INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O USO DE FRACTAIS NO ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2011

MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA

O USO DE FRACTAIS NO ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof[a] Esp. Ana Paula Rangel de Andrade
Coorientadora: Prof[a] MSc. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2011

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

A447u Almeida, Mikelle Rodrigues de.
O uso de fractais no estudo das progressões geométricas / Mikelle Rodrigues de Almeida – Campos dos Goytacazes (RJ) : [s.n.], 2011.
117 f. : il.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade.
Co-orientador: Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos-Centro. Campos dos Goytacazes, RJ, 2011.
Bibliografia: f. 88 - 90.

1. Progressões geométricas (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Fractais (Ensino médio) – Estudo e ensino . 3. Ensino auxiliado por computador. I. Andrade, Ana Paula Rangel de, orient. II. Azevedo, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues, co-orient. III. Título.

CDD – 515.24

MIKELLLE RODRIGUES DE ALMEIDA

O USO DE FRACTAIS NO ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 7 de julho de 2011.

Banca Avaliadora:

Prof[a] Ana Paula Rangel de Andrade (orientadora)
Especialista em Educação Matemática/FAFIC
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

----

Prof[a] Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo (coorientadora)
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

----

Prof[a] Gilmara Teixeira Barcelos
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

----

Prof[a] Mônica Souto da Silva Dias
Doutora em Educação Matemática/PUC/SP
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por ter me dado forças para prosseguir na caminhada e permitido realizar mais este sonho.

As minhas orientadoras Ana Paula e Carmem Lúcia, pela dedicação e paciência na orientação deste trabalho monográfico, pelo exemplo de competência e pelas valiosas orientações e conselhos que me ajudaram a crescer.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, que contribuíram, cada um a seu modo, para minha formação.

Às professoras Gilmara e Mônica, pelas contribuições feitas a este trabalho monográfico.

Aos meus pais, principalmente à minha mãe Maria Neide, pelo amor, carinho e pelo apoio em todos os momentos, mas principalmente porque me deram a educação sem a qual eu não teria chegado a lugar algum.

Aos meus irmãos, Michelle e Maurício, pela força, amizade e incentivo.

Aos meus sobrinhos, Brayan, Julia e Pietro, que me proporcionaram alegrias em momentos difíceis.

Ao meu noivo, Márcio, pelo amor, incentivo, paciência e companheirismo.

A todos os meus amigos, de modo especial a Carolina, Débora, Larissa e Paola que me apoiaram e incentivaram durante a realização desta pesquisa.

Aos meus colegas de curso, que compartilharam momentos de saber e amizade no decorrer dessa trajetória.

A Felipe Rodrigues Azevedo, pela contribuição na tradução do inglês.

Aos participantes do teste exploratório e da experimentação das atividades, que contribuíram para a realização deste trabalho.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a concretização desta pesquisa.

Ninguém começa a ser professor numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanente na prática e na reflexão sobre a prática.

Paulo Freire

RESUMO

Vivemos num mundo informatizado e a Matemática precisa ser trabalhada em sala de aula com os recursos de que dispõe o professor nesse universo de tecnologias. Essa nova linguagem aproxima o aluno do conteúdo à medida em que dialoga com o mesmo, utilizando uma ferramenta naturalmente atraente para ele. Dessa forma, se faz necessária a atualização dos professores no que tange ao surgimento de novas ciências como, por exemplo, a Geometria Fractal, e ao avanço das tecnologias digitais, como os *softwares*. Desenvolveu-se então, este trabalho monográfico com o objetivo de investigar o processo de ensino e aprendizagem das Progressões Geométricas por meio da Geometria Fractal, utilizando o *software* Geometricks para a construção dos fractais. Sendo assim, foi realizada uma pesquisa qualitativa na qual foi usado o método de estudo de caso, que teve como entidade estudada um grupo de alunos da 2ª série do Ensino Médio. Foram elaboradas e experimentadas atividades que proporcionam a construção, exploração e análise dos fractais, favorecendo generalizações para o termo geral e para soma dos termos de uma Progressão Geométrica. Os dados foram obtidos por meio de observações e aplicação de questionário. A análise dos mesmos aponta que este estudo contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem do tema proposto.

Palavras-chave: Fractais. Progressão Geométrica. Tecnologia.

ABSTRACT

We live in a computerized world and Mathematics needs to be addressed in the classroom with all the resources available to the teachers in this technological universe. This new language has a new approach to the students, bringing it closer to the subjects they are learning, once it establishes a dialog between them by using tools which are naturally attractive to them. In this scenario, is necessary the update of the teachers when it comes to the emergence of new sciences, for example, the Fractal Geometry, and the advance of digital technologies, like softwares. This thesis has the objective to study the teaching and learning process of Geometric Progressions through Fractal Geometry, using the software Geometricks to build fractals. So, was conducted a qualitative research in which was applied the case study method, the entity studied was a group of high school students in 2nd year. Were prepared and experienced many activities that provide the construction, exploration and analysis of fractals, favoring the generalization of the general term and the sum of the terms of a Geometric Progression. The data was obtained through observation and application of a questionnaire. The analysis of those shows that this study has contributed to the process of teaching and learning of the proposed topic.

Keywords: Fractals. Geometric Progression. Technology.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática está presente em diversas situações do cotidiano como, por exemplo, no apoio a outras áreas do conhecimento, servindo de instrumento para lidar com diferentes situações ou, mesmo, como forma de desenvolver habilidades de pensamento (BRASIL, 2002).

Tal qual em outras áreas, a Matemática passa por transformações. Sendo necessária a constante atualização dos professores no que tange à diversidade e aos avanços da mesma. Esta atualização faz com que o professor proporcione ao aluno um aprendizado de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos. O professor, à medida que instrumentaliza e estrutura o pensamento do aluno, capacita-o "para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação" (BRASIL, 2002, p. 111).

Decorrente das transformações ocorridas na Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) "[...] apontam a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana" (BRASIL, 1998, p. 19). Este documento cita o trabalho com fractais:

> O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos — teorias matemáticas — evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consciência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso — a Estatística e a probabilidade — e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjunto de fractais (BRASIL, 1998, p. 25).

Sallum (2005) mostra possibilidades de introduzir os fractais no Ensino Médio, citando alguns conceitos que podem ser trabalhados com o tema Fractais. De acordo com a autora:

> A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular

> áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia [sic] intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (SALLUM, 2005, p.1).

De forma análoga, Baldovinotti (2008) afirma que diversos conceitos em Matemática como área, perímetro, progressões, logaritmos entre outros podem ser trabalhados por meio dos fractais.

Segundo esse mesmo autor, com o desenvolvimento da Informática o estudo dos fractais ganhou impulso e a utilização dos *softwares* viabiliza a exploração desses e torna o tema mais enriquecedor para o aluno.

Barbosa (2005) justifica o estudo da Geometria Fractal em sala de aula por meio de vários fatores como:

> [...] • **conexões** com várias ciências;
> • **deficiências** da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza [...]; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
> • **difusão e acesso** aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
> • **existência** do belo nos Fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...];
> • **sensação** de surpresa diante da ordem na desordem. (BARBOSA, 2005, p. 19 - 20).

Gomes (2007) cita outros fatores quando afirma que trabalhar com a Geometria Fractal possibilita ampliar a capacidade do aluno em intuir níveis e idealizar figuras infinitas, construindo tabelas, generalizando e formalizando seu conhecimento. D'Ambrósio (2002, p. 44) afirma que: "Os fractais são, hoje, parte do imaginário e curiosidade popular. Despertam, portanto, interesse de crianças, jovens e adultos".

Diante do exposto, defini-se a seguinte questão de pesquisa: **Como o uso de fractais auxilia no estudo das Progressões Geométricas?** Com base neste contexto, esta pesquisa busca dar uma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem das Progressões Geométricas (P.G.). Pretende-se aliar conceitos algébricos da P.G. à Geometria Fractal e utilizar como recurso para construção dos mesmos o *software* Geometricks de modo a favorecer a formação de conjecturas e generalizações de alguns conceitos algébricos de P.G.

Para responder à questão de pesquisa, foi realizado um estudo de Progressões Geométricas por meio da Geometria Fractal. Além disso, utilizou-se a pesquisa qualitativa desenvolvida por um estudo de caso como metodologia. Foi escolhida como entidade de pesquisa uma turma de 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Campos dos Goytacazes.

Este trabalho consta de três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, encontra-se o aporte teórico desta pesquisa estruturado em três seções: Geometria Fractal, Tecnologias Digitais em Educação Matemática e Estudos relacionados ao tema. Na Geometria Fractal, abordam-se alguns aspectos e fatos da mesma, definição dos Fractais e aplicações em diferentes áreas do conhecimento. A seção das Tecnologias digitais em Educação Matemática é composta por opiniões de alguns autores em relação ao uso das mesmas na prática em sala de aula e análise de alguns *softwares* estudados para a elaboração das atividades. A seção referente aos Estudos Relacionados contém duas pesquisas sobre ao tema proposto neste trabalho.

No segundo capítulo, constam a metodologia utilizada nesta pesquisa e a elaboração das atividades propostas. Foi utilizada a metodologia da pesquisa qualitativa e empregou-se o método de pesquisa de estudo de caso, no qual utilizaram-se técnicas para a coleta de dados que foram a observação e aplicação do questionário. Na seção referente a elaboração das atividades, descrevem-se as atividades desenvolvidas bem como os seus objetivos.

O terceiro capítulo apresenta a descrição e análise do processo de aplicação das atividades desenvolvidas, primeiramente num teste exploratório a fim de detectar possíveis falhas nas mesmas e, em seguida, com o público alvo da pesquisa. Por último, analisam-se os dados obtidos pelo questionário aplicado.

Nas considerações finais, são destacados pontos relevantes do trabalho, bem como a resposta à questão da pesquisa, sugestões de outros recursos pedagógicos para o desenvolvimento da atividade proposta e sugestões para pesquisas futuras.

1. APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o aporte teórico que subsidiou o processo de elaboração deste trabalho monográfico.

1.1. Geometria Fractal

A Geometria Euclidiana, durante muito tempo, foi considerada a Geometria que melhor descrevia o mundo em que vivemos (PEREIRA, 2007). Porém, no decorrer da história da Matemática, surgiram muitos questionamentos sobre sua consistência, abrindo caminho para novas geometrias (VALIM; COLUCCI, 2008).

De acordo com Janos (2008, p. IX), “nas últimas décadas do século XX, os cientistas descobriram uma nova maneira de entender o crescimento e a complexidade da natureza”. Desta forma, surge uma nova área na Matemática, a Geometria Fractal, estudada em profundidade por Benoit Mandelbrot (1924-2010). Esta geometria descreve, analisa e modela por meio de entes geométricos considerados fractais as formas encontradas na natureza (JANOS, 2008), como pode-se observar na Figura 1.1. O termo fractal foi introduzido por Mandelbrot em 1975, com a publicação de seu livro *Les objects fractals, forme, hassard et dimension* (BARBOSA, 2005). A origem desta palavra é baseada no latim, do adjetivo *fractus* derivado do verbo *frangere* que significa: criar fragmentos irregulares, fragmentar, quebrar (BARBOSA, 2005).

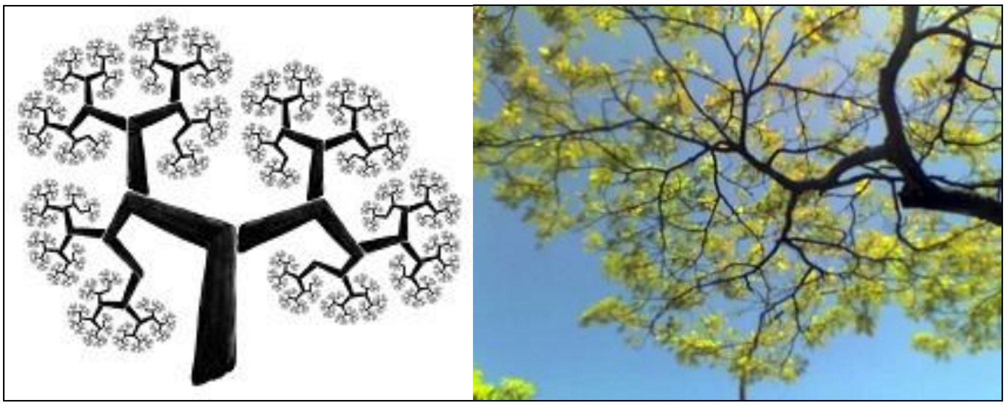


Figura 1.1: Fractais em árvore
Fontes: http://vandretec.blogspot.com/2010/03/fractais-o-que-sao.html
http://www.danielpuig.me/danielpuig/pesquisa.html

Esta Geometria “está intimamente ligada à [sic] uma ciência chamada CAOS” (BARBOSA, 2005, p. 9), pois suas formas belas, fragmentadas e complexas trazem certa ordem a sistemas visivelmente aleatórios (BARBOSA, 2005). Este autor ainda afirma que “essa ciência trouxe consigo o ver ordens e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico” (BARBOSA, 2005, p. 10).

De acordo com Rodrigues (2008), Mandelbrot inicialmente evita definir matematicamente, de maneira formal, os fractais. A seguinte definição aparece em sua obra reformulada e mais famosa *The Fractal Geometry of Nature*: “um fractal é por definição um conjunto de pontos tal que a dimensão de Hausdorff-Besicovitch deste conjunto excede estritamente sua dimensão topológica. Todo conjunto com dimensão fracionária é um fractal” (MANDELBROT, 1983 apud RODRIGUES, 2008, p. 12).

Barbosa (2005) afirma que esta definição não foi bem aceita nem pelo próprio Mandelbrot. Em seguida, outras definições surgiram tais como a apresentada por J. Feder (1988 apud BARBOSA, 2005, p. 18): “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos” e também a sugerida por K. J. Falconer (1985 e 1990 apud BARBOSA, 2005, p. 18-19) que caracterizou um fractal, sendo um conjunto F se, por exemplo:

> -F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
> -A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
> -O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

Acrescenta-se neste trabalho monográfico uma definição atribuída por Carvalho (2005, p. 18) que define um fractal como “uma figura geométrica em que uma parte se assemelha a toda figura, obtida através de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira”. Esta definição, utilizada neste trabalho monográfico, constitui-se de três aspectos que o autor considera fundamental para caracterizar um fractal que são a autossimilaridade, a iteração e a dimensão.

A propriedade de autossimilaridade é destacada por Taylor (2002) quando afirma que os fractais possuem similaridades próprias – que significa que eles têm aparências similares em qualquer ampliação (Figura 1.2). Dessa forma, uma pequena parte da estrutura parece muito com o todo (TAYLOR, 2002).

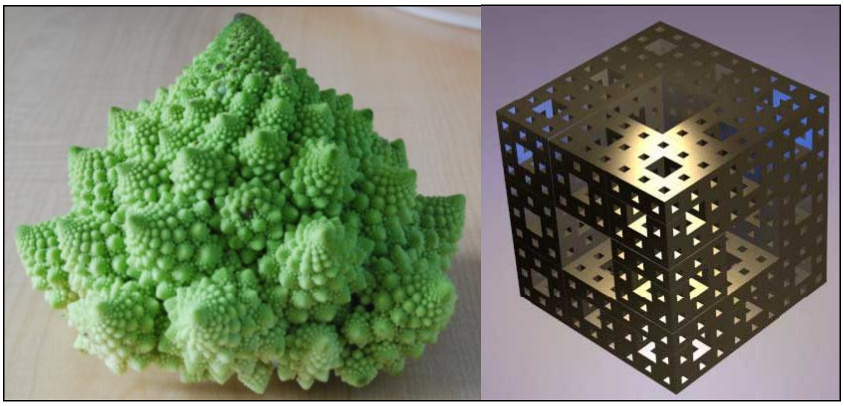


Figura 1.2: Brócolis romanesco e Esponja de Menger.
Fontes: http://forum.darkside.com.br/vb/showthread.php?t=31990
http://www.orfeuspam.com.br/Apostilas/7_UPE/Fractais_Natureza.htm

A iteração de um Fractal é representada por um processo iterativo, ou seja, "ao final de sua execução (algoritmo que permite sua criação), é executado novamente, criando uma estrutura similar." (LEIVAS; CURY, 2008, p. 3).

Quanto à dimensão, Barbosa (2005) relata que na Geometria Euclidiana esta é representada por números inteiros, na qual o ponto tem dimensão 0, a reta dimensão 1, o plano dimensão 2 e o espaço em que vivemos dimensão 3. Observa-se, por exemplo, o cálculo da dimensão de um segmento de reta e de um quadrado:

Considere o segmento AB (Figura 1.3) dividido em duas partes iguais. Neste caso, define-se $m = 2$ como fator de aumento. Obtêm-se então, dois segmentos ($\overline{AM}$ e $\overline{MB}$) que serão chamados de peças ($n = 2$). Sendo assim, o número de peças é igual ao fator de aumento, ou seja, $n = m = 2$. Logo, $n = m^1$.

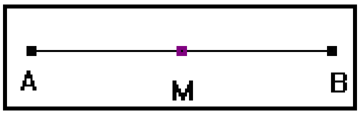


Figura 1.3: Segmento AB

Considere agora o quadrado ABCD (Figura 1.4) em que o lado está dividido em duas partes iguais. Da mesma forma que na figura anterior, o fator de aumento é $m = 2$. Obtêm-se então, quatro quadrados, ou seja, quatro peças ($n = 4$). Sendo assim, o número de peças é igual ao quadrado do fator de aumento, ou seja, $n = 2^2 = 4$. Logo, $n = m^2$.

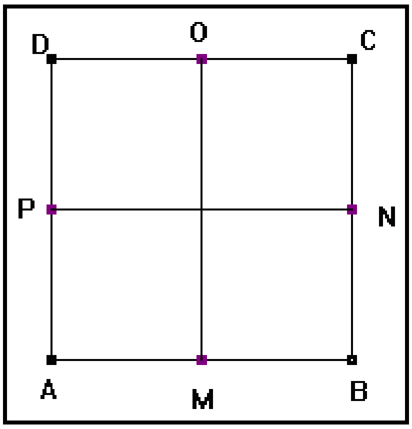


Figura 1.4: Quadrado ABCD

A partir desses exemplos, percebe-se que o expoente do fator de aumento é sempre igual à dimensão do objeto estudado. Generalizando, podem-se representar as igualdades anteriormente apresentadas da seguinte forma:

$\boxed{n = m^d}$, sendo *d* a dimensão do objeto (BARBOSA, 2005).

Utilizando esta expressão em fractais, pode-se observar que no fractal Triângulo de Sierpinski (Figura 1.5), o número de peças do nível 0 para o nível 1 é 3, ou seja $n = 3$, e que cada lado do triângulo está sendo dividido em duas partes, ou seja, o fator de aumento é 2, logo $m = 2$. Nota-se, ainda, que se pode tomar quaisquer dois níveis consecutivos que o número de peças e o fator de aumento não interferem no resultado da dimensão. Deste modo, a dimensão deste fractal pode ser obtida por meio da igualdade apresentada anteriormente:

$$n = m^d \Rightarrow 3 = 2^d$$

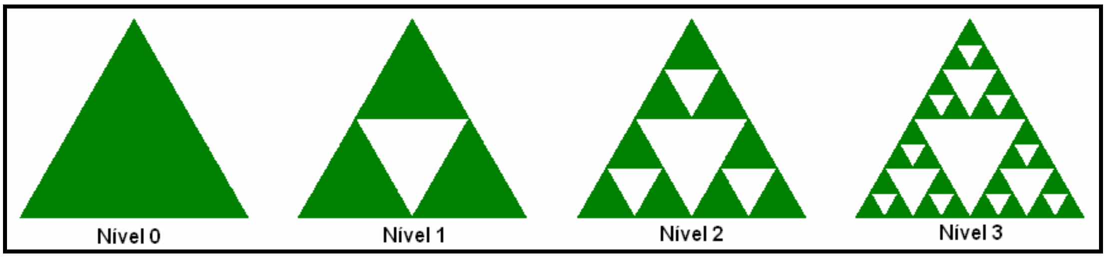


Figura 1.5: Fractal Triângulo de Sierpinski

Conclui-se, então, que $d = \log_2 3$ e assim $d \cong 1{,}585$.

A partir daí, pode-se construir uma fórmula para calcular a dimensão fractal (*d*). Generalizando, tem-se:

$\boxed{d = \dfrac{\log n}{\log m}}$, na qual *n* é o número de peças e *m* é fator de aumento (BARBOSA, 2005).

Os fractais vêm tendo uma vasta aplicação em muitas áreas da ciência. Além de serem aplicados na Matemática, estão presentes na Física, por exemplo, no estudo de superfícies intricadas, na Medicina, na percepção de células cancerosas, na Biologia, na compreensão do crescimento de plantas, na Antropologia, na interpretação de algumas relações humanas, na Engenharia, nos erros de transmissão das linhas telefônicas (ruídos) e, na Economia, na compreensão da instabilidade do mercado financeiro. Uma das mais belas aplicações é na área de Arte, e segundo Barbosa (2005), a existência do belo nos fractais permite o despertar e desenvolver do senso estético.

Sobre este aspecto, Carvalho (2005, p. 30) afirma que "[...] o efeito do belo pode ficar ainda mais interessante quando estas figuras complexas começam a representar fenômenos, situações, objetos naturais ou não, equações e outros, revelando, além da beleza, uma aplicabilidade latente".

Considerando que, por meio da arte dos fractais, é possível inspirar e motivar pessoas na busca pelo conhecimento científico, formou-se, em 1992, o Grupo Fractarte[1]. Este grupo é formado por Alexandre Dupont, Humberto Rossetti Baptista e Rodrigo de Almeida Siqueira e busca a conexão entre a tecnologia, a ciência e a arte.

Baldovinotti (2008, p. 7) afirma que "as novas tecnologias, em especial, a informática (computador e *softwares* educacionais), são fundamentais no processo de construção e obtenção dos fractais [...]". Esta afirmação se comprova com os estudos realizados nas obras de Jackson Pollock (1912-1956) nas quais as análises de computador estão auxiliando na explicação do apelo estético dessas obras. Essas análises mostram que os famosos borrões e redemoinhos do artista criam um padrão fractal, similar aos formados na natureza por árvores, nuvens e linhas costeiras (TAYLOR, 2002). É incrível que vinte e cinco anos antes da descoberta dos fractais na natureza, Pollock já os pintava (TAYLOR, 2002).

Além das áreas citadas, as propriedades dos fractais permitem estudar e descrever nuvens, montanhas, árvores, variação populacional de espécies, oscilações do coração, do cérebro e dos vasos sanguíneos. É possível também transformar um fractal em música por meio de um computador. A imagem fractal pode ser gerada nesse equipamento a partir de algoritmos numéricos ou geométricos. De acordo com Janos (2008, p. 91) "a descoberta de que simples equações podem ser transformadas nas mais surpreendentes imagens, que podem ser produzidas em computadores pessoais, chamou atenção de artistas nos últimos anos".

---

[1] http://www.fractarte.com.br/.

1.2. Tecnologias digitais em Educação Matemática

As tecnologias, indicadas muitas vezes por Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), vêm se incorporando cada vez mais nas escolas e, em particular, no ensino da Matemática (RIBEIRO; PONTE, 2000). Dessa forma, surgem algumas questões referentes "[...] às mudanças curriculares, às novas dinâmicas da sala de aula, ao 'novo' papel do professor e ao papel do computador nesta sala de aula" (BORBA, 1999, p. 285).

Segundo Papert (1996 apud RIBEIRO; PONTE, 2000, p. 4), com a chegada do computador, "entrámos [sic] numa fase de não-retorno no que se refere ao uso destas tecnologias na escola devido à ação de três forças que considera [sic] decisivas: a grande indústria, a revolução na aprendizagem e o poder das crianças que dispõem de computador em casa". No entanto, Ponte (1990 apud RIBEIRO; PONTE, 2000) questiona que o mesmo pode ser inserido nas práticas dos professores sem representar uma transformação de conceitos.

Neste processo, é importante que o professor reflita sobre a utilização das TIC. Desta forma, os professores necessitam incorporar em suas práticas atividades que contemplem o uso de ferramentas das TIC, como, por exemplo, os *softwares* educacionais. Estas ferramentas, se bem exploradas, podem se tornar recursos de grande potencial no processo de ensino e aprendizagem, gerando bons resultados.

Esta afirmação é ratificada por Baldovinotti (2008, p. 6), discutindo que

> o professor além de se preocupar com o modo de usar o computador em sala de aula, deve analisar o software que será utilizado, pois este é a ligação entre o aluno e a máquina no processo de aprendizagem. Se ao planejar uma atividade ou projeto, o software aplicado não for adequado ao que se pretende fazer, os objetivos propostos ficarão afetados e os alunos serão prejudicados no seu processo de aprendizagem.

O professor deve estar preparado em relação aos avanços dessas tecnologias, para que possa contribuir no desenvolvimento cognitivo de seus alunos. Complementando, Perrenoud (2000 apud KAMPFF; CAVEDINI, 2004, p. 1102)

> destaca como uma das dez competências fundamentais do professor a de conhecer as possibilidades e dominar os recursos computacionais existente [sic], cabendo ao professor atualizar-se constantemente, buscando novas práticas educativas que possam contribuir para um processo educacional qualificado.

Penteado (1999, p. 309) corrobora com esta ideia quando afirma que “o trabalho com o computador provoca uma mudança na dinâmica da aula, a qual exige do professor novos conhecimentos e ações”, pois o mesmo propicia transformações no processo de ensino e aprendizagem.

Desta forma, as TIC podem propiciar “o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência” (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003, p. 159). E permitem representar o ensino da Matemática de forma inovadora, intensificando a função da linguagem gráfica e de recentes modos de representação (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003).

De acordo com Gravina e Santarosa (1998), o avanço da teoria dos fractais se deve à massificação das representações gráficas. As imagens consideradas fractais

> [...] foram fontes de conjeturas que desencadearam a pesquisa na direção de demonstrações formais. [...] Este suporte favorece a exploração, a elaboração de conjeturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática formalizada (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 9).

Neste contexto, este trabalho monográfico tem como proposta fazer uso destas imagens para que os alunos possam construí-las, manipulá-las e analisá-las favorecendo assim a formulação de conjecturas do conceito matemático abordado.

Para a construção, manipulação e análise dos fractais, foi utilizado o *software* Geometricks[2], o qual “traz um recurso para a introdução ao estudo da Geometria Fractal que permite definir elementos sobre os quais são aplicadas determinadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram os fractais” (PENTEADO; AMARAL; BORBA, 2000, p. 5). Este recurso permite definir um fractal por meio de ternas e explorá-lo em diferentes níveis de geração (PENTEADO; AMARAL; BORBA, 2000).

A escolha do *software* é justificada pela facilidade de obtenção dos níveis do fractal, após o mesmo ser definido, o que permite maior exploração dos elementos geométricos em questão.

Outros *softwares* também foram analisados com o intuito de escolher o que melhor se adequava aos objetivos propostos. Nesta pesquisa, o propósito é que o aluno utilize o mesmo

---

[2] *Software* proprietário. Desenvolvido por Viggo Sadolin, traduzido por Miriam G. Penteado e Marcelo C. Borba (UNESP, Rio Claro, SP).

como facilitador no processo de construção das imagens. Destacam-se, a seguir, os *softwares* estudados, bem como um pequeno resumo de cada um deles.

O *software* NFract gera imagens fractais tipo Mandelbrot[3] e Julia[4] por meio de uma equação algébrica, neste caso é um polinômio de sétimo grau que executa o sistema, sendo este utilizado para gerar a imagem (PERROTTI, 2002).

O autor atribui maior ênfase no Conjunto de Mandelbrot (Figura 1.6), o qual pode ser obtido atribuindo o valor 1 para o coeficiente de grau 2 do polinômio e zero para os demais. Ele ainda afirma que "o Conjunto de Mandelbrot pode ser considerado como um mapa para o Conjunto de Julia" (PERROTTI, 2002, p. 4), pois cada ponto de uma imagem do Conjunto de Mandelbrot está relacionado com uma imagem no Conjunto de Julia (Figura 1.7).

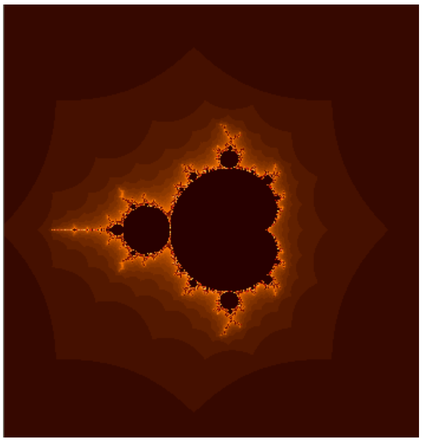


Figura 1.6: Conjunto de Mandelbrot construído no *software* NFract

Figura 1.7: Conjunto de Julia C=(0,4;0,34) construído no *software* NFract

[3] O conjunto de Mandelbrot é uma classe de fractais calculada pela equação $Z_n = Z_{n-1}^2 + C$, em que C representa coordenadas no plano complexo (BARBOSA, 2005).

[4] O conjunto de Julia é uma classe de fractais obtida a partir de alguns pontos do conjunto de Mandelbrot. Para obter tal conjunto, escolhemos um valor para C e o tornamos fixo para toda a imagem (BARBOSA, 2005).

Este *software* não foi selecionado para esta pesquisa, pois o mesmo gera fractais que não seriam adequados para as atividades. São figuras mais complexas do que as utilizadas e de difícil percepção quanto às relações pretendidas neste trabalho.

O Cabri-géomètre II[5] é um *software* de Geometria Dinâmica que permite uma abordagem da Geometria de maneira dinâmica, tornando possível construções como as feitas com régua e compasso**,** entre outras (BRAVIANO; RODRIGUES, 2002).

No entanto, para facilitar a construção dos fractais no referido *software*, é necessário o uso de macroconstruções (ou apenas macro), ou seja, um agrupamento de comandos executados e armazenados no *software* (BRANDÃO, 2002). As mesmas seriam feitas pela professora em formação e fornecidas aos alunos para serem utilizadas no decorrer das atividades de construção dos fractais. Seria interessante para a compreensão do algoritmo de geração do fractal, que o aluno participasse das macroconstruções o que não é possível devido ao gasto de tempo nesta atividade. Outro ponto, é que a passagem de um nível para outro do fractal é feita salvando-se as imagens em arquivo. No Geometricks, as imagens dos níveis podem ser comparadas lado a lado, favorecendo a percepção da propriedade da autossimilaridade.

O Shapari é um *software* por meio do qual é possível escolher figuras geométricas no plano e manipulá-las, "seja através de transformações que já estão prontas no software, seja através de novas transformações que podem ser criadas utilizando-se matrizes quadradas 2x2" (MEIER; SEIDEL; BASSO, 2005, p. 5). Neste *software*, pode-se aplicar simultaneamente algumas transformações como, por exemplo, translação, compressão, reflexão e cisalhamento, resultando diversos efeitos artísticos (MEIER; SEIDEL; BASSO, 2005). Uma das imagens que pode ser construída é o Tapete de Sierpinski (Figura 1.8).

---

[5]Desenvolvido por J. M. Laborde e F. Ballemain (do *instute d'Informatique et Mathématiques Appliquées-Grenoble-Université Joseph Fourrier*). Introduzido no Brasil principalmente pela PUC-SP.

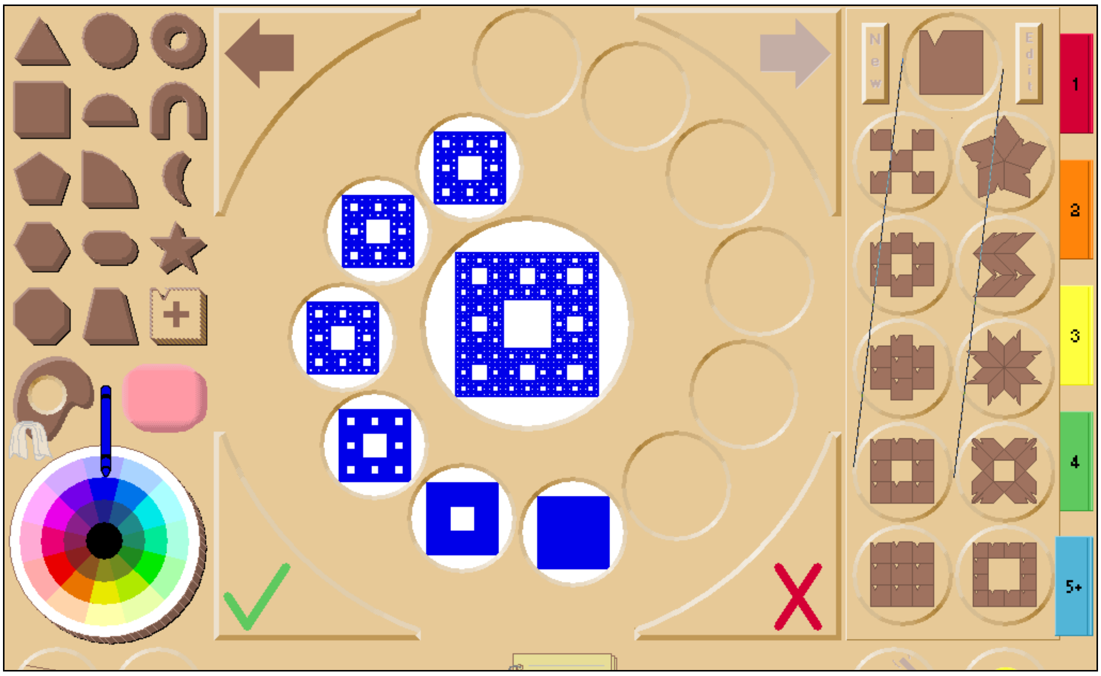


Figura 1.8: Alguns níveis do fractal Tapete de Sierpinski construído por meio do *software* Shapari.

O conhecimento desse *software* se deu após a experimentação das atividades. Considera-se que sua utilização neste trabalho seria bastante adequada, da mesma forma que o Geometricks.

1.3. Estudos relacionados

Esta subseção apresenta duas pesquisas realizadas sobre Fractais e Progressões Geométricas, temas tratados neste trabalho monográfico.

A dissertação de mestrado intitulada “Uma Sequência de Ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais”, de Andrea Gomes Nazuto Gonçalves (GONÇALVES, 2007), teve como objetivo investigar o processo de ensino e aprendizagem das Progressões Geométricas via Fractais. As questões levantadas por essa pesquisa foram: Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da autossemelhança? e Como a autossemelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos do Ensino Médio? Utilizou-se a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e o público-alvo foram alunos da 3ª série do Ensino Médio. Os trabalhos de Parzysz, Nilson José Machado, Vergnaud e o de pesquisadores ligados ao estudo e aplicação de *softwares* da Geometria Dinâmica, como Maria Alice Gravina, constituíram o aporte teórico da pesquisa.

A sequência de ensino foi dividida em três blocos de atividades. O primeiro teve por objetivo trabalhar a construção de cartões fractais por meio de dobraduras, apresentando a geometria num nível mais concreto. Nas atividades propostas, os alunos manipularam os cartões e formularam questões favorecendo assim o surgimento de conjecturas. No segundo, os alunos utilizaram *softwares* de Geometria Dinâmica para construir fractais, nos quais perceberam mais claramente a propriedade da autossimilaridade. As atividades do último bloco permitiram aos alunos a percepção de padrões que levaram às generalizações das fórmulas do termo geral, da soma dos **n** primeiros termos de uma P.G. e da soma dos termos de uma P.G. infinita.

Segundo a autora, conclui-se que a propriedade de autossimilaridade verificada nos fractais contribuiu para o processo de generalização das fórmulas da P.G.

Outra pesquisa foi a monografia de pós-graduação intitulada “A Geometria Fractal e o *software* Cabri-Géomètre II no estudo de Progressão Geométrica” de Tatiana Cardoso Roman (ROMAN, 2004). Esta visa à construção de conceitos matemáticos relacionados à P.G. utilizando a Geometria Fractal, a partir dos recursos computacionais do *software* Cabri-Géomètre II.

Este trabalho aborda, inicialmente, as tendências de ensino e aprendizagem desenvolvidas atualmente em Educação Matemática, como o estudo da História da Matemática, das Tecnologias Computacionais aplicadas ao seu ensino, da Modelagem Matemática, da Etnomatemática e da Resolução de Problemas. De acordo com a autora, essas tendências não excluem uma às outras, elas até se complementam. Em seguida, explora-se a história da Geometria Fractal e das Progressões Geométricas. Apresenta-se também a metodologia utilizada no desenvolvimento das atividades propostas, a qual é uma pesquisa de carácter bibliográfico e descritivo. Por último, descreve-se o processo de construção dos fractais no Cabri e o desenvolvimento dos conceitos de P.G. com a utilização destes.

A opinião da autora é que a aplicação dessa proposta em sala de aula poderá possibilitar ao aluno: a apropriação dos conceitos da Geometria Euclidiana em um novo enfoque, conhecer a Geometria Fractal, utilizar e conhecer os recursos do *software* Cabri e explorar padrões geométricos por meio das sequências.

Este trabalho monográfico difere dos apresentados quanto ao uso do *software* Geometricks e da abordagem teórica dada à Geometria Fractal.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo será apresentada a metodologia que norteou este trabalho monográfico e a elaboração das atividades.

2.1. Pesquisa Qualitativa

Este trabalho monográfico tem por questão de pesquisa **Como o uso de Fractais auxilia no estudo das Progressões Geométricas?** Realizou-se, então, uma pesquisa qualitativa por meio do estudo de caso. Questões que se concentram em "como" e "por quê" são mais explicativas e por isso favorecem o uso do método de pesquisa de estudo de caso (YIN, 2010).

Oliveira (2010, p. 37) conceitua pesquisa qualitativa "como sendo um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação". Esta autora afirma, ainda, que uma abordagem qualitativa requer uma base teórica relativa ao objeto de estudo, aplicação de questionário, observações e análise de dados (OLIVEIRA, 2010).

O método de estudo de caso, segundo Ponte (2006), visa conhecer em profundidade uma entidade e ressalta características que lhe são próprias, selecionando para o pesquisador aspectos de seu maior interesse. Neste trabalho monográfico, a entidade estudada é um grupo de alunos da 2ª série do Ensino Médio. A aplicação deste método assume uma investigação que busca descobrir o que existe de mais fundamental e característico e que, assim, possa colaborar para a compreensão total de determinado fato ou fenômeno da realidade empírica (PONTE, 2006; OLIVEIRA, 2010).

As técnicas utilizadas nesta pesquisa para coleta de dados foram observação e questionário. É importante destacar que o estudo de caso favorece a utilização de diferentes fontes para coleta de dados, o que permite ao pesquisador levantar as características e compreender o objeto de estudo com maior relevância.

Segundo Creswell (2010, p. 214), "observações qualitativas são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa." Na técnica de observação, o pesquisador deve registrar as informações mais relevantes mediante ao observado, pois nem tudo pode ser registrado, para que posteriormente possa desenvolvê-las melhor (MOREIRA; CALEFFE, 2008).

Apesar de esta técnica ter algumas desvantagens como, por exemplo, o pesquisador não ter habilidades para a observação e poder existir dificuldades ao tentar observar mais de uma coisa ao mesmo tempo, as mesmas podem ser superadas e este recurso pode ser considerado confiável e válido para a pesquisa (MOREIRA; CALEFFE, 2008).

Nessa pesquisa, foi utilizada a observação durante a experimentação das atividades. Buscou-se por meio dessa técnica uma análise mais real do processo de construção do conhecimento. Anotações sobre as reações e descobertas durante a realização das mesmas foram feitas em todos os encontros. Estas foram muito importantes na análise final dos resultados dessa pesquisa.

A outra técnica utilizada foi a aplicação de questionário. A elaboração deste requer clareza “quanto à necessidade de coletar dados que facilitem a obtenção de informações para consecução dos objetivos formulados” (OLIVEIRA, 2010, p. 85).

Segundo Moreira e Caleffe (2008), existem quatro vantagens quanto ao uso do questionário: o uso eficiente do tempo, o anonimato para o respondente, a possibilidade de uma alta taxa de retorno e o uso de perguntas padronizadas.

Nesse trabalho monográfico, aplicou-se o questionário ao final da experimentação. A seção 3.3. traz observações referentes à sua aplicação.

Na próxima seção, serão descritas as atividades desenvolvidas para a proposta referente ao objeto de estudo, bem como o objetivo de cada uma.

2.2. Elaboração das Atividades

As atividades elaboradas neste trabalho monográfico têm como objetivo iniciar o estudo de Progressões Geométricas com a utilização de Fractais, sendo estes construídos por meio do *software* Geometricks.

Esse estudo promove a inserção dos fractais em sala de aula e a percepção das relações matemáticas presentes nos fractais. Elaborou-se uma apostila (Apêndice A) constituída de três partes: teórica, atividades e exercícios. A parte teórica é subdividida em Fractais, Sequências e Progressão Geométrica (P.G.). A parte referente às atividades foi dividida em Atividades 1 e 2, cada uma subdividida em construção do fractal (primeira parte) e questões (segunda parte).

Ao final, foram dispostos sete exercícios que possibilitam aos alunos aplicarem o que foi conjecturado e discutido no estudo realizado.

A seguir, serão expostas as Atividades 1 e 2 e os exercícios, bem como os objetivos de cada um.

2.2.1. Atividade 1

Essa atividade, como já descrito, compõe-se de duas partes. A primeira tem como objetivo fazer com que os alunos construam o Fractal Floco de Neve de Koch com o auxílio do *software* Geometricks e do esquema de construção, disposto na apostila. E, ao final deste, é apresentado um pequeno histórico desse fractal e o algoritmo utilizado nessa construção. A segunda é constituída de questões que têm por objetivo a dedução da fórmula do termo geral de uma P.G.

Após a construção do fractal, os alunos devem preencher uma tabela, na qual as colunas se referem ao nível do fractal, a quantidade de segmentos e ao comprimento de cada segmento.

A questão 1 (Figura 2.1) tem como objetivo reconhecer uma P.G., verificando se os elementos da definição de P.G. estão presentes entre os termos das sequências.

1. Registre as sequências referentes à quantidade de segmentos e ao comprimento de cada segmento que se obteve na tabela. Essas sequências formam uma P.G.? Justifique.

____

____

Figura 2.1: Questão 1 da Atividade 1

O objetivo da segunda questão (Figura 2.2) é fazer os alunos reconhecerem que operação foi feita de um nível *n* para um nível $n+1$.

2. Se construirmos esse fractal no nível 4, quantos segmentos teremos? E qual será o comprimento de cada segmento?

____

Figura 2.2: Questão 2 da Atividade 1

A questão 3 (Figura 2.3) tem como objetivo possibilitar aos alunos identificar a posição dos termos da sequência referente à quantidade de segmentos.

3. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de segmentos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

a_n	Quantidade de segmentos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

Figura 2.3: Questão 3 da Atividade 1

A questão 4 (Figura 2.4) visa a relacionar um nível do fractal com a posição *n* de um elemento a_n da sequência.

4. O fractal correspondente ao nível 10 está associado com um elemento a_n da sequência acima. Determine n.

____

Figura 2.4: Questão 4 da Atividade 1

A questão 5 (Figura 2.5) tem por objetivos relacionar um nível do fractal com um elemento a_n da sequência e determinar as operações feitas para obter os resultados em um determinado nível de cada sequência.

5. Preencha as tabelas abaixo:

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
10			

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
	a_n		

Figura 2.5: Questão 5 da Atividade 1

O objetivo da questão 6 (Figura 2.6) é, partindo das observações feitas nas questões anteriores, que os alunos expressem em função de a_1 e q a fórmula que determina qualquer termo da P.G.

6. Considere a construção de um fractal em que a quantidade de segmentos da figura no nível zero seja a_1. Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ referente à quantidade de segmentos como sendo uma P.G. de razão q. Expresse a_n em função de a_1 e q.
____
____

Figura 2.6: Questão 6 da Atividade 1

2.2.2. Atividade 2

Assim como na Atividade 1, essa atividade também é composta de duas partes. A primeira tem como objetivo fazer com que os alunos construam o Fractal Triângulo de Sierpinski com o auxílio do *software* Geometricks e do esquema de construção, disposto na apostila. Da mesma forma, ao final desta, é apresentado um pequeno histórico do fractal e o algoritmo utilizado na sua construção. A segunda é constituída de questões que têm por objetivo chegar à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Após a construção do fractal os alunos devem preencher uma tabela, na qual as colunas se referem ao nível do fractal, a quantidade de triângulos novos e ao número total de triângulos.

A questão 1 (Figura 2.7) possibilita a análise da tabela anterior verificando quais das sequências representam uma P.G., justificando-a.

1. Qual(is) das sequências obtidas nesta tabela forma(m) uma P.G.? Justifique.
____

Figura 2.7: Questão 1 da Atividade 2

A segunda questão (Figura 2.8) é composta de três itens. O objetivo dos dois primeiros é levar os alunos a perceberem a relação existente entre as sequências do número total de triângulos e da quantidade de triângulos novos. Dessa forma, espera-se que determinem as somas pedidas no último item, expressando-as como soma dos termos de uma P.G.

2. Complete:

a) O número total de triângulos no nível 2 é igual ao número total de triângulos do nível 1 acrescido de ______________ triângulos.

b) O número total de triângulos no nível 3 é igual ao número total de triângulos do nível 2 acrescido de ______________ triângulos.

c) Considere a sequência $S_n = (1,4,13,40,...)$ em que n indica o número de termos. De acordo com os itens a e b, podemos escrever:

$S_1 = 1$

$S_2 = 4 = 1 + 3$

$S_3 =$ ________________________

$S_4 =$ ________________________

Figura 2.8: Questão 2 da Atividade 2

A questão 3 (Figura 2.9) tem por objetivos perceber as operações feitas de um nível n para um nível $n+1$ para e assim encontrar a quantidade de triângulos em um determinado nível e utilizar a relação observada na questão anterior para determinar o número total de triângulos num nível n.

3. Se construirmos esse fractal no nível 5, quantos triângulos novos teremos? E qual será o número total de triângulos?

____

Figura 2.9: Questão 3 da Atividade 2

O objetivo da questão 4 (Figura 2.10) é relacionar a posição dos termos da sequência com a quantidade de triângulos novos.

4. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de triângulos novos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

a_n	Quantidade de triângulos novos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	
a_6	

Figura 2.10: Questão 4 da Atividade 2

Na quinta questão (Figura 2.11), o objetivo é fazer com que os alunos relacionem o elemento a_n da sequência referente à questão anterior com o nível do fractal.

5. O fractal correspondente ao nível 10 está relacionado com qual elemento da sequência a_n ?

Figura 2.11: Questão 5 da Atividade 2

A sexta questão (Figura 2.12) tem como objetivo buscar generalizações, para este fractal, das expressões referentes à quantidade de triângulos novos e ao número total de triângulos.

6. Represente, na tabela a seguir, a quantidade de triângulos novos e o número total de triângulos em função do primeiro termo e da razão da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
0	a_1		
1	a_2		
2	a_3		
3	a_4		
$\vdots$	$\vdots$		
n-1	a_n		

Figura 2.12: Questão 6 da Atividade 2

A sétima questão (Figura 2.13) apresenta uma P.G. em que o primeiro termo é diferente de 1. O objetivo é que os alunos verifiquem se a fórmula encontrada para S_n na questão anterior valida os novos resultados. Busca-se, então, com ou sem ajustes, fazer com que os alunos encontrem a fórmula para a soma dos n primeiros termos de um P.G.

7. Imagine uma situação em que:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2+4$

$S_3 = 2+4+8$

$S_4 = 2+4+8+16$

Verifique se a fórmula encontrada no item 6 valida as quatro afirmações acima. Caso negativo, encontre um novo resultado para S_n.

____

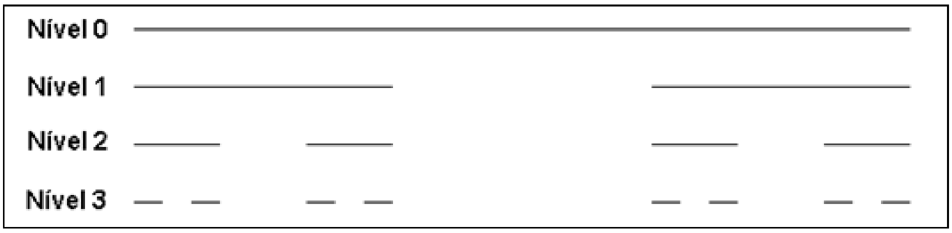
____

Figura 2.13: Questão 7 da Atividade 2

2.2.3. Exercícios

O exercício 3.1 (Figura 2.14) apresenta o Fractal Poeira de Cantor nos quatro primeiros níveis, assim como o processo de construção do mesmo. Este exercício é constituído de três itens. O objetivo do primeiro é analisar o processo de construção deste fractal e, a seguir, perceber a relação entre um nível n e os valores encontrados para o comprimento de cada segmento e o número de segmentos. O objetivo dos dois últimos itens é identificar sequências que se encontram neste exercício, que representam progressões geométricas e dessas determinar o primeiro termo e a razão.

3.1. O fractal *Poeira de Cantor*, apresentado na figura a seguir, tem como iniciador da construção o segmento de comprimento igual a 1u.c. Para obter o próximo nível retiramos o terço central do segmento. Repetimos esse mesmo procedimento nos segmentos restantes, indefinidamente.



a) No nível 10, determine o comprimento de cada segmento e o número de segmentos?

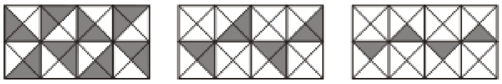
b) Que sequências representam Progressões Geométricas neste problema?

c) Identifique nessas progressões o primeiro termo e a razão.

Figura 2.14: Exercício 3.1

O objetivo do exercício 3.2 (Figura 2.15) é verificar se os alunos sabem identificar uma P.G. a partir do problema dado e, posteriormente, encontrar sua razão.

3.2. (UFF-2000) Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados na figura, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.



R_1 R_2 R_3

Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (P.G.) decrescente de três termos.

A razão dessa P.G. é:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 4

Figura 2.15: Exercício 3.2

O exercício 3.3 (Figura 2.16) visa a verificar se os alunos compreenderam o processo de construção do fractal e com isso se conseguem determinar a próxima figura da sequência apresentada. Espera-se também com este exercício mostrar para os alunos que Fractal é um tema da atualidade, presente nos Exames Nacionais.

3.3. (ENEM – 2008) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

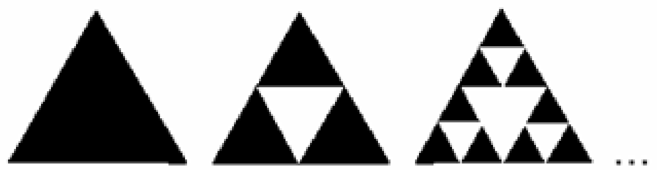
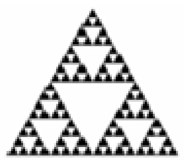
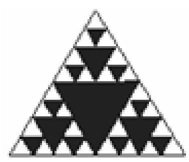
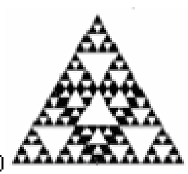


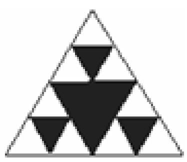
Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

a) 

d) 

b) 

e) 

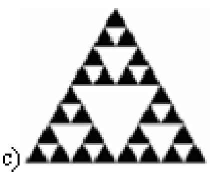
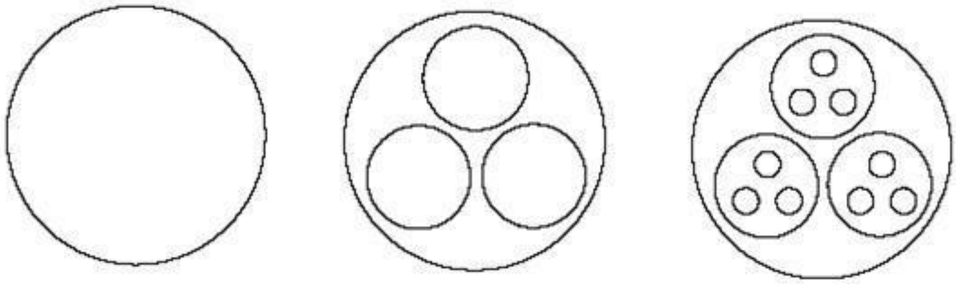
c) 

Figura 2.16: Exercício 3.3

O exercício 3.4 (Figura 2.17) tem por objetivos compreender o algoritmo da construção de um cabo de fibra ótica para, a partir daí, determinar o valor do raio em cada etapa e encontrar relações entre a quantidade de cabos inseridos e a etapa, bem como a quantidade total de cabos numa determinada etapa.

3.4. (CARVALHO–2005-Adaptada) A fibra ótica vem causando uma revolução na transmissão de dados. Sem elas, por exemplo, as transmissões de TV via cabo seriam inviáveis. A informação é levada dentro de cabos espelhados internamente em forma de luz e, por isso, os dados são transportados a uma velocidade altíssima. Por motivo de economia, um cabo pode ter vários cabos internos e estes, por sua vez, outros mais. Abaixo vemos um corte frontal de um mesmo cabo em três etapas:



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

O cabo principal, na etapa 1, possui raio igual a 12cm e na etapa 2 os cabos inseridos possuem raio cujo valor é a terça parte do raio do cabo principal. Responda às questões abaixo considerando ser possível a inserção de cabos, neste procedimento, indefinidamente:

a) Qual o comprimento do raio na etapa 5? E na etapa 9?

b) Qual a quantidade de cabos inseridos na etapa 13 em relação à etapa anterior?

c) Qual é a quantidade total de cabos na etapa 13?

Figura 2.17: Exercício 3.4

O objetivo do exercício 3.5 (Figura 2.18) é verificar se os alunos identificam, por meio da informação, que a razão é constante, e que a sequência formada pela população de marlim-azul a cada ano é uma P.G. Além disso, espera-se que eles utilizem os conceitos trabalhados durante os encontros como, por exemplo, o de média geométrica e o de termo geral.

3.5. (UFF – 2004) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinquenta anos (em 1953). (Adaptado da revista ***Veja***, 09 de julho de 2003.)

Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:

Jeffrey L. Rotman-Corbis

Newsweek, 26 de maio de 2003.

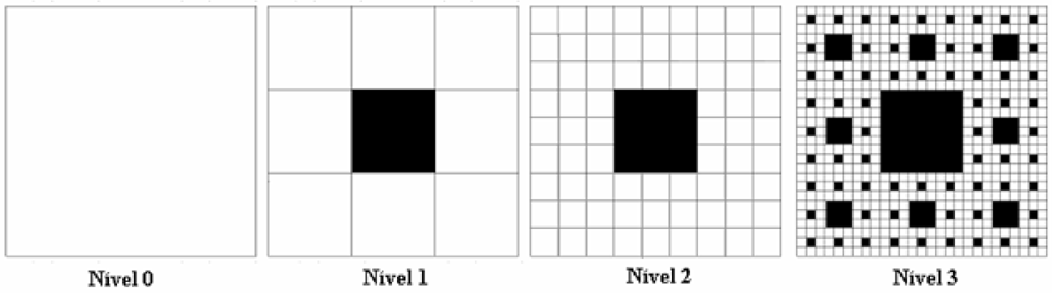
a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

Figura 2.18: Exercício 3.5

O exercício 3.6 (Figura 2.19) apresenta o princípio de construção do Fractal Tapete de Sierpinski. Este exercício é composto de quatro itens. O objetivo do item a é verificar se o aluno compreendeu o processo de construção do fractal. Já o do b é que o aluno encontre uma relação matemática que facilite os cálculos ou a contagem dos quadrados em questão. E o do c é verificar se o aluno sabe identificar e definir uma P.G. O último item tem por objetivo fazer com que o aluno encontre uma relação envolvendo o nível do fractal com a área formada pela figura.

3.6. Observe o princípio da construção do fractal *Tapete de Sierpinski*. Neste fractal a construção tem como iniciador um quadrado, o qual dividimos em nove quadrados congruentes, eliminando o central. Repetimos esse mesmo procedimento nos quadrados restantes, indefinidamente. Considerando que o lado do quadrado no nível 0 mede 9u.c., desta forma:

a) determine a construção desse fractal no nível 2;



b) complete a tabela:

Nível	Área formada pela figura
0	
1	
2	
3	

c) a sequência formada pelas áreas obtidas na tabela acima representa uma P.G.? Justifique.

____

____

d) determine a área da figura formada no nível 8.

____

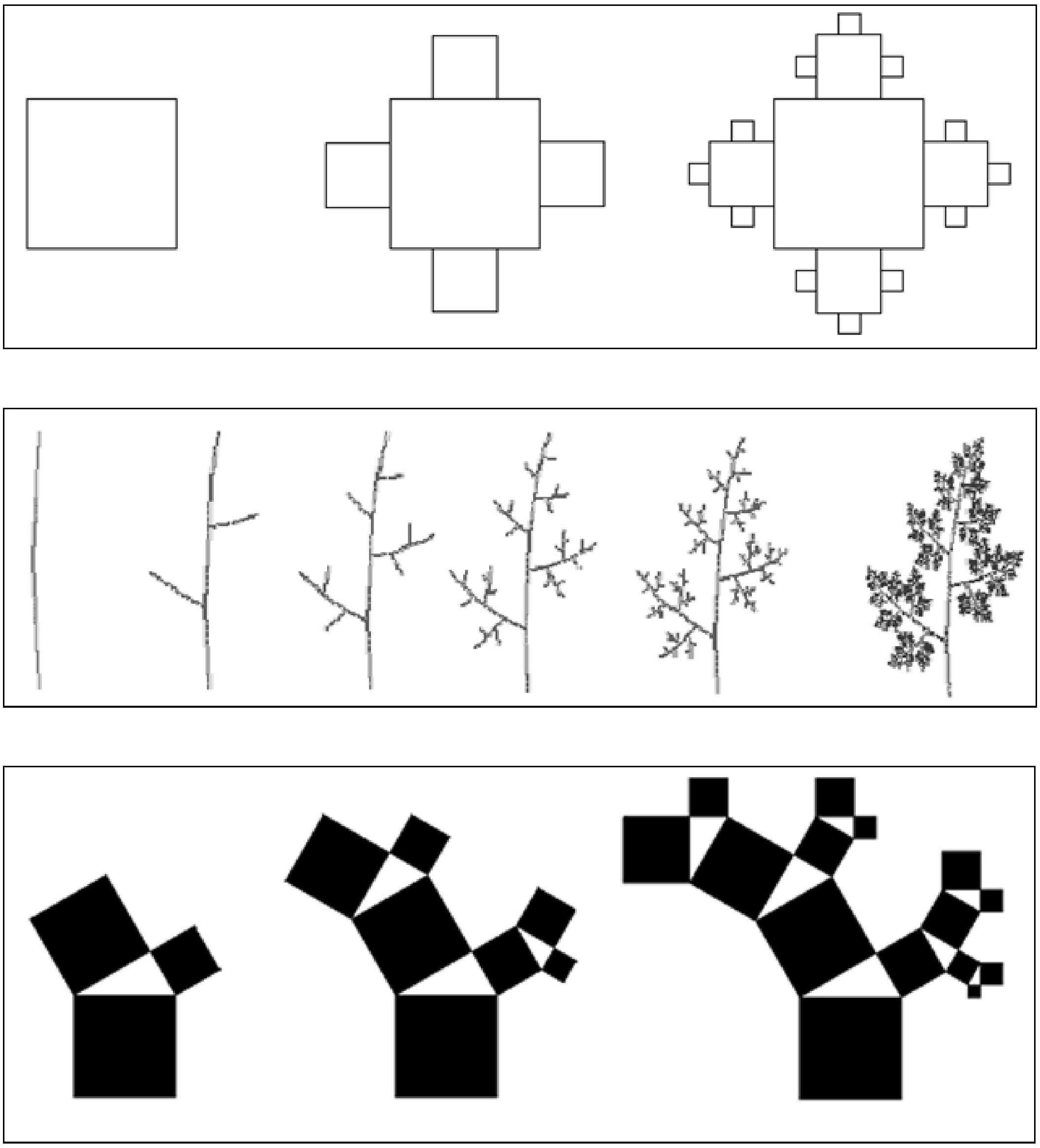
____

Figura 2.19: Exercício 3.6

O objetivo do exercício 3.7 (Figura 2.20) é, após analisarem o esquema de construção de algumas figuras, nas quais pode ser observado o princípio da autossimilaridade, construir uma figura que também mantém este mesmo princípio. Neste exercício, são apresentados dois tipos de malha que podem ser usadas na construção.

É importante destacar que a utilização das malhas, bem como a de dobraduras, são recursos de que dispõe o professor no trabalho com esse tema.

3.7. Observe as figuras abaixo. Elas mantêm o princípio da autossimilaridade.



Agora é sua vez de construir uma figura com esta propriedade. Se preferir utilize as malhas dadas.

Figura 2.20: Exercício 3.7

3. RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, será descrita e analisada a experimentação das atividades desenvolvidas neste trabalho monográfico.

3.1. Teste exploratório

O teste exploratório foi realizado com oito alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes, em dois encontros com duração de duas horas cada.

A realização do teste exploratório tem por objetivo verificar a clareza dos enunciados das atividades e dos exercícios e, assim, se necessário, adaptar os mesmos para a o público-alvo dessa pesquisa.

3.1.1. Encontro do dia 30/04/10.

O encontro foi iniciado com a explicação sobre a Teoria do Caos e os fractais, mas pode-se perceber que, como esses temas não eram de domínio dos alunos, a explanação, apenas teórica sem nenhum exemplo mais concreto, deixou muitas dúvidas. Surgiu, então, a necessidade de se buscarem mais exemplos sobre a autossimilaridade e os processos iterativos.

Os alunos não tiveram dúvidas na parte teórica de Sequências e de Progressões Geométricas, visto que já haviam estudado esses conteúdos em uma das disciplinas do curso.

Para que os alunos pudessem iniciar a Atividade 1, a professora em formação apresentou as ferramentas do *software* Geometricks que seriam utilizadas para a construção dos fractais nas atividades.

Em seguida, os alunos iniciaram a construção do Fractal Floco de Neve de Koch, seguindo o passo a passo descrito na apostila. Nesta etapa, foi possível registrar sugestões importantes para o aprimoramento do trabalho. Uma delas foi atribuída à construção do segmento AB (Figura 3.1), pois era determinada a distância de 9 u.c. entre os pontos A e B e no enunciado da tabela que antecede às questões dessa atividade, era determinado que o lado do triângulo ABC era de 1 u.c. Esse fato levou alguns alunos a preencherem incorretamente o comprimento de cada segmento no nível 0 do fractal e, consequentemente, nos outros níveis pedidos.

2. Criar o segmento AB

- clique em **Objeto indep/Ponto na grade (clique)**;
- clique na área de trabalho de modo a obter uma distância de 9 u.c. entre dois pontos;
- clique na letra A e depois na área de trabalho próxima a um dos pontos. Faça o mesmo com a letra B em relação ao outro ponto (Figura 3);

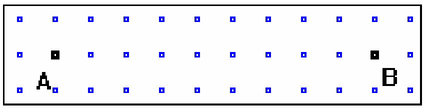


Figura 3

- clique em **Objeto depend/Segmento(po,po)** e depois em A e B.

(a) Atividade 1 do teste exploratório

2. Criar o segmento AB

- clique em **Objeto indep/Ponto na grade (clique)**;

Obs.: Neste passo, clique em **Objeto indep** na barra de ferramentas e seguida em **Ponto na grade(clique)**.

- clique na área de trabalho de modo a obter dois pontos;
- clique na letra A e depois na área de trabalho próxima a um dos pontos. Faça o mesmo com a letra B em relação ao outro ponto (Figura 3);

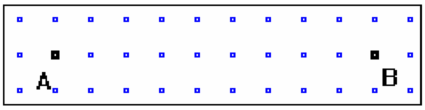


Figura 3

- clique em **Objeto depend/Segmento(po,po)** e depois em A e B.

(b) Atividade 1 modificada

Figura 3.1: Item a.2 referente à construção do fractal da Atividade 1.

Após perceberem as relações existentes entre os níveis do fractal, a quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento, os alunos conseguiram responder às três primeiras questões, sem apresentar muitas dúvidas.

Na quarta questão, como alguns alunos não estavam conseguindo determinar o valor da posição *n* do elemento a_n para o nível 10 do fractal, a professora em formação pediu que construíssem na tabela da terceira questão uma coluna com os níveis correspondentes para cada elemento a_n. Assim, associaram o valor de $n = 11$ ao nível 10.

Apesar dos alunos terem encontrado quatro tipos de respostas para a quantidade de segmentos e três para o comprimento de cada segmento na primeira tabela da quinta questão, não apresentaram muitas dúvidas no preenchimento da segunda tabela.

Em seguida, foi feita a correção da atividade considerando as respostas dos alunos.

3.1.2. Encontro do dia 12/05/10.

Como se percebeu a necessidade de buscar mais exemplos para ilustrar a parte teórica de fractais, o segundo encontro foi iniciado com ilustrações e algumas considerações sobre a Teoria do Caos e a autossimilaridade.

Em seguida, os alunos iniciaram a construção do Fractal Triângulo de Sierpinski, não apresentando muitas dúvidas em relação à utilização do *software*. Alguns tiveram dificuldade no item que pedia para definir o fractal, pois no momento de indicar as ternas se atrapalharam ao clicar os vértices dos triângulos.

Na primeira questão, os alunos responderam corretamente a sequência. Alguns não justificaram e outros justificaram somente pela razão.

As questões 2, 3, 4 e 5 foram resolvidas sem apresentar dúvidas, apesar de dois dos alunos determinarem, na questão 3, a quantidade de triângulos novos e o número total de triângulos no nível 5, utilizando o nível 4,pois confundiram com S_5. E na questão 5, um dos alunos respondeu a_9, pensando que teria que subtrair um ao valor do nível do fractal.

Na sexta questão, a maioria dos alunos apresentou dificuldade em determinar o número total de triângulos.

Durante a resolução da questão 7, verificou-se que os alunos não conseguiram determinar o número total de triângulos para o nível $n-1$. Então, a professora em formação teve que intervir, pedindo que observassem as igualdades $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (3^1 - 1)}{3 - 1}$ e $S_2 = 4 = 1 + 3 = \frac{1 \cdot (3^2 - 1)}{3 - 1}$ e, a partir destas, determinassem S_3, S_4 e S_n.

Detectadas as dificuldades dos alunos participantes do teste exploratório nas questões 6 e 7, considerou-se que seria melhor unificá-las (Figura 3.2).

6. Preencha as lacunas abaixo para um elemento a_n da sequência referente à quantidade de triângulos novos.

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
	a_n		

7. Represente, na tabela a seguir, o número total de triângulos em função do primeiro termo e da razão da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

Nível	a_n	Nº total de triângulos
0	a_1	
1	a_2	
2	a_3	
3	a_4	
⋮	⋮	
n-1	a_n	

(a) Atividades 6 e 7 do teste exploratório

6. Represente, na tabela a seguir, a quantidade de triângulos novos e o número total de triângulos em função do primeiro termo e da razão da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
0	a_1		
1	a_2		
2	a_3		
3	a_4		
⋮	⋮		
n-1	a_n		

(b) Atividade 6 modificada

Figura 3.2: Questão 6 elaborada a partir das questões 6 e 7 do teste exploratório.

A partir da expressão encontrada para S_n, na questão 7, os alunos tinham que verificar se esta correspondia as somas das P.G. indicadas na oitava questão. A maioria das expressões dadas pelos alunos não as validava. Então, após alguns testes nesta expressão, determinaram a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.

A resolução dos exercícios possibilitou uma reorganização na ordem dos mesmos, ou seja, primeiro os exercícios mais fáceis e, a partir daí, numa ordem crescente de dificuldade. As dificuldades e comentários feitos pelos alunos alertaram para possíveis questionamentos e reações dos alunos do Ensino Médio, público-alvo da validação das atividades.

Considerou-se satisfatória a aplicação do teste exploratório pois possibilitou algumas modificações nas atividades a fim de alcançar melhor os objetivos de cada uma delas, além de adequar o tempo previsto para cada encontro a ser realizado na experimentação das atividades.

3.2. Experimentação das atividades

A experimentação das atividades foi realizada com alunos de uma turma da segunda série do Ensino Médio de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes. A escolha da instituição se deve ao fato desta possuir um laboratório de informática disponível para a aplicação do trabalho e a escolha da turma se deu por esta não ter estudado P.G.

Esse trabalho foi apresentado na forma de minicurso, no qual foram realizados quatro encontros sendo que os três primeiros com duração de três horas e o último de duas. Neste, foram inscritos vinte e nove alunos, dos quais quatorze compareceram ao primeiro e aos outros dez alunos. De todos os alunos que compareceram, dez frequentaram os quatro encontros.

Como citado anteriormente, utilizou-se uma apostila (Apêndice A), constituída de três partes: parte teórica, atividades e exercícios. Cada atividade foi dividida em: construção do fractal (primeira parte) e questões (segunda parte).

A seguir, serão descritos os quatro encontros.

3.2.1. Encontro do dia 12/06/2010.

No início da aula, a professora em formação se apresentou, explicou os objetivos da pesquisa e entregou a apostila aos alunos.

Perguntou-se aos alunos se já tinham ouvido falar em fractais. Eles disseram que não. O tema, então, foi introduzido fazendo a relação entre a Geometria Euclidiana e as novas Geometrias, chegando ao surgimento da Geometria Fractal e a relação desta com a Teoria do Caos. Foi apresentada a Figura 3.3 com o objetivo de facilitar a compreensão desta Teoria. Pediu-se aos alunos que observassem a figura apresentada e verificassem se havia alguma ordem ou regularidade na mesma.

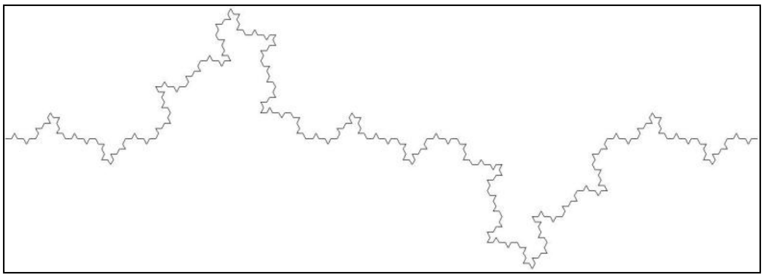


Figura 3.3: Fractal tipo Koch alternado nível 3.
Fonte: Autora

Os alunos apontaram alguns trechos na figura, mas não conseguiram encontrar o padrão autossimilar, ou seja, o padrão que se repete em toda a figura. Então a professora em formação apresentou a Figura 3.4, decorrente de uma ampliação da Figura 3.3, para que pudessem identificar tal padrão.

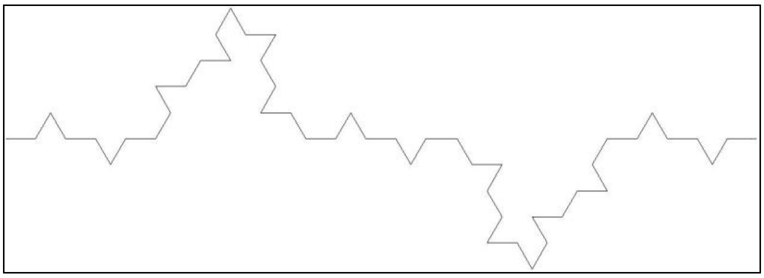


Figura 3.4: Fractal tipo Koch alternado nível 2.
Fonte: Autora

Nesse momento, os alunos conseguiram identificar o padrão autossimilar (Figura 3.5).

Figura 3.5: Alunos identificando padrões.
Fonte: Autora

E para mostrar que o padrão identificado pelos alunos estava correto, foi apresentada a Figura 3.6. A professora em formação, então, voltou às Figuras 3.4 e 3.3 com o objetivo de localizar tal padrão.

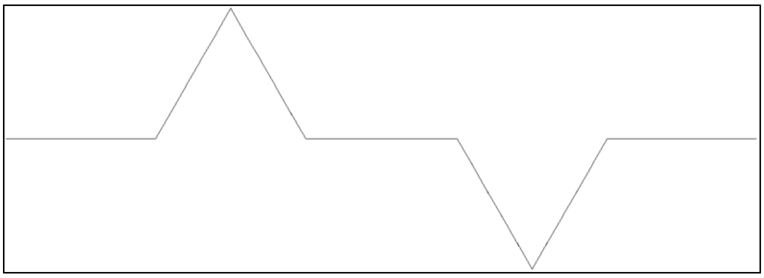


Figura 3.6: Fractal tipo Koch alternado nível 1.
Fonte: Autora

Para exemplificar que a Geometria Euclidiana não modela alguns fenômenos da natureza, foi utilizada a frase de Mandelbrot, que diz “As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta” (MANDELBROT, 1983 apud GONÇALVES, 2007, p. 40). A partir desta frase, observou-se que elementos encontrados na natureza são comparados à Geometria Euclidiana, mas essa Geometria não pode descrevê-los. A Figura 3.7(a) foi utilizada para mostrar que as linhas costeiras não são modeladas por círculos e a Figura 3.7(b) que os relâmpagos não se propagam em linha reta. Assim, esses objetos “[...] exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais [...]” (BARBOSA, 2005, p. 19).

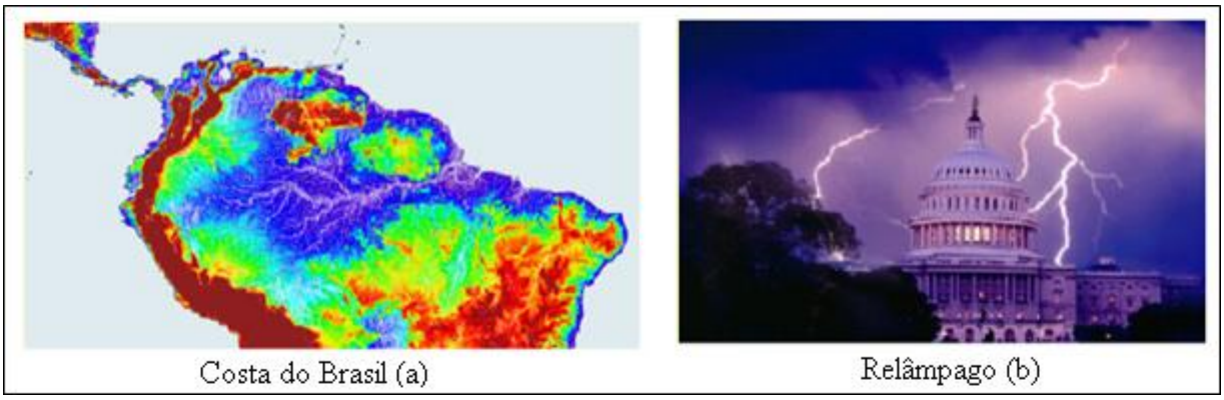


Figura 3.7: Costa do Brasil e Relâmpago
Fonte: NIEDERMEYER; KOEFENDER; ROOS (2009, p. 4).

Em seguida, mostrou-se aos alunos que os objetos considerados fractais possuem uma propriedade conhecida como autossimilaridade, a qual foi ilustrada com a figura da folha da samambaia (Figura 3.8). Observou-se que a samambaia é composta de folhas, e que estas são compostas de folhas menores que são autossimilares às primeiras. O mesmo processo ocorre continuamente com as folhas menores.

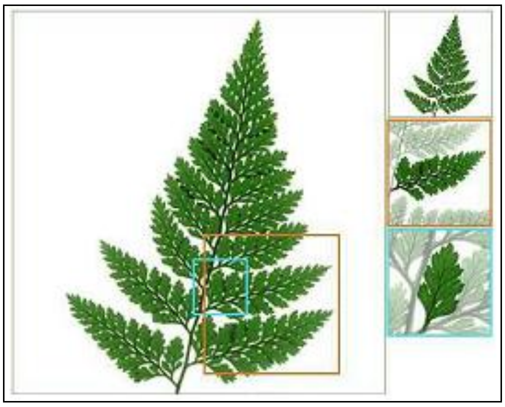


Figura 3.8: Folha da Samambaia
Fonte: NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS (2009, p. 4).

Foi mostrado aos alunos que assim como a folha da samambaia, outros exemplos ilustram a ideia desta propriedade, tais como: o brócolis romanesco (Figura 3.9), a árvore carvalho (Figura 3.10a), os pulmões (Figura 3.10b) e os fractais matemáticos (Figuras 3.11 e 3.12).

Figura 3.9: Brócolis Romanesco
Fontes: http://vandretec.blogspot.com/2010/03/fractais-o-que-sao.html, http://algol.fis.uc.pt/quark/viewtopic.php?f=11&t=199.

Figura 3.10: Árvore Carvalho e Pulmões
Fonte: http://matematicanacidadela.blogspot.com/2007/06/fractais.html

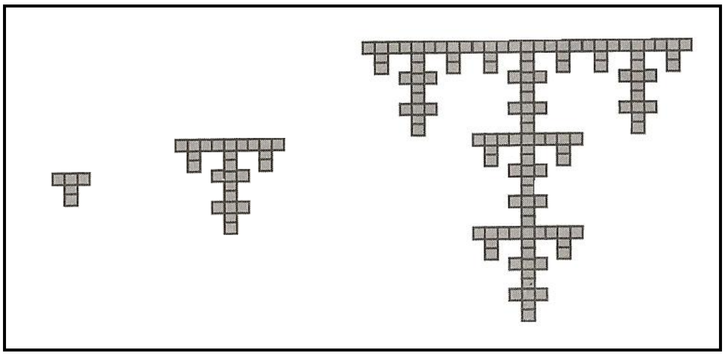


Figura 3.11: Fractal Pentaminó em T
Fonte: BARBOSA (2005, p.94).

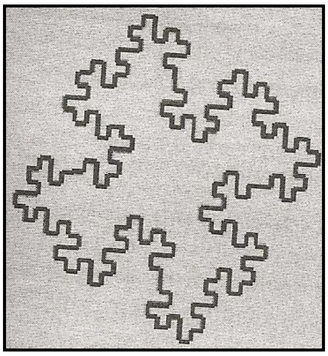


Figura 3.12: Ilha quadrangular de Koch
Fonte: BARBOSA (2005, p.53).

Apresentaram-se as aplicações dos fractais em algumas áreas do conhecimento, dentre elas a Arquitetura (Figura 3.13) e a Arte (Figura 3.14). Foi dado enfoque à área de Arte, com a mostra do *site* do Grupo Fractarte.

Figura 3.13: Fractais na Arquitetura.
Fonte: http://alinguagemdocaos.cygnusnet.org/2009/07/arquitetura-fractal.html

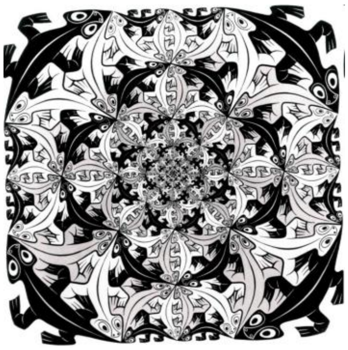


Figura 3.14: Fractais na área de Artes: Fractal Lagarto
Fonte: http://autopeta.wordpress.com/2009/10/15/m-c-escher/

Os alunos ficaram tão encantados com as imagens dos fractais na galeria de fotos que trocaram o papel de parede da máquina em uso pelas imagens que acharam mais interessantes na galeria, como podemos observar na Figura 3.15.

Figura 3.15: Imagens dos Fractais como papel de parede
Fonte: Autora

Este fato vem confirmar o que Barbosa (2005, p.14) relata que "o despertar e desenvolver do senso estético pode ser muito bem aproveitado com o tema *fractais* [...]".

Gonçalves (2007, p. 7) afirma que "[...] a construção, a manipulação e a observação levam à percepção da auto-semelhança, esta, por sua vez, facilita o processo de generalização dos elementos matemáticos que compõem o estudo de Progressões Geométricas".

Sendo assim, atividades que permitem a exploração dos fractais se tornam interessantes à medida que os alunos conseguem perceber os conceitos de sequências e P.G. envolvidos nas mesmas.

Para iniciar esse estudo**,** foi feita a leitura do significado da palavra sequência segundo o dicionário Aurélio e apresentaram-se alguns exemplos de situações do cotidiano em que este conteúdo está presente. A partir desses exemplos, buscou-se uma classificação para as sequências tais como finitas, infinitas e numéricas.

Ainda desses exemplos, a professora em formação destacou as sequências (1, 3, 5, 7) e (2, 4, 8, 16) que possuíam regularidade entre os termos e perguntou aos alunos se conseguiam identificá-las. Na primeira sequência, estes conseguiram observar que, qualquer termo, a partir do segundo, é obtido somando dois ao anterior e na sequência (2, 4, 8, 16) de um termo para o próximo multiplicava por dois. Então a professora em formação generalizou, dizendo que quando é constante a diferença entre um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, e seu antecedente, esta sequência é chamada Progressão Aritmética. E quando é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente, a sequência é chamada Progressão Geométrica. A professora ressaltou que a sequência que iria ser abordada nesse projeto de pesquisa era a Progressão Geométrica.

Com o intuito de ilustrar o estudo de Sequências, foi apresentada aos alunos a Sequência de Fibonacci.

Para resolver o problema gerador desta Sequência, a professora em formação elaborou um esquema (Figura 3.16), indicando o número de casais de coelhos a cada mês. Ao completar o sexto mês, foi perguntado quantos casais de coelhos teriam no sétimo mês sem colocar as figuras, e uma aluna respondeu, corretamente, treze. Foi perguntado como ela resolveu essa questão e a mesma fez referência ao livro "CÓDIGO DA VINCI" de Dan Brown. A professora em formação pediu que os alunos analisassem os termos da Sequência e eles conseguiram identificar a regularidade entre os mesmos, isto é, que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois imediatamente anteriores. Percebeu-se que, dentre esses alunos, uma aluna leu na apostila esta propriedade, o que possibilitou uma reflexão sobre a retirada de tal trecho. Em seguida, a professora em formação perguntou quantos casais de coelhos teriam no nono mês e os alunos responderam corretamente.

Figura 3.16: Esquema da Sequência de Fibonacci
Fonte: Autora

Na introdução da parte teórica referente à Progressão Geométrica, foi utilizada uma situação na qual formou-se uma sequência da produção diária de certo produto, da primeira à sexta hora. Foi pedido aos alunos que identificassem os termos e o quociente entre cada termo, a partir do segundo, pelo termo anterior dessa sequência. Definiu-se então Progressão Geométrica e nomeou-se esse quociente de razão e o representou pela letra *q*.

A seguir, fez-se a relação entre Progressão Geométrica e Média Geométrica.

Para finalizar, a professora em formação pediu aos alunos que formassem uma P.G., indicando um número para o primeiro termo e outro para a razão.

Em seguida, explicou que o objetivo do projeto era desenvolver os conceitos de termo geral e da soma dos termos de uma P.G. finita por meio dos fractais, com o auxílio do *software* Geometricks.

Sendo assim, a professora em formação apresentou o *software* Geometricks, que possibilita, por exemplo, a construção de objetos geométricos, determina a distância entre pontos, a medida de ângulos, as áreas de polígonos e circunferências**,** os lugares geométricos de pontos e retas e gera figuras fractais.

A professora em formação mostrou a tela de apresentação do Geometricks (Figura 3.17) identificando os seguintes elementos: barra de menus, caixa de entrada de dados, barra de rótulos, área de trabalho, barra de *status*, barra de grade e zoom, barra de atributos e caixa de saída de dados.

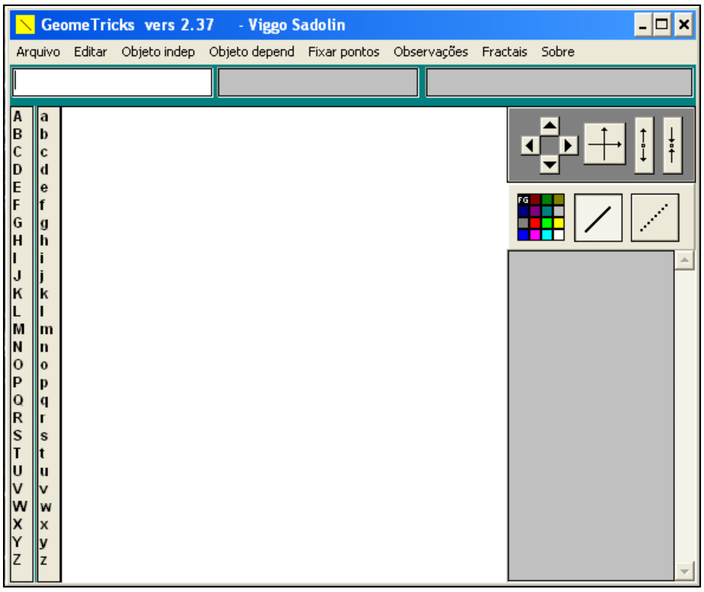


Figura 3.17: Tela do Geometricks.
Fonte: Autora

Em seguida, foi sendo apresentado cada menu da barra de menus e construíram-se os objetos geométricos que seriam utilizados nas atividades como por exemplo: ponto, ponto na grade, segmento de reta, circunferências entre outros. Os alunos conseguiram manipular o *software* com facilidade.

Na realização da primeira parte da Atividade 1, os alunos construíram alguns dos níveis do fractal Floco de Neve de Koch (Figura 3.18) com o auxílio do *software* Geometricks e do esquema de construção, disposto na apostila (Apêndice A). De modo geral, fizeram essa atividade corretamente sem apresentar muitas dúvidas, porém a professora em formação teve que intervir na construção referente ao item b.1, relativo à construção do nível 1 do fractal.

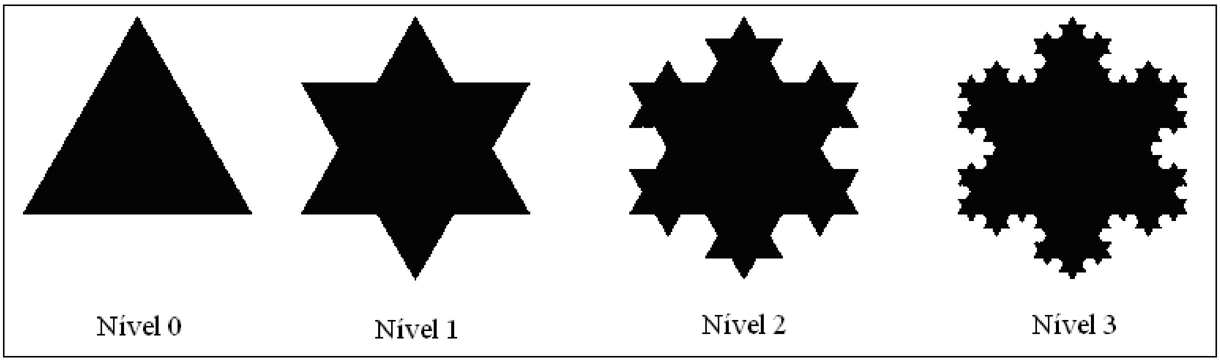


Figura 3.18: Fractal Floco de Neve de Koch.
Fonte: Autora

Esta intervenção se deve ao fato de que, na construção do segmento AB, do item a.4, foi pedido para os alunos considerarem nove espaços de distância entre os pontos, e alguns o fizeram considerando outras medidas. Então, foi solicitado a esses alunos que clicassem em um dos pontos do segmento e arrastassem até obter o espaçamento desejado. Mesmo com a alteração feita na apostila, a partir de sugestões decorrentes do teste exploratório, não percebeu-se que no item b.1, que consiste em dividir os segmentos do triângulo em três partes iguais, foi pedido para fixar o valor 3 para o raio da circunferência. Para que não haja esse tipo de intervenção, o aluno tem que digitar na caixa **Circunferência – fixe raio** a terça parte do segmento AB construído em valor decimal.

A professora em formação finalizou essa parte com um pequeno histórico sobre esse fractal e destacou o algoritmo usado nessa construção (Figura 3.19).

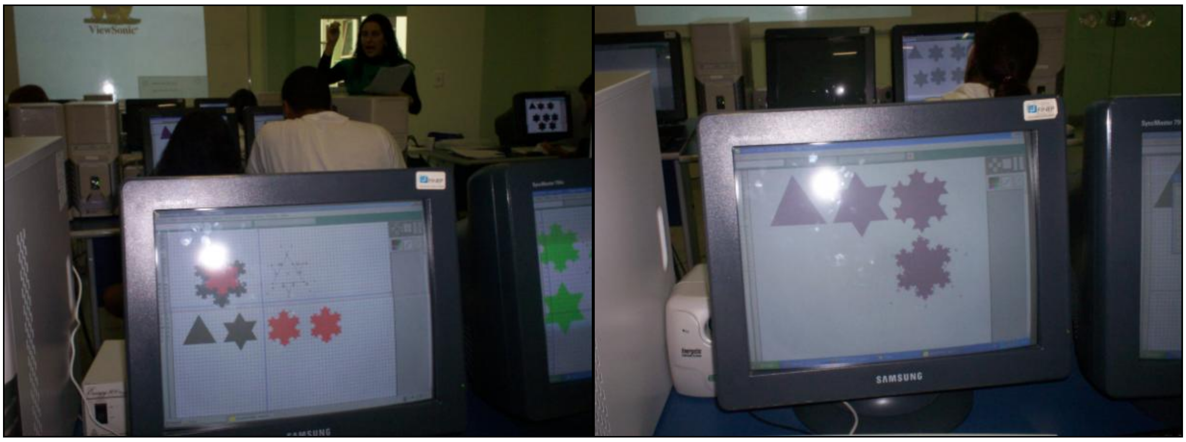


Figura 3.19: Construção do Fractal Floco de Neve de Koch.
Fonte: Autora

A partir daí, os alunos responderam sozinhos às seis questões dessa atividade cujo objetivo era de deduzir a fórmula do termo geral da P.G. finita.

Observando os alunos na resolução da segunda parte da Atividade 1, a professora em formação percebeu que na quarta questão, alguns deles tiveram dificuldade em relacionar o nível do fractal ao elemento a_n da sequência apresentada na questão anterior. Assim, pediu-se a esses alunos que fizessem uma coluna ao lado da coluna a_n na tabela da questão 3, representando o nível do fractal e associando o índice *n* do elemento a_n com esse nível.

Ao final da aula, os alunos entregaram a apostila para análise das respostas.

3.2.2. Encontro do dia 19/06/2010.

A aula foi iniciada com a correção da segunda parte da Atividade 1, na qual indicaram-se as diferentes respostas dadas pelos alunos para efeito de discussão.

Como todos preencheram corretamente a tabela que antecede a questão 1 (Figura 3.20), a mesma apenas foi mostrada.

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
0	3	1
1	12	1/3
2	48	1/9 .
3	192	1/27

Figura 3.20: Resposta da tabela da 2ª parte da Atividade 1 de um dos alunos.

Na questão 1, que consiste em registrar as sequências e verificar quais delas representam P.G., nenhum dos alunos respondeu de forma completa à questão.

Quanto ao registro das sequências, 50% dos alunos registraram corretamente as duas sequências, 40% dos alunos registraram corretamente apenas a sequência referente à quantidade de segmentos e 10% não fizeram registros.

Quanto à justificativa, 80% dos alunos justificaram pelo conceito de razão, 10% dos alunos, pela propriedade da média geométrica e 10% dos alunos, pela definição de P.G. (Figura 3.21).

1. Registre as sequências referentes a quantidade de segmentos e ao comprimento de cada segmento que se obteve na tabela. Essas sequências formam uma P.G.? Justifique.

Quant. segmentos ⇒ (3, 12, 48, 192...) é: formam uma progressão geométrica porque
Comp. sequência ⇒ (1, 1/3, 1/9, 1/27, ...) eles possuem a mesma média geométrica

Sim. Porque é uma sequência de números reais em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º, e o termo antecedente é sempre constante. (3, 12, 48, 192

3 ; 12 ; 48 ; 192 Sim, pois multiplica-se por 4
1 ; 1/3 ; 1/9 ; 1/27 Sim, pois divide por 3

Sim, porque $12^2 = 48.3$, a quantidade de segmentos forma (3, 12, 48, 192 ...) e dividindo um termo pelo seu antecedente dá sempre um mesmo número

Sim. Os segmentos são definidos através da sequência de multiplicação por 4 e o comprimento do segmento pela divisão por 3

Figura 3.21: Respostas da primeira questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

A professora em formação enfatizou que o enunciado requer o registro das sequências que correspondem à quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento. E que a justificativa, dentre as apresentadas, que utilizava a definição de P.G., era a correta. Ainda comentou que a justificativa pelo conceito de razão não ficou completa, pois é preciso dizer que tem que multiplicar o termo anterior por quatro ou um terço para encontrar o próximo termo da sequência. E ressaltou que, na justificativa pela propriedade de média geométrica, a relação feita com a média geométrica se dá para uma P.G. de termos positivos. Após a discussão sobre as respostas encontradas, foi ressaltada a resposta correta.

Na questão 2, os alunos deveriam responder a quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento no nível 4 do fractal Floco de Neve de Koch. Essa questão teve 100% de acerto.

Nessa questão, foram encontradas respostas com cálculos e outras não (Figura 3.22), então para saber como todos tinham feito, a professora em formação perguntou aos alunos como fizeram para obter as respostas das questões e os alunos disseram que, em relação à quantidade de segmentos, multiplicaram por quatro e quanto ao comprimento de cada segmento, por um terço.

2. Se construirmos esse fractal no nível 4, quantos segmentos teremos? E qual será o comprimento de cada segmento?

768 segmentos com comprimento de $\frac{1}{81}$

Segmentos = 192 . 4 = 768 Comprimento = $\frac{1}{81}$ u.c.

Figura 3.22: Respostas da segunda questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

A terceira questão apresenta uma tabela em que os alunos teriam que completar a segunda coluna referente à quantidade de segmentos. Para tal deveriam associar o nível do fractal ao elemento a_n da sequência (Figura 3.23). Todos os alunos completaram corretamente a tabela.

3. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de segmentos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

a_n	Quantidade de segmentos
0 a_1	3
1 a_2	12 (3x4)
2 a_3	48 (12x4)
3 a_4	192 (48x4)
4 a_5	768 (192x4)

Figura 3.23: Resposta da terceira questão da Atividade 1 de um dos alunos.

Na questão 4, foi pedido aos alunos que associassem o nível do fractal à posição do elemento a_n na sequência. Obtiveram-se duas opções de resposta: $n = 11$ e a_{11} (Figura 3.24). Observou-se que os alunos que responderam a_{11} confundiram a posição do elemento com o elemento a_n da sequência. A professora em formação leu a questão enfatizando o que estava sendo pedido. Então os alunos responderam que era $n = 11$. O percentual de acerto dessa questão foi de 60%.

4. O fractal correspondente ao nível 10 está associado com um elemento a_n da sequência acima. Determine n.

$n = 11$

a_{11}

Figura 3.24: Respostas da quarta questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

Na questão 5, os alunos deveriam preencher duas tabelas. Na primeira, foi dado o nível do fractal e estes tinham que determinar o termo da sequência, a quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento. E, na segunda, foi dado o termo da sequência (a_n) e os alunos deveriam determinar o nível do fractal, a quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento.

Quanto ao preenchimento da primeira tabela, todos os alunos responderam corretamente o termo da sequência no nível 10. Quanto às respostas referentes à quantidade de segmentos e ao comprimento de cada segmento, obtiveram-se três situações. Na primeira (Figura 3.25), que corresponde a 80% dos alunos, estes calcularam os valores de cada nível do fractal até chegar ao nível 10 (Figura 3.26), porém não perceberam a relação existente entre um nível do fractal e seu anterior.

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
10	a_{11}	3.145.728	$\frac{1}{59.049}$

Figura 3.25: Resposta da quinta questão da Atividade 1 de um dos alunos.

a_n	Quantidade de segmentos
a_1	3
a_2	12
a_3	48
a_4	192
a_5	768

$a_6 = 3072$
$a_7 = 12288$
$a_8 = 49152$
$a_9 = 196608$
$a_{10} = 786432$
$a_n =$

Figura 3.26: Cálculos, de um dos alunos, para a quinta questão da Atividade 1.

Na segunda, que corresponde a 10% dos alunos, os mesmos indicaram as respostas em função do termo anterior (Figura 3.27a). Na terceira, 10% dos alunos responderam o mesmo que na situação anterior, acrescida da resposta $3 \cdot 4^{10}$ (Figura 3.27b) para a quantidade de segmentos.

	Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
a	10	a_{11}	$4 \cdot a_{10}$	$a_{10} \cdot \frac{1}{3}$
b	10	a_{11}	$3 \cdot 4^{10}$ ou $a_{10} \cdot 4$	$a_{10} \cdot \frac{1}{3}$

Figura 3.27: Resposta da quinta questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

A professora em formação expôs as três situações e discutiu juntamente com os alunos sobre a relação entre um nível e o anterior, no caso da primeira situação. O mesmo foi feito com a resposta $3 \cdot 4^{10}$ em que se buscou compreender a forma de raciocínio que a originou (Figura 3.28).

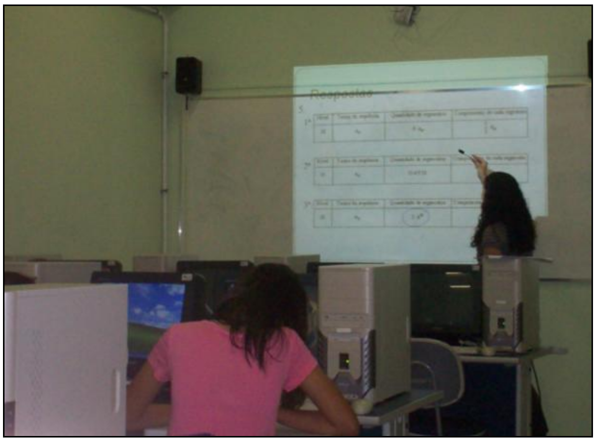


Figura 3.28: Correção da primeira tabela da quinta questão da Atividade 1.
Fonte: Autora

Em relação à resposta do comprimento de cada segmento, nenhum aluno a expressou como $\frac{1}{3^{10}}$.

Com o intuito de alcançar tal resposta, que favorece a possíveis generalizações, a professora em formação projetou a Tabela 4.1 no quadro com o nível e o comprimento de cada segmento e pediu aos alunos que observassem o denominador das frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{27}$. Eles responderam que eram potências de três. Então, o registro foi feito por todos da seguinte forma: $\frac{1}{3^1}$, $\frac{1}{3^2}$ e $\frac{1}{3^3}$. Assim, associando o expoente ao nível do fractal, eles concluíram que no nível 10, o comprimento de cada segmento é $\frac{1}{3^{10}}$.

Tabela 4.1: Sexta questão da Atividade 1.

Nível	Comprimento de cada segmento
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$
10	

Foi discutida, também, a forma correta na escrita do a_n, já que nessa atividade os alunos o registraram de três maneiras: a_{11}, $a11$ e a^{11} (Figura 3.29).

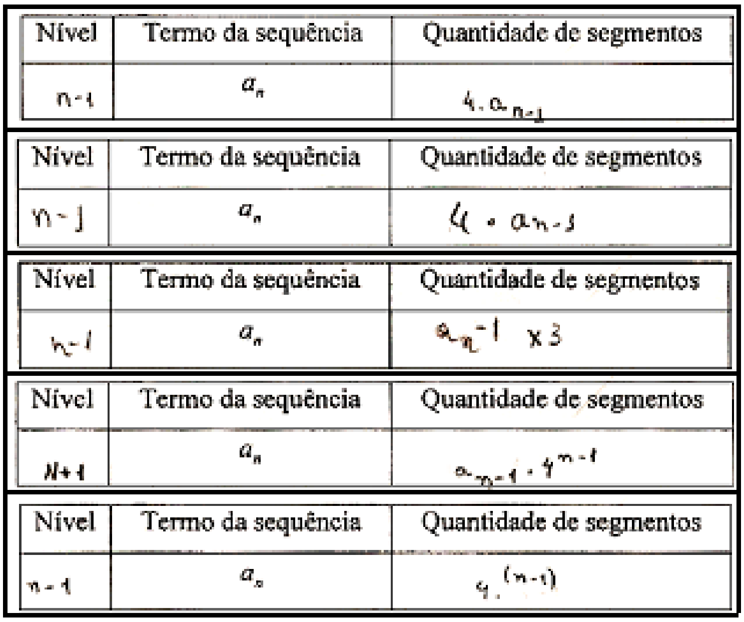
Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
10	a_{11}	3.145.728	$\frac{1}{59.049}$
10	a11	3145728	1/59049
10	a^{11}	3.145.728	$\frac{1}{59.049}$

Figura 3.29: Respostas da quinta questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

Ainda na quinta questão, quanto ao preenchimento da primeira coluna da segunda tabela, os alunos tinham que associar o termo da sequência com o nível. Obtiveram-se duas respostas: $n+1$ e $n-1$.

Para discutir as respostas encontradas, a professora em formação construiu uma tabela idêntica à anterior e pediu aos alunos que observassem a relação entre os números que expressam o nível do fractal e os que expressam o índice do termo a_n. Foi perguntado se 10 é igual a 11+1 ou 11-1. Sendo assim, dentre as respostas dadas**,** qual é a correta, $n+1$ ou $n-1$? E os alunos responderam corretamente $\mathrm{n}-1$. Nesse item, o percentual de acerto foi de 70% e 10% dos alunos não responderam.

Em relação à quantidade de segmentos, as respostas obtidas foram as seguintes: $4 \cdot a_{n-1}$, $a_{n-1} \cdot 4^{n-1}$, 4^{n-1} e $3 \cdot a_{n-1}$ (Figura 3.30). O percentual de acerto foi de 60% referente aos alunos que responderam $4 \cdot a_{n-1}$.



Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos
n-1	a_n	$4.a_{n-1}$

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos
n-1	a_n	$4 \cdot a_{n-1}$

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos
n-1	a_n	a_n-1 x3

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos
N+1	a_n	$a_{n-1} \cdot 4^{n-1}$

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos
n-1	a_n	$4.^{(n-1)}$

Figura 3.30: Respostas de parte da segunda tabela da quinta questão da Atividade 1de alguns dos alunos.

Para analisar as respostas $a_{n-1} \cdot 4^{n-1}$ e 4^{n-1}, a professora em formação pediu que os alunos observassem a expressão $3 \cdot 4^{10}$, encontrada na primeira tabela, e percebessem a relação entre o expoente do número quatro e o nível do fractal (Figura 3.31). Os alunos verificaram, então, que essas respostas não estavam corretas. Para analisar as respostas $4 \cdot a_{n-1}$ e $3 \cdot a_{n-1}$ foi perguntado se eles multiplicaram o termo anterior da sequência referente à quantidade de segmentos por 4 ou por 3 e responderam por 4. Dessa forma, todos entenderam que, dentre as opções de resposta, a mais adequada era $4 \cdot a_{n-1}$.

Figura 3.31: Correção da segunda tabela da quinta questão da Atividade 1.
Fonte: Autora

No preenchimento da coluna referente ao comprimento de cada segmento, foram encontradas duas respostas corretas: 20% dos alunos responderam $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ e 30% responderam $\frac{1}{3} \cdot a_{n-1}$. A outra opção foi $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}$ respondida por 50% dos alunos.

Na análise das respostas (Figura 3.32), a professora em formação pediu que os alunos observassem a resposta no nível 10 da tabela anterior que foi $\left(\frac{1}{3^{10}}\right)$. Dessa forma, perceberam que para o nível $n-1$, o expoente do 3 será $n-1$. As respostas $\frac{1}{3^{n-1}}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ são equivalentes e estão corretas. Foi também considerada correta a resposta $\frac{1}{3} \cdot a_{n-1}$.

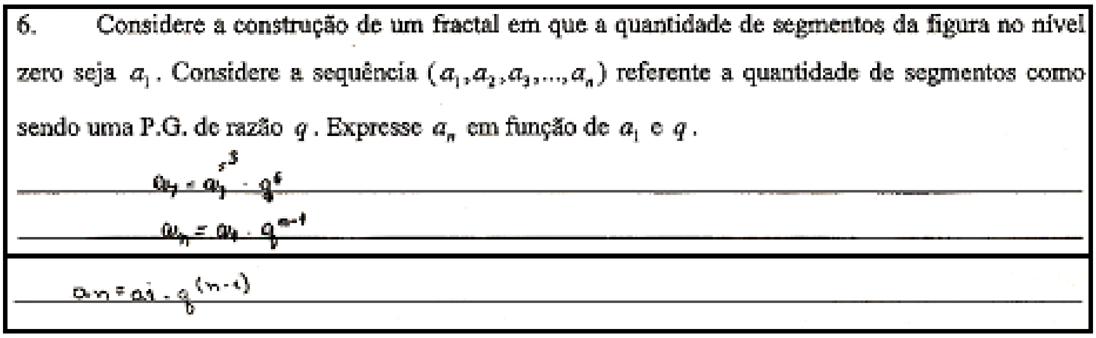
Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
$n-1$	a_n	$a_n-1 \times 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$ m·c
$N+1$	a_n	$a_{n-1} \cdot 4^{n-1}$	$a_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$
$n-1$	a_n	$4 \cdot a^{(n-1)}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}$

Figura 3.32: Respostas da segunda tabela da quinta questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

A professora em formação ressaltou a forma correta de escrever a_{n-1}, mostrando as diferentes opções de escrita que surgiram para esta expressão.

Na questão 6, os alunos tinham que deduzir a fórmula do termo geral da P.G.

Nesta questão, o percentual de acerto foi de 50% (Figura 3.33) e o os outros alunos deixaram em branco. Supõe-se que esse fato ocorreu por esta questão ter sido respondida no final da aula.


6. Considere a construção de um fractal em que a quantidade de segmentos da figura no nível zero seja a_1. Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ referente a quantidade de segmentos como sendo uma P.G. de razão q. Expresse a_n em função de a_1 e q.

r^3

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$an = a1 \cdot q^{(n-1)}$

Figura 3.33: Respostas da sexta questão da Atividade 1 de alguns dos alunos.

Essa questão foi corrigida partindo do resultado referente à quantidade de segmentos, obtido na segunda tabela da quinta questão. Foi perguntado qual é o significado do 3 e do 4 na P.G. Após responderem, respectivamente, primeiro termo e razão, os alunos substituíram os números 3 e 4 pelos seus significados a_1 e q, respectivamente, e encontraram a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Após a correção da segunda parte da Atividade 1, foi entregue o exercício 3.1 para que os alunos o resolvessem individualmente. Neste exercício, é apresentado o fractal Poeira de Cantor (Figura 3.34) seguido do algoritmo referente à sua construção.

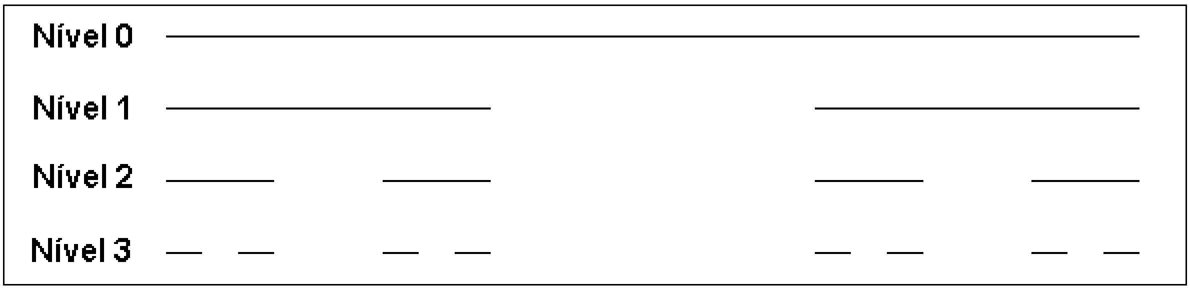


Figura 3.34: Fractal Poeira de Cantor.
Fonte: Autora

No início da resolução deste exercício, a professora em formação percebeu a dificuldade de interpretação do texto por parte dos alunos e os questionou sobre qual seria o comprimento de cada segmento no nível 1, chamando a atenção que no nível 0 é 1u.c. Pediu que registrassem as sequências referentes ao comprimento de cada segmento e ao número de segmentos para auxiliar na resolução das questões. Ao final, os alunos conseguiram resolver os problemas e o exercício foi recolhido para análise.

Foi iniciada a primeira parte da Atividade 2 com a construção do fractal Triângulo de Sierpinski (Figura 3.35). O conhecimento sobre o *software* e o encaminhamento dado na apostila para a construção desse fractal foram determinantes para que os alunos não tivessem dúvidas na construção do mesmo. Como o tempo de construção do fractal variou entre os alunos, a professora em formação pediu que as questões referentes à segunda parte dessa atividade fossem respondidas logo após o término da primeira.

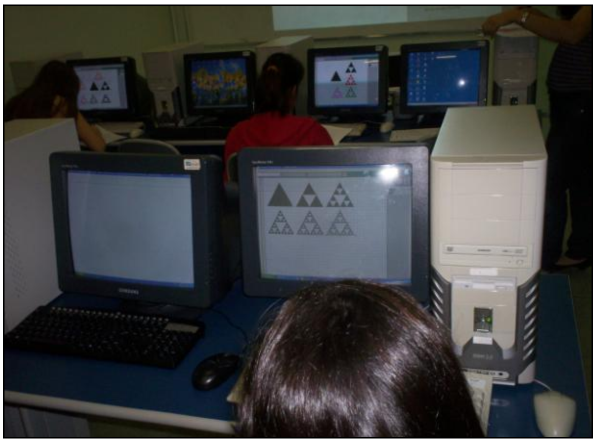


Figura 3.35: Alunos construindo o Fractal Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Autora

Com o fractal Triângulo de Sierpinski construído do nível 0 ao 3, os alunos preencheram a tabela que antecede a questão 1. No preenchimento desta, uma aluna perguntou à professora em formação “Como pode do 13 ir para o 40, qual o valor eu vou estar multiplicando?”[6] (informação verbal). Percebe-se que a aluna estranha o fato de existir uma razão entre os números 40 e 13 que não é expressa por um valor inteiro. A professora em formação perguntou a ela se, ao analisar os termos da sequência, esta formaria uma P.G. e ela percebeu que a sequência (1, 4, 13, 40) não é uma P.G.

Vale ressaltar que após aprenderem alterar a cor de um objeto no software, os alunos utilizaram cores diferentes para a construção dos níveis do fractal. Com isso, fizeram questionamentos sobre as palavras branco e preto presentes na tabela. Esta abordagem inesperada gerou uma reflexão sobre uma possível mudança na escrita desta questão.

Após o preenchimento da tabela, os alunos continuaram a resolução das outras questões. Na questão 6, os alunos não conseguiram indicar o número total de triângulos (soma dos termos da P.G.) em função de *n*. Então, a professora em formação acrescentou as

[6] Aluno H. Pergunta feita durante o encontro. Campos dos Goytacazes, 19 de junho de 2010.
Utilizou-se na identificação da aluna a letra H para preservar a identificação da mesma.

expressões $\frac{1\cdot(3^1-1)}{3-1}$ e $\frac{1\cdot(3^2-1)}{3-1}$ às igualdades $S_1=1$ e $S_2=4=1+3$ da questão 2c (Figura 3.36), respectivamente, conforme pode ser observada na Figura 3.39. A partir dessas igualdades, os alunos encontraram S_3 e S_4 nesta questão e buscou-se então a generalização em S_n com base nessas deduções.

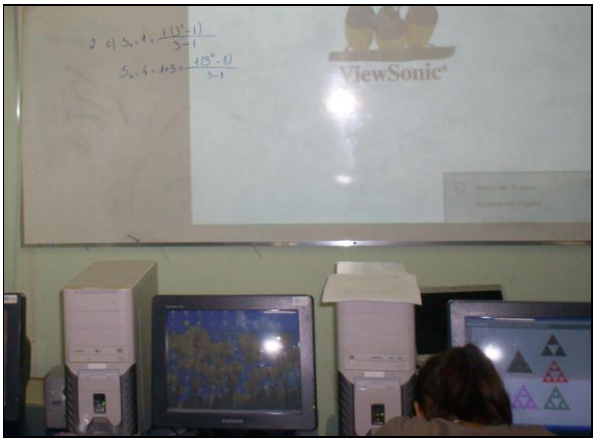


Figura 3.36: Fórmula para S_1 e S_2 do item c da segunda questão da Atividade 2.
Fonte: Autora

Como na sétima questão os alunos apresentaram dificuldade em utilizar a expressão encontrada para S_n na questão 6, pediu-se aos mesmos que refletissem sobre o significado do 3 e do 1 nesta expressão.

Ao final, a atividade 2 foi recolhida para a análise das respostas.

3.2.3. Encontro do dia 26/06/2010.

A professora em formação iniciou a aula com o pequeno resumo da construção e da parte histórica do fractal Triângulo de Sierpinski.

Da mesma forma que na Atividade 1, foram expostas para discussão as respostas dos alunos.

O percentual de acerto no preenchimento da primeira tabela da segunda parte da Atividade 2 (Figura 3.37) foi de 100%, assim os valores obtidos foram apenas mostrados aos alunos.

Nível	Quantidade de triângulos novos (pretos)	Nº total de triângulos (brancos e pretos)
0	1	1
1	3	4
2	9	13
3	27	40

Figura 3.37: Resposta da tabela para a segunda parte da Atividade 2 de um dos alunos.

A partir desta tabela, foi perguntado na primeira questão qual(is) das sequências obtidas na mesma forma(m) uma P.G., seguido de justificativa. Na correção, a professora em formação apresentou as cinco opções de respostas encontradas (Quadro 3.1).

Quadro 3.1: Respostas da questão 1 da Atividade 2 de alguns dos alunos.

Número	Respostas
1	1. Qual (is) das sequências obtidas nesta tabela formam uma P.G.? Justifique. A 1ª sequência, porque a razão obtida resultará sempre em 3, ou seja, uma razão constante.
2	Quantidade de triângulos novos, basta multiplicar por 3.
3	A primeira, pois o resultado dividido pelo seu antecedente vai ser sempre igual a 3.
4	(1, 3, 9, 27, ...) Porque ela é formada de números reais e tem uma mesma razão para cada número dividido pelo seu antecessor
5	(1, 3, 9, 27). Porque é uma sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º, e o termo antecedente é sempre o mesmo.

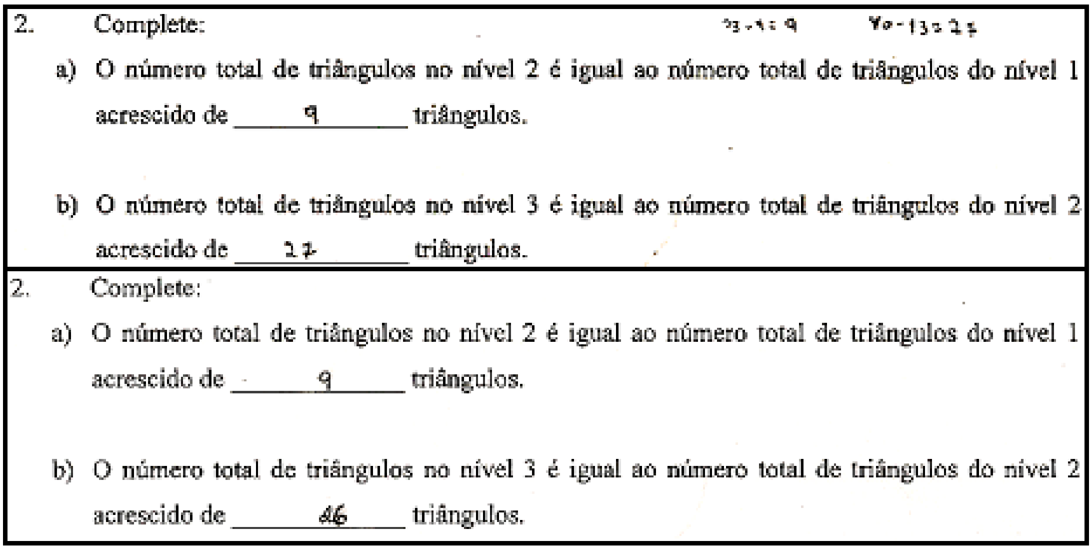
Percebe-se nas respostas dos alunos a dificuldade na escrita com a falta de clareza e de respostas completas.

Nas quatro primeiras respostas, os alunos tentaram justificar utilizando o conceito de razão. Nas três primeiras, a professora em formação retomou o conceito de razão em uma P.G., lembrando que a divisão de um termo pelo anterior ocorre a partir do segundo termo. Sendo que, na terceira, foi comentado que não basta serem apenas números reais, estes têm que ser não nulos. Na quarta mostrou-se um contraexemplo com a sequência $(2,3,4,5,15,45,135,\ldots)$ em que a multiplicação por três ocorre a partir do quinto termo.

A professora em formação expôs a quinta resposta, mostrando que o registro da sequência e a justificativa pela definição de P.G. estavam corretos.

Nesta questão, os percentuais foram: 10% referente a cada uma das três primeiras respostas, 50% para a quarta, 10% para a quinta e 10% dos alunos apenas registraram a sequência, mas não justificaram.

Os itens a e b da segunda questão tratavam do acréscimo referente ao número de triângulos de um nível do fractal para o nível imediatamente superior. Os alunos responderam nove para o item a e vinte e sete para o item b (Figura 3.38). O percentual de acerto no item a foi de 100% e no item b de 90%. No item b, 10% dos alunos colocaram o número vinte e seis e se supõe que foi erro de contagem no número de triângulos.



2. Complete: 13 - 4 = 9 40 - 13 = 27

a) O número total de triângulos no nível 2 é igual ao número total de triângulos do nível 1 acrescido de ___9___ triângulos.

b) O número total de triângulos no nível 3 é igual ao número total de triângulos do nível 2 acrescido de ___27___ triângulos.

2. Complete:

a) O número total de triângulos no nível 2 é igual ao número total de triângulos do nível 1 acrescido de ___9___ triângulos.

b) O número total de triângulos no nível 3 é igual ao número total de triângulos do nível 2 acrescido de ___26___ triângulos.

Figura 3.38: Respostas dos itens a e b da segunda questão da Atividade 2 de alguns dos alunos.

No item c, os alunos tinham que considerar as respostas anteriores para escrever a sequência referente ao número total de triângulos. Neste item, foram encontradas três opções de respostas (Figura 3.39), sendo que duas destas estavam corretas. Na primeira resposta, que foi $S_3 = 13 = 1 + 12$ e $S_4 = 40 = 1 + 39$, a professora em formação disse aos alunos que é correto dizer que as somas $1 + 12$ e $1 + 39$ equivalem a 13 e 40, respectivamente. Estas somas, porém, não estão de acordo com o que o enunciado pede que é seguir a ideia dos itens a e b, ou seja, o número total de triângulos em um determinado nível é igual ao número total de triângulos do nível anterior, acrescido da quantidade de triângulos novos daquele nível. O percentual desta resposta foi de 30%. As outras duas respostas que seguiram a ideia dos itens a e b foram consideradas corretas e o percentual de acerto foi de 70%.

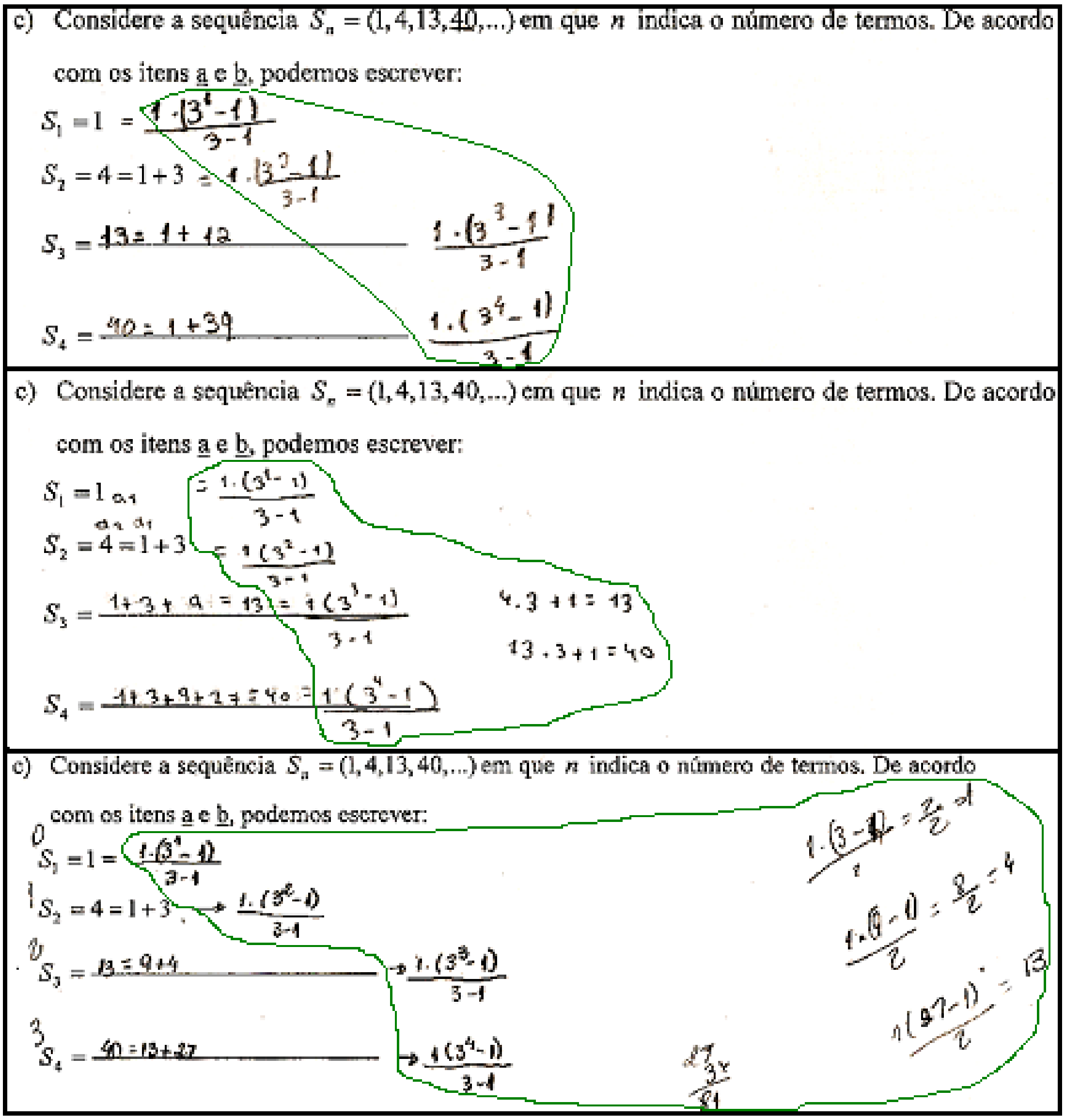
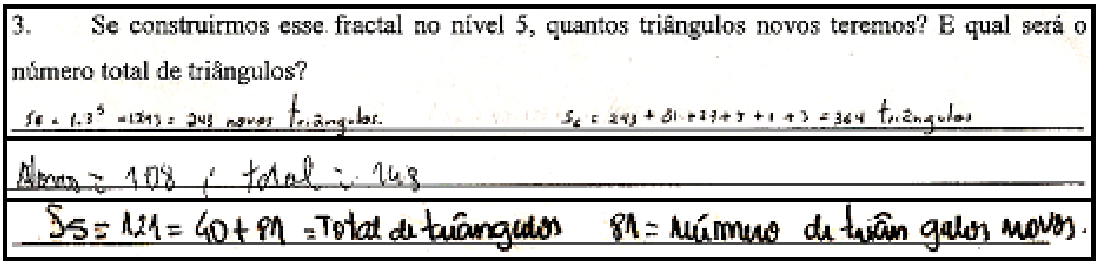


Figura 3.39: Respostas do item c da segunda questão da Atividade 2 de alguns dos alunos.

É importante ressaltar que a presença das expressões destacadas se refere aos cálculos feitos para encontrar a expressão do número total de triângulos da sexta questão.

Na terceira questão, foi pedida a quantidade de triângulos novos e o número total de triângulos no nível 5. Analisando as respostas, a professora em formação percebeu que muitos alunos calcularam primeiro o nível 4 e depois o nível 5.

Nesta questão, foram encontradas três opções de resposta (Figura 3.40). Na primeira, 70% dos alunos responderam corretamente, ou seja, 243 triângulos novos e 364 triângulos no total. A segunda opção de resposta, que corresponde a 20% dos alunos, foi 108 para os triângulos novos e 148 para o número total de triângulos. A falta de indicação de cálculos impossibilitou a professora em formação de analisar melhor essa resposta. E 10% dos alunos associaram o número total de triângulos no nível 5 a S_5. A professora em formação retornou ao item c da segunda questão e os alunos observaram que, por exemplo, $S_2 = 4$ corresponde ao número total de triângulos no nível 1, $S_3 = 13$ corresponde ao número total de triângulos no nível 2. Sendo assim, no nível 5, teriam que calcular S_6.


3. Se construirmos esse fractal no nível 5, quantos triângulos novos teremos? E qual será o número total de triângulos?

$S_6 = 1.3^5 = 1.243 = 243$ novos triângulos. $S_6 = 243 + 81 + 27 + 9 + 1 + 3 = 364$ triângulos

Novos = 108 , total = 148

$S_5 = 121 = 40 + 81$ = Total de triângulos 81 = número de triângulos novos.

Figura 3.40: Respostas de alguns dos alunos da terceira questão.

Na quarta questão, os alunos tinham que associar os termos da sequência referente à quantidade de triângulos novos e observar que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

A tabela foi mostrada para confirmação das respostas dos alunos (Figura 3.41). O percentual de acerto foi de 80% e o restante dos alunos colocou a sequência referente ao número total de triângulos mas, após a professora em formação ler o enunciado e enfatizar que a sequência pedida era a da quantidade de triângulos novos, os alunos perceberam o erro cometido.

4. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de triângulos novos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

	a_n	Quantidade de triângulos novos
nível 0	a_1	1
1	a_2	3
2	a_3	9
3	a_4	27
4	a_5	81
5	a_6	243

a_n	Quantidade de triângulos novos
a_1	1
a_2	4
a_3	13
a_4	40
a_5	121
a_6	364

16.9

Figura 3.41: Respostas da quarta questão da Atividade 2 de alguns dos alunos.

Na quinta questão, foi pedido aos alunos que relacionassem o fractal correspondente ao nível 10 com um elemento da sequência a_n.

Foram encontradas, nesta questão, três opções de respostas: a_{11}, $n = 11$ e n^{11} (Figura 3.42). Para a correção, a professora em formação questionou os alunos perguntando qual seria a resposta correta, enfatizando o que era pedido na questão, o elemento da sequência. Na questão, 70% dos alunos responderam, corretamente, a_{11}. Foi enfatizado para os 20% dos alunos que responderam n^{11} que essa forma de escrita não está identificando nem o nível do fractal nem o elemento da sequência. E para os 10% dos alunos que responderam $n = 11$ foi repetido que a questão pedia o elemento da sequência já que o nível foi dado $n = 10$. Considera-se que estas duas últimas respostas se devem à falta de compreensão em relação ao significado do nível (n) e do elemento da sequência (a_n).

5. O fractal correspondente ao nível 10 está relacionado com qual elemento da sequência a_n?

a_{11}

$n = 11$

n^{11}

Figura 3.42: Respostas de alguns dos alunos da quinta questão.

Na sexta questão, foi pedido aos alunos que representassem o número total de triângulos em função do primeiro termo e da razão da P.G. indicada pela quantidade de triângulos novos.

Para correção, foi apresentada a Tabela 4.2 com os valores preenchidos até o nível 3 e observado que um aluno preencheu errado a quantidade de triângulos novos colocando do nível 0 ao 3 a seguinte sequência $(0,1,3,9)$. Então, a professora em formação voltou à figura correspondente aos níveis do fractal e pediu que observassem a sequência de triângulos novos e os alunos puderam perceber que a sequência adequada é $(1,3,9,27)$.

Tabela 4.2: Questão 6 da Atividade 2 preenchida até o nível 3.

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
0	a_1	1	1
1	a_2	3	4
2	a_3	9	13
3	a_4	27	40
⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	a_n		

Para a quantidade de triângulos novos no nível $n-1$, foram encontradas quatro opções de resposta (Figura 3.43). Na primeira opção, 10% dos alunos responderam n, a professora em formação exemplificou perguntando se é verdade que $a_2 = 2$ e os mesmos responderam que não, podendo assim, verificar que essa resposta não era adequada. A outra opção, com o mesmo percentual de resposta, foi $1 \cdot 3^n$. A professora em formação, então, atribuiu alguns valores e os alunos puderam perceber que esta resposta não estava correta. As duas últimas opções foram $1 \cdot 3^{n-1}$ e $3 \cdot a_{n-1}$, ambas corretas, porém, para calcular o enésimo termo por meio da expressão $3 \cdot a_{n-1}$, tem que conhecer o termo anterior. A professora em formação falou que para calcular, por exemplo, a_{100} teria que calcular até a_{99}, então é preferível a expressão $1 \cdot 3^{n-1}$. O percentual de acerto foi de 80%.

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos
0	a_1	1
1	a_2	3
2	a_3	9
3	a_4	27
⋮	⋮	
n-1	a_n	n

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos
0	a_1	0
1	a_2	1
2	a_3	3
3	a_4	9
⋮	⋮	⋮
n-1	a_n	$1 \cdot 3^n$

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos
0	a_1	$1 \to 1.3^0$
1	a_2	$3 \to 1.3^1$
2	a_3	$9 \to 1.3^2$
3	a_4	$27 \to 1.3^3$
⋮	⋮	⋮
n-1	a_n	$a_n = 1.3^{n-1}$

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos
0	a_1	1
1	a_2	3
2	a_3	9
3	a_4	27
⋮	⋮	⋮
n-1	a_n	$3 \cdot a_{n-1}$

Figura 3.43: Respostas de parte da tabela da sexta questão da Atividade2 de alguns dos alunos.

Foram encontradas três opções de resposta (Figura 3.44) para o preenchimento da coluna que corresponde ao número total de triângulos, no nível $n-1$. E 10% dos alunos responderam $\frac{1 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$ colocando no expoente do três $n-1$, o que na tabela corresponde ao nível. Para correção, a professora em formação retomou as somas do item c da segunda questão, destacadas na Figura 3.39 e pediu aos alunos que observassem o índice *n* do S_n e o expoente do número três. Os alunos, então, chegaram à conclusão de que a resposta adequada é $\frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$, que foi a resposta de 80% dos alunos. E o restante dos alunos respondeu a expressão que corresponde à fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita, ou seja, $\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$. Sendo assim, o percentual de acerto foi de 90%.

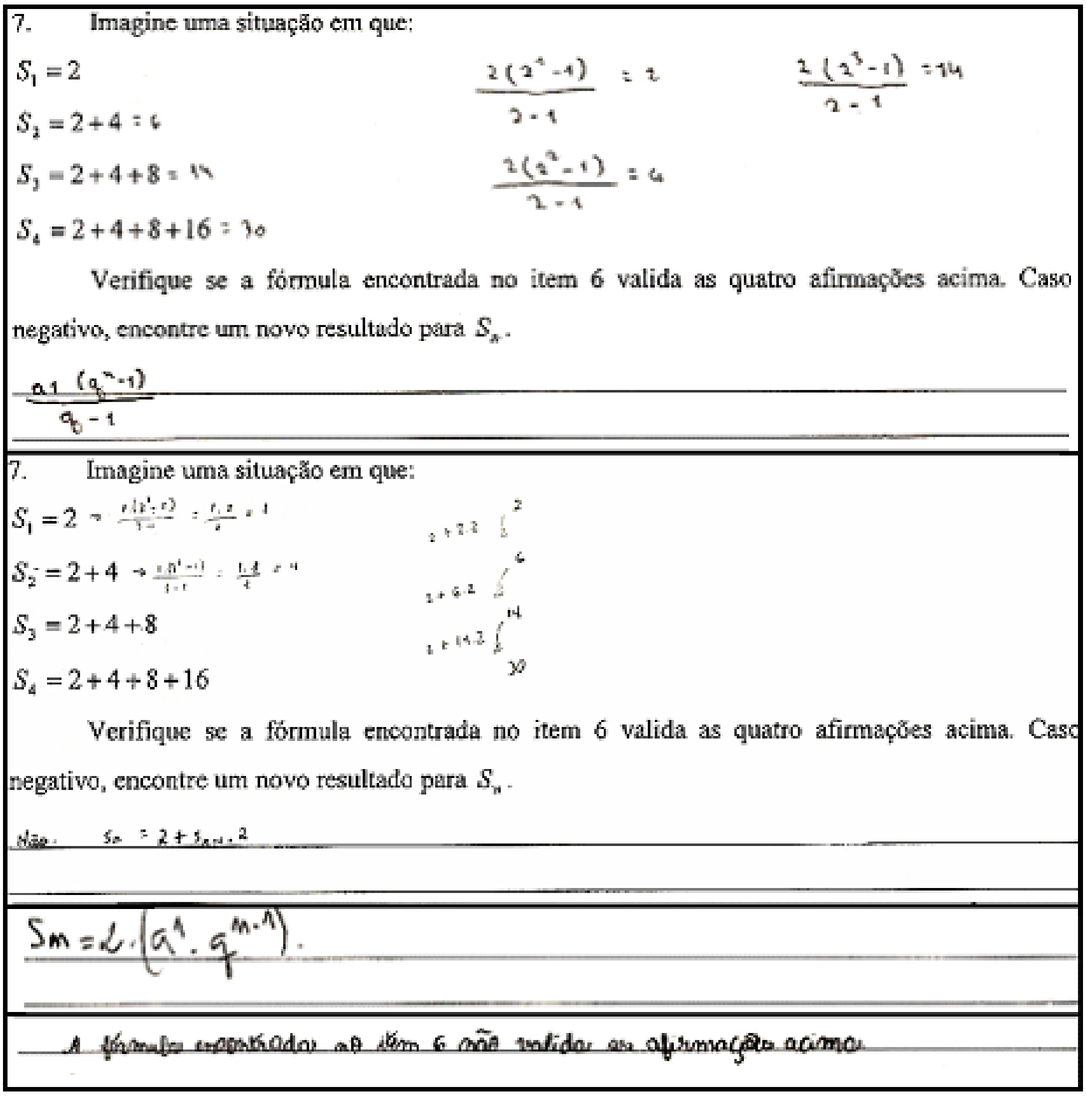
Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
0	a_1	1	1
1	a_2	3	4
2	a_3	9	13
3	a_4	27	40
⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	a_n	$1 \cdot 3^{n-1}$	$\frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$

0	a_1	1	1
1	a_2	3	4
2	a_3	9	13
3	a_4	27	40
⋮	⋮		
n-1	a_n	$1 \cdot 3^{(n-1)}$	$\frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

0	a_1	$1 \cdot 1$	$\frac{1(3^1-1)}{3-1} = 1$
1	a_2	$1 \cdot 3^1$	$\frac{1(3^2-1)}{3-1} = 4$
2	a_3	$1 \cdot 3^2$	$\frac{1(3^3-1)}{3-1} = 13$
3	a_4	$1 \cdot 3^3$	$\frac{1(3^4-1)}{3-1} = 40$
⋮	⋮	$1 \cdot 3^{\vdots}$	$\frac{1(3^{\vdots}-1)}{3-1} =$
n-1	a_n	$1 \cdot 3^{n-1}$	$\frac{1(3^{n-1}-1)}{3-1} =$

Figura 3.44: Respostas da sexta questão da Atividade 2 de alguns dos alunos.

Na sétima questão, os alunos tinham que verificar se a fórmula encontrada no item 6 para o número total de triângulos valida as somas desta questão. Obtiveram-se quatro opções de resposta para essa questão (Figura 3.45). Para a correção, a professora em formação projetou uma tabela (Figura 3.46) com o termo da sequência a_n e a expressão que corresponde ao número total de triângulos S_n da questão anterior de forma a tentar relacionar os significados dos números 1 e 3 na P.G. (1, 3, 9, 27).


7. Imagine uma situação em que:

$S_1 = 2$ $\qquad \frac{2(2^1-1)}{2-1} = 2$ $\qquad \frac{2(2^3-1)}{2-1} = 14$

$S_2 = 2+4 = 6$

$S_3 = 2+4+8 = 14$ $\qquad \frac{2(2^2-1)}{2-1} = 6$

$S_4 = 2+4+8+16 = 30$

Verifique se a fórmula encontrada no item 6 valida as quatro afirmações acima. Caso negativo, encontre um novo resultado para S_n.

$\frac{a_1 (q^n-1)}{q-1}$

7. Imagine uma situação em que:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2+4$

$S_3 = 2+4+8$

$S_4 = 2+4+8+16$

Verifique se a fórmula encontrada no item 6 valida as quatro afirmações acima. Caso negativo, encontre um novo resultado para S_n.

Não. $S_n = 2 + S_{n-1} \cdot 2$

$S_n = 2 \cdot (a^1 \cdot q^{n-1})$.

A fórmula encontrada no ítem 6 não valida as afirmações acima

Figura 3.45: Respostas da sétima questão da Atividade 2 de alguns dos alunos.

Termo da sequência (a_n)	Nº total de triângulos (S_n)
a_n	$S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1}$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - a_1)}{q - a_1}$$

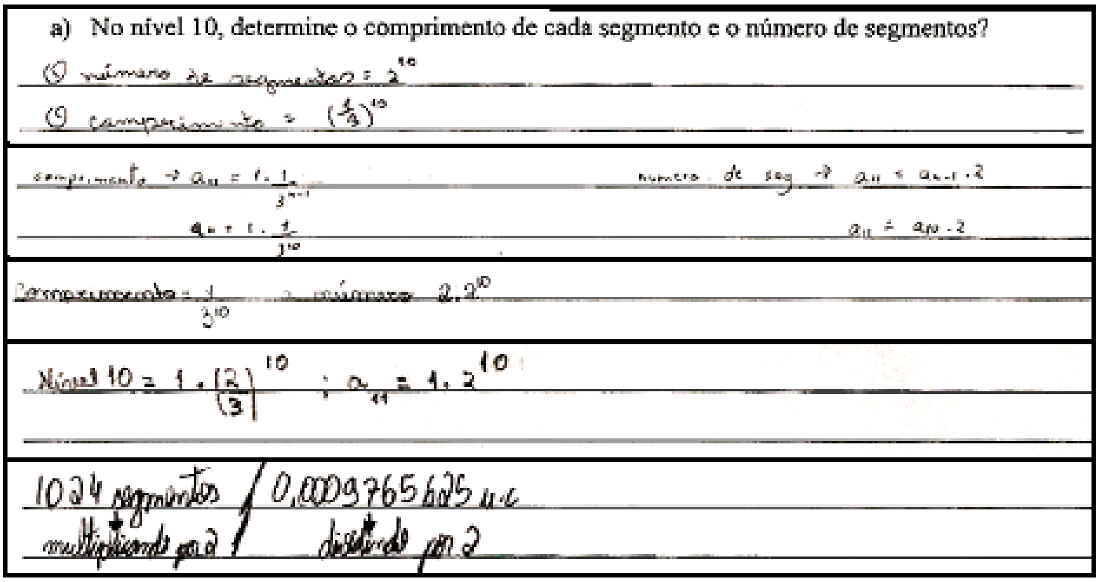
Figura 3.46: Tabela para a sétima questão da Atividade 2.

Trocando os números 1 e 3 pelos seus significados, primeiro termo e razão, respectivamente, chegou-se a uma “fórmula provisória” com os alunos, para que assim verificassem se a mesma fórmula validava a soma dos termos da P.G. da questão 7. A professora em formação perguntou aos alunos qual a P.G. que estava representada na sétima questão e os alunos responderam (2, 4, 8, 16). Sendo assim, utilizou-se a fórmula para verificar a soma dos três primeiros termos chegando à conclusão de que esta estava incorreta. A professora em formação comentou com os alunos que observou, durante a realização desta questão, que alguns deles fizeram testes trocando a_1 por 1 e chegaram à fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e perguntou se esta validava a soma da P.G. e os alunos verificaram que sim. Esta situação é destacada por Borba (1999) quando afirma que o "método da tentativa" é um caminho para a formação de conjecturas. Muitas vezes não é tão utilizado em sala de aula no qual o método dedutivo-analítico é dominante e as investigações são centradas no professor.

Em seguida, foram comentadas as respostas encontradas.

Para mostrar que a resposta $S_n = 2 \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})$, dada por 10% dos alunos, estava incorreta, a professora em formação utilizou um exemplo com S_3 e, rapidamente, os alunos perceberam tal fato. Na resposta $S_n = 2 + S_{n-1} \cdot 2$, dada por 10% dos alunos, verificou-se que esta fórmula validava as somas da questão 7, mas não verificava as somas da P.G. da questão 6, e que para saber, por exemplo, a soma dos trinta primeiros termos teria que calcular a anterior, o que não é prático. Nesta questão, o percentual de acerto foi de 40% e 20% dos alunos não responderam.

Após a correção da Atividade 2, foi feita a correção do exercício 3.1. O item a foi respondido, corretamente, por 20% dos alunos e o restante respondeu corretamente a uma parte deste item (Figura 3.47). Para facilitar então a correção, a professora em formação construiu com os alunos uma tabela em que uma coluna representava o nível do fractal, outra o termo geral a_n, outra o comprimento de cada segmento e outra o número de segmentos nos três primeiros níveis.


a) No nível 10, determine o comprimento de cada segmento e o número de segmentos?

O número de segmentos = 2^{10}
O comprimento = $(\frac{1}{3})^{10}$

comprimento → $a_n = 1 \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$ número de seg → $a_n = a_{n-1} \cdot 2$
$a_n = 1 \cdot \frac{1}{3^{10}}$ $a_{11} = a_{10} \cdot 2$

Comprimento = $\frac{1}{3^{10}}$ e número $2 \cdot 2^{10}$

Nível 10 = $1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$; $a_{11} = 1 \cdot 2^{10}$

1024 segmentos / 0,0009765625 u.c
multiplicando por 2 / dividindo por 2

Figura 3.47: Respostas do item a do exercício 3.1 de alguns dos alunos.

No item b, os alunos teriam que registrar as sequências que representam P.G. neste exercício. Foram encontradas cinco respostas diferentes (Figura 3.48) das quais 50% dos alunos indicaram duas progressões geométricas corretamente, 20% dos alunos acertaram apenas uma e 30% dos alunos não acertaram pois responderam “todas as sequências” sem especificar quais.

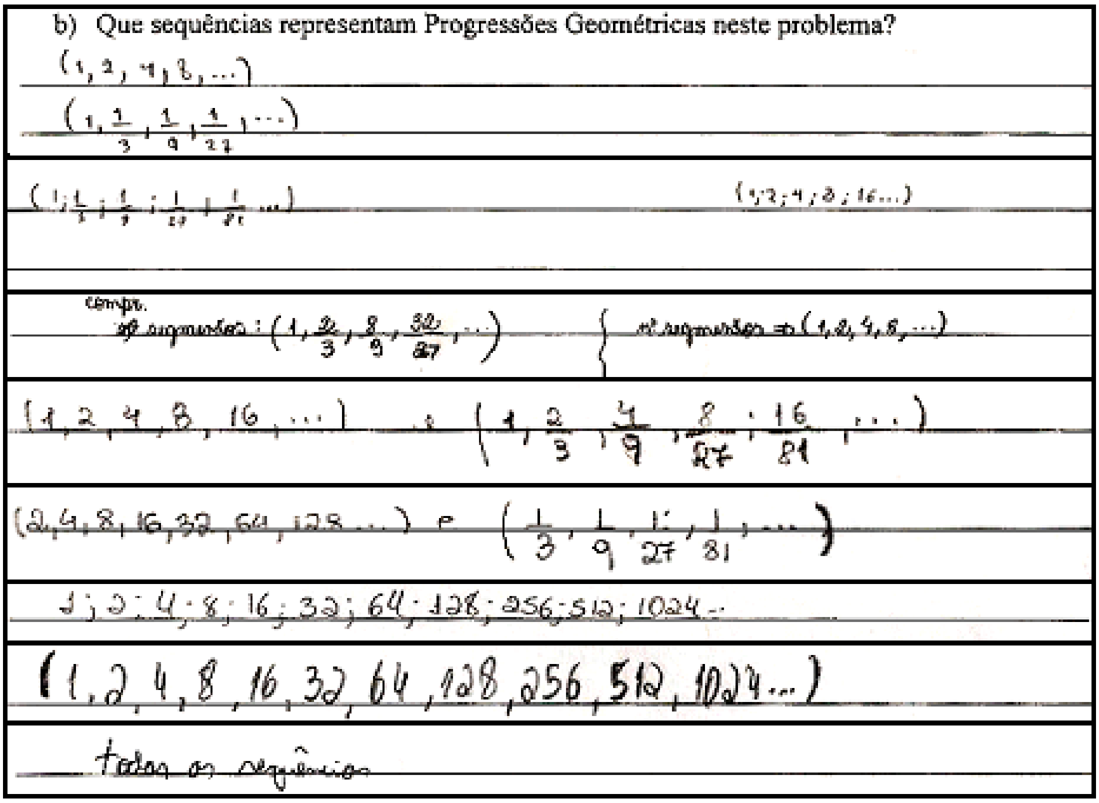
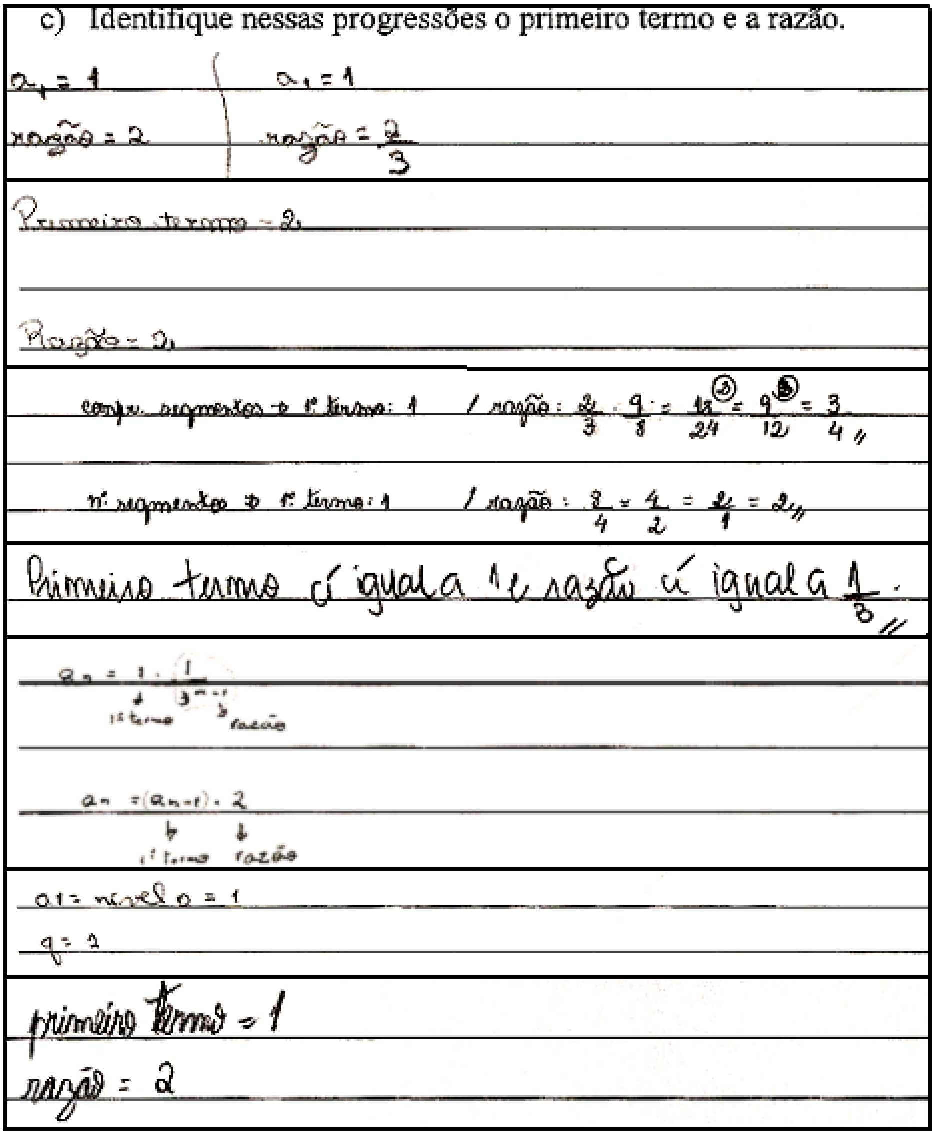


Figura 3.48: Respostas do item b do exercício 3.1 de alguns dos alunos.

No item c, a professora em formação considerou as sequências respondidas no item b, corretas ou não (Figura 3.49). Dessa forma, 20% dos alunos acertaram todo item, indicando o primeiro termo e a razão de cada uma das duas sequências, 40% dos alunos acertaram apenas o primeiro termo e a razão de uma das sequências, 10% dos alunos não responderam corretamente e 30 % dos alunos deixaram em branco.


c) Identifique nessas progressões o primeiro termo e a razão.

$a_1 = 1$ razão = 2 | $a_1 = 1$ razão = $\frac{2}{3}$

Primeiro termo = 2

Razão = 2

compr. segmentos → 1º termo: 1 / razão: $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

nº segmentos → 1º termo: 1 / razão: $\frac{3}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

Primeiro termo é igual a 1 e razão é igual a $\frac{1}{3}$.

$a_n = 1 \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$ (1º termo, razão)

$a_n = (a_{n-1}) \cdot 2$ (1º termo, razão)

$a1$ = nível 0 = 1

$q = 2$

primeiro termo = 1

razão = 2

Figura 3.49: Respostas do item c do exercício 3.1 de alguns dos alunos.

Após a correção do exercício, a professora em formação projetou, no quadro, um exemplo de uma P.G. para que os alunos determinassem a razão, o termo a_{11} e a soma dos oito primeiros termos (Figura 3.50). Os alunos conseguiram responder a todos os itens.

Exemplo:

Considere a P.G. (4, 20, 100, ...), determine:

a) a razão q.

b) a_{11}

c) a soma dos 8 primeiros termos.

Figura 3.50: Exemplo de P.G.

A partir daí, os alunos responderam aos exercícios 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.7. Eles foram entregues um por vez e, a cada exercício terminado, o mesmo era recolhido para análise. Devido ao tempo, optou-se em pedir, primeiro, que os alunos fizessem o exercício 3.7, por este possibilitar a criatividade de elaboração de figuras com o princípio da autossimilaridade. Então, o exercício 3.6 foi entregue e pedido que o trouxessem resolvido no próximo encontro.

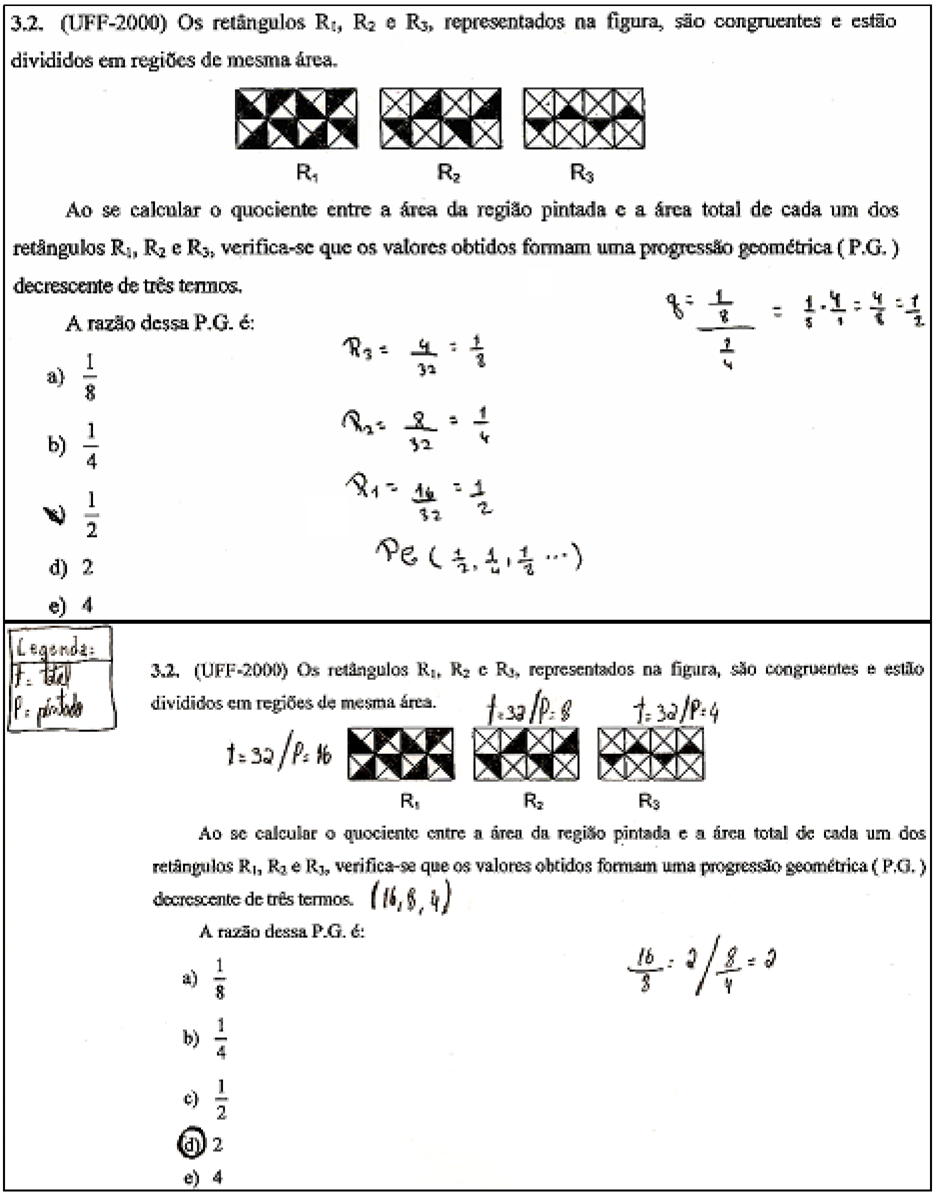
Os alunos tiveram muitas dificuldades nos exercícios 3.4 e 3.5, porém as dúvidas não foram sanadas, já que um dos objetivos dessas atividades é analisar o que foi aplicado durante os encontros.

3.2.4. Encontro do dia 01/07/2010.

Neste último encontro, foi feita a correção dos exercícios da aula anterior.

Iniciou-se a aula com a correção do exercício 3.2, no qual se pedia a razão da P.G. decrescente formada pelo quociente entre a área pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3.

Foram encontradas duas respostas: $\frac{1}{2}$ e 2 (Figura 3.51), correspondente a 60% e 40% dos alunos, respectivamente. Como 20% dos alunos que responderam 2 fizeram os quocientes $\frac{16}{8}$ e $\frac{8}{4}$ referentes à P.G. (16, 8, 4), a professora em formação enfatizou que o quociente era entre a área pintada e a área total de cada um dos retângulos.



3.2. (UFF-2000) Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados na figura, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.

R_1 R_2 R_3

Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (P.G.) decrescente de três termos.

A razão dessa P.G. é:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 4

$q = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$R_3 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$R_2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$R_1 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

PG $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots)$

Legenda:
T: total
P: pintado

3.2. (UFF-2000) Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados na figura, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.

T=32/P=16 T=32/P=8 T=32/P=4

R_1 R_2 R_3

Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (P.G.) decrescente de três termos. (16, 8, 4)

A razão dessa P.G. é:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

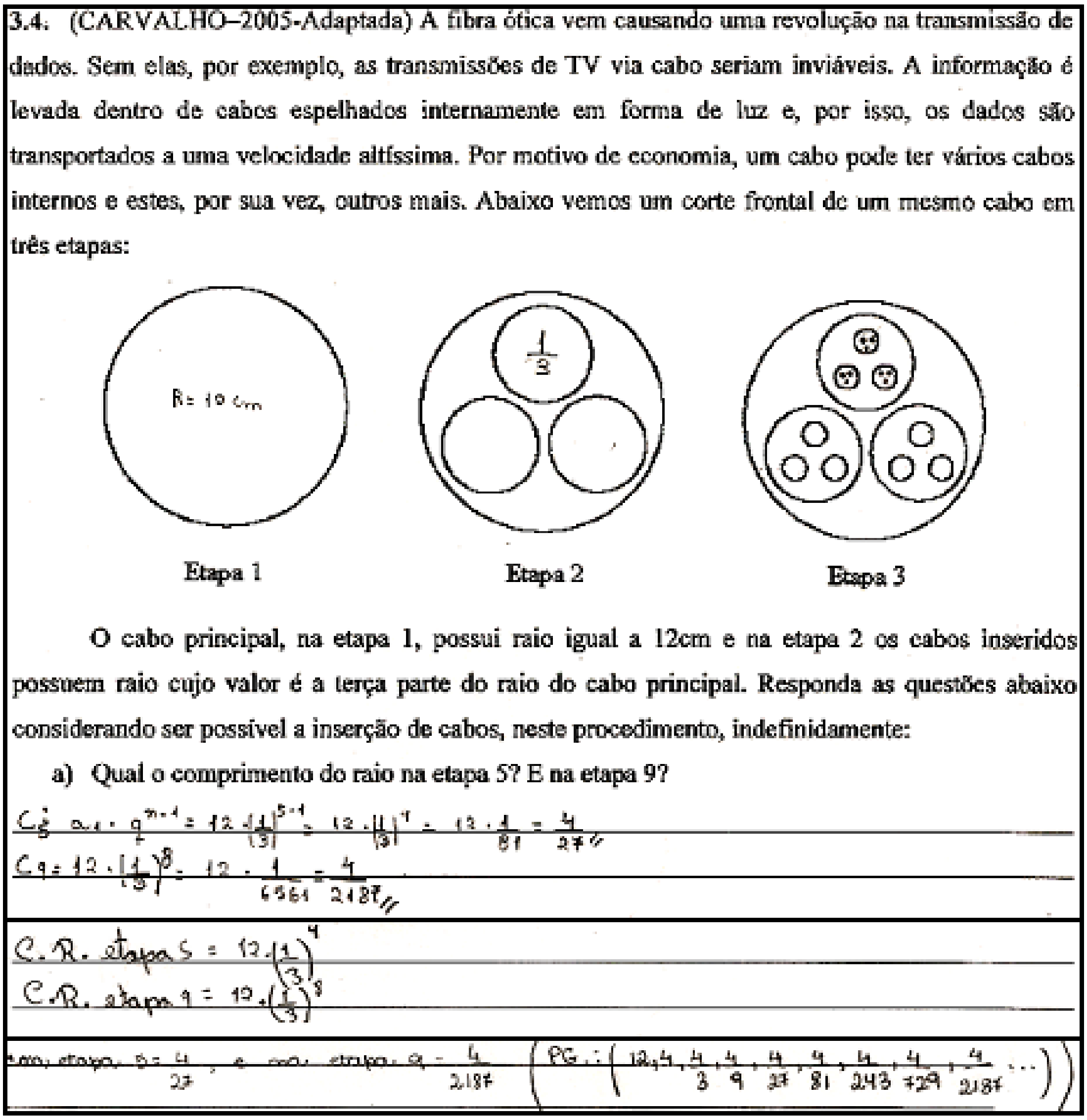
e) 4

$\frac{16}{8} = 2 \,/\, \frac{8}{4} = 2$

Figura 3.51: Respostas do exercício 3.2 de alguns dos alunos.

O exercício 3.3 traz no enunciado um pequeno resumo sobre a Geometria Fractal e mostra os passos para a construção do fractal Triângulo de Sierpinski, ilustrando com uma sequência de figuras. O aluno deve marcar dentre as alternativas qual é a figura 4, de acordo com o procedimento descrito. Todos os alunos acertaram essa questão. Na tentativa de explorar mais a questão, a professora em formação perguntou qual das alternativas seria a figura 5, já que a mesma se encontrava dentre as alternativas, e os alunos responderam corretamente que seria a alternativa a.

O exercício 3.4 trata do cabo de fibra ótica, o qual é mostrado em um corte frontal em três etapas. No item a, foi perguntado aos alunos o comprimento do raio na etapa 5 e na etapa 9. Neste item, 60% dos alunos responderam corretamente (Figura 3.52) e 40% acertaram apenas uma das etapas. Pode-se perceber que alguns alunos não utilizaram a fórmula do termo geral, montaram a P.G. até o nono termo. Sendo assim, a professora em formação iniciou a correção fazendo com que os alunos percebessem que, por exemplo, para obter o comprimento do raio na etapa 50 é trabalhoso calcular todos os termos anteriores, sendo mais simples utilizar a fórmula do termo geral. Com isso, utilizando a fórmula do termo geral, foram calculados o quinto e o nono termos.



3.4. (CARVALHO–2005-Adaptada) A fibra ótica vem causando uma revolução na transmissão de dados. Sem elas, por exemplo, as transmissões de TV via cabo seriam inviáveis. A informação é levada dentro de cabos espelhados internamente em forma de luz e, por isso, os dados são transportados a uma velocidade altíssima. Por motivo de economia, um cabo pode ter vários cabos internos e estes, por sua vez, outros mais. Abaixo vemos um corte frontal de um mesmo cabo em três etapas:

O cabo principal, na etapa 1, possui raio igual a 12cm e na etapa 2 os cabos inseridos possuem raio cujo valor é a terça parte do raio do cabo principal. Responda as questões abaixo considerando ser possível a inserção de cabos, neste procedimento, indefinidamente:

a) Qual o comprimento do raio na etapa 5? E na etapa 9?

$C_5 = a_1 \cdot q^{n-1} = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 12 \cdot \frac{1}{81} = \frac{4}{27}$

$C_9 = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 12 \cdot \frac{1}{6561} = \frac{4}{2187}$

C.R. etapa 5 $= 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$

C.R. etapa 9 $= 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$

na etapa 5 $= \frac{4}{27}$, e na etapa 9 $= \frac{4}{2187}$ (PG.: $\left(12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \frac{4}{243}, \frac{4}{729}, \frac{4}{2187} \ldots\right)$)

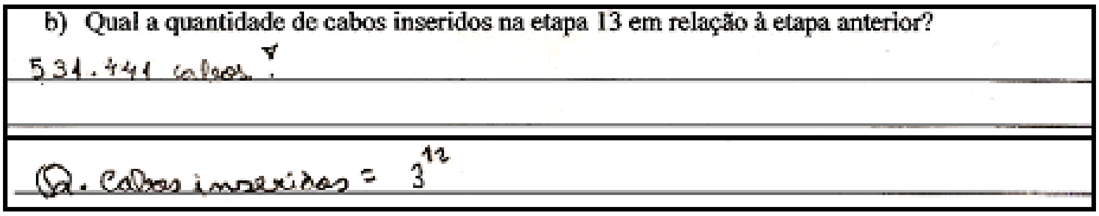
Figura 3.52: Respostas do item a do exercício 3.4 de alguns dos alunos.

Foi feita a Tabela 4.3 para serem respondidos os itens b e c. Esta foi sendo construída junto com os alunos para que pudessem discutir suas respostas.

Tabela 4.3: Tabela para correção dos itens b e c do exercício 3.4.

Etapa	Números de cabos inseridos em relação à etapa anterior	Total de cabos
1	-	1 ($S_1 = 1$)
2	3	4 ($S_2 = 1+3$)
3	9	13 ($S_3 = 1+3+9$)
4	27	40 ($S_4 = 1+3+9+27$)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	$a_{12} = 3 \cdot 3^{11} = 3^{12}$	S_{13}

No item b, os alunos teriam que determinar a quantidade de cabos inseridos na etapa 13 em relação à etapa 12. Pode-se perceber, pela análise das respostas, que 20% dos alunos acharam que teriam que calcular a diferença entre os cabos inseridos na etapa 13 e na etapa 12. Na correção, foi observado que o número de cabos inseridos está sendo calculado em relação à etapa anterior, não havendo necessidade de subtrair os números. O percentual de acerto foi de 50% (Figura 3.53).


b) Qual a quantidade de cabos inseridos na etapa 13 em relação à etapa anterior?

531.441 cabos

Q. Cabos inseridos = 3^{12}

Figura 3.53: Respostas do item b do exercício 3.4 de alguns dos alunos.

No item c, os alunos tinham que calcular a quantidade total de cabos na etapa 13. A resposta correta foi dada por 30% dos alunos (Figura 3.54). Diferentes cálculos foram feitos para se chegar à mesma resposta. Sendo que 20% dos alunos fizeram a tabela e utilizaram a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita e 10% dos alunos utilizaram somente a fórmula.

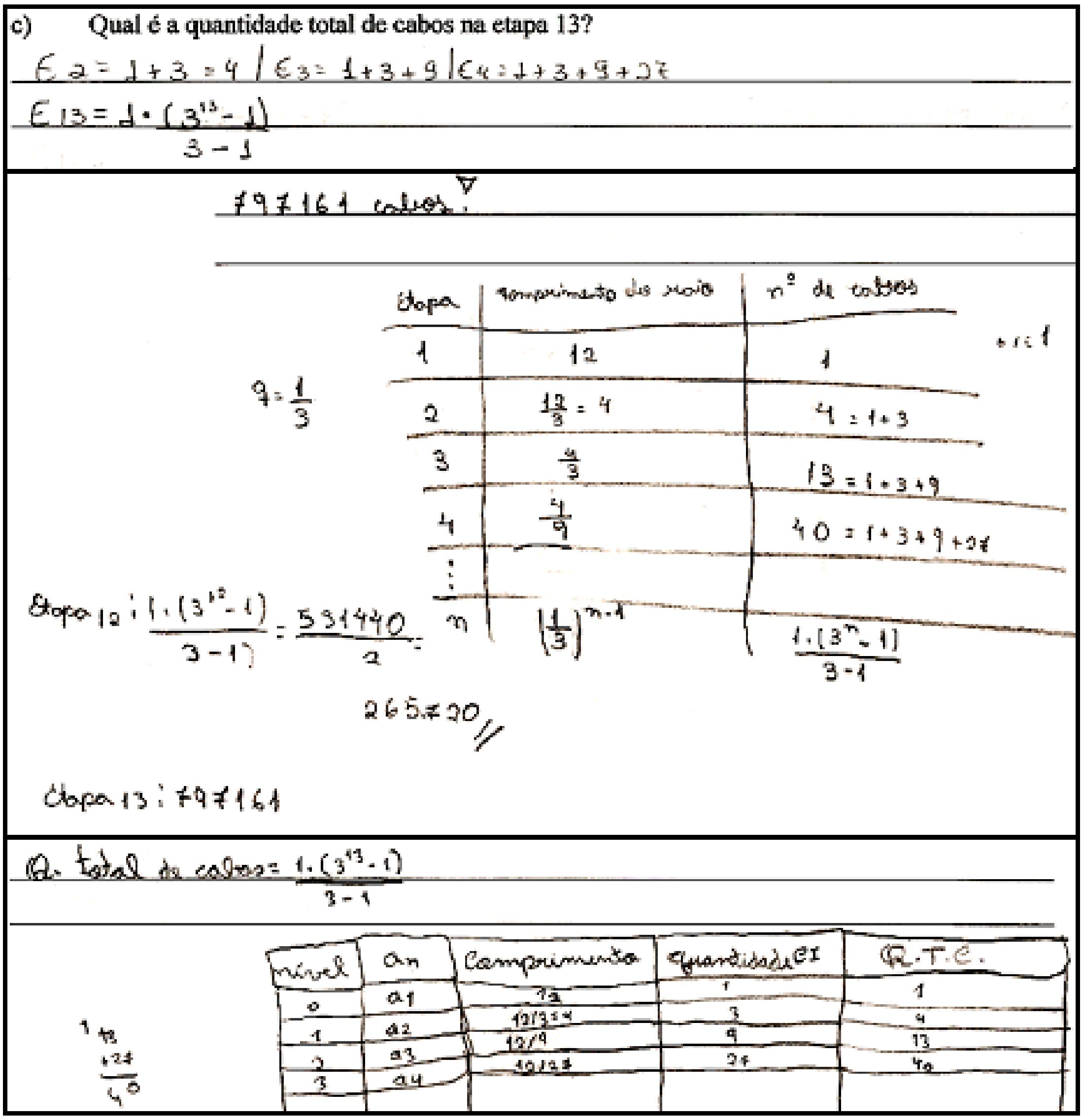


Figura 3.54: Respostas do item c do exercício 3.4 de alguns dos alunos.

A expressão $S_{13} = \dfrac{1 \cdot (3^{12} - 1)}{3 - 1}$ foi apresentada por 30% dos alunos. Provavelmente, relacionaram a etapa 13 ao elemento a_{12}, utilizando assim $n = 12$.

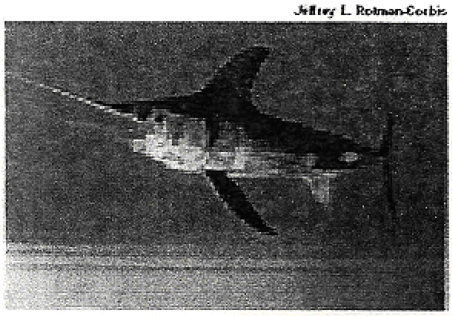
No exercício 3.5, é dada uma informação sobre a redução da população de marlim-azul em 2003 em relação a 1953. A questão pedia que o aluno determinasse a população aproximada de marlim-azul ao final dos primeiros vinte e cinco anos (1978).

Nenhum aluno acertou este exercício e 90% deles marcaram o item a (Figura 3.55). Eles calcularam a população fazendo regra de três entre a população e o tempo.

3.5. (UFF – 2004) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinquenta anos (em 1953). (Adaptado da revista *Veja*, 09 de julho de 2003.)

Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:

Jeffrey L. Rotman-Corbis



Newsweek, 26 de maio de 2003.

a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

50 anos ——— 20%
25 anos ——— x

$50x = 500$

$x = \frac{500}{50}$

$\boxed{x = 10}$

$25 \times 20 = 500$

Figura 3.55: Resposta do exercício 3.5 de um dos alunos.

A professora em formação corrigiu o exercício observando que, na questão, a informação “Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior)...” mostra que a sequência referente à população de marlim é uma P.G. e utilizou os conceitos de média geométrica e termo geral chegando à alternativa d.

Nesta questão, não estava colocada de forma explícita que a sequência formada pela população de marlim-azul era uma P.G., o que provavelmente foi um diferencial comparado às questões encontradas em boa parte dos livros didáticos. De acordo com Vergnaud (1993 apud GONÇALVES, 2007), as dificuldades encontradas em algumas questões frequentemente decorrem do fato de que os alunos se deparam com situações que nunca se propuseram antes ou que envolvem valores não usuais das variáveis de uma dada situação.

O exercício 3.6 apresenta o fractal Tapete de Sierpinski e o algoritmo para sua construção. Alguns dos alunos o resolveram e a professora em formação pôde perceber que até fizeram o item a e parte do b, corretamente ou não, mas não conseguiram perceber que a sequência formada no item b era uma P.G.

Foi possível perceber também que tiveram dificuldade em entender o processo de construção deste fractal. Então, a professora em formação explicou o algoritmo da construção e corrigiu o item.

No item b, a professora em formação completou a tabela com os alunos, calculando a área de cada nível.

No item c, no qual era perguntado se a sequência formada pelas áreas obtidas na tabela do item b representava uma P.G., a professora em formação retomou a definição de P.G., mostrando que os quocientes, entre um termo e seu antecessor, a partir do segundo, eram constantes.

Ao determinar a razão da P.G., pode-se calcular o item d, ou seja, a área da figura formada no nível 8, utilizando a fórmula do termo geral.

No exercício 3.7, os alunos observaram três sequências de figuras que mantêm o princípio da autossimilaridade e tinham que construir uma figura com esta propriedade, podendo utilizar algumas das malhas dadas: quadriculada ou triangular.

A professora em formação mostrou as respostas dos alunos e questionou-os sobre quais figuras mantiveram o princípio da autossimilaridade e os alunos destacaram a que está representada na Figura 3.56.

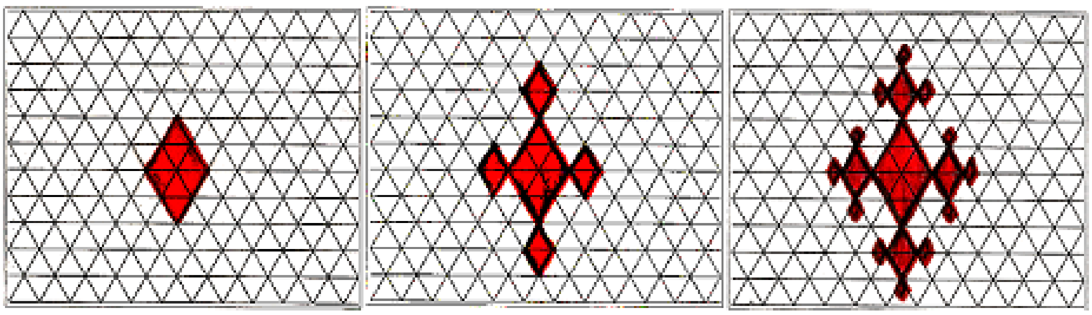


Figura 3.56: Resposta do exercício 3.7.

3.3. Análise dos questionários

Nesta seção, os alunos participantes dos encontros serão chamados de Aluno A, Aluno B, ..., Aluno J, com o intuito de preservar a identidade dos mesmos.

O questionário (Apêndice B) respondido pelos alunos do Ensino Médio, participantes da experimentação das atividades, consta de doze perguntas que tiveram por objetivo investigar a opinião dos mesmos em relação ao uso do *software* Geometricks e das atividades propostas, sendo que na última pergunta os alunos tinham que avaliar o minicurso em geral.

Inicialmente, foi perguntado aos alunos se já haviam estudado P.G. Apenas um dos alunos respondeu que havia estudado, mas que não foram utilizados os fractais para o seu estudo.

Todos os alunos responderam de forma afirmativa que o uso de Fractais facilitou o estudo de P.G., como pode-se verificar em alguns comentários.

> Os fractais ajudam a identificar as Progressões Geométricas com mais facilidade. (Aluno A)
>
> Com certeza, sem dúvida nenhuma o uso de fractais foi a base para entender a matéria. (Aluno D)
>
> As imagens podem facilitar o entendimento da matéria. (Aluno F)

Os comentários dos Alunos A e F ressaltam a importância das imagens fractais para a compreensão do tema estudado. Essas opiniões são defendidas por Leivas e Cury (2008) quando afirmam que a visualização de padrões presentes nos fractais possibilita compreender o processo de representação simbólica.

Ao analisar se a parte teórica ajudou no desenvolvimento das atividades e dos exercícios, apenas um aluno respondeu que esta parte ajudou parcialmente. Justificou escrevendo: “Pois o software contribuiu bastante para o aprendizado sobre progressão geométrica.” (Aluno B). Essa justificativa mostra que não só a parte teórica contribui, mas o *software* também. O restante dos alunos respondeu de forma afirmativa.

Quanto à utilização do *software* Geometricks, 50% dos alunos consideraram **muito fácil** e o restante considerou **fácil**. Seguem alguns comentários dos alunos:

> É um software fácil e que facilita bastante o aprendizado. (Aluno A)
>
> É um software bem simples e de fácil utilização. (Aluno I)
>
> Logo na primeira aula foi possível usá-lo sem problemas. (Aluno B)

Por mais que os alunos não tivessem utilizado algum *software* educacional em suas aulas de Matemática, isso não acarretou dificuldade na utilização do Geometricks. Todos os alunos afirmaram ainda que o *software* favoreceu na construção dos conhecimentos matemáticos, atribuindo algumas justificativas, a saber:

> Pois mostra a matéria de uma forma diferente. (Aluno E)
>
> Construir um fractal ajuda mais no aprendizado do que apenas observar. (Aluno F)
>
> Porque com o software compreendi melhor os exercícios. (Aluno G)

Nessas duas últimas perguntas relacionadas ao *software*, percebe-se por meio das respostas dos alunos A e F que a utilização deste recurso facilitou o processo de aprendizagem do conteúdo. Este fato é ressaltado por Gonçalves (2007) quando afirma que *softwares* de Geometria Dinâmica tornam o aprendizado mais ativo e permitem ao aluno buscar conhecimento e produzir resultados positivos. Destaca ainda, que a construção de figuras nesses *softwares* desenvolve o espírito investigativo do aluno.

Os alunos consideraram que os enunciados das atividades e dos exercícios são de fácil compreensão e ao serem questionados se foi possível deduzir o termo geral e a soma dos *n* primeiros termos da P.G., por meio das atividades, 90% dos alunos responderam que sim e o restante respondeu que foi parcialmente possível, atribuindo o seguinte comentário “Já que não consigo de primeira pensar em termos matemáticos.” (Aluno J), mostrando por meio da resposta a dificuldade que se tem em fazer generalizações matemáticas. Apresentam-se alguns comentários dos alunos que responderam de forma afirmativa:

> Após a correção dos exercícios, todas as dúvidas foram devidamente esclarecidas. (Aluno F)
>
> Ao construirmos a tabela podemos perceber com facilidade as progressões geométricas. (Aluno H)

No comentário do aluno H, observa-se que a organização dos dados do fractal em tabela facilitou identificar que algumas das sequências formadas representavam P.G. ou a soma dos *n* primeiros termos da P.G., conforme propõe Sallum (2005).

Todos os alunos consideraram que as atividades desenvolvidas contribuíram para a compreensão do estudo de P.G. Destacam-se alguns comentários dos alunos:

> As atividades tinham uma dinâmica e também o uso de fractais foi fundamental para melhor compreensão e visualização do conteúdo apresentado. (Aluno H)

> Após essas atividades sinto que não terei tantos problemas na resolução de exercícios de P.G. (Aluno F)
>
> Facilitou a aprendizagem. (Aluno G)

Quando questionados sobre o nível dos exercícios, todos os alunos responderam que era moderado. A seguir, são expostos alguns comentários:

> Só se deve prestar bastante atenção no enunciado, para não fazer uma má interpretação. (Aluno F)
>
> Alguns eram mais fáceis, outros mais difíceis. (Aluno G)
>
> Alguns como o do Marlim foram de um nível elevado e nos leva a pensar um pouco mais. (Aluno H)

Na última questão, foi solicitada a opinião dos alunos sobre o minicurso em geral. De modo geral, gostaram da proposta apresentada, acharam que as atividades contribuíram para o processo de ensino e aprendizagem e que o software facilitou a visualização e a compreensão das atividades. A seguir, são exibidas três opiniões dos alunos:

> A formanda soube ministrar bem o minicurso, mostrando aos alunos os conceitos básicos e necessários sobre progressões. Foi bom, aprendi sobre um conteúdo que desconhecia e que mostrou-se mais interessante. (Aluno B)
>
> O curso foi bem proveitoso, pelo fato da matéria parecer ser um pouco complicada, mas através do software utilizado, facilitou bastante a compreensão. (Aluno D)
>
> O minicurso facilitou a aprendizagem. Através do uso do computador a aprendizagem pode ser facilitada, tivemos uma visualização mais clara do conteúdo. (Aluno H)

Estes posicionamentos estão de acordo com Gonçalves (2007) quando afirma que essa facilidade se deve à sequência de ensino proposta, ao dinamismo do computador e finalmente à observação antes de expor o conteúdo a ser visto.

As opiniões somaram positivamente para os resultados dos dados obtidos pela observação e pelo questionário. Pode-se concluir que as atividades propostas com o auxílio do *software* Geometricks e a resolução dos exercícios junto à mediação da professora em formação contribuíram de forma significativa para a construção dos conceitos algébricos de P.G.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho monográfico iniciou-se com leituras sobre Progressão Geométrica e Geometria Fractal, buscando na Álgebra uma conexão entre esses dois temas. Após esse estudo foi elaborada uma proposta de ensino e realizou-se um estudo de caso numa turma de Ensino Médio que teve por objetivo investigar como o uso de Fractais auxilia no estudo das Progressões Geométricas.

Esta proposta permitiu ao aluno explorar os padrões geométricos dos fractais, utilizando como recurso tecnológico o *software* Geometricks. Esses padrões determinaram o registro de sequências que formavam P.G. e desta forma utilizou-se os processos iterativos dos fractais para criar algoritmos e escrever fórmulas gerais das sequências obtidas pela formação de tabelas.

A aplicação desta proposta por meio de um teste exploratório possibilitou reformulações e ajustes nas atividades**,** bem como na sequência didática aplicada em sala de aula. Os participantes se mostraram bastante interessados com o tema em estudo e**,** por meio dos dados coletados**,** pôde-se analisar que a proposta apresentada foi satisfatória quanto ao cumprimento dos objetivos.

No estudo de caso realizado na turma do Ensino Médio, público-alvo desta monografia, pôde-se perceber o bom desempenho dos alunos na resolução das atividades e na formulação de conjecturas. Algumas dificuldades foram apresentadas no decorrer da experimentação, principalmente na generalização da fórmula da soma dos n primeiros termos da P.G. e na resolução de alguns dos exercícios, no entanto, foram esclarecidas e mediadas pela professora.

Quanto ao uso do *software*, percebeu-se que este foi utilizado de modo satisfatório, pois contribui de forma significativa para o processo de formulação de conjecturas e generalizações.

Diante da análise dos resultados obtidos, pode-se responder à questão de pesquisa proposta de modo afirmativo, ou seja, pode-se afirmar que por meio das atividades propostas e com a utilização do software para construção dos fractais, os alunos puderam explorar os padrões geométricos dos fractais, contribuindo significativamente para o processo de generalização dos conceitos pertinentes ao conteúdo de Progressões Geométricas.

Esta proposta utilizou como recurso pedagógico o *software* Geometricks para construção dos fractais que favoreceu a visualização de padrões. No entanto, propõe-se o uso de outros recursos, tais como: malhas (quadriculada, triangular e outras) e dobraduras para a identificação destes padrões. Vale lembrar que o Brasil possui realidades muito distintas, assim a sugestão de outros materiais é pertinente no que tange a oferta desse trabalho, mesmo que adaptado, às diversas situações.

A Geometria Fractal relaciona-se com outros temas que podem ser estudados em pesquisas futuras, tais como: Triângulo de Pascoal destacando os múltiplos no triângulo aritmético; Áreas, Volumes e Perímetros por meio dos processos iterativos; Números Complexos explorando os conjuntos de Mandelbrot e de Julia; Desenho Geométrico utilizando os fractais em projetos de design; Álgebra Linear no uso das transformações lineares planas dentre outros.

Este trabalho possibilitou a realização de um minicurso intitulado Uma aplicação dos fractais: o estudo de progressões geométricas. Foi realizado na III Semana de Matemática em setembro de 2010. Destaca-se a utilização de outros recursos didáticos como as dobraduras na construção de cartões fractais

Espera-se que este trabalho monográfico possa sinalizar para a importância de novas abordagens na aquisição de conceitos matemáticos. Em particular, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Progressões Geométricas, neste caso, utilizando os fractais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDOVINOTTI, N. J. O Estudo de Fractais para Futuros Professores de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais eletrônicos...** Rio Claro: Unesp, 2008, p.1-14. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/lista_trabalhos_sala.php>. Acesso em: 08 jul. 2010.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. 2. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.

BRANDÃO, L. O. Algoritmos e Fractais com programas de GD. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n.49, p. 27-34, 2. quadrim. 2002.

BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n. 49, p. 22-26, 2. quadrim. 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN +)**: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, H.C. de. **Geometria Fractal:** Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Pará, 2005.
Disponível em: <http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_hamilton_cunha_de_carvalho.pdf>. Acesso em: 27 out.2009.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativos, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D´AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: Elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

GOMES, A. dos S. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais.** 2007. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização para Professores de Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. Disponível em: <http://people.ufpr.br/~ewkaras/especializa/andreia.pdf>. Acesso em: 09 maio 2011.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de

Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953>. Acesso em: 29 out. 2009.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília. **Anais eletrônicos...** Brasília: UFRGS, 1998. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php>. Acesso em: 5 maio 2011**.**

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

KAMPFF, A. J. C.; CAVEDINI, P. Ambientes informatizados de aprendizagem Matemática: o estudo da Geometria no Ensino Fundamental. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 7., 2004, Monterrey. **Anais eletrônicos...** Monterrey: UFGRS, 2004. Disponível em: <http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/2004/breve/breves1102-1111.pdf>. Acesso em: 5 maio 2011.

LEIVAS, J. C.; CURY, H. N. Atividades Com Fractais em uma Proposta de Inovação Curricular para Cursos de Formação de Professores. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 4., 2008, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008

MEIER, M.; SEIDEL, S.; BASSO, M. V. de A. Imagine e Shapari – Softwares gráficos no Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Novas Tecnologias na Educação.** Porto Alegre: CINTED/UFRGS. v. 3, n. 2, maio 2005.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L.G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

NIEDERMEYER, C. I.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. T. W. Geometria Fractal e Ensino de matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí . **Anais eletrônicos...** Ijuí: UNIJUI, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_52.pdf>. Acesso em: 08 set. 2009.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 297-313.

PENTEADO, M. G.; AMARAL, R. B.; BORBA, M. C. **Manual do Geometricks**. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 2000.

PEREIRA, A. B. **Fractais:** Caracterização e Leis de Formação. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual Vale do Acaraú, Sobral-Ceará, 2007. Disponível em: <http://www.4shared.com/file/16166817/169b3b52/fractais.html>. Acesso em: 26 out. 2009.

PERROTTI, F. A. **Manual do NFract**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. CD-ROM.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, n. 25, p. 105-132, 2006.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de Matemática:** Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 159-192.

RIBEIRO, M. J. B; PONTE, J. P. A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática. **Revista Quadrante,** v. 2, n. 9, p. 3-26, 2000.

RODRIGUES, R. F. **Estudo da Teoria dos Fractais e da Teoria do Caos em Matemática para Finanças**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel – Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.unioeste.br/campi/cascavel/>. Acesso em: 21 out. 2009.

ROMAN, T. C. **A Geometria Fractal e o *software* cabri-géomètre II no estudo de Progressão Geométrica**. 2004. 66 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma– Santa Catarina, 2004. Disponível em: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000026/00002638.pdf>. Acesso em: 9 maio 2011.

SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo, n.57, p. 1-8, 2. quadrim. 2005.

TAYLOR, R. P. Ordem no caos de Pollock. **Scientific American**, p. 116-121, Dec. 2002. Título original: Order in Pollock's Chaos.

VALIM, J. C. M.; COLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. In: SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, 22., 2008, Cascavel. **Anais eletrônicos...** Cascavel: Unioeste, 2008. Disponível em: <http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf>. Acesso em: 8 set. 2009.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICES

Apêndice A: Apostila

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos dos Goytacazes

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Atividades de Aplicação de Monografia

Aluno(a): ____ Ensino Médio

Professora em formação: Mikelle Rodrigues de Almeida

O USO DE FRACTAIS NO ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1. Parte Teórica

1.1. Fractais

Segundo Valim e Colucci (2008), a Geometria Euclidiana, durante muito tempo, foi considerada a geometria que melhor descrevia o mundo em que vivemos. Porém, no decorrer da história da Matemática, surgiram muitos questionamentos sobre sua consistência, abrindo caminho para novas geometrias.

Foi diante da necessidade de descrever e calcular fenômenos e formas encontradas na natureza, que não podem ser descritos pela Geometria Euclidiana, que surgiu uma nova geometria, a Geometria Fractal.

Esta Geometria, de acordo com Barbosa (2005, p.9), "está intimamente ligada à uma ciência chamada CAOS", pois suas formas fragmentadas e complexas trouxeram ordem e padrões, nas quais somente era observado o irregular, o aleatório, o imprevisível, o caótico.

A geometria fractal nos mostra uma natureza de irregularidades, de imprecisão, de aleatoriedade, de fragmentação, como podemos observar no trecho a seguir: "As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta" (MANDELBROT, 1983 apud GONÇALVES, 2007, p.40).

Podemos notar, então, que os objetos construídos pelo homem, em muitos casos, podem ser representados pela Geometria Euclidiana, porém não conseguimos fazer o mesmo com a maioria dos objetos encontrados na natureza.

Os objetos considerados fractais possuem uma propriedade conhecida como autossimilaridade.

> Auto-similaridade [sic]: Ao tomarmos um trecho do fractal, percebemos que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de

> construção do fractal (BORSSOI, 2005 apud VALIM, COLUCCI, 2008, p.2).

Dessa forma, os fractais constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes.

Benoit Mandelbrot exemplifica a propriedade da autossimilaridade

> arrancando um pedaço de uma couve-flor. Ele repete a demonstração dividindo ainda mais esse pedaço. Desse modo, cada parte se parece com a hortaliça inteira. A forma do todo é semelhante a si mesma em todos os níveis de escala (MORAIS, 2007 apud NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS, 2009, p.5).

A ilustração a seguir (Figura 1), representa bem este fato.

Figura 1: Brócolis
Fonte: http://arquitetandosonhos.blogspot.com/2008/11/os-fractais-na-natureza.html

A mesma propriedade se aplica à samambaia, pois como podemos observar, cada ramo é semelhante à planta inteira (Figura 2).

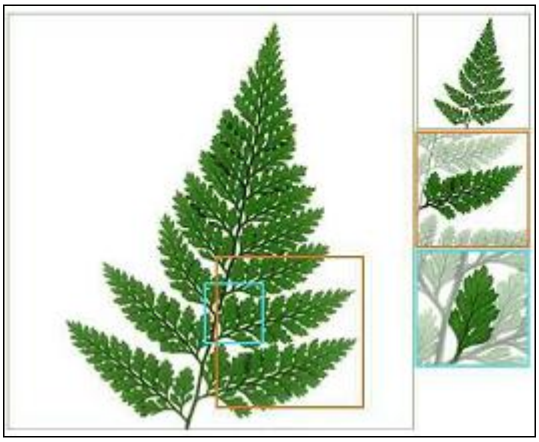


Figura 2: Folha da Samambaia
Fonte: NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS (2009, p. 4).

Foi a partir dos estudos de Mandelbrot, na Geometria Fractal, que houve o desenvolvimento e a divulgação da mesma.

A palavra FRACTAL foi criada pelo matemático polonês, naturalizado francês, Benoit Mandelbrot. Essa nomenclatura origina-se, no latim, do adjetivo *fractus* derivado do verbo *frangere* que significa quebrar: criar fragmentos irregulares.

Os fractais, além de serem encontrados na natureza, podem ser encontrados na música, na variação populacional de espécies, nas oscilações do coração e cérebro e em diversas áreas de conhecimento como na Matemática, Biologia, Física, Arquitetura e Urbanismo, Astronomia, Medicina, Economia, Arte, entre outras.

Os fractais apresentam estruturas de grande complexidade e beleza inegável, sendo possível a sua inserção na área de Arte. "As formas irregulares que se retorcem, espremem, espiralam exibem uma exuberância capaz de serem comparadas às grandes obras de Arte" (CARVALHO, 2005, p. 30).

Acreditando que, por meio da arte dos fractais, é possível inspirar e motivar pessoas na busca pelo conhecimento científico, formou-se, em 1992, o Grupo Fractarte. A Figura 3 mostra algumas fotos da galeria desse grupo.

Figura 3: Fractais
Fonte: http://www.fractarte.com.br/galeria2/galeria.php

1.2. Sequências

> ***sequência*** *(qüên) sf.* ***1.*** *ato ou efeito de seguir.* ***2.*** *Aquilo que vem em seguida; continuação de algo iniciado anteriormente.* ***3.*** *Conjunto de coisas, ações ou fatos que se sucedem sem interrupção, um após outro no espaço ou no tempo; sucessão, série.*
>
> *(FERREIRA, 2008, p.734)*

Em muitas situações do dia a dia encontramos a ideia de *sequência* ou *sucessão*. Vejamos alguns exemplos:

1. a sequência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada (1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, ...);
2. a sequência formada pelas idades de quatro irmãos (1, 3, 5, 7);
3. a sequência formada pelos dias da semana (domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado);
4. a sequência formada pelas prestações de uma dívida, em milhares de reais, (2, 4, 8, 16).

Nessas situações, podemos observar certa ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são chamados termos da sequência ou sucessão. Na sequência formada pelos dias da semana, o primeiro termo é domingo, o segundo é segunda, e assim por diante.

Usamos para representar um termo qualquer de uma sequência, a_n, em que n indica a posição do termo na mesma. Assim:

$$\begin{array}{c} a_1 : 1^{\text{o}} \text{ termo} \\ a_2 : 2^{\text{o}} \text{ termo} \\ . \\ . \\ . \\ a_n : \text{n-ésimo termo (enésimo termo)} \end{array}$$

Ainda no exemplo referente aos dias da semana, destacamos que a_1 representa domingo, a_3 representa terça e a_7 representa sábado.

Se a sequência possuir um último termo a_n então dizemos que a sequência é finita e se não conseguirmos encontrar o último termo, dizemos que é infinita e a indicamos com reticências no final.

Neste trabalho, trataremos de algumas sequências numéricas, ou seja, conjuntos ordenados de números.

Os exemplos dois e quatro são uma amostra dessas sequências e recebem nomes especiais. A sequência (1, 3, 5, 7) é chamada progressão aritmética e podemos observar que é constante a diferença entre um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, e seu antecedente. A sequência (2, 4, 8, 16) é chamada progressão geométrica e podemos observar que é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente.

Veremos um pouco mais sobre as progressões geométricas no próximo item.

CURIOSIDADE: Sequência de Fibonacci

Vamos observar a seguinte situação:

"Fibonacci considerou um casal de coelhos imaturos que, após um mês, estava apto a reproduzir e dar origem, mensalmente, a um novo casal. Esse novo casal passava pelo mesmo processo, isto é, levava um mês para amadurecer e, após esse período, originava um outro casal. Supondo que não ocorriam mortes, quantos casais de coelhos foram gerados após seis meses?"

Observe a situação descrita na tabela a seguir:

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Números de casais	1	1	2	3	5	8

(BIANCHINI; PACCOLA, 2004, p.188)

Esses números que representam a quantidade de casais (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) formam uma sequência denominada **Sequência de Fibonacci** . Analisando os termos dessa sequência, percebemos que cada termo, após os dois primeiros, é a soma dos dois imediatamente precedentes.

Dessa forma determine o nono termo dessa sequência.

____

____

1.3. Progressão Geométrica (P.G.)

Observemos o seguinte exemplo:

Numa empresa, a produção de certo produto, em unidades, é expressa da seguinte forma: na 1ª hora são produzidas 8 unidades; na 2ª, 16; na 3ª, 32; e assim por diante. Nessas condições, a produção diária, da 1ª à 6ª hora, será representada pela sequência (8, 16, 32, 64, 128, 256). Nessa sequência, temos:

$a_1 =$ ____ , $a_2 =$ ____ , $a_3 =$ ____ , $a_4 =$ ____ , $a_5 =$ ____ , $a_6 =$ ____

Dessa forma,

$\frac{a_2}{a_1} =$ $\qquad$ $\frac{a_3}{a_2} =$ $\qquad$ $\frac{a_4}{a_3} =$

Dessa forma, podemos definir:

Progressão Geométrica é uma sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º, e o termo antecedente é sempre o mesmo, constante (IEZZI et al., 2001, p.280).

Representamos esse quociente, que é constante, por *q* e chamamos de razão da P.G.

O nome progressão geométrica está diretamente relacionado à ideia de média geométrica.

Observamos que para uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de termos positivos, se considerarmos três termos consecutivos quaisquer, por exemplo, (a_1, a_2, a_3) teremos que $\frac{a_2}{a_1} = q$ e $\frac{a_3}{a_2} = q$. Assim, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ que resulta em $a_2^{\,2} = a_1 \cdot a_3$. Dizemos que o termo do meio a_2 é a *média geométrica* dos outros dois.

No exemplo inicial dessa seção, considerando a sequência (8, 16, 32), temos que 16 é a média geométrica de 8 e 32 já que $16^2 = 8 \cdot 32$

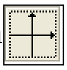
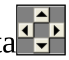
Nas atividades que virão a seguir, desenvolveremos os conceitos de termo geral e da soma dos termos de uma P.G. finita.

2. Atividades

2.1. Atividade 1

1ª parte: Construção do Fractal *Floco de Neve de Koch*, utilizando o *software* Geometricks:

a) Construir um triângulo equilátero ABC

1. Clicar na ferramenta  para exibir a grade na área de trabalho e movimentar o eixo vertical para uma das laterais da área de trabalho, clicando na ferramenta .

Obs.: Vamos considerar a medida do intervalo de 0 a 1 como uma unidade de comprimento (1 u.c.).

2. Criar o segmento AB

- clique em **Objeto indep/Ponto na grade (clique)**;

Obs.: Neste passo, clique em **Objeto indep** na barra de ferramentas e seguida em **Ponto na grade(clique).**

- clique na área de trabalho de modo a obter dois pontos;
- clique na letra A e depois na área de trabalho próxima a um dos pontos. Faça o mesmo com a letra B em relação ao outro ponto (Figura 4);

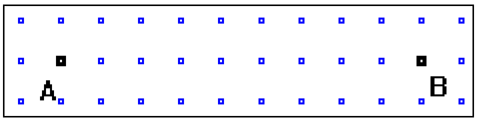


Figura 4

× clique em **Objeto depend/Segmento(po,po)** e depois em A e B.

3. Encontrar o vértice C do triângulo equilátero ABC

× clique em **Objeto depend/Circunferência (po, po)**;

× clique no ponto A e depois no ponto B, para formar a circunferência de centro em A e raio AB.

× clique no ponto B e depois em A, para formar a circunferência de centro em B e raio AB;

× clique em **Objeto depend/Interseção (ci,ci)** e depois nas circunferências. Escolha uma de suas interseções para ser o vértice C, nomeando-o.

4. Criar os segmentos AC e BC

× utilize os procedimentos do passo 2.

5. Deixar na área de trabalho apenas o triângulo ABC

× clique em **Editar/Esconder um objeto (clique)** e depois nos objetos a serem escondidos, ou seja, as circunferências e o ponto que representa a outra interseção que não foi nomeada.

b) Construir o nível 1 do fractal

1. Dividir os segmentos do triângulo em três partes iguais

× clique em **Objeto depend/Circunferência (po, raio)**;

× clique no ponto A e ao aparecer a caixa **Circuferência – fixe o raio** digite 3 para o valor do raio. Faça o mesmo nos vértices B e C. Os pontos de interseção dos segmentos com as circunferências dividem os mesmos em três partes iguais;

× clique em **Objeto depend/Interseção (re, ci)** e depois nas circunferências e nos segmentos de reta;

2. Deixar na área de trabalho apenas o triângulo ABC e os pontos que dividem os lados do mesmo.

3. Nomear os pontos conforme a Figura 5.

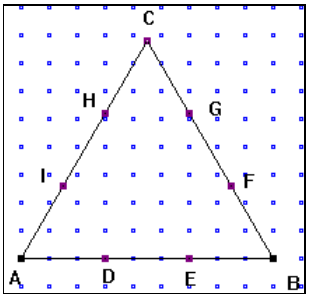


Figura 5

4. Criar triângulos equiláteros de bases DE, FG e HI
   - utilize os procedimentos dos passos 3, 4 e 5 do item a, resultando na construção apresentada pela Figura 6.

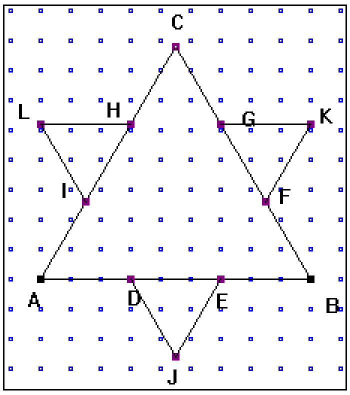


Figura 6

c) Definir o Fractal
   - clique em **Fractais/Definir fractal** e ao aparecer a caixa **Definir fractal** digite 8 para o número de ternas.
   - indique as ternas clicando em **(ABC, ABC, EDJ, FEB, GFK, HGC, ILH, DIA)**.
   - clique em **Fractais/Níveis** e na caixa **Níveis** digite o número 0.
   - para que o software pare de desenhar o fractal clique no símbolo  .
   - movimente os eixos cartesianos de modo que a construção não sobreponha o nível 0.
   - clique em **Fractais/Níveis** e na caixa **Níveis** digite o número 1. Movimente os eixos.
   - Faça o mesmo para os níveis 2 e 3.

O Floco de Neve de Koch foi apresentado pelo matemático polonês Helge Von Koch em 1904 e é também conhecido por Ilha de Koch.

Este Fractal tem como iniciador (nível 0) da construção um triângulo equilátero, no qual em cada segmento trocamos o terço médio por um outro triângulo equilátero do qual é retirado o segmento de sua base. Repetimos este mesmo procedimento nos segmentos restantes, indefinidamente.

2ª parte: Questões

A seguir, preencha a tabela abaixo sabendo que o lado do triângulo inicial mede 1 u.c.. E responda às perguntas.

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento

1. Registre as sequências referentes à quantidade de segmentos e ao comprimento de cada segmento que se obteve na tabela. Essas sequências formam uma P.G.? Justifique.

___

___

2. Se construirmos esse fractal no nível 4, quantos segmentos teremos? E qual será o comprimento de cada segmento?

___

3. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de segmentos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

a_n	Quantidade de segmentos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

4. O fractal correspondente ao nível 10 está associado com um elemento a_n da sequência acima. Determine n.

____

5. Preencha as tabelas abaixo:

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
10			

Nível	Termo da sequência	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento
	a_n		

6. Considere a construção de um fractal em que a quantidade de segmentos da figura no nível zero seja a_1. Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ referente à quantidade de segmentos como sendo uma P.G. de razão q. Expresse a_n em função de a_1 e q.

____

____

2.2. Atividade 2

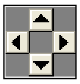
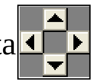
1ª parte: Construção do Fractal *Triângulo de Sierpinski* utilizando o *software* Geometricks:

a) Construir um triângulo equilátero ABC
   - utilize os mesmos procedimentos do item a da Atividade 1.

b) Marcar os pontos médios dos lados do triângulo
   - clique em **Objeto depend/Ponto médio (po,po)** e depois nas extremidades de cada segmento;
   - nomeie o ponto médio do segmento **AB** de **E**, o do segmento **BC** de **F** e o do segmento **AC** de **D**.

c) Traçar os segmentos de reta **DF**, **EF** e **DE**
   - utilize os mesmos procedimentos do passo 2 do item a da Atividade 1.

d) Definir o Fractal

- clique em **Fractais/Definir fractal** e na caixa **Definir fractal** digite 4 para o número de ternas.
- indique as ternas clicando em **(ABC, ADE, EBF, DFC)**.
- clique em **Fractais/Níveis** e na caixa **Níveis** digite o número 0.
- para que o software pare de desenhar o fractal clique no símbolo  .
- movimente os eixos cartesianos, por meio da ferramenta  de modo que a construção não sobreponha o nível 0.
- clique em **Fractais/Níveis** e na caixa **Níveis** digite o número 1. Movimente os eixos, por meio da ferramenta  .
- Faça o mesmo para os níveis 2 e 3.

Este Fractal foi apresentado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 – 1969) em 1916. A construção do Triângulo de Sierpinski tem como iniciador um triângulo equilátero, no qual determinamos o ponto médio de cada segmento e unimos esses pontos, obtendo quatro triângulos congruentes, dos quais é retirado o central. Aplicamos esse mesmo procedimento nos triângulos restantes. Procedendo a construção indefinidamente, cada um desses três triângulos são cópias exatas do triângulo maior, mantendo a propriedade da autossimilaridade.

2ª parte: Questões

Observando a construção do Triângulo de Sierpinski, preencha a tabela abaixo sabendo que o lado do triângulo inicial mede 1 u.c. A seguir, responda às perguntas.

Nível	Quantidade de triângulos novos (pretos)	Nº total de triângulos (brancos e pretos)

1. Qual(is) das sequências obtidas nesta tabela forma(m) uma P.G.? Justifique.

____

2. Complete:

a) O número total de triângulos no nível 2 é igual ao número total de triângulos do nível 1 acrescido de ______________ triângulos.

b) O número total de triângulos no nível 3 é igual ao número total de triângulos do nível 2 acrescido de ______________ triângulos.

c) Considere a sequência $S_n = (1, 4, 13, 40, ...)$ em que n indica o número de termos. De acordo com os itens a e b, podemos escrever:

$S_1 = 1$

$S_2 = 4 = 1 + 3$

$S_3 =$ ____________________________

$S_4 =$ ____________________________

3. Se construirmos esse fractal no nível 5, quantos triângulos novos teremos? E qual será o número total de triângulos?

____

4. Escreva na tabela abaixo os termos da sequência referente à quantidade de triângulos novos. Observe que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante.

a_n	Quantidade de triângulos novos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	
a_6	

5. O fractal correspondente ao nível 10 está relacionado com qual elemento da sequência a_n?

____

6. Represente, na tabela a seguir, a quantidade de triângulos novos e o número total de triângulos em função do primeiro termo e da razão da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

Nível	Termo da sequência (a_n)	Quantidade de triângulos novos	Nº total de triângulos (S_n)
0	a_1		
1	a_2		
2	a_3		
3	a_4		
$\vdots$	$\vdots$		
n-1	a_n		

7. Imagine uma situação em que:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 4$

$S_3 = 2 + 4 + 8$

$S_4 = 2 + 4 + 8 + 16$

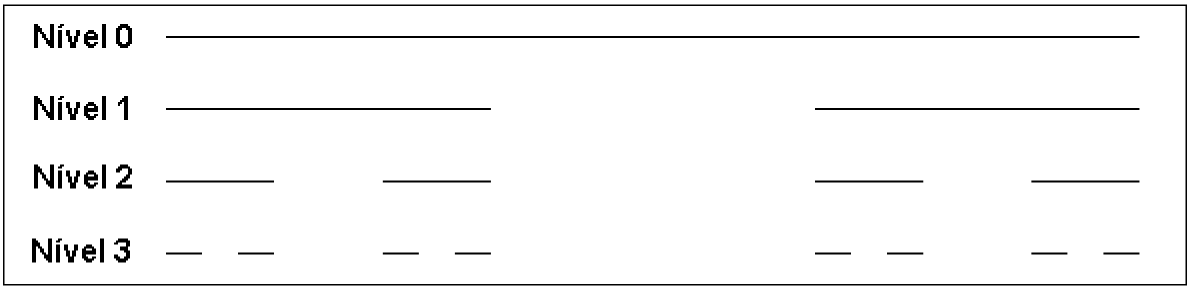
Verifique se a fórmula encontrada no item 6 valida as quatro afirmações acima. Caso negativo, encontre um novo resultado para S_n.

____

____

3. Exercícios

3.1. O fractal *Poeira de Cantor*, apresentado na figura a seguir, tem como iniciador da construção o segmento de comprimento igual a 1u.c. Para obter o próximo nível retiramos o terço central do segmento. Repetimos esse mesmo procedimento nos segmentos restantes, indefinidamente.

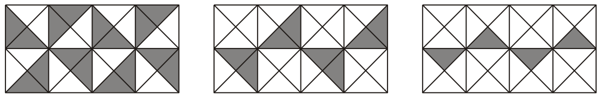


a) No nível 10, determine o comprimento de cada segmento e o número de segmentos?

b) Que sequências representam Progressões Geométricas neste problema?

c) Identifique nessas progressões o primeiro termo e a razão.

3.2. (UFF-2000) Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados na figura, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.



R_1 R_2 R_3

Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (P.G.) decrescente de três termos.

A razão dessa P.G. é:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 4

3.3. (ENEM – 2008) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

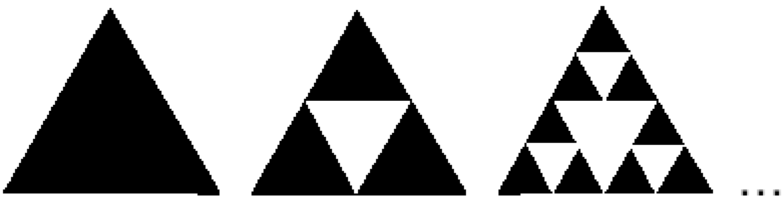
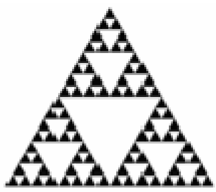
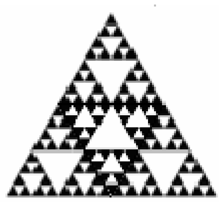
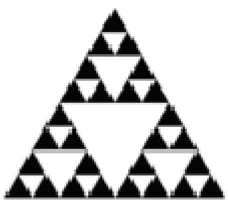


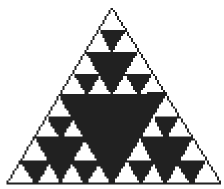
Figura 1 Figura 2 Figura 3

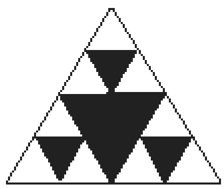
De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

a) 

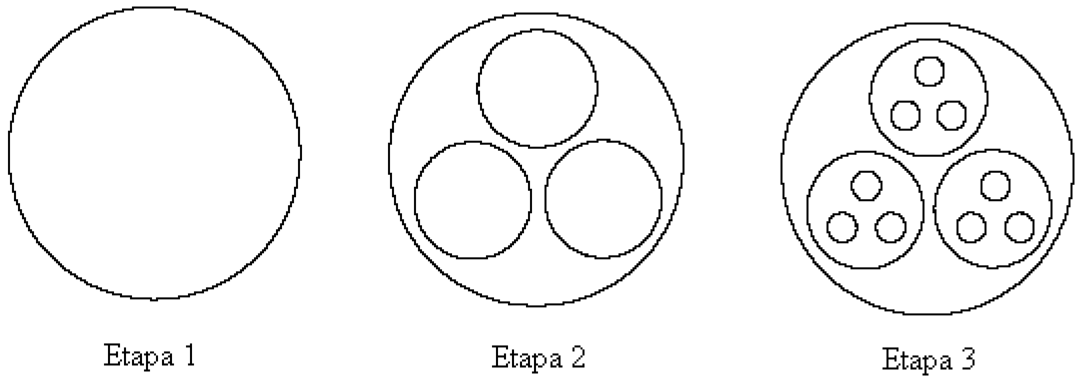
b) 

c) 

d) 

e) 

3.4. (CARVALHO–2005-Adaptada) A fibra ótica vem causando uma revolução na transmissão de dados. Sem elas, por exemplo, as transmissões de TV via cabo seriam inviáveis. A informação é levada dentro de cabos espelhados internamente em forma de luz e, por isso, os dados são transportados a uma velocidade altíssima. Por motivo de economia, um cabo pode ter vários cabos internos e estes, por sua vez, outros mais. Abaixo vemos um corte frontal de um mesmo cabo em três etapas:



O cabo principal, na etapa 1, possui raio igual a 12cm e na etapa 2 os cabos inseridos possuem raio cujo valor é a terça parte do raio do cabo principal. Responda às questões abaixo considerando ser possível a inserção de cabos, neste procedimento, indefinidamente:

a) Qual o comprimento do raio na etapa 5? E na etapa 9?

____

____

b) Qual a quantidade de cabos inseridos na etapa 13 em relação à etapa anterior?

____

____

c) Qual é a quantidade total de cabos na etapa 13?

____

____

3.5. (UFF – 2004) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinquenta anos (em 1953). (Adaptado da revista ***Veja***, 09 de julho de 2003.)

Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:

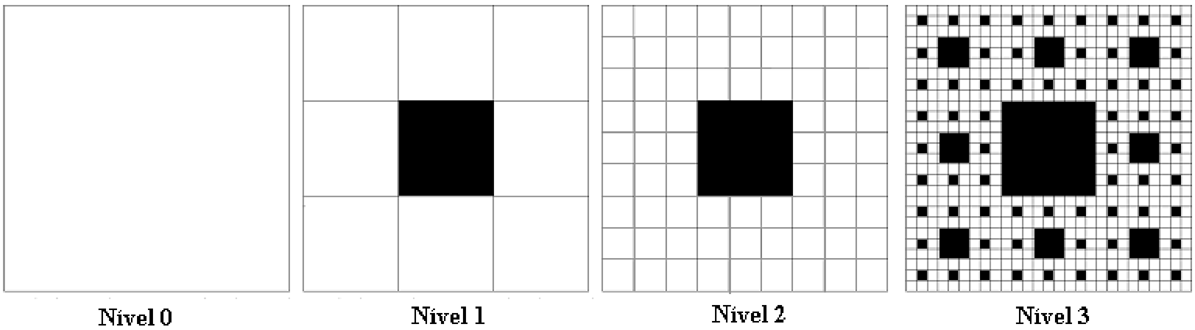
Jeffrey L. Rotman-Corbis

Newsweek, 26 de maio de 2003.

a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

3.6. Observe o princípio da construção do fractal *Tapete de Sierpinski*. Neste fractal a construção tem como iniciador um quadrado, o qual dividimos em nove quadrados congruentes, eliminando o central. Repetimos esse mesmo procedimento nos quadrados restantes, indefinidamente. Considerando que o lado do quadrado no nível 0 mede 9u.c., desta forma:

a) determine a construção desse fractal no nível 2;



b) determine o comprimento de cada lado do quadrado e a quantidade de quadrados, no nível 5?

____

____

c) as sequências formadas pelo comprimento de cada lado do quadrado em cada nível e pela quantidade de quadrados em cada nível representam Progressões Geométricas?

____

d) complete a tabela:

Nível	Área formada pela figura
0	
1	
2	
3	

e) a sequência obtida na tabela acima representa uma P.G.? Justifique.

____

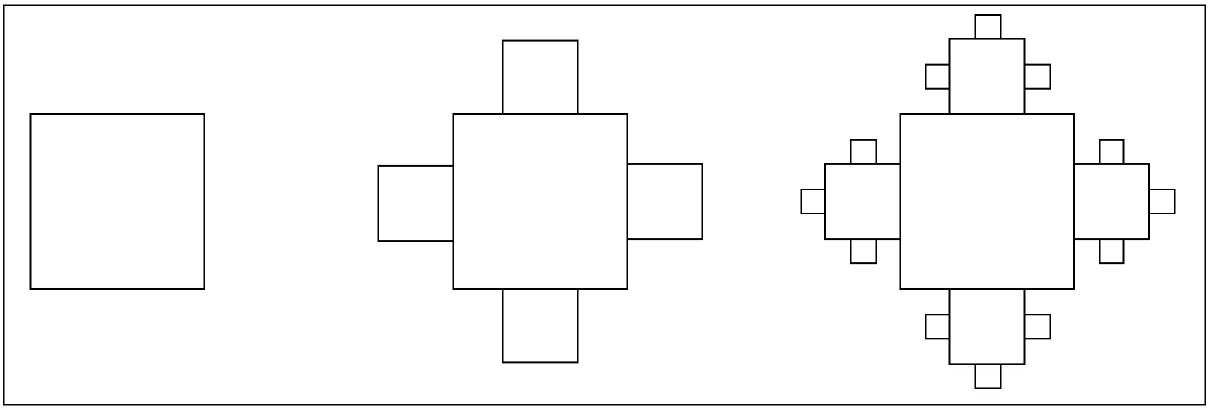
____

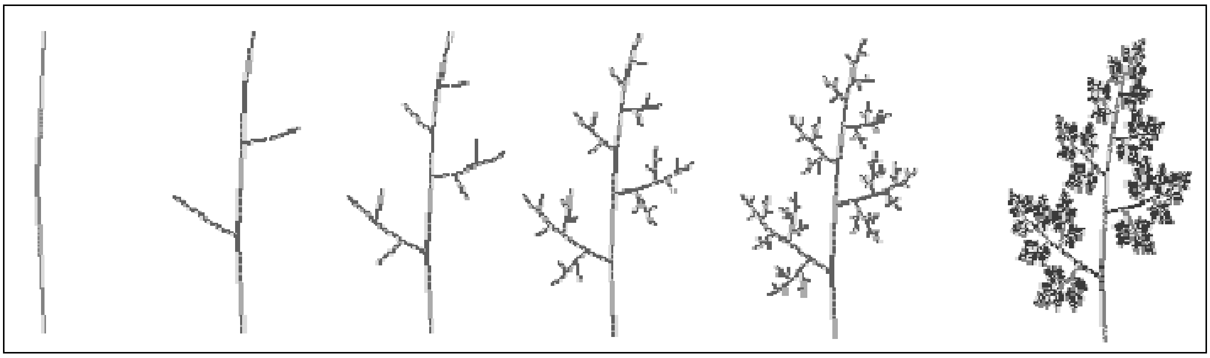
f) determine a área da figura formada no nível 8.

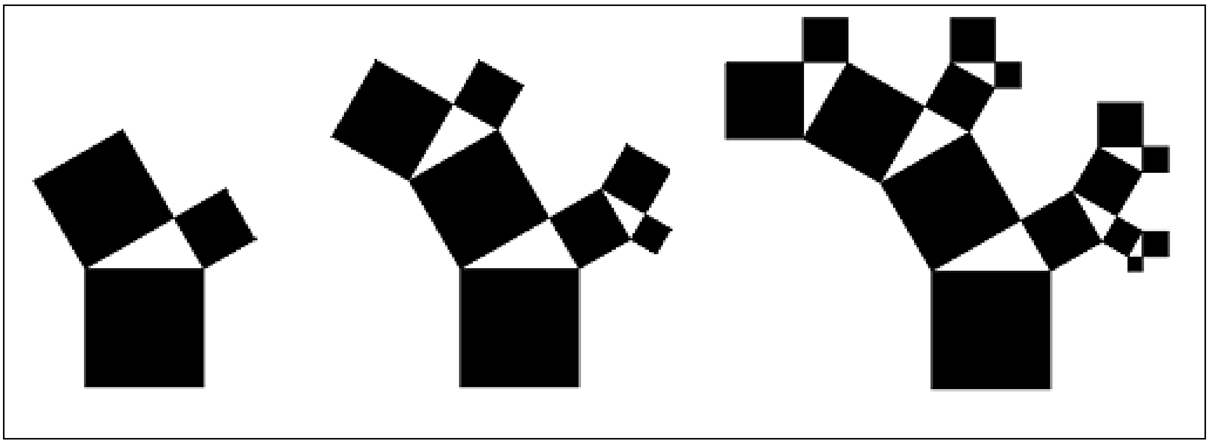
____

____

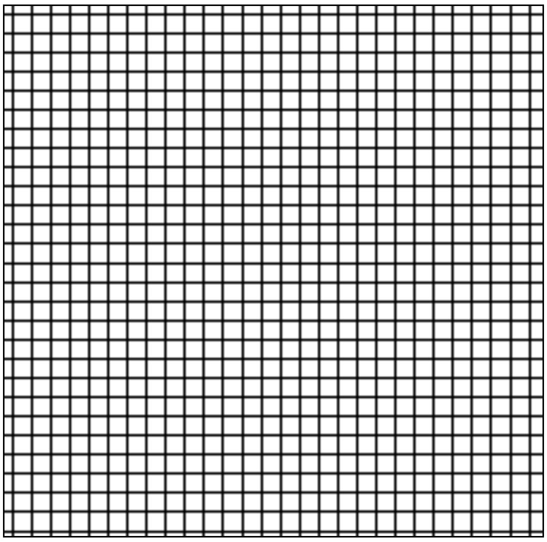
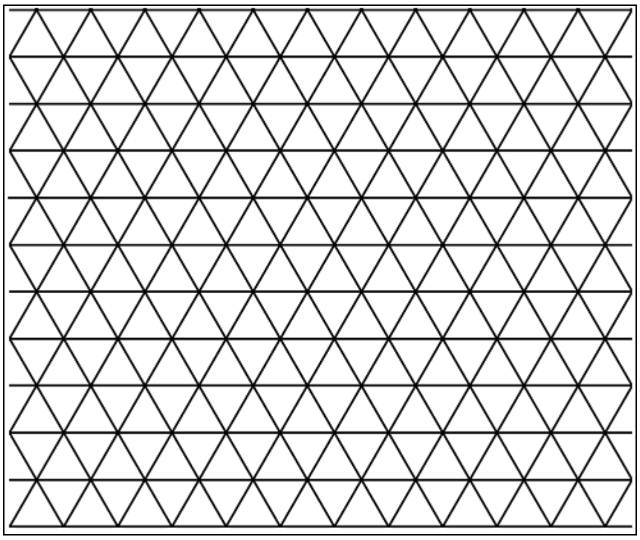
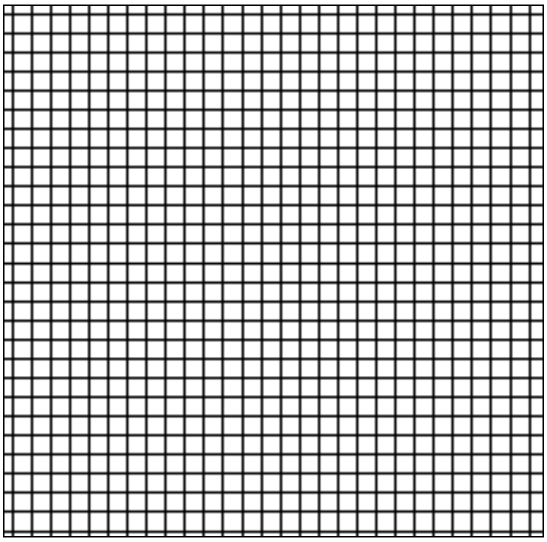
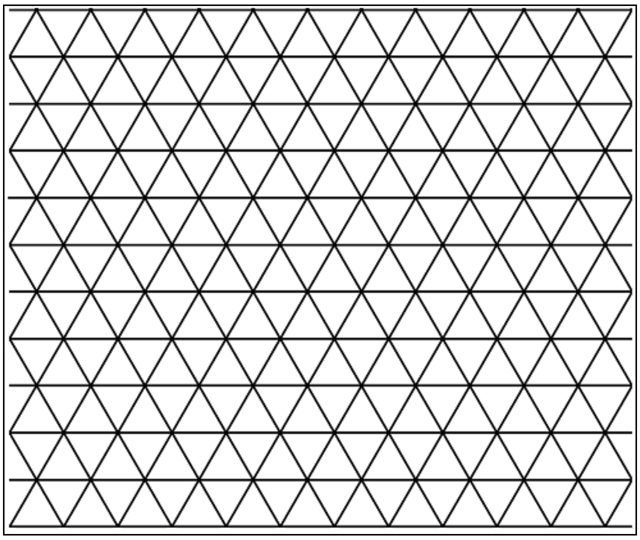
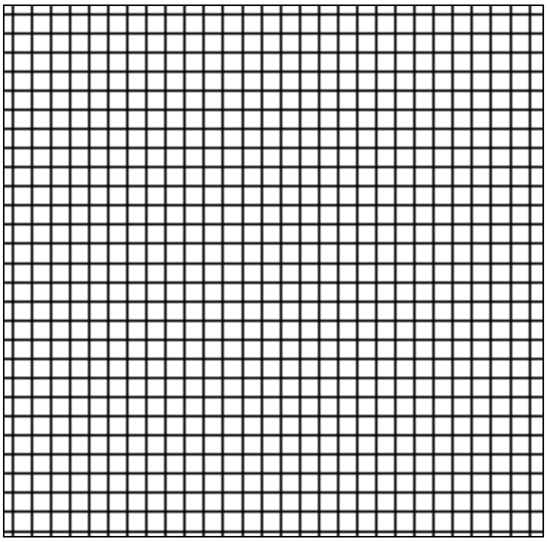
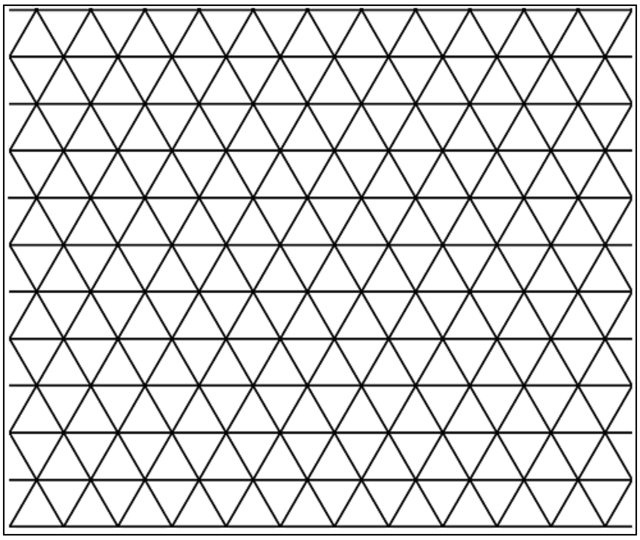
3.7. Observe as figuras abaixo. Elas mantêm o princípio da autossimilaridade.







Agora é sua vez de construir uma figura com esta propriedade. Se preferir utilize as malhas dadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. 2. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BIACHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

CARVALHO, H.C. de. **Geometria Fractal:** Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Pará, 2005. Disponível em: <http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_hamilton_cunha_de_carvalho.pdf>. Acesso em 27 out.2009.

FERREIRA, A. B. de H. **Míniaurélio**: o minidicionário da língua portuguesa dicionário. Coeditor Marina Baird Ferreira. 7. ed. Curitiba: Ed. Positivo, 2008. 896 p.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953>. Acesso em: 29 out. 2009.

IEZZI et al. **Matemática**: ciencias e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2001.

NIEDERMEYER, C. I.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. T. W. Geometria Fractal e Ensino de matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí . **Anais eletrônicos...** Ijuí: UNIJUI, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_52.pdf>. Acesso em: 08 set. 2009.

VALIM, J. C. M.; COLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. In: SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, 22., 2008, Cascavel. **Anais eletrônicos...** Cascavel: Unioeste, 2008. Disponível em: <http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf>. Acesso em: 8 set. 2009.

Apêndice B: Questionário

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos dos Goytacazes

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação — BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

O USO DE FRACTAIS NO ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Questionário

Nome (opcional):____

1. Você já estudou o conteúdo de Progressões Geométricas?

☐ Sim ☐ Não

Em caso negativo, vá para a questão 3.

2. Você já utilizou Fractais no estudo de Progressões Geométricas?

☐ Sim ☐ Não

Caso a resposta tenha sido Sim, utilizou algum *software* educacional? Qual(is)?

____

3. Você considera que o uso de Fractais pode facilitar o estudo das Progressões Geométricas?

☐ Sim ☐ Não

Comente: ____

____

4. A parte teórica ajudou no desenvolvimento das atividades e exercícios?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Caso a resposta tenha sido Não ou Parcialmente, cite os pontos a serem melhorados.

____

____

5. Você considera a utilização do *software* Geometricks:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐ difícil ☐ muito difícil

Comente: ____

6. Você utilizou algum *software* educacional nas aulas de Matemática?

☐ Sim ☐ Não

Caso a resposta tenha sido Sim, cite o nome de alguns.

____

7. A utilização do *software* Geometricks favoreceu a construção de conhecimentos matemáticos?

☐ Sim ☐ Não

Por quê? ____

8. Os enunciados das atividades e dos exercícios são de fácil compreensão?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Caso a resposta tenha sido Não ou Parcialmente, cite os que precisam ser melhorados.

____

9. Por meio das atividades, foi possível deduzir o termo geral e a soma dos *n* primeiros termos da Progressão Geométrica?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Comente: ____

____

10. Você considera que as atividades desenvolvidas contribuíram para a compreensão do estudo de Progressão Geométrica?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Comente: ____

____

11. Você considera os exercícios:

☐ fáceis ☐ moderados ☐ difíceis

Comente: ____

12. Dê sua opinião sobre o minicurso.

____

____

____

____