$
b) $y = 2x^5 - 7$
c) $y = 7 - 2x^3$
d) $y = 7 - 2x^5$

294. Identifique as funções pares e as ímpares:

a) $f(x) = x^8$
b) $f(x) = x^7$
c) $f(x) = \frac{3}{x^4}$
d) $f(x) = \frac{\pi}{x^7}$
e) $f(x) = x^4 + 7$
f) $f(x) = x^3 + x^5$
g) $f(x) = x^4 - x^6$
h) $f(x) = x^2 + x^4 + 7$

295. Mostre que a função $f(x) = x^3 + x^2$ não é nem par nem ímpar.

Solução

Calculando $f(-x)$, obtemos:

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$

Não é verdade, então, que $f(-x) = f(x)$ para todo x, nem temos $f(-x) = -f(x)$ para todo x; logo, a função não é nem par nem ímpar.

296. Mostre que a função $f(x) = x^3 + 7$ não é nem par nem ímpar.

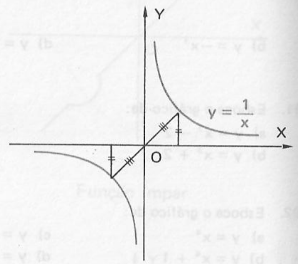
297. Identifique as funções pares, as funções ímpares e as que não são nem pares nem ímpares:

a) $f(x) = x^3 + x^5 + 1$
b) $f(x) = x^4 - x^6 + 1$
c) $f(x) = x^4 - x^6 + 7$
d) $f(x) = x^3 + x^4 + 7$
e) $f(x) = x^3 + x^5 + 9$
f) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$

Função $f(x) = \frac{k}{x^n}$

Naturalmente, para funções $f(x) = \frac{k}{x^n}$ (k constante não-nula, n natural) não podemos ter $x = 0$, ou seja, o domínio é $D = \mathbb{R}^*$.

Começando com o gráfico de $\boxed{y = \frac{1}{x}}$, temos:

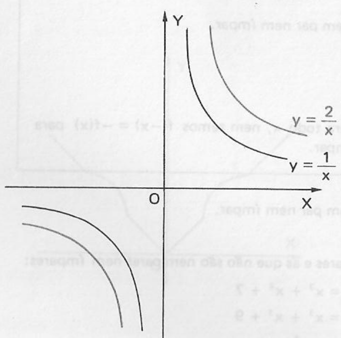


- os valores de y são inversamente proporcionais aos de x;
- como $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$, o gráfico é simétrico em relação à origem.

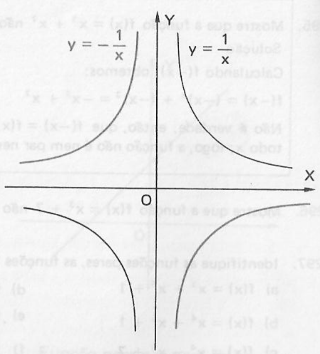
No caso de $\boxed{y = \frac{k}{x}}$, podemos obter o gráfico correspondente a partir do de $y = \frac{1}{x}$, multiplicando os valores de y por k, ponto a ponto.

Exemplos

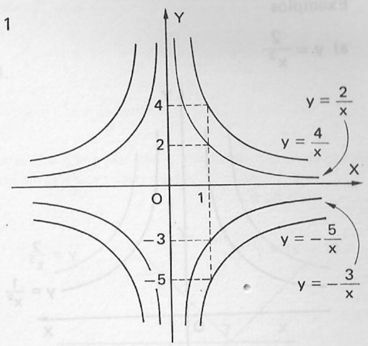
a) $y = \frac{2}{x}$



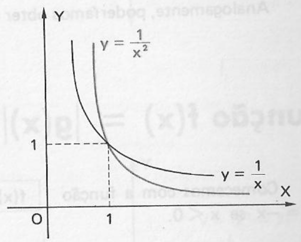
b) $y = -\frac{1}{x}$



c) No gráfico de $y = \frac{k}{x}$, quando $x = 1$ temos $y = k$.

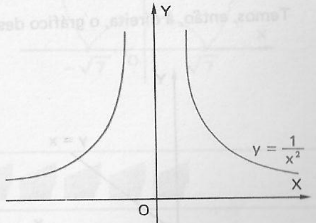


Para a função $\boxed{y = \frac{1}{x^2}}$ comparando com o gráfico de $y = \frac{1}{x}$, concluímos que:



- ambos passam por (1; 1);
- quando $x > 1$, $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$;
- quando $0 < x < 1$, $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$.

Como $y = \frac{1}{x^2}$ é uma função par, temos:



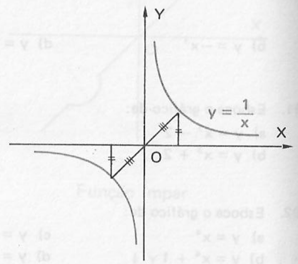
O gráfico de $\boxed{y = \frac{k}{x^2}}$ pode ser obtido a partir do de $y = \frac{1}{x^2}$, multiplicando ponto a ponto os valores de y por k.

Função $f(x) = \dfrac{k}{x^n}$

Naturalmente, para funções $f(x) = \dfrac{k}{x^n}$ (k constante não-nula, n natural) não podemos ter $x = 0$, ou seja, o domínio é $D = \mathbb{R}^*$.

Começando com o gráfico de $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$, temos:

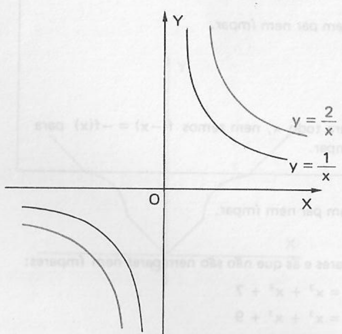
- os valores de y são inversamente proporcionais aos de x;
- como $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -f(x)$, o gráfico é simétrico em relação à origem.



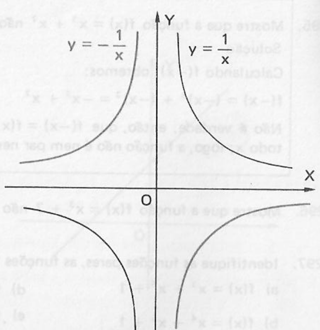
No caso de $\boxed{y = \dfrac{k}{x}}$, podemos obter o gráfico correspondente a partir do de $y = \dfrac{1}{x}$, multiplicando os valores de y por k, ponto a ponto.

Exemplos

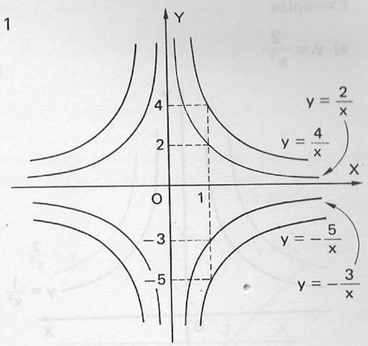
a) $y = \dfrac{2}{x}$



b) $y = -\dfrac{1}{x}$

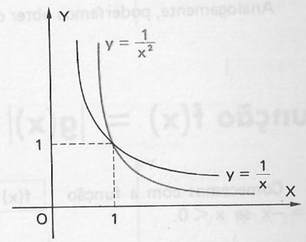


c) No gráfico de $y = \dfrac{k}{x}$, quando $x = 1$ temos $y = k$.

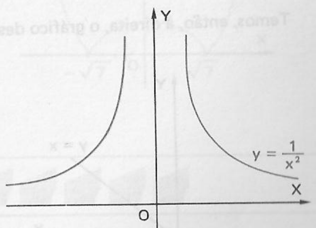


Para a função $\boxed{y = \dfrac{1}{x^2}}$ comparando com o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$, concluímos que:

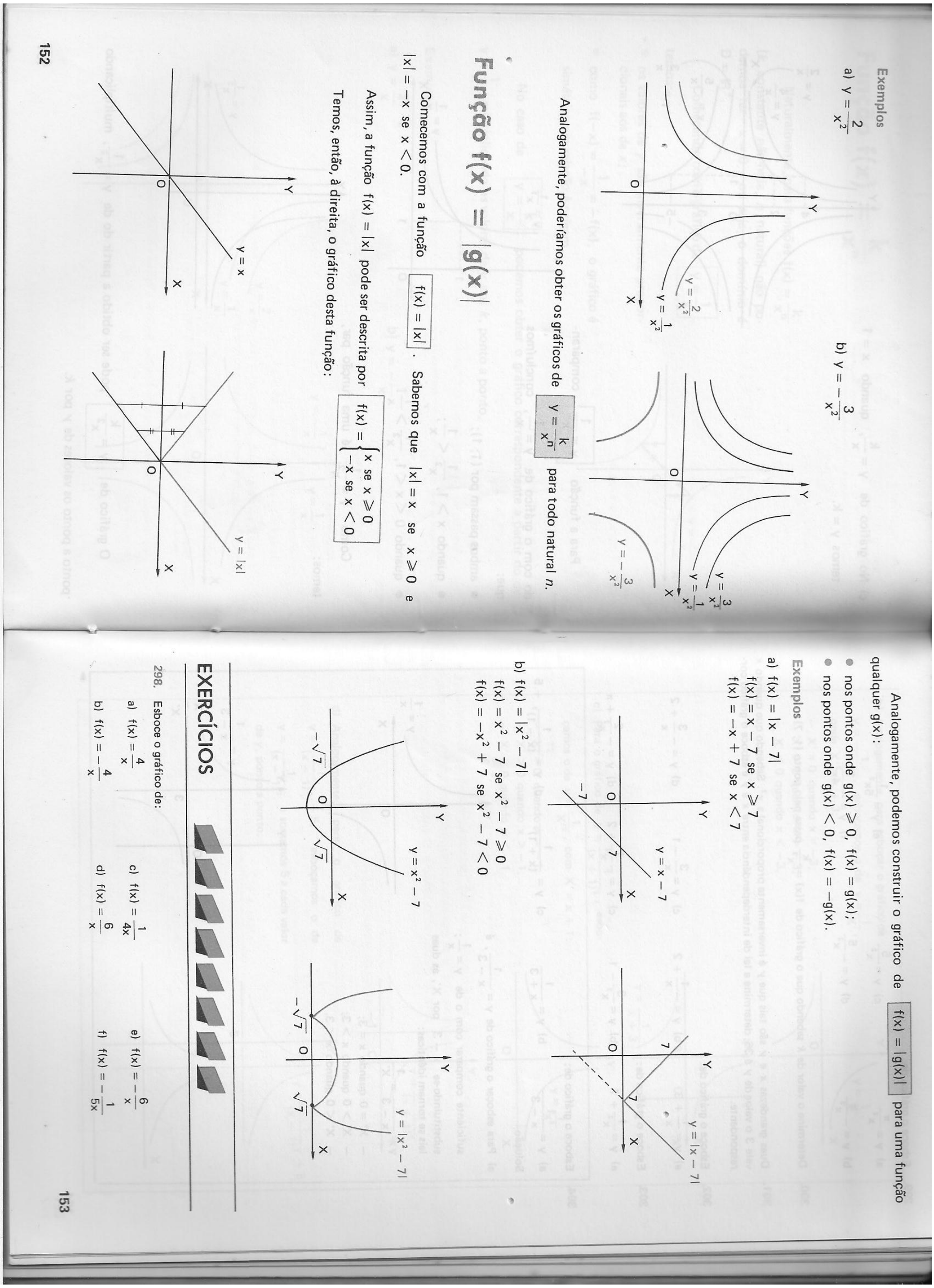
- ambos passam por $(1; 1)$;
- quando $x > 1$, $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$;
- quando $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{x}$.



Como $y = \dfrac{1}{x^2}$ é uma função par, temos:



O gráfico de $\boxed{y = \dfrac{k}{x^2}}$ pode ser obtido a partir do de $y = \dfrac{1}{x^2}$, multiplicando ponto a ponto os valores de y por k.



Exemplos

a) $y = \frac{2}{x^2}$

b) $y = -\frac{3}{x^2}$

Analogamente, poderíamos obter os gráficos de $\boxed{y = \frac{k}{x^n}}$ para todo natural n.

Função $f(x) = |g(x)|$

Comecemos com a função $\boxed{f(x) = |x|}$. Sabemos que $|x| = x$ se $x \geqslant 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$.

Assim, a função $f(x) = |x|$ pode ser descrita por $\boxed{f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$

Temos, então, à direita, o gráfico desta função:

152

Analogamente, podemos construir o gráfico de $\boxed{f(x) = |g(x)|}$ para uma função qualquer $g(x)$:

- nos pontos onde $g(x) \geqslant 0$, $f(x) = g(x)$;
- nos pontos onde $g(x) < 0$, $f(x) = -g(x)$.

Exemplos

a) $f(x) = |x - 7|$
$f(x) = x - 7$ se $x \geqslant 7$
$f(x) = -x + 7$ se $x < 7$

b) $f(x) = |x^2 - 7|$
$f(x) = x^2 - 7$ se $x^2 - 7 \geqslant 0$
$f(x) = -x^2 + 7$ se $x^2 - 7 < 0$

EXERCÍCIOS

298. Esboce o gráfico de:

a) $f(x) = \frac{4}{x}$ b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{4x}$ d) $f(x) = \frac{6}{x}$ e) $f(x) = -\frac{6}{x}$ f) $f(x) = -\frac{1}{5x}$

153

Fonte:

MACHADO, N. J. *Matemática por Assunto*. V.1. Rio de Janeiro: Scipione, 1988.

ANEXO B: MÉTODO DA BISSECÇÃO

Cálculo de Raízes de Funções

Introdução

O cálculo de raízes de funções encontra uso na obtenção da solução de uma ampla gama de problemas de engenharia. Usualmente, a forma analítica de problemas matemáticos $y = f(x)$ requer o conhecimento dos valores da variável independente x para os quais f(x) = 0.

Por exemplo, considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, que é um polinômio de 2º grau com coeficientes a, b, e c e que possui duas raízes. Essas raízes podem ser determinadas pela conhecida fórmula de Baskhara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para uma equação particular $f(x) = x^2 - 5x + 6$, temos que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, resultando na solução:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - (4).(1).(6)}}{(2).(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - (4).(1).(6)}}{(2).(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Substituindo-se o valor das raízes na expressão de $f(x) = x^2 - 5x + 6$, veremos que tanto x_1, quanto x_2 fazem com que esta função se anule, ou seja, que $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$.

As equações polinomiais também conduzem a soluções cujo domínio seja o dos números complexos. Por exemplo, a equação de 2º grau $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta as seguintes raízes:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - (4).(1).(2)}}{(2).(1)} = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{-1}}{2} = 2 + \mathrm{i}$$
$$\mathrm{x}_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - (4).(1).(2)}}{(2).(1)} = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{-1}}{2} = 2 - \mathrm{i}$$

sendo que $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Na prática, nem sempre um problema pode ser equacionado na forma de uma função que possui uma solução analítica como a função de 2º grau. As funções transcendentes, por exemplo, não possuem fórmula analítica para o cálculo das raízes. Nesses casos, pode-se calcular as raízes através de dois métodos:

- Método gráfico
- Métodos numéricos

Nesta nota de aula, trataremos apenas dos métodos para o cálculo de raízes reais, embora os métodos numéricos possam calcular raízes complexas também.

Método Gráfico

As funções transcendentes podem ter raízes reais e complexas. Entretanto, diferentemente das funções polinomiais, não se pode determinar nem se a função possui raiz real e nem a sua quantidade. O método gráfico é o procedimento inicial adotado para estimar as raízes e como a determinação da raiz com precisão não pode ser feita com este método, deve-se utilizar um método numérico para "refinar" a solução, isto é, melhorar a precisão do valor calculado da raiz.

Vamos mostrar a avaliação da raiz de uma função pelo método gráfico através do exemplo de uma função transcendente do tipo: $f(x) = e^x - 3x$, cujo gráfico está mostrado na Fig. 3.1.

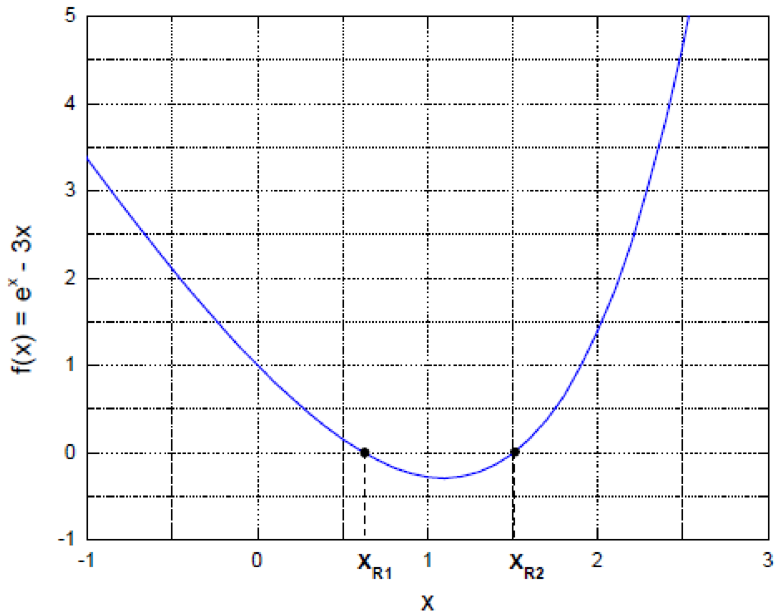


Fig. 3.1 - Gráfico da função $f(x) = e^x - 3x$.

No gráfico observa-se duas raízes indicadas como x_{R1} e x_{R2} e localizadas, respectivamente, nos intervalos [0,5;1] e [1,5;2]. Uma estimativa grosseira das raízes seria $x_{R1} \cong 0,6$ e $x_{R2} \cong 1,5$. O valor com maior precisão será calculado pelos métodos numéricos.

Método da Bisseção

O método da bisseção é um método conceitualmente simples e baseia-se na idéia de "cercar" a raiz x_R por dois valores: um à esquerda da raiz (x_E) e outro à direita (x_D), formando um intervalo que vai ser continuamente reduzido até que a largura final do intervalo seja tão pequena quanto o erro absoluto da raiz. A redução contínua da largura do intervalo é feita dividindo-se o intervalo em dois e definindo um valor médio x_M.pela fórmula:

$$x_M = \frac{(x_E + x_D)}{2} \tag{3.1}$$

O valor médio x_M estabelece dois sub-intervalos: um, entre x_E e x_M, outro entre x_M e x_D. A raiz x_R estará em um dos dois sub-intervalos. Para determinar em qual dos dois sub-intervalos está localizada a raiz, calculamos $f(x_E)$, $f(x_D)$ e $f(x_M)$ e realizamos a seguinte comparação:

Se sinal[$f(x_M)$] = sinal[$f(x_E)$], então
    x_R está no intervalo [x_E; x_M]
senão
    x_R está no intervalo [x_M; x_D]

Este procedimento está ilustrado para os dois casos nos gráficos da Fig. 3.2 e 3.3. Na Fig. 3.2 estão mostrados os valores [x_E, $f(x_E)$] e [x_D, $f(x_D)$], respectivamente à esquerda e à direita da raiz x_R. Utilizando a equação (3.1) obtém-se o valor x_M, que para este caso está localizado à esquerda da raiz. A verificação algébrica deste fato é feita comparando-se o sinal de $f(x_M)$, que é positivo assim como é positivo o sinal de $f(x_E)$.

O gráfico da Fig. 3.3 ilustra o caso em que o valor calculado de x_M está localizado à direita da raiz x_R, porque, algebricamente, o sinal de $f(x_M)$ é igual ao sinal de $f(x_D)$.

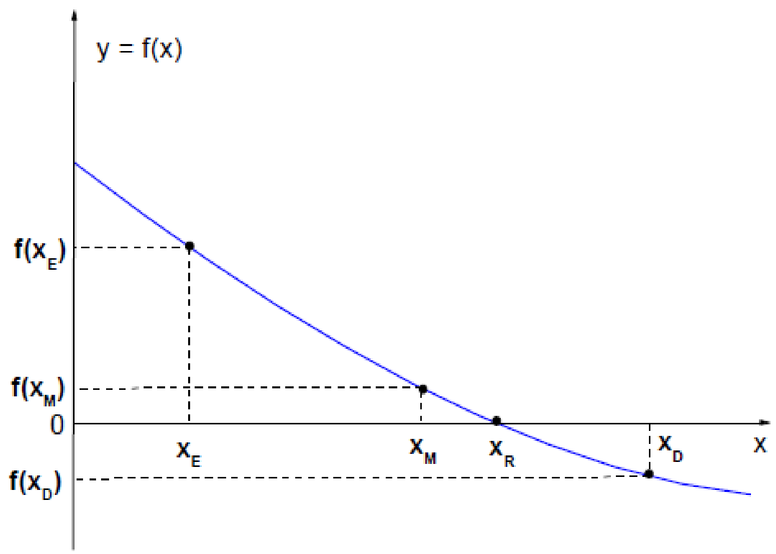


Fig. 3.2 - Método da bisseção para o caso do valor x_M estar localizado à esquerda da raiz x_R

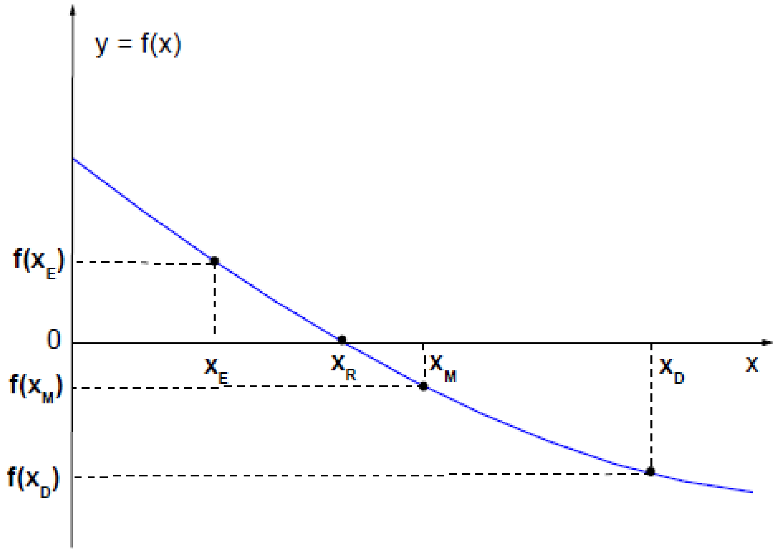


Fig. 3.3 - Método da bisseção para o caso do valor x_M estar localizado à direita da raiz x_R

Uma vez determinado em qual dos dois sub-intervalos está localizada a raiz, atribui-se o valor de x_M ao valor de x_E ou x_D, conforme o resultado do teste algébrico descrito anteriormente e re-escrito na forma:

Se sinal[$f(x_M)$] = sinal[$f(x_E)$], então

$x_E \leftarrow x_M$

senão

$x_D \leftarrow x_M$

Em linguagem C, o código para este teste é descrito por:

```
if (signbit(f(xm) == signbit(f(xe))) {
    xe = xm;
}
else {
    xd = xm
}
```

Uma vez estabelecido o novo intervalo [x_E; x_D], repete-se o cálculo do valor de x_M e aplica-se novamente o teste para verificação do sub-intervalo em que está localizado a raiz. Atribui-se o valor de x_M a x_E ou x_D , conforme o resultado do teste e redefine-se o novo intervalo, conforme ilustra a Fig. 3.4. Os cálculos e testes se repetem até uma determinada variável alcançar um critério de convergência.

A este procedimento de cálculo automático denomina-se **ITERAÇÃO** (não confundir com interação, que tem outro significado) ou cálculo iterativo, que se baseia na repetição de cálculos à partir de valores iniciais arbitrariamente estabelecidos. Do dicionário Michaelis:

i.te.ra.ção *sf* (*lat iteratione*) Ato de iterar ou repetir.

in.te.ra.ção *sf* (*inter+ação*) **1** > Ação recíproca de dois ou mais corpos uns nos outros. **2** Atualização da influência recíproca de organismos inter-relacionados. **3** Ação recíproca entre o usuário e um equipamento (computador, televisor etc.).

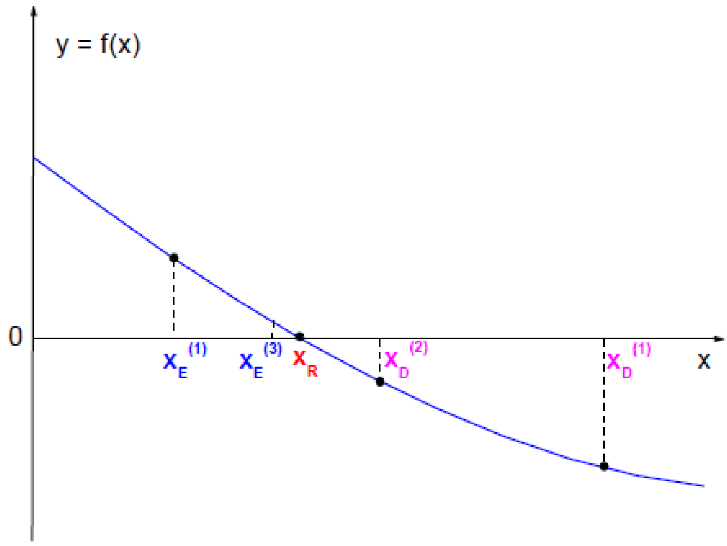


Fig. 3.4 - Determinação de intervalos sucessivos em torno da raiz x_R pelo método da bisseção. Os expoentes numéricos indicam a seqüência de iteração.

O cálculo iterativo continua até que o seguinte critério de convergência seja satisfeito:

$$|x_E - x_D| < \varepsilon \tag{3.2}$$

no qual ε é o erro absoluto especificado. Quando o critério for satisfeito, a raiz x_R será dada por:

$$x_R = x_M \pm \varepsilon \tag{3.3}$$

Observar que o erro ε estabelece o número de casas decimais de precisão. Assim, se quisermos calcular a raiz de uma função com precisão de sete casas decimais, estabelece-se que $\varepsilon = 10^{-7}$.

Exemplo

Vamos ilustrar a aplicação do método da bisseção no cálculo da raiz da função $f(x) = e^x - 3x$ localizada no intervalo [0; 1], com erro de 10^{-5}.

Solução

A função $f(x) = e^x - 3x$, como visto anteriormente, possui duas raízes, sendo que será calculada a raiz localizada no intervalo [0; 1]. Assim, esses valores serão os valores iniciais de x_E e x_D. Como o erro é 10^{-5}, vamos apresentar os resultados do cálculo com cinco casas decimais na tabela 3.1. A 1ª coluna contém o contador do número de iterações, denotado pela letra i. O conteúdo das outras colunas estão identificadas pelo nome das variáveis na 1ª linha.

Tabela 3.1 - Resultado do cálculo da raiz da função $f(x) = e^x - 3x$ no intervalo [0;1] pelo método da bisseção

i	x_E	x_D	x_M	$f(x_E)$	$f(x_D)$	$f(x_M)$	erro
0	0,00000	1,00000	0,50000	1,00000	-0,28172	0,14872	1,00000
1	0,50000	1,00000	0,75000	0,14872	-0,28172	-0,13300	0,50000
2	0,50000	0,75000	0,62500	0,14872	-0,13300	-0,00675	0,25000
3	0,50000	0,62500	0,56250	0,14872	-0,00675	0,06755	0,12500
4	0,56250	0,62500	0,59375	0,06755	-0,00675	0,02952	0,06250
5	0,59375	0,62500	0,60938	0,02952	-0,00675	0,01116	0,03125
6	0,60938	0,62500	0,61719	0,01116	-0,00675	0,00214	0,01563
7	0,61719	0,62500	0,62109	0,00214	-0,00675	-0,00232	0,00781
8	0,61719	0,62109	0,61914	0,00214	-0,00232	-0,00009	0,00391
9	0,61719	0,61914	0,61816	0,00214	-0,00009	0,00103	0,00195
10	0,61816	0,61914	0,61865	0,00103	-0,00009	0,00047	0,00098
11	0,61865	0,61914	0,61890	0,00047	-0,00009	0,00019	0,00049
12	0,61890	0,61914	0,61902	0,00019	-0,00009	0,00005	0,00024
13	0,61902	0,61914	0,61908	0,00005	-0,00009	-0,00002	0,00012
14	0,61902	0,61908	0,61905	0,00005	-0,00002	0,00001	0,00006
15	0,61905	0,61908	0,61906	0,00001	-0,00002	0,00000	0,00003
16	0,61905	0,61906	0,61906	0,00001	0,00000	0,00001	0,00002
17	0,61906	0,61906	0,61906	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001
18	0,61906	0,61906	0,61906	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

A raiz calculada após 18 iterações com $\varepsilon < 10^{-5}$ é igual a 0,61906. Este resultado é exato com cinco casas decimais. Observar que quando o critério de convergência é atingido, os valores de x_E, x_D e x_M são iguais com cinco casas decimais.

Fonte:

SHIGUE, C. Y. *Notas de Aula de Cálculo Numérico*. Atualizado em 22 de janeiro de 2009. Disponível em: <http://www.alunos.eel.usp.br/numerico/notas.html>. Acesso em: set. 2009.