



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação



## LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

### ESTUDANDO MATRIZES POR MEIO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

BRUNO FILLIPE GOMES DA SILVA  
PÂMELLA DE ALVARENGA SOUZA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2014

BRUNO FILLIPE GOMES DA SILVA  
PÂMELLA DE ALVARENGA SOUZA

ESTUDANDO MATRIZES POR MEIO DE TRANSFORMAÇÕES  
GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup> M.Sc. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo  
Coorientadora: Prof<sup>ª</sup> M.Sc. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

S586e Silva, Bruno Fillipe Gomes da.  
Estudando matrizes por meio de transformações geométricas /  
Bruno Fillipe Gomes da Silva, Pâmella de Alvarenga Souza – 2014.  
101 f. : il.

Orientadora: Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo.

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos  
Centro, 2014.

Referencias bibliográficas: p. 75 - 78.

1. Matrizes (Matemática). 2. Transformações geométricas  
(Matemática). I. Souza, Pâmella de Alvarenga II. Azevedo,  
Carmem Lúcia Vieira Rodrigues, orient. III. Título.

CDD – 512.943

BRUNO FILLIPE GOMES DA SILVA  
PÂMELLA DE ALVARENGA SOUZA

ESTUDANDO MATRIZES POR MEIO DE TRANSFORMAÇÕES  
GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 21 de novembro de 2014.

Banca Avaliadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo (orientadora)  
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

---

Prof.<sup>a</sup> Ana Paula Rangel de Andrade (coorientadora)  
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/UCAM/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

---

Prof.<sup>a</sup> Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro  
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

---

Prof.<sup>a</sup> Mylane dos Santos Barreto  
Mestre em Matemática/UENF/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

## AGRADECIMENTOS

Muito temos que agradecer.

Primeiramente a Deus, pela vida e pelas bênçãos derramadas, pela oportunidade que nos proporcionou e pela ajuda para superar os obstáculos com os quais nos deparamos ao longo da caminhada.

Em especial, às professoras Ana Paula Andrade e Carmem Lúcia Azevedo, por nos terem orientado durante esse período, sempre incentivando, apoiando e contribuindo com o nosso trabalho.

À nossa família, em especial aos pais, pelas palavras de apoio, de incentivo e de companheirismo ao longo de todos os anos da graduação. Às nossas irmãs, pelo carinho e pela compreensão.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática, que confiaram sempre em nós e motivaram nosso trabalho. Em especial, à professora Gilmara Teixeira Barcelos, pelo incentivo e apoio, desde a implementação da sequência didática até a escrita.

Aos nossos amigos, com os quais dividimos nossas manhãs de estudo juntos.

Aos participantes do teste exploratório pela contribuição que nos foi dada. À professora Juliana Chagas, pela disponibilidade das aulas cedidas para aplicação da sequência didática. Em especial, a colaboração, a disposição, a paciência, a compreensão e a interação nas aulas, à turma que fez parte da experimentação.

Por fim, a todos que nos ajudaram, de forma direta ou indiretamente, a concluir esta etapa de nossas vidas.

A qualidade da aprendizagem dos alunos depende muito da qualidade do ensino que lhes é proporcionado.

Lorenzato

## RESUMO

Pesquisas realizadas em alguns livros didáticos do Ensino Médio mostram que o conteúdo de matrizes, muitas vezes, é apresentado de forma mecânica e sem aplicações. As transformações geométricas planas possibilitam uma mudança nesse quadro, além de integrar Álgebra e Geometria. O objetivo desse trabalho é relacionar os conceitos de operações com matrizes e seus tipos com os das transformações geométricas planas. Dessa forma, elaborou-se uma sequência didática para alunos da 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio. Foram abordadas as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e a isomórfica (homotetia). A metodologia de ensino adotada, nessa pesquisa qualitativa, foi a Investigação Matemática que requer a participação ativa dos alunos para que consigam explorar, formular, testar e validar suas conjecturas. A sequência didática foi dividida em onze Atividades que compõem as cinco etapas: Investigação Inicial com Material Manipulativo, *software* GeoGebra e *applets*; Transformações Geométricas e Matrizes; Matriz e Computação Gráfica; Transformações Geométricas e Matrizes Especiais, e Questões Envolvendo Matrizes e Transformações Geométricas. O material manipulativo foi utilizado como um facilitador na visualização dessas transformações, o *software* no reforço e no complemento de situações em que essa manipulação apresenta limitações e os *applets*, na visualização e na generalização. Vale ressaltar, que o *software* GeoGebra ampliou as possibilidades de aplicação do trabalho, permitindo a criação de objetos que, ao mesmo tempo, puderam ser visualizados e manipulados nos modos geométrico e algébrico. Os resultados confirmam a importância de trabalhos como esse, que promovem um estudo intradisciplinar e dão significado a conteúdos como o de matrizes, apresentados sem aplicações.

**Palavras-Chave:** Matrizes. Transformações geométricas. Investigação Matemática.

## ABSTRACT

Surveys conducted in many High School didactic books show that the matrices content, many times, is presented in a mechanic form and without applications. The flat geometric transformations allow a change in that picture, further on integrating Algebra and Geometry. This project aims to relate the concepts of matrices operations and its kinds with the flat geometric transformations. Thus it was elaborated a didactic sequence for the 3<sup>rd</sup> year High School students. The isometric transformations (reflection, translation and rotation) and the isomorphic (dilation) were addressed. The adopted teaching methodology, in this qualitative research, was the Mathematic Investigation which requires the active participation of the students so they can explore, formulate, test and validate their conjectures. The didactic sequence was divided in eleven Activities that compose the five steps: Inicial Investigation with Manipulative Material, GeoGebra software and applets; Geometric Transformations and Matrices; Matrices and CG; Geometric Transformations and Special Matrices, and Questions Involving Matrices and Geometric Transformations. The manipulative material was used as a facilitator in the preview of these transformations, the software in strengthening and in complement of situations in which this manipulation shows limitations and the applets, in the preview and in the generalization. It is noteworthy, that the GeoGebra software amplified the possibilities of the project's application, allowing the creation of objects that, in the same time, can be seen and manipulated both in geometric and algebraic form. The results confirmed the importance of works such as this that promote an interdisciplinary study and give meaning to the content presented without applications.

**Keywords:** Matrices. Geometric Transformations. Mathematic Investigation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Atividade 1 .....	28
Figura 2 – Parte da Atividade 2 .....	29
Figura 3 – Figura utilizada na Atividade 2 .....	29
Figura 4 – Parte da Atividade 2 .....	30
Figura 5 – Interface do <i>applet</i> de reflexão.....	31
Figura 6 – Material manipulativo da Atividade 3 .....	31
Figura 7 – Parte da Atividade 4 .....	32
Figura 8 – Parte da Atividade 5 .....	32
Figura 9 – Atividade 6 .....	33
Figura 10 – Parte da Atividade 7 .....	34
Figura 11 – Figura da Atividade 8.....	35
Figura 12 – Interface do <i>applet</i> de homotetia.....	35
Figura 13 – Figura da Atividade 9.....	36
Figura 14 – Uma das tabelas de registros da Atividade 9 .....	36
Figura 15 – Parte da Atividade 9 referente à rotação .....	37
Figura 16 – Interface da atividade investigativa de translação.....	37
Figura 17 – Parte da Atividade 9 .....	38
Figura 18 – <i>Slides</i> , com o personagem <i>Blu</i> , para ilustrar algumas transformações geométricas.....	38
Figura 19 – Questão 1 da Atividade 10 .....	39
Figura 20 – Parte da questão 2 da Atividade 10.....	40
Figura 21 – Continuação da questão 2 da Atividade 10.....	40
Figura 22 – Primeira questão da Atividade 11 .....	41
Figura 23 – Segunda questão da Atividade 11 .....	41
Figura 24 – Terceira questão da Atividade 11.....	42
Figura 25 – Quarta questão da Atividade 11 .....	42
Figura 26 – Quinta questão da Atividade 11 .....	43
Figura 27 – Dobraduras feitas pelos licenciandos .....	45
Figura 28 – Figura “borrada”.....	45
Figura 29 – Figura “borrada” por excesso de cola .....	46
Figura 30 – Apresentação do <i>applet</i> de reflexão .....	47

Figura 31 – Um dos licenciandos resolvendo a Atividade 4 .....	48
Figura 32 – Resolução da Atividade 6 por um dos alunos .....	49
Figura 33 – <i>Slides</i> , com o personagem <i>Blu</i> , para ilustrar a homotetia .....	51
Figura 34 – Respostas de uma das tabelas por um dos licenciandos.....	52
Figura 35 – Registro algébrico feito por um licenciando na atividade sobre reflexão.....	52
Figura 36 – Comparativo da figura da questão 5.....	53
Figura 37 Quadro Resumo.....	55
Figura 38 – Figura deformada por excesso de cola.....	57
Figura 39 – Dobraduras feitas pelos alunos.....	57
Figura 40 – Aluno realizando a Atividade 3.....	58
Figura 41 – Resolução de um dos alunos do item <i>a</i> da Atividade 5 .....	59
Figura 42 – Aluno resolvendo a Atividade 7.....	60
Figura 43 – Definição de reflexão de um dos alunos .....	62
Figura 44 – Definição de rotação de um dos alunos .....	63
Figura 45 – Resolução da Atividade 6 por um dos alunos .....	63
Figura 46 – Definição de translação de um dos alunos .....	64
Figura 47 – Construção feita por um dos alunos, adotando um fator maior do que 1, na Atividade 8 .....	64
Figura 48 – Conjectura apresentada por um dos alunos sobre homotetia .....	66
Figura 49 – Resolução de um dos alunos sobre a reflexão em relação ao eixo <i>x</i> da Atividade 9 .....	66
Figura 50 – Respostas da tabela referente à translação por um dos alunos.....	68
Figura 51 – Quarta questão da Atividade 9 .....	69
Figura 52 – Resolução de um dos alunos da Atividade 10.....	71
Figura 53 – Resolução de um dos alunos da quinta questão da Atividade 11.....	72

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	7
INTRODUÇÃO.....	10
1 APORTE TEÓRICO.....	13
1.1 Matrizes e Transformações Geométricas.....	13
1.2 Investigação Matemática .....	15
1.3 O Uso das Tecnologias no Ensino de Matemática .....	20
1.4 Estudos Relacionados .....	23
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS .....	26
2.1 Caracterização da Pesquisa.....	26
2.2 Elaboração da Sequência Didática.....	28
3 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS .....	44
3.1 Teste Exploratório .....	44
3.1.1 Primeiro encontro .....	44
3.1.2 Segundo encontro .....	50
3.2 Experimentação .....	55
3.2.1 Primeiro encontro .....	55
3.2.2 Segundo encontro .....	65
3.2.3 Terceiro encontro.....	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	74
REFERÊNCIAS .....	74
APÊNDICES .....	79
APÊNDICE A: Atividades 1 e 2 .....	80
APÊNDICE B: Atividades 3 e 4 .....	83
APÊNDICE C: Atividades 5 e 6 .....	85
APÊNDICE D: Atividades 7 e 8 .....	88
APÊNDICE E: Atividade 9 .....	91
APÊNDICE F: Atividade 10 .....	96
APÊNDICE G: Atividade 11.....	99

## INTRODUÇÃO

A inspiração para a escolha do tema dessa pesquisa ocorreu em um dos trabalhos desenvolvidos por um dos graduandos, na disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática, que teve por objetivo aplicar o estudo de matrizes às seguintes transformações geométricas planas: reflexão (referente aos eixos  $x$  e  $y$  e à origem) e rotação.

Tal propósito vai ao encontro da necessidade de se buscar aplicações para o estudo de matrizes. Em muitos livros didáticos do Ensino Médio, esse conteúdo é abordado sem uma justificativa consistente (LIRA, 2011).

Stormowski (2008) constatou que, além de não apresentar uma aplicação que justifique o ensino desse conteúdo, as operações de adição e de multiplicação entre matrizes são introduzidas de forma artificial e mecânica, não diferenciando o motivo pelo qual uma é feita termo a termo e, na outra, multiplicam-se os elementos das linhas pelos das colunas.

Também são percebidas, em alguns livros, “confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e exercícios repetitivos” prejudicando o raciocínio lógico-matemático dos alunos (MESSIAS; SÁ; FONSECA, 2007, p. 2).

No entanto, tanto Siqueira Filho (2013) quanto Gonçalves (2013) apontam a utilização das matrizes em algumas áreas, tais como Matemática, Engenharia, Administração, Economia e Computação Gráfica. Nessa última, observa-se uma estreita relação entre as matrizes e as transformações geométricas.

Campo rico de conexões com as funções e com os números complexos, essas transformações também são ferramentas para demonstrações e possibilitam o raciocínio sobre o plano e o espaço (BARBOSA, 2013; LIRA, 2011). Por fim, “se apresentam como um recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e suas operações” (BARBOSA, 2013, p. 19).

Outro aspecto a se observar nessa relação é a integração da Geometria com a Álgebra.

Segundo Lorenzato (2006), seria um ponto de conexão entre esses campos matemáticos, o que proporciona um ensino intradisciplinar em que a linguagem geométrica é um facilitador na aprendizagem da Matemática na medida que torna visível o que nem sempre os símbolos conseguem expressar.

É destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do 3º e 4º ciclos<sup>1</sup> (1998):

---

<sup>1</sup> Atualmente, o 3º ciclo corresponde ao 6º e 7º anos e o 4º ciclo, ao 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

[...] a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam semelhantes (BRASIL, 1998, p. 51).

Porém, tal abordagem não é tão explorada nos PCN do Ensino Médio. Stormowski (2008) relata que esse conteúdo é esquecido inclusive pelos livros didáticos e, quando são abordadas, apresentam-se de forma muito superficial.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) indicam que o estudo de transformações geométricas deve ser inserido de forma complementar ao estudo geométrico e ao dos números complexos. Portanto, não menciona sua relação com o ensino de matrizes (STORMOWSKI, 2008).

As transformações geométricas, segundo Stormowski (2008), podem ser representadas algebricamente na forma de matrizes. Acrescenta que, ao se considerar algumas propriedades geométricas, essas representações permitem estudar as operações entre matrizes.

Neste trabalho, fez-se um estudo das transformações geométricas no plano, sob o ponto de vista geométrico e algébrico, de forma a obter o significado geométrico das operações com matrizes.

Diante do exposto, gerou-se a seguinte questão de pesquisa: Como as transformações geométricas planas se relacionam com o conteúdo de matrizes? Com o intuito de respondê-la, traçou-se o seguinte objetivo: relacionar os conceitos de operações com matrizes e seus tipos com os das transformações geométricas planas.

Esse trabalho monográfico é composto de três capítulos, além dessa Introdução e das Considerações Finais.

O primeiro capítulo apresenta a fundamentação teórica que embasou o planejamento, o desenvolvimento e a análise da sequência didática. Está dividido em quatro partes: a relação entre as matrizes e as transformações geométricas, a metodologia de ensino adotada, Investigação Matemática, o uso das tecnologias digitais e não digitais nas aulas de Matemática e, por fim, os estudos relacionados.

No segundo capítulo, encontram-se os aspectos metodológicos. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, desenvolvida por meio de um estudo de caso, na qual foram utilizadas como técnicas de coleta de dados a observação, os registros das respostas dos

alunos, as anotações descritivas e reflexivas e a gravação em áudio. Na seção referente à elaboração da sequência didática<sup>2</sup>, são descritas as onze Atividades bem como seus objetivos.

O terceiro capítulo relata as experiências vivenciadas tanto no teste exploratório quanto na experimentação da sequência didática, apresentando cada um dos encontros e a análise dos dados.

Por fim, as Considerações Finais com reflexões sobre o desenvolvimento do trabalho monográfico e a resposta à questão de pesquisa.

---

<sup>2</sup> “[...] conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

## 1 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o aporte teórico que auxiliou a construção dessa monografia, o uso de tecnologias no ensino de Matemática e a síntese de quatro trabalhos, que também abordam o conteúdo de matrizes e as transformações geométricas.

### 1.1 Matrizes e Transformações Geométricas

A falta de motivação dos alunos na sala de aula, no estudo de matrizes, deve-se ao fato de que apenas realizam cálculos, sem fazer qualquer relação entre a teoria e a prática (CRUZ, 2013).

Historicamente, a relação entre transformações geométricas e matrizes começou quando tentou-se verificar se a lei da propriedade comutativa da operação de multiplicação era válida sempre, ou seja, “seria possível existir uma Álgebra lógica na qual  $a \times b$  fosse diferente de  $b \times a$  ?” (EVES, 2004, p. 548).

Uma das respostas encontradas relaciona-se com a Álgebra das matrizes que, segundo Eves (2004), foi descoberta pelo matemático Arthur Cayley em 1857. Para esse matemático, o surgimento das matrizes está ligado

[...] às transformações lineares do tipo  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$  onde  $a, b, c, d$  são números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto  $(x, y)$  no ponto  $(x', y')$ . Obviamente a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes  $a, b, c, d$  de modo que ela pode ser simbolizada pelo quadro  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , ao qual chamamos *matriz (quadrada, de ordem 2)* (EVES, 2004, p. 552).

A história da multiplicação entre matrizes se deve à composição das transformações geométricas. Considerando as transformações lineares supracitadas, Eves (2004, p. 552-553) afirma que se as mesmas foram seguidas

[...] da transformação  $\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$  pode-se mostrar, por meio da álgebra

elementar, que o resultado é a transformação  $\begin{cases} x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases}$ .

Isso leva a seguinte definição de produto de duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a definição de produto de matrizes surgiu da composição de duas transformações geométricas sucessivas.

Essas composições são indicadas nos PCN do Ensino Fundamental, no terceiro ciclo, quando apontam a importância de “[...] resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução” (BRASIL, 1998, p. 65). No quarto ciclo, aprofunda-se essa abordagem e pretende-se que os alunos consigam “interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano” (BRASIL, 1998, p. 81).

Ainda, nos PCN, é destacada a importância das transformações geométricas nas salas de aula:

As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais “dinâmico” para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda (BRASIL, 1998, p. 124).

Outro fator que indica a importância de se trabalhar as transformações geométricas no Ensino Fundamental é que essas permitem “[...] o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes” (BRASIL, 1998, p. 51).

Porém, nos PCN do Ensino Médio, percebeu-se que esse conteúdo não é mencionado, como afirma Stormowski (2008, p. 2):



As transformações geométricas há algum tempo são fortemente sugeridas pelos PCNs [sic] como um tema de abordagem desde as séries finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, e no entanto as mesmas são quase que esquecidas inclusive pelos livros didáticos que apenas recentemente resolveram abordar o assunto, mas ainda de forma muito superficial.

## 1.2 Investigação Matemática

Com o intuito de buscar mais uma alternativa didático-pedagógica para a realização de um ensino significativo de Matemática, surge, no final da década de 80, nos Estados Unidos e no Reino Unido, a metodologia de ensino conhecida como Investigação Matemática. Segundo Corradi (2008), é uma estratégia didática metodológica, que tem ganhado ênfase nos currículos escolares, principalmente na disciplina Matemática. Destaca, ainda, que as atividades investigativas

[...] devem provocar a capacidade de raciocínio, além de possibilitar o emprego de conceitos matemáticos para trabalhar nas atividades propostas. Para que isso aconteça é preciso que haja uma mudança significativa em relação à metodologia utilizada pelo professor a fim de que haja envolvimento dos alunos com as tarefas realizadas por eles [...] (CORRADI, 2008, p. 169).

Corradi (2008) também relata que, por meio das Investigações Matemáticas, as atividades podem desenvolver a motivação e a competência de pensar matematicamente.

Há vários tipos de Investigações Matemáticas: as *numéricas*, as *estatísticas* e as *geométricas*. Destacam-se, neste trabalho, as investigações geométricas. Abrantes (1999) afirma que, por meio de atividades investigativas em geometria, os processos dessa metodologia tornam-se naturais. Além disso, oportuniza a discussão do papel das definições e também a sua análise. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 71) concordam com essa ideia e alegam que tais investigações contribuem para a percepção de aspectos essenciais da atividade matemática. Acrescentam que, a partir da exploração de diferentes tipos de investigação geométrica, pode-se “concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação”.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a Investigação Matemática, quando utilizada como metodologia de ensino, apresenta quatro momentos, a saber: (i) Exploração e

formulação de questões; (ii) Conjecturas; (iii) Teste e reformulação e (iv) Justificação e avaliação.

No primeiro momento, os alunos aprofundam-se na situação proposta, familiarizando-se com os dados e adequando-se ao sentido da tarefa. Tal procedimento é decisivo para que comecem a gerar dados e organizá-los para formularem questões e conjecturas, o que pode demandar um maior tempo. O professor deve estimular os alunos a integrar seus conhecimentos matemáticos na investigação, a qual permite uma diversidade de exploração de acordo com os conhecimentos dos alunos. Com isso, a intervenção do professor faz-se necessária e muito útil, direcionando o encaminhamento da aula (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

No segundo momento, as conjecturas podem surgir de diversas formas como observação direta dos dados, manipulação ou, até mesmo, por analogia com outras conjecturas. Após a organização dos dados, os alunos registram suas ideias e conjecturas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Ao explicitarem suas conjecturas, no terceiro momento, interiorizam com o próprio processo indutivo ao manipular os dados e apontar o sentido das mesmas. Nesse momento, a quantidade de conjecturas pode reduzir, devido a algumas não sugerirem o encaminhamento correto da solução. É importante destacar, que o professor precisa estar atento ao processo da formulação e de testes das conjecturas para que os alunos evoluam na realização das investigações. Com isso, os mesmos são estimulados a olharem em outras direções e levados a refletirem sobre o que estão fazendo. Após testar as conjecturas levantadas, permanecem as que levarão para a solução do problema (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

No último momento, as conjecturas passam a ser admitidas como conclusões após o processo de justificação, que representa uma subdivisão do trabalho investigativo; esta tende a ser esquecida, porém é fundamental. A ideia da prova matemática é feita gradualmente, pois procura uma justificação aceitável, baseada em um raciocínio plausível e também pelos conhecimentos dos alunos, ou seja, à medida que os mesmos possuem a necessidade de justificarem as suas afirmações, as ferramentas matemáticas vão se tornando mais sofisticadas, sendo possível a realização de pequenas provas matemáticas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Após realizarem os quatro momentos propostos, é importante que haja uma discussão da investigação obtida, pois, nessa fase, os alunos ganham entendimento do que significa investigar e também desenvolvem a capacidade de se comunicarem matematicamente, refletindo sobre o trabalho e o poder de argumentar. Os autores destacam que “sem a

discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 41).

As práticas matemáticas investigativas quando introduzidas na sala de aula

[...] parecem ser cruciais para o desenvolvimento de uma postura especulativa em matemática, podendo gerar também, um deslocamento do foco da aula, do professor para o aluno, no sentido de uma aula mais colaborativa. Atividades de investigação podem conformar uma concepção de matemática como algo dinâmico, do conhecimento matemático como em construção, através do desenvolvimento de idéias [sic] e processos, constituintes do pensar e fazer matemáticos (FROTA, 2005, p. 1-2).

Essa ideia é ratificada pelo resultado do levantamento, realizado por Santos et al., (2002) de trabalhos realizados em alguns níveis de escolaridade de Portugal que utilizaram a Investigação Matemática. As análises feitas mostraram que as aulas investigativas proporcionam novas posturas e novos olhares sobre as aulas de Matemática, bem como os cuidados que o professor deve ter na apresentação da atividade, na interação com os alunos ao decorrer da realização da mesma e, principalmente, na discussão e na partilha dos resultados. O objetivo e o nível de escolaridade em que foram aplicados cada um desses trabalhos são apresentados no Quadro 1. Tais trabalhos são de cunho qualitativo, desenvolvidos por meio de estudos de caso.

Quadro 1 – Síntese de trabalhos sobre Investigação Matemática

<b>Autor(es) e ano</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Nível de escolaridade</b>
Oliveira (1998)	Conhecer as perspectivas e as práticas de professores no desenvolvimento de investigações matemáticas.	3º ciclo (8º ano)
Ponte; Ferreira; Brunheira Oliveira; Varandas (1999)	Analisar os processos de pensamento do professor e dos alunos e as interações e os papéis assumidos por estes dois atores na proposta e na realização de investigações matemáticas.	A tarefa foi proposta a várias turmas do 3º ciclo
Brunheira (2000)	Analisar o conhecimento matemático e didático do professor estagiário associado à realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como as atitudes que manifestam, a forma como evoluem e as relações que estabelecem entre esses conhecimentos e atitudes.	3º ciclo e secundário <sup>3</sup>
Fonseca (2000)	Analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação na aula de Matemática, assim como o discurso promovido nessas mesmas aulas.	10º ano
Rocha (2000)	Compreender as percepções dos alunos face à Matemática e à calculadora gráfica e a sua relação com o uso que lhe é dado.	10º ano
Brocardo (2001)	Estudar o modo como o desenvolvimento de um currículo, em que a exploração de tarefas de investigação é encarada como metodologia privilegiada, influencia a forma como os alunos aprendem e veem a Matemática e quais os aspectos de carácter curricular que emergem da implementação de tal projeto.	3º ciclo

Fonte: SANTOS et al., 2002. Modificado.

O tempo é um fator importante que caracteriza uma aula investigativa. Deve ser disponibilizado antes e durante a realização da atividade (SILTRÃO; CRISTOVÃO, 2010).

Corradi (2008) apresenta o professor como um ator fundamental no processo educativo. Nas relações que estabelece com a Investigação Matemática, suas atitudes, seu conhecimento sobre as atividades e a condução do trabalho, em termos do envolvimento dos alunos, são determinantes no levantamento de propostas de investigação e na condução das aulas. Desempenha o papel de mediador, fazendo com que os alunos produzam uma síntese

<sup>3</sup> Em Portugal, o 3º ciclo abrange do 7º ao 9º ano e o secundário, do 10º ao 12º ano.

de suas ideias, apresentando os resultados e as argumentações de todo o processo de investigação realizado. Possui também a função de moderador e de orientador, estimulando a comunicação entre os alunos, explicando as ideias e as conclusões (CORRADI, 2008).

Oliveira, Segurado e Ponte (1998), com base no trabalho de Cunha, Oliveira e Ponte (1995), estruturaram a atuação do professor em uma aula investigativa em três partes, a saber: (i) a introdução da tarefa, feita pelo mesmo quando os alunos interpretam a situação e definem o caminho a seguir; (ii) a interação com os alunos durante a realização da tarefa, individualmente ou em pequenos grupos, e (iii) a apresentação de resultados e a discussão.

A interação que o professor estabelece com os alunos em uma atividade investigativa é bem diferente e pode levá-lo a confrontar-se com algumas dificuldades, como decisões e tempo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Sendo assim, o mesmo deve proporcionar aos discentes a autonomia necessária para não comprometer a investigação, dando tempo devido para relativizarem e conjugarem.

Skovsmose (2000) afirma que o professor é desafiado em qualquer cenário de investigação. Alerta que a solução não deve ser voltar à zona de conforto e reorganizar a atividade para o paradigma do exercício e, sim, ser hábil para atuar no novo ambiente, conduzindo a atividade de forma produtiva e convidando os alunos a cooperarem nessa zona de risco. É caracterizada por Biotto Filho (2008), como um território de incertezas e imprevisibilidade, porém um território de possibilidades, diferentemente da zona de conforto, lugar no qual tudo é conhecido, previsível e controlável.

Numa abordagem pedagógica da investigação, o professor poderá escolher a situação de partida, mas é o aluno que, em princípio, questiona a situação proposta definindo, assim, as suas próprias conjecturas (SANTOS et al., 2002).

Skovsmose (2008) destaca a participação dos alunos nesta metodologia, indicando no cenário da investigação, as seguintes características: (i) são convidados pelo professor a formularem questões e a procurarem justificativas; (ii) são corresponsáveis pelo processo de aprendizagem; (iii) usam materiais manipuláveis e novas tecnologias nas atividades de aprendizagem; e (iv) envolvem-se em projetos que poderão servir de base a investigações.

Corradi (2008, p. 165) afirma que as “situações-problema desafiadoras possibilitam ao aluno o desenvolvimento de autonomia na busca de meios para investigação”, permitindo também diferentes graus de aprendizagem em um trabalho que respeite o ritmo de trabalho de cada um.

### 1.3 O Uso das Tecnologias no Ensino de Matemática

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), nº 9.394 (BRASIL, 1996), indica, como finalidades do Ensino Médio, a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria à prática, de forma que, ao final desse nível de ensino, os alunos sejam capazes de dominar os princípios científicos e tecnológicos.

Quanto às finalidades do Ensino médio, apresentam-se: (i) a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental; (ii) a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando; (iii) o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico e (iv) a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos (BRASIL, 1996).

Para facilitar o trabalho pedagógico na busca dessas metas, tem-se como uma das possibilidades o uso de tecnologias.

Essa utilização, mesmo que desperte o interesse do aluno, não garante que haja a aprendizagem ou a absorção do conhecimento. A qualidade, o planejamento, a didática e os métodos de ensino adotados devem alicerçar essa atividade. Sendo assim, a qualificação docente e a adequação do ambiente e das ferramentas tecnológicas utilizadas, digitais ou não, são indispensáveis (TEODORO; LOPES, 2013). Ou seja, se as tecnologias forem utilizadas de forma adequada e organizada, proporcionam uma educação de qualidade (SIMON, 2013).

Hoffmann, Martins e Basso (2009, p. 2) defendem que:

Recursos manipulativos, digitais e não-digitais, podem possibilitar a exploração de propriedades observáveis pelas crianças, pois, quanto mais diversificadas forem as formas (objetos virtuais, objetos não-virtuais, desenhos, produções textuais, etc.) com as quais os alunos tenham oportunidade de manipulação livre e experimentação a fim de conhecer o objeto, operar com suas propriedades, quanto maiores forem as trocas entre os pares e com o professor, nas quais estão incluídos conteúdos atitudinais (trabalho em equipe, cooperação, respeito, solidariedade, etc), quanto mais situações-problema, nas quais os alunos encontrem significado e possam se envolver criativamente, maiores as probabilidades de que esses conceitos sejam aprendidos e não simplesmente decorados para serem repetidos.

Garcia et al. (2011, p. 82) definem que os recursos digitais “são elementos informatizados que permitem que conteúdos sejam abordados em materiais como imagens, vídeos, hipertextos, animações, simulações, páginas *web*, entre outros”. São ferramentas que

proporcionam novas práticas pedagógicas, possibilitando a interatividade entre o aluno e a atividade.

Atualmente, as tecnologias digitais estão mais presentes no cotidiano social. Seu avanço promove a incorporação no trabalho pedagógico do professor. Garcia et al. (2011) afirmam que o comportamento deste, passa por uma mudança. O que antes era um especialista e detentor do conhecimento que instrui, torna-se um profissional da aprendizagem que incentiva, orienta e motiva o aluno.

Com o uso dessas tecnologias, “a pesquisa no processo de ensino aprendizagem pode transformar o aluno em participante ativo na construção de seu conhecimento e o professor em coordenador e facilitador dessa construção” (SOARES, 2010, p. 2). Além disso, apresenta-se uma das alternativas para a educação de qualidade, sendo o foco a construção de conhecimentos (SOARES, 2010).

O número dessas ferramentas tecnológicas digitais que propiciam o desenvolvimento de atividades para o ensino e a aprendizagem é variado (TEODORO; LOPES, 2013). Mesmo não sendo uma novidade ou uma estratégia diferenciada, o emprego dessas ferramentas faz parte das opções que os docentes podem utilizar na sala de aula. Quanto ao uso dessas, é possível que os alunos estejam mais bem preparados do que os próprios professores.

Uma dessas ferramentas que apoiam o professor no processo de ensino são os computadores, pois quando são usados de forma significativa, “há um aumento na aprendizagem, na criatividade dos alunos e ainda dinamiza suas aulas de forma a ser mais interativa com os alunos” (SIMON, 2013, p. 26).

Atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e de giz são possibilitadas a partir da capacidade técnica das máquinas (MARIN, 2012). Teodoro e Lopes (2013) afirmam que não é aconselhável utilizar a tecnologia pelo simples fato de trocar a lousa pela máquina.

O uso de Tecnologia de Informação e Comunicação no ensino de Matemática é recomendado pelo fato de “ampliarem as possibilidades de atividades em que os alunos possam trabalhar com diferentes representações tais como uma tabela, gráficos e expressões algébricas, de forma rápida e articulada” (MARIN, 2012, p. 2).

Simon (2013, p. 13) acrescenta que é importante, na disciplina de Matemática, ter meios que “despertem a vontade de aprender, a curiosidade, convidando assim o aluno a aceitar desafios”.

Dentre as tecnologias digitais presentes nas aulas de Matemática, destacam-se os *applets*<sup>4</sup> e os *softwares*. Em relação ao uso de *applets* na Matemática, o mesmo permite experimentar e investigar de forma interativa, além de estabelecer conjecturas sobre conceitos, construindo-os de forma consistente (SANTOS, 2008). Quanto ao *software*, os PCN afirmam que o seu uso possibilita pensar, refletir e criar soluções (BRASIL, 1998).

Neste trabalho, a escolha do *software* GeoGebra, se deve ao fato do mesmo ser de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino reunindo Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em uma interface fácil de usar. Dessa forma, possui a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si, ou seja, permitem que o usuário crie objetos e ao mesmo tempo tenha acesso às informações algébricas e geométricas.

Os seus recursos permitem que o usuário exporte os projetos construídos em diversos formatos como PDF, GIF, PNG, entre outros. É possível, ainda, criar *applets* dinâmicos que posteriormente poderão ser publicados em páginas de *web* e, também, utilizados em Ambientes Virtuais de Aprendizagem. Podem ser acondicionados em um repositório denominado GeoGebraTube, que conta com diversos materiais como apresentação interativa e jogos disponíveis a qualquer usuário.

Lira (2011) afirma que se os conceitos de transformação geométrica são abordados fazendo o uso de materiais manipulativos esse processo se torna mais atrativo e interessante. Quanto ao *software*, é um recurso facilitador no qual “a multiplicação de matrizes pode ser visualizada como uma composição de transformações geométricas, permitindo assim, uma visualização deste conteúdo algébrico” (BARBOSA, 2013, p. 40).

Mesmo com a diversidade de tecnologia digital, “será que aquilo que tanto nos foi útil agora não é mais?” (BRAGA, 2013, p. 30). Em resposta à pergunta, acredita-se que o uso de materiais não digitais continua a auxiliar a aprendizagem dos alunos e despertar o seu interesse.

Há décadas são discutidas a implantação, em sala de aula, e a importância do uso de materiais concretos para a aprendizagem (BRAGA, 2013). Esse autor defende que os materiais não digitais favorecem a interação entre os alunos e os conceitos matemáticos, independentemente da sua abordagem nos livros didáticos.

---

<sup>4</sup> São programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML (DEITEL, H.; DEITEL, P., 2003).



Para esse trabalho monográfico, foram utilizadas as seguintes tecnologias: materiais manipulativos, *software* GeoGebra<sup>5</sup> e *applets*. Quando os recursos de tecnologias digitais e não digitais são utilizados de forma complementar, permitem que os alunos explorem propriedades que podem ser observadas ora nos desenhos e a partir da utilização do material manipulado, ora a partir das imagens e da manipulação de objetos digitais, como *softwares* de geometria dinâmica, ambiente que é possível construir, reconstruir e movimentar os objetos analisados (BRAGA, 2013).

#### 1.4 Estudos Relacionados

Nesta seção, serão apresentadas quatro pesquisas que envolvem o estudo das transformações geométricas, algumas abordando o conteúdo de matrizes, tema tratado neste trabalho monográfico.

A primeira delas é a dissertação “Estudando matrizes a partir de transformações geométricas”, escrita por Vandoir Stormowski e orientada pelo Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, em 2008, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Stormowski (2008) relata que a definição do tema de sua dissertação foi demorada e que, ao desenvolver a sequência didática, precisava se opor a um currículo linear e compartimentado. Sendo assim, seu trabalho teve por objetivo elaborar uma sequência didática para o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas, em uma abordagem que justifique as definições das operações entre matrizes e valorize aspectos da história da matemática. Apresenta também uma aplicação de matrizes sobre a geração de algumas figuras fractais no *software* Shapari.

A metodologia utilizada por esse autor foi a Engenharia Didática. Para Stormowski (2008), o objetivo foi alcançado, uma vez que as definições das operações entre matrizes e suas propriedades foram justificadas a partir da análise das transformações geométricas. E, a partir do estudo da composição de transformações, obteve-se a definição das operações entre matrizes, tal como ocorreu na história da matemática.

A dissertação de Stormowski (2008) possui pontos em comum com este trabalho monográfico, como o estudo diferenciado sobre o conteúdo de matrizes, utilizando as transformações geométricas e o público-alvo que são alunos do Ensino Médio. As principais

---

<sup>5</sup> Disponível em: <http://www.geogebra.org/about> Acesso em: 15 out. 2014. Utilizou-se para este trabalho a versão GeoGebra 4.4.

diferenças estão na metodologia de ensino, na sequência didática e na quantidade de encontros para a experimentação da mesma.

O segundo trabalho analisado foi a monografia intitulada “A Matemática dos espelhos: proposta para o ensino-aprendizagem de matrizes utilizando transformações geométricas” de Ana Cláudia de Brito Lira, orientada pela Prof<sup>a</sup> M.Sc. Maria da Conceição Vieira Fernandes, em 2011, pela Universidade Estadual da Paraíba.

Lira (2011) apresenta uma proposta didática para o ensino de matrizes considerando sua relação com as transformações geométricas e utiliza como recurso didático espelhos. Pretende responder as seguintes questões de pesquisa: O uso de espelhos auxilia no ensino aprendizagem de matrizes? Mostrar as relações entre matrizes e transformações geométricas contribui para ampliar a aprendizagem de matrizes? Foram abordados três tipos de transformações: isométricas, isomórficas e anamórficas.

Para a aplicação da proposta, em todas as etapas, os alunos ficaram dispostos ora em grupos de quatro pessoas, ora em duplas, fato que diferencia deste trabalho monográfico, visto que os alunos ficaram sentados individualmente. Difere também nos recursos utilizados, pois, neste trabalho, utilizaram-se outros materiais manipulativos, o *software* GeoGebra e *applets*, e não foram exploradas as transformações anamórficas. Porém, houve pontos comuns: (i) a utilização da malha quadriculada, (ii) a apresentação de algumas figuras e (iii) o uso de tabelas para relacionar as coordenadas por pontos da figura inicial e da transformada.

A próxima pesquisa analisada foi escrita por Rodrigo da Cruz, intitulada “Ensino de multiplicação de matrizes via transformações geométricas”, orientada pela Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Virgínia Maria Rodrigues, em 2013, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Cruz (2013) afirma que a justificativa para a escolha do tema teve, como base, uma experiência vivida no estágio quando, ao planejar uma aula sobre o conteúdo de multiplicação de matrizes, não encontrou referência para justificar aos alunos porque o produto de duas matrizes não é realizado de maneira análoga à adição.

Sendo assim, a monografia teve como objetivo verificar se as transformações geométricas contribuem com o ensino e a aprendizagem no estudo de multiplicação de matrizes. Para tanto, utilizou-se o *software* GeoGebra a fim de garantir a representação algébrica e geométrica da multiplicação de matrizes.

A análise dos recursos algébricos e geométricos do *software* GeoGebra também foi explorada neste trabalho monográfico. A metodologia de ensino empregada, o difere do trabalho de Cruz.

O último trabalho analisado é intitulado “O ensino de funções e de transformações geométricas com o auxílio do *software* GeoGebra”, escrito por Igor Cunha e Priscila Moraes e orientado pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vera Clotilde Garcia, em 2008, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O objetivo da pesquisa foi estudar as funções e sua relação com as transformações geométricas euclidianas no plano. Utilizou-se *software* GeoGebra e adotou-se, como metodologia de ensino, a Engenharia Didática. A questão de pesquisa foi: Introduzir os conceitos das transformações geométricas euclidianas no plano e identificar seus efeitos sobre figuras do plano, pode contribuir para ampliar este significado, levando o aluno a perceber função como uma relação qualquer entre conjuntos quaisquer, cuja única condição é ser unívoca?

As principais diferenças em relação a este trabalho monográfico foram a metodologia de ensino adotada e o conteúdo abordado.

## 2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de pesquisa adotada no presente trabalho monográfico e a elaboração da sequência didática.

A pesquisa realizada foi de caráter qualitativo e desenvolvida por meio de um estudo de caso com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes.

### 2.1 Caracterização da Pesquisa

Pesquisa qualitativa é “[...] um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação” (OLIVEIRA, 2010, p. 37). Tem por objetivo coletar dados descritivos, abordando elementos existentes no ambiente estudado sem que haja qualquer manipulação do pesquisador nesse processo (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Allevato (2008, p. 184) declara que “a ênfase qualitativa no processo vem sendo apontada como particularmente útil e adequada a pesquisas educacionais”. Afirma que essa metodologia possibilita uma postura mais aberta em relação aos dados, dando mais importância a interpretação do que até mesmo aos resultados.

Uma das formas como a pesquisa qualitativa pode se desenvolver é por meio do estudo de caso, que foi utilizado neste trabalho monográfico. Este “permite que os investigadores retenham as características holísticas e significativas dos eventos da vida real” (YIN, 2010, p. 24).

Na Educação Matemática, para Ponte (2006), os estudos de casos são usados para investigar o conhecimento adquirido dos alunos e também das práticas dos professores, em sua formação inicial e contínua, projetos de inovação curricular, entre outros.

Esse método tem por objetivo “entender em profundidade o ‘como’ e os ‘porquês’ de uma entidade no seu contexto real, evidenciando a sua identidade e suas características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador” (PONTE, 2006, p. 2). Neste trabalho monográfico, a entidade foi um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma instituição pública de Campos dos Goytacazes. Além disso, a utilização desse método

assume uma investigação que descobre o que existe de mais importante e significativo e, assim, pode colaborar para a compreensão total de determinado fato (PONTE, 2006; OLIVEIRA, 2010).

O problema central é a escolha do objeto de pesquisa. Neste trabalho, o problema consiste em relacionar os conceitos de operações com matrizes e seus tipos com os das transformações geométricas planas.

As técnicas de coleta de dados adotadas nesta pesquisa são: (i) observação, que segundo Creswell (2010, p. 214) “[...] são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa”. Com essa técnica, o pesquisador precisa registrar as informações observadas mais relevantes, para posteriormente desenvolvê-las melhor (MOREIRA; CALEFFE, 2008); (ii) registros das respostas dos alunos; (iii) anotações descritivas e reflexivas, que descrevem a atividade e também incluem as observações pessoais do pesquisador durante a coleta de dados (MOREIRA; CALEFFE, 2008), e (iv) gravação em áudio.

Com o intuito de responder a questão de pesquisa, elaborou-se uma sequência didática, composta por onze Atividades, abordando dois tipos de transformações geométricas: as isométricas (reflexão, translação, rotação) e a isomórfica (homotetia). Para essa elaboração delinear-se cinco etapas, a saber:

(i) Investigação Inicial com material manipulativo, *software* GeoGebra e *applets*. Essa etapa tem por objetivo levar o aluno, por meio do uso do material manipulativo e do *software*, a conjecturar, a generalizar e a formalizar definições para as diversas transformações apresentadas. Pretende-se trabalhar com o material manipulativo como um facilitador na visualização dessas transformações, com o *software* no reforço e no complemento de situações em que essa manipulação apresenta limitações e com os *applets* na visualização e na generalização.

(ii) Transformações Geométricas e Matrizes. Essa etapa tem por objetivo relacionar as transformações isométricas às matrizes correspondentes. As matrizes de reflexão e de rotação são apresentadas enquanto, na translação, o aluno investiga a forma de encontrar os pontos de uma figura transladada a partir de uma figura dada e ao final determina a matriz dessa transformação. Em todos os casos, o aluno associa as transformações feitas anteriormente no *software* com as matrizes correspondentes.

(iii) Matriz e Computação Gráfica. O objetivo dessa etapa é mostrar uma aplicação, na Computação Gráfica, da relação entre transformação geométrica e matrizes.

(iv) Transformações Geométricas e Matrizes Especiais. A partir da relação entre uma figura e sua matriz, pretende-se levar o aluno a perceber o efeito que as matrizes oposta, transposta e diagonal (com elementos iguais na diagonal principal), causam na figura.

(v) Questões envolvendo matrizes e transformações geométricas. Nessa etapa, são revistos os conceitos apresentados durante todo o trabalho por meio de exercícios.

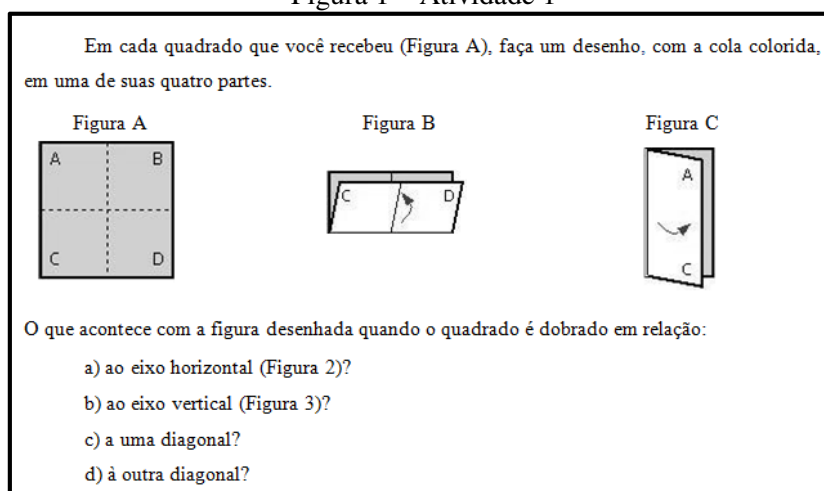
Na próxima seção, apresentam-se as Atividades que compõem cada uma dessas etapas bem como seus objetivos.

## 2.2 Elaboração da Sequência Didática

Para a primeira etapa, desenvolveram-se oito Atividades, quatro com investigações feitas a partir do uso do material manipulativo e as outras com o auxílio do *software* GeoGebra. Essas últimas foram elaboradas como um tutorial para que os alunos efetuassem as transformações geométricas a partir dos comandos do *software*.

A Atividade 1 (APÊNDICE A) explora a reflexão com material manipulativo em quatro itens. Esses materiais são uma cola colorida e quatro quadrados. O aluno deve fazer um desenho com a cola colorida em qualquer parte do quadrado (como mostra a figura A da Figura 1) e dobrá-lo em relação ao eixo horizontal, ao eixo vertical, a uma diagonal e à outra diagonal, separadamente (Figura 1). A partir dessa manipulação, os alunos se familiarizam com os dados e se apropriam do sentido da tarefa. Assim, podem formular conjecturas sobre a definição (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Figura 1 – Atividade 1



Fonte: Elaboração própria.


A Atividade 2 (APÊNDICE A) também aborda a reflexão, mas com o auxílio do *software* (Figura 2). Nessa, relaciona-se cada dobradura feita na Atividade 1 com as reflexões de uma figura (Figura 3) em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , às retas  $y = x$  e  $y = -x$  e ao ponto  $(0,0)$  de forma a formularem conjecturas.


Figura 2 – Parte da Atividade 2

**ATIVIDADE 2**

Com o auxílio do *software* GeoGebra, faça o que se pede:


a) Abra o arquivo “Reflexão a”.


Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação ao **EixoX**.

Obs.: **selecione primeiro o objeto (figura) e, depois, a reta de reflexão (EixoX).**

b) Abra o arquivo “Reflexão b”.

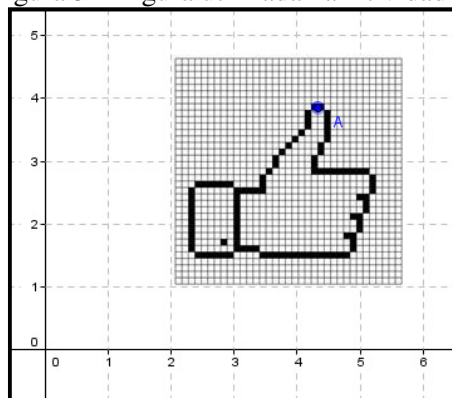
Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação ao **EixoY**.

Obs.: **selecione primeiro o objeto (figura) e, depois, a reta de reflexão (EixoY).**

Fonte: Elaboração própria.

Figura 3 – Figura utilizada na Atividade 2






Fonte: Elaboração própria.

Além disso, é sugerido que atentem para a *Janela de Álgebra* e percebam a relação entre as coordenadas dos pontos da figura inicial com seus correspondentes nas figuras transformadas.

Também, por meio de investigação, é pedido que façam a reflexão em relação ao ponto  $(0,0)$  por dois métodos: refletindo a figura em relação ao eixo  $x$  e, posteriormente, em relação ao eixo  $y$ , e utilizando o comando *Reflexão em Relação a um Ponto* (Figura 4).

Figura 4 – Parte da Atividade 2

e) Abra o arquivo "Reflexão e".  
 Refaça o item *a* e, a partir da figura obtida, repita os passos do item *b*. Após esse procedimento, você encontrará uma figura que nomearemos de Figura A.  
 Minimizar a janela do GeoGebra.

f) Abra o arquivo "Reflexão f".  
 Selecione a ferramenta  e marque o ponto A  $(0,0)$   
 Clique na seta do comando   
 Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação a este ponto.  
 Considere a figura transformada como sendo a figura B.

Obs.: **selecione primeiro o objeto (figura) e, depois, ao centro de reflexão (ponto A).**

- De acordo com os itens *e* e *f*, o que você observa em relação a posição e a forma das figuras A e B?

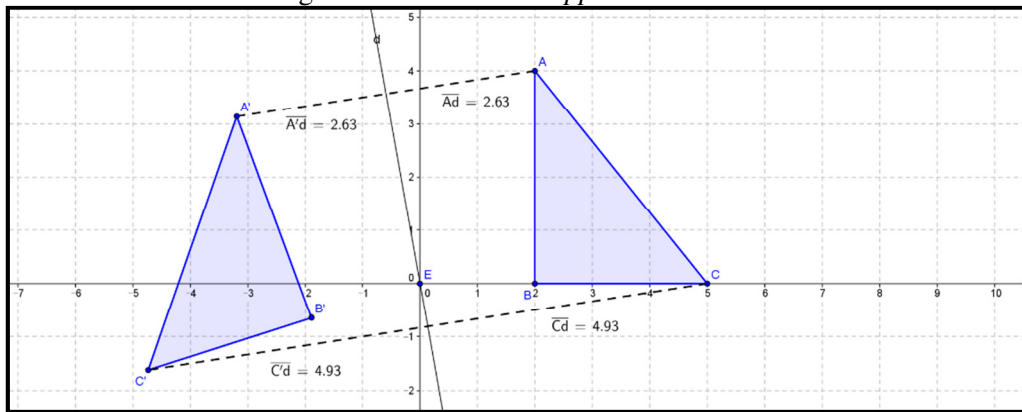
Fonte: Elaboração própria.

Com o intuito de ampliar o conhecimento, é perguntado o que aconteceria com a figura transformada, se a ordem da composição de transformações, no primeiro método, fosse invertida.

Com isso, é possível fazer conjecturas sobre refletir uma dada figura em relação à origem, visto que no material manipulativo a visualização desta não apresentaria clareza.

Utiliza-se um *applet* (Figura 5) para auxiliar a visualização e a generalização dessas reflexões possibilitando a formalização da definição dessa transformação.

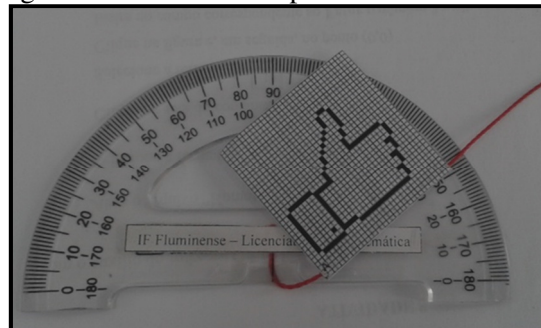


Figura 5 – Interface do *applet* de reflexão

Fonte: LIMA, J. Reflexão do triângulo ABC pela reta DE (reta d), 2012. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/material/show/id/4466>> Acesso em: 17 mar. 2014. Adaptado.

A próxima transformação explorada é a rotação, proposta na Atividade 3 (APÊNDICE B). O material manipulativo é um transferidor com uma figura e uma linha fixada no mesmo (Figura 6). Espera-se que o aluno perceba quantos graus a figura da questão (Figura 3) rotacionou.

Figura 6 – Material manipulativo da Atividade 3



Fonte: Elaboração própria.

Na Atividade 4 (APÊNDICE B), utilizando a mesma figura da reflexão (Figura 3) na *Janela de Visualização*, é pedido aos alunos que marquem o ponto (0,0), depois insiram no campo correspondente ao *Ângulo* o valor  $28^\circ$  e façam o giro no sentido anti-horário, utilizando a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. O *software* permite que visualizem ângulos maiores que  $180^\circ$  e também alterem o centro de rotação. Pede-se que os mesmos façam a rotação dessa figura com um ponto distinto do anterior e um ângulo obtuso; e outra com ponto e ângulo distintos dos demais, para construir, assim, o conceito de rotação (Figura 7). Espera-se que, com a manipulação dos dados, os alunos comecem a indicar uma


conjectura, para que posteriormente não sejam surpreendidos com casos que não se adequem às mesmas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).


Figura 7 – Parte da Atividade 4


**ATIVIDADE 4**

Com o auxílio do *software* GeoGebra, faça o que se pede:

a) Abra o arquivo “Rotação a”.

Selecione a ferramenta  e marque o ponto (0,0)

Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  **Rotação em torno de um ponto.**

Clique na figura e, em seguida, no ponto (0,0)

Insira no campo correspondente ao **Ângulo**, 28°

Marque a opção **sentido anti-horário** e clique em **Ok**.


O que você observou?

---

Fonte: Elaboração própria.

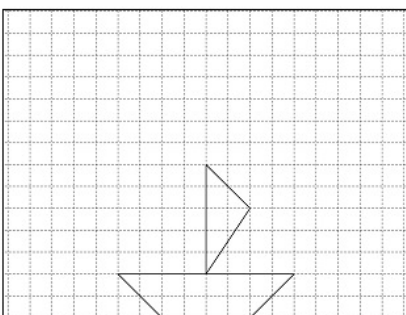
A transformação translação é abordada na Atividade 5 (APÊNDICE C). Em cada item dessa Atividade, apresenta-se a figura de um barco em uma malha quadriculada. O aluno deve desenhá-la, considerando o deslocamento indicado pela quantidade de unidades e adotando o lado do quadrado como uma unidade de medida (Figura 8).

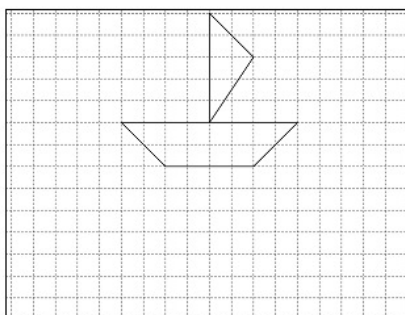
Figura 8 – Parte da Atividade 5

Na malha quadriculada utilizada nos itens abaixo, considere cada lado do quadrado  como uma unidade de medida. A seguir, desenhe cada uma das figuras apresentadas, com um deslocamento de:

a) 3 unidades para cima.

b) 5 unidades para baixo.






Fonte: Elaboração própria.


A seguir, são feitas, na Atividade 6 (APÊNDICE C), atividades com o *software*, cujo objetivo é fazer com que o aluno perceba as distâncias entre as abscissas e as ordenadas da figura dada e da figura transformada, ou seja, fazer com que os alunos percebam que a imagem de um barco, que aparece na *Janela de Visualização*, desloca-se de acordo com uma direção, um sentido e uma distância, conforme a manipulação de um vetor. Este foi construído com origem no ponto  $(-2, 2)$ . A escolha desse deve-se à sua localização fora da figura, proporcionando uma melhor visualização ao executar a movimentação do vetor (Figura 9).

Figura 9 – Atividade 6


Com o auxílio do *software* GeoGebra:


Abra o arquivo "Translação"

Clique na seta do comando 


Selecione a ferramenta  **Vetor** e construa um vetor qualquer com origem no ponto  $(-2,2)$ .


**Obs.: selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade.**

Clique na seta do comando 

Selecione a ferramenta  para fazer a translação dessa figura em relação a esse vetor.

**Obs.: selecione primeiro o objeto (figura) a ser transladado e, depois, um vetor ( $\vec{IJ}$ ).**


Clique na seta do comando 

Selecione a ferramenta  **Segmento** e clique os vértices correspondentes (Ex: A e A').

Clique com o botão esquerdo sobre cada um dos segmentos.

Selecione a opção Propriedades e a seguir a caixa **Exibir Rótulo**.

Troque a palavra **Nome** por **Valor**.

Clique em um dos pontos do vetor com a ferramenta  selecionada e arraste este ponto.

O que você pode observar:

---



---

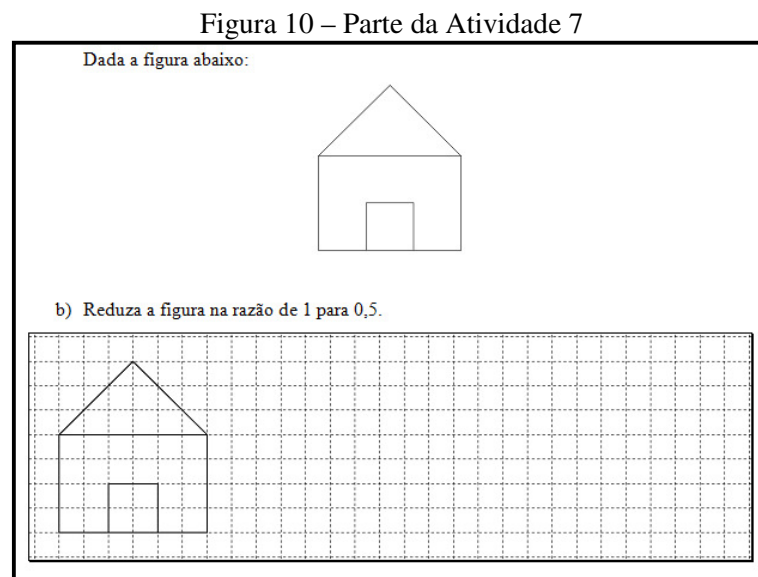
Fonte: Elaboração própria.

Após, pede-se que transladem a figura utilizando o comando *Translação por um Vetor*, selecionando-a e posteriormente clicando no vetor.

Em seguida à realização da transformação é pedido que: (i) selecionem a ferramenta *Segmento* e cliquem nos vértices correspondentes unindo-os, de forma que observem que os segmentos possuem a mesma direção e sentido do vetor, e (ii) habilitem o comando *Exibir Rótulo* do valor corresponde a cada segmento, para que percebam que este é o módulo do vetor.

A diversidade dos vetores que irão surgir enriquece a investigação, fazendo com que os alunos percebam que as distâncias entre as abscissas e as ordenadas das figuras dadas e transformadas serão iguais, o que auxilia na construção da definição dessa transformação.

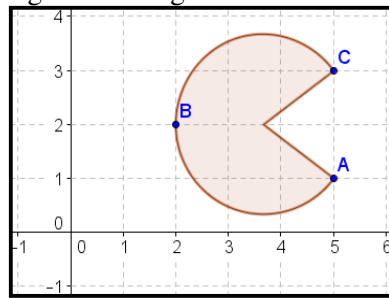
Por último, a homotetia é trabalhada na Atividade 7 (APÊNDICE D), utilizando novamente a malha quadriculada. Tem por objetivo que os alunos ampliem e reduzam a figura de uma casa (Figura 10).



Fonte: Elaboração própria.

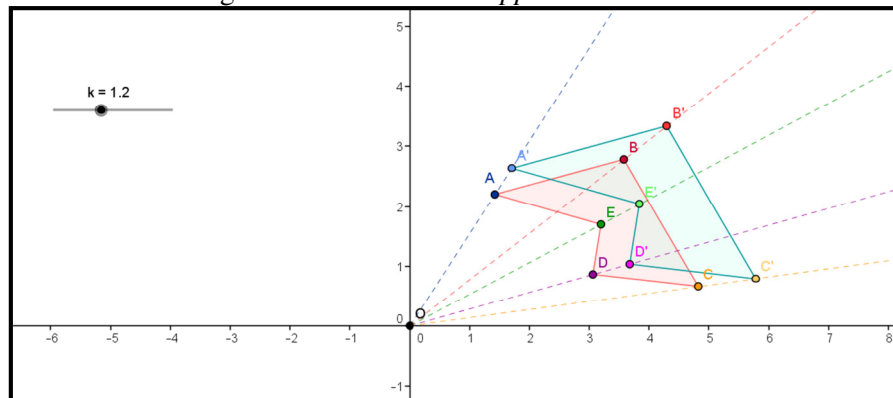
Após serem abordados os conceitos de ampliação e redução na Atividade 7, com o auxílio do *software*, na Atividade 8 (APÊNDICE D), é pedido que criem o ponto (0,0) fora da imagem dessa Atividade (Figura 11), apresentada na *Janela de Visualização*, e cliquem no comando *Homotetia*, no qual é preciso selecionar a figura, o ponto e depois inserir o valor de um fator maior que 1. Em seguida, os alunos refazem a transformação anterior utilizando um fator entre zero e um. Como o *software* possibilita a alteração do centro de Homotetia, pede-se que façam outra transformação com ponto e fator distintos das demais. Ao final, é solicitado aos alunos que investiguem a relação entre a forma e o tamanho da figura transformada com o fator. Finalizando a investigação, pergunta-se o que acontece se o fator for igual a um.

Figura 11 – Figura da Atividade 8



Fonte: Elaboração própria.

Para auxiliar a visualização, a generalização e, conseqüentemente, a construção da definição dessa transformação, é apresentado um *applet* (Figura 12) no qual, ao movimentar o seletor que representa o fator da homotetia, mostra-se a variação da figura.

Figura 12 – Interface do *applet* de homotetia

Fonte: PORCINO, W. Homotetia: visualizando, 2012. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/material/show/id/17744>> Acesso em: 17 mar. 2014. Adaptado.

Assim, com essas Atividades, inicia-se o primeiro momento da Investigação Matemática, exploração e formulação de questões, na qual deve-se explorar a situação-problema. Após, pretende-se levar o aluno a formular conjecturas, segundo momento da Investigação Matemática.

As Atividades que envolvem o GeoGebra apresentam uma boa visualização de cada transformação, auxiliando os alunos numa possível reformulação de ideias, terceiro momento da Investigação Matemática.

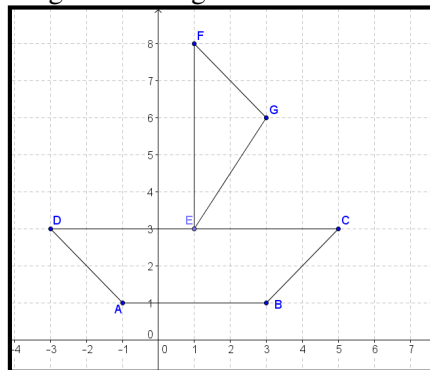
A partir de discussões feitas após cada investigação, é possível justificar as conjecturas e formular definições, finalizando o quarto momento da Investigação Matemática.

Para a segunda etapa, Transformações Geométricas e Matrizes, desenvolveu-se a Atividade 9 (APÊNDICE E), abordando a reflexão, a rotação e a translação. Relacionou-se

cada transformação feita anteriormente com as matrizes correspondentes, com exceção da reflexão em relação ao ponto (0,0).

Primeiramente, aborda-se a reflexão em relação ao eixo  $x$  com o uso do GeoGebra. Após refletir os pontos da imagem da Atividade 9 (Figura 13) em relação a esse eixo, é apresentada a matriz de reflexão.

Figura 13 – Figura da Atividade 9



Fonte: Elaboração própria.

Nesse momento, pede-se aos alunos que registrem (Figura 14) cada ponto destacado na figura e o seu transformado. A seguir, que multiplique a matriz de reflexão por um ponto genérico. Os alunos podem perceber que as coordenadas dos pontos transformados são iguais aos da figura obtida pela transformação no *software*. O mesmo é feito em relação ao eixo  $y$ .

Figura 14 – Uma das tabelas de registros da Atividade 9

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(-1,1)		A'
B	(3,1)		B'
C	(5,3)		C'
D	(-3,3)		D'
E	(1,3)		E'
F	(1,8)		F'
G	(3,6)		G'

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, é abordada a rotação. Apresenta-se a matriz dessa transformação e os alunos desenvolvem questões para determinar as coordenadas de um novo ponto a partir do ângulo de rotação, do sentido e das coordenadas de um ponto a ser transformado (Figura 15). Nessa transformação não se utilizou o *software*.

Figura 15 – Parte da Atividade 9 referente a rotação

• **Rotação**

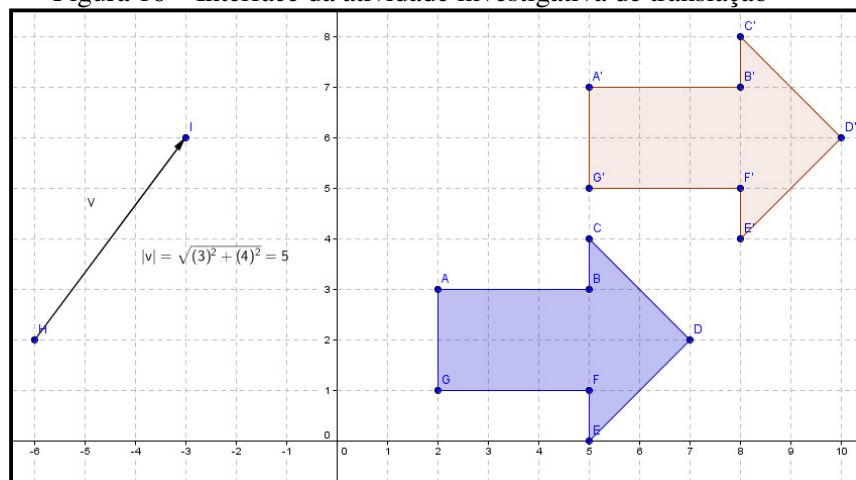
Para rotacionar um ponto  $(x, y)$ ,  $\alpha$  graus, no sentido anti-horário e em torno da origem, é feita a multiplicação da matriz  $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  pela matriz  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , gerando uma matriz  $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  com a nova posição  $(x', y')$  dos pontos após a rotação:  $P' = RP$ .

1. Qual seria o novo ponto após uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário do ponto  $(-1, 7)$ ?

Fonte: Elaboração própria.

Após, a transformação apresentada é a translação. Com o uso do GeoGebra, translada-se a figura de uma seta (Figura 16), segundo um número determinado de unidades e pede-se para observar a relação entre as abscissas dos pontos, da figura inicial e da transladada. O mesmo é feito em relação às ordenadas.

Figura 16 – Interface da atividade investigativa de translação



Fonte: Elaboração própria

A seguir, os alunos investigam de que forma, usando matrizes, podem obter qualquer ponto genérico transladado considerando um ponto inicialmente dado (Figura 17). Por fim, determinam a matriz de translação e a aplicam em duas atividades. Na primeira, os alunos determinam as coordenadas dos pontos destacados na figura após a translação indicada em cada item e, na segunda, a partir das coordenadas de um ponto e do seu transladado, determinam a matriz de translação.

Figura 17 – Parte da Atividade 9

4. Utilizando operações com matrizes de que forma podemos encontrar o ponto

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ a partir do ponto } A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ?$$

Fonte: Elaboração própria.

Para a terceira etapa, Matriz e Computação Gráfica, ilustraram-se algumas das transformações estudadas. São apresentados *slides* com o personagem *Blu* do filme Rio 2. Para cada uma, apresenta-se a ilustração do personagem sobre o plano cartesiano e a matriz associada ao movimento (Figura 18).

Figura 18 – Slides, com o personagem *Blu*, para ilustrar algumas transformações geométricas

Fonte: Elaboração própria.

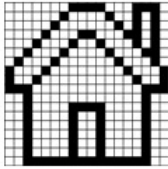


Para a quarta etapa, Transformações Geométricas e Matrizes Especiais, desenvolveu-se a Atividade 10 (APÊNDICE F) para dar continuidade à associação entre matrizes e transformações geométricas, na qual são destacadas as matrizes oposta, transposta e diagonal.

Elaboraram-se três questões. A primeira trata de uma aplicação que é a representação das imagens na tela por meio de *pixels*. O aluno deve perceber como ficará a figura quando associada à sua matriz oposta ou transposta (Figura 19), neste caso observando as reflexões em relação à origem e à reta  $y = -x$ , respectivamente. É importante ressaltar que os alunos dispõem da figura em mão, para ajudar na manipulação.

Figura 19 – Questão 1 da Atividade 10

Considere a matriz A:

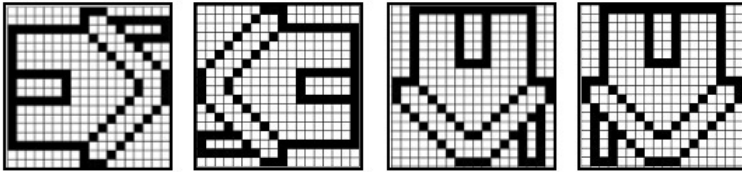
$A = (a_{i,j}) =$  

Identifique nas figuras abaixo:

(a) A matriz  $-A$  (oposta de A).

(b) A matriz  $A^t$  (transposta de A).

( ) ( ) ( ) ( )

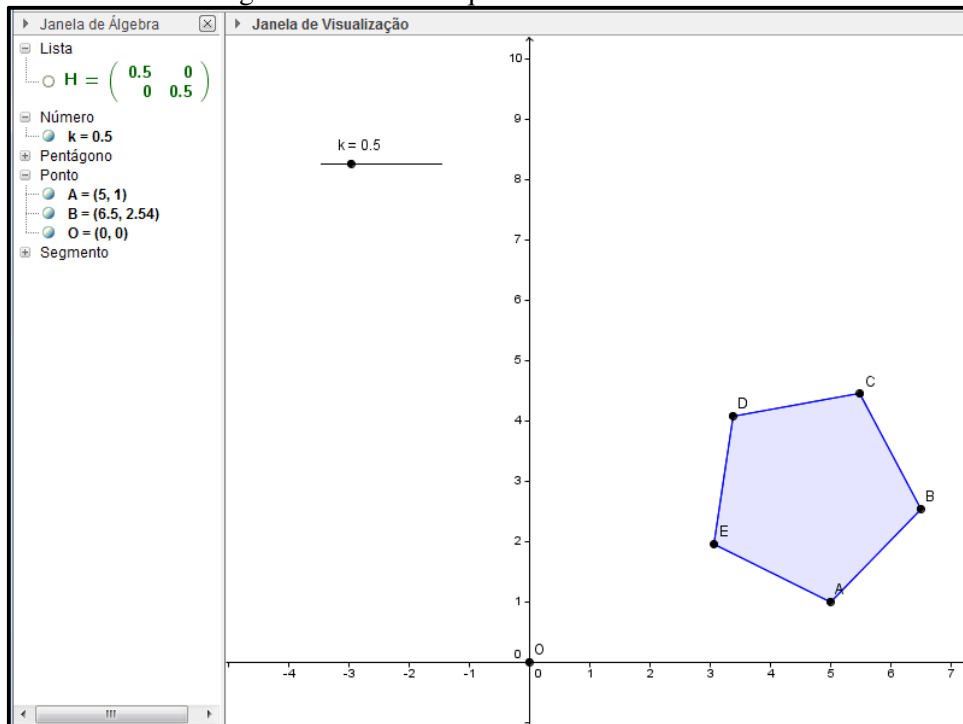


Fonte: Elaboração própria.

Na segunda, o aluno, utilizando o GeoGebra, investiga que transformação geométrica ocorre quando se efetua um produto de uma matriz por uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais.

Para tanto, é utilizada a figura de um pentágono, o ponto O (0,0) e uma matriz diagonal H de ordem 2, cujos elementos da diagonal principal são iguais à constante do seletor dado (Figura 20). Após, é pedido que construam semirretas partindo do ponto O, passando pelos vértices do pentágono. Depois, solicita-se que efetuem a multiplicação da matriz H por uma matriz formada pelos pontos de cada vértice.

Figura 20 – Parte da questão 2 da Atividade 10

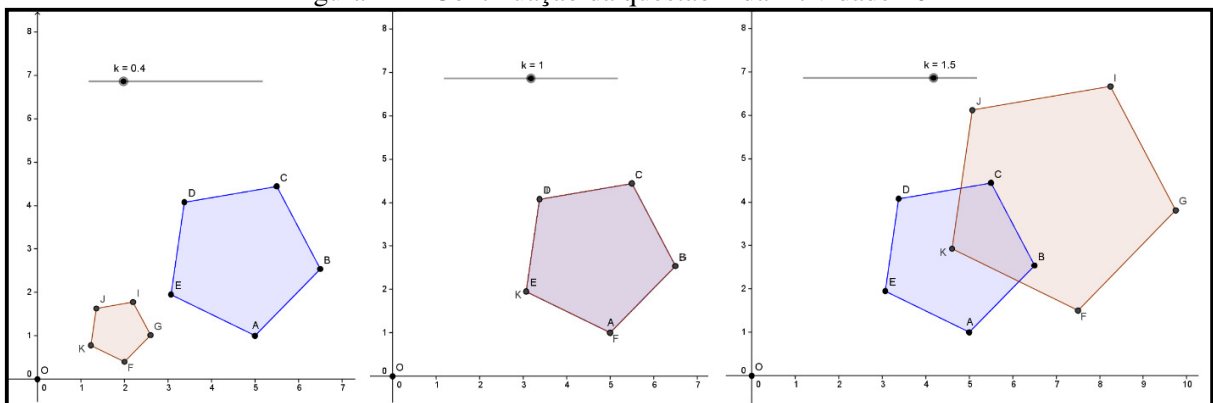


Fonte: Elaboração própria.

Dando continuidade à Atividade, cria-se um polígono com os vértices obtidos pela multiplicação e pergunta-se qual a relação do polígono construído com o inicial.

Para finalizar, é pedido aos alunos que movimentem o seletor  $k$  e verifiquem o que acontece com a figura quando  $0 < k < 1$ ,  $k = 1$  e  $k > 1$  (Figura 21).

Figura 21 – Continuação da questão 2 da Atividade 10



Fonte: Elaboração própria.


Em todas as questões são apresentadas as definições das matrizes correspondentes.

Para a quinta etapa, Questões envolvendo matrizes e transformações geométricas, elaborou-se a Atividade 11 (APÊNDICE G), composta por cinco questões.

A primeira questão (Figura 22) tem por objetivo perceber quantos graus a figura rotacionou.

Figura 22 – Primeira questão da Atividade 11

1. (IMENES; LELLIS, 2006) Na fotografia, você vê algo muito raro no Brasil. É um cristal de neve.



Percebe-se que essa figura tem simetria de rotação de:

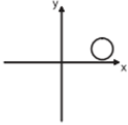
a)  $15^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $90^\circ$       d)  $60^\circ$       e)  $45^\circ$

Fonte: Elaboração própria.

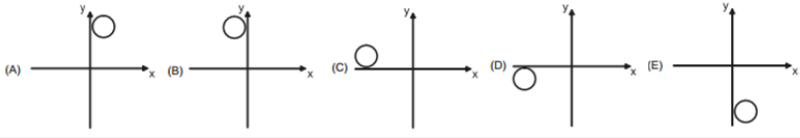
A segunda questão (Figura 23) relaciona a Álgebra com a Geometria e pretende associar a transformação indicada pela equação dada com a nova posição da circunferência.

Figura 23 – Segunda questão da Atividade 11

2. (Prominp, 2012)



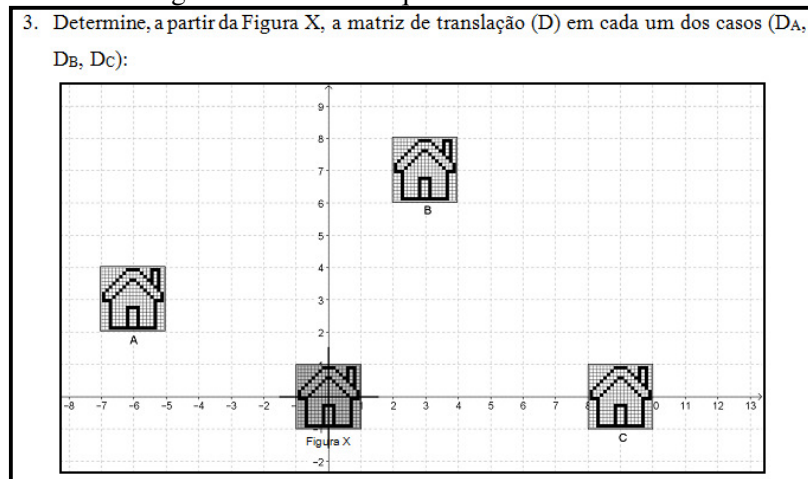
Aplicando a transformação  $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  a todos os pontos da circunferência da figura, obtém-se como imagem



Fonte: Elaboração própria.

O objetivo da terceira questão (Figura 24) é descobrir as matrizes de translação que geraram as figuras A, B e C a partir da matriz da Figura X

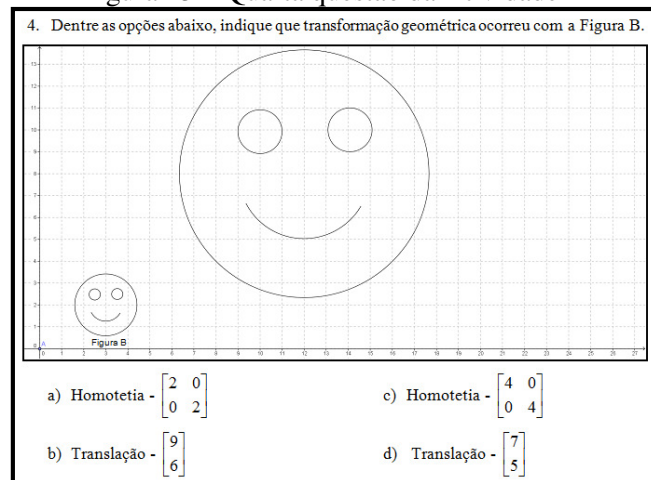
Figura 24 – Terceira questão da Atividade 11



Fonte: Elaboração própria.

Na quarta questão (Figura 25), pretende-se determinar qual transformação ocorreu com a *Figura B* e qual a matriz associada.

Figura 25 – Quarta questão da Atividade 11

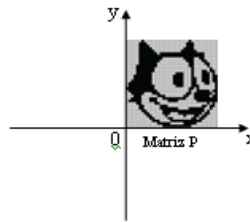


Fonte: Elaboração própria.

A última questão (Figura 26) tem por objetivo associar cada figura à transformação correspondente bem como a matriz dessa transformação.

Figura 26 – Quinta questão da Atividade 11

5. (UFF - Adaptado)<sup>1</sup> A figura abaixo representa a matriz P e ilustra o desenho do Gato Félix em um sistema de eixos coordenados.



Considere as seguintes transformações geométricas:

I é a transformação identidade,

X é a reflexão em torno do eixo  $x$ ,

Y é a reflexão em torno do eixo  $y$ ,

T é a transposta de P,

$R_{90}$  é a rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem O,

$R_{180}$  é a rotação de  $180^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem O e

$R_{270}$  é a rotação de  $270^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem O.

Cada uma das figuras abaixo foi obtida a partir dessas transformações ou uma composição das mesmas.

Indique na segunda linha do quadro abaixo a transformação (ou a composição de transformações) que foi utilizada para obter cada uma dessas figuras, e na terceira linha a matriz correspondente a cada uma das transformações:


Fonte: Elaboração própria.

### 3 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir do teste exploratório e da experimentação da sequência didática.

#### 3.1 Teste Exploratório

Para a aplicação do teste exploratório, foram convidados os alunos de todos os períodos ímpares<sup>6</sup> do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do município de Campos dos Goytacazes. Os licenciandos do primeiro período tiveram um papel importante pelo fato de não conhecerem o *software* GeoGebra e também por se aproximarem mais da realidade dos alunos da 3ª. série do Ensino Médio, público-alvo dessa pesquisa. Além disso, juntos com os demais períodos, puderam analisar a clareza dos enunciados das Atividades, o grau de dificuldade das mesmas e a metodologia de ensino adotada, a Investigação Matemática.

O teste foi dividido em dois encontros. O primeiro ocorreu no dia 15 de abril de 2014 e teve duração de três horas e meia, contando com a participação de 15 licenciandos. No segundo, realizado em 16 de abril de 2014, estiveram presentes 13 licenciandos, com duração de quatro horas.

##### 3.1.1 Primeiro encontro

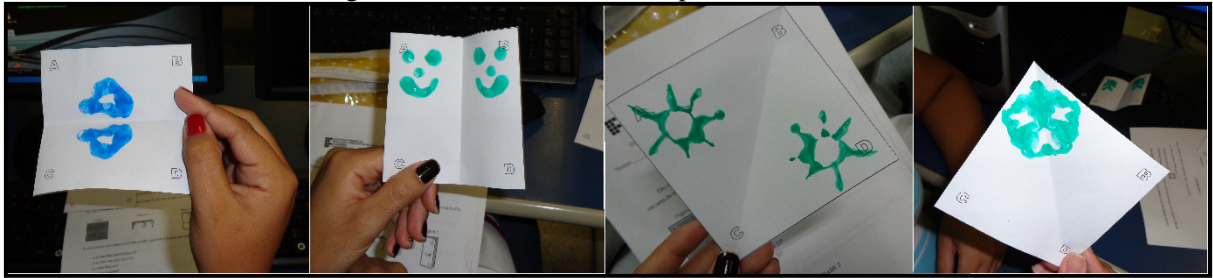
No primeiro encontro, foram explorados os conceitos das transformações geométricas – reflexão, rotação, translação e homotetia – por meio do uso de material manipulativo, do *software* GeoGebra e *applets*.

A Atividade 1 trata da reflexão com o uso do material manipulativo. Para a realização dessa, foram entregues uma cola colorida e quatro quadrados. Um quadrado foi para investigar a reflexão em relação ao eixo horizontal, outro, em relação ao vertical, outro, em relação a uma diagonal e o último para a outra diagonal (Figura 27).

---

<sup>6</sup> Na Instituição, a entrada para o curso de Licenciatura em Matemática ocorre anualmente. Sendo assim, em um semestre, há somente períodos ímpares e no outro, pares. Na época da aplicação, só havia períodos ímpares.

Figura 27 – Dobraduras feitas pelos licenciandos



Fonte: Elaboração própria.

A cada dobradura realizada, era pedido para que os licenciandos investigassem o que ocorreria com a figura que desenharam. Com a intenção de estimulá-los a refletir sobre o que estavam fazendo e sobre qual era a relação entre a figura desenhada e a transformada, os graduandos fizeram algumas perguntas, de forma oral, iniciando o seguinte diálogo:

Graduandos: O que aconteceu com a figura?

Licenciandos: A figura ficou refletida. A linha é como se fosse um espelho.

Graduandos: A sua forma alterou? E o seu tamanho?

Licenciandos: A forma e o tamanho não se alteraram.

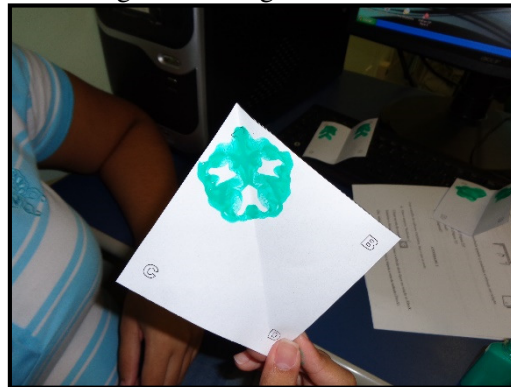
Graduandos: Que transformação ocorreu?

Licenciandos: Ocorreu uma reflexão.

...

Vale ressaltar que, quando perguntados sobre a forma da figura, duas alunas responderam que a figura ficou borrada. Isso ocorreu devido à reta de reflexão “cortar” o desenho feito com a cola colorida (Figura 28).

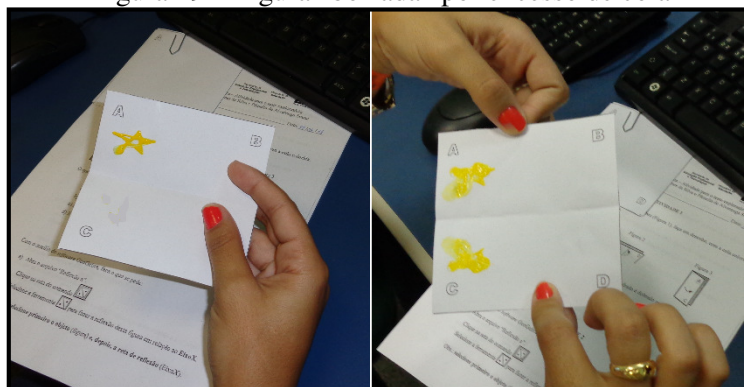
Figura 28 – Figura “borrada”



Fonte: Elaboração própria.

Também foi observado que os licenciandos utilizaram muita cola colorida para fazer os desenhos, deformando-os após o papel ser dobrado (Figura 29). Esses fatos fizeram com que não conseguissem observar, com nitidez, a transformação nem suas propriedades. Então os graduandos perguntaram se queriam um novo quadrado para que pudessem refazer a atividade, porém não acharam necessário e permaneceram com o mesmo.

Figura 29 – Figura “borrada” por excesso de cola



Fonte: Elaboração própria.

Os licenciandos sugeriram que trocasse a cola colorida por outro material pois, ao dobrar o papel, a figura deformava, já que era muito líquida e atrapalhava a visualização. Também que aumentasse o tamanho do quadrado, para que pudessem desenhar uma figura maior, mais nítida. As duas sugestões foram acatadas para a experimentação, e no lugar da cola colorida foi utilizada a 3D, por ser menos líquida.

Antes de iniciar a próxima Atividade, foi realizada uma breve apresentação do *software* GeoGebra e de alguns comandos, utilizados na sequência didática, a saber: a *Janela de Visualização*, a *Janela de Álgebra*, a barra de comandos e a barra de *Entrada*.

Na Atividade 2, as investigações sobre a reflexão foram realizadas com a utilização do *software*. Para cada uma, foi dada a mesma figura, mas em localização diferente do plano e solicitado que os licenciandos fizessem as reflexões abordadas a partir dos comandos do *software* seguindo o tutorial na Atividade. Na realização da mesma, não apresentaram dúvidas.

Durante as investigações, quando perguntados sobre a forma e o tamanho das figuras transformadas, os licenciandos responderam que esses não se alteravam e que mantinham as mesmas características que a figura inicial. Nessa etapa, também conseguiram relacionar as construções realizadas no *software* com as dobraduras feitas anteriormente.

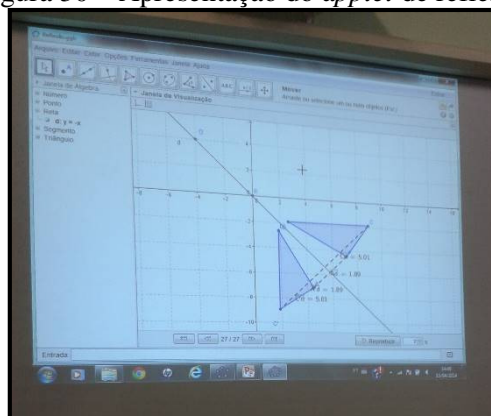


Nessa Atividade, os itens *e* e *f* tratavam da reflexão em relação à origem. Ao executarem os passos propostos nesses itens, os licenciandos conseguiram perceber que refletir uma figura em relação à origem é o mesmo que refleti-la em relação ao eixo *x* e, posteriormente, em relação ao eixo *y* ou vice e versa.

Então, perguntou-se: O que é preciso para ocorrer uma reflexão? Responderam que são necessários dois fatores: um objeto (figura) e um eixo ou um ponto.

Utilizou-se então um *applet* (Figura 30) para auxiliar na generalização das reflexões em relação aos eixos considerados. Por último, formalizou-se a definição de reflexão.

Figura 30 – Apresentação do *applet* de reflexão

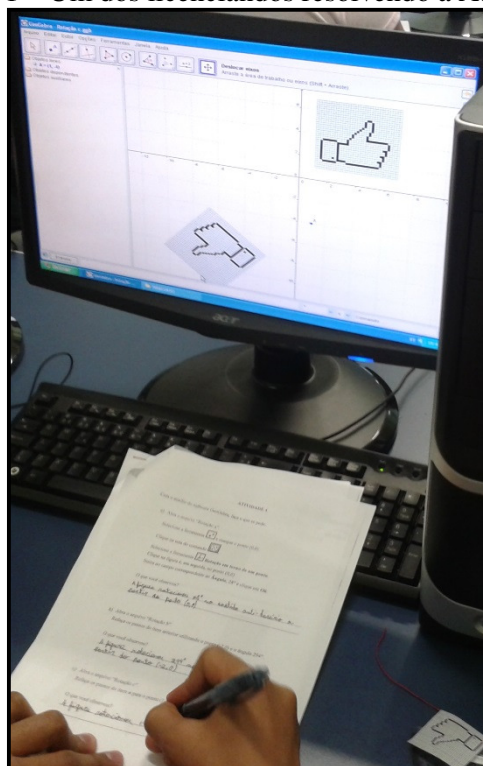


Fonte: Elaboração própria.

A Atividade 3 explorou a rotação com material manipulativo. O material utilizado foi um transferidor com uma figura e uma linha fixada no mesmo, para que o licenciando ao rotacioná-la, de acordo com o grau pedido, pudesse perceber a posição final. Não apresentaram dificuldades e efetuaram rapidamente os cinco itens.

Na Atividade 4, a partir do tutorial feito em cada um dos itens, os licenciandos deveriam explorar os comandos do *software* e identificar o que acontecia com a figura dada após ocorrer a transformação de rotação (Figura 31). Não apresentaram dificuldade.

Figura 31 – Um dos licenciandos resolvendo a Atividade 4



Fonte: Elaboração própria.

Os graduandos fizeram a seguinte pergunta: O que é necessário para ocorrer uma rotação? Os licenciandos responderam: um ângulo, um ponto e um sentido. Em seguida, cada um construiu a definição de rotação e foi pedido para que alguns comentassem em voz alta. Algumas respostas apresentadas foram: “Para haver rotação precisa de um ponto fixo, que é o ponto de origem. À medida que você define o ângulo, a figura vai permanecer do mesmo tamanho, só que, vai girar em relação ao sentido e ao ângulo”<sup>7</sup> (informação verbal) e “É um deslocamento feito a partir de um ponto fixo, centro de rotação, de acordo com a medida de um ângulo”<sup>8</sup> (informação verbal). Foi informado ao primeiro aluno que não precisa ser a origem, pode ser em relação a qualquer ponto, que é denominado centro de rotação. Ao segundo aluno, foi perguntado qual o sentido que estava sendo adotado. Então reformulou a definição, acrescentando essa informação.

Para formalizar o conceito da transformação, foi apresentada a definição de rotação.

<sup>7</sup> Aluno L. Pergunta feita sobre a definição de reflexão durante o encontro. Campos dos Goytacazes, 15 abril 2014.

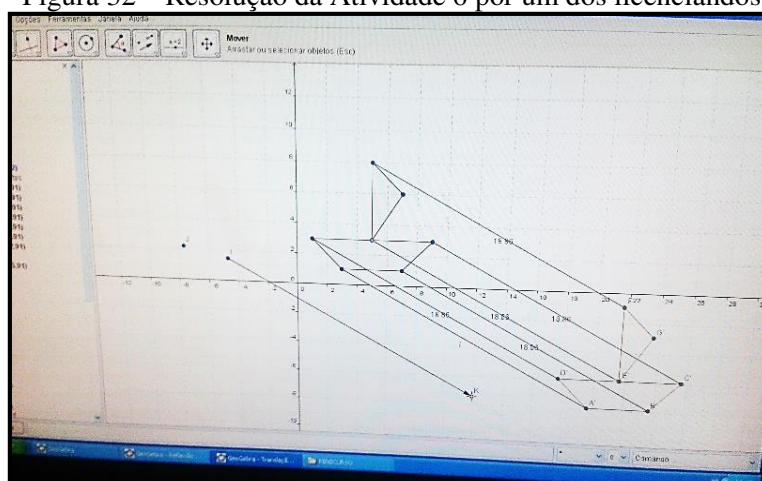
<sup>8</sup> Aluno I. Pergunta feita sobre a definição de reflexão durante o encontro. Campos dos Goytacazes, 15 abril 2014.

Nessa Atividade, um licenciando ressaltou que não foi dito na apostila em qual sentido deveria ser realizada a rotação. Então, acrescentou-se o sentido no material escrito, mesmo que no *software* o anti-horário já estivesse selecionado.

A terceira transformação foi a translação, tratada na Atividade 5. Em cada item, é apresentada a figura de um barco em uma malha quadriculada. O licenciando deve desenhar essa figura considerando o deslocamento indicado pela quantidade de unidades e adotando o lado do quadrado como uma unidade. Não apresentaram dificuldade.

Na Atividade 6, os licenciandos levaram mais tempo (Figura 32) na realização do que nas outras com o auxílio do *software*, visto que, nesse caso, foram utilizados muitos comandos exigindo mais atenção e mais orientação. Quando todos terminaram, os graduandos perguntaram: O que é necessário para ocorrer uma translação? Responderam: Uma direção, um sentido e uma distância.

Figura 32 – Resolução da Atividade 6 por um dos licenciandos



Fonte: Elaboração própria.

Na Atividade 7, os licenciandos não apresentaram dificuldade.

A Atividade 8, com o uso do *software*, foi realizada com sucesso, mesmo que os licenciandos desconhecêssem a transformação geométrica abordada. Antes de formalizar a definição da transformação, foram feitas algumas perguntas aos licenciandos.

Graduandos: Qual é o nome dessa transformação?

Licenciandos: Uma ampliação e uma redução.

Graduandos: O que é necessário para que ela ocorra?

Licenciandos: Um objeto, um ponto e um fator.

Graduandos: Voltem ao GeoGebra. Qual nome do comando responsável por esta transformação geométrica?

Licenciandos: Homotetia.

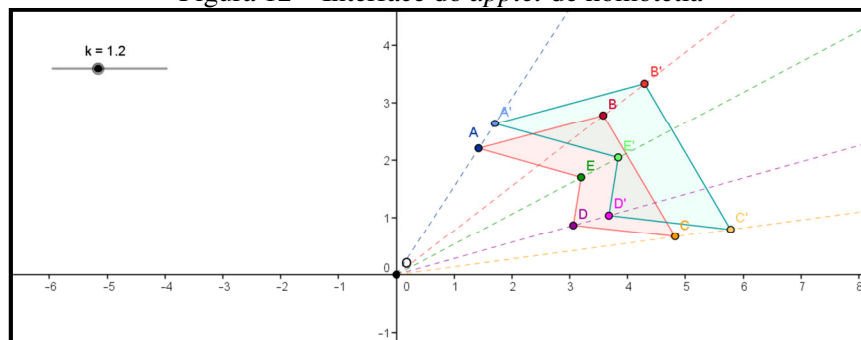
Graduandos: Então o que podemos concluir?

Licenciandos: Que o nome da transformação geométrica é homotetia.

...

Em seguida, utilizou-se o *applet* de homotetia (Figura 12) para auxiliar na visualização, na generalização e, conseqüentemente, na construção da definição dessa transformação. Um dos graduandos manipulava o seletor  $k$ , para que os licenciandos observassem o que acontecia com o polígono azul, quando o mesmo apresentava valores entre zero e um, um, maior do que um, e até mesmo o zero. Concluíram que quando o  $k$  estava entre zero e um, o polígono reduzia; quando era um, os polígonos se sobrepunham; quando era maior que um, o polígono ampliava; e quando era zero, o polígono se tornava o ponto (0,0). Perceberam também que em todos os casos mantinham-se as características do polígono vermelho (fixo).

Figura 12 – Interface do *applet* de homotetia

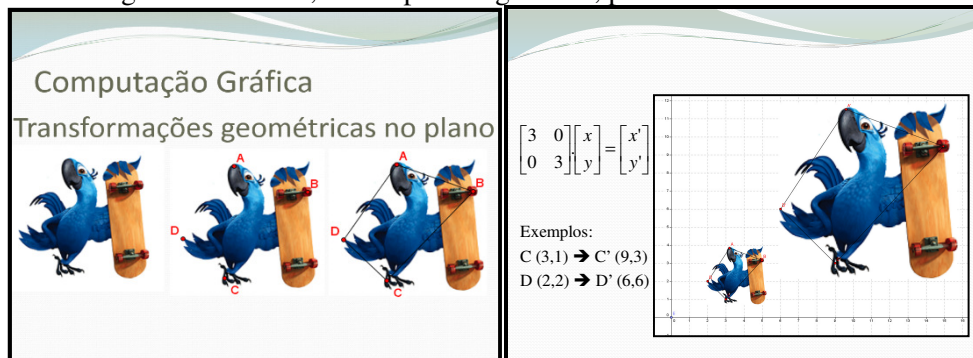


Fonte: PORCINO, W. Homotetia: visualizando, 2012. Disponível em: <<https://www.geogebraTube.org/material/show/id/17744>> Acesso em: 17 mar. 2014. Adaptado.

### 3.1.2 Segundo encontro

No segundo encontro, a fim de ilustrar algumas das transformações estudadas, foram apresentados *slides* com o personagem *Blu* do filme *Rio 2*. Em alguns, apresenta-se a ilustração do personagem sobre o plano cartesiano e as operações com matrizes associadas ao movimento (Figura 33).

Figura 33 – Slides, com o personagem *Blu*, para ilustrar a homotetia



Fonte: Elaboração própria.

Os licenciandos ficaram bastante interessados e surpresos com a aplicação apresentada. Passaram-se rapidamente os *slides* para que os mesmos não descobrissem as matrizes antecipadamente. Por isso, essa apresentação, na experimentação, foi abordada após as Atividades que envolvem matrizes de forma geral.

Na atividade 1, da Atividade 9, foi apresentada a definição de cada tipo de matriz. Durante a realização, percebeu-se que os licenciandos não lembravam as definições.

Após a realização dessa atividade, os graduandos promoveram a discussão das respostas da mesma. Percebeu-se que os licenciandos conseguiram visualizar, sem apresentar dúvidas, a figura que representa a matriz oposta, que se refere à reflexão em relação à origem. Já na da matriz transposta, alguns elaboraram estratégias para visualização, como a de fatiar a figura horizontalmente e transformar cada fatia em coluna.

Na questão 2, da Atividade 9, os licenciandos, utilizando o GeoGebra, investigaram que transformação geométrica ocorre quando se efetua um produto de uma matriz por uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais. Não apresentaram dificuldade em responder os itens. Porém, um licenciando sugeriu que reforçasse o que acontecia com a figura transformada de acordo com o fator  $k$ . Então, acrescentou-se mais um item, no qual fossem registradas essas observações.

A Atividade 10 aborda a relação entre as transformações geométricas e as matrizes correspondentes à reflexão, à rotação e à translação, nas quais as investigações ocorreram com o auxílio do *software*. Nessa, as matrizes não são mais representadas por figuras e sim, por pontos.

Quanto à reflexão em relação ao eixo  $x$ , foi dado um tempo para completarem a tabela apresentada na apostila que continha duas colunas: uma, com os pontos iniciais da figura de um barco; e outra, com os pontos da figura transformada (Figura 34).

Figura 34 – Respostas de uma das tabelas por um dos licenciandos

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(-1,1)	(-1, -1)	A'
B	(3,1)	(3, -1)	B'
C	(5,3)	(5, -3)	C'
D	(-3,3)	(-3, -3)	D'
E	(1,3)	(1, -3)	E'
F	(1,8)	(1, -8)	F'
G	(3,6)	(3, -6)	G'

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, perguntou-se: O que ocorreu com cada ponto? E os licenciandos concluíram que o valor da abscissa de cada ponto se mantinha e que o da ordenada passou a ser o oposto do valor inicial. Na sequência, foi apresentada a matriz de reflexão em relação ao eixo  $x$  e pediu-se que os licenciandos registrassem algebricamente a observação realizada (Figura 35). Todos generalizaram sem apresentar dificuldade.

Figura 35 – Registro algébrico feito por um licenciando na atividade sobre reflexão

É possível encontrar o ponto  $(x', y')$  a partir da multiplicação de matrizes, de um ponto  $(x, y)$  e da matriz de reflexão em relação ao eixo  $x$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Verifique, considerando  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

$$X \cdot A = A'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.



Quanto à reflexão em relação ao eixo  $y$ , foram utilizados os mesmos passos da anterior e as mesmas perguntas. As respostas obtidas nesse caso foram que o valor da abscissa de cada ponto passou a ser o oposto do ponto inicial e o da ordenada se manteve.

Na rotação, foi apresentada a matriz dessa transformação, devido ao fato de que sua demonstração não é simples. Além disso, foi apresentada a equação que relacionava essa matriz, o ponto inicial e o ponto transformado.

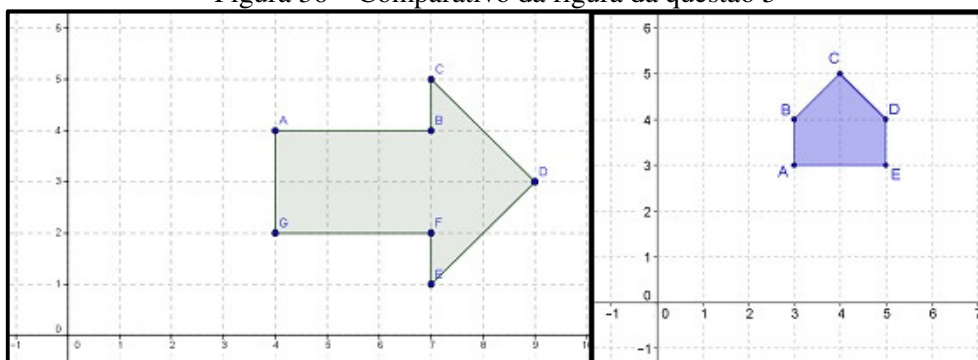
Nessa atividade, os licenciandos tiveram bastante dificuldade em efetuar a multiplicação de matrizes. Sugeriram que fosse lembrado esse conteúdo antes. Essa sugestão não foi considerada, pois os alunos que participaram da experimentação viram recentemente esse conteúdo.

Na translação, continuou-se a investigação com auxílio do *software*. Foi pedido que analisassem, a partir dos valores encontrados, a diferença entre as abscissas dos pontos da figura inicial com as dos pontos correspondentes da figura transformada. A mesma análise foi feita em relação às ordenadas.

Como nessa transformação a operação utilizada era diferente das demais, perguntou-se: Qual é a operação realizada nessa transformação? Alguns licenciandos responderam que fizeram por tentativa, ou seja, buscaram encontrar o ponto correspondente por meio da multiplicação, porém não obtiveram sucesso. Outros levaram em consideração a conclusão obtida na questão anterior e utilizaram a adição de matrizes.

Os dois últimos itens, ainda envolvendo a transformação, tiveram por objetivos escrever os pontos após a translação da figura e descobrir a matriz de translação em cada caso. Na questão 5, os licenciandos sugeriram que diminuíssem as alternativas e a quantidade de pontos das figuras abordadas nos itens. Para a experimentação, foi reduzido para duas o número de alternativas, e substituiu-se a figura de uma seta pela de um pentágono (Figura 36).

Figura 36 – Comparativo da figura da questão 5



Fonte: Elaboração própria.

Na Atividade 11, os licenciandos fizeram as questões sem o auxílio dos graduandos. Na questão 1, não apresentaram dificuldade na resolução.

Os licenciandos apresentaram duas soluções para a questão 2, uma somente na forma algébrica e a outra na algébrica e na geométrica. Na primeira, utilizaram a matriz de rotação e determinaram qual o ângulo cujo seno é igual a um, nesse caso,  $90^\circ$ . Após, efetuaram a multiplicação dessa matriz pelo ponto. Na outra solução, efetuaram a multiplicação das matrizes e verificaram que o valor de  $x$  era positivo e o de  $y$  negativo. Assim perceberam que a circunferência ocuparia o segundo quadrante do plano cartesiano.

Na questão 3, os licenciandos não apresentaram dificuldade em obter as matrizes de deslocamento de cada item, pois as encontraram de forma análoga aos problemas de translação abordados na apostila sobre matrizes.

Na questão 4, não apresentaram dificuldade e responderam corretamente que a transformação era a homotetia. Na discussão da questão, após os graduandos ouvirem a resposta dos licenciandos, perguntou-se por que a transformação não poderia ser classificada como translação. Responderam que para tal transformação a figura deveria alterar o tamanho, fato não ocorrido na figura apresentada. Quando foram perguntados sobre o valor dos elementos da diagonal principal, responderam corretamente quatro, adotando assim a medida do raio das circunferências menores.

Na questão 5, deveriam associar cada figura à transformação correspondente bem como a matriz dessa transformação. Os licenciandos acharam o enunciado um pouco confuso, pois não compreenderam que, em uma linha da tabela, era para nomear a transformação geométrica e, na outra, a matriz correspondente. Uma grande parte conseguiu completar a primeira linha da tabela. Quanto a escrever as matrizes, acharam muito difícil e não conseguiram lembrar. Diante desse fato, elaborou-se um *quadro resumo* (Figura 37) que teve por objetivo sintetizar as transformações abordadas, as matrizes e as equações discutidas. Tal quadro também deveria ser completado no decorrer da aplicação das Atividades.



Figura 37 – Quadro Resumo

Transformação Geométrica	Matriz	Equação
Reflexão em relação ao eixo $x$		
Reflexão em relação ao eixo $y$		
Reflexão em relação ao eixo $y = x$		
Reflexão em relação ao eixo $y = -x$		
Reflexão em relação a origem		
Rotação		
Translação		
Homotetia		

Fonte: Elaboração própria.

## 3.2 Experimentação

A experimentação foi realizada em uma instituição pública com uma turma da 3ª. série do Ensino Médio, na cidade de Campos dos Goytacazes. Ocorreram três encontros, em um laboratório de informática e os alunos sentaram individualmente.

O primeiro encontro foi realizado no dia 22 de agosto de 2014, com duração de 3h30min e estavam presentes 17 alunos. O segundo, em 26 de agosto de 2014, com duração de 2h e participaram 22 alunos. O último teve duração de 3h, no dia 29 de agosto de 2014, com participação de 18 alunos. A seguir, são descritos cada um dos encontros.

### 3.2.1 Primeiro encontro

Nesse encontro, por um problema ocorrido em todos os computadores, foi necessário alterar a ordem proposta da sequência didática. Assim, iniciou-se o trabalho pelas Atividades que utilizavam o material manipulativo (Atividades 1, 3, 5 e 7).

A primeira transformação abordada foi a reflexão. Para a realização da Atividade 1, foram entregues uma cola 3D e quatro quadrados. Cada um deles foi utilizado para a investigação da reflexão em relação ao eixo horizontal, ao vertical, a uma diagonal e à outra.

Na primeira dobradura, em relação ao eixo horizontal, por não estarem acostumados com esse tipo de atividade, todos os alunos ficaram indagando aos graduandos o que deveriam desenhar e em qual parte do quadrado. Foi-lhes respondido que desenhassem o que quisessem e em qualquer canto (A, B, C ou D). O uso de materiais manipulativos constitui um início para a motivação dos alunos ao realizarem explorações e formulação de conjecturas. Além disso, facilitam a união dos dados obtidos, fazendo com que fiquem mais organizados e completos (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Após a realização dessa dobradura, iniciou-se a seguinte conversa:

Graduandos: O que aconteceu com a figura?

Alunos: A figura está borrada.

Alunos: A figura apareceu do outro lado.

Graduandos: A forma da figura se alterou?

Alunos: A forma não se alterou.

Alunos: Ela ficou espelhada.

Graduandos: E em relação ao tamanho?

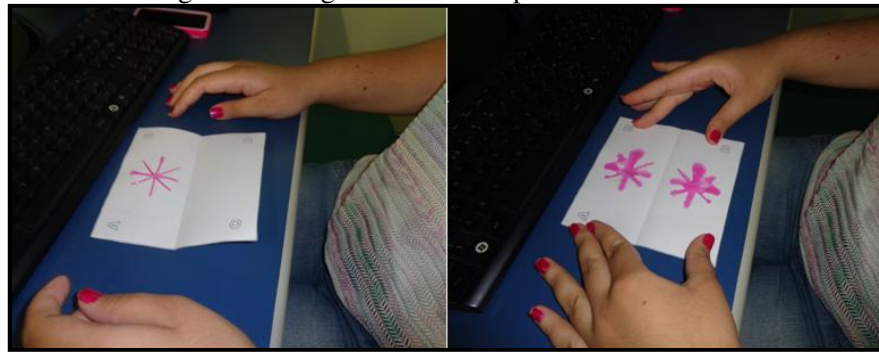
Alunos: O tamanho também não.

...

Vale ressaltar que essas indagações foram realizadas em todas as dobraduras propostas.

Em relação à resposta de que a figura ficou “borrada”, tal fato ocorreu porque alguns alunos usaram em excesso a cola e, ao dobrar o papel, pressionava-o em cima do desenho, fazendo com que o mesmo se deformasse (Figura 38). Após o ocorrido, os graduandos sugeriram que, para uma melhor visualização, utilizassem uma quantidade menor de cola e que evitassem pressionar o papel em cima do desenho.

Figura 38 – Figura deformada por excesso de cola



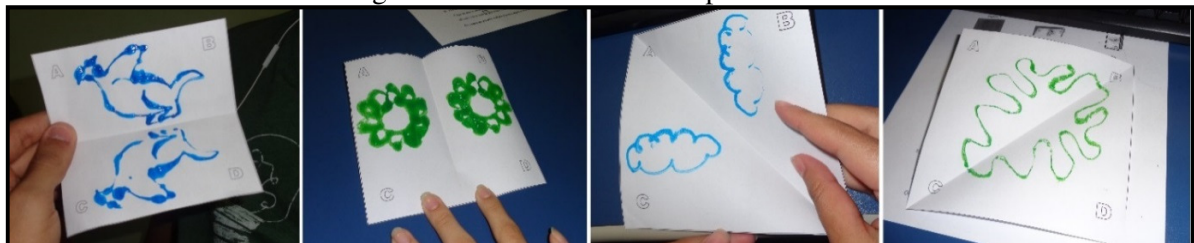
Fonte: Elaboração própria.

Na segunda dobradura, alguns alunos ainda apresentaram dúvidas em relação ao que deveria ser feito, pois perguntaram se era necessário repetir o desenho. Os graduandos responderam que não. Também não entenderam que, para cada dobradura, seria utilizado um quadrado; portanto queriam desenhar no que já havia sido utilizado. Então, foram alertados a utilizarem outro. Os casos das figuras “borradas” ocorreram em menor quantidade, mas alguns ainda não conseguiram obter uma boa visualização.

Foram feitos aos alunos os mesmos questionamentos realizados na primeira dobradura, porém os graduandos exploraram mais os quatro cantos do quadrado uma vez que indagaram em qual desenharam e em qual a figura transformada ficou.

Os alunos ficaram em dúvida sobre qual diagonal escolher na terceira dobradura. Sendo assim, os graduandos pediram que escolhessem qualquer uma das duas. Em uma, conseguiram identificar que as transformações feitas foram reflexões. Apenas na última dobradura, as figuras passaram a apresentar mais nitidez (Figura 39).

Figura 39 – Dobraduras feitas pelos alunos

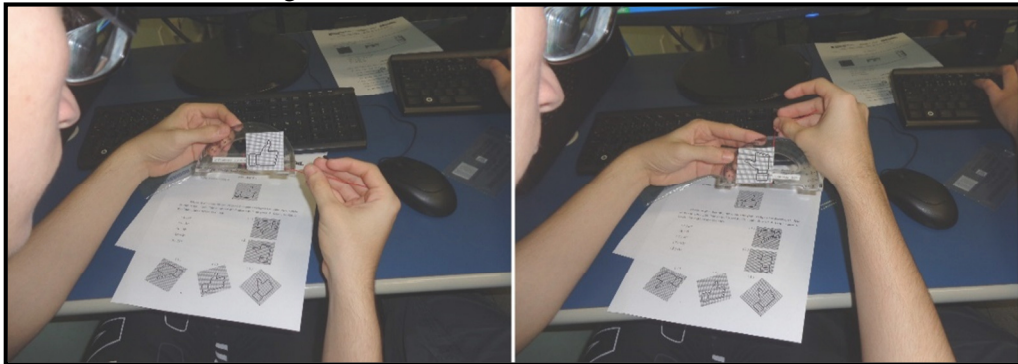


Fonte: Elaboração própria.

Foi entregue a Atividade 3 com o transferidor. Um dos graduandos explicou como deveriam utilizá-lo e esclareceu o motivo da figura estar fixada a uma linha. Os alunos não conseguiram manuseá-lo, sendo assim, um dos graduandos explicou novamente. A maioria

dos alunos persistiu na má utilização. Então o acompanhamento foi feito individualmente (Figura 40). Tal atitude foi inspirada numa das funções do professor, quando utiliza a Investigação Matemática como metodologia de ensino, que é estimular as explorações, pois nesta fase inicial os alunos apresentam um espírito interrogativo (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Figura 40 – Aluno realizando a Atividade 3



Fonte: Elaboração própria.

Após entenderem o manuseio e fazerem a associação pedida, estabeleceu-se o seguinte diálogo:

Graduandos: O que aconteceu com a figura inicial?  
 Alunos: A figura girou.  
 Graduandos: O que foi necessário para ocorrer o giro?  
 Alunos: São necessários um ângulo e um sentido.  
 Graduandos: É preciso mais algum elemento?  
 Alunos: Um ponto.  
 ...

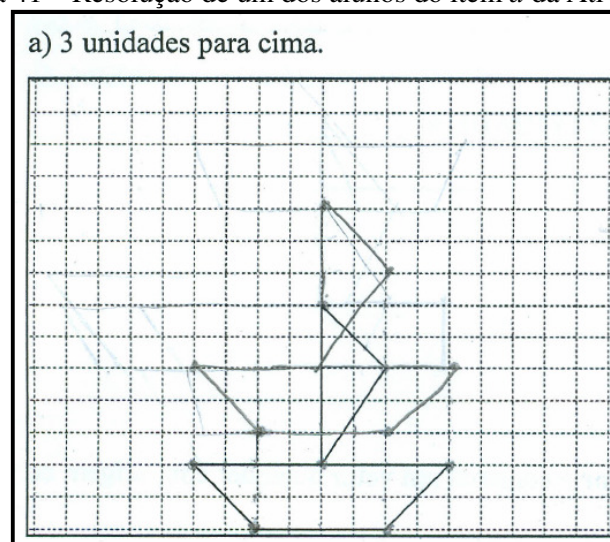
A próxima transformação abordada foi a translação. Os itens da Atividade 5 consistiam em deslocar a figura de um barco na malha quadriculada. Os alunos encontraram bastante dificuldade em realizar esse procedimento.

No primeiro item, por exemplo, deveriam deslocar o barco três unidades para cima, porém a maioria queria desenhá-lo três unidades acima do desenho já feito. Esse fato gerou muita dúvida e confusão, pois a malha quadriculada não permitia tal deslocamento.

Essa Atividade demandou um grande tempo. Quando um aluno conseguiu realizar corretamente o deslocamento, os demais entenderam o objetivo da questão. Ao perguntar-lhe como tinha feito, respondeu que marcou pontos sobre a figura inicial e os deslocou em três

unidades para cima, ligando-os posteriormente (Figura 41). Esse fato vem ao encontro do recomendado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 28) quando afirmam que o professor deve deixar o aluno à vontade e ceder um tempo para o mesmo “colocar questões, pensar, explorar suas ideias e exprimi-las tanto ao professor quanto aos seus colegas”. Em consonância com a indicação de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), algumas regularidades são determinadas por meio da argumentação com os colegas de forma que conseguiram conjecturar.

Figura 41 – Resolução de um dos alunos do item *a* da Atividade 5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os demais itens foram feitos sem dificuldade, uma vez que, com a discussão realizada, pôde-se observar que os alunos ganharam o entendimento sobre o fato de investigar e também desenvolveram a capacidade de se comunicar matematicamente (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Para finalizar a Atividade 5, foi feita uma sequência de perguntas:

Graduandos: O que aconteceu com a figura?

Alunos: Sua posição se modificou.

Graduandos: A forma da figura se alterou? E em relação ao tamanho?

Alunos: A forma e o tamanho não se alteraram.

...

A última transformação abordada foi a homotetia na Atividade 7. As dificuldades que surgiram foram discutidas entre os alunos. Não é necessária a validação constante do

professor, pois os alunos devem sentir que suas ideias são valorizadas e que as discutam com os colegas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Na discussão promovida para o primeiro item da Atividade 7, um dos graduandos perguntou:

Graduandos: Como fizeram a ampliação da figura?

Alunos: Na primeira, um quadradinho da figura passaria a ser dois.

Graduandos: Então, se a base da casa é composta por seis quadrados, a figura que vocês desenharam tem quantos quadrados em sua base?

Alunos: Doze.

Graduandos: Então o que significa a razão um para dois?

Alunos: A mesma coisa que multiplicar a quantidade de quadrados por dois.

Graduandos: Dessa forma, o que aconteceu com a figura do item *a*?

Alunos: A figura aumentou.

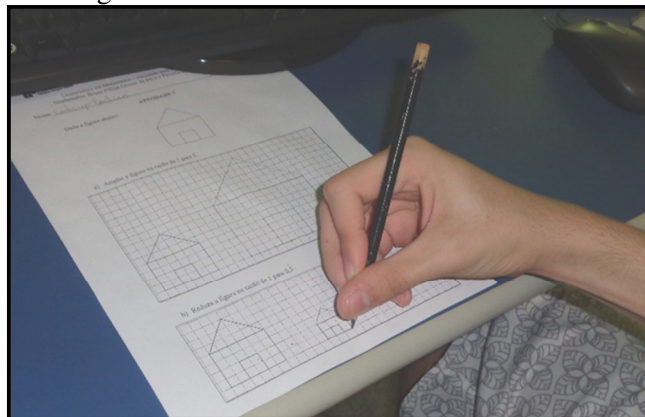
Graduandos: A forma e o tamanho se alteraram?

Alunos: A forma não se alterou, mas o tamanho sim.

...

No segundo item, o encaminhamento das perguntas foi o mesmo, porém responderam que, neste caso, a figura tinha diminuído e perceberam também que o significado da razão 1 para 0,5 é o mesmo que dividir por dois (Figura 42).

Figura 42 – Aluno resolvendo a Atividade 7



Fonte: Elaboração própria.

Para iniciar as Atividades 2, 4 e 6, com o auxílio do *software*, foi apresentado o GeoGebra e perguntado se já o conheciam. Responderam que não. Então, foi apresentada a área de trabalho, distinguindo a *Janela de Visualização*, a *Janela de Álgebra*, o *Campo de Entrada* e a barra de comandos. Falou-se que as duas janelas trabalhavam simultaneamente,

sendo assim, explora-se a Álgebra e a Geometria. O GeoGebra despertou um grande interesse investigativo nos alunos, que queriam manipular todos os comandos aleatoriamente.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam que é importante tanto a utilização de ferramentas tecnológicas quanto a de materiais manipulativos. Além disso, a utilização de *software* “permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 83).

Na Atividade 2, foi abordada a reflexão. Os alunos, mesmo aguçados quanto à manipulação do *software*, tiveram algumas dúvidas:

- No item *a*, não seguiram corretamente os procedimentos apresentados na apostila e nem a ordem para utilizar a ferramenta. Após esclarecerem as dúvidas sobre a utilização dos comandos, os alunos realizaram com sucesso os itens *a* e *b*.
- No item *c*, a dúvida ocorreu quanto ao traçado da reta, pois os alunos esqueceram onde estava o *Campo de Entrada*. Assim, os graduandos indicaram o local aos alunos. Depois da explicação, os itens *c* e *d* foram realizados sem apresentarem dúvidas.
- No item *e*, quatro alunos apresentaram dificuldade quanto à interpretação do que se pedia, obtendo, assim, uma figura em outro quadrante. Foi advertido de que a segunda reflexão era para ser feita a partir da figura obtida. Assim, fizeram corretamente.
- Na realização do item *f* não apresentaram dúvidas. Já em relação à observação, os graduandos realizaram mais perguntas para que os mesmos conseguissem perceber as relações dos itens *e* e *f*. Além disso, conseguiram visualizar que refletir a figura em relação ao eixo *x* e, posteriormente, em relação ao eixo *y*, é o mesmo que alternar a ordem das reflexões. Tal fato foi observado a partir da investigação com o *software*.

Nas atividades que abordavam a reflexão era solicitado que os alunos, após utilizarem o comando, atentassem para a *Janela de Álgebra* para que pudessem relacionar as coordenadas do ponto A, da figura inicial, com as do ponto A', transformado. Sendo assim, relacionaram o efeito geométrico e algébrico da transformação.

Após a última reflexão, os alunos conseguiram visualizar que refletir a figura em relação ao eixo *x* e, posteriormente, ao eixo *y*, é o mesmo que refletir a figura em relação ao eixo *y* e, posteriormente, ao eixo *x*. Tal fato foi observado a partir da investigação com o *software*.



A fim de generalizar essa transformação, foi-lhes perguntado: “O que é necessário para ocorrer uma reflexão?”. A maioria dos alunos identificou um eixo ou um ponto, e uma figura. Posteriormente, concluíram que esse eixo é denominado eixo de reflexão.

Para formalizar a definição, foi utilizado um *applet* em que era possível modificar o eixo. O objetivo era perceber que a distância de um ponto ao eixo de reflexão é a mesma distância do ponto transformado a esse mesmo eixo, e que esses dois pontos estão sobre uma reta perpendicular ao mesmo. Com a manipulação do *applet*, os alunos conseguiram relacionar as distâncias destacadas, porém não observaram o segundo fato. Sendo assim, os graduandos iniciaram o seguinte diálogo:

Graduandos: Levando em consideração o segmento  $AA'$  e o eixo de reflexão, o que se pode afirmar?

Alunos: Que o eixo passa na metade desse segmento.

Graduandos: Correto, mas além disso, há alguma outra relação?

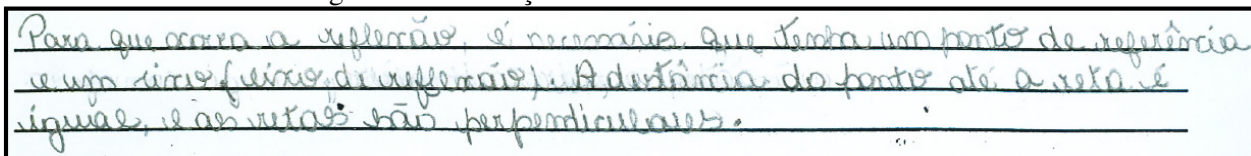
Graduandos: Qual a relação entre a posição dessas retas?

Alunos: Elas são perpendiculares.

...

Com isso, ao longo da manipulação dos dados surgem conjecturas, levando-os a realizar mais testes, gerando, assim, mais dados (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Apenas nesse momento que os alunos conseguiram responder o nome da transformação que estava sendo investigada e defini-la, utilizando os conceitos discutidos (Figura 43).

Figura 43 – Definição de reflexão de um dos alunos



Para que ocorra a reflexão, é necessário que tenha um ponto de referência e um eixo (eixo de reflexão). A distância do ponto até a reta é igual, e as retas são perpendiculares.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A Atividade 4 foi feita pelos alunos sem a interferência dos graduandos. Ocorreram dúvidas quanto à marcação das coordenadas pedidas e a classificação quanto à medida dos ângulos. Foi percebido que alguns alunos, ao marcar os pontos, por exemplo (2, 3), trocaram os valores das abscissas e das ordenadas e não sabiam identificar a ordem no par ordenado. Nessa mesma atividade, uma das alunas marcou os pontos (2, 0) e (0, 3) em vez de (2, 3). Em relação à medida dos ângulos, alguns alunos esqueceram o que era um ângulo obtuso e agudo. A fim de promover a participação de todos, um dos graduandos foi à frente para perguntar à

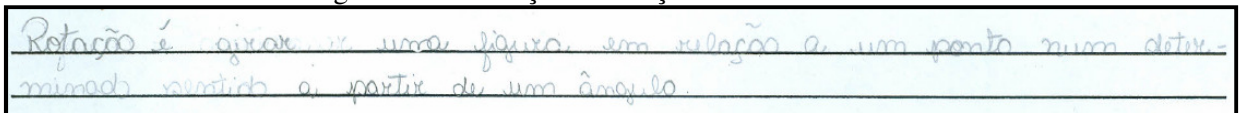


turma se recordavam esses tipos de ângulos. Mas, antes que pudesse fazer a pergunta, um dos alunos disse que não era necessário, pois havia pesquisado a resposta na Internet.

Após a realização de todos os itens dessa Atividade, perguntou-se: “O que é necessário para ocorrer uma rotação?”. Responderam: “Um ponto e um ângulo”. Então foi perguntado se precisava de mais algum elemento, e um dos alunos respondeu que era preciso, também, um sentido. Assim, um dos graduandos reforçou os três elementos presentes em uma rotação.

Para formalizar a definição dessa transformação geométrica, vale ressaltar que os alunos não sabiam o nome da transformação e descobriram a partir do nome do comando do *software* (Figura 44).

Figura 44 – Definição de rotação de um dos alunos

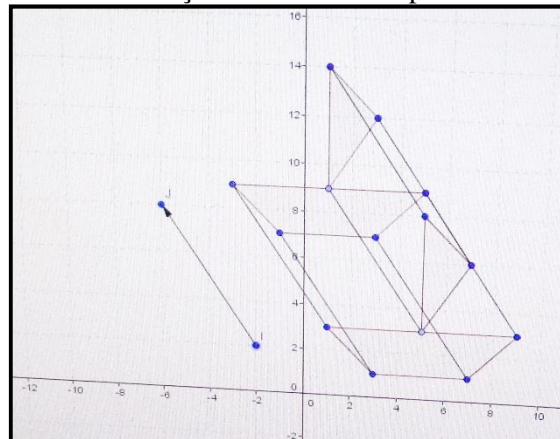


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na Atividade 6, o objetivo era que os alunos realizassem as etapas sem o auxílio dos graduandos. Porém percebeu-se que alguns alunos: (i) não marcaram corretamente o ponto de origem do vetor; (ii) ao utilizar os comandos não clicaram no vetor e, sim, em um dos pontos de sua extremidade; (iii) não ligaram os vértices com seus correspondentes; e (iv) não realizaram todos os passos.

Assim, os graduandos intervieram na execução dessa atividade, percorrendo todos os computadores, o que demandou mais tempo do que o previsto (Figura 45).

Figura 45 – Resolução da Atividade 6 por um dos alunos

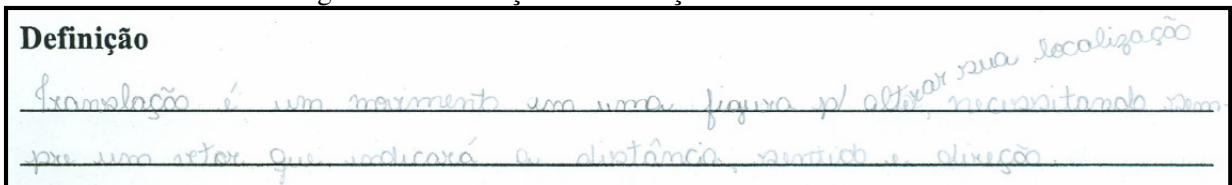


Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar essa Atividade, foi pedido que os alunos movimentassem um dos pontos do vetor. Quando perguntados sobre a observação obtida, responderam que a figura movimentava em relação àquele vetor. Além disso, perceberam que a distância entre a figura e a transformada era sempre igual e que esta é definida pelo vetor.

Em seguida, foi perguntado: “O que é necessário para ocorrer uma translação?”. Responderam: um vetor. Então perguntou-lhes: “O que esse vetor define?”. Responderam: o sentido, o tamanho e a direção que a figura vai se deslocar. Assim redigiram, cada um, a definição de translação (Figura 46).

Figura 46 – Definição de translação de um dos alunos

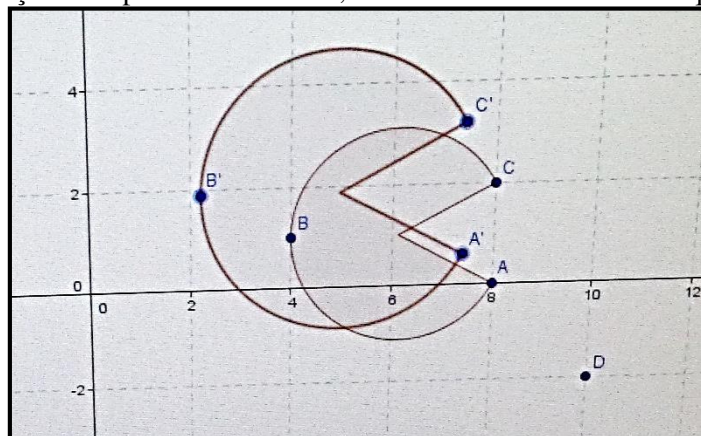


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na Atividade 8, alguns alunos conseguiram realizar os itens *a*, *b* e *c* rapidamente, sendo sugerido que minimizassem a janela do *software* e que dessem continuidade a Atividade respondendo as perguntas que seguiam. Foi alertado aos alunos também que quando fossem utilizar um número decimal deveriam substituir a vírgula pelo ponto para que o *software* reconhecesse o número. Percebeu-se que alguns ainda apresentavam dificuldade na marcação do ponto. Então os graduandos precisaram percorrer novamente as carteiras.

Os alunos optaram por diversos fatores (Figura 47), destacando-se: 0,1 e 0,99. Nesse último caso, a figura transformada ficava quase sobreposta à figura inicial.

Figura 47 – Construção feita por um dos alunos, adotando um fator maior do que 1, na Atividade 8



Fonte: Elaboração própria.

Após a realização da atividade, perguntou-se aos alunos o que observaram quanto à forma e ao tamanho da figura em relação aos itens *b* e *c*. Responderam que a forma permaneceu a mesma, mantendo as características, mas que o tamanho variou. Perceberam também que quando o fator está entre 0 e 1, a figura diminui, e quando o fator é maior do que 1, ela aumenta.

Então os graduandos perguntaram:

Graduandos: E quando o fator for igual a 1?

Alunos: Irá continuar a mesma figura. Porque se for menor que um, ela vai diminuir, se for maior que um, ela vai aumentar, então igual a um ela não muda.

Alunos: As figuras ficarão sobrepostas.

...

Foi observado que alguns alunos não precisaram efetuar a transformação no *software* para entender o que estava sendo pedido.

Após, foi perguntado: “O que é necessário para que ocorra uma homotetia?”. Disseram um ponto, um fator e uma figura. Para que compreendessem que nem toda semelhança é uma homotetia, um dos graduandos pediu para que analisassem se a ampliação e a redução que fizeram anteriormente, na malha quadriculada, era uma homotetia. Inicialmente, responderam que sim. Então, esse mesmo graduando perguntou: “Onde está o centro de homotetia desse desenho?”. Os alunos perceberam que, na maioria dos casos, não se tratava de uma homotetia.

Devido ao horário, não foi possível formalizar a definição de homotetia. Essa etapa da investigação foi realizada no início do segundo encontro.

### 3.2.2 Segundo encontro

Houve um atraso ao iniciar o segundo encontro visto que ocorreu, novamente, um problema em todos os computadores. Quando o problema foi solucionado, iniciou-se relembando os elementos necessários para ocorrer cada transformação geométrica estudadas no primeiro encontro e depois foram feitas as definições. Além disso, na homotetia, foi mostrado um *applet*, para que os alunos conseguissem validar suas conjecturas (Figura 48) e formalizar a definição.

Figura 48 – Conjectura apresentada por um dos alunos sobre homotetia

Para que ocorra uma Homotetia é necessário determinar um fator, um ponto e uma figura.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Então foi entregue a Atividade 9: Transformações Geométricas e Matrizes. Os alunos realizaram, sem o auxílio dos graduandos, as questões referentes à reflexão. Ao escrever os pontos na tabela, alguns ainda apresentaram dúvidas, porém em menor quantidade, os graduandos perguntaram aos alunos que erraram, “Qual é a ordem do par ordenado?”. Então, concluíram que erraram. Na generalização da reflexão em relação ao eixo  $x$  foi perguntado: “O que vocês puderam observar a partir dos valores da tabela?”. Responderam: “O valor de  $x$  se mantém e o de  $y$  trocou o sinal.”, “O valor de  $x$  permaneceu e o de  $y$  ficou negativo.”. Após essa discussão, foi apresentada a matriz de reflexão em relação ao eixo  $x$ . Com os alunos, fez-se a verificação dessa transformação de forma algébrica, utilizando a multiplicação de matrizes (Figura 49).

Figura 49 – Resolução de um dos alunos sobre a reflexão em relação ao eixo  $x$  da Atividade 9

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(-1,1)	(-1,-1)	A'
B	(3,1)	(3,-1)	B'
C	(5,3)	(5,-3)	C'
D	(-3,3)	(-3,-3)	D'
E	(1,3)	(1,-3)	E'
F	(1,8)	(1,-8)	F'
G	(3,6)	(3,-6)	G'

É possível encontrar o ponto  $(x', y')$  a partir da multiplicação de  $(x, y)$  e da matriz de reflexão em relação ao eixo  $x$ ,  $X =$

considerando  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

$$x \cdot A = A'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A partir dessa verificação, os alunos conseguiram relacionar a matriz de transformação com os pontos correspondentes da tabela percebendo, assim, a conexão entre as transformações geométricas e as matrizes. O mesmo ocorreu na reflexão em relação ao eixo  $y$ .

Junto a essa Atividade, foi entregue o *quadro resumo* para que os alunos o completassem à medida que as matrizes fossem apresentadas, pois na Atividade 11 seriam utilizadas.

A próxima matriz apresentada foi a de rotação. Os alunos ficaram surpresos com os elementos contidos, porém não tiveram dificuldade em encontrar os valores associados às funções trigonométricas. Apresentaram erros na multiplicação de matrizes, pois não estavam operando os elementos da forma correta. Com isso, um dos graduandos foi ao quadro e corrigiu o primeiro item esclarecendo a forma correta de se fazer a multiplicação, inclusive quanto à multiplicação entre um número natural e um racional

No segundo item, ainda alguns alunos ficaram com dúvidas em relação a essa operação. Nesse momento de dúvida, é importante que o professor estimule os alunos a olharem em outras direções e reflitam sobre o que estão a fazer (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Então, um dos graduandos pediu para que prestassem atenção aos tipos das matrizes da equação da transformação e perguntou-lhes:

Graduandos: Qual é o tipo da matriz  $R$ ?

Alunos:  $R$  é uma matriz quadrada, dois por dois.

Graduação: E o tipo da matriz  $P$ ?

Alunos:  $P$  é uma matriz coluna, dois por um.

Graduandos: Para ocorrer uma multiplicação de matrizes, o que é necessário?

Alunos: O número de colunas da primeira tem que ser igual ao número de linhas da segunda.

Graduandos: Qual é o tipo da matriz gerada?

Alunos: Uma matriz com o número de linhas da primeira e o número de colunas da segunda.

Alunos: Dois por um.

...

Após essa discussão, os alunos apresentaram dificuldade quanto à soma das parcelas obtidas pela multiplicação de matrizes. Então, o mesmo graduando esclareceu essa dúvida.

A matriz utilizada no primeiro item de rotação era a matriz de rotação de  $90^\circ$ . Alguns alunos utilizaram essa mesma matriz na resolução do segundo item, não atentando para o fato

do ângulo ser outro. Os alunos foram advertidos para que observassem o novo ângulo. Depois, os alunos conseguiram descobrir as coordenadas do ponto transformado.

Devido ao problema inicial com os computadores, não foi possível terminar essa apostila. O encontro terminou com a apresentação de um *trailer* do filme Rio 2, seguido de *slides* que associavam o personagem *Blu* às transformações geométricas ocorridas no plano cartesiano. Além disso, foram destacadas, nos *slides*, as matrizes correspondentes a cada transformação.

Os alunos ficaram surpresos ao verem essa aplicação nas imagens do filme, pois não imaginaram que o movimento dos personagens era feito utilizando matrizes.

### 3.2.3 Terceiro encontro

Continuou-se a apostila do segundo encontro, solicitando que os alunos fizessem as atividades.

Os alunos não encontraram dificuldade em relacionar as coordenadas do ponto inicial com o ponto transformado (Figura 50).

Figura 50 – Respostas da tabela referente à translação por um dos alunos

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(2, 3)	(8, 11)	A'
B	(5, 3)	(11, 11)	B'
C	(5, 4)	(11, 12)	C'
D	(7, 2)	(13, 10)	D'
E	(5, 0)	(11, 8)	E'
F	(5, 1)	(11, 9)	F'
G	(2, 1)	(8, 9)	G'

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta questão de translação (Figura 51), detectaram que, na transformação, a operação utilizada era diferente das outras já abordadas, e logo responderam adição. Então um

dos graduandos perguntou-lhes: “Qual é a equação matricial que relaciona esses pontos?”. E responderam corretamente.

Figura 51 – Quarta questão da Atividade 9

4. Utilizando operações com matrizes de que forma podemos encontrar o ponto  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  a partir do ponto  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ?

---



---



---

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, foi dito que, para realizar a adição de matrizes, era necessário que tivessem o mesmo tipo. Então perguntou-se aos alunos qual seria o tipo da matriz de translação, e responderam que deveria ser dois por um.

No exercício cinco, os alunos queriam resolvê-lo geometricamente, ou seja, desenhando a figura na malha quadriculada apresentada no mesmo. Apesar de conseguirem resolver dessa forma o item *a*, não foi possível fazer o mesmo no item *b*. Alguns alunos também queriam utilizar o *software* para realizar a transformação. Então, foi esclarecido que o objetivo do exercício era que utilizassem a formalização construída no exercício anterior, isto é, representando essa transformação por meio de matrizes.

Alguns fatos foram destacados. A marcação correta das coordenadas dos pontos e, no último exercício, o fato de alguns alunos conseguirem obter a matriz de deslocamento apenas analisando as coordenadas dos pontos, sem efetuarem os cálculos. Esse procedimento foi incentivado pelos graduandos, de acordo com a proposta de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) que é desafiar os alunos a pensarem matematicamente. Assim, a apostila foi concluída.

Depois da entrega da Atividade 10, os alunos leram sobre a computação gráfica, observando que a matriz era representada por uma figura novamente e que as definições das matrizes especiais abordadas estavam listadas no final da questão.

Para uma melhor visualização das transformações geométricas geradas a partir das matrizes especiais, utilizou-se uma animação em *slides*, para a correção de cada item da questão um.

No primeiro item, os alunos não apresentaram dificuldades e responderam que os valores de  $x$  e de  $y$  ficaram opostos. Perguntou-lhes se essa transformação tinha relação com alguma já abordada, os mesmos disseram que sim e identificaram que era uma reflexão. Então, os graduados perguntaram: “É uma reflexão em relação a quê?”. Após analisarem a resposta correta, os alunos perceberam que era uma reflexão em relação à origem ou uma reflexão em relação ao eixo  $x$  e, consecutivamente, ao eixo  $y$ , ou vice e versa.

Quando perguntados qual a figura que representava a transposta de  $A$ , os alunos identificaram que era a segunda opção, porém não conseguiram explicar algebricamente. Apenas se expressaram por meio de gestos, utilizando assim uma linguagem não verbal.

Um dos graduandos alertou-os para que atentassem para a definição de Matriz Transposta. Em consequência da definição, perceberam que a figura ficaria posicionada “deitada”, pois cada linha passou a ser coluna. Depois, os mesmos atentaram para a posição da chaminé e, com isso, houve uma discussão. Para esclarecer as dúvidas obtidas, um dos graduandos apresentou uma animação, o que auxiliou a compreensão dos mesmos. Então foi-lhes mostrado que este é o efeito geométrico quando se considera a matriz transposta.

Buscando compreender o pensamento dos alunos, para concluir a primeira questão, um dos graduandos perguntou:

Graduandos: Qual a transformação feita anteriormente em que acontece essa mesma relação entre as figuras?

Alunos: Rotação.

Graduandos: Mas o que aconteceu com a posição da chaminé?

Alunos: Então é uma homotetia.

Graduandos: O que acontece em uma homotetia?

Alunos: O tamanho da figura aumenta ou diminui.

Graduandos: Isso ocorreu?

Alunos: Não.

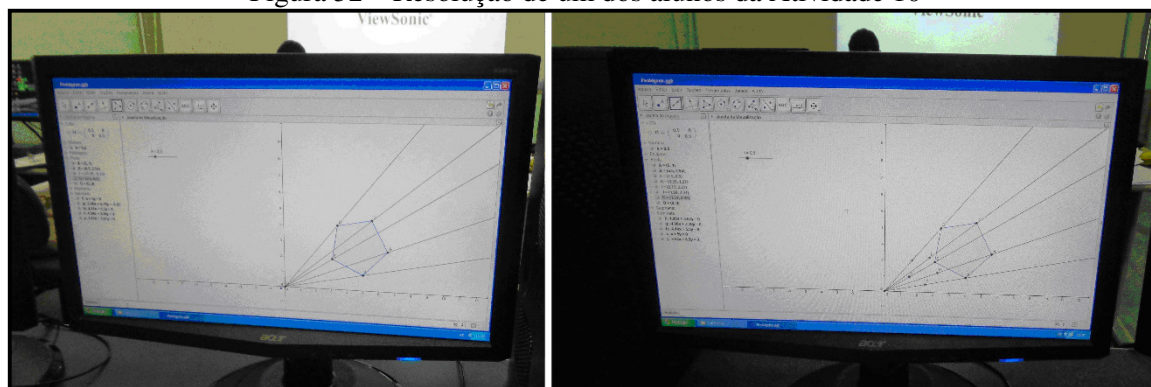
...

Um dos graduandos pediu que os alunos analisassem as características da figura inicial e transformada. Algum tempo depois, perceberam que era uma reflexão, porém não compreenderam em relação a qual eixo que a figura estava refletida. Um dos alunos, ao analisar as figuras, percebeu que se tratava de uma reflexão em relação a uma das diagonais. Então, conseguiram identificar a diagonal correta geometricamente e, depois, um dos alunos disse que era a reta  $y = -x$ . Assim, para finalizar, concluíram que o efeito geométrico da matriz transposta de uma figura é o mesmo que refleti-la em relação a essa reta.



Na questão dois, os alunos conseguiram recordar a definição de matriz diagonal e identidade. Não apresentaram dificuldades em traçar as semirretas (Figura 52). Alguns não perceberam que, o arquivo, continha a matriz  $H$  (matriz quadrada de ordem 2, com os elementos da diagonal principal iguais e vinculados ao seletor  $k$ ) e também não entenderam que a multiplicação era para ser realizada com todos os pontos da figura dada. Após os esclarecimentos das dúvidas, conseguiram continuar a questão.

Figura 52 – Resolução de um dos alunos da Atividade 10



Fonte: Elaboração própria.

Ao investigar a transformação geométrica que ocorre quando se multiplica uma matriz diagonal, que tem os elementos da diagonal principal iguais, por um ponto, obtém-se uma homotetia. Perceberam também que os elementos presentes na diagonal principal eram o fator de homotetia e que este variava de acordo com a manipulação do seletor.

No item *e*, os alunos não apresentaram dificuldade. Para finalizar essa questão, foi-lhes perguntado o que aconteceria também com o polígono se o valor de  $k$  fosse igual a zero. Perceberam que todos os pontos coincidiriam com a origem do plano cartesiano.

Após a finalização da Atividade 10, foi projetado o *quadro resumo* no quadro. Um dos graduandos completou-o junto com os alunos, indagando-os sobre as matrizes abordadas durante todas as Atividades e as equações. Alguns não haviam começado a completá-lo. Então fez-se necessário voltar às reflexões já abordadas. Como os alunos tinham todas as apostilas a sua disposição, não encontraram dúvidas ao responderem as perguntas feitas por esse graduando.

Ao completar a tabela, na parte de homotetia, alertou-se aos alunos quanto à ordem das matrizes ao se fazer a multiplicação. Relembrou os conceitos envolvidos na multiplicação de matrizes, inclusive o fato de que “em matrizes, a ordem dos fatores altera o produto”, palavras ditas por um dos alunos.

Para finalizar a sequência didática, foi entregue a Atividade 11.

A questão 1 é um problema contextualizado cujo objetivo é perceber quantos graus a figura rotacionou. Os alunos não apresentaram dificuldade na resolução. Somente um se equivocou quanto ao ângulo, mas a dúvida foi esclarecida. Então, como fizeram? Uma das respostas foi que se dividiu o cristal em seis partes; 360 dividido por seis é igual a sessenta.

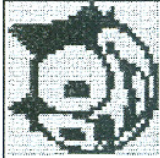

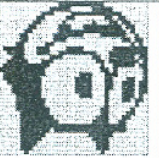
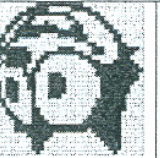
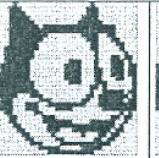
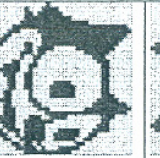
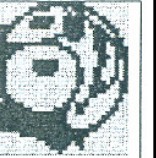
A questão 2 pretende associar a transformação indicada pela equação dada com a nova posição da circunferência. A maioria dos alunos não fez essa questão. Somente quatro fizeram e de forma correta. Perguntou-lhes como haviam solucionado. Três observaram que a matriz dada era uma rotação de  $90^\circ$ ; então rotacionaram a circunferência segundo este ângulo. Outro efetuou a multiplicação de matrizes e obteve que o  $x$  permanecia e o  $y$  ficava o oposto; então procurou o item em que isso acontecia.

Na questão 3, deveriam descobrir os deslocamentos obtidos a partir da *Figura X* e representá-los na forma matricial. A maioria dos alunos não fez essa questão. Somente sete alunos fizeram, não apresentaram dificuldade em obter a matriz de deslocamento de cada item. Partiram do pressuposto de que o centro da figura posicionava na origem e contaram as unidades deslocadas horizontalmente e verticalmente.

Na questão 4, foi proposto investigar a transformação que ocorrera com a *Figura B* e qual seria a matriz dessa transformação. Todos alunos fizeram essa questão e não apresentaram dificuldade, respondendo corretamente que a transformação era a homotetia. Porém sete erraram ao descobrir a matriz correspondente, pois alegaram que não conseguiram encontrar uma relação com o fator.

Na questão 5, deveriam associar cada figura à transformação correspondente bem como à matriz dessa transformação. Somente quatro alunos não fizeram essa questão. Dez alunos fizeram de forma correta (Figura 53). Pôde-se perceber que o *quadro resumo* contribuiu para a execução visto que os alunos afirmaram que recorreram ao mesmo quando encontraram dúvidas.

Figura 53 – Resolução de um dos alunos da quinta questão da Atividade 11

						
T	Y	X	$R_{180^\circ}$	I	$R_{90^\circ}$	$R_{90^\circ}$
	$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$

Fonte: Elaboração própria.

A análise de todos os dados levantados permitiu responder à questão de pesquisa, uma vez que os alunos conseguiram perceber, por meio do material manipulativo, dos applets e do *software*, que as transformações geométricas se relacionam com o conteúdo de matrizes.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na literatura pesquisada pode-se observar que, em alguns livros didáticos, o conteúdo de matrizes é abordado sem uma justificativa consistente, além de não ser apresentado em questões contextualizadas. Percebeu-se também que o ensino das operações de matrizes é desenvolvido de forma artificial e mecânica.

Porém, esse conteúdo possui um amplo campo de aplicações, como a Computação Gráfica. Nesta, observou-se uma estreita relação entre as matrizes e as transformações geométricas.

Os Parâmetros Curriculares incentivam o estudo das transformações geométricas no Ensino Fundamental, porém o mesmo não ocorre no Ensino Médio, apesar da necessidade de aprofundar os estudos apresentados nos anos anteriores.

Visando a uma nova abordagem para o ensino de matrizes no Ensino Médio, elaborou-se uma sequência didática que teve por objetivo relacionar os conceitos de operações com matrizes e seus tipos com os das transformações geométricas planas. Utilizou-se, como metodologia de ensino, a Investigação Matemática, promovendo uma participação ativa dos alunos, com a finalidade de explorarem, formularem, testarem e validarem suas conjecturas.

Para analisar a clareza dos enunciados das questões, o grau de dificuldade das mesmas e a metodologia de ensino adotada, realizou-se um teste exploratório com alunos de Licenciatura em Matemática.

Após algumas alterações feitas, aplicou-se a sequência didática em uma turma da 3ª. série do Ensino Médio, na qual observou-se grande participação dos alunos em relação às atividades propostas. Vale ressaltar que a utilização do material manipulativo e do *software* facilitou o desenvolvimento dos quatro momentos da metodologia de ensino adotada e que a apresentação dos *slides* com as transformações do personagem *Blu* favoreceu a compreensão do trabalho na ótica intradisciplinar, de aproximar conceitos de Álgebra e Geometria.

É possível afirmar que a questão de pesquisa foi respondida de forma afirmativa, uma vez que os alunos conseguiram relacionar, com êxito, os conceitos de operações com matrizes e seus tipos aos das transformações geométricas planas.

Espera-se que o trabalho desenvolvido indique a importância de se apresentar uma justificativa para o estudo de matrizes bem como de se desenvolver atividades em sala de aula com o uso das transformações geométricas que, para além das matrizes, possuem outras aplicações.

## REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E. et al. (Org), **Ensino da geometria ao virar do milênio**. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 1999, p. 51-62.

ALLEVATO, N. S. G. O Modelo de Romberg e o Percorso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. **Bolema**. v. 21, n. 29, 2008, p. 175-197.

BARBOSA, M. O. H. **O uso de Transformações Geométricas em temas do Ensino Médio**. 2013. 84f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2013.

BIOTTO FILHO, D. **O Desenvolvimento da Matemática no Trabalho com Projetos**. 2008. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP, 2008.

BRAGA, A. F. R. R. **O uso integrado de recursos manipulativos digitais e não-digitais para o ensino-aprendizagem de geometria**. 2013. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2013.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. LDB (1996). Lei n. 9394 de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília. DF, 24 de dez. 1996. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/tvescola/leis/lein9394.pdf>>. Acesso em: 20 de out. 2013.

CORRADI, D. K. S. Investigações Matemáticas. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. v. 1, 2011, p. 162-175.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto**. Tradução de Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRUZ, R. **Ensino de multiplicação de matrizes via transformações geométricas**. 2013. 83f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2013.

CUNHA, H.; OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P. Investigações matemáticas na sala de aula. In: PINHEIRO, A.; CANAVARRO A. P. (Ed.), **Actas do ProfMat 95**. Lisboa: APM, 1995, p. 161-168.

CUNHA, I. G.; MORAES, P. **O Ensino de Funções e de Transformações Geométricas com o auxílio do software GeoGebra**. 2008. 66f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **Java, como programar**. Tradução de Carlos Arthur Lang Lisboa. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FROTA, M. C. R. Experiência Matemática e Investigação Matemática. In: CONGRESSO ÍBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Anais...** Porto: Cibem, 2005.

GARCIA, M. F.; RABELO, D. F, SILVA, D.; AMARAL, S. F. Novas competências docentes frente às tecnologias digitais interativas. **Teoria e Prática da Educação**. v. 14, n. 1, 2011, p. 79-87.

GONÇALVES, H. S. **A Importância das Matrizes e Transformações Lineares na Computação Gráfica**. 2013. 42f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

HOFFMANN, D. S.; MARTINS, E. F.; BASSO, M. V. A.; Experiências física e lógico-matemática em Espaço e Forma: uma arquitetura pedagógica de uso integrado de recursos manipulativos digitais e não-digitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 20., 2009, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 2009.

LIRA, A. C. B. **A Matemática dos Espelhos: Proposta para o ensino-aprendizagem de matrizes utilizando transformações geométricas**. 2011. 51f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática)-Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2011.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MARIN, D. Professores universitários que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino de matemática: quem são eles?. In: **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 1, 2012, p. 62-77. Disponível em: <<http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p62>>. Acesso em: 16 set. 2014.

MESSIAS, M. A. V. F.; SÁ, P. F.; FONSECA, R. V. Um estudo diagnóstico sobre as dificuldades em matrizes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO DE MATEMÁTICA (ENEM), 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Universidade de Belo Horizonte, 2007.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, I.; PONTE, J. P. Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In: ROQUE, A.; LAGARTO, M. J. (Ed). **Actas do ProfMat**, 98. Lisboa: APM, 1998, p. 207-213.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer Pesquisa Qualitativa**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. **Bolema**. v. 19, n. 25, 2006, p. 1-23.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS, L.; BROCARD, J.; PIRES, M.; ROSENDO, A. I. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º. Ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Org), **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**, Lisboa SEM-SPCE, 2002, p. 83-106.

SANTOS, V. C. P. **Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática**. 2008. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.

SIMON, A. F. **O uso das tecnologias no ensino da matemática em uma escola de ensino fundamental da rede municipal de Cocal do Sul-SC**. 2013. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática)-Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma, 2013.

SILTRÃO, K. S.; CRISTOVÃO, E. M. Investigação Matemática: dificuldades encontradas por uma professora iniciante. **Cadernos da Pedagogia**. v. 4, n. 7, 2010, p. 125-134.

SIQUEIRA FILHO, A. J. **Aplicações e Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes**. 84f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Piauí. Teresina, 2013.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**. n. 14, 2000, p. 66-91.

SOARES, E. P. G. Webquest: metodologia de pesquisa orientada apoiada pelas tecnologias digitais que favorece o processo de ensino aprendizagem. In: **Olhares e Trilhas**, v. 12, n. 12, jul./dez. 2010.

STORMOWSKI, V. **Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas**. 2008. 157f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

TEODORO, J. V.; LOPES, J. M. Evolução e perspectivas da tecnologia em sala de aula e na formação docente. In: **Revista Educação e Fronteiras On-Line**, v. 3, n. 8, 2013, p. 91-104.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: planejamento e métodos**. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.



## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A: Atividades 1 e 2

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### ATIVIDADE 1

Em cada quadrado que você recebeu (Figura A, faça um desenho, com a cola colorida, em uma de suas quatro partes.

Figura A

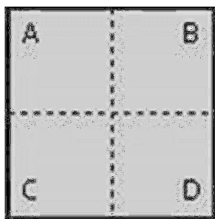


Figura B



Figura C




O que acontece com a figura desenhada quando o quadrado é dobrado em relação:


- a) ao eixo horizontal (Figura A)?
- b) ao eixo vertical (Figura B)?
- c) a uma diagonal?
- d) a outra diagonal?

### ATIVIDADE 2

Com o auxílio do *software* GeoGebra, faça o que se pede:


- a) Abra o arquivo “Reflexão a”.


Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação ao **Eixo X**.

Obs.: **Selecione primeiro o objeto** (figura) **e, depois, a reta de reflexão** (EixoX).

- b) Abra o arquivo “Reflexão b”.


Clique na seta do comando .


Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação ao **EixoY**.

Obs.: **Selecione primeiro o objeto** (figura) **e, depois, a reta de reflexão** (EixoY).

- c) Abra o arquivo “Reflexão c”.

Insira no **Campo de Entrada** situado na parte inferior do *software* a lei da função:  $y = x$  e pressione a tecla **Enter**.


Clique na seta do comando .


Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação a esta reta.

Obs.: **Selecione primeiro o objeto** (figura) **e, depois, a reta de reflexão** ( $y = x$ ).

- d) Abra o arquivo “Reflexão d”.

Insira no **Campo de Entrada** situado na parte inferior do *software* a lei da função:  $y = -x$  e pressione a tecla **Enter**.

Clique na seta do comando .


Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação a esta reta.


Obs.: **Selecione primeiro o objeto** (figura) **e, depois, a reta de reflexão** ( $y = -x$ ).


- e) Abra o arquivo “Reflexão e”.

Refaça o item *a* e, a partir da figura obtida, repita os passos do item *b*. Após esse procedimento, você encontrará uma figura que nomearemos de Figura A.  
Minimize a janela do GeoGebra.

- f) Abra o arquivo “Reflexão f”.

Selecione a ferramenta  e marque o ponto A (0,0)

Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  para fazer a reflexão desta figura em relação a este ponto. Considere a figura transformada como sendo a figura B.

Obs.: **Selecione primeiro o objeto** (figura) **e, depois, ao centro de reflexão** (ponto A).

- De acordo com os itens *e* e *f*, o que você observa em relação à posição e à forma das figuras A e B?

---

---

---

---

### Definição

---

---

---

---

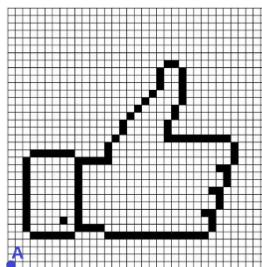
## APÊNDICE B: Atividades 3 e 4

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### ATIVIDADE 3

Observe a figura a seguir.



Abaixo, as letras indicam quantos graus deve girar essa figura e os números, a posição da mesma após o giro, feito no sentido anti-horário a partir do ponto A. Com o auxílio do transferidor, faça a associação correta:

(A)  $27^\circ$

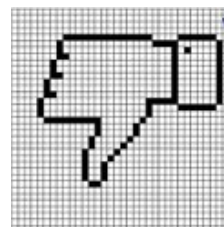
(B)  $55^\circ$

(C)  $90^\circ$

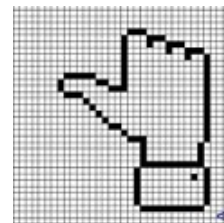
(D)  $162^\circ$

(E)  $180^\circ$

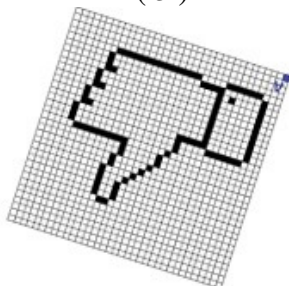
(1)



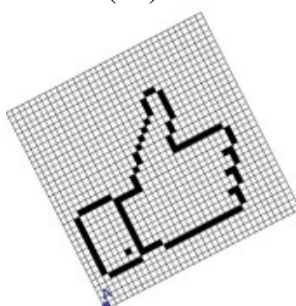
(2)



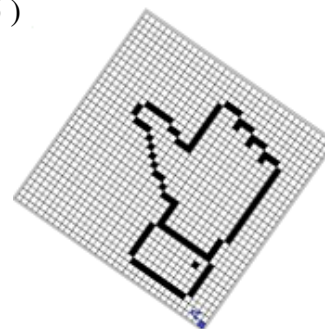
(3)



(4)



(5)




### ATIVIDADE 4

Com o auxílio do *software* GeoGebra, faça o que se pede:

- a) Abra o arquivo “Rotação a”.

Selecione a ferramenta  e marque o ponto (0,0)

Clique na seta do comando ,

Selecione a ferramenta  **Rotação em torno de um ponto.**

Clique na figura e, em seguida, no ponto (0,0)

Insira no campo correspondente ao **Ângulo**,  $28^\circ$

Marque a opção **sentido anti-horário** e clique em **Ok**.

O que você observou?

---



---

- b) Abra o arquivo “Rotação b”.

Refaça os passos do item anterior utilizando o ponto (2,3) e um ângulo obtuso.

O que você observou?

---



---

- c) Abra o arquivo “Rotação c”.

Refaça os passos do item *a* para o ponto (1,-4) e um ângulo agudo.

O que você observou?

---



---

### Definição

---



---



---




---

## APÊNDICE C: Atividades 5 e 6

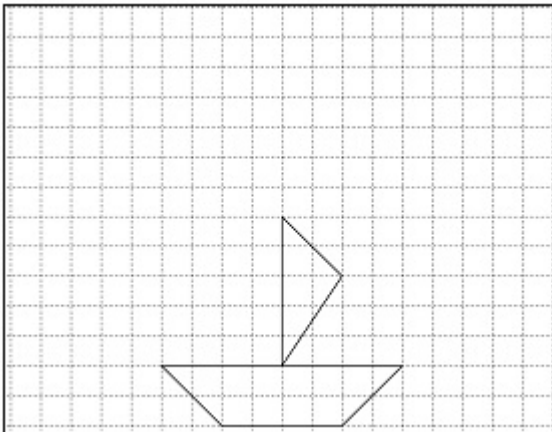
Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

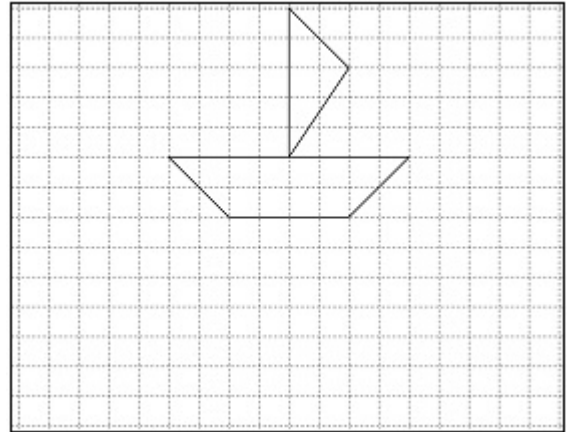
### ATIVIDADE 5

Na malha quadriculada utilizada nos itens abaixo, considere cada lado do quadrado  como uma unidade de medida. A seguir, desenhe cada uma das figuras apresentadas, com um deslocamento de:

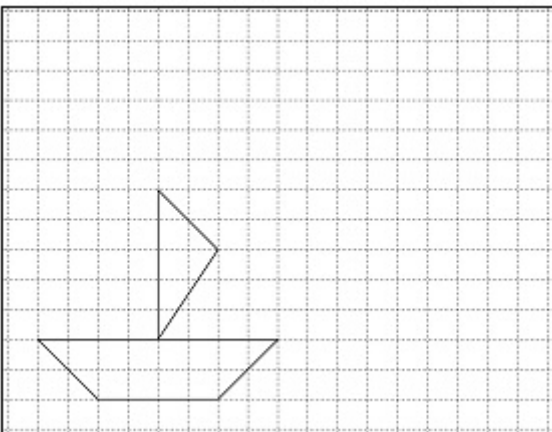
a) 3 unidades para cima.



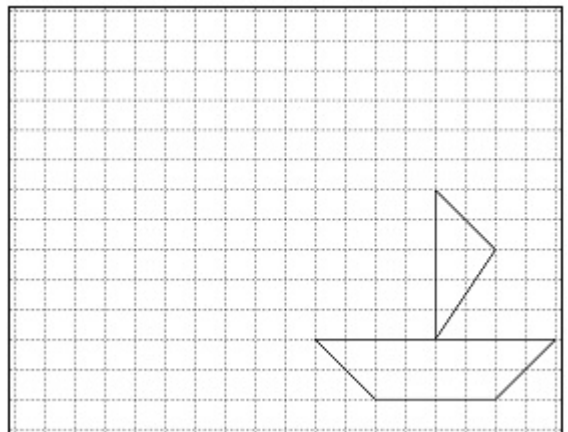
b) 5 unidades para baixo.



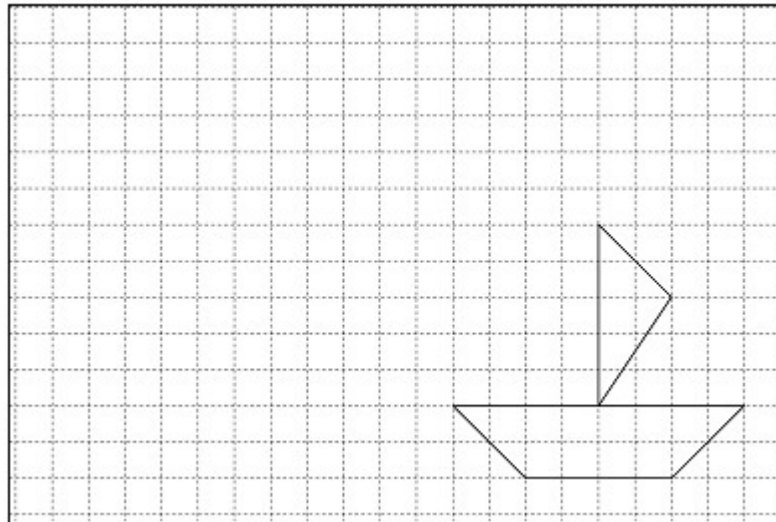
c) 8 unidades para a direita.



d) 10 unidades para a esquerda.




e) 4 unidades para cima e 11 unidades para a esquerda.




### ATIVIDADE 6


Com o auxílio do *software* GeoGebra:


Abra o arquivo “Translação”

Clique na seta do comando .


Selecione a ferramenta  **Vetor** e construa um vetor qualquer com origem no ponto  $(-2,2)$ .


Obs.: **Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade.**

Clique na seta do comando .

Selecione a ferramenta  para fazer a translação dessa figura em relação a esse vetor.

Obs.: **Selecione primeiro o objeto (figura) a ser transladado e, depois, um vetor ( $\vec{IJ}$ ).**

Clique na seta do comando .


Selecione a ferramenta  **Segmento** e clique os vértices correspondentes (Ex: A e A').

Clique com o botão esquerdo sobre cada um dos segmentos.

Selecione a opção Propriedades e, a seguir, a caixa **Exibir Rótulo**.



Troque a palavra **Nome** por **Valor**.

Clique em um dos pontos do vetor com a ferramenta  selecionada e arraste este ponto.

O que você pode observar:

---

---

---

### Definição

---

---

---

---

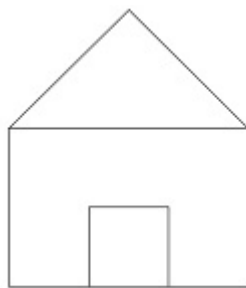
## APÊNDICE D: Atividades 7 e 8

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

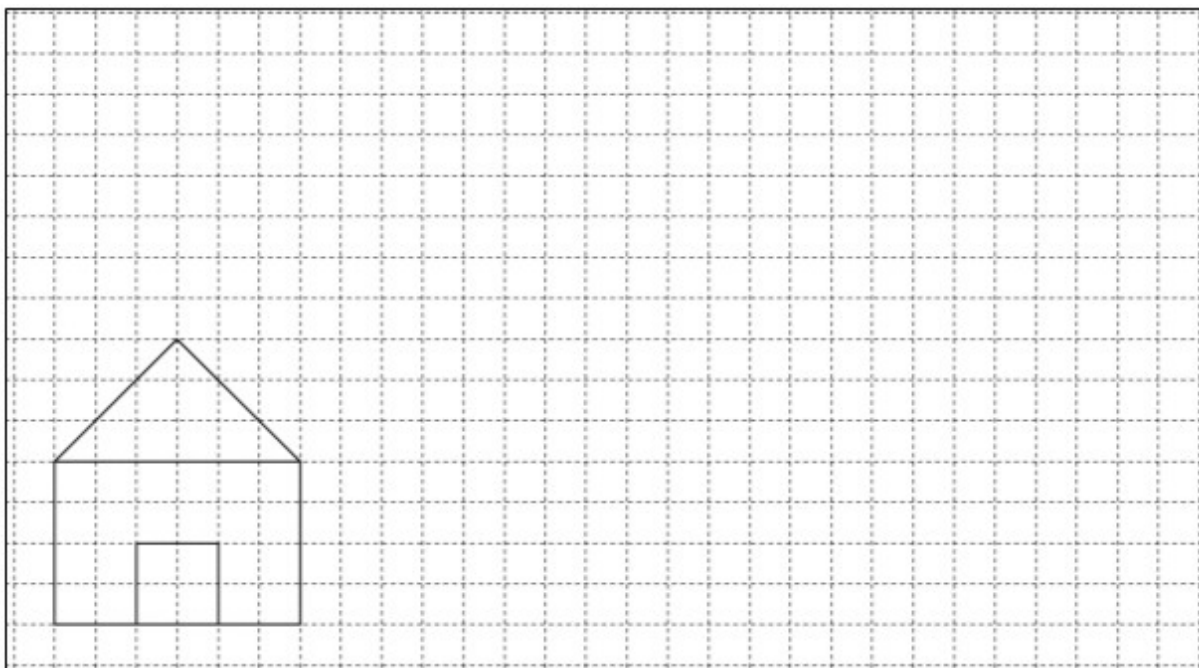
Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### ATIVIDADE 7

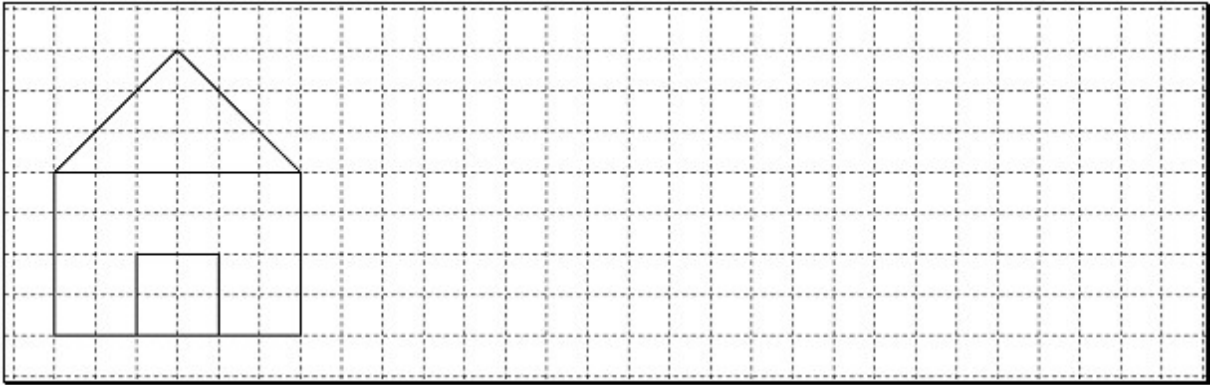
Dada a figura abaixo:



a) Amplie a figura na razão de 1 para 2.



b) Reduza a figura na razão de 1 para 0,5.




### ATIVIDADE 8

Com o auxílio do *software* GeoGebra, faça o que se pede:

a) Abra o arquivo “Homotetia a”.

Selecione a ferramenta  e marque o ponto (0,0)

Clique na seta do comando ,

Selecione a ferramenta  **Homotetia**

Clique na figura e, em seguida, no ponto (0,0)

Insira no campo correspondente ao **Fator** o número 3 e clique no botão **Ok**.

b) Abra o arquivo “Homotetia b”.

Refaça os passos do item anterior e utilize um **Fator** entre 0 e 1.

c) Abra o arquivo “Homotetia c”.

Siga os passos do item *a* para o ponto (10,-2) e utilize um **Fator** maior do que 1.

- De acordo com os itens *b* e *c*, o que você observa em relação à forma e ao tamanho da figura transformada?

---

---

---

- E quando o fator for igual a 1?

---

---

**Definição**

---

---

---

---

## APÊNDICE E: Atividade 9

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES

- **Reflexão**

➤ Reflexão em relação ao eixo  $x$ .

1. Abra o arquivo “Barco\_X” e faça a reflexão da figura em relação ao **EixoX**.

Dica: selecione todos os pontos com o cursor do mouse e depois clique no comando e no eixo.

2. Representando cada ponto da figura por  $(x, y)$  e cada ponto transformado por  $(x', y')$ , preencha a tabela abaixo:

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(-1,1)		A'
B	(3,1)		B'
C	(5,3)		C'
D	(-3,3)		D'
E	(1,3)		E'
F	(1,8)		F'
G	(3,6)		G'

É possível encontrar o ponto  $(x', y')$  a partir da multiplicação de matrizes, de um ponto  $(x, y)$  e da matriz de reflexão em relação ao eixo  $x$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Verifique, considerando  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

➤ Reflexão em relação ao eixo y.

1. Abra o arquivo “Barco\_Y” e faça a reflexão da figura em relação ao **EixoY**.

Dica: selecione todos os pontos com o cursor do mouse e depois clique no comando e no eixo.

2. Representando cada ponto da figura por  $(x, y)$  e cada ponto transformado,  $(x', y')$ .

Preencha a tabela abaixo:

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A	(4,-3)		A'
B	(8,-3)		B'
C	(10,-1)		C'
D	(2,-1)		D'
E	(6,-1)		E'
F	(6,4)		F'
G	(8,2)		G'

É possível encontrar o ponto  $(x', y')$  a partir da multiplicação de matrizes, de um ponto  $(x, y)$  e da matriz de reflexão em relação ao eixo y,  $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Verifique, considerando  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

- **Rotação**

Para rotacionar um ponto  $(x, y)$ ,  $\alpha$  graus, no sentido anti-horário e em torno da origem, é feita a multiplicação da matriz  $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  pela matriz  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , gerando uma matriz  $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  com a nova posição  $(x', y')$  dos pontos após a rotação:  $P' = RP$ .

1. Qual seria o novo ponto após uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário do ponto  $(-1, 7)$ ?

2. Qual seria o novo ponto após uma rotação de  $30^\circ$  no sentido anti-horário do ponto  $(4, 2)$ ?

- **Translação**

1. Abra o arquivo “Seta” e preencha a tabela abaixo, em que os pontos de A a G formam a figura inicial (azul) e os pontos de A’ a G’ formam a figura transladada.

	$(x, y)$	$(x', y')$	
A			A'
B			B'
C			C'
D			D'
E			E'
F			F'
G			G'

2. A partir dos valores encontrados de  $x'$  e  $x$ , para cada ponto, determine o valor de  $x' - x$ . Qual a relação entre  $x$  e  $x'$  ?

---



---

3. A partir dos valores encontrados de  $y'$  e  $y$ , para cada ponto, determine o valor de  $y' - y$ . Qual a relação entre  $y$  e  $y'$  ?

---



---

4. Utilizando operações com matrizes de que forma podemos encontrar o ponto

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ a partir do ponto } A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ?$$

---



---



---



---



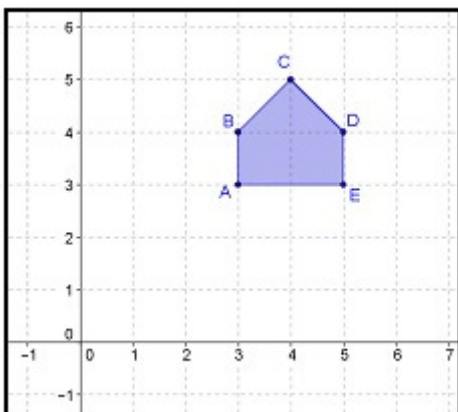
---



---

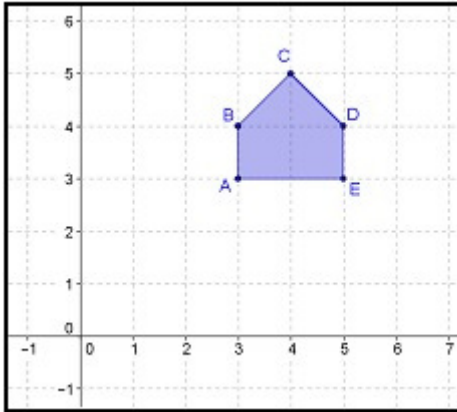
5. Com base na conclusão acima, translate cada ponto da figura e escreva as coordenadas dos pontos obtidos após a translação de:

a) 4 unidades para baixo.





b) 3 unidades para cima e 5 unidades para esquerda.



6. Determine a matriz de translação  $D$ , em cada item, utilizando a equação  $D + A = A'$ .

a)  $M = (7,4)$  e  $M' = (15, -2)$

b)  $N = (1,5)$  e  $N' = (-4, -2)$

## APÊNDICE F: Atividade 10

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

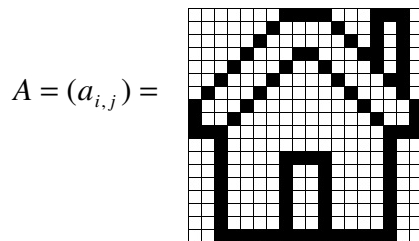
Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES ESPECIAIS

Questão 1:

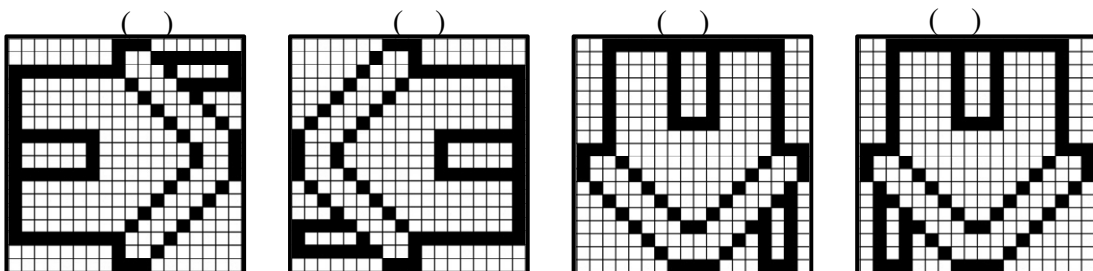
A computação gráfica utiliza as matrizes para representar, por meio de *pixels* (pequenos pontos coloridos), as imagens que serão geradas na tela do computador. O que é visto em sua tela é uma enorme matriz e que cada valor guardado nas linhas e colunas representa um *pixel*. Quando um programa altera a posição da imagem na tela, na verdade está reorganizando os *pixels* que a formam. Esse processo é feito por operações de matrizes e, na computação gráfica, representa as transformações geométricas (DANTE, 2011, p.96)<sup>9</sup>.

Considere a matriz A:



Identifique nas figuras abaixo:

- (a) A matriz  $-A$  (oposta de A).
- (b) A matriz  $A^t$  (transposta de A).



<sup>9</sup> DANTE, L.R. **Matemática**: Contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011.

Lembre-se:

(i) **Matriz transposta:** chama-se transposta de uma matriz  $A$ , e indica-se por  $A'$ , a matriz que se obtém transformando-se, ordenadamente, cada linha de  $A$  em coluna.

(ii) **Matriz oposta:** chama-se oposta de uma matriz  $A$  e indica-se por  $-A$ , a matriz que se obtém multiplicando cada elemento de  $A$  por  $-1$ .

Questão 2:

Vamos descobrir que tipo de transformação geométrica ocorre quando efetuamos o produto de uma matriz por uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais?

Lembre-se:

**Matriz diagonal:** É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais à zero.

Exemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

**Matriz identidade** (ou matriz unidade) **de ordem  $n$ :** é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a um.


Exemplos:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizaremos o GeoGebra na busca dessa resposta. Para isso:

Abra o arquivo “Pentágono”.

Clique na seta do comando ,

Selecione a ferramenta  **Semirreta**.

Crie semirretas partindo do ponto  $O$  e passando por cada vértice da polígono.


Obs.: **Selecione primeiro a origem (O) e, depois, um outro ponto.**


Agora, multiplique a matriz H pelo ponto que representa cada vértice do polígono.

Obs.: Insira no **Campo de Entrada**  $H \cdot A$ , por exemplo, e clique Enter

- a) A matriz H é uma matriz diagonal? \_\_\_\_\_
- b) O que você observa em relação aos elementos da diagonal principal?

\_\_\_\_\_

Clique na seta do comando ,

Selecione a ferramenta  **Polígono** e clique em todos os pontos que já surgiram.

- c) Que relação tem a medida dos lados do polígono que você construiu com os do polígono inicial?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Clique no comando  e movimento o seletor k.

- d) Como foi gerada essa transformação geométrica?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- e) O que acontece com a figura transformada quando o fator ( $k$ ):

i)  $0 < k < 1$ ?

\_\_\_\_\_

ii)  $k = 1$ ?

\_\_\_\_\_

iii)  $k > 1$ ?

\_\_\_\_\_

## APÊNDICE G: Atividade 11

Licenciatura em Matemática – Atividade para o teste exploratório  
Graduandos: Bruno Fillipe Gomes da Silva e Pâmella de Alvarenga Souza

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### EXERCÍCIOS

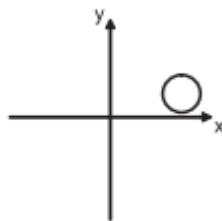
1. (IMENES; LELLIS, 2006) Na fotografia, você vê algo muito raro no Brasil. É um cristal de neve.



Percebe-se que essa figura tem simetria de rotação de:

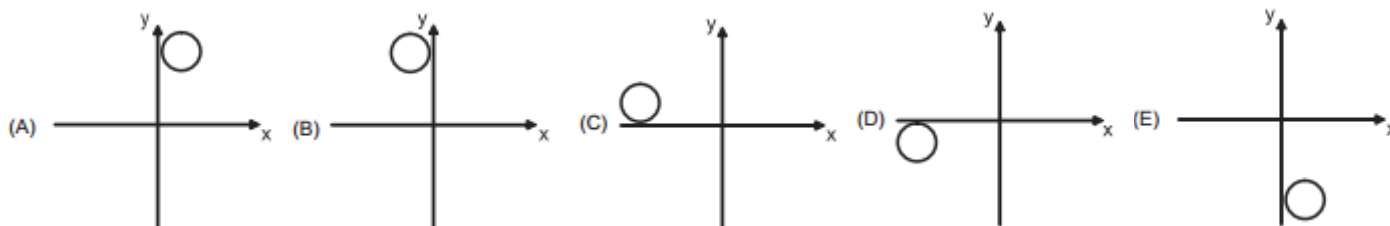
- a)  $15^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $90^\circ$       d)  $60^\circ$       e)  $45^\circ$

2. (Prominp, 2012)

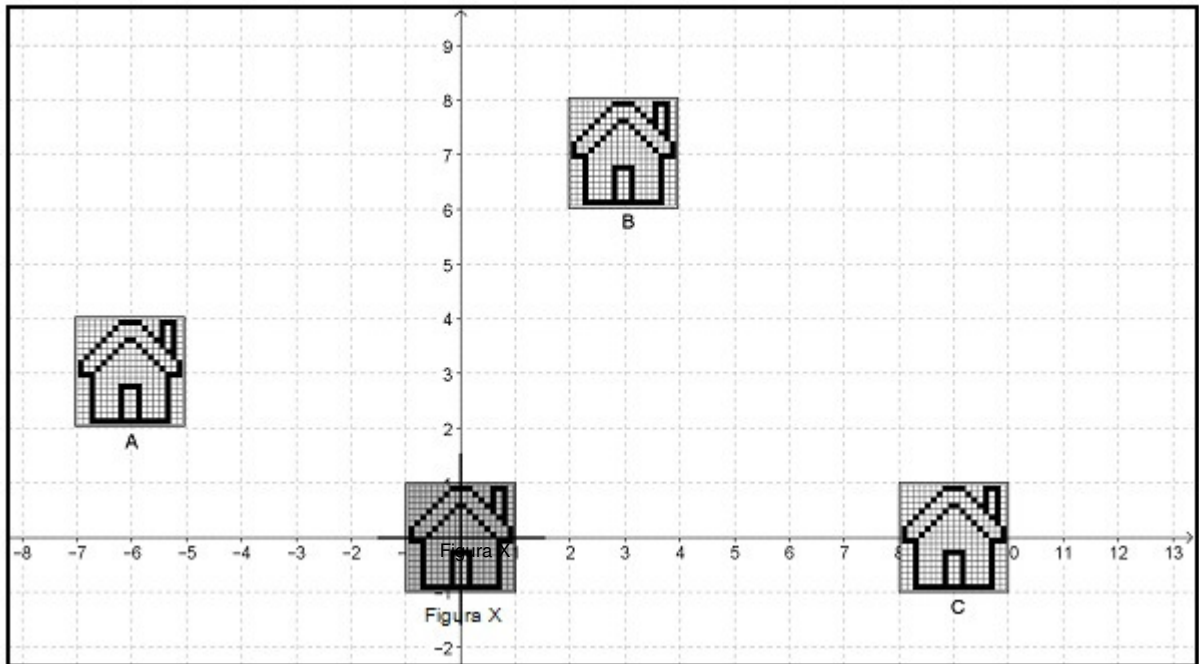


Aplicando a transformação  $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  a todos os pontos da circunferência da figura,

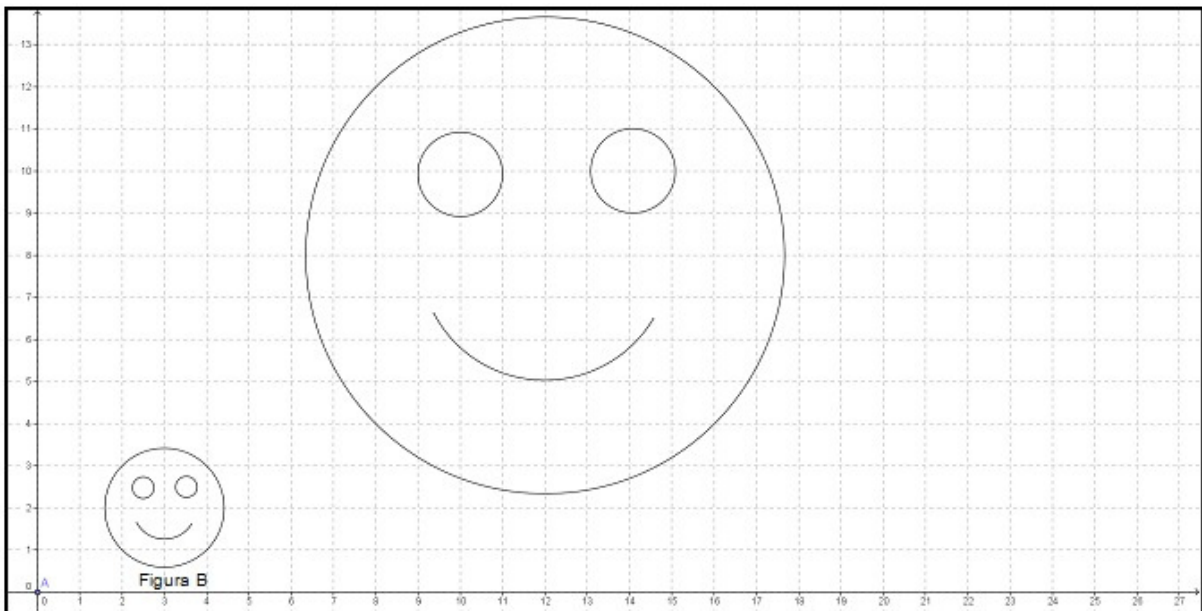
obtém-se como imagem



3. Determine, a partir da Figura X, a matriz de translação (D) em cada um dos casos ( $D_A$ ,  $D_B$ ,  $D_C$ ):



4. Dentre as opções abaixo, indique que transformação geométrica ocorreu com a Figura B.



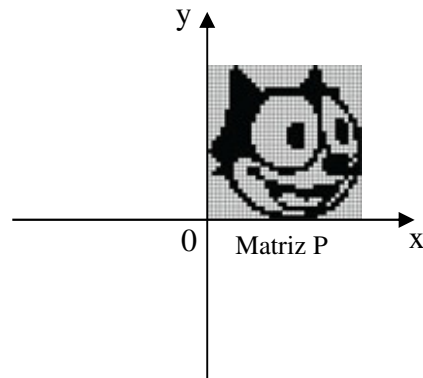
a) Homotetia -  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) Homotetia -  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) Translação -  $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

d) Translação -  $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. (UFF - Adaptado)<sup>10</sup> A figura abaixo representa a matriz P e ilustra o desenho do Gato Félix em um sistema de eixos coordenados.



Considere as seguintes transformações geométricas:

I é a transformação identidade,

X é a reflexão em torno do eixo  $x$ ,

Y é a reflexão em torno do eixo  $y$ ,

T é a transposta de P,

$R_{90}$  é a rotação de  $90^0$  no sentido anti-horário em torno da origem 0,

$R_{180}$  é a rotação de  $180^0$  no sentido anti-horário em torno da origem 0 e

$R_{270}$  é a rotação de  $270^0$  no sentido anti-horário em torno da origem 0.

Cada uma das figuras abaixo foi obtida a partir dessas transformações ou uma composição das mesmas.

Indique na segunda linha do quadro abaixo a transformação (ou a composição de transformações) que foi utilizada para obter cada uma dessas figuras, e na terceira linha a matriz correspondente a cada uma das transformações:


<sup>10</sup> Disponível em: [www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-aluno.rtf](http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-aluno.rtf). Acesso em: 10 abr. 2014.