LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: AS TAXAS DE VARIAÇÃO E O CONCEITO DE DERIVADA

CAROLINI CUNHA SILVA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2012

CAROLINI CUNHA SILVA

O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: AS TAXAS DE VARIAÇÃO E O CONCEITO DE DERIVADA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª MSc. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Coorientadora: Profª Esp. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2012

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

S586c Silva, Carolini Cunha.
O cálculo no ensino médio : as taxas de variação e o conceito de derivada / Carolini Cunha Silva – Campos dos Goytacazes (RJ) : [s.n.], 2012.
103 f. : il.

Orientadora: Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo.
Coorientadora: Ana Paula Rangel de Andrade.

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos-Centro. Campos dos Goytacazes, RJ, 2012.
Bibliografia: f. 70 - 72.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo ensino. 2. Cálculo (Ensino médio) – Estudo e ensino. I. Azevedo, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues, orient. II. Andrade, Ana Paula Rangel de. III. Título.

CDD – 510.7

CAROLINI CUNHA SILVA

O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: AS TAXAS DE VARIAÇÃO E O CONCEITO DE DERIVADA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 13 de novembro de 2012.

Banca Avaliadora:

Prof[a] Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo (orientadora)
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

---

Prof[a] Ana Paula Rangel de Andrade (coorientadora)
Especialista em Educação Matemática/FAFIC
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

---

Prof[a] Mylane dos Santos Barreto
Especialista em Educação Matemática/FAFIC
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro

---

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Universidade Candido Mendes/Campos dos Goytacazes

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me iluminar nesta trajetória e permitir a conclusão de mais um sonho.

Aos meus pais, Valeria Lima e Erlane Silva, por todo apoio e incentivo que me deram neste e em tantos outros momentos da minha vida.

À minha querida irmã Lara Cunha que tanto me ajudou e incentivou nesta jornada, sempre me dando o apoio e carinho de que precisava.

Às minhas orientadoras Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo e Ana Paula Rangel de Andrade por toda paciência, dedicação e carinho na orientação deste trabalho monográfico, sendo para mim exemplos não só de profissionais, mas também de pessoas.

A Lucas Gioia por sempre me ajudar, ficar ao meu lado e me fazer mais feliz.

Ao meu primo João Miguel por toda contribuição para a construção da Atividade e por ser um grande amigo.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática pela grande contribuição que deram a minha formação.

Aos participantes do teste exploratório e da experimentação da Atividade, que contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos que me ajudaram, direta ou indiretamente, a concluir mais esta etapa da minha vida.

Não se pode ensinar alguma coisa a alguém, pode-se apenas auxiliar a descobrir por si mesmo.

Galileu Galilei

RESUMO

Ao observar a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, nota-se que esta disciplina já esteve presente em alguns momentos na grade curricular do Ensino Médio. Atualmente, esta disciplina está presente no livro didático, mas não na sala de aula. Com este trabalho monográfico, pretende-se mostrar que o estudo do Cálculo, quando apresentado de forma apropriada, é adequado aos alunos do Ensino Médio. Buscou-se abordar especificamente o estudo do conceito de derivada, por meio da análise das taxas de variação da função. Para isto, foi realizada uma pesquisa qualitativa, utilizando o estudo de caso como método de pesquisa. A entidade pesquisada foi um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola particular, que respondeu às questões da Atividade previamente elaboradas, de forma a conjecturar os principais conceitos que envolvem a derivada por meio da Resolução de Problemas. Os dados analisados para a construção do presente trabalho foram obtidos por meio das seguintes técnicas: observação participante, gravação em áudio da aula e anotações descritivas e reflexivas. Feitas as análises, foi possível concluir que a Atividade proposta contribuiu para que o objetivo fosse alcançado.

Palavras-chave: Cálculo. Taxas de Variação. Derivada. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

Looking at the history of the development of Calculus in Brazil, it was noticed that this subject has been present sometimes in the High School curriculum. Nowadays, this subject is present in the textbooks but not in the classroom itself. With this project, it is intended to show that Calculus study, when presented in an appropriate way, it's suitable to High School students. It was sought to apply, specifically, the concept of derived, by the analysis of variation taxes of functions. For that a qualitative research was made using the case study as a research method. The research group was formed by Senior High School students of a private school, which answered the questions of the Previously Elaborated Activities, in order to conjecture the main concepts involving the derived by Problems Resolution. The analyzed data for the formulation of this project were obtained by the following technics: participating observation, audio recording of classes and descriptive and reflexive notes. After this analysis, it was implied that the proposed Activity contributed for the accomplishment of the objective.

Keywords: Calculus, Variation Taxes, Derived, Problems Resolution.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática, em seu papel formativo, colabora para que os processos de pensamento e atitude sejam utilizados em diversos âmbitos e não somente no seu próprio. Esta pode proporcionar aos alunos mais do que a capacidade de resolver problemas, mas criar hábitos que contribuam para uma visão mais ampla da realidade, gerando nesses confiança e desprendimento para enfrentar novas situações e desenvolvendo a criatividade (BRASIL, 2000).

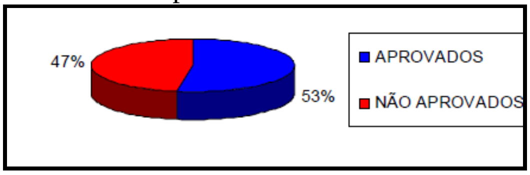
Segundo Ávila (1991, p.18-19), ensina-se Matemática por esta ser uma disciplina que "faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento".

Essa disciplina então permite uma interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, o que vem ao encontro do que está nos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio de Matemática (PCN+EM) (2002):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p.111).

Embora se deseje que o aluno ganhe a capacidade de enfrentar situações com bastante confiança ao estudar Matemática, sabe-se que esta não é uma realidade nos dias atuais, principalmente quanto ao estudo do Cálculo. São muitos os relatos de professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que apontam a dificuldade apresentada pelos alunos em seu estudo. O número de reprovação e evasão dos alunos é um problema que vem sendo muito discutido e pesquisado por alguns autores. Pereira (2009) afirma que em 2005 o índice de reprovação nos cursos de Cálculo I na UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) chegou a 47%, conforme pode ser observado no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Índices de aprovados e não-aprovados nos cursos de Cálculo I no 2º semestre de 2005



Fonte: PEREIRA, 2009, p.3

Lopes (1999, p.125) afirma que, possivelmente, uma das principais razões para o alto índice de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é que

> ... o conhecimento matemático é em camadas que se superpõem. Você começa a aprender Matemática no primeiro ano de escola. Se você não sabe dividir, não vai saber o que é uma taxa, se você não sabe o que é uma taxa não vai saber o que é uma derivada e assim por diante.

Acredita-se que os altos índices de reprovação e evasão em Cálculo I possam ser reduzidos ao fazer com que este estudo seja tratado desde o Ensino Médio. Sobre este assunto Ávila (1991, p.1) levanta o seguinte questionamento: “Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2º grau[1]? Será que é um assunto muito difícil?”.

As ideias trazidas pelo Cálculo diferem das que, usualmente, são apresentadas aos alunos do Ensino Médio, sendo muito enriquecedoras no estudo de funções e de grande relevância quando utilizadas para auxiliar a Física, além de trazerem uma infinidade de aplicações científicas no mundo moderno e outras relacionadas ao cotidiano dos alunos, preparando-os melhor para a atualidade (ÁVILA, 1991).

Como esta disciplina se relaciona muito bem com vários conteúdos do Ensino Médio, Guedes e Assis (s.d., p.2) tratam sobre a importância desta afirmando que “O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é hoje em dia considerado um dos conteúdos mais importantes trabalhado nos cursos superiores, dada a sua importância e aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento [...]”.

Dentre os conteúdos abordados na disciplina Cálculo, o ensino da derivada é de grande importância, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, dentre outros, integra-se harmoniosamente com a Física em diversos conteúdos, como no estudo do movimento, pressão, densidade de massa, densidade de carga elétrica, em meio a

[1] Atual Ensino Médio

outras aplicações. A noção de derivada pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensível para os alunos do Ensino Médio (ÁVILA, 1991).

Acredita-se que uma maneira simples de se introduzir esta noção de derivada é fazê-la por meio da análise das taxas de variação de uma função, conteúdo este que já faz parte do currículo deste segmento.

Os autores Bianchini e Paccola (2004) têm como parte integrante do seu livro didático do terceiro ano do Ensino Médio as noções de limite e derivada. Justificam este estudo devido à quantidade de aplicações que estes conteúdos têm na atualidade, afirmando que:

> Hoje em dia, o conceito de taxa de variação é usado nas situações mais diversas, como o mercado de capitais para a previsão do comportamento do valor das ações de uma empresa; na medicina, para a avaliação da melhora ou do agravamento do quadro clínico de um paciente pela estimativa da taxa de variação da quantidade de uma determinada substância no sangue em um determinado período; para a dinâmica de funcionamento de uma represa que controla a abertura de suas comportas a partir da taxa de variação do índice pluviométrico, etc. (BIANCHINI; PACCOLA, 2004, p.139).

Em suma, o estudo do Cálculo no Ensino Médio é de grande importância para os alunos por: (i) ter aplicação em diversas áreas de conhecimento (Ávila, 1991); (ii) por fornecer instrumentos, por vezes mais simples que os utilizados no Ensino Médio, na resolução de problemas (Ávila, 1991) e (iii) por desenvolver nestes, habilidades que serão necessárias ao ingressarem no Ensino Superior, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, dentre outras.

O Cálculo é uma ferramenta que simplifica a resolução de muitos problemas. Este fato serve de estímulo ao aluno no aprendizado desta disciplina. Os autores Carneiro e Wagner (2004, p.21) corroboram com a ideia descrita anteriormente por Ávila quando afirmam que "Para isso é que se aprendem as técnicas do Cálculo Diferencial. 'Gasta-se' um tempo para adquiri-las, mas esse tempo é plenamente recuperado mais adiante na simplicidade com que se resolvem as aplicações."

Ávila (1991, p.3) ainda destaca que:

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Atualmente, é possível perceber que alguns tópicos do Cálculo se encontram presentes no livro didático, como os de limite e derivada, mas não estão, na maior parte das vezes, presentes na sala de aula. Ávila (1991) acredita que esta ausência se deve ao fato de os professores se apoiarem na crença de que este é um conteúdo muito difícil para os alunos do Ensino Médio.

Neste trabalho monográfico, uma das premissas é a certeza de que as ideias trazidas pelo Cálculo são muito pertinentes e que podem ser trabalhadas no Ensino Médio. Nos programas curriculares deste segmento já constam conteúdos em que estas ideias estão presentes, como por exemplo, no estudo de funções e na cinemática. É válido ressaltar que não se objetivam incluir tópicos do Cálculo, como limites, regras de derivadas e integrais, mas utilizar destas ideias já existentes para iniciar o conceito de derivada.

Para que o aluno desenvolva alguns raciocínios típicos da Matemática, como por exemplo, o uso de regularidades, generalizações e a capacidade de resolver problemas, como objetiva os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio), é importante que se faça utilização de métodos de ensino adequados (GROENWALD et al., 2009).

Portanto, optou-se neste trabalho monográfico pela metodologia de ensino Resolução de Problemas. Dante (2009) afirma que esta metodologia deve valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos já que estes se expressam por meio de suas ideias e estratégias de resolução, assim é necessário que a oralidade seja estimulada em Matemática.

As autoras Onuchic e Allevato (2009, p.221) falam sobre a importância em se estudar Matemática por meio desta metodologia afirmando que:

> É importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que as tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam o veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas.

Ainda sobre esta metodologia de ensino é válido destacar que para adotá-la é necessária uma mudança de hábitos, tanto para os professores quanto para os alunos, já que a mesma difere muito da postura tradicional adotada pela maioria dos professores em sala de aula. A mudança deverá ocorrer, também, na maneira de se fazer a correção já que a valorização dos acertos perde o sentido, pois nesta metodologia de ensino é preciso valorizar o raciocínio, as estratégias e as interpretações feitas pelos alunos (VIANNA, 2002).

Diante do exposto, o presente trabalho monográfico tem a seguinte questão de pesquisa: **Como o estudo das taxas de variação de uma função auxilia na compreensão do conceito de derivada?** Buscando responder a tal questionamento esta pesquisa tem por objetivo compreender o conceito de derivada por meio da análise das taxas de variação da função. Propõe-se, também, mostrar que o estudo do Cálculo é perfeitamente possível e adequado para alunos do Ensino Médio, desde que este seja apresentado de forma apropriada.

No primeiro capítulo deste trabalho, encontra-se um breve histórico do ensino de Cálculo no Brasil em que é feito um apanhado do ensino desta disciplina desde o início do século XIX até os dias atuais. Destaca-se que o Cálculo já fez parte do currículo do Ensino Médio e que por duas vezes foi retirado devido a algumas reformas que mudaram os programas educacionais. São destacados, também, alguns conteúdos que pertencem ao currículo do Ensino Médio em que as ideias do Cálculo são encontradas.

O aporte teórico da presente pesquisa é apresentado no segundo capítulo, bem como uma descrição da metodologia de ensino utilizada, neste caso, a Resolução de Problemas, e os estudos relacionados.

O terceiro capítulo apresenta os aspectos metodológicos de uma pesquisa qualitativa realizada por meio de um estudo de caso. Para fazer a coleta de dados, utilizaram-se das seguintes técnicas: observação participante, gravação em áudio da aula e anotações descritivas e reflexivas. Na subseção referente à elaboração da atividade são descritas todas as questões desenvolvidas bem como seus objetivos.

No capítulo quatro, é feito o relato de experiência, em que se descreve e analisa todo o processo de aplicação da Atividade tanto do teste exploratório, cujo objetivo era detectar possíveis falhas na mesma, quanto da experimentação, em que se pretendia introduzir o conceito de derivada por meio das taxas de variação de uma função, fazendo uso da Resolução de Problemas. Em ambos os relatos foram feitas observações sobre o processo da aplicação.

Nas considerações finais são ponderados alguns aspectos relevantes sobre o desenvolvimento deste trabalho monográfico, bem como a resposta à questão de pesquisa.

1. O ENSINO DE CÁLCULO

Neste capítulo, será feita uma pequena abordagem de como o ensino de Cálculo se desenvolveu no Brasil, mais especificamente o ensino de Cálculo no Ensino Médio. Serão ressaltadas, também, algumas ideias desta disciplina que já se encontram presentes em conteúdos dos programas curriculares deste segmento.

1.1. Breve histórico do ensino de Cálculo no Brasil

Analisando a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, é possível observar que essa disciplina já fez parte da grade curricular deste segmento por mais de uma vez.

No início do século XIX, o ensino no Brasil apresentava estrutura e funcionamento caóticos. Valente (2004) relata que após a independência do Brasil tornou-se necessária a criação de uma universidade para que os filhos da elite brasileira pudessem estudar sem que fosse preciso viajar para outros países. Assim, em 1827 foram instituídos os Cursos Jurídicos e, para que os alunos, candidatos ao ensino superior, preparassem-se para os exames de ingresso destes, havia muitas aulas avulsas de Francês, Latim, Retórica, Filosofia e Geometria. Esses cursos acabaram dando origem a um sistema de educação que perdurou por cerca de 100 anos. Nesse sistema, a Matemática, antes considerada de caráter técnico-instrumental para o comércio e a formação militar, passa à categoria de saber de cultura geral.

Carvalho (1996, p.63) afirma que “Falar do ensino secundário no Brasil do século XIX até 1930 é referir-se obrigatoriamente ao Colégio Pedro II [...]”. Fundado em 1837, este Colégio foi uma instituição de referência para este nível de ensino (ensino que era ministrado para alunos com idades entre 10 e 18 anos) que funcionava de forma caótica. Valente (2004) afirma que ainda na década de 1930 “a instituição de referência para o ensino secundário e os concursos que transformavam engenheiros em catedráticos de Matemática continuava sendo o Colégio Pedro II” (VALENTE, 2004, p. 97).

Apenas a partir de 1890, com a Reforma Benjamim Constant o ensino secundário no Brasil sofreu uma grande mudança, em que o Cálculo Diferencial e Integral foi repentinamente introduzido aos programas de Matemática do Colégio Pedro II (CARVALHO, 1996). O programa de 1897 deste mesmo Colégio se mostra extenso e bem detalhado, principalmente na parte do Cálculo Infinitesimal (Figura 1.1) que consta desde variáveis e funções até integração e estudo de curvas planas.

Figura 1.1 – Parte do programa do Colégio Pedro II referente ao 4º ano[2] na parte de Cálculo

III – Cálculo Infinitesimal
53. Da variável e da função
54. Dos infinitamente pequenos. Limite. Objeto e divisão do cálculo infinitesimal
55. Derivadas e diferenciais. Interpretação geométrica.
56. Derivadas e diferenciais das funções explícitas.
57. Derivadas e diferenciais das funções implícitas.
58. Derivadas e diferenciais sucessivas.
59. Desenvolvimento das funções em séries.
60. Fórmula de Taylor. Série de MacLaurin; aplicações.
61. Aplicações das expressões aparentemente indeterminadas.
62. Teoria dos máximos e mínimos
63. Teoria das tangente. Normais.
64. Teoria das assíntotas.
65. Convexidade e concavidade das curvas.
66. Teoria dos centros nas curvas planas.
67. Teoria dos diâmetros nas curvas planas.
68. Pontos singulares.
69. Noções sobre contacto, osculação e curvatura das linhas planas.
70. Princípios fundamentais da integração.
71. Métodos de integração.
72. Integração das frações racionais.
73. Integração das funções irracionais.
74. Integração de algumas funções circulares.
75. Integração das funções exponenciais e logarítmicas.
76. Integração definida.
77. Quadratura das curvas planas.
78. Retificação das curvas planas.
79. Estudo minucioso de uma ou mais curvas planas, à escolha do professor, aplicando os recursos de análise estudados durante o ano letivo.

Fonte: CARVALHO, 1996, p. 69

Ainda em 1890, segundo Euclides Roxo, “o estudo do Cálculo não tinha ligação com o restante do curso, em que não era desenvolvida a idéia [sic] de função, e foi feito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente” (SPINA, 2002 apud PEREIRA, 2009, p.46).

Segundo Pereira (2009), devido à postura descrita por Roxo, a partir de 1900 o Cálculo Diferencial e Integral desapareceu por várias décadas dos programas oficiais do Colégio Pedro II.

No início do século XX na Europa, o matemático alemão Félix Klein defendia que deveria ser estabelecida uma nova orientação para o ensino da Matemática. Segundo Dassie

[2] Os alunos do terceiro ano do ginásio são meninos de 14, 15 anos de idade (CARVALHO, 1996, p. 95). Assim, supõe-se que os do quarto ano são meninos de 15, 16 anos.

(2008) este movimento iniciado por Klein teve como principais características: (i) tornar essencialmente predominante o ponto de vista psicológico, significando que o ensino não deveria depender apenas da matéria a ser ensinada, mas que se deve atender ao indivíduo a quem se pretende ensinar; (ii) na escolha da matéria a ministrar ter em vista as aplicações da Matemática ao conjunto de outras disciplinas, para que o estudo se torne mais vivo e produtivo e, (iii) subordinar o ensino da Matemática à finalidade da escola moderna, tornando os indivíduos moral e intelectualmente aptos a cooperarem na obra da civilização atual.

Tais orientações influenciaram Euclides Roxo, a partir de 1925, a propor uma mudança nos programas do Colégio Pedro II, no qual era diretor. Esta reforma foi efetivada em 1929 e provocou uma mudança radical nos mesmos, dentre estas a reintrodução da noção do Cálculo Infinitesimal no ensino da Matemática na escola secundária (DASSIE, 2008).

Durante a década de 1930 inicia-se a “Reforma Francisco Campos” em que o currículo do curso secundário foi reestruturado passando a ter duração de sete anos. Nessa reforma, ficou estabelecido que a Matemática seria fragmentada em várias áreas e destacou-se a importância de se firmar o ensino desta disciplina em torno do conceito de função. Esta reforma recebeu muitas críticas e sofreu resistência, principalmente por parte dos professores, o que acabou fazendo com que sua implementação não tivesse o resultado desejado (CARVALHO, 1996).

Entre as décadas de 1920 e 1940 foram muitas as discussões feitas sobre o ensino da Matemática no Brasil. Dentre as figuras que participaram destes debates destacaram-se Euclides Roxo; Antônio I. de Almeida Lisboa, professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, e o padre Arlindo Vieira, que abordava discussões sobre o ensino da Matemática e era porta voz dos professores do Colégio Santo Inácio. Todas essas discussões acabaram dando origem a algumas reformas educacionais desta época (CARVALHO, 1996).

Roxo defendia que as ideias do Cálculo deviam ser introduzidas no ensino secundário afirmando que “em substituição a assuntos antiquados, sem valor educativo e sem significação geral, serão trazidas para o ensino secundário as noções de função, de geometria analítica e de cálculo infinitesimal” (ROXO, 1905 apud CARVALHO, 1996, p.76).

Após tantas discussões sobre a importância da Matemática neste nível de ensino, em 1942 com a “Reforma Capanema” se encerra mais de uma década destes debates e fica decretado um novo programa (Figura 1.2) no qual constavam os estudos de vários tópicos do Cálculo Diferencial e Integral. Esta reforma, no que se refere ao estudo do Cálculo, ficou em vigor até 1961 (CARVALHO, 1996).

Figura 1.2 – Parte do programa de Matemática do Colégio Pedro II referente ao Curso Científico

Programa de Matemática do Curso Científico
Primeira Série
(...)
Álgebra
Unidade IV – Os polinômios
2- Noção de variável e de função; variação do trinômio do segundo grau; representação gráfica.
3- Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.
(...)
Segunda Série
Unidade I – A função exponencial
(...)
2- Noção de função exponencial e de sua função inversa.
(...)
Terceira Série
Álgebra
Unidade II – Funções
1- Noção de função de variável real.
2- Representação cartesiana.
3- Continuidade; pontos de descontinuidade, descontinuidade de uma função racional.
Unidade III – Derivadas
1- Definição; interpretação geométrica e cinemática.
2- Cálculo das derivadas.
3- Derivação das funções elementares.
4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.
(...)

Fonte: CARVALHO, 1996, p. 77-78

Desde 1943, o Cálculo fazia parte do programa da 3.ª série do curso científico (atual Ensino Médio). Duclos (1992) afirma que o vestibular em 1946 era realizado por meio de provas escritas e orais, tendo o Cálculo como uma de suas etapas para o ingresso na Escola de Engenharia da antiga Universidade do Brasil, atual Universidade Federal do Rio de Janeiro. Segundo este autor “Na prova oral de Matemática tivemos que nos defrontar com três examinadores: o primeiro examinava o candidato em Álgebra, o segundo em Geometria (plana e espacial) e Trigonometria, e o terceiro exclusivamente em Cálculo” (DUCLOS, 1992, p.26).

No início da década de 60, o ensino da Matemática passou por uma nova reforma, a Matemática Moderna a qual se caracterizava por valorizar excessivamente as propriedades, as abstrações matemáticas, o ensino de símbolos e termos complexos, ou seja, o formalismo e o rigor no tratamento dado aos conteúdos. Toda esta reforma acabou custando ao ensino da Matemática a retirada de alguns tópicos significativos como o ensino da Geometria e do Cálculo (ONUCHIC, 1999).

Ávila (1991, p.2) explica o porquê da retirada do Cálculo, nesta época, afirmando que “com essa excessiva preocupação com o rigor, o ensino do Cálculo exigiria agora um estudo detalhado dos números reais, coisa que tomaria no mínimo todo um semestre, por isso mesmo totalmente inviável".

Em 1951, o governo começa a conceder uma abertura para que, os governos estaduais e dos territórios apresentem seus próprios programas de ensino, que deveriam atender ao programa mínimo e às instruções metodológicas para poderem ser aprovados. Em 1961, a estrutura das escolas brasileiras sofre algumas mudanças, devido, em parte, a descentralização anteriormente descrita, que foi permitida pela Lei de Diretrizes e Bases deste mesmo ano. Estas mudanças consistiram, principalmente, em dividir a estrutura das escolas em primário, ginasial, colegial e superior como graus escolares (CARVALHO, 1996).

Atualmente, alguns tópicos do Cálculo estão presentes no livro didático do ensino médio, mas não na sala de aula. Ávila (2006, p.30) afirma que "embora os livros do Ensino Médio incluam limites e derivadas entre os tópicos tratados, essas coisas são pouco ensinadas, muitas vezes sob o pretexto de que são muito difíceis" e defende a introdução do Cálculo já na 1.ª série do Ensino Médio, logo após a introdução do estudo de funções.

Acredita-se que a dificuldade da inclusão do Cálculo no currículo do Ensino Médio se deva à má estruturação dos programas e para que esta situação seja modificada é preciso retirar o que há de arcaico e incluir tópicos mais significativos (ÁVILA, 1991).

1.2. As ideias do Cálculo no Ensino Médio

Analisando o programa curricular dos Ensinos Fundamental e Médio, é possível perceber que há conteúdos em que se nota a presença das ideias do Cálculo Diferencial. Em sua tese, Pereira (2009) aponta alguns, tais como: (i) a área do círculo, em que é possível fazer com que o aluno calcule áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência para perceberem que quanto maior for o número de lados destes polígonos, mais próximo a área deste polígono estará da área de um círculo e que, a área do círculo é menor que a área do polígono regular circunscrito à circunferência e é maior que a do polígono regular inscrito à circunferência e (ii) a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. A ideia do Cálculo que está presente nestes dois conceitos é a de limite.

O professor Geraldo Ávila (1991) acredita que é possível incluir o ensino de Cálculo no Ensino Médio desde que os programas sejam arrumados de uma forma adequada para tal. Este autor diz ainda que o conceito de derivada de uma função pode ser introduzido em uma aula de reta tangente a uma curva e, esta pode ser acompanhada de aplicações utilizando a

Cinemática. Segundo Ávila (1993, p.7) o ensino de elementos do Cálculo é "enriquecedor no estudo das funções e muito relevante como auxiliar no ensino da Física".

Ainda sobre a relação do Cálculo com a Física acredita-se que, neste contexto, a noção de taxa de variação instantânea, tão utilizada pelos alunos de Ensino Médio, é uma das mais relevantes significações do conceito de derivada.

Rezende (2003 apud PEREIRA, 2009) fala sobre a importância de se compreender o conceito da derivada afirmando que:

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpreta-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos (REZENDE, 2003 apud PEREIRA, 2009, p.53).

Dentro do conteúdo de funções, há algumas maneiras de se trabalhar as ideias do Cálculo. Buscou-se utilizar, neste trabalho monográfico, o estudo de algumas funções e das taxas de variação para apresentar o conceito de derivada aos alunos do Ensino Médio. Este último conceito, que já está presente no currículo dos alunos deste segmento, relaciona-se muito bem com o estudo do movimento presente na Física, com a Álgebra, devido à presença das variáveis e com a Geometria nas aplicações de área e volume.

2. APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o aporte teórico que auxiliou a construção deste trabalho monográfico.

2.1. Resolução de Problemas

No início do século XX, o ensino da Matemática foi caracterizado como repetitivo, com maior ênfase na memorização. Dentro deste modelo de ensino, é sabido que alguns alunos conseguiam “pensar” e assimilar o que era ensinado, mas a maioria deles não. Anos depois se discorreu que os alunos deveriam aprender Matemática com significado, e foi nesta época que se começou a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática (ONUCHIC, 1999).

Como visto no capítulo anterior, o Brasil entre as décadas de 60 e 70, passou por uma reforma no ensino da Matemática conhecida como Matemática Moderna. Esta tinha como principais características valorizar o formalismo e o rigor no tratamento dado aos conteúdos. Essa valorização acabou prejudicando o desenvolvimento da Resolução de Problemas.

Para minimizar os efeitos da Matemática Moderna, a Resolução de Problemas começa a ganhar força a partir dos anos 70, quando os educadores matemáticos entenderam que o desempenho de um aluno em resolver problemas mediria o domínio de uma competência matemática.

Em 1980, foi publicado nos Estados Unidos, pelo NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*, uma agenda com recomendações para pessoas que estivessem interessados em buscar uma melhoria na Educação Matemática. Esta agenda, intitulada *“An Agenda for Action”*, recomendava que o foco da Matemática escolar deveria ser dado à Resolução de Problemas e, que os educadores matemáticos poderiam desenvolver em seus alunos a habilidade de resolver problemas, dentre outras recomendações (ONUCHIC, 1999).

No Brasil, somente nos anos 90, a Resolução de Problemas passa a ser vista como uma metodologia de ensino de Matemática, devendo ser desenvolvida por meio de um conjunto de estratégias.

A Resolução de Problemas proporciona ao aluno uma oportunidade de pensar por si mesmo, podendo construir estratégias e argumentações para a resolução e ainda relacionar diferentes conhecimentos na busca pela solução de um problema. Para isso, as questões devem ser reais e fazer sentido para os alunos (BRASIL, 2002).

Assim como os PCN+EM (2002) afirmam que nessa metodologia de ensino deve-se trabalhar com desafios reais, a autora Onuchic (1999, p.204) afirma que a Resolução de Problemas "envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas".

A História da Matemática mostra que a Resolução de Problemas foi construída como resposta a perguntas oriundas de diferentes contextos de ordem prática. Mas os problemas matemáticos, fundamentais no ensino da Matemática, não têm desempenhado essa função, sendo trabalhados de forma padronizada por professores e alunos (SILVA; CASTRO FILHO, s.d.). Esses problemas têm a função de "fixar" os conteúdos estudados e como são muito repetitivos, permitem que o aluno perceba certas características no processo de resolução, criando padrões a serem utilizados na resolução de problemas semelhantes (MEDEIROS, 2001).

Para evitar estas padronizações ao resolver problemas, os PCN+EM (2002) destacam a importância de se utilizar a Resolução de Problemas no ensino da Matemática afirmando que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2002, p.112).

Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999) apresentam três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas: (i) ensinar sobre Resolução de Problemas; (ii) ensinar a resolver problemas; (iii) ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas.

No primeiro modo, "ensinar sobre a Resolução de Problemas", busca-se ensinar o modelo de Polya ou alguma variação dele. É válido ressaltar que nesse modo o significado está centrado na maneira como a Matemática é ensinada, acabando por distanciar-se da proposta essencial, sugerida pelos PCN, que o aluno deve aprender Matemática para que seja capaz de usá-la.

No segundo modo, "ensinar a resolver problemas", deve-se concentrar em como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada em problemas rotineiros e não rotineiros. A desvantagem está no risco de considerar que a Resolução de Problemas só possa ser utilizada depois da transmissão de um novo conhecimento específico (RIBEIRO, 2010).

O terceiro modo apresentado, "ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas", é visto como uma metodologia de ensino, tendo o problema como um ponto de partida para se ensinar Matemática. Acredita-se que, assim, o ensino está centrado no aluno, é ele quem constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor (SCHROEDER; LESTER, 1989, apud SOUZA; NUNES, s.d.).

Onuchic (1999) defende que a Resolução de Problemas pode ser utilizada para introduzir um novo conteúdo, afirmando que:

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis (ONUCHIC, 1999, p. 207).

O problema é visto como um elemento que dá início ao processo de construção do conhecimento. Esse problema é formulado de modo a favorecer a formação de conceitos em que o foco é dado à ação do aluno (ONUCHIC, 1999).

Ribeiro (2010, p.125) afirma que esta terceira abordagem da Resolução de Problemas "não exclui as demais concepções, pois, ao adotar tal metodologia, os alunos aprendem tanto *sobre* resolução de problemas, como conhecer matemática *para* resolver novos problemas *através da resolução de problemas"*.

Ainda, para esse autor, o processo de ensino-aprendizagem de Matemática está centrado na preocupação que o aluno compreenda, interprete e resolva uma dada situação-problema, que este consiga rever e ampliar conceitos, ideias e métodos matemáticos; buscar caminhos e estratégias próprias de resolução; desenvolver o interesse pela disciplina construindo sua autonomia (RIBEIRO, 2010).

> Quando se utiliza a resolução de problemas para a apreensão, construção e entendimento dos conteúdos matemáticos, encara-se esse conhecimento em elaboração e não como pronto e acabado. Isso significa aprender por meio de ações refletidas, suposições e aproximações e não apenas pela reprodução, automatização e memorização (RIBEIRO, 2010, p.118).

Segundo Dante (2009), um dos princípios que devem ser seguidos ao se utilizar a Resolução de Problemas como metodologia de ensino é o de que para resolver um problema são feitas aproximações sucessivas ao conceito, assim o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas. Inclui-se neste processo fazer as transferências, rupturas e retificações, sendo este análogo ao observado na história da Matemática.

Após serem analisados os três modos diferentes de se abordar Resolução de Problemas e verificada a importância da mesma para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática será adotado para o presente trabalho o terceiro modo apresentado.

Quando se trabalha com a Resolução de Problemas é inevitável fazer os seguintes questionamentos: (i) O que é um problema? (ii) Como resolver um problema?

Para Vila e Callejo (2006) um problema:

> [...] não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forme sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas. (VILA; CALLEJO, 2006, p.10).

Segundo Lester (1982 apud DANTE, 2009, p.12) “problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”.

Para Polya (2006), quando se tem um problema, há um objetivo a ser alcançado. Assim é de grande importância que haja um diálogo entre professor e aluno para que este possa resolver o problema. Dessa forma, é necessário que se inicie o processo de familiarização com o problema a ser resolvido, começando com a leitura do enunciado para que o aluno possa compreender o problema e seu objetivo. O enunciado deve ser lido novamente, quantas vezes forem necessárias, até que o objetivo deste esteja claro e a compreensão aperfeiçoada (POLYA, 2006).

Ao falar sobre como resolver um problema, não se pode deixar de citar George Polya, que é considerado o “pai” da Resolução de Problemas. Polya, em 1945, foi um dos pioneiros no estudo sobre Resolução de Problemas. No livro, *How to Solve it* escrito em 1945 (traduzido para o português em 1978, por Heitor Lisboa de Araújo com o nome de *A Arte de Resolver Problemas)*, Polya se tornou uma grande referência na abordagem deste assunto.

Em seu livro, Polya destaca que para resolver um problema são necessárias quatro fases, a saber: compreender o problema, estabelecer um plano para a resolução, executar o plano e o retrospecto.

Na primeira delas, "compreender o problema", é necessário que o objetivo a ser alcançado esteja claro ao ler o enunciado para que possam ser identificados as partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante (POLYA, 2006). Segundo Dante (2009) os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas, pois assim poderão compreender melhor o problema, esclarecendo os pontos importantes, destacando as principais informações e as condições que possuem para resolvê-lo.

A segunda, "o estabelecimento de um plano", geralmente surge, rapidamente ou de forma gradual, como uma ideia para a resolução. O professor pode ajudar o aluno nessa tarefa de forma discreta, primeiramente fazendo indagações e sugestões que provoquem a ideia ou sugerir que pense em um problema correlato. Um problema correlato é aquele que se relaciona intimamente com o problema que se deseja resolver (POLYA, 2006).

A terceira fase a ser cumprida é a "execução do plano", fase esta que é facilitada, ao passo que o plano já tenha sido previamente estabelecido (POLYA, 2006).

A quarta é o "retrospecto". Nesta fase o aluno deve reconsiderar e reexaminar o resultado obtido para que sua capacidade em resolver problemas seja aperfeiçoada. Para Polya (2006) um problema nunca é finalizado por completo, sempre resta algo a fazer, sendo do professor o papel de mostrar aos alunos que se pode aprofundar e melhorar qualquer resolução.

Uma visão estática sobre o papel do professor é a de que este é visto como um transmissor e a aprendizagem como recepção. Ao utilizar esta metodologia, a visão deve ser diferente, dinâmica, assim, o professor é visto como um facilitador e a aprendizagem como uma construção ou reconstrução por parte do aluno, partindo sempre do que este já conhece. (VILA; CALLEJO, 2006).

Para Polya (2006), o professor deve auxiliar o aluno na resolução e deve desenvolver neste a capacidade de resolver problemas futuros. Se o aluno conseguir resolver o problema que lhe foi apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolvê-los futuramente.

É preciso que o aluno adquira experiência em resolver problemas, mas se não for auxiliado pelo professor este pode se sentir desmotivado. Por isso o professor deve auxiliá-lo, sem ajudar demais, para que assim ainda lhe reste algum trabalho a fazer. Quando o aluno não é capaz de resolver sozinho, o professor deve deixá-lo com a ilusão de que fez um trabalho independente. A ação do professor deve ser conduzida com muita naturalidade, sendo, às vezes, necessário se colocar no lugar do aluno para procurar compreendê-lo (POLYA, 2006).

Outro aspecto relevante para a aprendizagem em Matemática e que pode motivar os estudantes diz respeito à incorporação do uso do computador na sala de aula. O uso deste nas atividades com resolução de problemas que objetivam a introdução de um novo conceito pode proporcionar ao aluno descobertas empíricas, fazendo-o relacionar com as representações Matemáticas, que serão realizadas por meio de várias simulações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009).

> Ao utilizar o computador na Resolução de Problemas que visam à introdução de um novo conceito, o processo subseqüente [sic] de formalização dos conteúdos matemáticos, conforme tem sido mostrado nas pesquisas atuais, apresenta-se amplamente facilitado devido a esta abordagem empírica e experimental que o computador possibilita. O significado de um conceito matemático é interiorizado pelo aluno, tornando o processo de formalização Matemática mais fácil e natural (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p.225-226).

O computador pode ser um facilitador para a implementação dessa metodologia na sala de aula, mas é sabido que para esta acontecer é necessária uma mudança de hábitos antigos no que diz respeito à elaboração de avaliações e ao modo de corrigi-las. Visto que essa metodologia de ensino considera o raciocínio, as estratégias e as interpretações feitas pelos alunos, a correção que valoriza os acertos deixa de ser relevante (VIANNA, 2002).

2.2. Estudos Relacionados

Nesta subseção, serão apresentadas três pesquisas realizadas que envolvem o estudo de Cálculo, tema tratado neste trabalho monográfico.

A primeira delas é a dissertação de mestrado intitulada “Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade” que foi escrita por Vinicius Mendes Couto

Pereira e orientada pela Profª Drª Ângela Rocha dos Santos em 2009, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Pereira (2009) relata que a motivação de seu trabalho surgiu a partir das dificuldades existentes com o ensino de Cálculo nos cursos iniciais das universidades brasileiras. Assim, sua pesquisa tem por objetivo mostrar que é possível inserir algumas ideias do Cálculo no Ensino Médio e, refletir criticamente sobre o problema da variabilidade, propondo estratégias alternativas para a melhoria do aproveitamento nas disciplinas iniciais de Cálculo das universidades. Como metodologia de pesquisa, foi utilizada a Engenharia Didática, desenvolvida pela Escola Francesa de Didática da Matemática. Na validação da sequência didática, participaram dezesseis alunos dos 1º e 2º anos do Ensino Médio, sendo feito uso de pequenos aplicativos computacionais escritos em linguagem JAVA.

Em sua dissertação, Pereira (2009), para atingir seu objetivo, elabora uma sequência didática. Vale ressaltar que o autor enumera as hipóteses que deseja trabalhar de acordo com as indicações dos PCNEM. Nos capítulos finais de seu trabalho, faz análises a *priori* e a *posteriori* à validação. Conclui que é possível e adequado abordar alguns conceitos que fundamentam o desenvolvimento do Cálculo tanto para alunos do Ensino Médio quanto nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e de Cálculo do Ensino Superior.

A dissertação de Pereira (2009) possui alguns pontos em comum com este trabalho monográfico, como: (i) a abordagem histórica do ensino de Cálculo no Brasil; (ii) a definição de derivada como taxa de variação instantânea; (iii) a valorização do significado da derivada e não das técnicas de derivação e (iv) a discordância na sequência imposta pela maior parte dos livros que trazem “Limite, Continuidade, Derivada e Integral”. As principais diferenças estão na metodologia de ensino e na sequência didática.

Outra dissertação de mestrado que, também, foi pesquisada tem como título “O ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas” escrita por Marcos Vinícius Ribeiro e orientada pela Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic em 2010 na Universidade Estadual Paulista *Campus* Rio Claro.

O autor revela que devido à sua experiência em sala de aula com Cálculo Diferencial e Integral pôde perceber que são muitas as dificuldades apresentadas pelos alunos neste ramo da Matemática, gerando assim a seguinte questão de pesquisa: Como trabalhar Cálculo e, em especial, Integrais com alunos que trazem dificuldade em Matemática desde o Ensino Fundamental? Portanto, sua pesquisa tem por objetivo analisar uma sala de aula de um curso de Engenharia quanto ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Nela se trabalhou com a História da Integral como parte da História da Matemática, com a Resolução de Problemas e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, como metodologia de trabalho.

A pesquisa foi sustentada na Metodologia de Pesquisa de Romberg em que apresenta uma sequência de dez atividades distribuídas em três blocos: o primeiro destinado à identificação do problema da pesquisa; o segundo a selecionar estratégias apropriadas para resolver esse problema e o terceiro se responsabiliza pela análise do projeto aplicado. Ao final, é relatado pelo autor que a aplicação do projeto se mostrou capaz de submeter os alunos a novos desafios fazendo com que estes soubessem tomar as decisões para resolvê-los, tendo assim um rendimento satisfatório quanto ao objetivo da pesquisa. Destacou-se, ainda, que o conhecimento sobre a História da Integral ajudou a destacar para os alunos a importância de como proceder em suas aplicações.

Em sua dissertação Ribeiro (2010), dedica um capítulo à metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, trazendo uma parte histórica cujas ideias apresentadas foram de grande valia para o presente trabalho.

No artigo de Ávila (1991), denominado "O Ensino de Cálculo no 2º Grau", é feito um pequeno apanhado histórico afirmando que o Cálculo já fez parte da grade curricular desse segmento por mais de uma vez e explicando as razões de sua retirada. Posteriormente, o autor trata sobre a importância de se introduzir alguns tópicos dessa disciplina, justificando que esta tem ideias inovadoras e diferentes das que o aluno está habituado a estudar. São abordadas, ainda, sugestões de como fazer esta inclusão, utilizando alguns conceitos que têm relação com o tema proposto, como aplicações de função e cinemática. Ao final, conclui-se que, para o Cálculo ser incluído no currículo, é necessário uma reestruturação nos programas, de forma que se retire o que há de arcaico e se introduzam ideias novas, deixando que as diferentes partes fiquem bem articuladas.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, será apresentada a metodologia que norteou este trabalho monográfico e a elaboração das atividades.

Esta pesquisa é de caráter qualitativo na qual se realizou um estudo de caso com alunos da 3ª. série do Ensino Médio de uma escola particular de Campos dos Goytacazes, pois os mesmos já estudaram funções e era esperado que estivessem mais familiarizados com temas como crescimento e decrescimento, taxa de variação dentre outros.

3.1. Pesquisa Qualitativa

Este trabalho monográfico tem a seguinte questão de pesquisa **Como o estudo das taxas de variação de uma função auxilia na compreensão do conceito de derivada?** Buscando respondê-la optou-se por fazer uma pesquisa qualitativa utilizando como método de pesquisa o estudo de caso.

Fazer uma pesquisa não é apenas recolher dados, mas analisar as causas e efeitos, contextualizando-os no tempo e no espaço, dentro de uma concepção sistêmica (OLIVEIRA, 2010).

A pesquisa qualitativa é conceituada como um processo de reflexão e análise, por meio de métodos e técnicas, que visa a compreender detalhadamente o objeto de estudo que, neste caso, é o estudo de derivada (OLIVEIRA, 2010).

O método de pesquisa utilizado neste trabalho tem por objetivo "entender em profundidade o 'como' e os 'porquês' de uma entidade no seu contexto real, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador" (PONTE, 2006, p.2).

"Um estudo de caso pode ter profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias já existentes" (PONTE, 2006, p.8).

O melhor local onde o estudo de caso deve ocorrer é o ambiente natural do investigado, assim é possível fazer observações para coletar os dados da pesquisa. Neste trabalho, foi feita a observação participante durante a experimentação das atividades, que é uma modalidade de observação na qual o observador não é passivo, podendo assumir vários papéis no estudo de caso e participar ativamente dos eventos a serem estudados. Para Yin (2010) em alguns tópicos, pode não haver uma maneira de se coletar os dados necessários se não por meio da observação participante. Assim, pode-se ter acesso aos eventos ou grupos que, de outro modo, seriam impraticáveis ao estudo.

Ainda segundo Yin (2010), uma importância em se ter a observação participante como coleta de dados é obter a oportunidade diferenciada em captar a realidade do ponto de vista de alguém “interno” ao estudo de caso e não externo a ele. Yin (2010) continua ressaltando que a capacidade de captar essa realidade pode ser valiosa para retratar o fenômeno a ser estudado.

Outras fontes de evidência foram utilizadas para documentar a experimentação, como o registro das respostas dadas pelos alunos, a gravação em áudio da aula e anotações descritivas e reflexivas. As anotações descritivas são utilizadas para registrar a descrição das atividades enquanto as reflexivas são para o processo, reflexões sobre as atividades e conclusões resumidas (MOREIRA; CALEFFE, 2006).

A partir dos objetivos propostos, diversas etapas foram realizadas, a saber: (i) preparar as atividades que serão utilizadas na pesquisa; (ii) realizar o teste exploratório; (iii) analisar os dados coletados e modificar as atividades, se necessário; (iv) experimentar as atividades, e (v) analisar as atividades aplicadas para verificar a aprendizagem do estudo proposto.

Como dito anteriormente, a pesquisa qualitativa não tem por objetivo apenas recolher dados, mas analisar as causas e efeitos, contextualizando-os no tempo e no espaço, dentro de uma concepção sistêmica (OLIVEIRA, 2010). Por isso, a escolha da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que essa busca com que o aluno aprenda o conteúdo proposto com significado.

3.2. Elaboração da Atividade

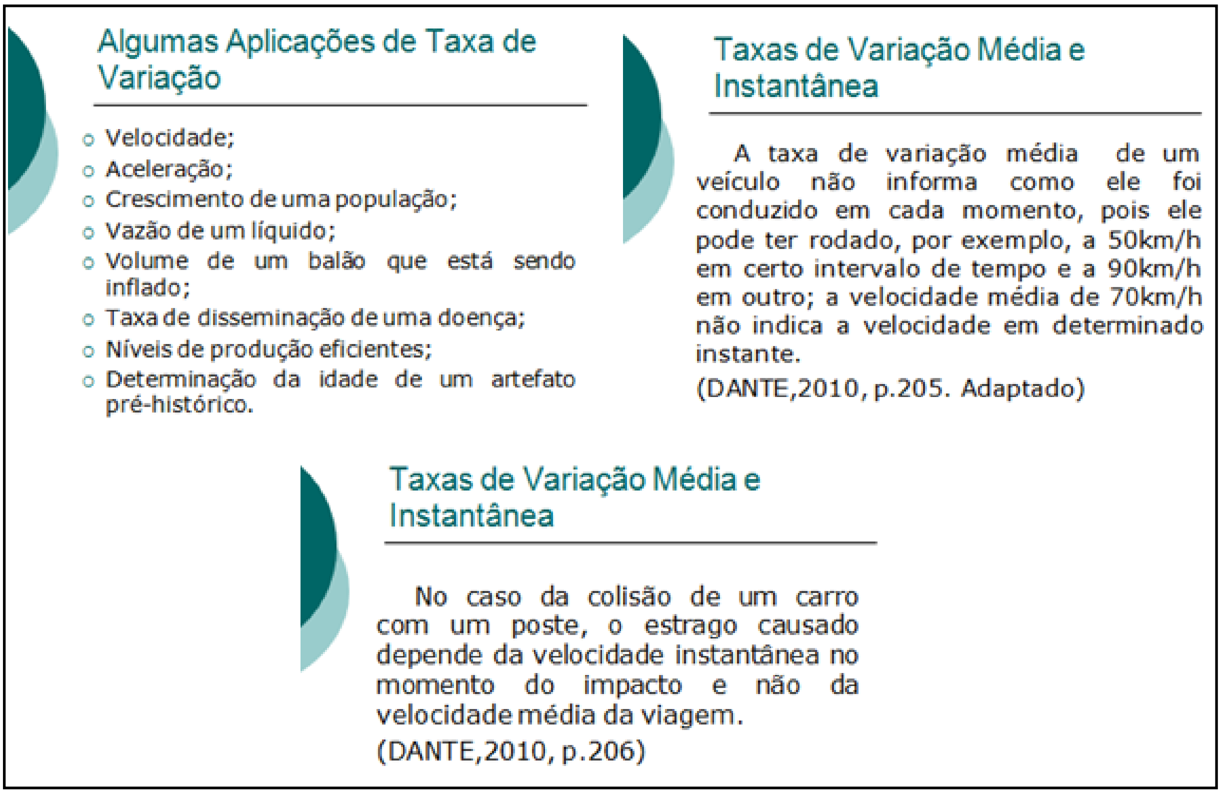
A Atividade (Apêndice B) elaborada neste trabalho monográfico, composta por 10 questões e uma Folha Extra, tem como objetivo iniciar o estudo de Derivada por meio da análise das taxas de variação de uma função.

Com este estudo, pretende-se promover a compreensão do conceito de Derivada na resolução de questões, sem fazer uso de suas regras.

A seguir, serão expostas as questões da Atividade e a Folha Extra, bem como os objetivos de cada uma.

Este trabalho tem início com uma apresentação em slides (Figura 3.2.1) partindo de uma breve introdução sobre taxas de variação, mostrando algumas aplicações com o objetivo de situar o aluno em relação a aplicabilidade do tema proposto para o presente trabalho.

Figura 3.2.1 – Exemplos de aplicação de taxas de variação



Fonte: elaboração própria

A primeira questão da Atividade (Figura 3.2.2) trata de uma função afim que relaciona espaço e tempo e tem por objetivo fazer com que o aluno perceba que na função afim variações iguais na variável independente causam variações iguais na variável dependente.

Figura 3.2.2 – Questão 1

1) Um corpo movimenta-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo a função horária $S = 20 + 4t$, em que S é o espaço percorrido em quilômetros e t o tempo em horas.

Qual a variação de S, quando t varia de 1h para 2h? E de 2h para 3h? E de 5h para 6h? Esses valores são iguais?

Fonte: elaboração própria

A segunda questão (Figura 3.2.3) relaciona duas grandezas, salário final de um segurança e número de plantões noturnos. Os objetivos desta são: identificar uma função afim, sem que os coeficientes sejam fornecidos explicitamente e associar o coeficiente angular da reta à tangente do ângulo de inclinação da mesma.

Figura 3.2.3 – Questão 2

2) (Iezzi et al., 2004, p.71. Adaptada)[1] O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda, faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

a) Quanto o segurança deverá receber ao final do mês se ele fizer um plantão noturno? E se fizer dois?

b) Existe uma relação entre o salário final mensal **S** do segurança e a renda por número **p** de plantões noturnos na boate. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação.

c) A representação gráfica desta relação é:

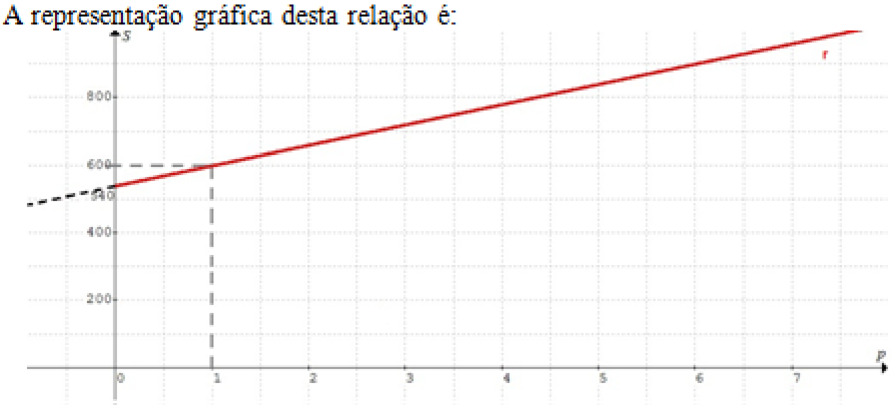


Gráfico 1

Assinale no plano cartesiano acima o ângulo de inclinação da reta r e determine a tangente deste.

d) Qual a relação entre esse ângulo e o valor 60, que o segurança recebe por plantão noturno?

Fonte: Iezzi et al., 2004, p.71. Adaptada pela Autora

O objetivo da terceira questão (Figura 3.2.4) é relacionar a velocidade média com o coeficiente angular da reta. Nesta é possível observar algumas das relações descritas anteriormente por meio de um gráfico que traz a distância pelo tempo.

Figura 3.2.4 – Questão 3

3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.

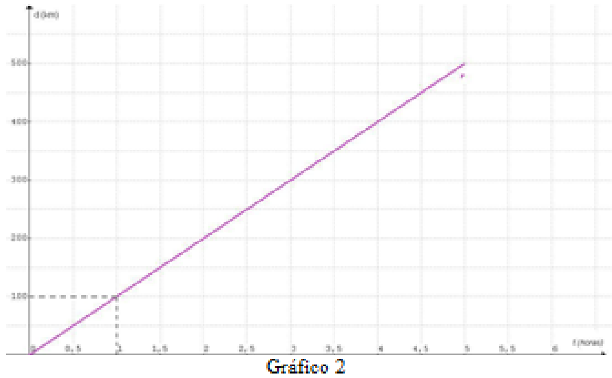


Gráfico 2

a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?
b) A que velocidade média a família viaja?
c) Determine o coeficiente angular da reta r.
d) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r*?

Fonte: elaboração própria

A quarta questão (Figura 3.2.5) trata do movimento de uma partícula sobre uma curva e descreve por meio de uma função quadrática a relação entre o tempo e o espaço percorrido. Os objetivos desta são fazer com que o aluno perceba que: (i) em uma função quadrática a taxa de variação varia de ponto para ponto, diferentemente do que ocorre em uma função afim; (ii) a variação do espaço em relação ao tempo é uma progressão aritmética e (iii) a variação desta variação é constante.

Figura 3.2.5 – Questão 4

4) Uma partícula move-se sobre uma curva de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.

Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:

Variação dos Instantes	Variação de S em relação a t	Variação da variação de S em relação a t
Entre t=0 e t=1		
Entre t=1 e t=2		
Entre t=2 e t=3		
Entre t=3 e t=4		
Entre t=4 e t=5		

A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:

a) A sequência obtida na segunda coluna representa uma progressão. De que tipo?
b) O que você observa quanto a variação da variação de S em relação a t?

Fonte: elaboração própria

Na quinta questão (Figura 3.2.6), é dado um gráfico que descreve a velocidade escalar de um avião bem como a lei da função que relaciona velocidade e tempo. Os objetivos desta são: (i) levar os alunos a relacionar a taxa de variação média, calculada em intervalos desta função, com o coeficiente angular das retas que passam pelos extremos destes mesmos intervalos e (ii) fazê-los perceber que a diferença entre os extremos destes intervalos se aproxima de zero, fato necessário para a compreensão do conceito de taxa de variação instantânea.

Figura 3.2.6 – Questão 5

5) A velocidade escalar de um avião é dada segundo o gráfico abaixo:

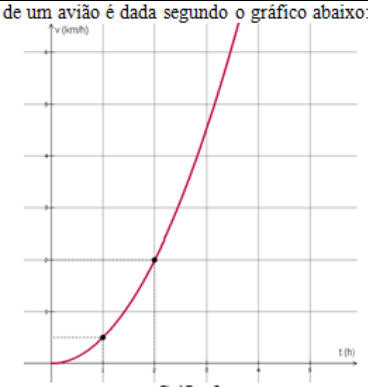


Gráfico 3

Vamos analisar o trecho em que $0 \le t \le 3$, sabendo que os pontos (0;0), (1;0,5) e (2;2) pertencem ao gráfico acima e que a lei da função $v = f(t)$ é $v = \frac{1}{2}t^2$.

a) Considere uma função f(x) qualquer e x_A e x_B dois elementos do seu domínio. O quociente:

$$\boxed{T_{VM} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

é chamado de **taxa de variação média** entre x_A e x_B da função f(x) em relação a x.

Determine a taxa de variação média da função v=f(t) nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$.

b) Trace no Gráfico 3 as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a e nomeie a reta que passa por:
- $[1,3]$ de reta r
- $[1,2]$ de reta s
- $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ de reta q
- $\left[1,\frac{9}{8}\right]$ de reta u

c) Determine o coeficiente angular das retas *r, s, q* e *u*.
d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você conclui?
e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de que valor?

Fonte: elaboração própria

A sexta questão (Figura 3.2.7) trata do armazenamento de água em um determinado reservatório e traz uma função quadrática relacionando volume e altura. O objetivo desta é definir derivada de uma função em um ponto como a taxa de variação instantânea desta função neste ponto. Propõe-se para tal o cálculo da variação do volume pela variação da altura para intervalos cada vez menores, fazendo o aluno perceber que estas variações tendem a um único valor.

Figura 3.2.7 – Questão 6

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função $V = 3h^2+5$, na qual h é a altura em metros e V é o volume em 10^3m^3.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes referentes aos valores da altura próximos a 10.

h	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média do volume neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99;10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

Fonte: elaboração própria

A sétima questão (Figura 3.2.8) traz uma função que relaciona a temperatura de um chuveiro elétrico de acordo com o tempo e tem por objetivo avaliar se o aluno consegue calcular a derivada da função em um ponto.

Figura 3.2.8 – Questão 7

7) A temperatura de um chuveiro elétrico varia com o tempo t de acordo com a expressão:

$\theta = t^3+2t+25$ (θ em °C, t em segundos)

Determine a taxa de variação instantânea de θ, dada em °C/seg quando t=2s.

Fonte: elaboração própria

A oitava questão (Figura 3.2.9) apresenta um gráfico que descreve a trajetória de uma pedra lançada após uma explosão. É pedido que os alunos tracem quatro retas, sendo dadas as abscissas de dois pontos de cada reta, de tal modo que em todas as retas um ponto possua a mesma abscissa, com o objetivo de indicar o ponto de tangência. Além disso, são apresentadas quatro alternativas em que uma indica a posição relativa da reta à qual as outras quatro estão tendendo. Assim, pretende-se que os alunos observem que quando a diferença das abscissas tende a zero a reta secante tende a reta tangente a uma curva em um determinado ponto.

Figura 3.2.9 – Questão 8

8) Durante as escavações dos túneis de um metrô uma carga de explosivos lançou uma pedra para cima, como descreve o gráfico abaixo:

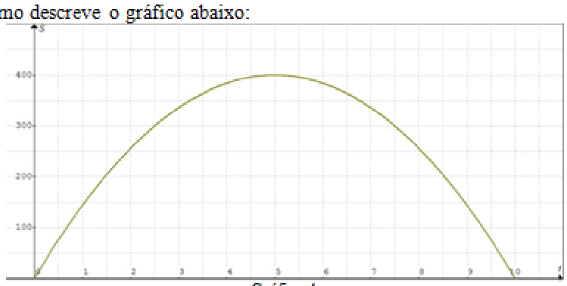


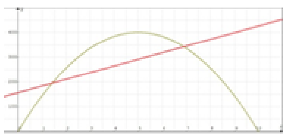
Gráfico 4

Sabendo que *S* é o deslocamento da pedra dado em metros, t segundos após o lançamento, trace neste mesmo gráfico as retas que passam pelos pontos de deslocamento da pedra nos instantes:

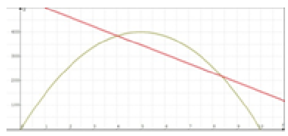
- t=6s e t=8s (reta *p*)
- t=6s e t=7s (reta *q*)
- t=6s e t=6,5s (reta *r*)
- t=6s e t=6,1s (reta *s*)

As retas *p, q, r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta *t*. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

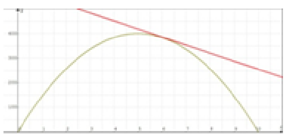
a)



b)



c)



d)

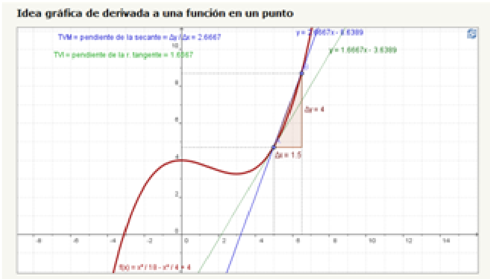
A reta que você encontrou é chamada **reta tangente** à curva S(t) no ponto t=6.

Fonte: elaboração própria

O objetivo da questão nove (Figura 3.2.10) é fazer com que os alunos percebam, por meio de um *applet*, algumas relações. Primeiramente, quando pelos pontos A e B passa uma reta, denominada reta secante e, movendo o ponto B em direção a A, a reta secante irá girar em direção a uma posição limite. A reta nessa posição limite é o que se considera reta tangente em A. Consequentemente, observa-se que o coeficiente angular da reta secante se aproxima do coeficiente angular da reta tangente. Depois, pretende-se que os alunos observem que a taxa de variação média se aproxima da taxa de variação instantânea, podendo assim concluir que a derivada da função em um ponto é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva neste ponto.

Figura 3.2.10 – Questão 9

9) Iremos desenvolver os itens desta questão utilizando o *applet* que se encontra disponível em: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html[2]



Movendo os pontos A e B podemos fazer algumas observações quando a distância entre os mesmos se aproxima de zero.

a) Quando aproximamos o ponto B do ponto A, a taxa de variação média entre esses pontos se aproxima de que taxa?
b) Qual é a taxa de variação instantânea em x=5?
c) Qual a relação entre a taxa de variação instantânea em x = 5 e a reta tangente à curva nesse mesmo ponto?
d) Baseada na resposta do item c e na definição de derivada apresentada na questão 6,o que você conclui?

Fonte: elaboração própria

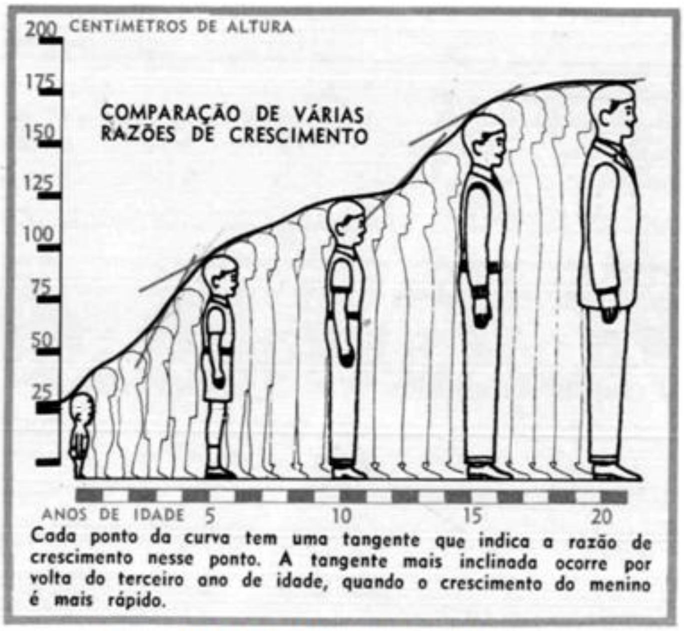
Após a nona questão, tem-se a Folha Extra que traz o conceito de velocidade do crescimento relacionando-o com a inclinação da reta tangente. A questão 10 que vem logo em seguida tem por objetivo abordar este mesmo conceito em outro contexto. Tanto a Folha Extra quanto a questão 10 foram adicionadas após o teste exploratório, pois somente depois deste foi encontrado o texto que deu origem a essa discussão.

A Folha Extra (Figura 3.2.11) traz um gráfico em que é possível observar as alturas de um menino ao passar dos anos, e um texto que relaciona a inclinação da reta tangente com a velocidade do crescimento. O objetivo deste é que o aluno perceba que quanto maior a inclinação da reta tangente à curva em um ponto, mais rápida é a velocidade do crescimento da função neste ponto. Se a tangente for horizontal, então não haverá crescimento no ponto analisado.

Figura 3.2.11 – Folha Extra

FOLHA EXTRA[4]

Observe a figura abaixo, em que tomamos as medidas anuais do crescimento de uma pessoa até seus 21 anos.



Fonte: BERGAMINI, 1965, p.121.

Quando traçamos este gráfico conseguimos obter algumas informações com relação ao crescimento do menino por meio desta curva. A razão de crescimento pode ser observada em qualquer ponto se traçarmos sua tangente. A inclinação da tangente mede a razão exata do crescimento no ponto em que toca. Se a inclinação da tangente é grande, sabemos que o crescimento é rápido, se a tangente é horizontal, não ocorre crescimento no ponto considerado. Se quisermos analisar a velocidade do crescimento é necessário que essa análise seja feita em um espaço de tempo cada vez menor, uma vez que quando calculamos a média essa informação se perde.

[4]Texto baseado na enciclopédia:
BERGAMINI, David. As Matemáticas. In: BIBLIOTECA CIENTÍFICA LIFE. Rio de Janeiro: Livraria José Olympo Editora, 1965.p.114-123

Fonte: elaboração própria

O objetivo da décima questão (Figura 3.2.12) é que o aluno utilize o conceito visto na Folha Extra em uma nova situação. São apresentados três reservatórios de mesma capacidade e altura e seus respectivos gráficos, que mostram o comportamento do nível da água no decorrer do tempo. O aluno terá que observar em quais dos três reservatórios se tem a velocidade do crescimento mais rápida no início do processo e, depois no fim do processo.

Para isso, deverá ser feita uma análise das inclinações das retas tangente nos gráficos correspondentes a cada reservatório.

Figura 3.2.12 – Questão 10

10) Na Figura 1 são apresentados três tipos reservatórios com mesma capacidade e mesma altura[3]:

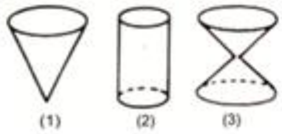


Figura 1

Colocamos torneiras enchendo cada um desses reservatórios e vamos admitir que a vazão da água seja a mesma para todos eles. A Figura 2 mostra o comportamento do nível da água no decorrer do tempo.

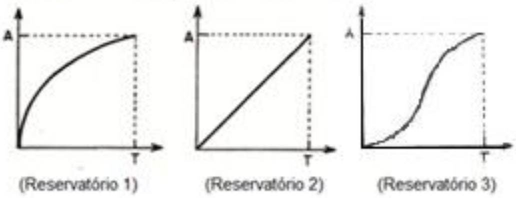


Figura 2

a) Em qual dos três reservatórios podemos afirmar que a velocidade do crescimento do nível da água é maior no início do processo? E em qual é maior no final do processo?

b) O que você observa em relação a velocidade do crescimento do nível da água no reservatório 2?

c) Que relação existe entre a velocidade do crescimento do nível da água nos reservatórios e as inclinações das retas tangentes nos diversos pontos de

[3] Esta questão foi baseada no artigo referenciado a seguir:
GRAVINA, Maria Alice. Um estudo de funções. In: *Revista do Professor de Matemática*, n. 20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.33-38.

Fonte: Gravina, 1992, p.33-38. Adaptada pela autora

4. RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, será apresentado o relato da aplicação deste trabalho monográfico, por meio do teste exploratório e da experimentação da Atividade.

4.1. Teste Exploratório

O teste exploratório foi realizado com quinze alunos do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes em dois encontros: um, com duração de duas horas e outro, com uma hora. A escolha desta turma para a aplicação do teste foi devido ao fato de que esses alunos estavam mais próximos da realidade de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, público-alvo desta pesquisa.

A realização desse teste teve por objetivos verificar a clareza dos enunciados das questões da Atividade para que assim, se necessário, fosse possível fazer modificações e também investigar se o grau de dificuldade das mesmas estava adequado para o público-alvo.

Optou-se por não utilizar a metodologia de ensino adotada, Resolução de Problemas, para a aplicação deste teste, pois assim seria possível observar e coletar as dúvidas apresentadas pelos alunos de forma a elaborar perguntas que irão encaminhar a experimentação.

O primeiro encontro desse teste teve início com uma apresentação em slides sobre algumas aplicações das taxas de variação, com o objetivo de situar o aluno em relação a aplicabilidade do tema proposto para este trabalho, como dito anteriormente.

Em seguida, foi mostrado alguns exemplos de taxas de variação, um exemplo de taxa de variação média e outro de variação instantânea (Figura 3.2.1), salientando a necessidade em se estudar esta última mediante determinadas situações.

Durante a apresentação, a professora em formação solicitou, em vários momentos, a participação dos alunos pedindo que citassem outros exemplos, mas não houve manifestação.

Após a apresentação dos slides, foi explicado aos alunos como seria aplicado o teste exploratório. Receberam as questões da Atividade (Apêndice A) separadamente e, à medida que foram terminando puderam iniciar a próxima questão, cada um em seu tempo. Ao final de cada questão, havia um pequeno questionário sobre o nível de dificuldade apresentado, no qual os alunos poderiam marcar uma das opções e fazer observações. Após esta etapa, foi marcado outro encontro para que se fizesse uma análise e discussão das respostas.

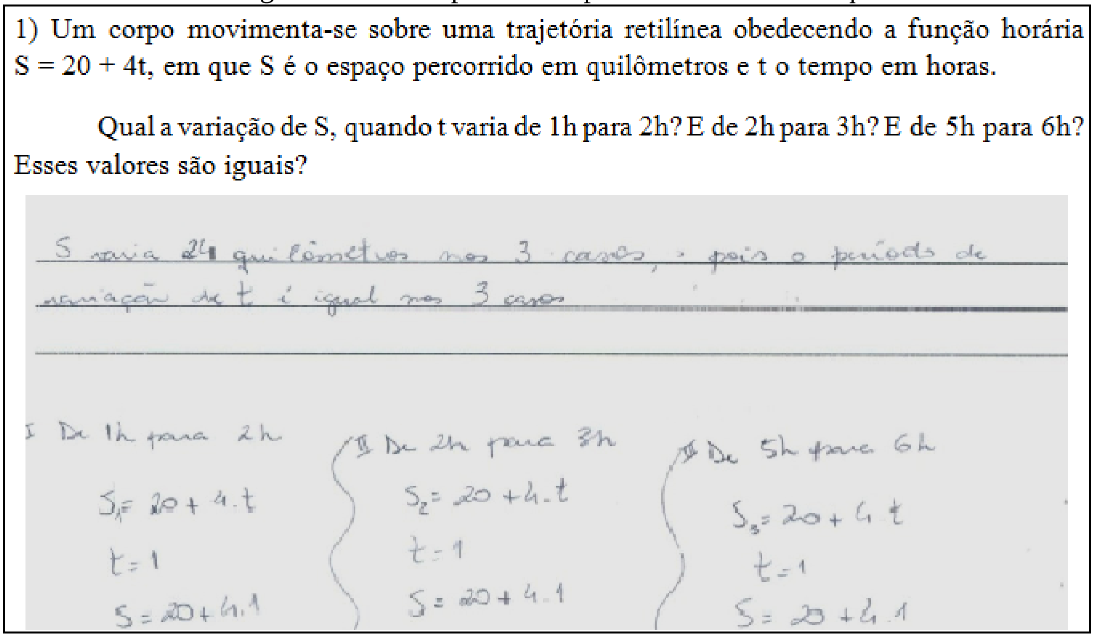
A professora em formação percebeu que dos quinze alunos que estavam realizando as atividades apenas oito, de fato, estavam motivados e interessados em desenvolvê-las. Foi observado que algumas opiniões foram compartilhadas entre os alunos, talvez pela proximidade entre os mesmos na sala de aula (Figura 4.1.1). Portanto, os percentuais de acerto não foram considerados nesta análise.

Figura 4.1.1 – Disposição dos alunos durante a aula

Fonte: elaboração própria

A primeira questão, como dito anteriormente, traz uma situação-problema, envolvendo uma função afim que relaciona espaço em função do tempo. Observou-se que alguns alunos confundiram variação do espaço $S(t_f) - S(t_i)$ com $S(t_f - t_i)$ em que t_f é o tempo final e t_i o tempo inicial, calculados nos intervalos pedidos na questão (Figura 4.1.5). A maioria dos alunos considerou que esta questão tinha um baixo nível de dificuldade.

Figura 4.1.2 – Resposta dada por um dos alunos na questão 1



1) Um corpo movimenta-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo a função horária S = 20 + 4t, em que S é o espaço percorrido em quilômetros e t o tempo em horas.

Qual a variação de S, quando t varia de 1h para 2h? E de 2h para 3h? E de 5h para 6h? Esses valores são iguais?

S varia 24 quilômetros nos 3 casos, pois o período de variação de t é igual nos 3 casos

I De 1h para 2h

$S_1 = 20 + 4.t$

$t = 1$

$S = 20 + 4.1$

II De 2h para 3h

$S_2 = 20 + 4.t$

$t = 1$

$S = 20 + 4.1$

III De 5h para 6h

$S_3 = 20 + 4\,t$

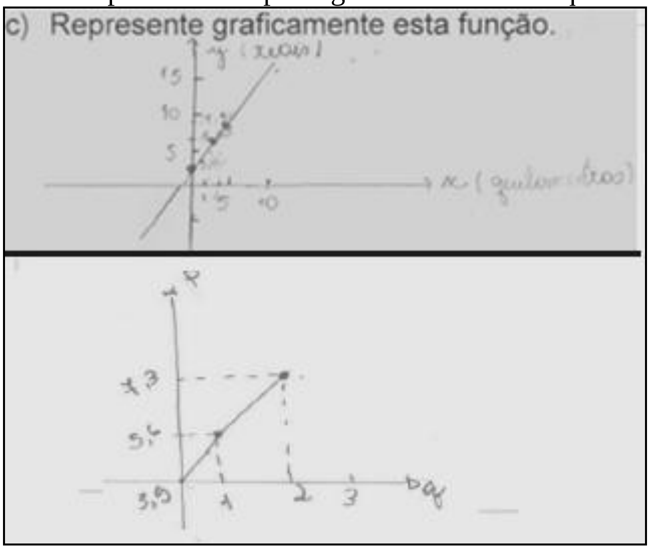
$t = 1$

$S = 20 + 4.1$

Fonte: protocolo de pesquisa

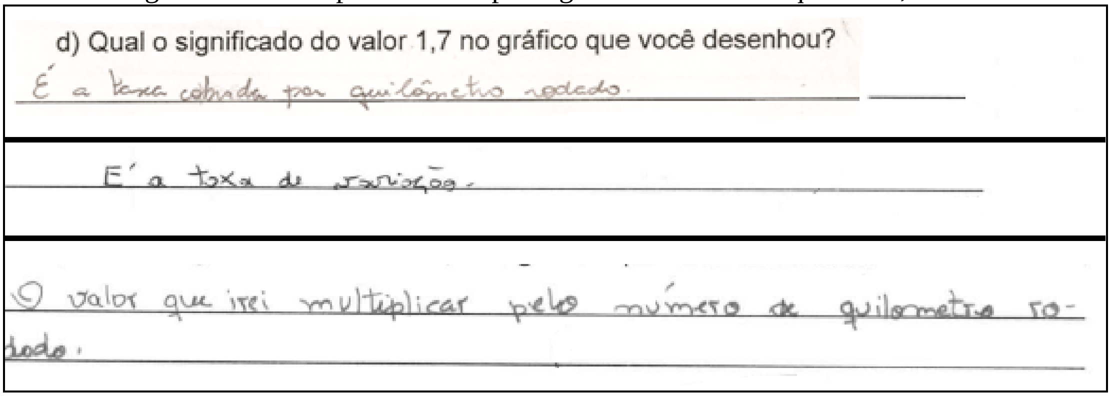
Na segunda questão (Quadro 4.1.1, p.44), os alunos consideraram baixo o nível de dificuldade. Esta traz um problema envolvendo duas grandezas: preço final e quilometragem rodada, no qual os alunos têm que identificar que a função que representa esta relação é uma função afim. Foram observadas nas respostas do item **c**, em que se pede a representação gráfica da função, algumas dificuldades como a marcação dos pontos e a falta de atenção em relação ao domínio da função (Figura 4.1.3). Já no item **d,** os alunos responderam de forma diferente da que se pretendia, ou seja, que este valor é a tangente do ângulo de inclinação da reta (Figura 4.1.4).

Figura 4.1.3 – Respostas dadas por alguns dos alunos na questão 2, item **c**



Fonte: protocolo de pesquisa

Figura 4.1.4 – Respostas dadas por alguns dos alunos na questão 2, item **d**


d) Qual o significado do valor 1,7 no gráfico que você desenhou?

É a taxa cobrada por quilômetro rodado.

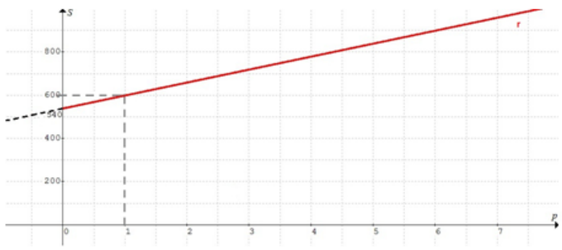
É a taxa de variação.

O valor que irei multiplicar pelo número de quilometro rodado.

Fonte: protocolo de pesquisa

Como foi percebido que os alunos apresentaram dificuldades nesta questão, optou-se por fazer algumas modificações com a finalidade de adequá-la aos objetivos pretendidos (Quadro 4.1.1), a saber: (i) a reformulação do texto inicial desta questão já que o “problema do taxista” é muito utilizado pelos livros didáticos no conteúdo de função afim; (ii) a inclusão de um item pedindo que fosse marcado o ângulo de inclinação da reta, bem como a indicação de sua tangente dada a representação gráfica, e (iii) a reformulação do item **d** especificando o que se pretendia.

Quadro 4.1.1 – Comparativo da questão 2

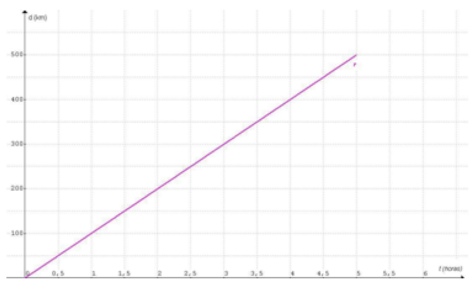
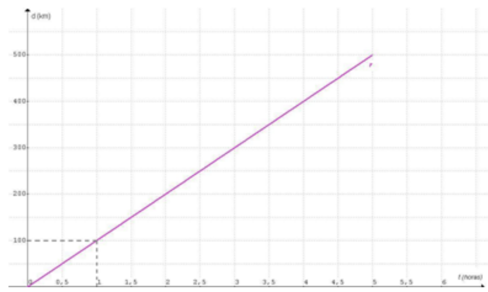
Questão antes da reformulação	**Questão depois da reformulação**
2) Para não chegar atrasada no trabalho, Ana resolve pegar um táxi. Ao sentar no banco do carro percebe que o taxímetro marca R$3,90. Sabendo que os taxistas nesta cidade cobram R$1,70 por quilômetro rodado, responda: a) Quanto Ana deverá pagar se seu trabalho dista 1km do ponto em que ela pegou o táxi? E se distasse 2 km? b) Existe uma relação entre o preço final **P**, dado pelo taxímetro e a quilometragem **q** percorrida. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação. c) Represente graficamente esta função. d) Qual o significado do valor 1,7 no gráfico que você desenhou?	2) (Iezzi et al, 2004, p.71)[1] O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda, faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho. a) Quanto o segurança deverá receber ao final do mês se ele fizer um plantão noturno? E se fizer dois? b) Existe uma relação entre o salário final mensal **S** do segurança e a renda por número **p** de plantões noturnos na boate. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação. c) A representação gráfica desta relação é:  Gráfico 1 Assinale no plano cartesiano acima o ângulo de inclinação da reta r e determine a tangente deste. d) Qual a relação entre esse ângulo e o valor 60, que o segurança recebe por plantão noturno?

Fonte: elaboração própria

A terceira questão mostra a representação gráfica de uma função afim acompanhada de um dado problema que associa espaço com tempo. Os alunos consideraram que esta apresentava um nível médio de dificuldade. Por meio das respostas dadas, foi possível perceber que o objetivo do item **d** era o mesmo que o do item **d** da questão 2, optando-se, então, pela retirada deste (Quadro 4.1.2). Vale destacar que alguns alunos perguntaram sobre as fórmulas de Física na tentativa de usá-las. Foi notório que não conseguiram relacionar o conceito de velocidade média trabalhado nas aulas de Física com o de coeficiente angular da reta estudado durante as aulas de Matemática.

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma eficaz ferramenta para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p.37).

Quadro 4.1.2 – Comparativo da questão 3

Questão antes da reformulação	**Questão depois da reformulação**
3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.  Gráfico 1 a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora? b) A que velocidade a família viaja? c) Determine o coeficiente angular da reta r. d) Qual a relação entre o coeficiente angular e o ângulo de inclinação da reta? e) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r*?	3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.  Gráfico 2 a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora? b) A que velocidade média a família viaja? c) Determine o coeficiente angular da reta r. d) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r?*

Fonte: elaboração própria

Na quarta questão, pretende-se que o aluno perceba que a sequência obtida pelas variações do espaço (*S*) em relação ao tempo (*t*), sendo *S(t)* uma função quadrática, representa uma Progressão Aritmética e que a sequência da variação dessa variação é constante. Os alunos consideraram que esta questão tinha nível médio de dificuldade. Alguns deles apresentaram dificuldade com relação à compreensão do termo “variação da variação”, mas como este é um termo recorrente no Cálculo, optamos por mantê-lo para a experimentação da Atividade. No item **a**, a pergunta feita favoreceu o aparecimento de respostas variadas (Figura 4.1.5), por isso a mesma foi reformulada (Quadro 4.1.3).

Figura 4.1.5 – Respostas dadas por alguns dos alunos na questão 4

a) O que podemos afirmar com relação aos valores obtidos na variação de S em relação a t (Velocidade Média)?

O espaço varia 4 metros a cada segundo

Quanto maior o t, maior o S.

Fonte: protocolo de pesquisa

.

Quadro 4.1.3 – Comparativo da questão 4

<table>
<tr><th>Questão antes da reformulação</th><th>Questão depois da reformulação</th></tr>
<tr><td>
4) Uma partícula move-se sobre uma reta de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.
Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:
<table>
<tr><th>Variação dos Instantes</th><th>Variação de S em relação a t</th><th>Variação da variação de S em relação a t</th></tr>
<tr><td>Entre t=0 e t=1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=1 e t=2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=2 e t=3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=3 e t=4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=4 e t=5</td><td></td><td></td></tr>
</table>
A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:
a) O que podemos afirmar com relação aos valores obtidos na variação de S em relação a t (Velocidade Média)?
b) E sobre a variação da variação de S em relação a t?
</td><td>
4) Uma partícula move-se sobre uma curva de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.
Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:
<table>
<tr><th>Variação dos Instantes</th><th>Variação de S em relação a t</th><th>Variação da variação de S em relação a t</th></tr>
<tr><td>Entre t=0 e t=1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=1 e t=2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=2 e t=3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=3 e t=4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Entre t=4 e t=5</td><td></td><td></td></tr>
</table>
A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:
a) A sequência obtida na segunda coluna representa uma progressão. De que tipo?
b) O que você observa quanto a variação da variação de S em relação a t?
</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração própria

A quinta questão apresenta um gráfico relacionando velocidade e tempo. Os alunos consideraram que esta tinha um alto nível de dificuldade.

A dificuldade dos alunos em resolver essa questão permitiu reformulações em seus itens, ora retirando-os ora acrescentando definições ou sendo mais enfático no que se pretendia, por isso alguns ajustes foram feitos (Quadro 4.1.4) como: (i) a retirada do item **a**, já que não compromete o objetivo da questão; (ii) a nomeação das retas nos itens **c** e **d**, para que houvesse uma melhor organização, e (iii) a reformulação do item **f**, buscando enfatizar o que se pretendia. Merecem destaques as dificuldades que os alunos apresentaram com o significado do termo “extremos” no item **c**, em diferenciar intervalo de uma função de par ordenado e com a leitura dos enunciados.

Esse fato é observado pelas autoras Gil e Portanova quando comenta que:

> [...] muitas vezes as dificuldades apresentadas pelos alunos na tradução de situação da linguagem corrente para a linguagem formal residem na interpretação. Não sendo capaz de interpretar, o aluno não conseguirá representar formalmente a situação (GIL; PORTANOVA, s.d., p.4).

Quadro 4.1.4 – Comparativo dos itens da questão 5

Questão antes da reformulação	**Questão depois da reformulação**
a) Expresse a lei desta função, considerando que v = f(t) é uma função quadrática. b) Determine a taxa de variação média da função nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$. Consideramos como **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo $[x_A, x_B]$: $\boxed{t = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ c) Trace no Gráfico 2 as retas que passam pelos extremos de cada um dos intervalos do item b. d) Determine o coeficiente angular de cada uma dessas retas. e) Qual é a relação existente entre os conceitos: coeficiente angular e taxa de variação média da função? f) O que você observa em relação aos extremos dos intervalos traçados?	a) Considere uma função f(x) qualquer e x_A e x_B dois elementos do seu domínio. O quociente: $\boxed{T_{VM} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ é chamado de **taxa de variação média** entre x_A e x_B da função f(x) em relação a x. Determine a taxa de variação média da função v=f(t) nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$. b) Trace no Gráfico 3 as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a e nomeie a reta que passa por: • $[1,3]$ de reta *r* • $[1,2]$ de reta *s* • $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ de reta *q* • $\left[1,\frac{9}{8}\right]$ de reta *u* c) Determine o coeficiente angular das retas *r, s, q* e *u*. d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você conclui? e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de que valor?

Fonte: elaboração própria

A sexta questão (Figura 3.2.7), trata de uma situação-problema que relaciona volume e altura por meio de uma função quadrática e tem por objetivo definir a derivada como taxa de variação instantânea, como dito anteriormente. Supõe-se que a falta de atenção na leitura do enunciado e a digitação errada na calculadora foram motivos de erro, fato que prejudicou a resposta dada no item **c** que dependia das conclusões feitas nos itens anteriores.

Dante (2009) fala sobre a dificuldade que os alunos apresentam em interpretar problemas de Matemática. Segundo este autor, os alunos têm dificuldades em distinguir o significado de palavras de uso corrente e seus significados matemáticos. Assim, é recomendado que o professor faça a distinção destas palavras e estimule a pesquisa de seus significados corretos.

A maioria dos alunos considerou que esta questão tinha um nível alto de dificuldade. A professora em formação se surpreendeu com esse fato, já que a maioria deles respondeu de forma satisfatória.

Figura 3.2.7 – Questão 6

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função $V = 3h^2+5$, na qual h é a altura em metros e V é o volume em $10^3 m^3$.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes da função para os valores da altura próximos a 10.

H	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99:10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

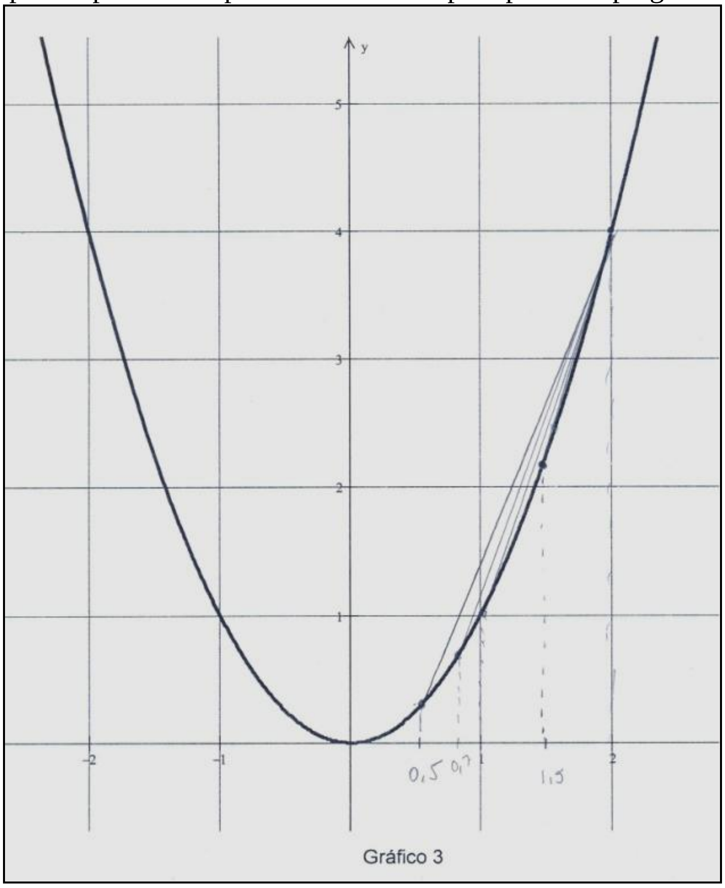
Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

Fonte: elaboração própria

Após a aplicação do teste exploratório, percebeu-se que era necessária uma nova questão que viesse reforçar o conceito de derivada. Sendo assim, elaborou-se a questão apresentada na Figura 3.2.8.

A maioria dos alunos considerou que a sétima questão apresentava um baixo nível de dificuldade. Esta era composta por duas etapas. Na primeira, os alunos deveriam traçar as retas determinadas no enunciado e na segunda, deveriam marcar dentre as opções aquela que representava a qual reta estas estavam tendendo, para que assim pudessem perceber o que é uma reta tangente a uma curva num dado ponto. Muitos alunos desenharam um segmento de reta no lugar da reta (Figura 4.1.7) e outros queriam traçar uma reta, que seria o próprio eixo *x*, passando pelos pontos (0,5;0) e (2;0), ou seja, não associaram o ponto à curva e, sim, ao eixo. Após a análise das respostas dos alunos, percebeu-se que era possível adaptar um problema a esta questão buscando contextualizá-la (Quadro 4.1.5).

Figura 4.1.7 – Resposta apresentada por um dos alunos para primeira pergunta da sétima questão



Fonte: protocolo de pesquisa

Quadro 4.1.5 – Comparativo da questão 7

Questão antes da reformulação

7) Trace no gráfico abaixo as retas que passam pelos pontos com abscissas em:

- x=0,5 e x=2 (reta *p*)
- x=0,5 e x=1,5 (reta *q*)
- x=0,5 e x=1 (reta *r*)
- x=0,5 e x=0,7 (reta *s*)

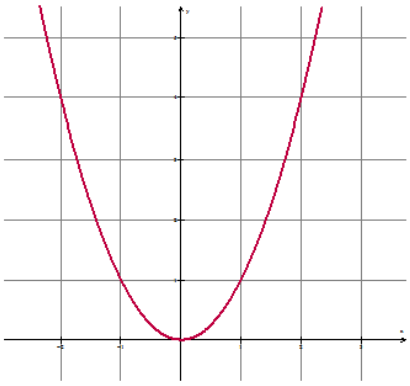
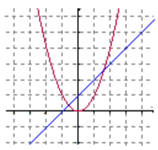


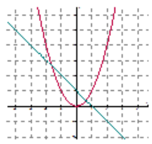
Gráfico 3

As retas *p, q, r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta *t*. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

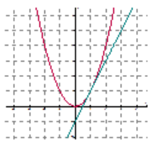
a)



b)



c)



d)

A reta que você encontrou é chamada **reta tangente**.

Questão depois da reformulação

8) Durante as escavações dos túneis de um metrô uma carga de explosivos lançou uma pedra para cima, como descreve o gráfico abaixo:

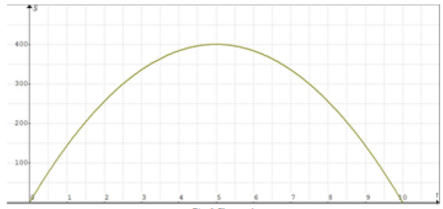


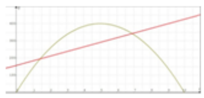
Gráfico 4

Sabendo que *S* é o deslocamento da pedra dado em metros, t segundos após o lançamento, trace neste mesmo gráfico as retas que passam pelos pontos de deslocamento da pedra nos instantes:

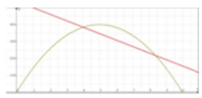
- t=6s e t=8s (reta *p*)
- t=6s e t=7s (reta *q*)
- t=6s e t=6,5s (reta *r*)
- t=6s e t=6,1s (reta *s*)

As retas *p, q, r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta *t*. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

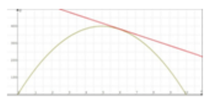
a)



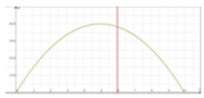
b)



c)



d)

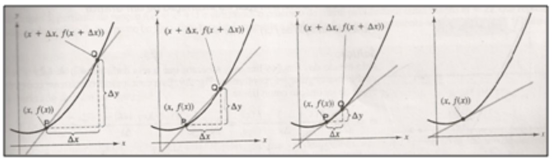


A reta que você encontrou é chamada **reta tangente** à curva S(t) no ponto t=6.

Fonte: elaboração própria

A oitava questão tem por objetivo fazer com que o aluno perceba, pela observação da sequência dos gráficos da figura, que quando a distância entre os pontos P e Q tende a zero, o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto P é a derivada da função nesse mesmo ponto. Supõe-se que devido ao cansaço e a esta ser a última questão proposta na Atividade, muitos alunos a deixaram em branco e consideraram-na com um alto índice de dificuldade. Assim, buscou-se uma reformulação utilizando um *applet* (Quadro 4.1.6).

Quadro 4.1.6 – Comparativo da questão 8

Questão antes da reformulação	**Questão depois da reformulação**
8) Imaginemos o ponto P como um ponto fixo e o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, ou seja, Q aproximando-se de P. Quando isto ocorre, a reta secante gira sobre o ponto fixo P. Se a reta secante tem uma posição limite, desejamos que esta posição limite seja a reta tangente ao gráfico em P. A palavra tangente deriva do latim *tangens*, que significa “tocando”. Assim, a tangente a uma curva é uma reta que “apenas toca” a curva.  Fonte: LARSON; EDWARDS, 2008, p.110. Observando as figuras acima, responda: a) Determine a expressão que representa o coeficiente angular da reta $\overline{PQ}$ ou a taxa de variação média da função no intervalo $[x, x+\Delta x]$. b) Quando o ponto Q se aproxima de P, Δx se aproxima de zero e a reta secante tende à reta tangente. Nessa situação, o que ocorre com a taxa de variação média encontrada no item a? c) Na questão 6, definimos derivada da função no ponto P como a taxa de variação instantânea dessa função nesse ponto. Que relação existe entre o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto P e a derivada da função nesse mesmo ponto?	9) Iremos desenvolver os itens desta questão utilizando o *applet* que se encontra disponível em: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html[2]  Movendo os pontos A e B podemos fazer algumas observações quando a distância entre os mesmos se aproxima de zero. a) Quando aproximamos o ponto B do ponto A, a taxa de variação média entre esses pontos se aproxima de que taxa? b) Qual é a taxa de variação instantânea em x=5? c) Qual a relação entre a taxa de variação instantânea em x = 5 e a reta tangente à curva nesse mesmo ponto? d) Baseada na resposta do item c e na definição de derivada apresentada na questão 6,o que você conclui?

Fonte: elaboração própria

Muitas questões não foram resolvidas devido à falta de interesse dos alunos, mesmo assim foi possível fazer modificações para que a Atividade melhor se adequasse ao público alvo desta pesquisa.

Durante o segundo encontro que foi marcado com a turma, com a finalidade de fazer a discussão da Atividade, estiveram presentes apenas duas alunas. Mas, como eram bem participativas foi possível obter um bom aproveitamento. Muitas mudanças realizadas na Atividade foram oriundas de sugestões feitas por elas, como nomear as retas no item **c** da questão 5 e ressaltar a importância da taxa de variação instantânea antes da questão 6.

4.2. Experimentação da Atividade

A experimentação da Atividade foi realizada em uma instituição privada de ensino com um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio na cidade de Campos dos Goytacazes. Ocorreram três encontros, cada um com duração de duas horas, totalizando 6 horas.

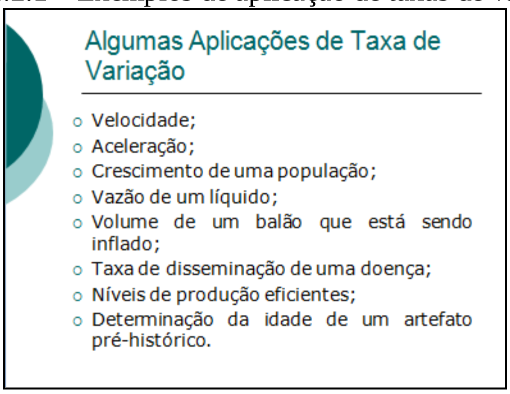
No primeiro encontro, estavam presentes 8 alunos, no segundo 31, já que este ocorreu em uma aula cedida pela professora titular da turma, e no terceiro 4. Serão consideradas as respostas dadas pelos alunos de cada encontro devido à metodologia de ensino utilizada.

4.2.1. Primeiro encontro

O encontro teve início com uma breve introdução sobre taxas de variação, em que foi perguntado aos alunos se conheciam algum exemplo destas, mas não houve resposta. Foi feita uma tentativa de fazê-los associar à Física, assim como sugere Polya quando recomenda que o professor aconselhe o aluno a pensar em um problema correlato, mas não foi obtido sucesso. Esse fato indica que os alunos não conseguiram relacionar o que foi apresentado nas aulas de Física com o tema proposto.

Assim, deu-se início a uma apresentação em slides mostrando algumas aplicações das taxas de variação, citando onde são encontradas no cotidiano (Figura 4.2.1). Em seguida, foram observadas duas situações nas quais era possível perceber a importância do cálculo da taxa de variação média e de variação instantânea (Figura 4.2.2).

Figura 4.2.1 – Exemplos de aplicação de taxas de variação



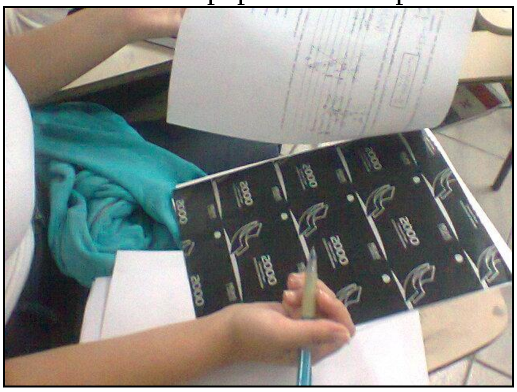
Fonte: elaboração própria

Figura 4.2.2 – Situações envolvendo a taxa de variação média e a de variação instantânea

Fonte: elaboração própria

Foi explicado aos alunos que receberiam cada questão separadamente, uma folha de papel carbono e outra folha em branco para que a professora em formação pudesse ter o registro da execução do plano de resolução das questões (Figura 4.2.3). Os alunos foram avisados que a Atividade deveria ser feita individualmente, que não era necessária a identificação e que poderiam fazer uso da calculadora.

Figura 4.2.3 – Aluno utilizando o papel carbono para resolver uma questão



Fonte: elaboração própria

Vale lembrar que a primeira questão traz uma situação-problema, envolvendo uma função afim que relaciona espaço e tempo. A discussão e análise das respostas tiveram início com a leitura do enunciado buscando compreender o problema e identificar os dados que aparecem na questão.

Em seguida, foi perguntado se tinham alguma ideia para a resolução e um aluno sugeriu que fosse feita a substituição dos valores indicados na variável para depois subtrair, então o mesmo foi respondendo em voz alta enquanto os outros conferiam (Figura 4.2.4). Um deles disse que havia feito de forma diferente, fazendo primeiro a subtração entre t_f e t_i para depois substituir o valor encontrado em *S* obtendo $S(t_f - t_i)$ em que t_f é o tempo final e t_i o tempo inicial.

Assim, a professora em formação pediu que fizesse a leitura do enunciado novamente, como recomenda Polya dizendo que é necessário refazer a leitura do enunciado até que o objetivo esteja claro, com isso o mesmo percebeu que a questão não podia ser respondida desta maneira. A professora em formação observou que este aluno confundiu $S(t_f) - S(t_i)$ com $S(t_f - t_i)$, como alguns alunos do teste exploratório.

Figura 4.2.4 – Discussão da questão 1

Fonte: autora

Para finalizar, foi feita a leitura do enunciado novamente buscando fazer um retrospecto. Os alunos perceberam que a variação do espaço era igual em todos os intervalos analisados e quando questionados sobre o porquê de isto acontecer nada foi respondido. Foi solicitado que os mesmos observassem que tipo de função a questão apresentava e um aluno respondeu que se tratava de uma "função retilínea"[3]. Assim, analisando as parcelas que compõem uma função afim, em que uma é constante e outra variável, foi destacado que em casos como este se têm variações constantes da função devido à parcela variável.

A segunda questão relaciona duas grandezas, salário final de um segurança e número de plantões noturnos. Após a leitura do enunciado, foi dada início a discussão do item **a** no qual um aluno mostrou que havia acrescentado ao salário fixo o produto número de plantões pelo valor de cada plantão (Figura 4.2.5) e nenhum outro havia respondido de forma diferente. Foi dado prosseguimento ao item **b,** em que todos os alunos responderam de forma correta e um deles destacou que a função estava variando de 60 em 60.

Figura 4.2.5 – Resposta de um dos alunos no item **a** da questão 2

a) Quanto o segurança deverá receber ao final do mês se ele fizer um plantão noturno? E se fizer dois?

1 PLANTÃO → 540 + 60 = 600 REAIS
2 PLANTÕES → 540 + 60 + 60 = 660 REAIS

Fonte: protocolo de pesquisa

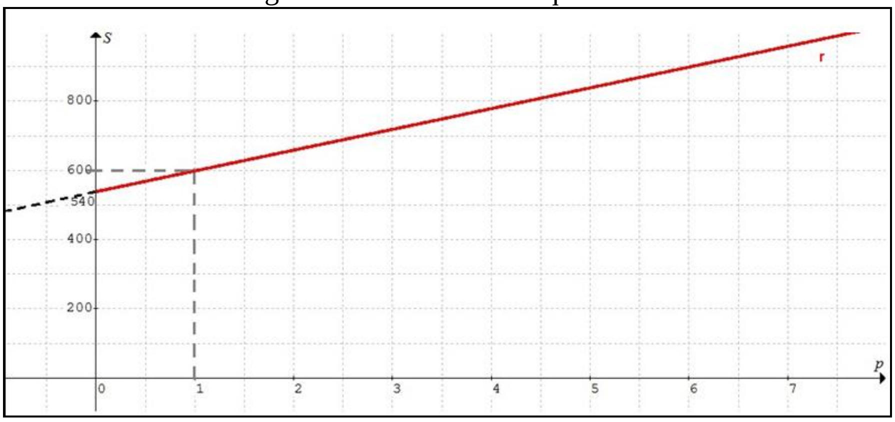
[3] Entende-se função retilínea, na visão do aluno, como função afim, pois o aluno comentou ser esta a função $y = ax + b$.

Durante a resolução do item **c**, em que se pede a tangente do ângulo de inclinação da reta, a professora em formação foi solicitada a ir às carteiras diversas vezes e observou que os alunos tiveram dificuldade por não saberem o que é ângulo de inclinação.

Sobre este fato ocorrido Polya (2006, p.1) afirma que, neste momento, "[...] o professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho*".

Assim, com o gráfico projetado (Figura 4.2.6), perguntou-se aos alunos o que achavam que seria o ângulo de inclinação. Uma aluna respondeu que era "o ângulo que formava com o eixo" [4] (informação verbal), indicando no eixo das abscissas o ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas no sentido anti-horário. Em seguida, foi feita a representação do mesmo no quadro e questionou-se sobre o que era necessário fazer para que fosse possível encontrar a tangente deste ângulo. A partir da dúvida de um aluno com relação à marcação do ângulo, a professora em formação foi às carteiras e observou que alguns alunos haviam destacado um triângulo retângulo no gráfico (Figura 4.2.7). Então, o mesmo foi reproduzido no quadro. Observando este triângulo, um aluno respondeu que bastava "fazer o cateto oposto pelo cateto adjacente"[5], o que foi acatado pela professora em formação e pelos outros alunos.

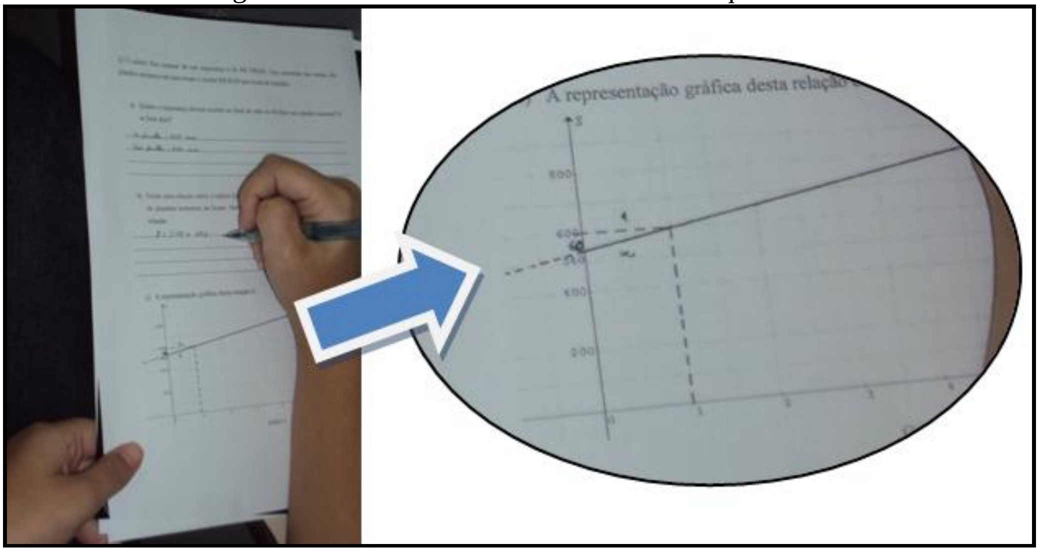
Figura 4.2.6 – Gráfico da questão 2



Fonte: elaboração própria

[4] Resposta dada pelo aluno A à pergunta feita pela professora em formação. Campos dos Goytacazes, 7 de outubro de 2011.
[5] Resposta dada pelo aluno B.

Figura 4.2.7 – Um dos alunos resolvendo a questão 2



Fonte: elaboração própria

Em seguida, foi pedido que os alunos tentassem fazer o item **d** para que depois fosse feita a análise das respostas. Os mesmos não tiveram nenhuma ideia para responder a este item. Então, a professora em formação pediu que observassem as respostas dadas nos itens **b** e **c**. Assim, foi possível concluir que a tangente do ângulo de inclinação da reta é igual ao coeficiente angular da mesma.

Para finalizar, a professora em formação fez uma generalização da relação encontrada, perguntando primeiramente que nome recebe o coeficiente a da função afim $f(x)=ax+b$, com a e $b \in \mathbb{R}$, os alunos responderam coeficiente angular, depois foi perguntado aos mesmos por que recebia este nome, então uma aluna respondeu "porque determina o ângulo". A partir desta resposta, a professora em formação mostrou que o coeficiente angular determina a tangente do ângulo de inclinação.

A terceira questão traz uma função afim que relaciona espaço e tempo em uma determinada situação-problema. Enquanto os alunos respondiam à questão individualmente, a professora em formação observou que estes não apresentaram dificuldades, assim sendo, quando todos os alunos terminaram, foi feita a discussão das respostas, partindo sempre da leitura dos enunciados para destacar os dados e identificar a incógnita, como sugere Polya para a resolução de problemas.

No item **b**, desta questão, alguns alunos encontraram a velocidade média por meio do gráfico, observando que variações unitárias do tempo acarretam em variações de 100 unidades do espaço e outros fizeram uso da fórmula $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ em que V_m representa a velocidade média, Δs a variação do espaço e Δt a variação do tempo (Figura 4.2.8). Já no item **c**, os alunos determinaram o coeficiente angular da reta encontrando a tangente do ângulo de inclinação no gráfico, marcando-o entre a reta e o eixo x (no sentido anti-horário).

Figura 4.2.8 – Resposta de um dos alunos no item **b** da questão 3

b) A que velocidade média a família viaja?

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{100}{1} = 100 \text{ km/h}$$

Fonte: protocolo de pesquisa

Fazendo um retrospecto do que foi discutido nesta questão e nas questões anteriores, os alunos perceberam que em uma função afim do tipo $S = S_0 + vt$ (em que S é o espaço final, S_0 é o espaço inicial, v a velocidade e t o tempo) a velocidade média, que é uma taxa de variação média, é igual ao coeficiente angular da reta e a tangente do ângulo de inclinação da mesma.

A quarta questão (Figura 3.2.5) traz uma função quadrática que relaciona espaço e tempo. Os alunos não apresentaram dificuldades em resolvê-la, surgindo apenas uma dúvida com relação ao termo “variação da variação”, assim como no teste exploratório, mas a professora em formação foi explicando individualmente.

Figura 3.2.5 – Questão 4

4) Uma partícula move-se sobre uma curva de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.

Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:

Variação dos Instantes	Variação de S em relação a t	Variação da variação de S em relação a t
Entre t=0 e t=1		
Entre t=1 e t=2		
Entre t=2 e t=3		
Entre t=3 e t=4		
Entre t=4 e t=5		

A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:

a) A sequência obtida na segunda coluna representa uma progressão. De que tipo?
b) O que você observa quanto a variação da variação de S em relação a t?

Fonte: elaboração própria

Após os alunos preencherem a tabela, a professora em formação questionou-os sobre que tipo de função a questão trazia, os mesmos responderam que se tratava de uma “função do segundo grau”, a professora na tentativa de corrigir a nomenclatura dada pela aluna afirmou que esta é uma “função polinomial do segundo grau”. Foi destacado que este caso era diferente das questões anteriores que tratavam de função afim. Este destaque foi dado devido ao fato de que as relações encontradas nas questões anteriores não poderiam ser aplicadas a uma função quadrática.

A discussão das respostas teve início com a conferência dos dados preenchidos na tabela e em seguida com a resposta dada por um dos alunos, na qual o mesmo respondeu que o item **a** tratava de uma progressão aritmética e os demais concordaram. Assim, destacou-se que em qualquer função quadrática a variação da função, considerando o mesmo intervalo de tempo, é uma progressão aritmética e a variação desta variação é constante.

Ao iniciarem a resolução da quinta questão (Figura 3.2.6), que traz uma função quadrática relacionando velocidade e tempo, alguns alunos apresentaram dificuldades em encontrar as taxas de variação média dados alguns intervalos. Tal dificuldade ocorreu porque confundiram o intervalo com par ordenado e outros não souberam identificar os extremos, como no teste exploratório.

Figura 3.2.6 – Questão 5

5) A velocidade escalar de um avião é dada segundo o gráfico abaixo:

Gráfico 3

Vamos analisar o trecho em que $0 \leq t \leq 3$, sabendo que os pontos (0;0), (1;0,5) e (2;2) pertencem ao gráfico acima e que a lei da função $v = f(t)$ é $v = \frac{1}{2}t^2$.

a) Considere uma função f(x) qualquer e x_A e x_B dois elementos do seu domínio. O quociente:

$$\boxed{T_{VM} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

é chamado de **taxa de variação média** entre x_A e x_B da função f(x) em relação a x.

Determine a taxa de variação média da função v=f(t) nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$.

b) Trace no Gráfico 3 as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a e nomeie a reta que passa por:
- $[1,3]$ de reta *r*
- $[1,2]$ de reta *s*
- $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ de reta *q*
- $\left[1,\frac{9}{8}\right]$ de reta *u*

c) Determine o coeficiente angular das retas *r, s, q* e *u*.
d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você conclui?
e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de que valor?

Fonte: elaboração própria

A professora em formação primeiramente relembrou o conceito de intervalo, mostrando-o no gráfico e ressaltou que os extremos representam o início e o fim do mesmo. A partir daí foi feito, juntamente com os alunos, o cálculo da primeira taxa de variação para que pudessem dar prosseguimento a questão.

O tempo não foi suficiente para terminar a questão, então foi combinado com os alunos que no próximo encontro a mesma seria concluída.

4.2.2. Segundo encontro

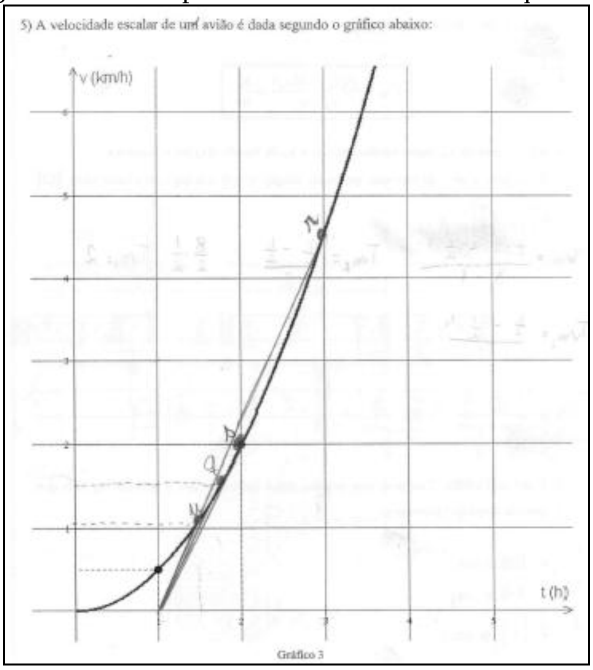
Como era sabido que esta aula seria cedida pela professora titular da turma e que o número de alunos participantes seria bem maior, ou seja, muitos não teriam participado das discussões anteriores, optou-se por fazer retomadas dos conteúdos vistos, destacando as relações encontradas em cada questão.

Assim, foi relembrado que em uma função afim, para variações iguais em x têm-se variações iguais em y; que o coeficiente angular da reta é igual à tangente do ângulo de inclinação da mesma, também representado pela taxa de variação média e que em uma função quadrática a variação da função, sendo considerada uma mesma variação para a variável independente, forma uma progressão aritmética e a variação desta variação é constante.

Após a revisão, foi explicado novamente como seriam realizadas as próximas questões. Assim, foi entregue a quinta questão para que os alunos resolvessem, conforme havia sido combinado no encontro anterior.

A maioria dos alunos que não participou deste encontro sentiu dificuldades em entender o que se pedia na questão, passando a sentar em grupos na tentativa de resolvê-la. Foi percebido que as dificuldades encontradas por eles eram tanto na interpretação do que se pedia quanto na compreensão do que era intervalo (Figura 4.2.9), assim como no encontro anterior.

Figura 4.2.9 – Resposta do aluno no item **b** da questão 5



Fonte: protocolo de pesquisa

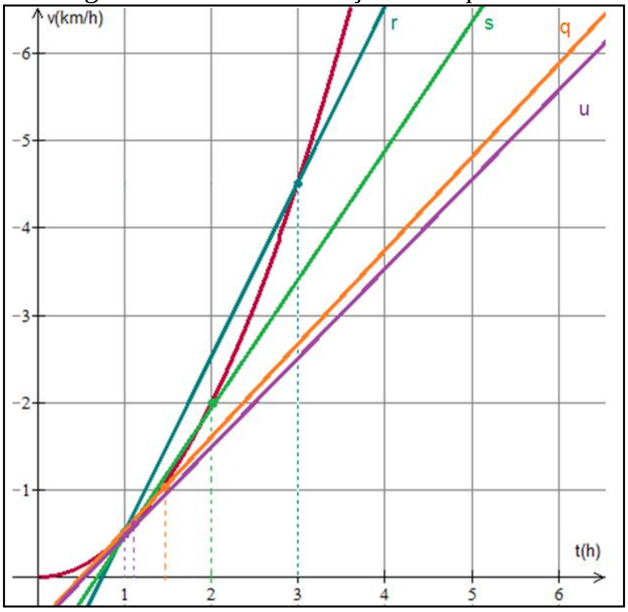
Como surgiram muitas dúvidas nesta questão, a professora em formação foi solicitada diversas vezes a ir às carteiras para discuti-las individualmente.

No item **d**, foi necessário relembrar, para alguns alunos, as relações vistas nas questões anteriores. A professora em formação pediu que os alunos observassem as respostas dadas nos itens anteriores e aí concluíram que a taxa de variação média de uma função entre dois pontos é igual ao coeficiente angular da reta secante que passa por estes mesmos pontos.

No item **e**, também foi necessária, para alguns alunos, a intervenção da professora em formação, que sugeriu a leitura do enunciado novamente, já que havia detectado que a dificuldade era na compreensão do enunciado.

Ao final da aula, foi feita a análise das respostas desta questão. No item **b**, a professora em formação fez uso de alguns slides mostrando como cada reta deveria ser traçada nesse item. À medida que estas foram sendo apresentadas, no slide, uma a uma (Figura 4.2.10), foi solicitado aos alunos que observassem que as taxas de variação calculadas para cada intervalo solicitado diziam respeito a intervalos cada vez menores.

Figura 4.2.10 – Retas traçadas na questão 5



Fonte: elaboração própria

Neste encontro, alguns alunos se mostraram desinteressados, o que ocasionou conversas paralelas. Com isso não foi possível fazer o fechamento da questão da forma como se pretendia. Sendo assim, o mesmo foi feito na aula seguinte.

4.2.3. Terceiro encontro

Este novo encontro teve início com a retomada da discussão sobre a questão 5, visando ao seu fechamento. Para isso, foram utilizados, novamente, os slides que mostravam o gráfico com cada reta traçada no item **b** (Figura 4.2.10).

A professora em formação pediu aos alunos que observassem a distância entre as abscissas dos pontos pelas quais as retas *r*, *s*, *q* e *u* foram traçadas, nesta ordem. Questionou os alunos a que valor esta distância estava tendendo e os mesmos responderam que tendia a zero. Assim, foi possível concluir que Δx está tendendo a zero.

Foi entregue a questão 6 (Figura 3.2.7), que traz uma função quadrática relacionando volume e altura. Alguns alunos apresentaram dificuldades no item **b**, quanto à compreensão sobre o conceito de variação. Então, a professora em formação pediu que relembrassem o conceito de variação no conteúdo de velocidade média, visto nas aulas de Física. Questionados sobre o que faziam para resolver problemas de velocidade média na Física, os mesmos responderam que usavam a fórmula $Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ em que Vm representa a velocidade média, ΔS a variação do espaço e Δt a variação do tempo. Foi destacado que, nesta questão, eles deveriam encontrar a variação do volume para que depois calculassem a razão entre esta e a variação da altura, assim os alunos conseguiram resolver a questão.

Figura 3.2.7 – Questão 6

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função V = 3h²+5, na qual h é a altura em metros e V é o volume em 10³m³.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes referentes aos valores da altura próximos a 10.

h	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média do volume neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99;10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

Fonte: elaboração própria

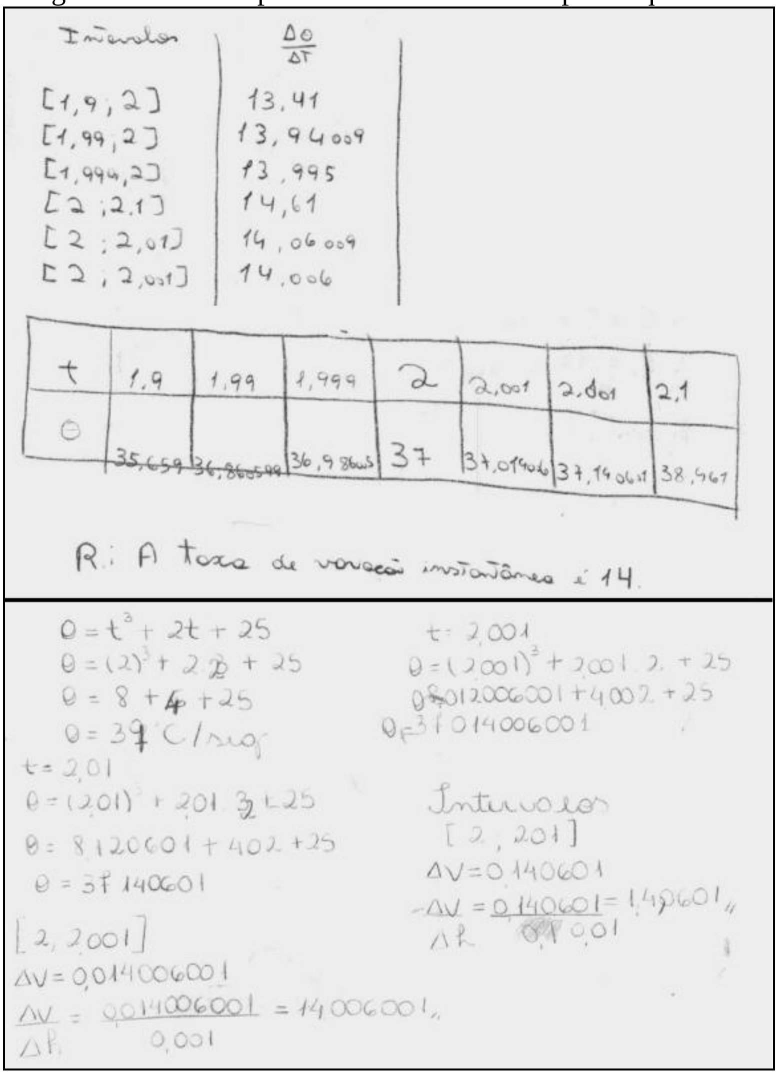
Um aluno apresentou dúvida no item **c**, em que se pergunta a que valor a taxa de variação média da função tende quando a altura se aproxima de 10. A professora em formação pediu que o aluno observasse na tabela, que havia completado no item b**,** a que valor as taxas de variação média estavam se aproximando. Assim, o mesmo conseguiu compreender o mecanismo e responder a ele. Foi possível perceber que o aluno não havia entendido o enunciado.

Sobre esta dificuldade, Polya (2006) afirma que deve haver um aperfeiçoamento dessa compreensão. O aluno deve começar "... de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo" (POLYA, 2006, p.29).

A professora em formação ressaltou que como os extremos dos intervalos estão cada vez mais próximos, a razão $\frac{\Delta V}{\Delta h}$, em que ΔV é a variação do volume e Δh a variação da altura, tende a um único valor chamado taxa de variação instantânea. Em seguida, definiu-se derivada da função em um ponto como a taxa de variação instantânea desta função neste mesmo ponto.

Na sétima questão, que relaciona temperatura e tempo por meio de uma função do terceiro grau, os alunos resolveram utilizando o mesmo encaminhamento da questão anterior. Um deles usou a mesma quantidade de intervalos, enquanto os outros uma quantidade menor (Figura 4.2.11). É importante dizer que a diferença entre os extremos dos intervalos utilizados por eles tende a zero.

Figura 4.2.11 – Respostas de dois dos alunos para a questão 7



Fonte: protocolo de pesquisa

A presente questão tradicionalmente é resolvida com o uso das regras de diferenciação, mas neste caso foi possível resolvê-la apenas utilizando o conceito de derivada.

A oitava questão (Figura 4.2.12), como dito anteriormente, pede para traçar no gráfico apresentado quatro retas sendo dadas as abscissas de dois pontos de cada reta, de tal modo que em todas as retas exista um ponto com a mesma abscissa. Além disso, são apresentadas quatro alternativas em que uma delas indica a posição relativa da reta à qual as outras quatro estão tendendo.

Figura 4.2.12 – Questão 8

8) Durante as escavações dos túneis de um metrô uma carga de explosivos lançou uma pedra para cima, como descreve o gráfico abaixo:

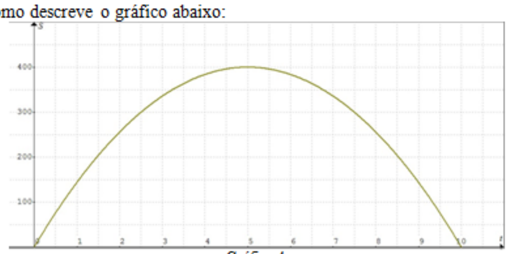


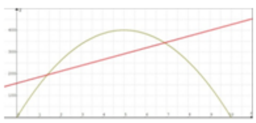
Gráfico 4

Sabendo que S é o deslocamento da pedra dado em metros, t segundos após o lançamento, trace neste mesmo gráfico as retas que passam pelos pontos de deslocamento da pedra nos instantes:

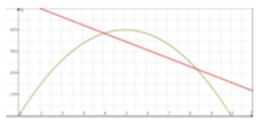
- t=6s e t=8s (reta p)
- t=6s e t=7s (reta q)
- t=6s e t=6,5s (reta r)
- t=6s e t=6,1s (reta s)

As retas p, q, r e s que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta t. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta t:

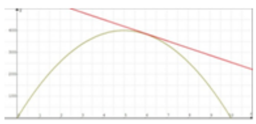
a)



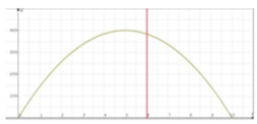
b)



c)



d)

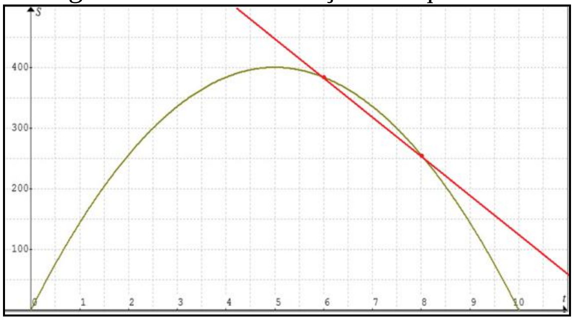


A reta que você encontrou é chamada **reta tangente** à curva S(t) no ponto t=6.

Fonte: elaboração própria

Os alunos não tiveram iniciativa em responder à questão. Assim, a professora em formação leu o enunciado novamente e perguntou aos alunos onde estava localizado no gráfico o ponto que tinha abscissa igual a 6, e em seguida o ponto com abscissa igual a 8. Assim que os mesmos localizaram os pontos no gráfico, foi traçada a primeira reta (Figura 4.2.13) para que prosseguissem.

Figura 4.2.13 – Reta traçada na questão 8



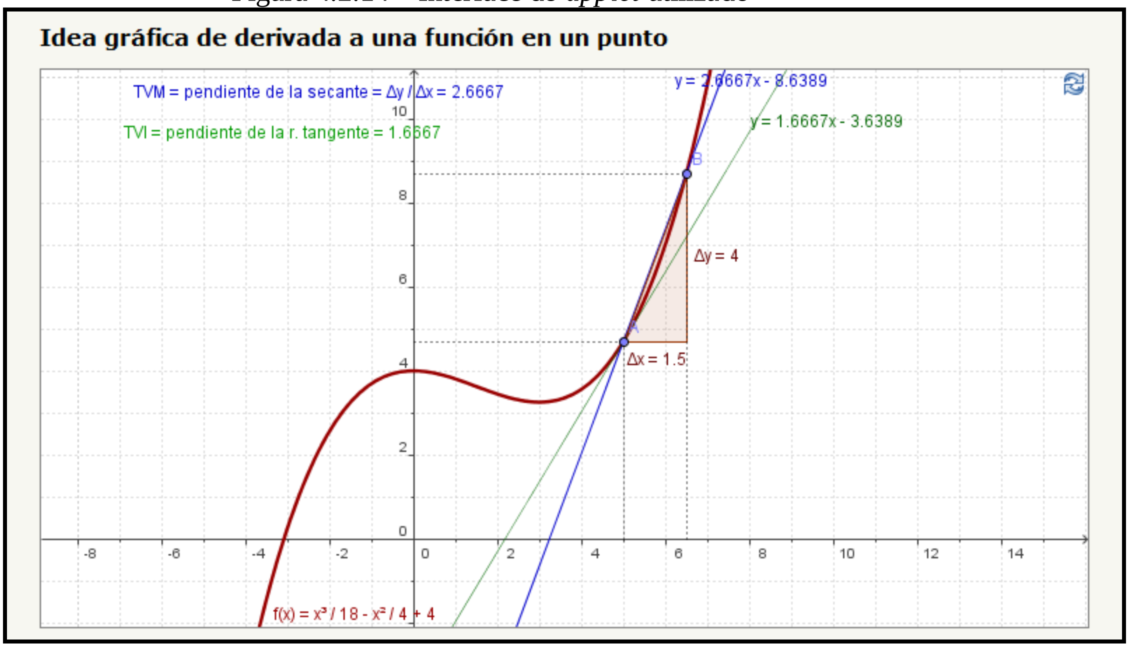
Fonte: Elaboração própria

Após a intervenção da professora em formação, todos os alunos indicaram corretamente as retas no gráfico e responderam à questão de forma satisfatória.

Ao final da questão, definiu-se a reta encontrada como a reta tangente à curva em um ponto. A professora em formação perguntou aos alunos se o conceito de tangente já era conhecido por eles, um deles respondeu que já havia visto relacionado à circunferência. Foi destacado então que, diferentemente da circunferência, uma reta tangente à curva nem sempre toca esta em apenas um ponto. Essa situação foi observada na questão seguinte.

Na questão 9, utilizou-se um *applet* em que é possível observar, numa curva dada, o comportamento das retas secante e tangente (Figura 4.2.14). Primeiramente, a professora em formação explicou o que é um *applet* e seu funcionamento, em seguida mostrou como o mesmo deveria ser manuseado.

Figura 4.2.14 – Interface do *applet* utilizado

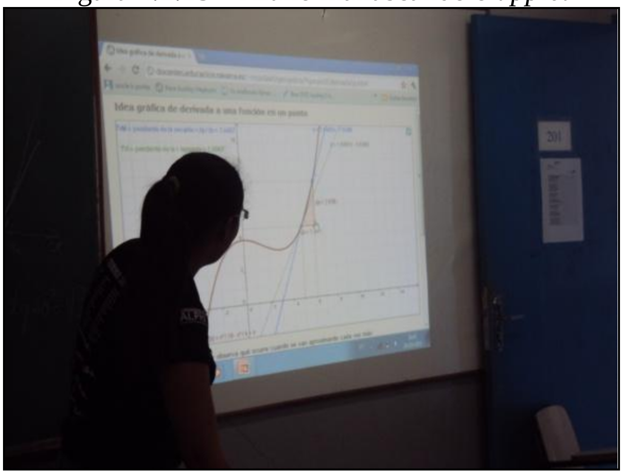


Fonte: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html

Os alunos perceberam que muitas informações faziam parte da interface do *applet* tais como: as taxas de variação média (TVM) e instantânea (TVI) e as equações das retas secante e tangente. Observaram, ainda, que nas equações das retas secante o coeficiente angular é igual à taxa de variação média calculada entre os pontos A e B. Foi destacado que, no gráfico apresentado no *applet*, a reta tangente toca a curva em mais de um ponto.

Para iniciar a resolução da questão, solicitou-se que um dos alunos fosse ao computador para manusear o *applet* e juntamente com os outros observassem os itens e respondessem a eles (Figura 4.2.15). A opção por essa metodologia se deve ao fato de que a escola não tinha um laboratório de informática disponível.

Figura 4.2.15 – Aluno manuseando o *applet*



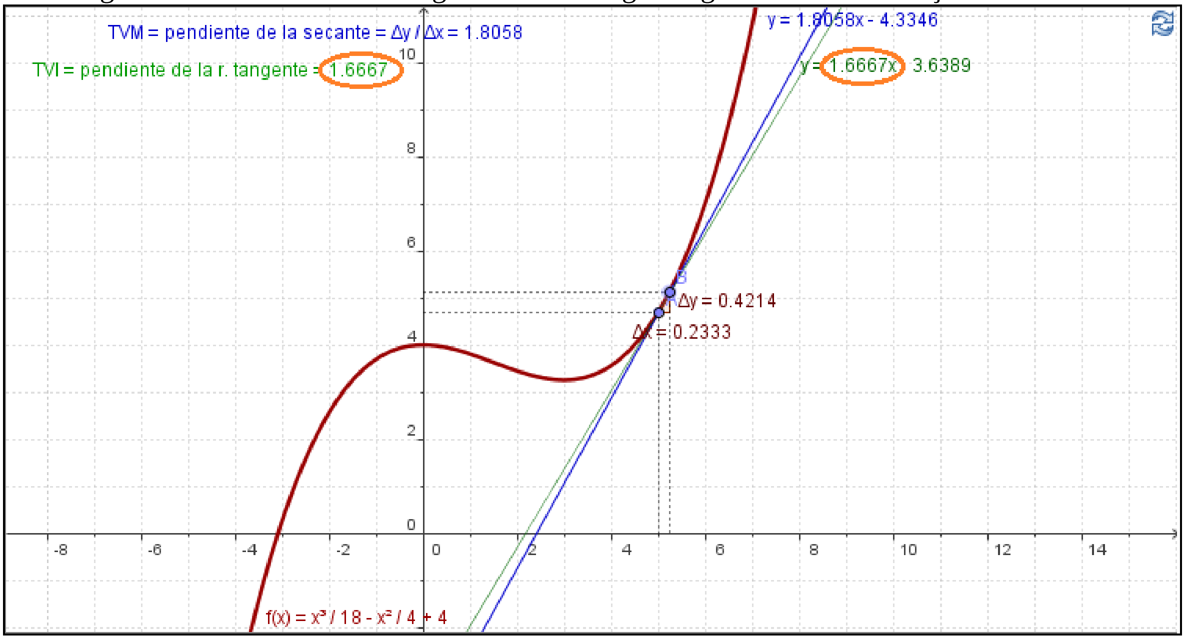
Fonte: elaboração própria

Após os alunos responderem ao item **a**, a professora em formação perguntou aos mesmos a que reta a reta secante se aproxima quando a taxa de variação média se aproxima da taxa de variação instantânea, e responderam reta tangente.

Em seguida foi perguntado a que valor a taxa de variação média se aproxima quando o ponto A se aproxima do B, e responderam ao valor da taxa de variação instantânea.

Os alunos responderam os itens com facilidade, apenas no item **c,** em que se pergunta qual a relação entre a taxa de variação instantânea em um ponto e a reta tangente à curva neste mesmo ponto, disseram não saber responder. Então, a professora em formação pediu que observassem no *applet* a taxa de variação instantânea no ponto e o coeficiente angular da reta tangente neste mesmo ponto (Figura 4.2.16) e os alunos responderam que eram iguais.

Figura 4.2.16 – Coeficiente angular da reta tangente igual à taxa de variação instantânea



Fonte: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html

Após a questão 9, foi entregue aos alunos a Folha Extra (Apêndice B) que traz um gráfico em que é possível observar as alturas de um menino ao passar dos anos, e um texto relacionando a inclinação da reta tangente com a velocidade do crescimento.

A professora em formação pediu que os alunos observassem o gráfico e foi perguntando em que trechos se tem um crescimento mais rápido e mais lento, e os alunos foram respondendo corretamente. Em seguida, foi perguntado que raciocínio haviam usado e um deles respondeu que foi por meio da inclinação das retas tangentes nos pontos considerados, ressaltando que quanto maior a inclinação desta reta mais rápida é a velocidade do crescimento.

A questão 10 (Figura 3.2.12) traz um problema que relaciona três tipos de reservatórios diferentes, mas de mesma altura e capacidade, com os gráficos que mostram o comportamento do nível da água nestes reservatórios.

Todos os alunos responderam a esta questão, utilizando o raciocínio visto na Folha Extra. Apenas um deles precisou relembrar o que foi visto no momento em que respondia à questão.

Ao final dessa questão, foi possível concluir que quanto maior a inclinação da reta tangente, mais rápido é o crescimento e se a tangente é horizontal, não ocorre crescimento no ponto considerado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, foi possível observar que, devido a algumas reformas no ensino, esta disciplina já esteve presente e ausentou-se em diferentes momentos da grade curricular do Ensino Médio.

Para que a volta do Cálculo seja efetiva e que os alunos desse segmento consigam de fato aprender o conceito de derivada é necessário que este seja aliado a uma metodologia de ensino que desperte o interesse dos alunos.

Visando à preocupação com uma metodologia de ensino que pudesse auxiliar na aprendizagem da Matemática e desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas, foi elaborada uma Atividade com base na metodologia de ensino Resolução de Problemas.

Essa proposta de ensino foi aplicada para uma turma de Ensino Médio e teve por objetivo apresentar o conceito de derivada por meio das taxas de variação de uma função, além de mostrar que o estudo do Cálculo é possível de ser aplicado para alunos deste segmento.

Passada esta etapa da elaboração, foi feito o teste exploratório, sendo de grande relevância para o presente trabalho monográfico visto que as dificuldades apresentadas pelos alunos acarretaram modificações nos enunciados de algumas questões, sendo reescritas ou reelaboradas.

Na experimentação da Atividade, realizada em uma turma do Ensino Médio, foi possível perceber que os alunos se mostraram interessados em desenvolver o trabalho proposto. Algumas dificuldades surgiram no decorrer deste processo, principalmente quanto à compreensão do conceito de intervalo de uma função, necessária para calcular as taxas de variação média dados os intervalos. Essas dificuldades apresentadas pelos alunos foram contornadas durante o processo da aplicação. Foi admirável perceber que, ao final da aplicação, os alunos demonstraram satisfação em aprender esse novo conceito.

É válido ressaltar que a utilização do *applet* foi de grande relevância, pois facilitou a conjectura e generalização dos conceitos vistos durante a realização das questões da Atividade.

Diante dos resultados obtidos com a aplicação deste trabalho monográfico, é possível afirmar que a questão de pesquisa foi respondida de forma afirmativa, ou seja, a proposta pedagógica sugerida mostra que é possível compreender o conceito de derivada por meio da análise das taxas de variação da função.

Espera-se que o trabalho aqui desenvolvido sinalize a importância de se incluir o estudo das ideias do Cálculo Diferencial na sala de aula do Ensino Médio, para que estas novas abordagens facilitem a aquisição de conceitos não só da Matemática, mas também da Física.

Acredita-se, ainda, que este trabalho poderá antecipar determinados tópicos do estudo de Cálculo presentes em alguns cursos de graduação.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 60, p.30-38, 2006.

ÁVILA, G. O Ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 23, p. 1-7, 1993.

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo no Segundo Grau. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*: 3ª Série Ensino Médio. São Paulo: Editora Moderna, 2004, p. 139.

BRASIL. Secretaria de Educação Ensino Médio. *Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARNEIRO, J. P.; WAGNER, E. Vale a pena estudar Cálculo? *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 53, p.18-21, 2004.

CARVALHO, J. P. de. O Cálculo na Escola Secundária: algumas considerações históricas. *Caderno Cedes:* História e Educação Matemática, n. 40, Campinas, Papirus, 1996, p. 62-80

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática:* teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009

DASSIE, B.A. *Euclides Roxo e a Constituição da Educação Matemática no Brasil*. 2008. 271 f. Tese (Doutor em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.

DUCLOS, R. C. Cálculo no 2.º Grau. *Revista do Professor de Matemática,* Rio de Janeiro, n. 20, p.26-30, 1992.

GIL; K. H.; PORTANOVA, R. *Reflexões sobre as dificulddades dos alunos na aprendizagem de Álgebra.* s.d. p.4. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO53964543004T.doc> Acesso em: 26 set. 2011.

GROENWALD, C.L.O.; NUNES, G.S.; SAUER, L. O.; FRANKE, R.F. Teoria dos números no Ensino Básico – Desenvolvendo o pensamento aritméico. In: MARANHÃO, C.(Org.). *Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio:* pesquisas e perspectivas. São Paulo: Musa Editora, 2009, p. 27-44.

GUEDES, A. G ., ASSIS, M. M. A. *Cálculo diferencial e integral no ensino médio*: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN. S.d.
Disponível em: < http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica3.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2011.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. *Matemática Universitária*, n. 26/27, 1999, p.123-146.
Disponível em:
<http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n26_n27/n26_n27_Artigo05.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2012

MEDEIROS. K. M. de. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*. SBEM. n. 9, p. 32-39, 2001.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L.G. *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.* 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.

OLIVEIRA, M. M. de. *Como fazer pesquisa qualitativa.* 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

ONUCHIC,L.R.; ALLEVATO,N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO,M.A.V.; BORBA,M.C.(Org.). *Educação Matemática:* pesquisa em movimento. 3.ed..São Paulo: Cortez, 2009, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R. Ensino–aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO,M.A.V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. 3. reimp. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

PEREIRA, V.M. C. *Cálculo no Ensino Médio:* Uma proposta para o problema da Variabilidade. 2009.182 f. Dissertação (Mestre em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. da. *Estudos de caso em educação matemática.* Bolema, n. 25, p. 105-132, 2006. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf> . Acesso em: 16 set. 2011.

RIBEIRO, M. V. *O Ensino do Conceito de Integral, em Sala de Aula, com Recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas.* 2010. 324 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista. 2010.

SILVA, F. L. Q. da; CASTRO FILHO, J. A. de. *Resolução de Problemas como Metodologia para Aprender Matemática.*s.d. Disponível em:
<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC29575478304.pdf> Acesso em: 5 mai. 2012.

SOUZA, C. P. A.; NUNES, C. B. *A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática em Sala de Aula.* s. d. Disponível em:
<www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC65873300534T.doc> Acesso em: 23 abr. 2012.

VALENTE, W. R. Professor de Matemática*:* etapas históricas de uma profissão. *Vetor Neteclem*: Série de divulgação científica em educação matemática. Campos dos Goytacazes: Editora da FAFIC, 2004, p. 89-103.

VIANNA, C. R. Resolução de Problemas. In: *Temas em Educação I*; Futuro Congressos e Eventos (Org). Curitiba. 2002. p. 401-410. Disponível em: <ftp://ftp.cefetes.br/Cursos/Matematica/AlexJordane/ORTE/CarlosRobertoVianna.pdf>. Acesso em: 8 maio 2012.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática para aprender a pensar:* o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

YIN, R. K. *Estudo de caso:* planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Atividade do Teste Exploratório

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Campus Campos-Centro | Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica | Ministério da Educação | GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Licenciatura em Matemática - Atividade para o teste exploratório
Professora em formação: Carolini Cunha Silva

Atividades

1) Um corpo movimenta-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo a função horária $S = 20 + 4t$, em que S é o espaço percorrido em quilômetros e t o tempo em horas.

Qual a variação de S, quando t varia de 1h para 2h? E de 2h para 3h? E de 5h para 6h? Esses valores são iguais?

____
____
____
____
____
____

- Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____
____

2) Para não chegar atrasada no trabalho, Ana resolve pegar um táxi. Ao sentar no banco do carro percebe que o taxímetro marca R$3,90. Sabendo que os taxistas nesta cidade cobram R$1,70 por quilômetro rodado, responda:

a) Quanto Ana deverá pagar se seu trabalho dista 1km do ponto em que ela pegou o táxi? E se distasse 2 km?

____
____
____
____

b) Existe uma relação entre o preço final **P**, dado pelo taxímetro e a quilometragem **q** percorrida. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação.

____
____
____
____

c) Represente graficamente esta função.

d) Qual o significado do valor 1,7 no gráfico que você desenhou?

____
____
____

- Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

(   ) Fácil   (   ) Médio   (   ) Difícil

Observações:____
____

3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.

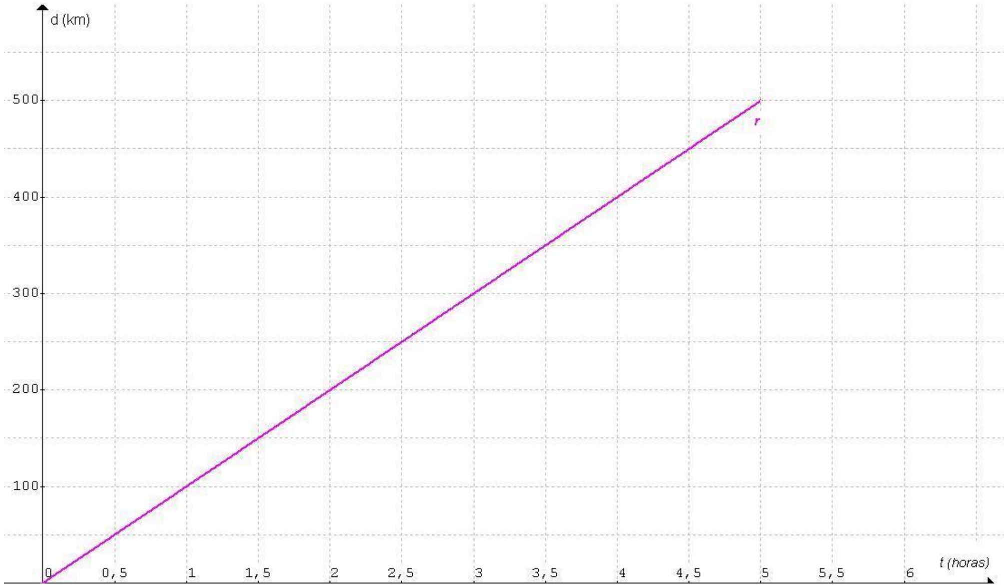


Gráfico 1

a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?

____

____

b) A que velocidade a família viaja?

____

____

____

c) Determine o coeficiente angular da reta r.

d) Qual a relação entre o coeficiente angular e o ângulo de inclinação da reta?

____

____

____

e) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r* ?

____

____

____

➢ Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____
____

4) Uma partícula move-se sobre uma reta de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.

Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:

Variação dos Instantes	Variação de S em relação a t	Variação da variação de S em relação a t
Entre t=0 e t=1		
Entre t=1 e t=2		
Entre t=2 e t=3		
Entre t=3 e t=4		
Entre t=4 e t=5		

A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:

a) O que podemos afirmar com relação aos valores obtidos na variação de S em relação a t (Velocidade Média)?

____
____
____

b) E sobre a variação da variação de S em relação a t?

____
____
____

- Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____
____

5) A velocidade escalar de um avião é dada segundo o gráfico abaixo:

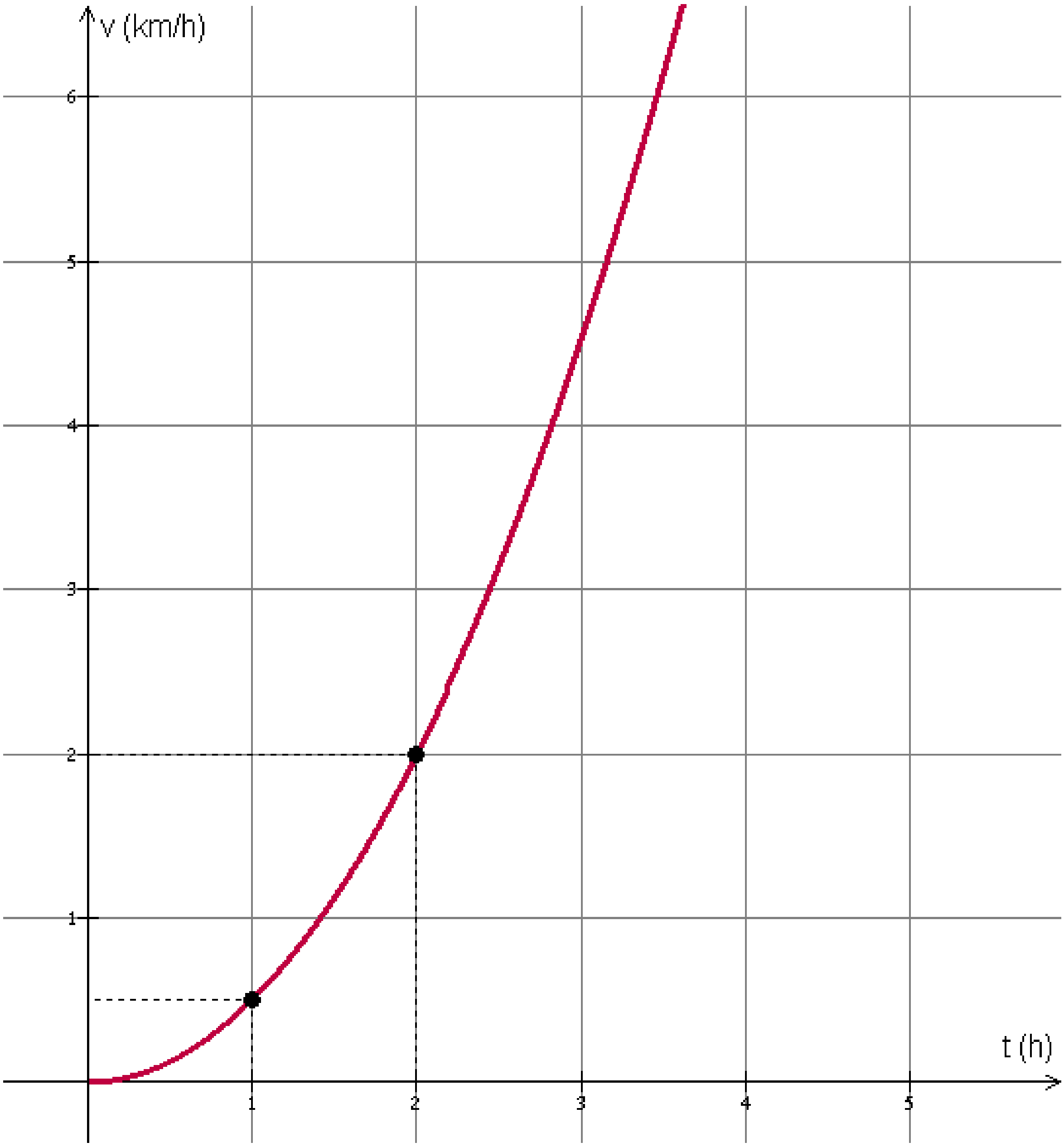


Gráfico 2

Vamos analisar o trecho em que $0 \leq t \leq 3$, sabendo que os pontos (0,0), (1;0,5) e (2,2) pertencem ao gráfico acima.

a) Expresse a lei desta função, considerando que v = f(t) é uma função quadrática.

b) Determine a taxa de variação média da função nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$. Consideramos como **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo $[x_A, x_B]$:

$$\boxed{t = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

c) Trace no Gráfico 2 as retas que passam pelos extremos de cada um dos intervalos do item b.

d) Determine o coeficiente angular de cada uma dessas retas.

e) Qual é a relação existente entre os conceitos: coeficiente angular e taxa de variação média da função?

____

____

f) O que você observa em relação aos extremos dos intervalos traçados?

____

____

____

- ➢ Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____

____

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função $V = 3h^2+5$, na qual h é a altura em metros e V é o volume em $10^3 m^3$.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes da função para os valores da altura próximos a 10.

H	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99;10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

____

____

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

- Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____

____

7) Trace no gráfico abaixo as retas que passam pelos pontos com abscissas em:

- x=0,5 e x=2 (reta *p*)
- x=0,5 e x=1,5 (reta *q*)
- x=0,5 e x=1 (reta *r*)
- x=0,5 e x=0,7 (reta *s*)

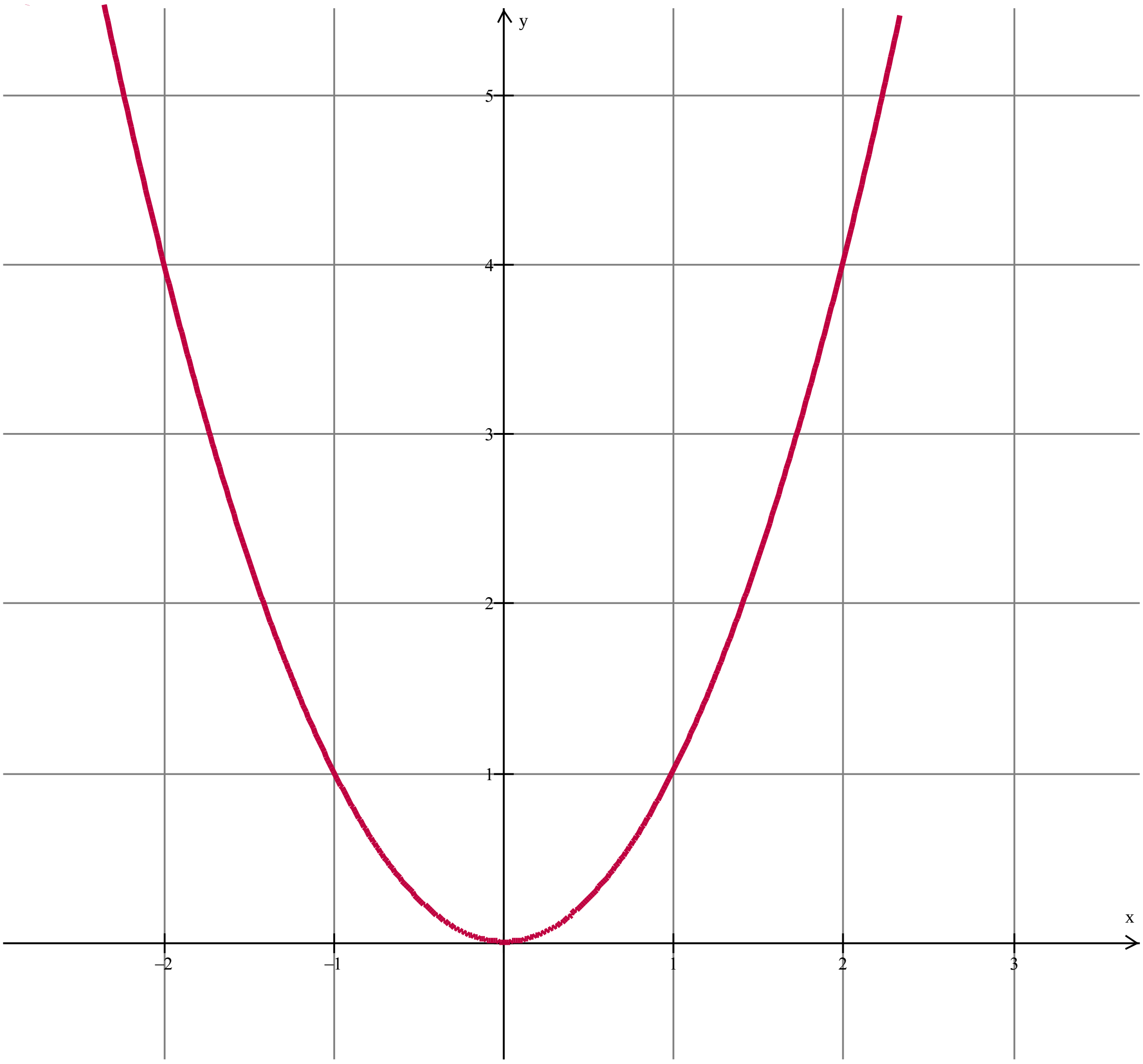
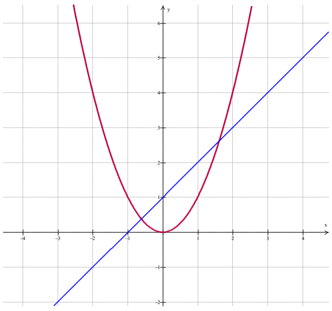


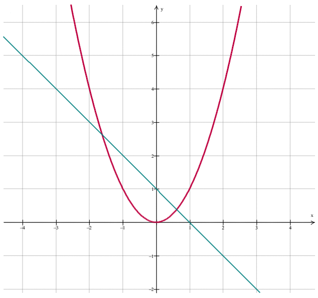
Gráfico 3

As retas *p, q, r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, “tendem” a uma reta *t.* Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

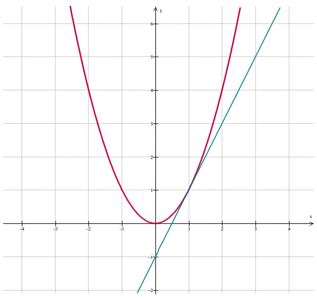
a)



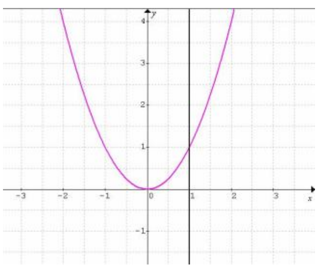
b)



c)



d)



A reta que você encontrou é chamada **reta tangente**.

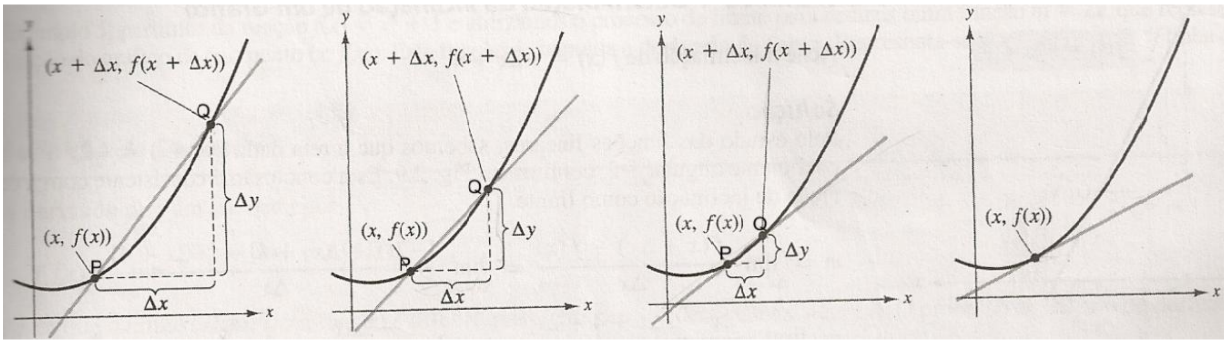
➢ Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____

8) Imaginemos o ponto P como um ponto fixo e o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, ou seja, Q aproximando-se de P. Quando isto ocorre, a reta secante gira sobre o ponto fixo P. Se a reta secante tem uma posição limite, desejamos que esta posição limite seja a reta tangente ao gráfico em P.

A palavra tangente deriva do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, a tangente a uma curva é uma reta que "apenas toca" a curva.



FONTE: Larson; Edwards, 2008, p.110.

Observando as figuras acima, responda:

a) Determine a expressão que representa o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ ou a taxa de variação média da função no intervalo $[x, x + \Delta x]$.

____

____

____

b) Quando o ponto Q se aproxima de P, Δ x se aproxima de zero e a reta secante tende à reta tangente. Nessa situação, o que ocorre com a taxa de variação média encontrada no item a?

____

____

c) Na questão 6, definimos derivada da função no ponto P como a taxa de variação instantânea dessa função nesse ponto. Que relação existe entre o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto P e a derivada da função nesse mesmo ponto?

____

____

____

- Você considera que o nível de dificuldade apresentado nessa questão é:

( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Observações:____
____

Referência: LARSON, R; EDWARDS, B. H. *Cálculo com aplicações*, 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008, p.110.

APÊNDICE B: Atividade da Experimentação

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Licenciatura em Matemática - Atividade de Aplicação de Monografia
Professora em formação: Carolini Cunha Silva
Aluno(a): ____ Ensino Médio

Atividades

1) Um corpo movimenta-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo a função horária $S = 20 + 4t$, em que S é o espaço percorrido em quilômetros e t o tempo em horas.

Qual a variação de S, quando t varia de 1h para 2h? E de 2h para 3h? E de 5h para 6h? Esses valores são iguais?

____

____

____

____

____

2) (Iezzi et al., 2004, p.71. Adaptada) O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda, faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

a) Quanto o segurança deverá receber ao final do mês se ele fizer um plantão noturno? E se fizer dois?

b) Existe uma relação entre o salário final mensal **S** do segurança e a renda por número **p** de plantões noturnos na boate. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação.

c) A representação gráfica desta relação é:

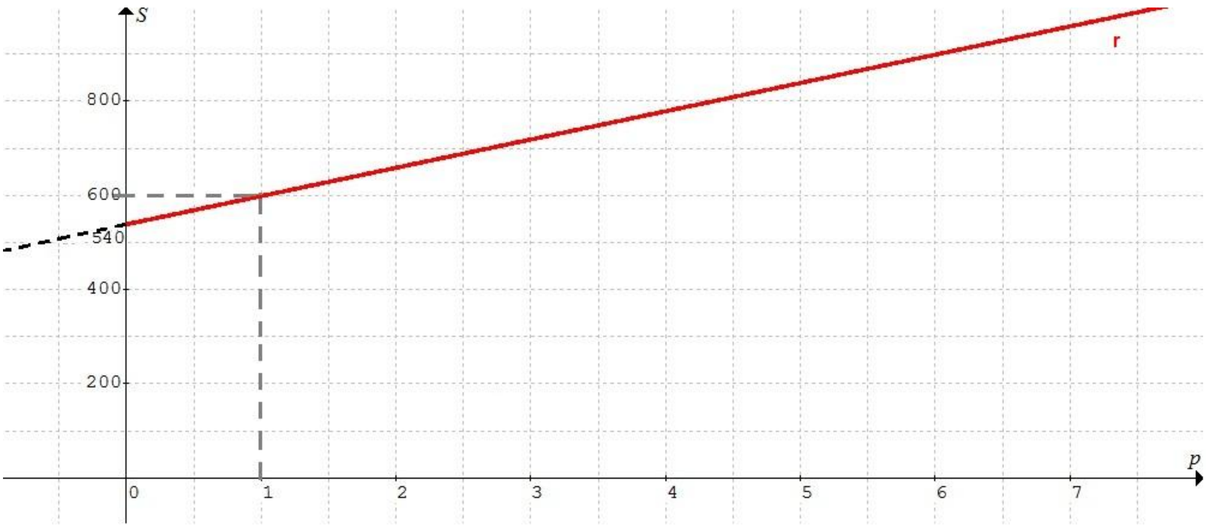


Gráfico 1

Assinale no plano cartesiano acima o ângulo de inclinação da reta r e determine a tangente deste.

____

d) Qual a relação entre esse ângulo e o valor 60, que o segurança recebe por plantão noturno?

Referência: IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N.de. *Matemática: ciência e aplicações, 1ª. série: ensino médio*. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. Volume 1.

3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.

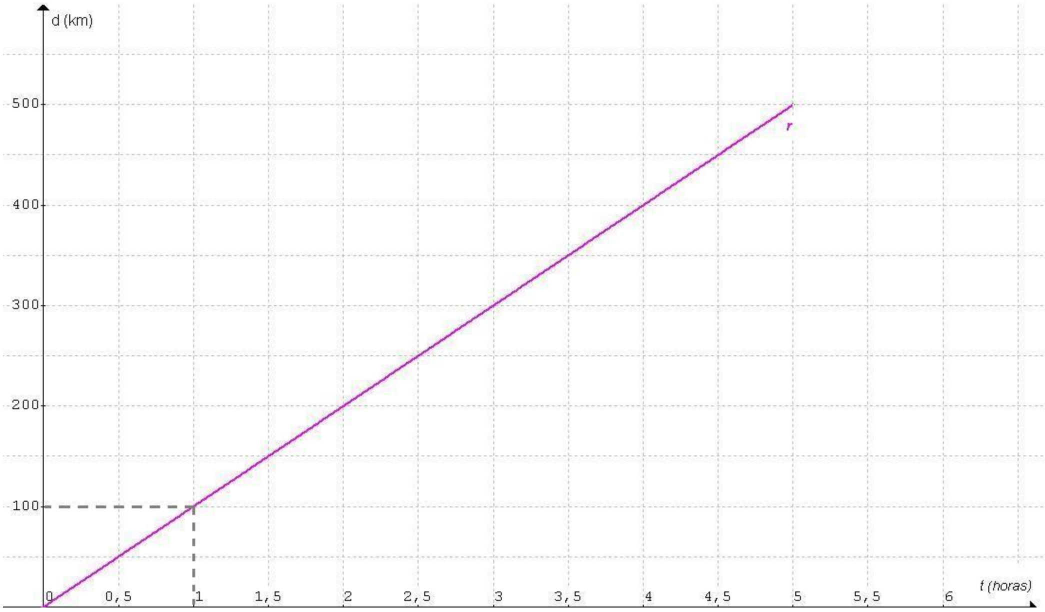


Gráfico 2

a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?

____

____

b) A que velocidade média a família viaja?

____

____

____

c) Determine o coeficiente angular da reta r.

____

____

____

d) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r* ?

____

____

____

4) Uma partícula move-se sobre uma curva de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.

Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:

Variação dos Instantes	Variação de S em relação a t	Variação da variação de S em relação a t
Entre t=0 e t=1		
Entre t=1 e t=2		
Entre t=2 e t=3		
Entre t=3 e t=4		
Entre t=4 e t=5		

A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:

a) A sequência obtida na segunda coluna representa uma progressão. De que tipo?

b) O que você observa quanto a variação da variação de S em relação a t?

5) A velocidade escalar de um avião é dada segundo o gráfico abaixo:

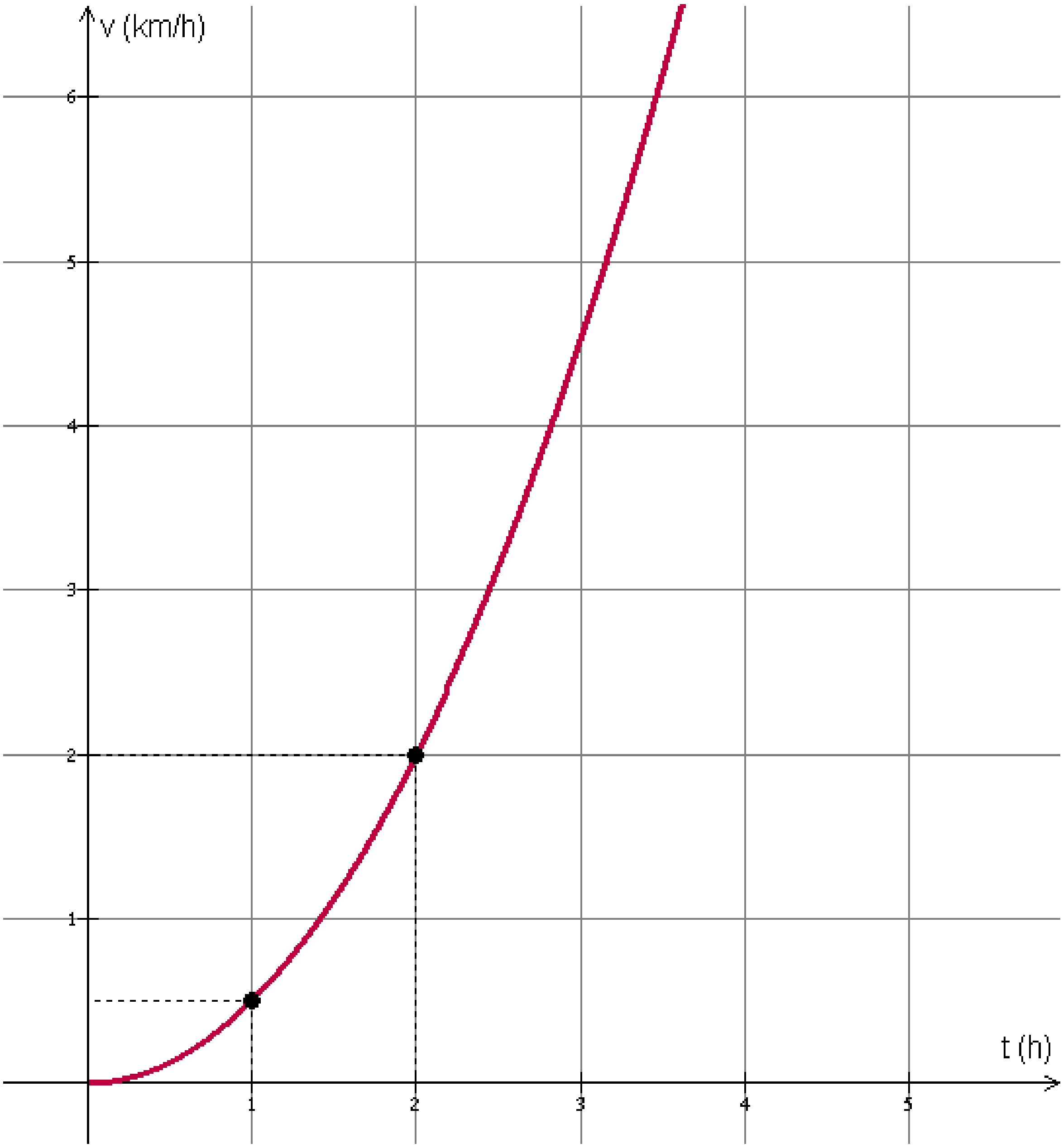


Gráfico 3

Vamos analisar o trecho em que $0 \leq t \leq 3$, sabendo que os pontos (0;0), (1;0,5) e (2;2) pertencem ao gráfico acima e que a lei da função $v = f(t)$ é $v = \frac{1}{2}t^2$.

a) Considere uma função f(x) qualquer e x_A e x_B dois elementos do seu domínio. O quociente:

$$\boxed{T_{VM} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

é chamado de **taxa de variação média** entre x_A e x_B da função f(x) em relação a x.

Determine a taxa de variação média da função v=f(t) nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$.

____
____
____
____
____
____
____
____

b) Trace no Gráfico 3 as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a e nomeie a reta que passa por:

d) $[1,3]$ de reta *r*

e) $[1,2]$ de reta *s*

f) $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ de reta *q*

g) $\left[1,\frac{9}{8}\right]$ de reta *u*

c) Determine o coeficiente angular das retas *r, s, q* e *u*.

____
____
____
____
____

d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você conclui?

e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de que valor?

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função $V = 3h^2+5$, na qual h é a altura em metros e V é o volume em $10^3 m^3$.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes referentes aos valores da altura próximos a 10.

H	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média do volume neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99;10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

____

____

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

7) A temperatura de um chuveiro elétrico varia com o tempo *t* de acordo com a expressão:

$\theta = t^3+2t+25$ (θ em °C, t em segundos)

Determine a taxa de variação instantânea de θ, dada em °C/seg quando t=2s.

8) Durante as escavações dos túneis de um metrô uma carga de explosivos lançou uma pedra para cima, como descreve o gráfico abaixo:

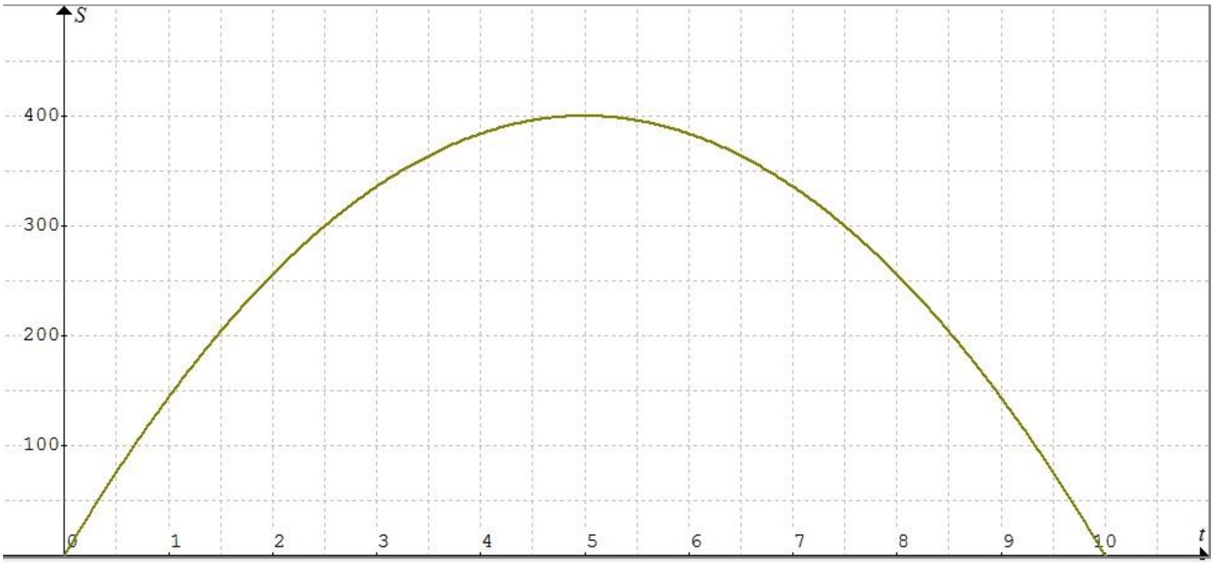


Gráfico 4

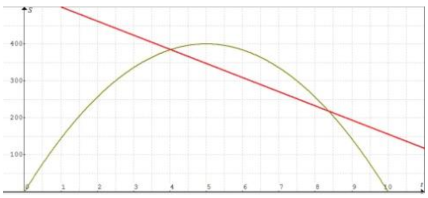
Sabendo que *S* é o deslocamento da pedra dado em metros, t segundos após o lançamento, trace neste mesmo gráfico as retas que passam pelos pontos de deslocamento da pedra nos instantes:

a) t=6s e t=8s (reta *p*)
b) t=6s e t=7s (reta *q*)
c) t=6s e t=6,5s (reta *r*)
d) t=6s e t=6,1s (reta *s*)

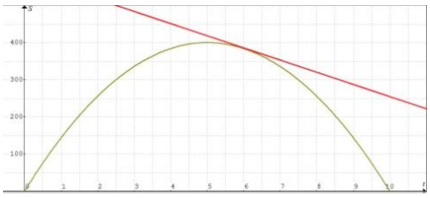
As retas *p*, *q*, *r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta *t*. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

a)

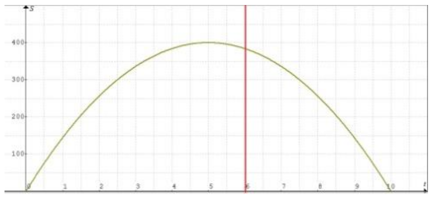
b)



c)

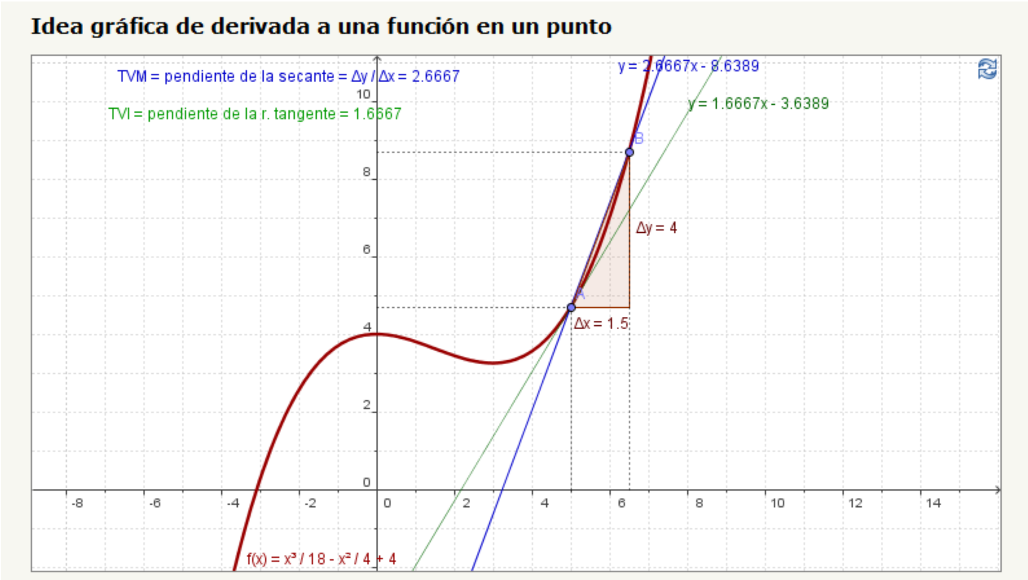


d)



A reta que você encontrou é chamada **reta tangente** à curva S(t) no ponto t=6.

9) Iremos desenvolver os itens desta questão utilizando o *applet* que se encontra disponível em: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html[6]



Movendo os pontos A e B podemos fazer algumas observações quando a distância entre os mesmos se aproxima de zero.

a) Quando aproximamos o ponto B do ponto A, a taxa de variação média entre esses pontos se aproxima de que taxa?

____

____

b) Qual é a taxa de variação instantânea em x=5?

____

____

c) Qual a relação entre a taxa de variação instantânea em x = 5 e a reta tangente à curva nesse mesmo ponto?

____

____

d) Baseada na resposta do item c e na definição de derivada apresentada na questão 6,o que você conclui?

____

____

[6] Os itens desta questão foram baseados nas perguntas encontradas neste applet.

10) Na Figura 1 são apresentados três tipos reservatórios com mesma capacidade e mesma altura[7]:

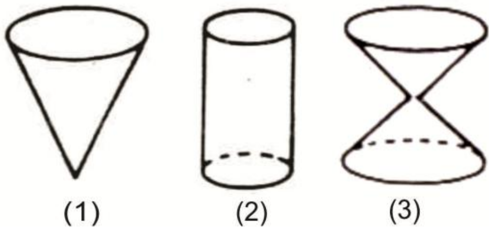


Figura 1

Colocamos torneiras enchendo cada um desses reservatórios e vamos admitir que a vazão da água seja a mesma para todos eles. A Figura 2 mostra o comportamento do nível da água no decorrer do tempo.

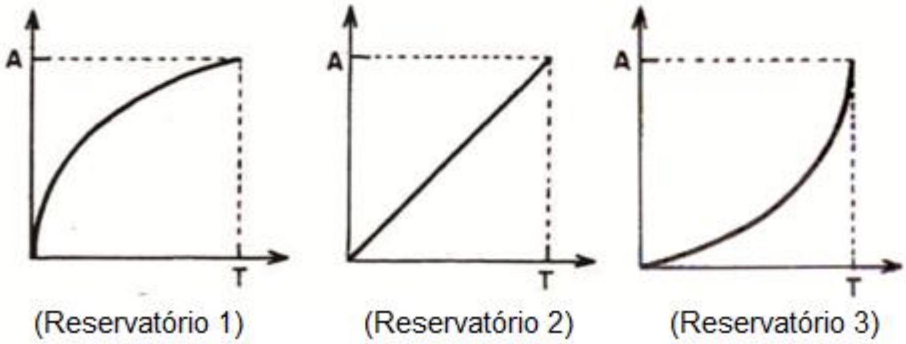


Figura 2

a) Em qual dos três reservatórios podemos afirmar que a velocidade do crescimento do nível da água é maior no início do processo? E em qual é maior no final do processo?

____

____

____

b) O que você observa em relação a velocidade do crescimento do nível da água no reservatório 2?

____

____

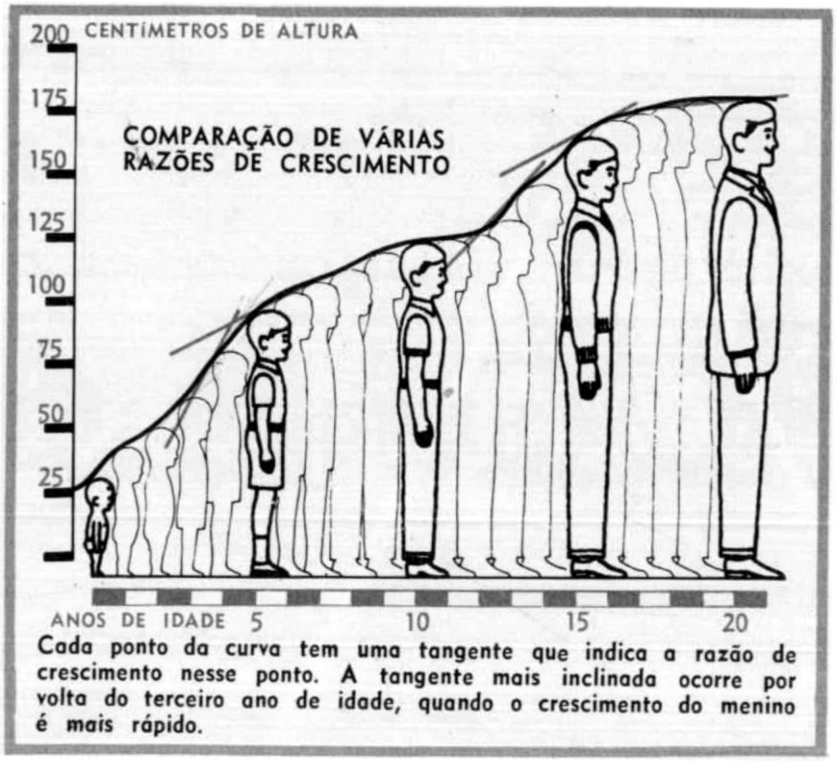
[7] Esta questão foi baseada no artigo referenciado a seguir:
GRAVINA, Maria Alice. Um estudo de funções. In: *Revista do Professor de Matemática*, n. 20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.33-38.

c) Que relação existe entre a velocidade do crescimento do nível da água nos reservatórios e as inclinações das retas tangentes nos diversos pontos de cada uma das curvas?

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Campus Campos-Centro — Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação — GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

FOLHA EXTRA[8]

Observe a figura abaixo, em que tomamos as medidas anuais do crescimento de uma pessoa até seus 21 anos.



Fonte: BERGAMINI, 1965, p.121.

Quando traçamos este gráfico conseguimos obter algumas informações com relação ao crescimento do menino por meio desta curva. A razão de crescimento pode ser observada em qualquer ponto se traçarmos sua tangente. A inclinação da tangente mede a razão exata do crescimento no ponto em que toca. Se a inclinação da tangente é grande, sabemos que o crescimento é rápido, se a tangente é horizontal, não ocorre crescimento no ponto considerado. Se quisermos analisar a velocidade do crescimento é necessário que essa análise seja feita em um espaço de tempo cada vez menor, uma vez que quando calculamos a média essa informação se perde.

[8]Texto baseado na enciclopédia:
BERGAMINI, David. As Matemáticas. *BIBLIOTECA CIENTÍFICA LIFE*. Rio de Janeiro: Livraria José Olympo Editora, 1965.p.114-123