INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A NATUREZA SOB UM PRISMA MATEMÁTICO

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2016

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA

A NATUREZA SOB UM PRISMA MATEMÁTICO

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Me. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

S618n Siqueira, Josué Rangel de.
A natureza sob um prisma matemático / Josué Rangel de Siqueira – 2016.
95 p. : il. color.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade.

Monografia (Licenciatura em matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos Centro, 2016.
Referências bibliográficas: p. 81-86.

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Andrade, Ana Paula Rangel de, orient. II. Título.

CDD – 510.7

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA

A NATUREZA SOB UM PRISMA MATEMÁTICO

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 24 de maio de 2016.

Banca Avaliadora:

Ana Paula Rangel de Andrade

Profª Ana Paula Rangel de Andrade (orientadora)
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo

Profª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro

Profª Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu grande Deus, que criou a natureza com infinito poder e sabedoria, e que, com graça e misericórdia deu-me condições de estudar os elementos matemáticos nela presentes.

Agradeço à minha amada esposa, Carla, que é minha companheira e amiga em todos os momentos, lutando e vencendo comigo um dia de cada vez, multiplicando as minhas alegrias e dividindo as minhas tristezas.

Agradeço aos meus queridos pais, Noé e Isaura, pela educação que me deram pra vida, pelo exemplo que são pra mim e pelas orações em meu favor. Tê-los por perto diminui meus problemas.

Agradeço aos meus especiais irmãos, Noísa e Jônatas, pelos momentos vividos juntos e pelo incentivo que sempre me anima a prosseguir. Vocês somam na minha vida!

Agradeço à estimada professora e orientadora, Ana Paula, que com dedicação e carinho percorreu toda a distância entre os dois pontos, o do começo e o do fim, oferecendo não apenas orientação para a monografia, mas também para a profissão e para a vida.

Agradeço aos estimados professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, que lecionaram com respeito e amor, dando-me demonstração de que os números, até os complexos, podem ser vistos sob outro prisma. Em especial, agradeço à Carmem Lúcia e à Márcia Valéria, que compuseram a banca deste trabalho.

Agradeço aos caros colegas de turma, em especial à Juliana e Mayck, pelo convívio e pelas progressões, não apenas as aritmética e geométrica, que alcançamos juntos.

Agradeço aos importantes alunos que participaram do teste de sondagem e das aplicações deste trabalho, permitindo que resultados satisfatórios fossem obtidos. Estamos lutando em função de um ensino de Matemática de qualidade.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei

RESUMO

A Matemática está presente em diversos elementos do dia a dia, inclusive na natureza. Estudiosos antigos e atuais têm afirmado que essa ciência não foi inventada, mas descoberta, bastando olhar com atenção a natureza para encontrá-la. Neste trabalho, foram destacados seis temas matemáticos: sequência de Fibonacci, razão áurea, espiral logarítmica, simetria, formas poligonais e fractais, todos acompanhados de exemplos na natureza. Em sua aplicação na sala de aula, foi possível abordar a importância da contextualização no processo de ensino e aprendizagem. A pesquisa teve, como objetivo, analisar se um estudo sobre as relações entre a natureza e a Matemática, abordando os seis temas citados, tem interferência sobre uma nova visão do aluno em relação a essa disciplina. Para tal, foi preparada uma palestra apresentada em quatro turmas, sendo do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, na modalidade regular e na EJA e do Ensino Superior, todas em escolas públicas da cidade de Campos dos Goytacazes. A apresentação foi feita por meio de exposição oral dialogada e com a apresentação de *slides* e vídeos, buscando garantir um maior dinamismo. A pesquisa, de caráter qualitativo, teve como instrumentos de coleta de dados a observação direta, as anotações no caderno de campo e as respostas dos alunos a um questionário. Os resultados mostraram que a exposição feita sobre os temas permitiu que os alunos adquirissem uma nova visão em relação à Matemática. Na opinião deles, algumas relações entre a Matemática e a natureza podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Palavras-chave: Matemática. Natureza. Contextualização.

ABSTRACT

The mathematics is present in various elements of day-to-day, including in nature. Previous and current scholars have stated that this science was not invented, but discovered by simply looking with attention the nature to find it. In this work, were highlighted six mathematical themes: Fibonacci sequence, golden ratio, the logarithmic spiral, symmetry, polygonal shapes and fractals, all accompanied by examples in nature. In its application in the classroom, was possible to address the importance of contextualization in the process of teaching and learning. The research, had as objective, to analyze whether a study on the relationship between the nature and Mathematics, addressing the six themes mentioned, has interference on a new vision of the student in relation to this discipline. For such, was prepared a lecture presented in four classes, with Elementary School, High School, in regular mode and in EJA and Higher Education, all in public schools of the city of Campos dos Goytacazes. The presentation was made by means of oral exposure dialoged and with the slideshow and videos, seeking to ensure a greater dynamism. The research of qualitative nature, had as the data collection instrument direct observation, the annotations in a field book and student answers to a questionnaire. The results showed that the presentation on the themes allowed the students to acquire a new vision of Mathematics. In the students' opinion, some relations between Mathematics and nature can contribute to the process of teaching and learning this discipline.

Key words: Mathematics. Nature. Contextualization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A natureza está repleta de elementos matemáticos. É possível percebê-los nas plantas, nos animais, no ser humano, no cosmos, enfim, na criação. Desde a antiguidade até os dias atuais, estudiosos, sábios e matemáticos têm destacado a presença da Matemática na natureza. Eles têm se mostrado "admirados com a aparente capacidade de a Matemática moldar e guiar o universo" (LIVIO, 2012, p.14).

Platão (427-347 a.C.), por exemplo, fez uma associação entre os cinco elementos da natureza e os cinco sólidos regulares. Para ele, "a terra é associada ao cubo estável; a qualidade 'penetrante' do fogo, ao pontudo e relativamente simples tetraedro; o ar, à aparência 'móvel' do octaedro, e a água, ao multifacetado icosaedro. O quinto sólido, o dodecaedro, era atribuído por Platão ao universo como um todo, ou, em suas palavras, o dodecaedro é aquele 'que Deus usou para ornamentar as constelações de todo céu'" (apud LIVIO, 2015, p. 85).

Para Pitágoras (570 – 497 a.C.), a natureza é constituída de um sistema de relações e de proporções matemáticas derivadas da unidade, que ele concebia como sendo o número um e a figura geométrica *ponto.* Os pitagóricos foram os primeiros a cultivar as matemáticas de modo sistemático, notando que todos os fenômenos naturais são traduzíveis por relações numéricas e representáveis de modo matemático (CABRAL, s.d.). Pitágoras afirmava que "todas as coisas conciliam-se em número" (LIVIO, 2012, p.35).

Filolau de Crotona (470-385 a.C.), um dos mais destacados representantes da escola pitagórica, afirmou: "todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número" (apud CARAÇA, 2000, p.69).

Galileu Galilei (1564-1642), renomado matemático, físico e astrônomo, declarou:

> A filosofia está escrita nesse grandioso livro, o Universo, que permanece constantemente aberto para nossa leitura. Mas o livro não pode ser entendido da forma correta se não aprendermos primeiro a compreender a linguagem e a ler as letras em que foi redigido. Ele foi escrito em linguagem matemática e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem os quais é humanamente impossível entender uma única palavra; sem eles, nos perdemos no labirinto escuro (apud CREASE, 2011, p.56).

May Sarton (1912-1995), uma poetisa norte americana, disse: “Vejo uma certa ordem no universo, e a matemática é uma maneira de fazê-la visível” (apud LIVIO, 2015, p. 23).

Segundo Nokolai Lobachevsky (1792-1856), matemático russo que deu importante contribuição para a geometria não euclidiana, “não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa vir a ser aplicado mais cedo ou mais tarde, aos fenômenos do mundo real” (apud BOYER, 1996, p.387).

O apóstolo Paulo, que viveu no primeiro século da era cristã, afirmou que “pois desde a criação do mundo os atributos invisíveis de Deus, seu eterno poder e sua natureza divina, têm sido vistos claramente, sendo compreendidos por meio das coisas criadas” (ROMANOS, 2013). E Johannes Kepler (1571-1630), matemático, astrônomo e figura-chave da revolução científica do século XVII, declarou no seu livro “Harmonia do Mundo” (1619).

> Agradeço-vos, Senhor, nosso criador, por me haveres permitido contemplar a beleza da vossa criação; regozijo-me com as obras de Vossas mãos. Vede, completei a tarefa a que me senti chamado; ganhei o juro do talento que me haveis confiado. Proclamei a glória da Vossa obra àqueles que lerem estas demonstrações, até onde me permitiram as limitações do meu espírito (KEPLER apud DAVIS; HERSH, 1995, p.114).

Percebe-se que, para Paulo e para Kepler, existe a convicção de que a natureza não é obra do acaso, mas é objeto de criação de um Ser superior e poderoso. “Deus sempre geometriza”, (KEPLER, 1619 apud LIVIO, 2015, p.169), já que “antes da origem das coisas, a geometria era coeterna da Mente Divina” (apud LIVIO, 2015, p.179). Kepler buscava compreender as intenções do Criador, para que pudesse entender melhor o universo (LIVIO, 2015).

O físico James Jeans (1877-1946) afirmou: “O universo parece ter sido desenhado por um matemático puro” (LIVIO, 2012, p. 13). O escritor Clifford A. Pickover declarou: “Não sei se Deus é um matemático, mas a matemática é o tear com que Deus urdiu o tecido do Universo [...] o fato de que a realidade possa ser descrita ou aproximada por simples expressões matemáticas me sugere que a natureza tem a matemática em sua essência” (PICKOVER, 1997 apud LIVIO, 2015, p.272).

Esta citação suscita uma questão que é discutida: a Matemática foi inventada pelo homem ou foi descoberta por ele?

Na “visão platônica”, entende-se que a Matemática é universal, eterna e existe independente do homem. Alguns pensadores concordam com essa ideia. O matemático britânico G. H. Hardy diz que a função do homem não é inventar a Matemática, mas descobri-la ou observá-la (apud LIVIO, 2015). Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) declarou que a melhor fonte de descobertas matemáticas é o estudo aprofundado da natureza (apud HARTUNG, 2012). E os autores Philip Davis e Reuben Hersh afirmam que o universo impôs a Matemática à humanidade, cabendo ao ser humano apenas escutar a música e transcrever a melodia cantada pela natureza (DAVIS; HERSH, 1995).

A outra concepção é que a Matemática foi descoberta, cuja ideia está relacionada ao "formalismo" e ao "construtivismo". Entende-se que a Matemática não tem existência fora do cérebro humano, ou seja, o conhecimento matemático existente hoje é fruto da imaginação do homem. O filósofo alemão Immanuel Kant declarou que "a verdade definitiva da matemática está na possibilidade de que seus conceitos possam ser construídos pela mente humana" (apud LIVIO, 2015, p.273). E o matemático Michael Atiyah, ganhador de prestigiados prêmios matemáticos, afirma que "o homem criou a matemática por idealização e abstração dos elementos do mundo físico" (LIVIO, 2012, p. 24).

Esta visão em relação à Matemática precisa ainda enfrentar duas perguntas: Por que a Matemática é tão precisa na explicação do universo e por que alguns conceitos matemáticos se ajustam tão perfeitamente a fenômenos físicos? (LIVIO, 2015).

Albert Einstein (1879-1955) também indagou "[...] como é possível que a matemática, um produto do pensamento humano que é independente da experiência, ajuste-se tão perfeitamente a objetos da realidade física?" (EINSTEIN, 2005).

A discussão sobre a origem da Matemática continua, até que cada um possa ter a sua própria resposta.

Os personagens e as citações apresentadas indicam que, desde séculos antes de Cristo até os dias atuais, o homem tem notado a Matemática e se admirado com a presença dela na natureza.

Neste trabalho, serão apresentados temas matemáticos que são encontrados na natureza, a saber: sequência de Fibonacci, razão áurea, espiral logarítmica, simetria, formas geométricas e fractais.

Em todos os assuntos matemáticos abordados notar-se-á a existência de padrões, já que é possível estabelecer regularidades na forma como estes se apresentam. A Matemática, inclusive, é conhecida como a ciência dos padrões. Stewart (1996), em obra de Menegassi (2007) afirma:

> [...] a mente e a cultura humanas desenvolvem um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões. Nós o chamamos matemática. Usando a matemática para organizar e sistematizar nossas idéias [sic] a respeito de padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da natureza não existem somente para ser admirados, eles são pistas vitais para as regras que governam os processos naturais (STEWART, 1996 apud MENEGASSI, 2007, p. 7).

Segundo Devlin, o que o matemático faz é examinar padrões abstratos, podendo ser padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, entre outros. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana (DEVLIN, 2002).

De fato, o estudo de padrões pode ser útil no processo de aprendizagem. Orton (1999 apud BARBOSA et al., 2008) declara:

> [...] os padrões permitem aos alunos a construção de uma imagem mais positiva da Matemática, a conexão com diversos temas, a melhora nas suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de suas habilidades de classificar e ordenar informações e a compreensão da relação existente entre a Matemática e o mundo.

É também marcante a presença da geometria, que se encontra em praticamente todos os temas abordados. Na realidade, a natureza está repleta de elementos geométricos, bastando uma análise breve para constatar tal fato. Leonardo da Vinci (apud CONTADOR, 2011, p.189), afirmou:

> [...] não há na natureza, nada que seja tão pequeno ou insignificante que não mereça ser visto pelo olho da Geometria: há sim, uma agradável Geometria das criações da Natureza. Dificilmente encontraremos algo que não se possa relacionar com a Geometria.

Partindo da percepção de que a geometria é um importante caminho no processo de construção do conhecimento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) defendem que:

> [...] por meio deles [conceitos geométricos], o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e

> medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc [...] Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico [...] de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p.51).

A observação e o estudo "de objetos do mundo físico" permite que o ensino e a aprendizagem ocorram mais facilmente. D´Ambrósio comenta no prefácio de sua autoria, do livro "Matemática com prazer", de Catarina Vitti:

> O ensino da Matemática tem sido traumatizante [...] a Matemática é considerada difícil por muitos, desinteressante por outros, até inacessível para muitos [...]
> A proposta de Catarina Vitti é recuperar o prazer da aprendizagem matemática. E como principal estratégia usa a História da Matemática e a Geometria observada na natureza. Uma proposta muito original e eficiente [...] (VITTI, 1996 apud D´AMBROSIO, 1996, p. 7-8).

Quando se apresenta um conteúdo atraente para o aluno, sabe-se que este pode ser um fator incentivador para estimular a sua motivação no estudo da Matemática. "[...] O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que um aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele" (PAIS, 2008, p.27). Por meio da contextualização, a Matemática se mostra mais aplicável na realidade, o que possibilita maior compreensão por parte dos alunos.

Contextualizar o conteúdo que se quer aprender significa assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto (BRASIL, 2000). É importante destacar:

> O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transferido para se tornar possível de ser ensinado, aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos.[...] Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social, e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber (BRASIL, 1997, p. 30).

Ainda segundo os PCN, o tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para fazer com que o aluno deixe de ser um espectador passivo e passe a ser ativo no processo de ensino aprendizagem. Tal forma de ensino permite a criação de uma ponte entre a teoria e a prática, criando um elo entre o que se aprende na escola e o que se faz, o que se vive e se observa no dia a dia. A contextualização dá significado aos estudos feitos na sala de aula (BRASIL, 2000).

Diante do exposto, propôs-se a seguinte questão de pesquisa: De que forma a apresentação de um estudo sobre a relação entre a natureza e a Matemática pode contribuir para a formação de uma nova visão do aluno a respeito dessa disciplina?

Para responder a essa questão, traçou-se o seguinte objetivo geral: analisar se um estudo sobre as relações entre a natureza e a Matemática, abordando os temas: sequência de Fibonacci, razão áurea, espiral logarítmica, simetria, formas geométricas e fractais, tem interferência sobre uma nova visão do aluno em relação a essa disciplina.

Os objetivos específicos são: (i) identificar relações entre a Matemática e a natureza; (ii) destacar nos temas abordados a ideia de padrão ou regularidade; (c) explorar os elementos geométricos presentes nos exemplos citados.

Este trabalho possui três capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais.

O primeiro capítulo apresenta o aporte teórico, no qual cada um dos seis temas estudados é descrito com suas definições e exemplos encontrados na natureza. É também comentada a importância da contextualização no ensino da Matemática e são mencionados alguns trabalhos relacionados a este.

No segundo capítulo, são abordados os aspectos metodológicos, a saber, a caracterização da pesquisa, na qual são descritos aspectos como o tipo de pesquisa, a coleta de dados e a estratégia de apresentação. É abordada ainda a estrutura da apresentação e a elaboração do questionário.

No terceiro capítulo há o relato da experiência, desde o teste de sondagem até a experimentação nas quatro diferentes turmas, abrangendo ainda a análise do questionário.

Ao término, são apresentadas as considerações finais e a resposta à questão de pesquisa.

1 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, é apresentado o aporte teórico que embasou a elaboração do trabalho. São abordados os seguintes assuntos: (i) A Matemática e a Natureza, apresentando-se as definições de seis temas matemáticos bem como exemplos de onde são encontrados na natureza; (ii) A Contextualização no Ensino de Matemática pois se entende que a relação entre a natureza e a Matemática seja uma ótima oportunidade de contextualizar o ensino; e (iii) Estudos Relacionados, quando são comentados alguns trabalhos acadêmicos que contêm aspectos semelhantes a este trabalho.

1.1 A Matemática na Natureza

Nesta seção são apresentados seis temas matemáticos e alguns exemplos vistos na natureza onde estes são encontrados.

Em alguns temas serão abordadas propriedades e conceitos matemáticos, que embora não tenham sido tratados na apresentação para as turmas, são importantes como aprofundamento teórico.

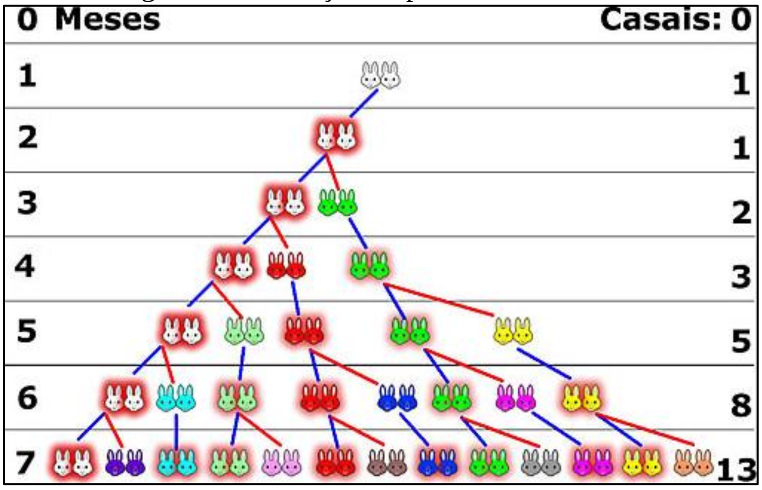
1.1.1 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci surgiu com o matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), que por ser filho de Guglielmo dei Bonacci, ficou conhecido como Leonardo Fibonacci. Segundo Livio (2015), ele foi o mais ilustre matemático europeu da Idade Média, já que introduziu a numeração indo-arábica na Europa, que até então utilizava a romana. Há, inclusive, uma estátua em sua homenagem na cidade italiana de Pisa (LIVIO, 2015).

A famosa sequência surgiu a partir de um problema proposto por Fibonacci em seu livro "*Liber Abaci*" (Livro de Ábaco), publicado em 1202: "Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?" (PAIVA, 2009, p. 216).

Pode-se pensar a solução do problema da seguinte forma: começa-se com um par de coelhos filhotes, portanto não aptos para procriar. No primeiro mês, os filhotes cresceram, mas como só serão férteis a partir do segundo mês não geram um novo casal. No segundo mês, a partir da condição de fertilidade, há dois casais, a saber, o inicial e o recém-nascido 1. No terceiro mês, são três casais, ou seja, o inicial, o recém-nascido 1 e o recém-nascido 2, gerado pelo inicial. No quarto mês, serão cinco casais de coelhos. No quinto mês, serão oito, e assim continuadamente. A Figura 1 ilustra o que foi descrito.

Figura 1 - Resolução do problema dos coelhos



Fonte: http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/.

Assim surgiu a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... que é composta por infinitos números naturais, em que os dois primeiros são o número 1, e do terceiro em diante, cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores. Essa característica é chamada de recursividade. Sua generalização é dada por $a_n = a_{n-2} + a_{n-1,}$ sendo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ (CONTADOR, 2011).

A sequência foi chamada de sequência de Fibonacci, no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891) (LIVIO, 2015). No poema de Katherine O'Brien, ela comenta que quando Fibonacci não conseguia dormir, ao invés de contar ovelhas, ele contava coelhos (LIVIO, 2015).

Essa sequência possui várias propriedades. Algumas delas serão comentadas a seguir e foram extraídas do livro de Livio (2015), Razão Áurea: história de fi.

Uma das propriedades considera que, se for somado um número ímpar de produtos de números sucessivos de Fibonacci em sequência, então a soma será igual ao quadrado do último número utilizado nos produtos. Por exemplo: 1 x 1 + 1 x 2 + 2 x 3 = 9 e $3^2 = 9$. Outro exemplo: 1 x 1 + 1 x 2 + 2 x 3 +3 x 5 +5 x 8 + 8 x 13 + 13 x 21 = 441, que é o mesmo valor de 21^2.

Há uma propriedade relacionada ao número 11, que diz que a soma de quaisquer 10 números consecutivos da sequência de Fibonacci terá sempre como resultado um múltiplo de 11. Por exemplo: 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4184 = 10857, e 10857 = 987 x 11. Outra curiosidade é que o resultado desta soma será sempre o sétimo número utilizado na sequência, multiplicado por 11.

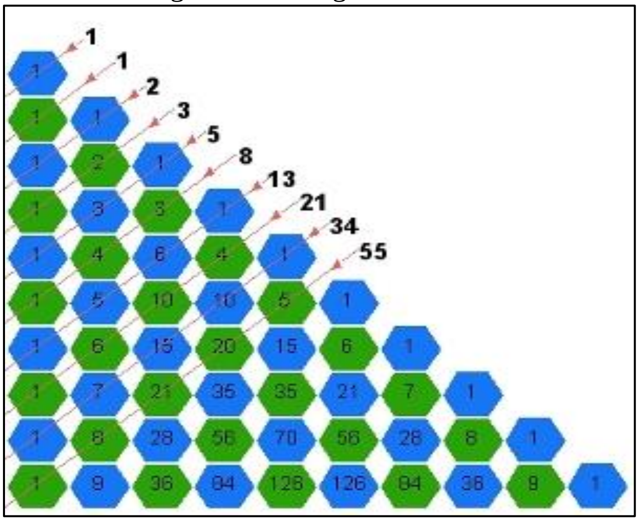
Existe também a propriedade em relação ao número 60. O dígito da unidade de um número, a partir do segundo da sequência, repete-se a cada sessenta números. Por exemplo: o segundo número da sequência é o 1. O próximo número da sequência cujo último número, a unidade, é 1, é o sexagésimo segundo número da sequência, ou seja, sessenta números depois. Após ele, o próximo número terminado em 1 está na posição 122, o outro na posição 182, e assim por diante. Os últimos dois dígitos aparecem a uma periodicidade de 300 e os três últimos a cada 1.500 números. Os últimos 4 se repetem a cada 15 mil vezes, os 5 últimos a cada 150 mil vezes, e assim por diante.

Uma maneira de somar **n** termos da sequência de Fibonacci também é uma interessante propriedade. Denotando os números da sequência de Fibonacci por $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$ e assim por diante, a soma dos n termos dessa sequência é dada por $f_{n+2} – 1$. Por exemplo: a soma dos dez primeiros números da sequência é 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143. Isso é o mesmo que o 12º (10 + 2) número da sequência (144) menos 1. A soma dos setenta e oito primeiros números da sequência seria dada pela subtração de uma unidade do octogésimo número da sequência.

Com a sequência de Fibonacci, também se obtém trincas pitagóricas, que são triplas de números que podem representar as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Tomando quaisquer quatro números consecutivos da sequência, a trinca pitagórica é encontrada da seguinte forma: um número é o produto entre os números dos extremos, outro é o dobro do produto dos números do meio e o outro é a soma dos quadrados dos termos do meio. Por exemplo, a sequência 1, 2, 3, 5. Temos 1 x 5 = 5; 2 x 2 x 3 = 12; $2^2 + 3^2 = 13$. Daí a trinca pitagórica 5, 12 e 13.

A sequência de Fibonacci também tem relação com o triângulo de Pascal. As diagonais do triângulo são iniciadas a partir do número 1. Traçadas paralelas e somados os números nela contidos, o resultado é a sequência de Fibonacci (Figura 2).

Figura 2 - Triângulo de Pascal



Fonte: http://www.uff.br/cdme/pascal/pascal-html/pascal-br.html.

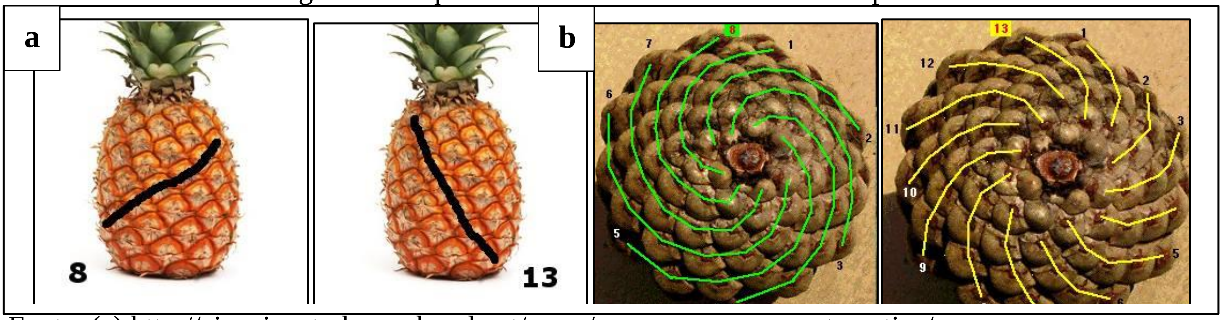
Observa-se um outro exemplo ao construir-se uma matriz quadrada com números sucessivos da sequência de Fibonacci, sendo os mesmos posicionados por linha. O determinante, nesse caso, será igual a zero pois, se uma fila da matriz é uma combinação linear de outras filas paralelas a ela, então o determinante é nulo (IEZZI; HAZZAN, 2013). Nesse caso, por exemplo, a terceira coluna é uma combinação linear da primeira e da segunda colunas, como podemos observar: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 & 233 \\ 377 & 610 & 987 & 1597 \end{vmatrix} = 0$

Outras propriedades a serem consideradas são: (i) A diferença dos quadrados de números alternados de Fibonacci é sempre um número desta sequência. Por exemplo, $8^2 – 3^2 = 55$; (ii) Para quaisquer quatro números consecutivos de Fibonacci, a diferença entre os quadrados dos números do meio é igual ao produto entre os números extremos. Por exemplo, na sequência 21, 34, 55, 89, fazendo $55^2 – 34^2 =1869$ e $21 \times 89 = 1869$; (iii) Para quaisquer três números consecutivos de Fibonacci, a soma dos cubos dos dois maiores menos o cubo do menor é igual a um número de Fibonacci. Como no exemplo: na sequência 5, 8, 13, tem-se que $13^3 + 8^3 – 5^3 = 2197 + 512 – 125 = 2584$, que é o 18º número da sequência de Fibonacci.

Na natureza, a sequência de Fibonacci é encontrada em vários lugares. Alguns exemplos serão apresentados adiante.

O abacaxi tem, em sua casca, pequenos hexágonos. Eles estão arrumados de tal forma que há espirais que podem ser traçadas tanto no sentido horário quanto no anti-horário. A quantidade dessas espirais geralmente são 8, num sentido e 13, no outro. Esses são números sucessivos da sequência de Fibonacci. Na pinha, ocorre fato semelhante (CONTADOR, 2011) (Figura 3).

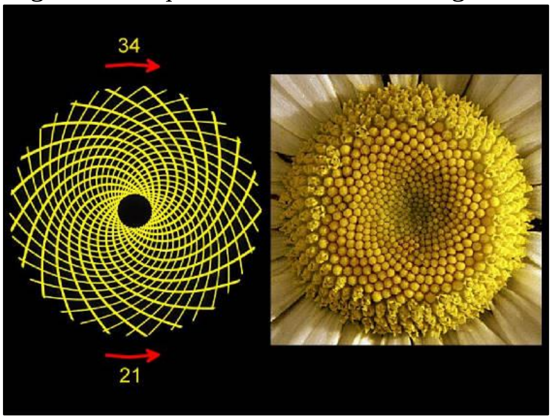
Figura 3 - Sequência de Fibonacci no abacaxi e na pinha



Fonte: (a) http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/.
(b)http://www.3villagecsd.k12.ny.us/wmhs/Departments/Math/OBrien/fibonacci2.html.

As sementes do girassol estão distribuídas em várias espirais, tanto no sentido horário quanto no anti-horário. O notável é que a quantidade de espirais segue sempre números sucessivos na sequência. Se houver 21 espirais num sentido, haverá 34 no outro (Figura 4). Se forem 55 num sentido, serão 89 no outro e, dependendo do tamanho do girassol, existem até 144 espirais num sentido e 233 no outro (LIVIO, 2015). Essa característica também pode ser encontrada nas folhas das alfaces, na couve-flor e nas camadas das cebolas.

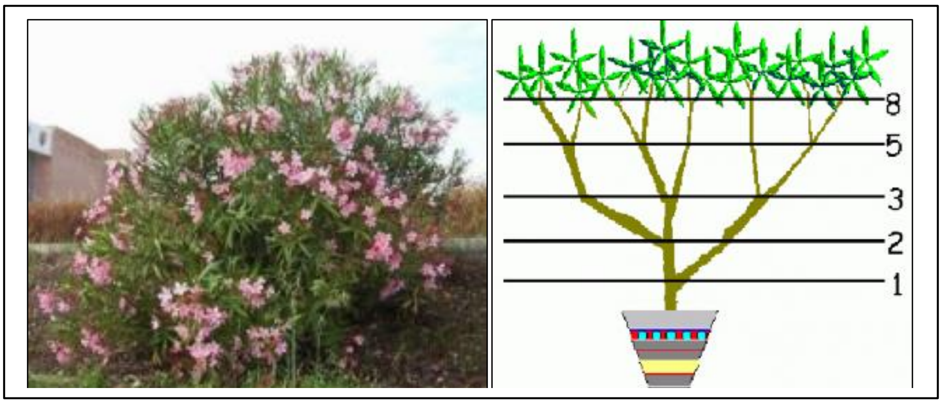
Figura 4 - Sequência de Fibonacci no girassol



Fonte:http://cienciapatodos.webnode.pt/news/
a-mitologia-e-a-verdade-daraz%C3%A3o-de-ouro.

A sequência de Fibonacci também está presente no crescimento dos galhos de uma espirradeira (Figura 5).

Figura 5 - Crescimento de galhos na espirradeira



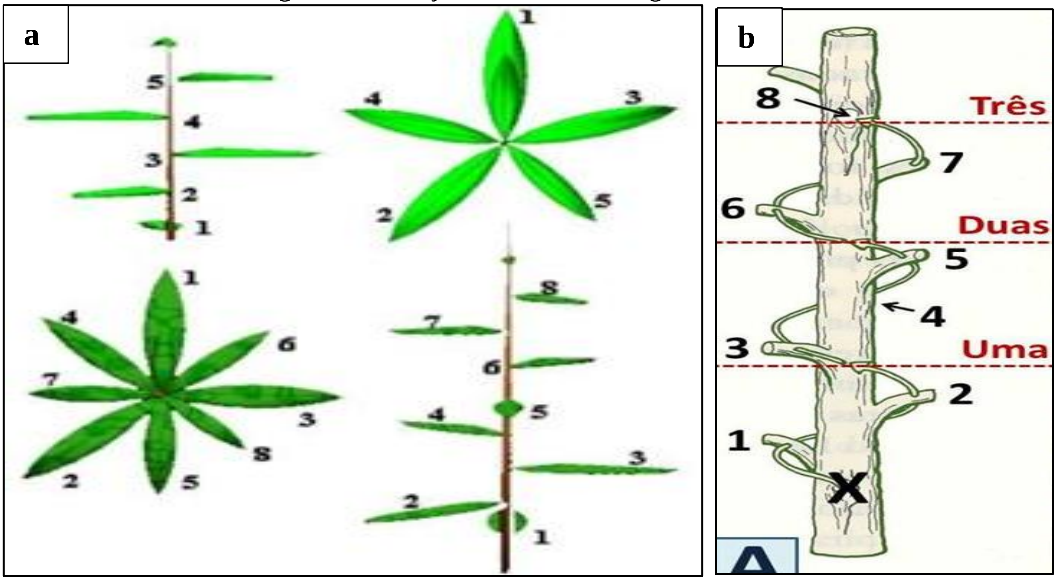
Fonte: http://infinito-matematica.co/curiosidades/.

As folhas em galhos de diversas plantas não crescem diretamente uma sobre a outra, pois isso impediria as folhas de baixo de receberem umidade e luz solar. A passagem de uma folha para a seguinte é caracterizada por espaçamentos do tipo parafuso em volta do ramo. Esse fenômeno recebe o nome de *phyllotaxia* (arranjo de folhas, em grego).

Ao escolher uma folha qualquer num galho, até chegar em outra que ocupe a mesma orientação da primeira, ter-se-á que passar por algumas outras folhas cuja quantidade é um número da sequência de Fibonacci (Figura 6 a).

Além disso, o número de voltas da espiral que se percorre até chegar à folha desejada e que ocupa a mesma orientação da primeira, também é um número pertencente à sequência de Fibonacci (Figura 6 b).

Figura 6 - Posição das folhas nos galhos

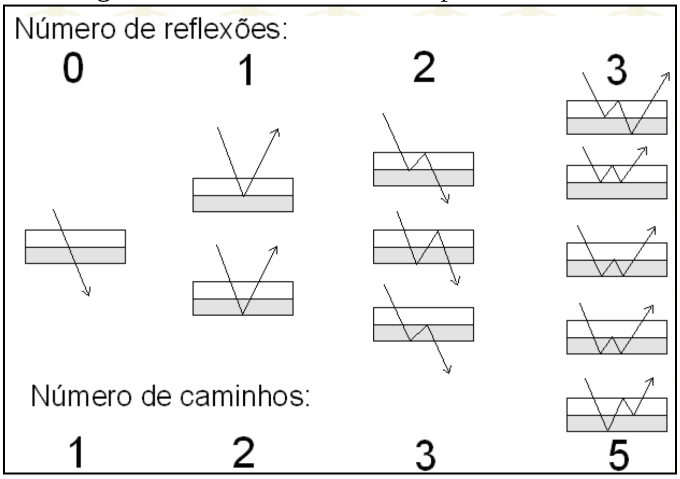


Fonte: (a) ttp://www.notapositiva.com/pt/trbestbs/matematica/11_fibonacci_natureza_d.htm (b) http://cienciapatodos.webnode.pt/news/%C3%A0-procura-de-fibonacci-ii/.

A razão entre o número de voltas da espiral e o número de folhas é chamada razão filotática ou razão de Fibonacci. Na aveleira, na amoreira e na faia, a razão é 1/3. Na macieira, no carvalho e no damasqueiro, a razão é 2/5. Já a pereira e o salgueiro-chorão têm razão filotática 3/8. É notável que o numerador e o denominador da razão fitotática são números alternados da sequência de Fibonacci. Johannes Kepler foi o primeiro a descobrir tal fato (LIVIO, 2015).

Outro exemplo da sequência de Fibonacci encontrada em elementos naturais dá-se no reflexo da luz. Quando um raio de luz incide sobre duas placas de vidro com diferentes índices de reflexão de luz, que são montadas face a face, existe uma relação entre o número de reflexões incidentes e o número de caminhos refletidos, com a sequência de Fibonacci. Quando não há reflexão, há apenas um raio emergente. Para uma reflexão, há dois possíveis caminhos. Para duas reflexões, três caminhos. Quando são três reflexões, há cinco possíveis caminhos. Se ocorrem quatro reflexões, são oito caminhos possíveis. Ou seja, ao aumentar o número de reflexões em uma unidade, o número de caminhos aumenta seguindo a sequência de Fibonacci (Figura 7).

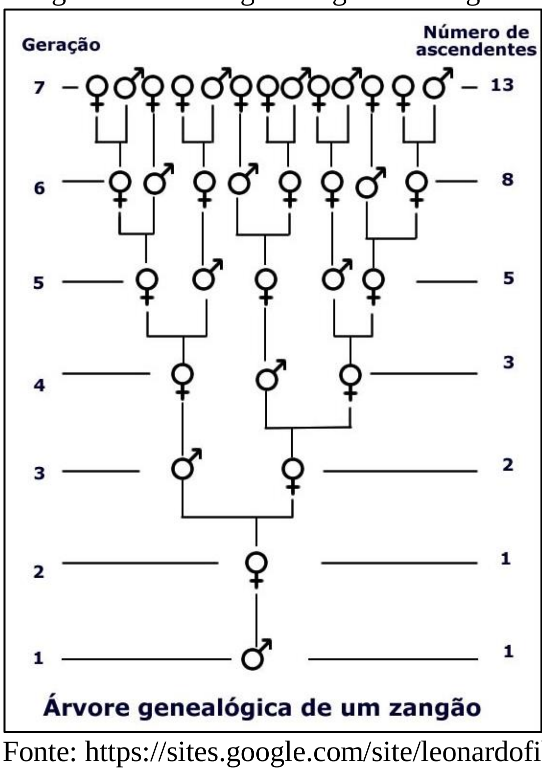
Figura 7 - Reflexões de luz em placas de vidro



Fonte: http://www.seara.ufc.br/donafifi/fibonacci/fibonacci6.htm.

Na árvore genealógica do zangão, também aparece a sequência de Fibonacci (Figura 8). Os ovos de abelhas operárias, que não são fertilizados, se tornam zangões. Logo, um zangão não tem um pai, mas tem uma mãe. Já os ovos da abelha rainha são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas, então, uma abelha possui um pai e uma mãe. Sendo assim, um zangão terá uma mãe, dois avós, três bisavós, cinco trisavós, oito tetravós e assim por diante. Tais números compõem a sequência de Fibonacci (LIVIO, 2015).

Figura 8 - Árvore genealógica do zangão



Fonte: https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/aplicacoes-da-sequencia-de-fibonacci.

Existe uma estreita relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea, que é o tema abordado a seguir.

1.1.2 Razão Áurea

A razão áurea, também conhecida como proporção áurea, número de ouro ou divina proporção refere-se a um número irracional, representado pela letra grega *phi* (φ), e de valor aproximado 1,618 (MENDES, 2007). Ela tem inspirado mais pensadores de todas as disciplinas do que qualquer outro número na história da Matemática (LIVIO, 2015).

Existe uma relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci pois, à medida que avançamos na sequência, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci se aproxima cada vez mais da razão áurea (LIVIO, 2015). Ou seja, a divisão de um termo a_n $(n \geq 3)$ dessa sequência pelo seu antecessor, aproxima-se cada vez mais de um número específico, que é o número de ouro (Figura 9).

Figura 9 - Razão áurea na sequência de Fibonacci

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{13}{8} = 1{,}625$	$\frac{144}{89} \cong 1{,}618$
$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{21}{13} \cong 1{,}615$	$\frac{233}{144} \cong 1{,}618$
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{34}{21} \cong 1{,}619$	$\frac{377}{233} \cong 1{,}618$
$\frac{5}{3} \cong 1{,}666$	$\frac{55}{34} \cong 1{,}618$	$\frac{610}{377} \cong 1{,}618$
$\frac{8}{5} = 1{,}6$	$\frac{89}{55} \cong 1{,}618$	$\frac{987}{610} \cong 1{,}618$

Fonte: Elaboração própria.

A razão áurea é conhecida como *phi* em homenagem a um escultor grego chamado Fídias (490-430 a.C.), cuja primeira letra do nome é *phi*. Ele utilizava a razão áurea nas suas construções, como o Partenon de Atenas, Zeus no templo de Olímpia e a estátua de Júpiter, uma das sete maravilhas do mundo antigo (LIVIO, 2015).

O nome proporção áurea vem de uma determinada divisão que pode ser feita num segmento de reta, de modo que o número de ouro seja encontrado (LIVIO, 2015) (Figura 10).

Figura 10 - Proporção áurea

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \cong 1,618$$

Fonte: Elaboração própria.

O termo divina proporção surgiu com Luca Pacioli, matemático italiano, que em seu livro "A Proporção Divina" apresentou algumas razões para tal denominação (LIVIO, 2015):

(i) Que esta proporção é uma só. Assim como a razão áurea possui valor único, Deus também é único;

(ii) A definição de razão áurea envolve três comprimentos, assim como Deus existe em três pessoas: o Pai, o Filho e o Espírito Santo;

(iii) Assim como a razão áurea é um número irracional, que não pode ser expresso por uma quantidade racional, assim Deus também não pode ser plenamente compreendido nem entendido por meio de palavras;

(iv) A razão áurea apresenta o mesmo valor não importando o comprimento dos segmentos considerados, assim também Deus é onipresente e invariável.

A Razão Áurea é um número irracional e, em 1996, foi calculada com 10 milhões de casas decimais (LIVIO, 2015). Na figura a seguir (Figura 11) é possível vê-lo com quinhentas casas decimais.

Figura 11 - Razão áurea calculada com quinhentas casas decimais

1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227
05260462818902449707207204189391137484754088075386891752126633862
22353693179318006076672635443338908659593958290563832266131992829
02678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381
49758701220340805887954454749246185695364864449241044320771344947
04956584678850987433944221254487706647809158846074998871240076521
70575179788341662562494075890697040002812104276217711177780531531
7141011704666599146697987317613560067087480710(...)

Fonte: RIBEIRO; FARIA, 2009, p. 20.

O Número de Ouro possui algumas propriedades interessantes (LIVIO, 2015):

(i) Somando uma unidade a φ, encontra-se φ^2;

$1+ \varphi = \varphi^2 = 2{,}6180339887...$

(ii) Subtraindo de φ uma unidade, encontra-se $1/\varphi$

$\varphi - 1 = 1/\varphi = 0{,}6180339887...$

O número φ também pode ser expresso por $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, que é a raiz positiva da equação: $x^2 - x - 1 = 0$. Logo, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ou $\varphi^2 = \varphi + 1$.

A relação que o número de ouro possui com a natureza é evidenciada por Mendes: “Este número irracional e enigmático surge numa infinidade de elementos da Natureza na forma de uma razão, sendo considerado por muitos uma oferta de Deus ao mundo” (MENDES, 2007, p.36).

Kepler acreditava que a razão áurea serviu como um instrumento fundamental de Deus na criação do universo (LIVIO, 2015). Contador (2011, p.86) também destaca: “A Natureza, de uma forma ou de outra, sempre foi motivo de adoração pelo homem, e quando ele descobriu a íntima relação entre ela e o número de ouro pensou ter descoberto a pedra fundamental usada por Deus para construir o universo”.

É possível encontrar a razão áurea na natureza, por exemplo, numa colmeia, ao efetuar-se a divisão entre a quantidade de abelhas e a de zangões. No corpo da libélula, também é possível encontrar o número de ouro na divisão entre o comprimento do corpo pelo da cauda e no comprimento da cauda pelo do tronco desse inseto (CONTADOR, 2011) (Figura 12).

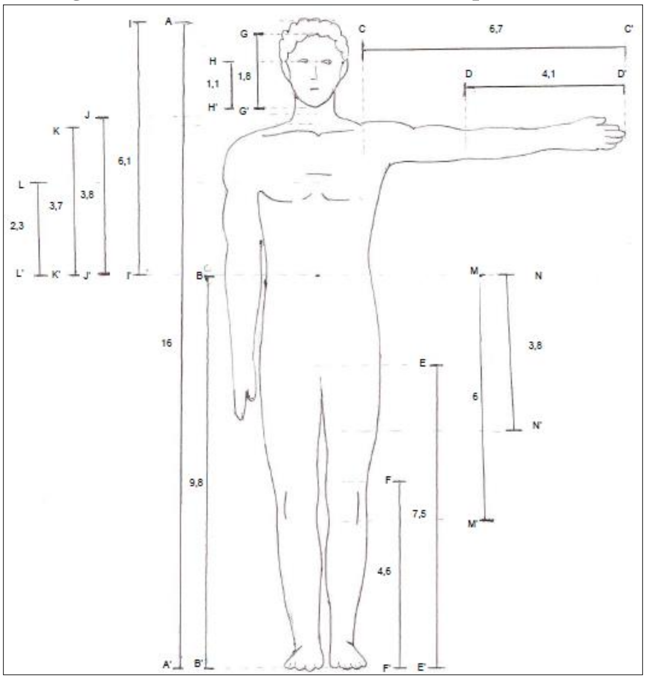
Figura 12 - Razão áurea na libélula

$$\frac{\text{Comprimento do corpo}}{\text{Comprimento da cauda}} = \frac{\text{Comprimento da cauda}}{\text{Comprimento do tronco}}$$

Fonte: http://www.taringa.net/post/info/17165851/Libelula-el-Animal-mas-Mortifero-del-Planeta.html.

O número de ouro também está presente em diversas razões entre diferentes partes do corpo humano. Conforme a Figura 13, a razão entre a altura (AA') e a distância do umbigo ao chão (BB'); entre a medida do ombro à ponta do dedo médio (CC') e a medida do cotovelo à ponta do dedo médio (DD'); entre o comprimento da perna (EE') e a distância do joelho ao chão (FF'), dentre outras, são razões cujo resultado é 1,618 (RIBEIRO; FARIA, 2009).

Figura 13 - Diversas medidas do corpo humano



Fonte: RIBEIRO; FARIA, 2009, p.73.

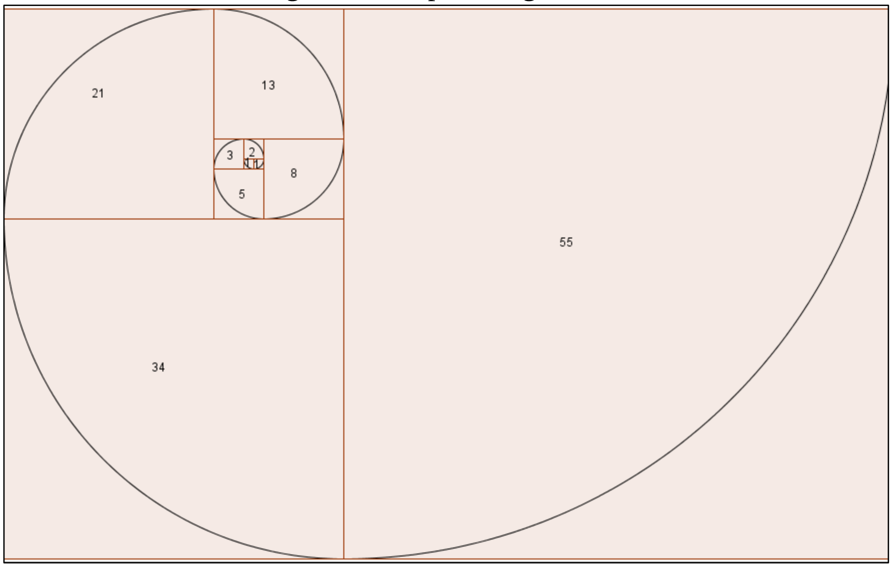
Essas relações foram observadas por Leonardo Da Vinci (1445 – 1519) que estudou mais de trinta corpos de homens e de mulheres de diversas idades e percebeu a existência do número φ nestas razões (LIVIO, 2015).

Embora haja diversos estudiosos que confirmem esses casos como sendo, de fato, exemplos de razão áurea na natureza, há, porém, outros que os questionam. Humberto Bortolossi, num artigo publicado por ele, juntamente com Raiana de Oliveira, intitulado "Conteúdos digitais para a Matemática no Ensino Médio: verdades e mentiras sobre o número de ouro", cita George Markowsky, que afirma que um dos equívocos ensinados é que o corpo humano exibe proporções áureas. Segundo ele, essa informação incorreta tem sido repetida por vários autores, chegando a alcançar o *status* de senso comum (MARKOWSKY, 1992 apud BORTOLOSSI; OLIVEIRA, 2010).

1.1.3 Espiral Logarítmica

A espiral logarítmica, também conhecida como espiral de ouro ou espiral áurea, pode ser obtida por meio da construção de quadrados, cujas medidas dos lados são números sucessivos da sequência de Fibonacci. Ao se traçar arcos de circunferência nesses polígonos, como na Figura 14, obtém-se a espiral logarítmica (CONTADOR, 2011).

Figura 14 - Espiral Logarítmica



Fonte: Elaboração própria.

O centro da espiral logarítmica, que é o ponto onde começa a se desenrolar, é conhecido como "o olho de Deus" (LIVIO, 2015, p.104). A equação genérica da espiral logarítmica é a equação polar: $r = ae^{\theta \cot g \alpha}$, em que **r** é o raio da espiral e **a** é o raio associado para $\theta = 0$, tal que **θ** é o ângulo em radianos formado entre o raio **r** e o eixo **x** (AUGUSTO, 2009). Dessa forma, o crescimento da curva dá-se de forma logarítmica, razão pela qual a espiral é assim denominada. O raio se desenvolve como uma progressão geométrica[1] (JANOS, 2009).

Quando a > 0, tem-se a espiral desenrolando-se indefinidamente. Quando a < 0, tem-se uma espiral que se enrola em direção ao centro indefinidamente. Quando a = 0, obtém-se uma circunferência (JANOS, 2009).

Em 1700, o matemático Jacques Bernoulli publicou um amplo tratado sobre a espiral logarítmica, chamado *Spira Mirabilis* (Espiral Maravilhosa). Ele deu um lema à espiral:

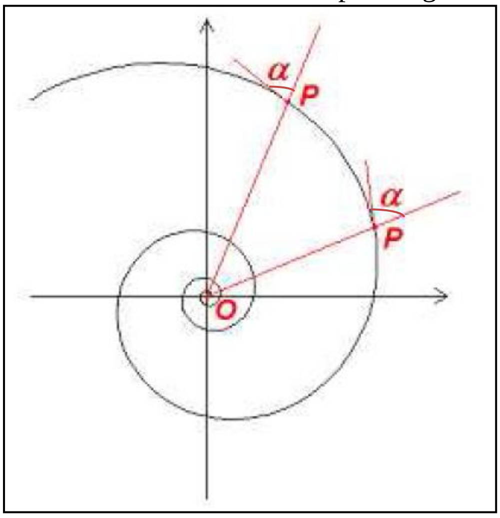
[1] Sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. (MORGADO et al. 1993, p.18).

eadem mutato resurgo (embora mudado, ressurjo o mesmo), e mandou que essa frase, ao lado da figura de uma espiral logarítmica, fossem gravadas em seu túmulo (LIVIO, 2015).

Esse lema descreve uma propriedade dessa figura em estudo: a autossimilaridade, ou seja, enquanto ela cresce, não há alteração do seu formato (LIVIO, 2015).

Uma possível definição da espiral logarítmica é: dado o ponto **O**, a espiral logarítmica é uma curva tal que o ângulo **α** formado pela tangente em qualquer dos seus pontos **P** com a semirreta **OP** é constante (Figura 15). Por isso, Descartes denominou a espiral logarítmica de espiral equiangular (JANOS, 2009).

Figura 15 - Autossimilaridade da espiral logarítmica



Fonte: AUGUSTO, 2009, p. 63.

O crescimento da curva a partir do centro está na mesma razão que o crescimento dos raios. Ou seja, cada estágio de crescimento pode ser sobreposto ao novo e todos eles apresentarão a mesma razão que, no caso, é o número de ouro. De fato, “a espiral logarítmica e a razão áurea caminham de mãos dadas” (LIVIO, 2015, p.140).

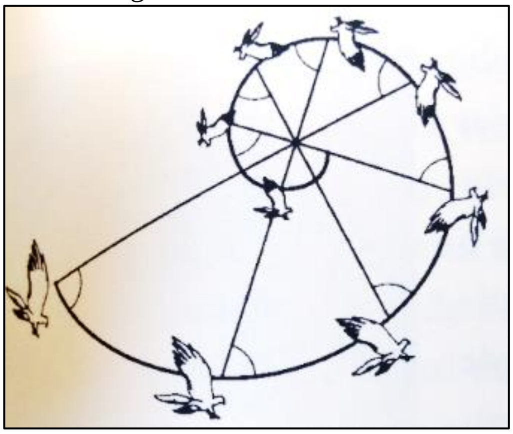
Um exemplo na natureza é observado na concha de náutilo (Figura 16). “À medida que o molusco cresce dentro da concha de náutilo, ele constrói câmaras cada vez maiores, fechando as menores que não serão mais usadas. Cada aumento no comprimento da concha é acompanhado de um crescimento proporcional no raio de modo que a forma permanece inalterada” (LIVIO, 2015, p.137).

Figura 16 - Concha de náutilo

Fonte: http://iaci.com.br/texto%20nautilus.htm.

A espiral logarítmica também é observada no voo do falcão peregrino sobre sua presa. Se ele voasse em direção à presa em linha reta, que seria o caminho mais curto, teria que inclinar a cabeça 40 graus, já que seus olhos estão localizados ao lado da cabeça. Essa inclinação geraria uma diminuição da velocidade, o que poderia acarretar a perda da presa. Portanto, para manter a cabeça reta e voar em alta velocidade (essas aves podem atingir até 320 km/h), o melhor caminho a ser percorrido pelo falcão, no seu voo, é exatamente a espiral logarítmica (Figura 17) (LIVIO, 2015).

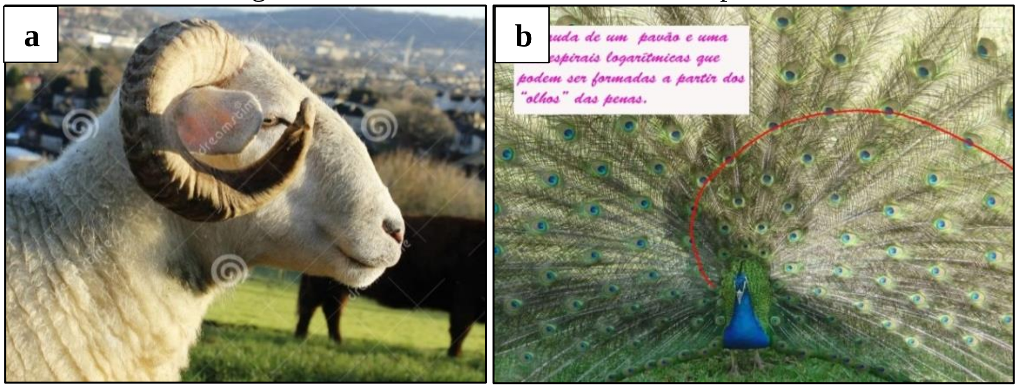
Figura 17 - Voo do falcão



Fonte: LIVIO, 2015, p. 141.

Além dos exemplos mencionados, o chifre do carneiro (Figura 18 a), o rabo da camaleão, as presas do elefante e os “olhos” na cauda do pavão estão alinhados em forma de uma espiral logarítmica (Figura 18 b).. O último caso, os “olhos” estão exatamente nos pontos de interseção das espirais que estão em sentidos opostos (CONTADOR, 2011).

Figura 18 - Chifre do carneiro e cauda do pavão



Fonte: (a) http://www.cei.santacruz.g12.br/~multi_trabalhos/razaoaurea/natmat.html
(b) http://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-retrato-do-ram-image48791048.

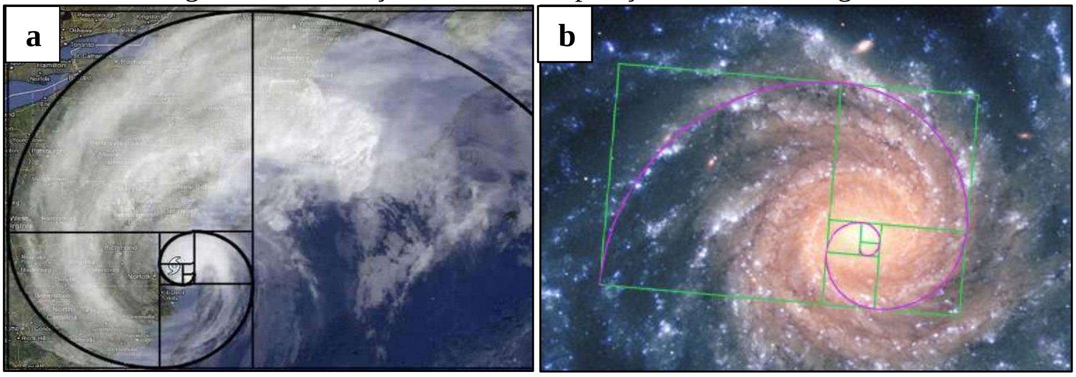
A orelha do ser humano (Figura 19) apresenta o formato da espiral logarítmica, sendo a cóclea, localizada na orelha interna, o ponto inicial da construção da espiral (SILVA, 2014).

Figura 19 - Espiral logarítmica na orelha humana

Fonte: SILVA, 2014, p.45.

A espiral logarítmica também pode ser vista no universo macroscópico, como na imagem de satélite da formação de um tornado (Figura 20 a) e na posição de estrelas em algumas galáxias (Figura 20 b), bem como no universo microscópico, como em organismos unicelulares conhecidos como foraminíferas (CONTADOR, 2011).

Figura 20 - Formação de tornado e posição de estrelas na galáxia



Fonte:(a) http://dentalinc.com.br/2015/04/24/os-mitos-e-verdades-sobre-a proporcao-aurea/ (b)http://naukas.com/2012/11/02/por-que-los-huracanes-tienden-a-formar-una-espiral-logaritmica/.

Essa curva está presente no dia a dia, parecendo até que "a natureza escolheu esta forma magnífica como seu 'ornamento' favorito" (LIVIO, 2015, p.138).

1.1.4 Simetria

Um dos principais conceitos geométricos encontrados na natureza é a simetria, definida como uma "correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio" (FERREIRA, 2008, p.739). O termo se origina da palavra grega *symmetria* ou justa posição, que "corresponde a partes situadas em lados opostos de uma linha, de um plano ou ainda distribuídas em volta de um centro, de forma a apresentar regularidade nessa distribuição" (CONTADOR, 2011, p.124).

Na aritmética, percebe-se a presença da simetria, por exemplo, em multiplicações feitas com os números 1, 11, 111, ... (Figura 21). Nota-se, nos resultados obtidos, uma simetria que possibilita que o número seja o mesmo, lido tanto da esquerda para a direita como da direita para a esquerda (CONTADOR, 2011).

Figura 21 - Simetria nos resultados da multiplicação envolvendo o número um

1 x 1 = 1
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12321
1111 x 1111 = 1234321
11111 x 11111 = 123454321
111111 x 111111 = 12345654321
1111111 x 1111111 = 1234567654321
11111111 x 11111111 = 123456787654321
111111111 x 111111111 = 12345678987654321

Fonte: Elaboração própria.

A simetria também pode aparecer no uso de letras e de palavras, como no caso do “quadrado de Sator” (Figura 22), que contém cinco palavras em latim, com cinco letras cada. Há simetria nessa imagem, já que é possível ler a mesma frase em quatro diferentes sentidos: de cima para baixo, de baixo para cima, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Existe uma pequena divergência quanto à tradução dessa frase, porém uma opção reconhecida e aceita é: “o Criador mantém o mundo em sua órbita”. Foram encontrados diversos achados arqueológicos na Europa contendo esse quadrado (KLASSMANN, 1999).

Figura 22 - Quadrado de Sator

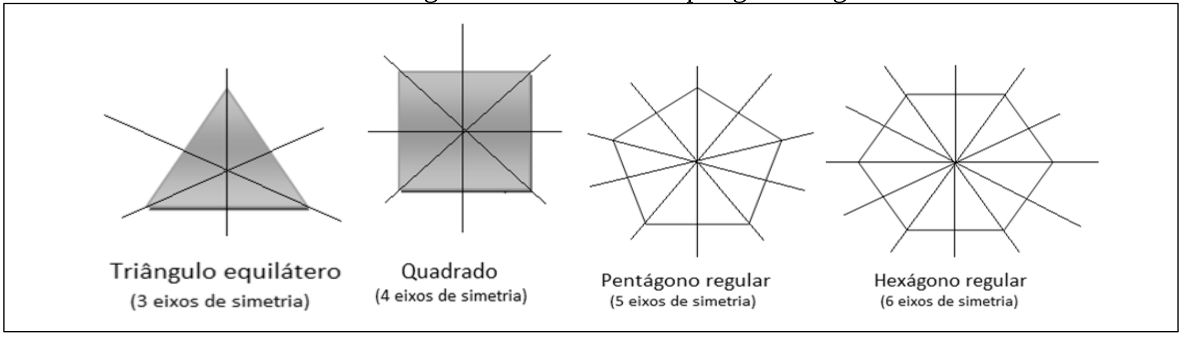
S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Fonte: http://www.naniesworld.com/2011/02/voce-sabe-o-que-e-palindromo.html.

A simetria pode ser classificada como bilateral ou radial. A primeira traz a ideia de uma imagem refletida num espelho. Há uma linha chamada eixo de simetria, que divide a figura em duas partes iguais, daí o nome bilateral. Se fosse possível dobrar a imagem sobre o eixo de simetria, as duas metades ficariam justapostas (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, s.d.)

Nota-se que, nos polígonos regulares, o número de eixos de simetria é o mesmo do número de lados do polígono (Figura 23). Ou seja, um triângulo tem três eixos de simetria, um quadrado tem quatro, um pentágono tem cinco, um hexágono tem seis e assim sucessivamente (CONTADOR, 2011).

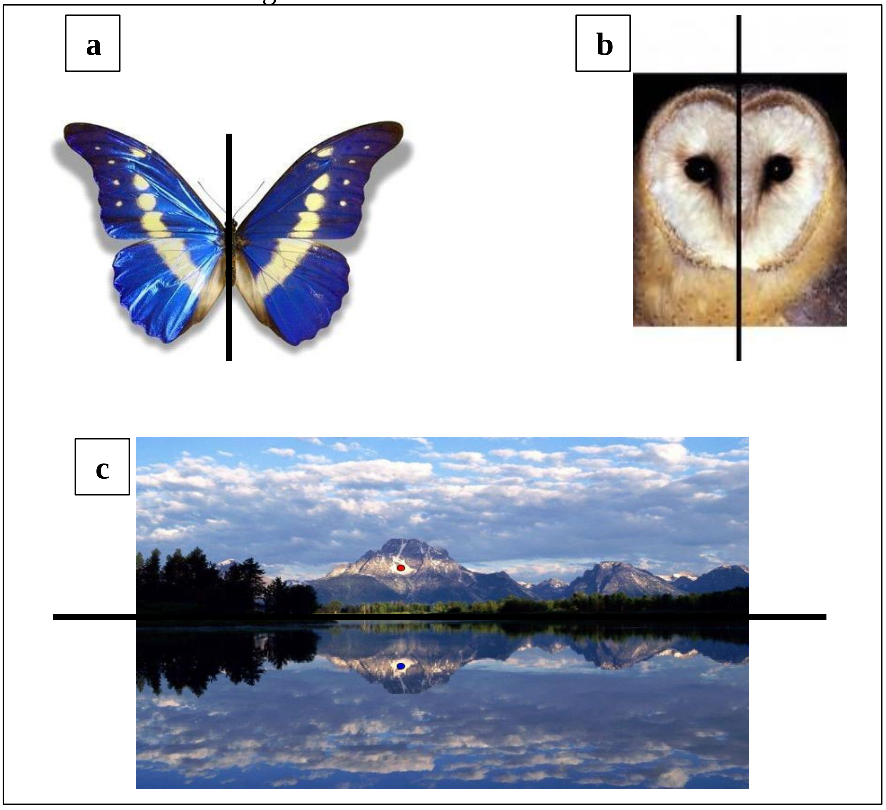
Figura 23 - Simetria em polígonos regulares



Fonte: http://www.estudarmatematica.pt/2015/03/simetria-axial.html.

Na natureza, é possível encontrar simetria bilateral nos insetos, de modo geral, como a borboleta (Figura 24 a); nos pássaros, de modo geral, como a coruja (Figura 24 b); numa paisagem refletida num lago (Figura 24 c).

Figura 24 - Simetria axial na natureza

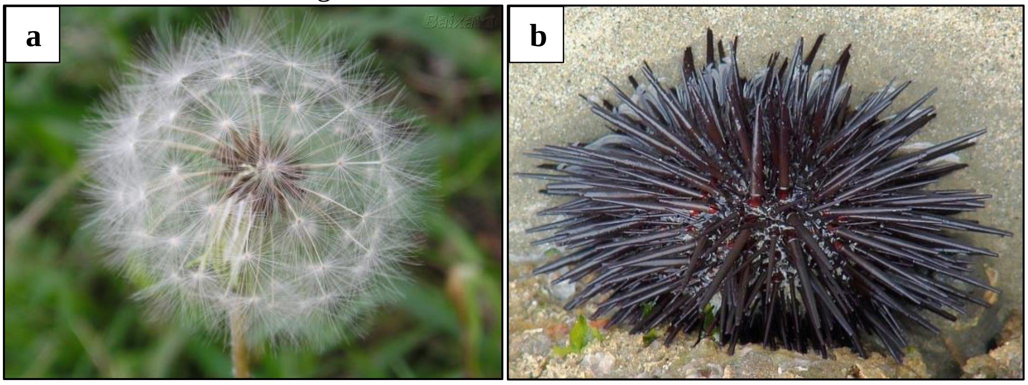


Fonte: (a) http://profruijaime.wix.com/saberefazer#!simetria6[1].jpg/zoom/c3ko/image_24bk
(b) http://www.ziho.com.br/2012/03/elementos-de-composicao-equilibrio-e-simetria/.
(c) Disponível em: //www.geogebra.org/material/simple/id/765395.

Outro tipo de simetria, a radial, ocorre quando um eixo passa pelo centro da imagem e as partes se repetem em volta desse eixo. A imagem pode ser dividida pela metade considerando diversos planos diferentes (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, s.d.)

Na natureza, esse tipo de simetria pode ser encontrado nas flores, como a dente-de-leão (Figura 25 a), nos equinodermos, como o ouriço do mar (Figura 25 b) e nos cnidários, como a água viva.

Figura 25 - Simetria radial na natureza



Fonte: (a) http://www.mundodeflores.com/rosas-dentes-de-leao.html.
(b) http://www.treknature.com/gallery/photo208945.htm.

A simetria é bela. “Gostamos de olhar para os objetos simétricos da natureza, por exemplo, as esferas perfeitamente simétricas dos planetas e do Sol, ou cristais simétricos de flocos de neve, ou flores aproximadamente simétricas. A simetria tem qualquer coisa de fascinante para o espírito humano” (MENDES, 2007, p.83).

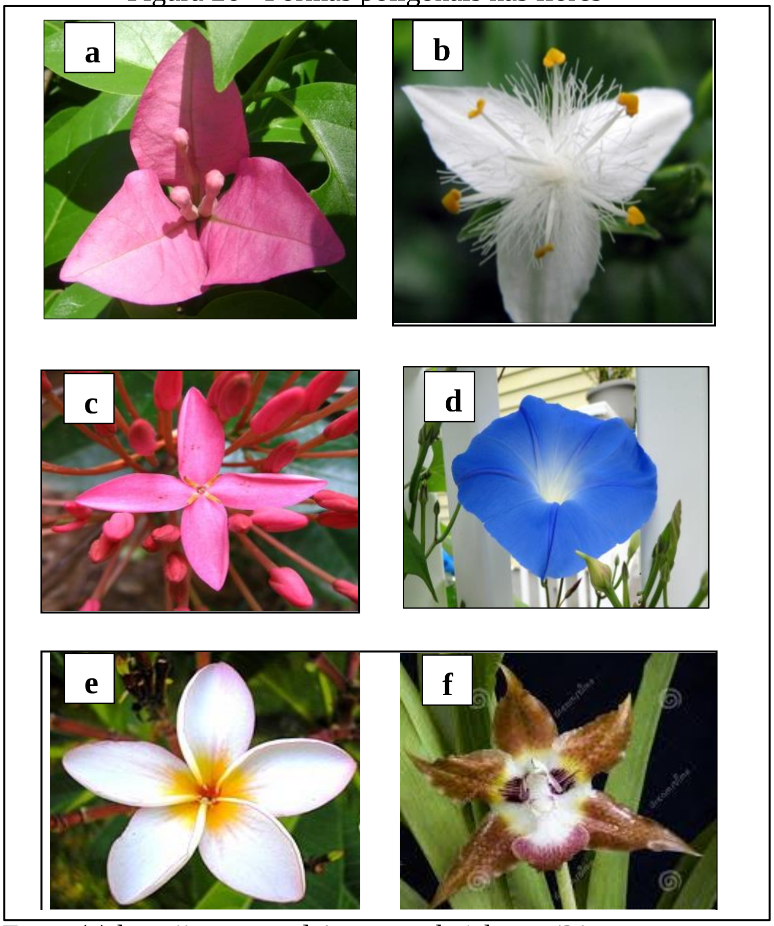
1.1.5 Formas Poligonais

Todas as imagens da natureza possuem uma forma. Em muitos exemplos, essas formas são comuns e repetidas, ao ponto de serem estudadas, já em outros exemplos são únicas e raras, não tendo nem mesmo uma nomenclatura específica. Esta seção se ocupará do primeiro caso.

Ao observar as formas da natureza, os cientistas do Império Grego afirmavam que todas podiam ser construídas com boas réguas e compassos. O desenvolvimento da geometria deve-se, em grande parte, aos gregos e sua busca pela racionalidade, pela estética e pela beleza (VITTI, 1996).

A flora está repleta de geometria. A forma triangular aparece em flores como a primavera (Figura 26 a) e a erva-da-fortuna (Figura 26 b). Já a ixora (Figura 26 c) e a glória da manhã (Figura 26 d) possuem formas quadrangulares. Dentre as flores com formas pentagonais, estão o jasmim (Figura 26 e), a orquídea (Figura 26 f), a violeta, a azaleia e a flor do maracujá.

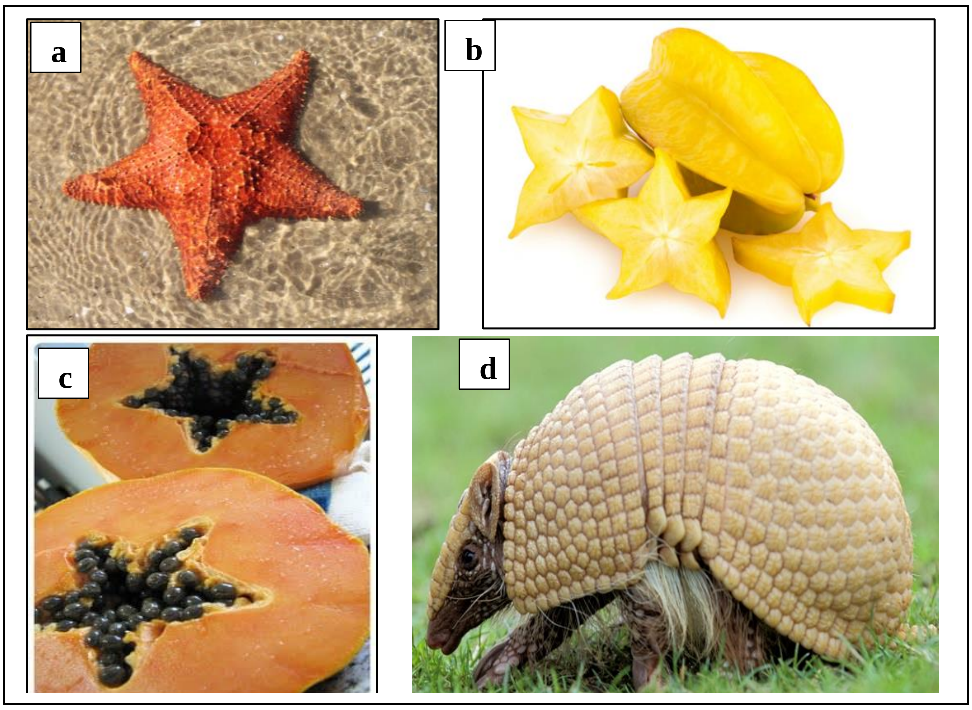
Figura 26 - Formas poligonais nas flores



Fonte:(a) http://www.verdejava.com.br/plantas/2/.
(b) http://invasoras.pt/gallery/Tradescantia-fluminensis/.
(c) http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ixora_coccinea.jpg
(d) https://pixabay.com/pt/blue-flor-gl%C3%B3ria-da-manh%C3%A3-101856/.
(e) http://www.jardineiro.net/plantas/jasmim-manga-plumeria-rubra.html.
(f) http://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-orqu%C3%ADdea-do-gato-image2462964.

As formas pentagonais também são encontradas em estrelas do mar (Figura 27 a), numa fatia da carambola (Figura 27 b), na arrumação das sementes do mamão “estrela” (Figura 27 c) e nas placas do casco de um tatu (Figura 27 d). A estreita relação do pentágono com os seres vivos deu-lhe o *status* de figura geométrica símbolo da vida (CONTADOR, 2011).

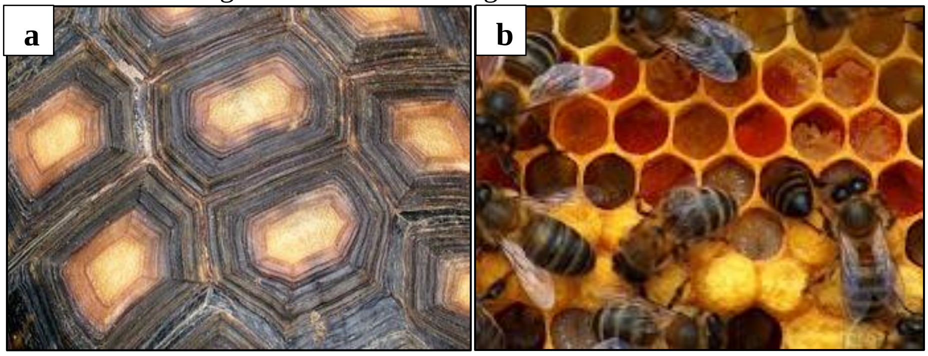
Figura 27 - Formas pentagonais na natureza



Fonte: (a) https://fendadimensional.wordpress.com/2013/02/23/ani mal-da-semana-16-estrela-do-mar.
(b) http://saudenocorpo.com/carambola-e-seus-beneficios-saude/.
(c)https://noticiasimpossiveis.wordpress.com/2009/10/28/publicidade-desafio-alivio-1515-2.
(d) http://blogs.diariodonordeste.com.br/gestaoambiental/tag/tatu-bola/.

As formas hexagonais são encontradas, por exemplo, no casco da tartaruga (Figura 28 a) e nos favos de mel (Figura 28 b).

Figura 28 - Formas hexagonais na natureza



Fonte: (a) http://olhares.sapo.pt/casco-de-tartaruga-foto58471.html.
(b)http://manthanos.blogspot.com.br/2011/02/porque-afinal-cabe-mais-mel-no-hexagono_01.html.

Em relação aos favos de mel, os três únicos polígonos regulares que se encaixam perfeitamente no preenchimento de um espaço plano são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono. Na construção de prismas com bases triangulares, quadrangulares e hexagonais, utilizando a mesma quantidade de matéria-prima para confeccioná-los, o que possui maior volume é o de base hexagonal (CONTADOR, 2011).

Para demonstrar esse fato, supõem-se três primas: um triangular, um quadrangular e um hexagonal, com mesma área da base e altura. Considera-se **P** o perímetro do polígono da base. Ao cálculo do volume desses três sólidos dá-se da seguinte forma: $V_3 = \left(\frac{P}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= 0{,}0481\ P^2$; $V_4 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = 0{,}0625\ P^2$; $V_6 = 6 \times \left(\frac{P}{6}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}0721\ P^2$ (CONTADOR, 2011).

Como é possível verificar, com o mesmo perímetro **P** na base, o prisma hexagonal é o que possui maior volume. “As abelhas [...] em virtude de uma certa intuição geométrica [...], sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material”, destacou Papus de Alexandria (290-350) (apud BOYER, 1996, p.12). Segundo Contador (2011), não seria demais afirmar que as abelhas são os animais mais matemáticos da natureza.

1.1.6 Fractais

A natureza é muito complexa e poucas de suas formas podem ser descritas com elementos da geometria euclidiana, como retas, círculos, cubos. Há a necessidade de uma geometria de maior riqueza para tentar descrever essas formas e os objetos do mundo real (BARBOSA, 2005).

De fato, “as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta” (MANDELBROT, 1983 apud GONÇALVES, 2007, p. 40).

Percebendo isso, no final do século XX, estudos revelaram novas formas de se compreender o crescimento e a complexidade da natureza (JANOS, 2009), dando origem à geometria fractal.

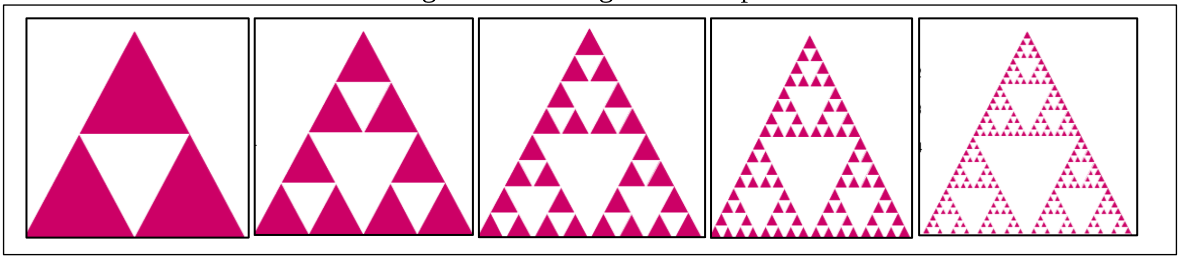
O surgimento dessa “ciência trouxe consigo o ver ordens e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico” (BARBOSA, 2005, p. 10).

Fractal pode ser definido como “uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos” (FEDER, 1988 apud BARBOSA, 2005, p.15). Esse conceito é chamado de autossimilaridade. É como se cada pequena parte pudesse ser vista como uma réplica do todo numa escala menor (MENDES, 2007).

O termo fractal deriva do verbo latino *frangere*, que significa criar fragmentos irregulares, fragmentar, quebrar. O adjetivo associado ao verbo é *fractus*, origem do termo fractal (BARBOSA, 2005).

Uma das imagens fractais mais conhecidas é o triângulo de Sierpinski (Figura 29), no qual o conceito de autossimilaridade fica evidente (JANOS, 2009).

Figura 29 - Triângulo de Sierpinski



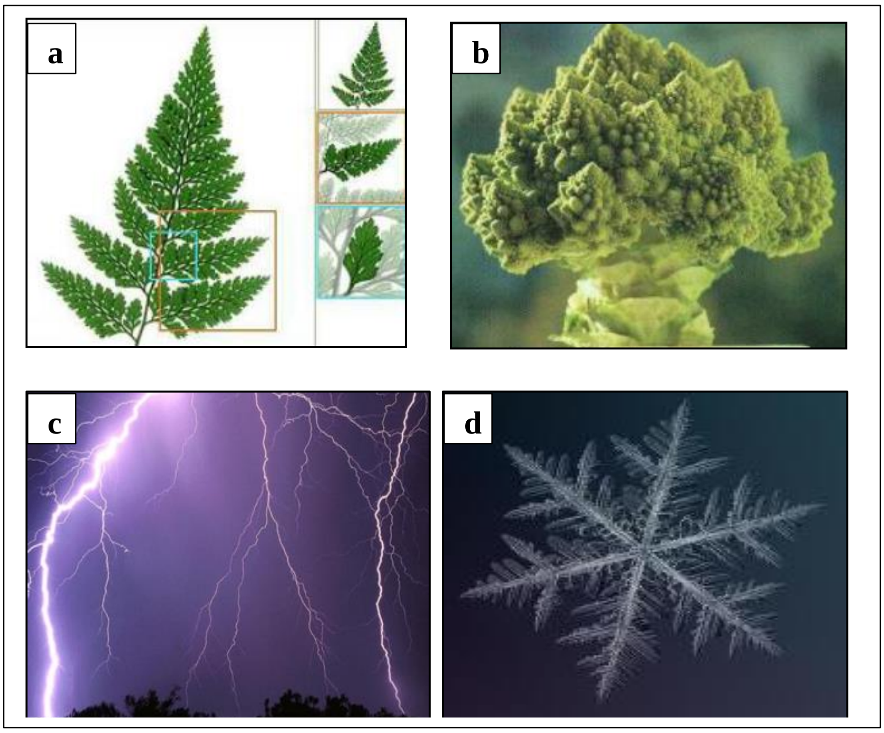
Fonte: https://tube.geogebra.org/material/simple/id/142479.

O triângulo é obtido da seguinte forma: tem-se um triângulo equilátero e marcam-se os pontos médios dos seus lados. Em seguida, ligam-se esses três pontos, obtendo o primeiro triângulo da Figura 29. Nos três triângulos vermelhos resultantes, marcam-se os pontos médios de cada um dos lados desses triângulos. Ao ligar-se os pontos médios de cada um dos triângulos, obtém-se a segunda imagem da Figura 29. O processo é repetido indefinidamente. Cada um dos novos pequenos triângulos obtidos são semelhantes ao triângulo inicial. Por exemplo, observando uma pequena parte do quinto triângulo da Figura 29, o que se vê é uma cópia do primeiro numa escala menor.

O estudo dos fractais é justificado pelas seguintes considerações: (i) conexões com várias ciências; (ii) deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza: [...] os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes; (iii) difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; (iv) existência do belo nos Fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; (v) sensação de surpresa diante da ordem na desordem (BARBOSA, 2005, p. 19 - 20).

"O mundo que nos cerca é cheio de fractais [...] o universo inteiro é caracterizado por um padrão fractal" (LIVIO, 2015, p.247). Alguns elementos na natureza que se assemelham a estruturas fractais são: a folha de uma samambaia (Figura 30 a), o brócolis romanesco (Figura 30 b), um relâmpago (Figura 30 c), um floco de neve (Figura 30 d), a folha de uma árvore e pulmão humano (ALMEIDA, 2011).

Figura 30 - Elementos da natureza semelhantes a fractais



Fonte: (a) NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS, 2009 apud ALMEIDA, 2011, p.47.
(b) http://vandretec.blogspot.com/2010/03/fractais-o-que-sao.html apud ALMEIDA, 2011, p. 47.
(c) http://www.adventurezone.com.br/print.php?id=86.
(d) https://pessoaspensantes.wordpress.com/category/sem-categoria/.

O que existe nesses exemplos é uma autossemelhança aproximada em diferentes escalas. A característica central dos fractais é a sua invariância sob mudança de escala (JANOS, 2009).

D'Ambrósio (2002, p.44 apud ALMEIDA, 2011, p. 12) afirma que "Os fractais são, hoje, parte do imaginário e curiosidade popular. Despertam, portanto, interesse de crianças, jovens e adultos".

1.2 A Contextualização no Ensino da Matemática

Mesmo com tantas conexões, a Matemática não tem sido um assunto apreciado nas escolas. Lorenzato, em uma pesquisa com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, obteve algumas respostas desses profissionais em relação a essa disciplina:

> [...] 'a matemática é algo inatingível', 'a matemática passou a ser minha inimiga', 'a matemática é um fantasma para mim', 'passei a detestar a matemática', 'para fugir da matemática fiz o curso de letras', 'esquecia tudo assim que podia', 'eu odeio a matemática' (LORENZATO, 2010, p.118).

Esses depoimentos se referem a circunstâncias que ocorreram há vinte anos com esses professores. Mas, mesmo atualmente, nove dentre dez dizem não gostar de Matemática embora lecionem essa disciplina para crianças de 7 até 10 anos (LORENZATO, 2010).

Sobre esse fato, George Polya (1978) afirma: "[...] a matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso [...] Os futuros professores passam pelas escolas elementares aprendendo a detestar a matemática [...] Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la" (POLYA, 1978 apud LORENZATO, 2010, p.118).

Segundo Druck (2006), ex-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, "a qualidade do ensino da Matemática atingiu, talvez, seu mais baixo nível na história educacional do país" (DRUCK, 2006 apud FERNANDES, 2006, p.1).

Percebe-se, então, a necessidade de tornar a Matemática mais interessante para o aluno, de modo que ele tenha prazer em estudá-la. Um dos caminhos possíveis para se alcançar esse objetivo é apresentar a Matemática presente no dia a dia do aluno, fazendo-o perceber que seu estudo é útil e pertinente. Ou seja, é importante contextualizar o ensino.

Santos (2003, p.92 apud GIL, et al. 2012, p. 62) reforça que "quanto mais contextualizado for o ensino, maior a possibilidade significativa para a aprendizagem, pois ao contextualizar, atingem-se diferentes estilos cognitivos, mobilizando assim, a motivação", fator fundamental da aprendizagem.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), o tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo, fazendo-o participante ativo no processo de aprendizagem. A contextualização permite um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática, estabelecendo um elo entre o que se aprende na escola e o que se faz, vive e observa no dia a dia. O contexto que é mais próximo do aluno e mais facilmente explorável para dar significado aos conteúdos da aprendizagem é o da vida pessoal, do cotidiano e da convivência (BRASIL, 2000).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (PCN+ EM) afirmam:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p.111).

Para Barbosa (2004), a utilização do termo “contextualização” tem sido indevida, já que, para ele, todas as atividades da matemática escolar pertencem a um determinado contexto. A questão, portanto, seria qual o contexto e, não, se há um contexto.

Sobre esse assunto Skovsmose (2000) declara:

> Diferentes tipos de referência são possíveis. Primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade; não se trata de uma realidade que de fato observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de Matemática. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real (SKOVSMOSE, 2000, p.7).

Segundo Fernandes (2006), alguns professores adotam a contextualização como metodologia de ensino, levando-o a relacionar sempre o conteúdo a ser trabalhado com algo da realidade cotidiana do aluno. Porém, isso gera um problema, já que nem sempre essa forma de contextualização é possível (FERNANDES, 2006).

A contextualização, embora seja bem vinda, precisa ser bem compreendida e aplicada, caso contrário é prejudicial ao conhecimento.

Um dos cuidados que se deve tomar é que a contextualização não se torne banal. “É preciso, no entanto, cuidar para que essa generalização não induza à banalização, com o risco de perder o essencial da aprendizagem escolar que é seu caráter sistemático, consciente e deliberado. Em outras palavras: contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato [...] para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianeidade” (BRASIL, 2000, p.81).

Neste trabalho, buscou-se fazer a contextualização por meio das relações entre a Matemática e a natureza, na certeza de que é um importante elemento para uma educação de qualidade.

1.3 Estudos Relacionados

Foram selecionados quatro trabalhos para esta seção, cujos autores são Mendes (2007), Pupim (2013), Augusto (2009) e Almeida (2011). Os três primeiros são de cunho teórico. Vale ressaltar que Mendes (2007) e Pupim (2013) propõem atividades e pesquisas como sugestão de uma possível implementação dos assuntos abordados no contexto escolar.

Esses trabalhos tratam de temas afins a esta monografia, seja por abordarem a relação entre a Matemática e a natureza, ou por trabalhar com algum dos seis temas destacados nesta pesquisa. Dessa forma, a semelhança entre esta monografia e esses quatro trabalhos se dá por meio dos temas apresentados e a diferença, se dá na experimentação, já que alguns não o fizeram e outros o fizeram apenas para uma turma.

O primeiro trabalho analisado foi a dissertação, intitulada “A Matemática na natureza”, de autoria de Fernanda Manuela Pinheiro Mendes, pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, em Portugal, no ano de 2007.

Mendes (2007) afirma que o propósito do trabalho foi (i) melhorar o processo de ensino aprendizagem da Matemática relacionando-a com a natureza; (ii) fomentar a interdisciplinaridade Ciências da Natureza / Matemática; (iii) promover a imagem e o gosto pela Matemática; (iv) identificar relações entre a Matemática e a Natureza; e (v) explicar fenômenos e manifestações da natureza que possam revelar estruturas, organizações e regularidades matemáticas.

A autora elaborou e aplicou um questionário, que denominou Atividade Experimental. Participaram dessa atividade 74 alunos de idades compreendidas entre os 9 e os 13 anos, frequentando o 5º ano de escolaridade nos anos letivos de 2005 e 2006. Nas questões, foi pedido aos alunos que comentassem sobre a importância da Matemática para a vida e a relação desta com a natureza. Os estudantes também responderam sobre a semelhança entre diversos animais e plantas e alguns elementos matemáticos e formas geométricas.

Para a autora, o trabalho atingiu os objetivos propostos, já que pôde contribuir para a aquisição de uma perspectiva diferente e mais aprofundada da relação da natureza com a Matemática.

O segundo trabalho analisado foi a dissertação intitulada “A matemática na natureza”, de autoria de Claudio Eduardo Pupim, apresentada no ano de 2013, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, que aborda a espiral logarítmica.

Os objetivos dessa dissertação foram (i) apresentar um estudo sobre as espirais logarítmicas enfocando sua história, propriedades, equações e aplicações relacionadas com a natureza; (ii) relacionar as propriedades da espiral com os conteúdos matemáticos (funções, progressões aritméticas e geométricas, trigonometria, geometria, entre outras) ministrados nas séries finais do Ensino Fundamental e no Médio, a fim de mostrar ao aluno que é possível trabalhar os conteúdos elaborados cientificamente de forma agradável e prazerosa; (iii) desenvolver a equação da espiral com base num importante teorema que relaciona a função exponencial com as progressões aritméticas e geométricas; (iv) construir a espiral utilizando régua e compasso; e (v) mostrar que a Matemática possui aplicações práticas importantes na natureza (PUPIM, 2013, p.12).

Outro trabalho analisado foi o de autoria de Cristiano Gonçalves Augusto, apresentado no ano de 2009, na Universidade Federal de Minas Gerais, com o título “O número de ouro: representação da beleza matemática” que, além desse tema, trata também da espiral logarítmica.

O objetivo desse trabalho foi mostrar a importância matemática do número de ouro, defini-lo e contribuir para sua divulgação, já que, segundo Augusto (2009), apesar de tal número estar presente em muitos lugares, como na pintura, na música, na escultura e na natureza, não é tão difundido.

A quarta pesquisa relacionada é de autoria de Mikelle Rodrigues de Almeida sobre “O uso de Fractais no estudo das progressões geométricas”, apresentada em 2011, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense.

O objetivo foi investigar o processo de ensino e aprendizagem das progressões geométricas por meio da geometria fractal. Para tal, realizou-se uma pesquisa qualitativa com alunos da 2ª. série do Ensino Médio, em que foram elaboradas e experimentadas atividades que proporcionaram a construção, a exploração e a análise dos fractais. Os dados foram obtidos por meio de observações e da aplicação de um questionário, concluindo-se que o objetivo proposto foi alcançado.

As semelhanças entre este trabalho e o de Almeida (2011) foram a abordagem do tema “fractais”, bem como a forma de coleta de dados e o tipo de pesquisa, neste caso qualitativa e com experimentação em sala de aula. Difere desse trabalho pelo público-alvo e pelos outros temas abordados nesta pesquisa.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, é apresentada a metodologia de pesquisa e a estrutura da apresentação que norteou todo o trabalho. O público-alvo foram os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, do Ensino Superior e da Educação de Jovens e Adultos. Foram feitas quatro apresentações, uma para cada grupo citado.

A escolha de tal amplitude deu-se em virtude de alguns fatores, dentre eles: (i) o fato de que, em geral, nenhum dos níveis escolares citados apresenta a relação entre a Matemática e a natureza, tal qual esse trabalho intenta realizar; (ii) o desejo de se contextualizar alguns temas matemáticos, o que, na verdade, pouco ocorre na realidade cotidiana da sala de aula; (iii) o entendimento de que o mostrar a beleza que existe na presença da Matemática na natureza é válida para todos os níveis, considerando ainda a vantagem de não ser exigido do aluno requisito para entender o que será exposto.

2.1. Caracterização da Pesquisa

Para se alcançar o objetivo do trabalho, que é analisar se um estudo sobre as relações entre a natureza e a Matemática contribui para a formação de uma nova visão do aluno em relação a essa disciplina, optou-se por fazer uma pesquisa do tipo qualitativa.

Goldenberg afirma que “os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos” (GOLDENBERG, 2009, p.53).

Tal pesquisa é caracterizada pela presença de alguns aspectos: (i) é descritiva; (ii) a preocupação com o processo é maior do que com o produto; (iii) o significado que as pessoas dão às coisas são focos de atenção especial do pesquisador e (iv) o ambiente e as pessoas não são reduzidos a variáveis, mas olhados holisticamente (GARNICA, 1997).

Para Goldenberg (2009), numa pesquisa qualitativa, a preocupação não é com a quantidade de participantes envolvidos, mas com a compreensão que os mesmos têm do assunto tratado.

A estratégia de apresentação do trabalho foi a aula expositiva entendida “como um momento que está além da técnica, alcançando o estabelecimento de relações entre o professor, os alunos e o conhecimento de maneira total e contextualizada” (SIMEONI, 2010, p.473). Segundo Simeoni (2010), essa forma de ensino é muito habitual e pode ser considerada como uma metodologia de ensino que favorece uma educação transformadora.

De acordo com Libâneo, “são três as dimensões que compõem a prática docente: a do saber (campo pedagógico/domínio dos conteúdos), a do saber ser (campo político/conscientização da sua tarefa) e a do saber fazer (campo técnico/domínio metodológico)” (LIBÂNEO, 1987 apud SIMEONI, 2010, p.4).

Assim, o sucesso da aula depende da maneira como o professor irá conduzi-la, do seu relacionamento com os alunos e do seu conhecimento do conteúdo. Uma boa aula expositiva é aquela que é dialogada.

A ministração das aulas neste trabalho ocorrerá com a participação dos alunos, tendo eles a oportunidade de comentar, perguntar e exemplificar no momento em que julgarem oportuno.

Gil (2009 apud SIMEONI, 2010) comenta sobre alguns fatores necessários para uma boa aula expositiva, a saber, a boa entonação de voz, a linguagem corporal e o contato visual. Dolz, Schneuwly e Haller (2004) confirmam essa ideia ao afirmarem:

> [...] a comunicação oral não se esgota somente na utilização de meios linguísticos ou prosódicos; vai utilizar também signos de sistemas semióticos não linguísticos, desde que codificados, isso é, convencionalmente reconhecidos como significantes ou sinais de uma atitude. É assim que mímicas faciais, posturas, olhares, a gestualidade do corpo ao longo da interação comunicativa vêm confirmar ou invalidar a codificação linguística e/ou prosódica e mesmo, às vezes, substituí-la (2004, p. 160, apud FELIX, 2012, p. 4).

Simeoni (2010) destaca o compromisso e a dedicação que o professor deve ter na aula, tornando-a interativa e crítica num momento de crescimento para ele e para os alunos. Para esse autor, “[...] a aula expositiva não deve mais ficar conhecida como bandida e sim como mocinha, heroína na construção do conhecimento” (SIMEONI, 2010, p. 474).

Neste texto, a expressão “aula expositiva” será trocada por palestra.

Para uma melhor visão e compreensão, por parte do aluno, do conteúdo exposto, utilizaram-se recursos visuais como os *slides* e os vídeos. Reconhecem-se os benefícios dos recursos visuais, pois compreende-se que “[...] a sua utilização enriquece as aulas, proporciona a interação com o conhecimento e estimula a participação direta do aluno” (LIMA, 2010, p.1).

Morán (1995) ressalta que a utilização do vídeo serve como ilustração, que permite a aproximação do aluno a realidades distantes e desconhecidas. Além disso, sua apresentação causa expectativas positivas nos alunos, o que deve ser aproveitado para atraí-los, estabelecendo uma ligação com a aula.

Na palestra, foram mostrados dois vídeos intitulados "Natureza em números"[2] e "As maravilhas da criação revelam a glória de Deus"[3], ambos sintetizando os temas tratados. No segundo, além da mostra de imagens há narração.

Sobre os *slides*, Nogueira (2013) afirma que possuem um visual diversificado, com imagens e animações que atraem o aluno e tornam os conteúdos mais interessantes.

A apresentação deste trabalho foi conduzida por meio de *slides* (APÊNDICE A). Alguns contaram com desenhos construídos no *software* Geogebra[4], neste caso, na construção da espiral logarítmica, na amostra de eixos de simetria em diferentes imagens, na construção de fractais, como o triângulo de Sierpinski e o floco de neve de Kock.

Durante as palestra, o autor deste trabalho observou atentamente o olhar, o interesse, a atenção e a participação dos alunos. Tais reações foram anotadas no caderno de campo e utilizadas apropriadamente nas conclusões das aplicações.

Para Yin (2010, p. 136), "A evidência observacional é frequentemente útil para proporcionar informação adicional sobre o tópico sendo estudado". Ainda sobre o assunto, Creswell (2010, p. 214) afirma que as "Observações qualitativas são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa".

Além das observações pessoais do licenciando e das registradas no caderno de campo, foi utilizado um questionário para a coleta de dados, dividido em duas partes, uma antes da palestra e outra depois (APÊNDICE B). Espera-se que as respostas dos alunos ao questionário confirmem a formação de uma nova visão dos mesmos em relação à Matemática.

Moreira e Caleffe (2008) apontam quatro vantagens relacionadas à utilização do questionário, a saber: (i) uso eficiente do tempo, já que pode ser aplicado para um grande número de pessoas de uma só vez; (ii) anonimato para o respondente, buscando garantir que suas respostas sejam verdadeiras; (iii) possibilidade de uma alta taxa de retorno, já que os questionários aplicados serão logo recolhidos; e (iv) perguntas padronizadas, possibilitando que os alunos respondam as mesmas perguntas na mesma ordem.

[2] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qmat0Iiuk0U.
[3] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Vqev5Bwv73A.
[4] Software livre e gratuito de Matemática Dinâmica, que permite o estudo da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. Disponível em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/.

Goldenberg (2009, p. 87) confirma as informações citadas, ao afirmar que o questionário:

> [...] pode ser aplicado a um grande número de pessoas ao mesmo tempo; as frases padronizadas garantem maior uniformidade para a mensuração; os pesquisados se sentem mais livres para exprimir opiniões que temem ser desaprovadas ou que poderiam colocá-los em dificuldades; menor pressão para uma resposta imediata, o pesquisado pode pensar com calma.

Na elaboração do questionário, é necessário que se observe a seguinte questão: “o pesquisador deve ter em mente que cada questão precisa estar relacionada aos objetivos de seu estudo. As questões devem ser enunciadas de forma clara e objetiva, sem induzir e confundir, tentando abranger diferentes pontos de vista” (GOLDENBERG, 2009, p. 86).

Goldenberg (2009) afirma ainda que um dos principais problemas da aplicação de um questionário é detectar o grau de veracidade das respostas.

Na aplicação do questionário, o licenciando frisou para os alunos a importância das respostas serem sinceras e deu garantias do sigilo na identificação das mesmas. Pediu que não houvesse qualquer constrangimento ou temor de fazer alguma crítica, se fosse o caso.

2.2 Estrutura da Apresentação

Nesta seção, é apresentado o desenvolvimento da palestra. As figuras utilizadas no texto servem para ilustrar alguns dos *slides* apresentados. Embora já tenham sido apresentadas na seção 1.1, estão novamente expostas para facilitar a compreensão do leitor. No Apêndice A estão todos os *slides* que foram mostrados na apresentação.

A palestra tem cerca de uma hora de duração, excetuando-se o tempo para a aplicação das duas partes do questionário.

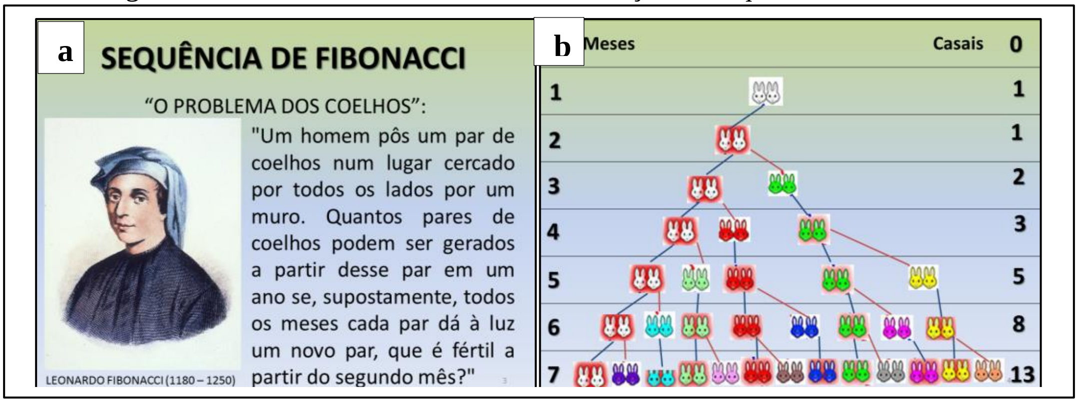
O encontro começa com a apresentação do licenciando e a menção de que aquele momento faz parte do seu trabalho de conclusão do curso.

Antes do tema ser mencionado, é distribuída aos alunos a primeira parte do questionário. Após o recolhimento, tem início a palestra intitulada “A Matemática na natureza”.

É comentado que a Matemática está presente no dia a dia das pessoas nos mais diversos ambientes e contextos, inclusive na natureza. A frase de Galileu Galilei, “A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo” é mencionada.

Para iniciar o primeiro tema a ser tratado, apresenta-se o problema dos coelhos, que foi proposto por Fibonacci (Figura 31 a), e os alunos são levados a construir, mesmo sem saberem, a sequência de Fibonacci (Figura 31 b). O recurso de animação do *power-point* ajuda o palestrante nessa tarefa, ou seja, neste caso, os casais de coelhos aparecem gradativamente após as respostas dos alunos às perguntas sobre quantos casais existem após uma determinada quantidade de meses.

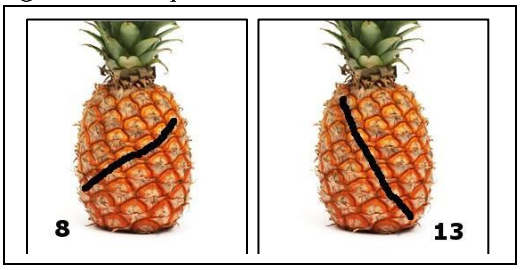
Figura 31 - Problema dos coelhos e a construção da sequência de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria.

Após, são mostrados alguns exemplos da natureza que contêm essa sequência, tais como o crescimento de galhos numa espirradeira, a quantidade de espirais de sementes num girassol e a quantidade de espirais de gomos na casca de um abacaxi (Figura 32).

Figura 32 - Sequência de Fibonacci no abacaxi



Fonte: http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/.

Em seguida, os alunos observam as divisões de cada número da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor na sequência e percebem que, a partir de um determinado momento, a resposta aproximada da divisão fica constante (Figura 33). O número é 1,618, conhecido como o número de ouro, resultado da razão áurea.

Figura 33 - Razão entre os números sequenciais da sequência de Fibonacci

RAZÃO ENTRE OS NÚMEROS SEQUENCIAIS DE FIBONACCI

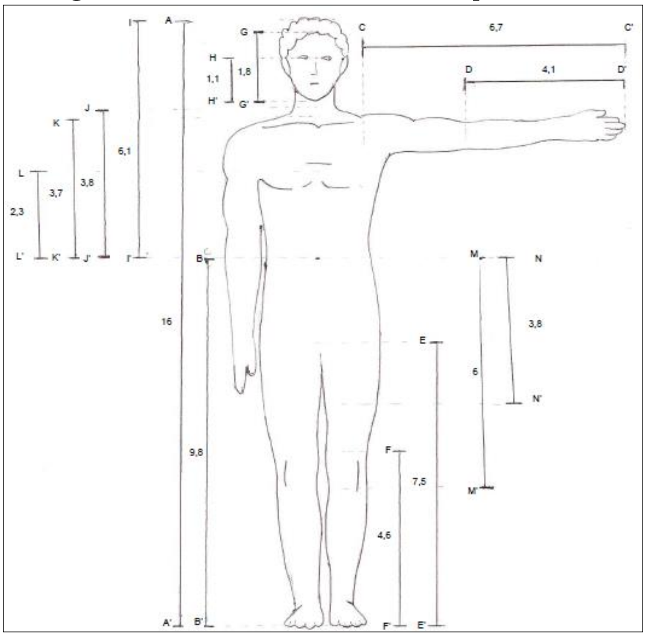
$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{13}{8} = 1{,}625$	$\frac{144}{89} \cong 1{,}618$
$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{21}{13} \cong 1{,}615$	$\frac{233}{144} \cong 1{,}618$
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{34}{21} \cong 1{,}619$	$\frac{377}{233} \cong 1{,}618$
$\frac{5}{3} \cong 1{,}666$	$\frac{55}{34} \cong 1{,}618$	$\frac{610}{377} \cong 1{,}618$
$\frac{8}{5} = 1{,}6$	$\frac{89}{55} \cong 1{,}618$	$\frac{987}{610} \cong 1{,}618$

9

Fonte: Elaboração própria.

Esse número é também encontrado na natureza, como nas divisões entre algumas dimensões de uma libélula, na razão entre o número de abelhas e zangões numa colmeia, bem como na razão entre diferentes partes do corpo humano (Figura 13).

Figura 13 - Diversas medidas do corpo humano



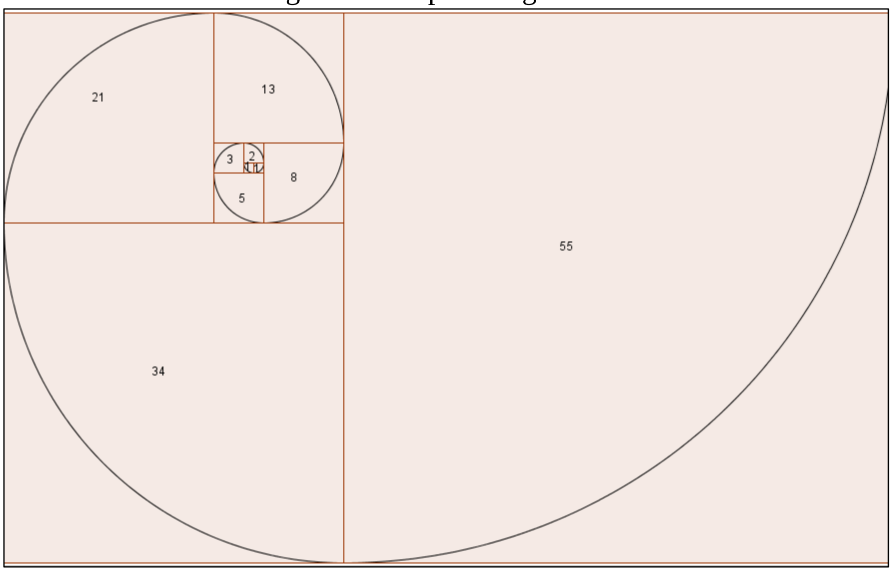
Fonte: FARIA; RIBEIRO; 2009, p.73.

Então um aluno é chamado à frente e, com uma fita métrica, tem o comprimento do seu braço, do ombro à ponta do dedo médio, medido. Esse valor é anotado e dividido pela distância entre o cotovelo e o dedo médio do mesmo braço já medido. Essa divisão resulta num número próximo ao número de ouro.

É comentado que foi criada uma máscara, conhecida como máscara de *phi*, que contém as medidas da razão áurea. Ao se colocar sobre uma foto, é possível verificar se o indivíduo possui, ou não, um rosto nas proporções áureas. Um vídeo chamado “Máscara de phi – a proporção áurea beleza universal”[5] é mostrado no momento em que a foto do rosto de uma mulher é alterada para as “medidas áureas”, sendo possível comparar como é e como seria um rosto com as “medidas de ouro”. Essa teoria associada à máscara não é unânime entre os estudiosos do assunto, havendo aqueles que discordam dessa ideia.

A seguir, com a utilização do Geogebra, são construídos quadrados tendo como medidas de lado números sucessivos da sequência de Fibonacci. Ao se construir arcos nesses quadrados, é obtida a espiral logarítmica (Figura14).

Figura 14 - Espiral Logarítmica

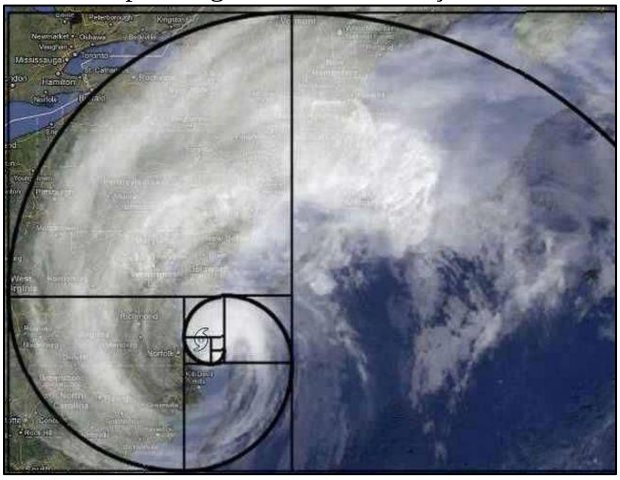


Fonte: Elaboração própria.

São mostradas aos alunos algumas imagens de elementos da natureza, que aparecem sob a forma de espiral logarítmica: a concha de náutilos, a posição de estrelas numa galáxia e a fotografia de satélite da formação de um tornado (Figura 34).

[5] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=13v9I5WPg_Y.

Figura 34 - Espiral logarítmica na formação de um tornado

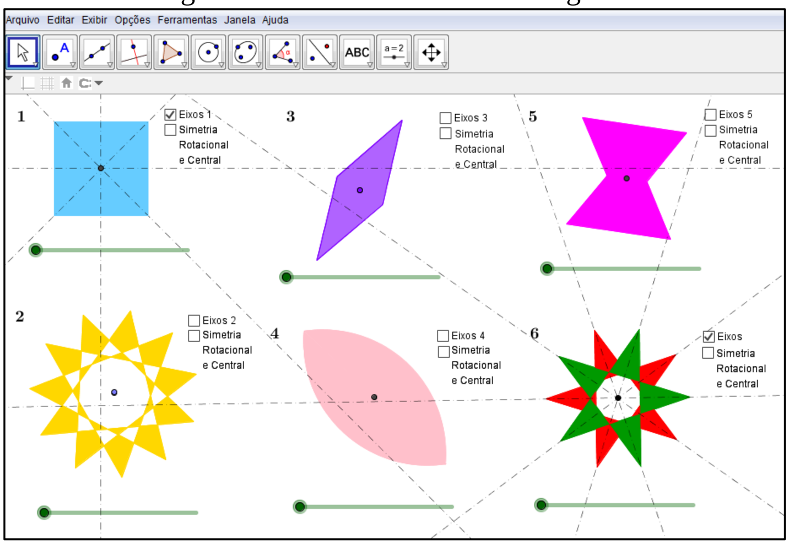


Fonte:http://naukas.com/2012/11/02/por-que-los-huracanes-tienden-a-formar-una-espiral-logaritmica/.

Nesse momento, assiste-se ao vídeo "Natureza em números" com imagens sobre os temas tratados.

O próximo assunto é simetria, dividida em bilateral e radial. É apresentado o conceito de eixo de simetria e uma folha no formato de um quadrado é dada a um aluno, pedindo-lhe que encontre, por meio de dobradura, um eixo de simetria da mesma. A seguir, é pedido a outro aluno que faça o mesmo, até que os quatro eixos de simetria do quadrado sejam encontrados. Com o auxílio do Geogebratube, é apresentada, de forma dinâmica, os eixos de simetria de diferentes figuras[6] (Figura 35).

Figura 35 - Eixos de simetria em figuras

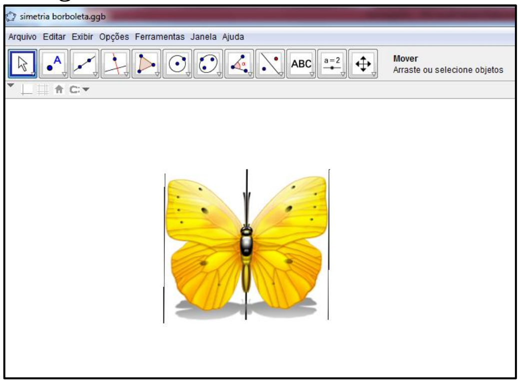


Fonte: https://www.geogebra.org/material/simple/id/98067.

[6] Disponível em: https://www.geogebra.org/material/simple/id/98067.

São mostradas imagens de aves que possuem, em seu corpo, simetria. Outros arquivos do Geogebratube apresentam, por meio de manipulação e de movimento, a simetria presente no reflexo de uma paisagem sobre a superfície de um lago[7], no formato de uma flor[8] e de uma borboleta[9] (Figura 36).

Figura 36 - Simetria numa borboleta



Fonte: https://www.geogebra.org/material/simple/id/1326.

É explicada a simetria radial e apresentada a flor dente de leão, exemplificando-a. (Figura 37).

Figura 37 - Simetria na flor dentes-de-leão

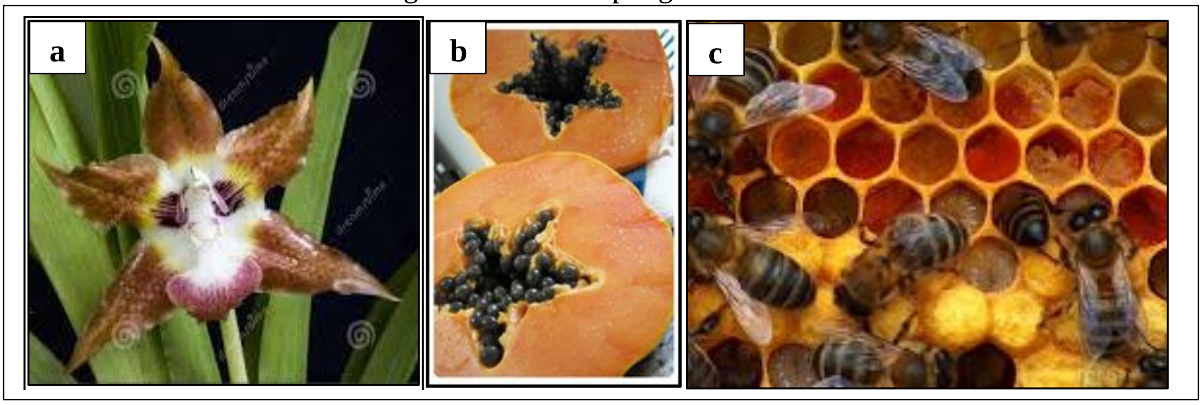
Fonte: http://www.mundodeflores.com/rosas-dentes-de-leao.html.

O tema seguinte são as formas poligonais. Apresentam-se diversas flores que possuem formas triangulares, quadrangulares e pentagonais (Figura 38 a). Das formas pentagonais, ainda são mostradas uma estrela do mar, uma fatia de carambola, um casco do tatu e a arrumação de sementes num mamão (Figura 38 b). Das formas hexagonais, são mostradas

[7] Disponível em: https //www.geogebra.org/material/simple/id/765395.
[8] Disponível em: https://www.geogebra.org/material/simple/id/1301473.
[9] Disponível em: https://www.geogebra.org/material/simple/id/1326.

imagens do casco da tartaruga e dos favos de mel (Figura 38 c). Deste último fala-se sobre a vantagem de se conseguir armazenar maior quantidade de mel nesse formato.

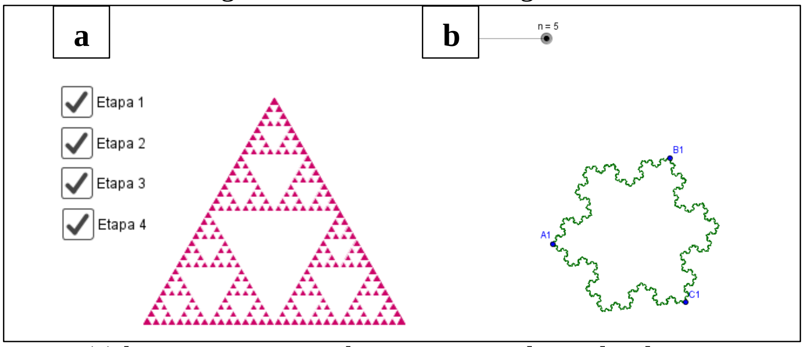
Figura 38 - Formas poligonais na natureza



Fonte: (a) http://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-orqu%C3%ADdea-do-gato-image2462964.
(b)https://noticiasimpossiveis.wordpress.com/2009/10/28/publicidade-desafio-alivio-1515-.
(c)http://manthanos.blogspot.com.br/2011/02/porque-afinal-cabe-mais-mel-no-hexagono_01.html.

O último tema da palestra é fractal. Seu termo é definido e dois exemplos são mostrados, o triângulo de Sierpinski[10] (Figura 39 a) e o floco de neve de Koch[11] (Figura 39 b), ambos construídos e apresentados de forma dinâmica e compreensível, com o auxílio do Geogebratube.

Figura 39 - Fractais no Geogebratube



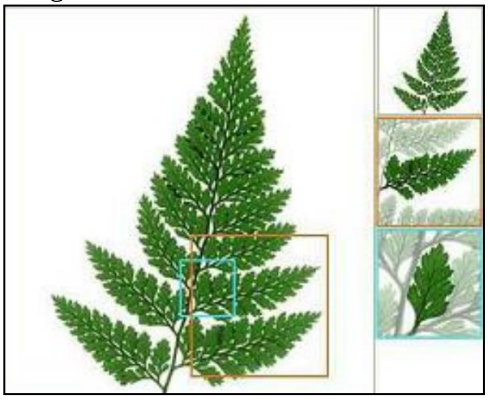
Fonte: (a) https://www.geogebra.org/material/simple/id/142479.
(b) https://www.geogebra.org/material/simple/id/16364.

Em seguida são apresentadas algumas imagens da natureza que se assemelham a estruturas fractais: o brócolis romanesco, a folha de uma árvore, o floco de neve e a folha de uma samambaia (Figura 40).

---

[10] Disponível em: https://www.geogebra.org/material/simple/id/142479.
[11] Disponível em: https://www.geogebra.org/material/simple/id/16364.

Figura 40 - Folha de uma samambaia



Fonte: NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS, 2009 apud ALMEIDA, 2011.

Ao final, apresenta-se o vídeo narrado sob o título “As maravilhas da criação revelam a glória de Deus”.

Após a palestra, a segunda parte do questionário é distribuída aos alunos. Depois de responderem as perguntas, o licenciando recolhe os questionários e agradece a atenção e a participação durante a palestra.

2.3 Elaboração do Questionário

Um dos instrumentos de coleta de dados deste trabalho monográfico é o questionário, aplicado em dois momentos: a primeira parte antes da palestra, e a segunda parte, depois (APÊNDICE B). É feita uma numeração na primeira parte de forma que o aluno repita a mesma na segunda, pretendendo-se, assim, comparar as respostas dos mesmos alunos, antes e depois da palestra.

O objetivo da primeira parte do questionário é verificar a visão do aluno a respeito da disciplina Matemática, ou seja, se a considera importante, útil, presente no dia a dia.

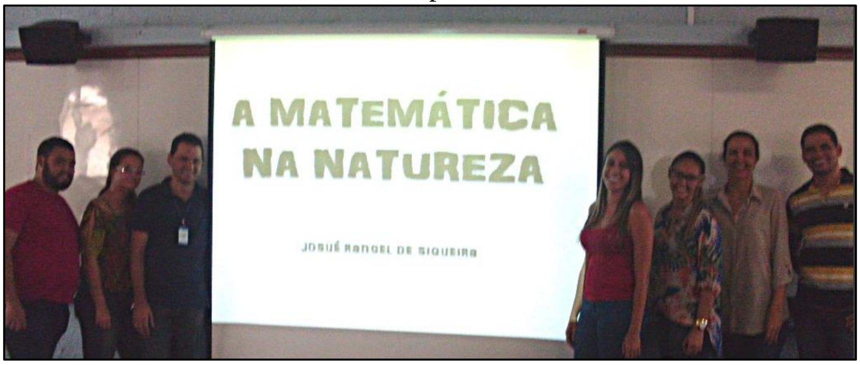
Quanto à segunda parte do questionário, busca-se encontrar a resposta para a questão de pesquisa deste trabalho, já que há uma pergunta que indaga ao aluno se, após a exposição do licenciando, ele adquiriu uma nova visão em relação à disciplina Matemática. Além disso, pretende-se saber se, na visão do aluno, a relação entre a Matemática e a natureza pode contribuir para o ensino e aprendizagem da disciplina. Pergunta-se, ainda, se já conhecia algum dos temas apresentados e de que ele mais gostou da palestra.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

3.1. Teste de Sondagem

Esta monografia contou com um Teste de Sondagem aplicado em uma escola particular da cidade de Campos dos Goytacazes, que promoveu alguns eventos para comemorar o Dia Nacional da Matemática, celebrado em 6 de maio. A proposta era apresentar aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e às turmas do Ensino Médio a presença da Matemática no dia a dia, visando contribuir, dessa forma, para um novo olhar dos mesmos em relação à disciplina. Na Figura 41, a imagem do palestrante, da orientadora do trabalho e de cinco professores da escola.

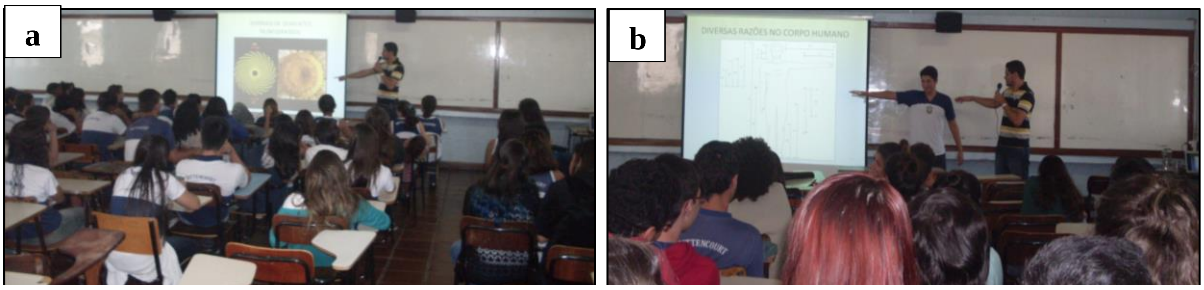
Figura 41 - Professores da escola com o palestrante e a orientadora deste trabalho



Fonte: Elaboração própria.

O autor deste trabalho foi convidado para proferir duas palestras, uma para cada grupo de alunos. As mesmas, intitulada: “Matemática na Natureza”, foram realizadas no dia 5 de maio de 2015, para cerca de cem alunos das quatro séries dos anos finais do Ensino Fundamental (Figura 42 a) e cerca de noventa alunos das três séries do Ensino Médio (Figura 42 b).

Figura 42 - Aplicação do teste de sondagem para alunos dos Ensinos Fundamental e Médio

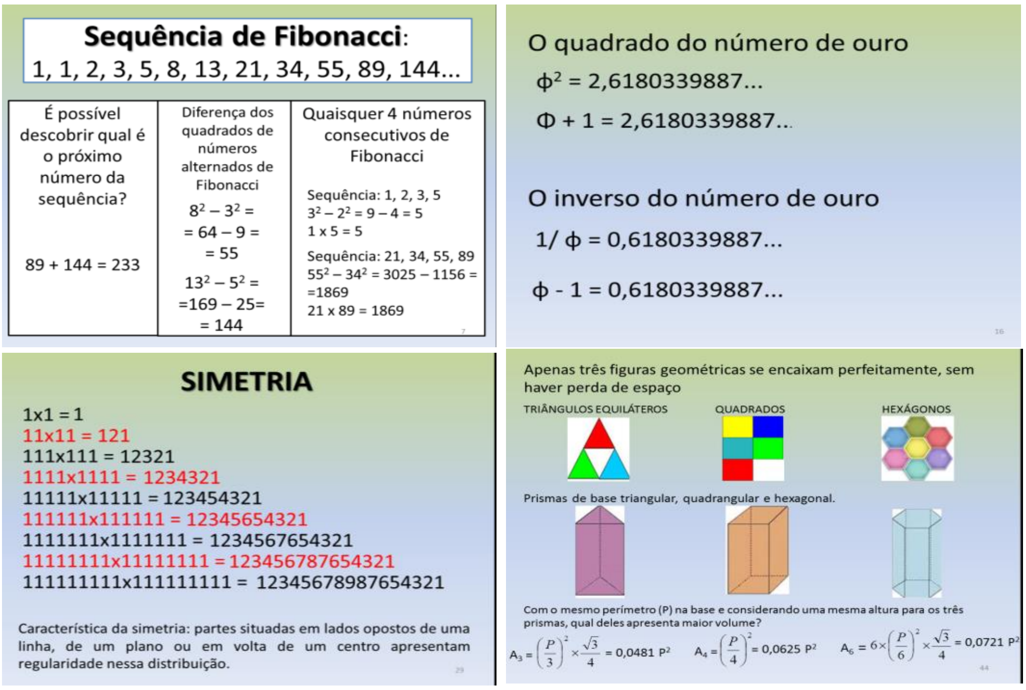


Fonte: Elaboração própria.

Nas duas palestras houve grande participação dos alunos, respondendo às perguntas e demonstrando interesse pelo tema abordado.

Da primeira para a segunda palestra, foram feitas algumas mudanças aplicadas por dois motivos: (i) a percepção de que o número de *slides* estava superiormente incompatível para uma hora de palestra; e (ii) a constatação de que havia um excesso de informações “estritamente matemáticas” em alguns *slides*, o que gerou certa desmotivação por parte dos ouvintes (Figura 43). Percebeu-se que ficaram mais interessados em informações voltadas para a relação entre a Matemática e a natureza. Portanto, quinze *slides* foram retirados para a segunda palestra, o que, na avaliação do autor, foi benéfico e produtivo.

Figura 43 – *Slides* retirados entre as duas palestras do teste de sondagem



Fonte: Elaboração própria.

A experiência foi válida sob vários aspectos: (i) a constatação de que o tema é atraente para o aluno; (ii) a comprovação de que a mesma palestra pode ser aplicada para esses dois níveis de ensino; (iii) a percepção de que uma hora é um tempo suficiente para a apresentação da palestra; (iv) a importância da apresentação de vídeos em momentos estratégicos da palestra, mudando a dinâmica da mesma (Figura 44); e (v) a necessidade de se apresentar materiais concretos, pois embora a visualização da imagem seja importante, o manuseio do objeto apresentado na imagem é enriquecedor.

Figura 44 - Apresentação de vídeo no teste de sondagem

Fonte: Elaboração própria.

As palestras não foram consideradas como um teste exploratório porque não houve a aplicação do questionário, ação a ser realizada no dia das apresentações para os quatro grupos pesquisados.

3.2. Experimentação

O presente trabalho foi apresentado em quatro turmas, a saber, Ensino Fundamental, Ensino Médio, na modalidade regular e EJA e no Ensino Superior. Todos os alunos envolvidos são de escola pública, sendo uma da esfera estadual e três, da federal.

As apresentações ocorreram em espaços das escolas apropriados para este tipo de atividade, já que os locais contavam com *datashow* e caixas de som, proporcionando um ambiente adequado para a aplicação do trabalho (Figura 45).

Figura 45 – Um dos ambiente das apresentações na experimentação

Fonte: Elaboração própria.

A palestra no Ensino Fundamental ocorreu no dia 17 de novembro de 2015, numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental, para 16 alunos. Para o Ensino Médio, foi aplicada numa turma de 3º ano do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Eletrotécnica, para 24 alunos, no dia 19 de fevereiro de 2016. A aplicação no Ensino Superior deu-se na turma do 3º período do curso de Licenciatura em Ciências da Natureza, na tarde do dia 22 de fevereiro de 2016, com a presença de 25 alunos. Na Educação de Jovens e Adultos, do 3º módulo do curso de Eletrotécnica, havia 8 alunos presentes na noite do dia 25 de fevereiro de 2016.

Nas quatro turmas, ao ser anunciado o tema da palestra, os alunos mostraram interesse, dada a novidade do assunto. Embora os alunos do Ensino Fundamental tenham apresentado muita curiosidade durante a palestra e os do Ensino Superior tenham ficado atentos, foram os alunos do PROEJA que mostraram mais encantamento com o tema e expressaram alegria e prazer no decorrer de toda a palestra.

No momento da resolução do problema dos coelhos, proposto por Fibonacci, os alunos participaram ativamente, respondendo ao licenciando como se daria o crescimento da quantidade de pares de coelhos. Ao ser pedido para os alunos completarem os próximos números da sequência de Fibonacci, logo surgia a resposta certa e a explicação correta de como havia se dado o raciocínio para obter os resultados. No PROEJA, porém, os alunos tiveram mais dificuldade nesse momento, demorando um pouco para que um deles tivesse a percepção de que cada número, a partir do terceiro, é obtido nessa sequência pela soma dos dois anteriores.

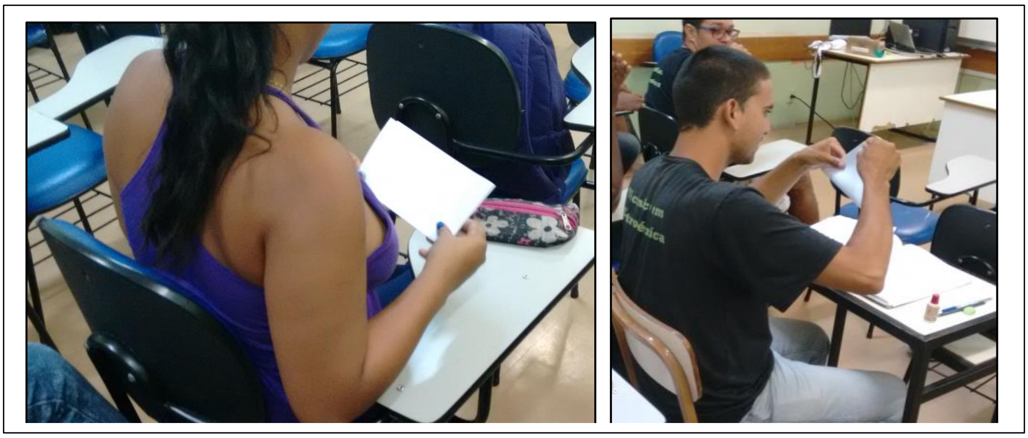
Quando o assunto da palestra foi razão áurea, o licenciando convidou um aluno para ir à frente participar na explicação do tema (Figura 46), já que o número de ouro está presente em divisões entre diferentes medidas das mais diversas partes do corpo humano. Enquanto o licenciando realizava as medições, a turma calculava a razão, obtendo sempre como resultado um número próximo à 1,618.

Figura 46 - Alunos dos Ensinos Fundamental e Médio participando da palestra

Fonte: Elaboração própria.

Quando o assunto foi simetria, a fim de ilustrar o que estava sendo dito, o palestrante entregou um papel quadrado a alguns alunos, pedindo-lhes que encontrassem, por meio da dobradura, os eixos de simetria dessa figura, o que foi satisfatoriamente cumprido (Figura 47).

Figura 47 - Alunos do Ensino Superior e do PROEJA dobrando a folha quadrada em um de seus eixos de simetria



Fonte: Elaboração própria.

Ainda sobre esse tema, uma aluna do Ensino Superior citou exemplos de simetria no corpo humano.

Quando o licenciando comentou sobre a espiral logarítmica, um aluno da mesma turma exemplificou que esse caso pode ser visto num caramujo.

Em momentos estratégicos da palestra, foram apresentados vídeos, com som e imagem atraentes, contribuindo ainda mais para o interesse dos alunos (Figura 48).

Figura 48 - Alunos dos Ensinos Fundamental e Superior acompanhando o vídeo

Fonte: Elaboração própria.

Houve elogios ao final, por parte dos alunos, afirmando que haviam entendido a explanação e gostado muito da palestra. Expressaram o desejo de que todas as aulas de Matemática fossem dinâmicas e compreensíveis como esta. Os alunos também comentaram que a atuação do licenciando foi muito boa, já que o mesmo demonstrou tranquilidade, segurança e domínio do tema.

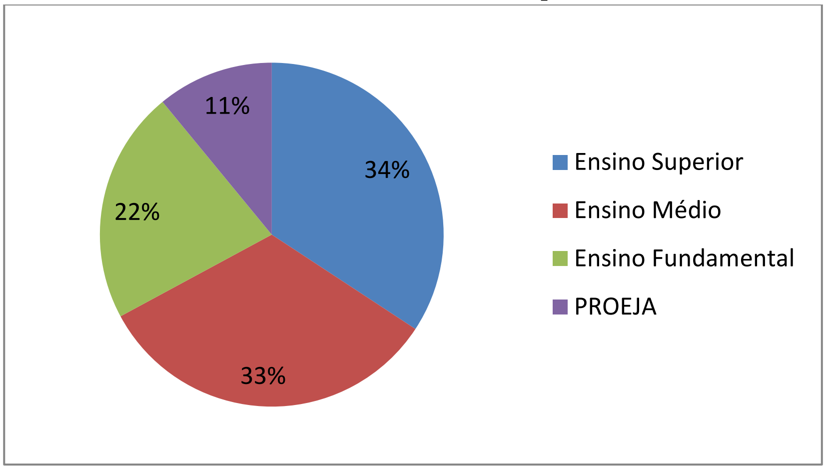
3.3. Análise do Questionário

O questionário foi dividido em duas partes: a primeira, que foi entregue antes da palestra, e a segunda, depois da palestra. A numeração das questões é contínua, ou seja, a primeira questão da segunda parte do questionário é numerada como a terceira, já que a primeira parte do questionário possui duas questões. A seguir, a análise das sete perguntas do questionário, respondidas por todos os setenta e três alunos que estiveram presentes nas quatro palestras.

3.3.1 Questionário – primeira parte

Considerando os setenta e três alunos que participaram das palestras, o nível de ensino que teve o maior comparecimento de alunos foi a do Ensino Superior, com vinte e cinco alunos, seguida pelo Ensino Médio, com vinte e quatro, pelo Ensino Fundamental, com dezesseis e pelo PROEJA, com oito alunos presentes (Gráfico 1).

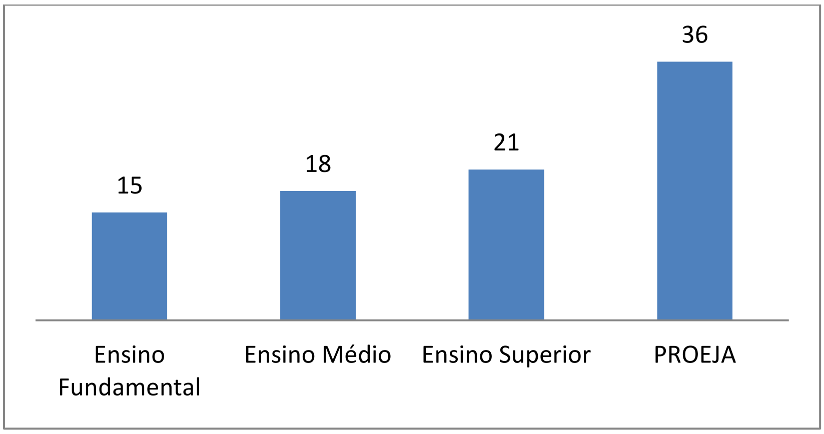
Gráfico 1 - Percentual de alunos por turma[12]



Fonte: Elaboração própria.

Os gráficos abaixo apresentam um perfil das turmas quanto à média de idade (Gráfico 2) e quanto ao gênero (Gráfico 3).

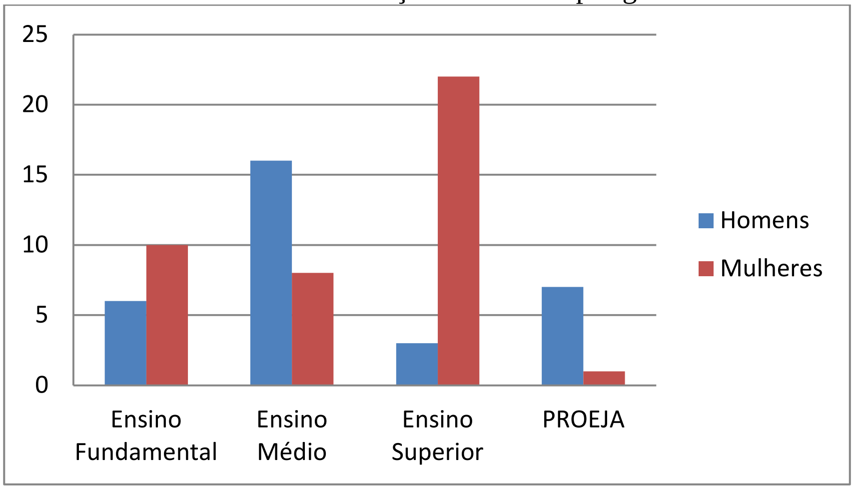
Gráfico 2 - Média de idade das turmas



Fonte: Elaboração própria.

[12] Os valores percentuais indicados foram aproximados.

Gráfico 3 - Distribuição das turmas por gênero



Fonte: Elaboração própria.

Em relação à visão que os alunos possuíam sobre a Matemática, as respostas foram semelhantes nas quatro turmas. Os alunos comentaram sobre a importância e a presença da Matemática no dia a dia e também afirmaram ter dificuldade em aprender e em entender os conceitos da disciplina (Figura 49).

Figura 49 - Resposta da segunda questão do questionário dada por um aluno de cada turma

Ensino Fundamental

2. Qual é a sua visão em relação à disciplina Matemática?

A minha visão em relação à disciplina matemática, é que é uma disciplina muito necessária no nosso dia-a-dia, no trabalho e nas coisas do nosso cotidiano, porém não é uma matéria que me interesso muito, uma matéria que tenho um pouco de dificuldade. Mas sim é uma matéria que é muito importante.

Ensino Médio

2. Qual é a sua visão em relação à disciplina Matemática?

A matematica em meu ponto de vista é uma boa disciplina e na maioria das vezes pode ser aplicada no dia a dia. Gosto de matematica mesmo tendo uma dificuldade.

Ensino Superior

2. Qual é a sua visão em relação à disciplina Matemática?

A disciplina matemática é muito importante para a vida, tudo no cotidiano precisa da matemática, mas a matemática não é tão fácil de aprender, pelo menos na minha opinião, pois o que mais ouço é muitos indivíduos dizendo que tem dificultade nessa disciplina e eu sou uma dessas pessoas que tem dificuldades de aprender essa disciplina chamada matimatica, que é tão odiada por uns e tão amadas por outros, mas sem sombra de dúvidas uma disciplina que nunca poderá ser descartada.

PROEJA

2. Qual é a sua visão em relação à disciplina Matemática?

A matematica é muito importante em nossas vidas mas ela não deixa de ser uma materia Paura temida. e muitos vezes como eu trago da minha infancia algumas dificuldade Para lidar com ela. mas espero aqui Para frente resolver essa enorme Poplema.

Fonte: Elaboração própria.

No livro “Na vida dez, na escola zero”, os autores mostram que muitas vezes os alunos sabem aplicar a Matemática na prática, no ato de dar ou conferir um troco, por exemplo, mas não sabem efetuar corretamente uma conta de subtração na prova. A avaliação escolar perde o sentido, muitas vezes, porque seu objetivo difere da aplicação da Matemática no dia a dia (CARRAHER et al; 1993).

Segundo Carraher e.al. (1993), é importante que o professor ensine alguns temas da Matemática partindo da realidade do aluno, mostrando-lhe a aplicação daquele conteúdo. “O ensino de Matemática deveria ser, sem dúvida, a área mais diretamente beneficiada pelo conhecimento da Matemática da vida cotidiana” (CARRAHER et al., 1993, p. 21).

Foram registradas outras percepções considerando os diferentes níveis de ensino e as situações vividas na realidade escolar e pessoal dos diferentes grupos de alunos.

No Ensino Médio, foi comentado sobre a contribuição da Matemática para muitas profissões, descobertas e avanços tecnológicos. Surgiu ainda a questão de que a escola explora demais determinados conteúdos matemáticos que só serão utilizados no vestibular, ensinando aos alunos assuntos que são desnecessários e inúteis na vida prática. Muitas vezes a preocupação do professor e do aluno está apenas em ser aprovado num vestibular e não em aprender o conteúdo. Na visão de um dos alunos, participantes do trabalho, faz-se necessário um replanejamento da grade de ensino, a fim de corrigir esses aspectos da educação.

A definição dos conteúdos que devem ser estudados na escola é baseada nas diretrizes e orientações oficiais, embora estas não definam claramente os critérios para inclusão ou exclusão de determinado conteúdo. Entende-se que é necessário considerar a aplicação de cada conteúdo em dois aspectos: seu significado na vida acadêmica e sua importância na vida prática (HORTA, 2015).

Horta (2015), em sua dissertação, fez uma pesquisa sobre quais conteúdos deveriam ser mantidos e retirados da grade curricular, na opinião de professores do Ensino Médio, segundo esses dois aspectos, o da utilização na vida prática e na acadêmica.

Os conteúdos considerados “essenciais” à vida pessoal e acadêmica segundo a pesquisa são: razão e proporção; porcentagem e juros; grandezas, unidades de medida e escala; e comprimento, área e volume. Percebe-se nessa lista, a presença da geometria, parte também destacada neste trabalho pelo grau de intersecção com a natureza.

No Ensino Superior, foi comentado que a Matemática precisa ser mais contextualizada na sala de aula. Segundo Fernandes (2006, p.3 apud DANTAS, 2013, p.8), a prática contextualizada no ensino de Matemática é um instrumento importante, desde que “[...] interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno. Defende-se a ideia de que a contextualização estimula a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno”.

Segundo esse mesmo grupo de alunos, muitas vezes a didática e os métodos utilizados para o ensino da Matemática dificultam a aprendizagem. Para eles, a disciplina deve ser trabalhada como mais leveza e de forma mais lúdica.

No PROEJA, foi reconhecida a importância da Matemática na compra de produtos e na conferência do troco, para economizar e juntar dinheiro com o propósito de viajar e para controlar o orçamento a fim de se conseguir comprar uma casa ou um carro. Percebe-se que, para esse grupo, a principal questão observada diz respeito às finanças, aplicação bastante utilizada na vida comum das pessoas.

Santos (2015) acredita que é necessário garantir que os indivíduos tenham conhecimento acerca das diversas situações financeiras nas quais estão envolvidos cotidianamente, de modo que aprendam a forma mais adequada de lidar com as finanças.

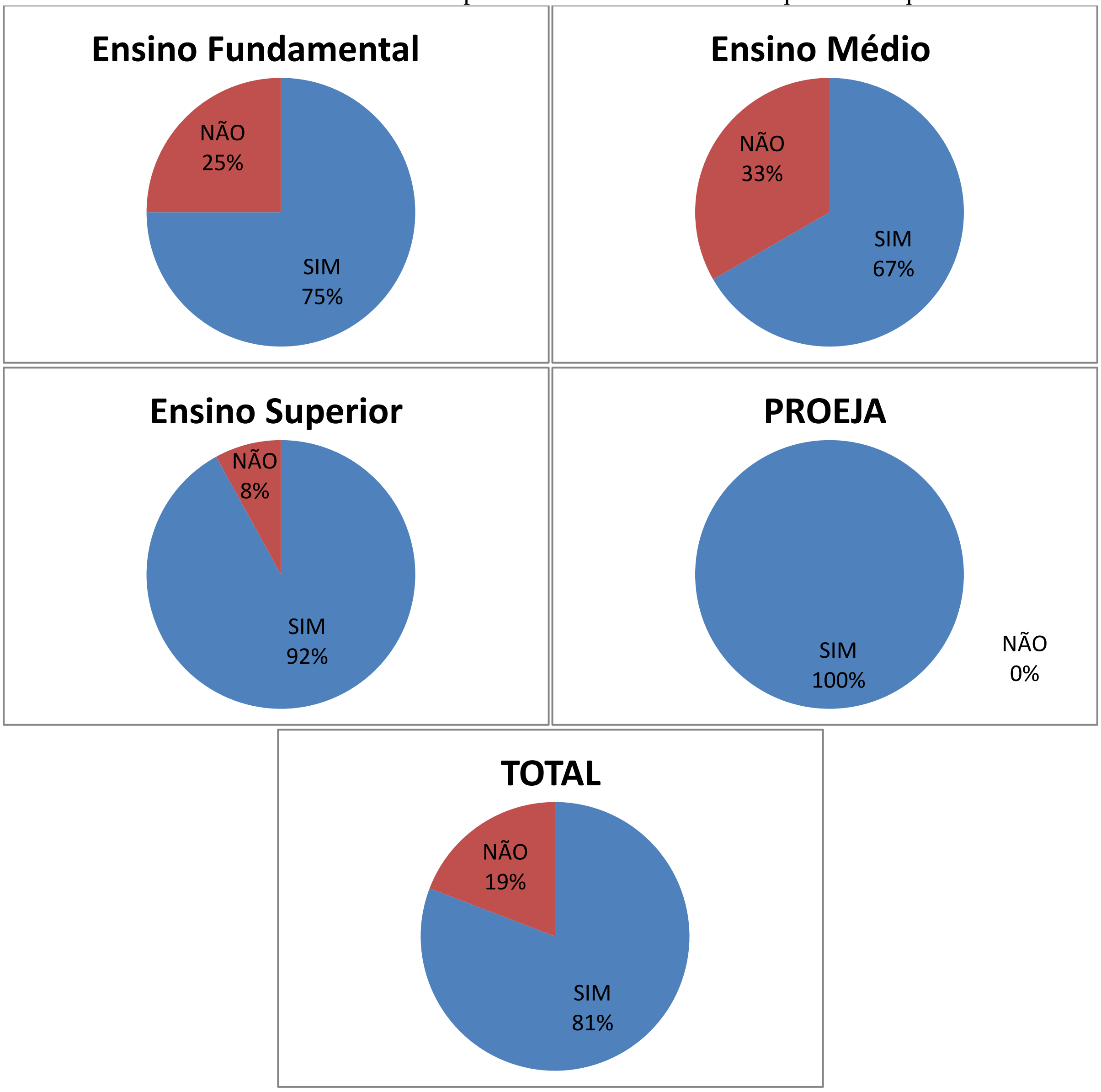
Muniz Junior (2010, p.2 apud DUARTE, 2012, p. 4) afirma que “a população brasileira tem lidado com o dinheiro de maneira desastrosa, onde a falta de informação matemática, inclusive sem foco na tomada de decisões, tem sido um dos principais motivos dessa realidade”.

Duarte (2012) relata que a educação financeira possui uma importante relação com o exercício da cidadania, possibilitando ao aluno conhecimentos que lhe trarão uma qualidade de vida melhor, uma consciência econômica e social e o preparo para o exercício da cidadania.

3.3.2. Questionário – segunda parte

Na terceira questão, dos setenta e três alunos que participaram da experimentação, aproximadamente 81% afirmaram terem obtido uma nova visão em relação à Matemática. O Gráfico 4 apresenta esse resultado, discriminado pelas turmas participantes e pelo total de alunos.

Gráfico 4 - Percentual referente às respostas dos alunos na terceira questão do questionário[13]

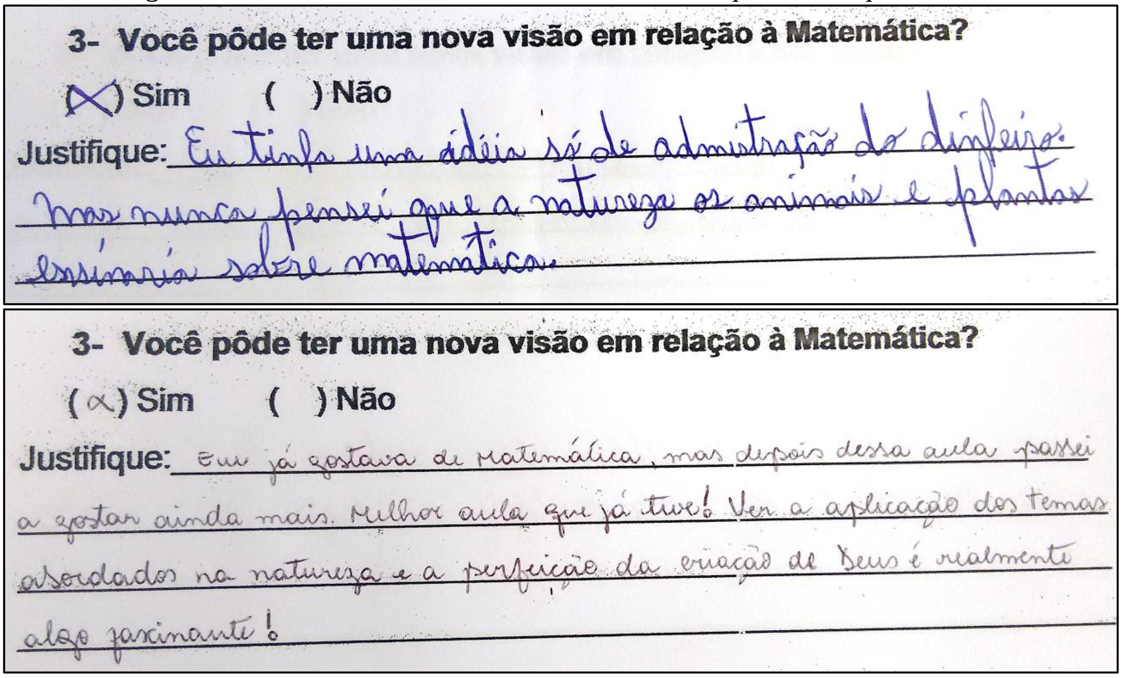


Fonte: Elaboração própria.

Alguns dos alunos que responderam afirmativamente a pergunta mostraram-se encantados com a beleza da Matemática e com a possibilidade de encontrá-la na natureza tal qual foi apresentado. No Ensino Médio, um aluno declarou que foi a melhor aula de Matemática que já teve e que passou a gostar ainda mais da disciplina após a participação na palestra (Figura 50).

[13] Os valores percentuais indicados para o Ensino Médio e para o total foram aproximados.

Figura 50 - Justificativas de dois alunos na terceira questão do questionário



3- Você pôde ter uma nova visão em relação à Matemática?

(X) Sim ( ) Não

Justifique: Eu tinha uma idéia só de administração do dinheiro. mas nunca pensei que a natureza os animais e plantas ensinaria sobre matemática.

3- Você pôde ter uma nova visão em relação à Matemática?

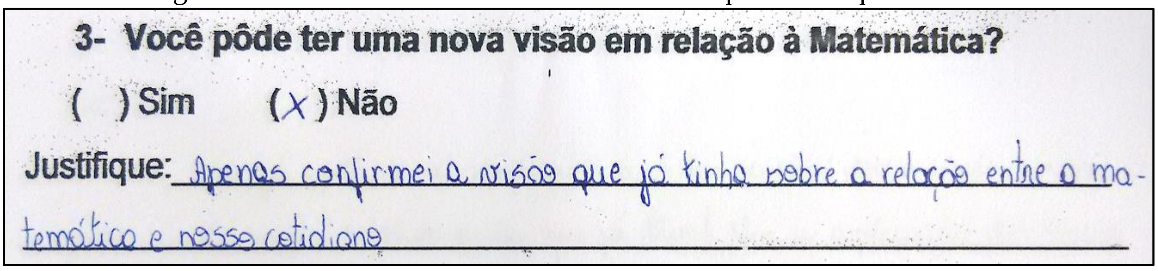
(x) Sim ( ) Não

Justifique: Eu já gostava de Matemática, mas depois dessa aula passei a gostar ainda mais. Melhor aula que já tive! Ver a aplicação dos temas abordados na natureza e a perfeição da criação de Deus é realmente algo fascinante!

Fonte: Elaboração própria.

Alguns alunos afirmaram não terem tido uma nova visão em relação à Matemática, no sentido de que continuaram enxergando a disciplina como importante e presente no dia a dia (Figura 51).

Figura 51 - Justificativa de um aluno na terceira questão do questionário



3- Você pôde ter uma nova visão em relação à Matemática?

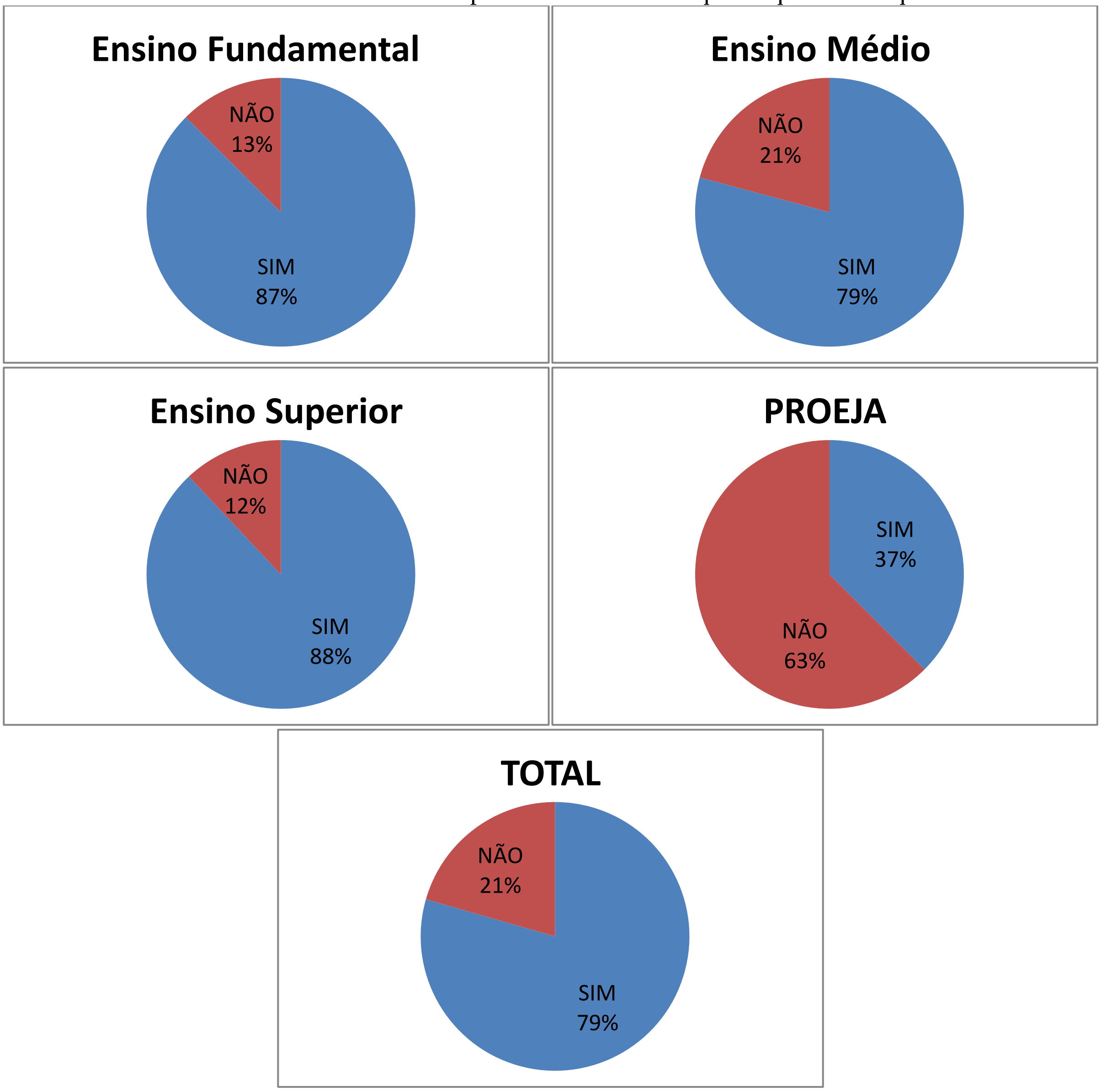
( ) Sim (X) Não

Justifique: Apenas confirmei a visão que já tinha sobre a relação entre a ma-temática e nosso cotidiano

Fonte: Elaboração própria.

Na quarta questão, a maioria respondeu que já conhecia pelo menos um dos temas apresentados (Gráfico 5). Apenas no PROEJA, a minoria relatou já conhecer alguns dos temas.

Gráfico 5 - Percentual referente às respostas dos alunos na quarta questão do questionário[14]



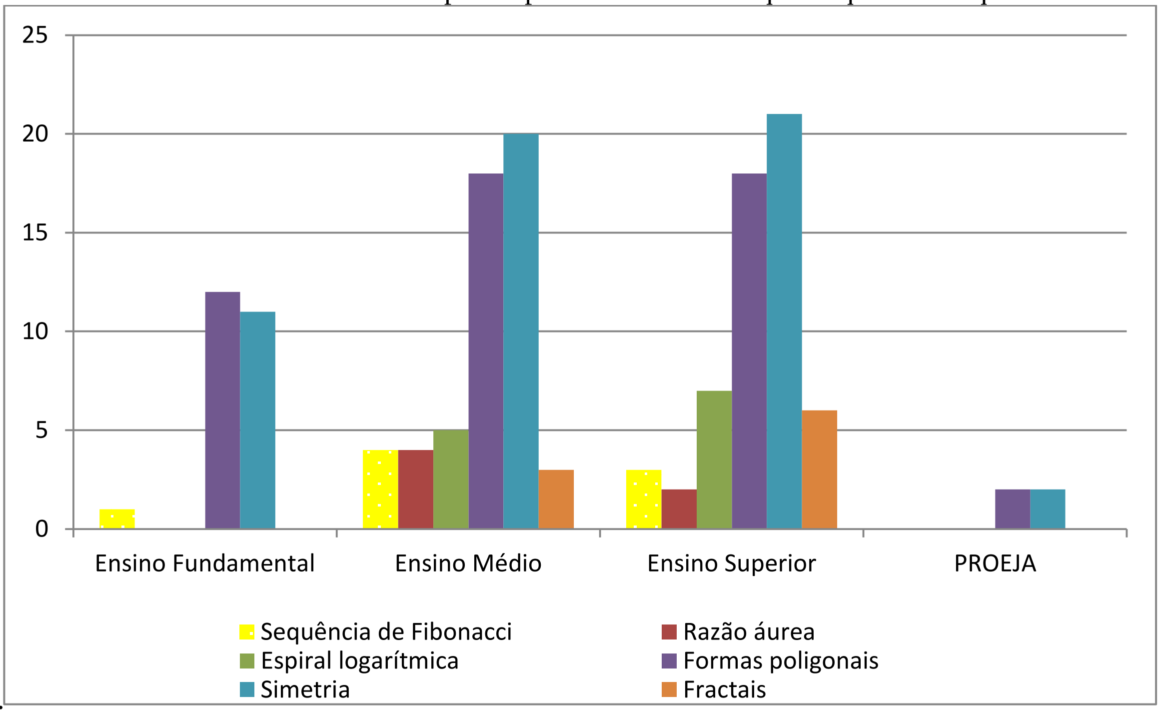
Fonte: Elaboração própria.

Na quinta questão, foi possível verificar que os temas mais vistos pelos alunos em todas as séries envolvidas foram formas poligonais e simetria (Gráfico 6). Esses temas são abordados em várias séries dos Ensinos Fundamental e Médio, embora, algumas vezes, sem aplicação prática ou exemplificação de elementos do dia a dia. E o tema menos visto, de modo geral, é razão áurea, talvez por não constar na matriz curricular de Matemática das diferentes séries escolares. Fato lamentável, já que esse assunto pode ser abordado de diversas formas pelo professor, favorecendo o dinamismo nas aulas com atividades práticas, instigantes e curiosas.

[14] Os valores percentuais indicados foram aproximados, exceto para o Ensino Superior.

Na sua dissertação, Silva (2014), que abordou a razão áurea como uma motivação para estudos de conteúdos matemáticos, concluiu seu trabalho afirmando que a razão áurea desperta a curiosidade das pessoas e atrai o interesse dos alunos, deixando o aprendizado da Matemática muito mais dinâmico e prazeroso (SILVA, 2014, p.93).

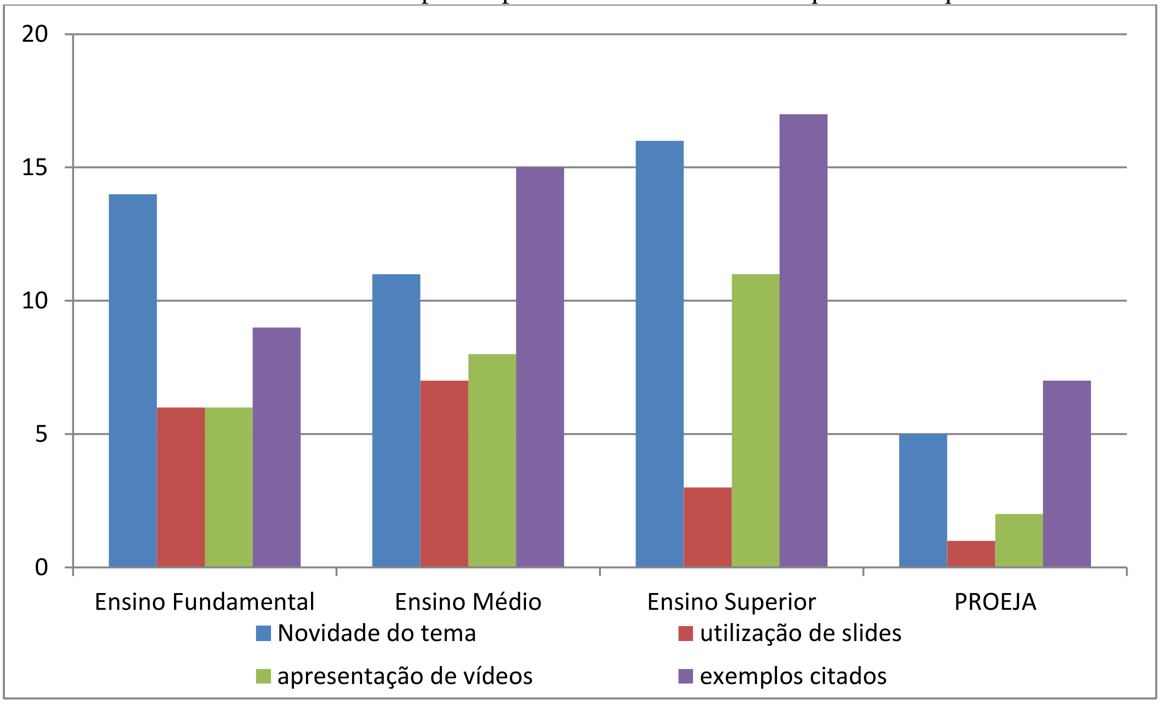
Gráfico 6 - Número de alunos por respostas indicadas na quinta questão do questionário



Fonte: Elaboração própria.

Quanto à pergunta em relação ao de que os alunos mais gostaram na palestra, os exemplos citados foi a opção que mais agradou e o uso de *slides*, a menos indicada (Gráfico 7). Justifica-se a última opção talvez pelo fato dessa prática não ser um elemento tão novo para os alunos, já que professores e eles mesmos a utilizam em eventuais apresentações de trabalhos.

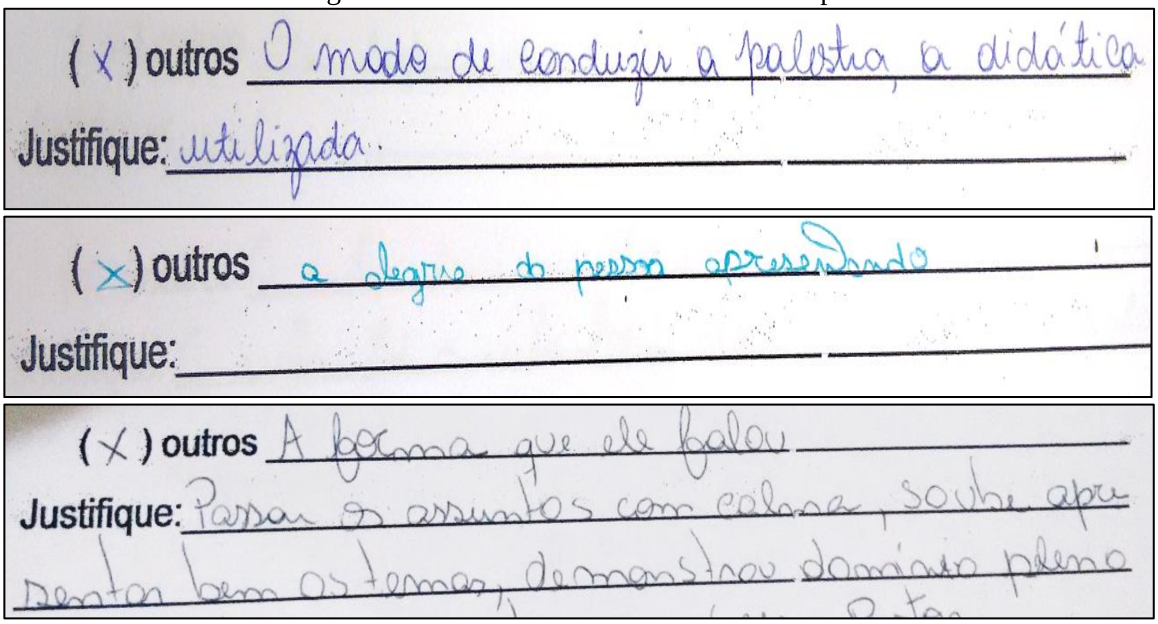
Gráfico 7 - Número de alunos por respostas indicadas na sexta questão do questionário



Fonte: Elaboração própria.

Outras opções foram citadas nessa questão como a forma como a palestra foi conduzida e a maneira como o palestrante a apresentou (Figura 52).

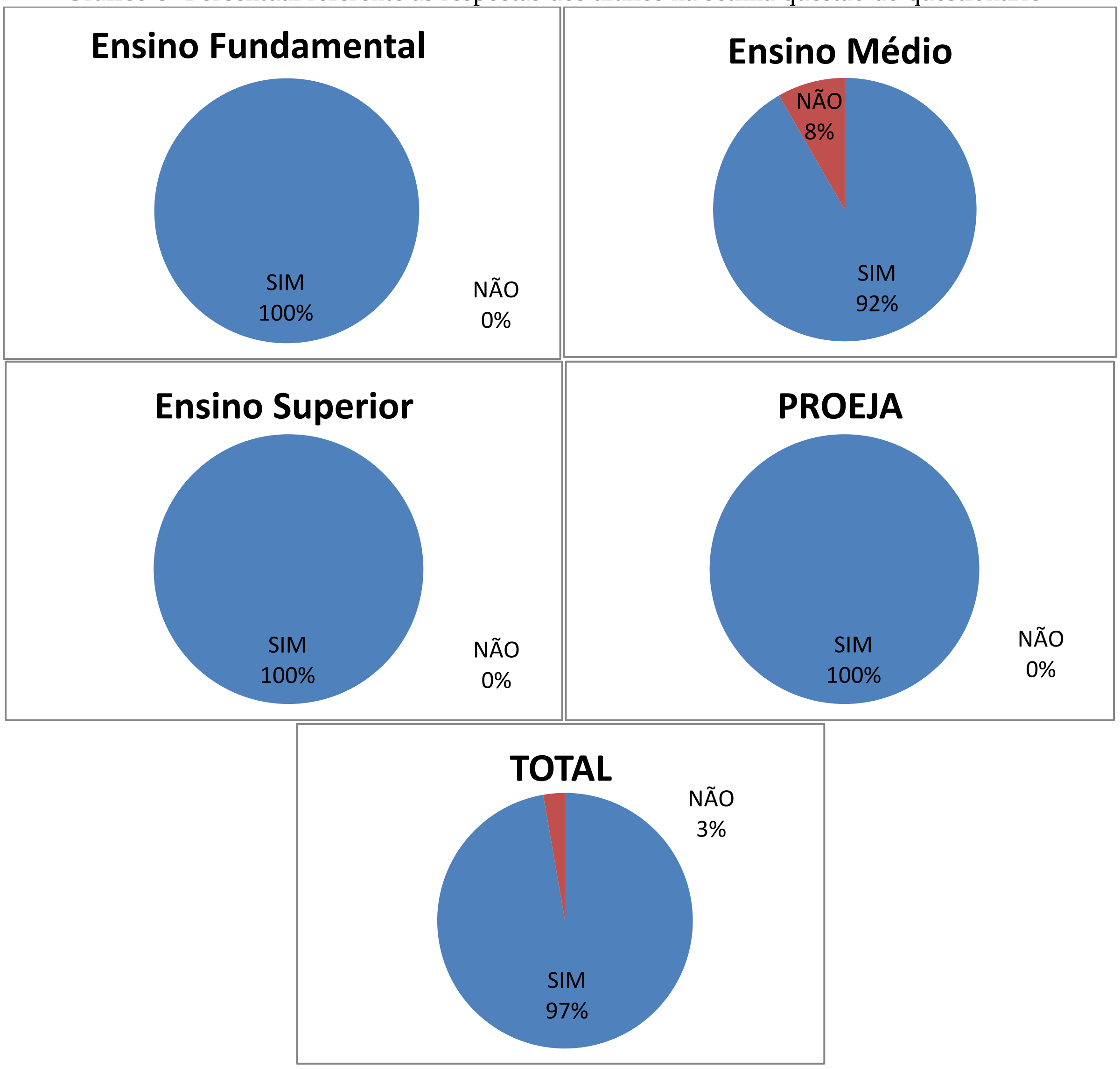
Figura 52 - Comentários dos alunos sobre a palestra



Fonte: Elaboração própria.

Em relação à sétima pergunta, chama a atenção o fato de que quase a totalidade dos alunos acha que conhecer algumas relações entre a Matemática e a natureza pode contribuir para o ensino e aprendizagem da disciplina (Gráfico 8).

Gráfico 8 -Percentual referente às respostas dos alunos na sétima questão do questionário[15]



Fonte: Elaboração própria.

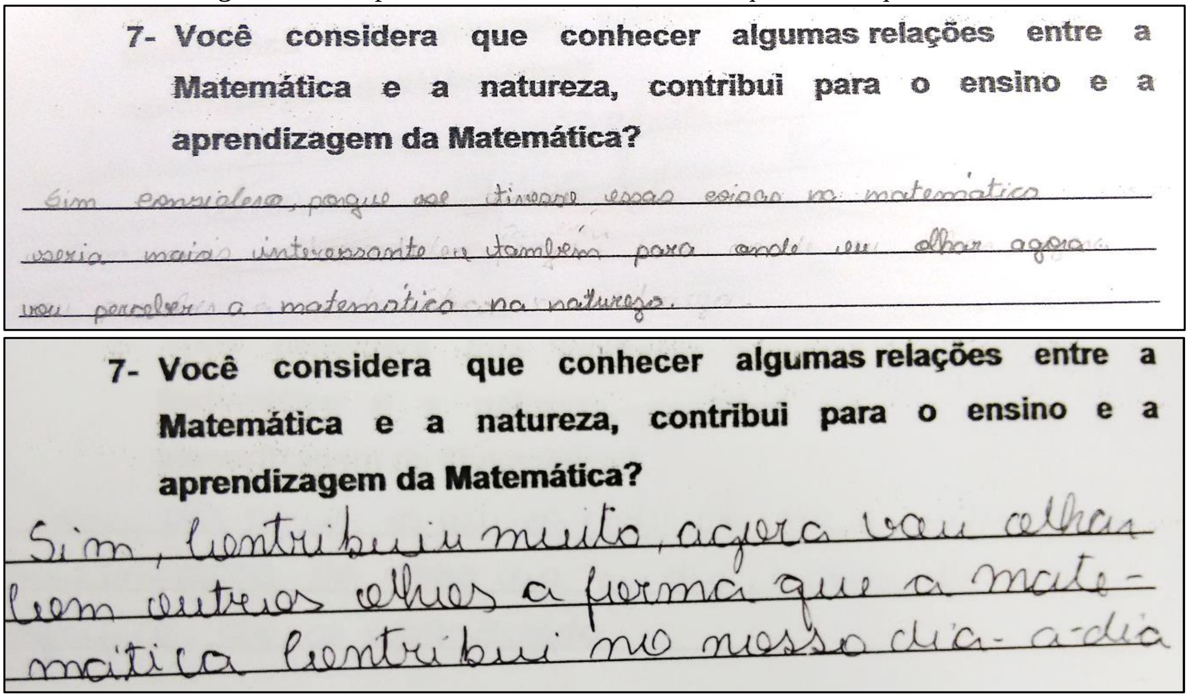
Segundo os alunos, tal fato (i) desperta a curiosidade do aluno; (ii) muda a abordagem como comumente a aula é ministrada, (iii) aumenta o interesse do aluno nas aulas; e (iv) deixa a aula mais dinâmica, menos cansativa e com mais chances do aluno aprender o conteúdo.

[15] Os valores percentuais indicados para o Ensino Médio e para o total foram aproximados.

Mendes (2007) concluiu, em seu trabalho, que os alunos são receptivos e entusiasmados com aulas que mesclam a Matemática e as Ciências da Natureza. Segundo a autora, essa interdisciplinaridade torna o processo de ensino aprendizagem mais motivador.

Uma aluna do Ensino Fundamental e outra do Ensino Superior afirmaram que, a partir da palestra, passarão a ver a Matemática e a natureza de outra forma (Figura 53).

Figura 53 - Resposta de duas alunas na sétima questão do questionário



7- Você considera que conhecer algumas relações entre a Matemática e a natureza, contribui para o ensino e a aprendizagem da Matemática?

Sim considero, porque se tivesse essas coisas na matemática seria mais interessante e também para onde eu olhar agora vou perceber a matemática na natureza.

7- Você considera que conhecer algumas relações entre a Matemática e a natureza, contribui para o ensino e a aprendizagem da Matemática?

Sim, contribuiu muito, agora vou olhar com outros olhos a forma que a matemática contribui no nosso dia-a-dia

Fonte: Elaboração própria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho monográfico fez uma associação de dois assuntos que são do interesse e da admiração do autor: a Matemática e a natureza. A beleza e a perfeição de ambas são notáveis e a realização desse estudo sobre a relação entre esses temas foi bastante prazeroso e enriquecedor. À medida que o licenciando se aprofundava no assunto, descobria novos exemplos e ficava surpreso com a abundante presença da Matemática na natureza.

A apresentação deu-se por meio de uma palestra. A exposição oral dialogada contou com a utilização de *slides* e vídeos que conferiram dinamismo à apresentação. Percebeu-se que essa exposição, apesar de não ser muito considerada como uma importante estratégia metodológica pela comunidade acadêmica, pode ser um recurso eficaz, desde que seja bem explorada.

O teste de sondagem feito com quase duzentos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio serviu para o licenciando fazer alguns recortes em sua apresentação, eliminando *slides* que apresentavam conteúdo estritamente matemático. Dessa forma, a palestra privilegiou a relação entre a Matemática e a natureza.

Na experimentação, a escolha dos quatro grupos de participantes mostrou que o tema deste trabalho atendeu a todas as faixas etárias consideradas, pois não há requisito, nesses casos, para se mostrar a presença da Matemática na natureza.

Foi percebido, por meio das expressões faciais e das palavras proferidas pelos participantes, que a exposição agradou a todos, pois os alunos ficaram atentos e foram participativos durante todo o tempo.

Constatou-se, por meio da observação, das anotações no caderno de campo e pelas respostas dos alunos no questionário, que o trabalho encantou a maioria dos alunos principalmente pela novidade do tema e pelos exemplos citados que retrataram a presença da Matemática na natureza.

Uma das dificuldades enfrentadas pelo licenciando foi encontrar referências bibliográficas relacionadas ao tema, já que existem poucos materiais que abordam o assunto, em especial, com aplicação voltada para o ensino.

A questão de pesquisa foi satisfatoriamente respondida, pois mais de 80% dos alunos afirmaram, no questionário, terem obtido uma nova visão em relação à Matemática após assistir à palestra.

O objetivo geral dessa forma foi alcançado bem como os específicos. Quanto aos últimos, além de serem identificadas muitas relações entre a Matemática e a natureza, a ideia de regularidade foi destacada em praticamente todos os temas. Por fim, vários elementos geométricos foram explorados durante a palestra como a ideia de simetria representada também nas dobraduras feitas pelos alunos no quadrado, a construção da espiral logarítmica feita no Geogebra e as observações quanto à otimização do volume feita pelas abelhas em seus alvéolos, por exemplo.

Destaca-se também a afirmação feita por cerca de 97% dos alunos, que o conhecimento de algumas relações envolvendo a Matemática na natureza pode contribuir para o ensino e aprendizagem da disciplina. Segundo os alunos, essa abordagem tornará as aulas mais dinâmicas e atraentes, além de mostrar a relevância de alguns temas matemáticos no contexto real.

O autor deste trabalho continuará estudando sobre esse assunto, certo de que este jamais será esgotado ou ficará desatualizado. Incentiva, inclusive, professores, alunos e curiosos a estudarem as relações entre a Matemática e a natureza, na certeza de que é um conhecimento bastante válido.

Sugere-se que trabalhos futuros deem prosseguimento a este estudo, tanto na busca de mais exemplos na natureza dentro dos seis temas apresentados, quanto na existência de outros elementos matemáticos presentes na natureza.

Foi gratificante e recompensador conhecer um pouco mais sobre a natureza perfeita e também sobre a presença da Matemática perfeita nela.

Sim, Deus, o criador da natureza, é matemático!

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Mikelle Rodrigues. **O uso de fractais no estudo das progressões geométricas**. 2011. 117 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2011.

AUGUSTO, Cristiano Gonçalves. **O número de ouro**: representação da beleza matemática. 2009. 68f. Monografia (Especialização em Matemática do Ensino Básico) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais**... Recife: SBEM, 2004. p.1-8.

BARBOSA, Ana; BORRALHO, Antônio; CABRITA, Isabel; FONSECA, Lina; PIMENTEL, Teresa.; VALE, Isabel. Padrões no Currículo de Matemática: Presente e Futuro. In: González, R.; Alfonso, B.; Machin, M.; Nieto, L. (Org.). **Investigación en Educación Matemática**. Badajoz: SEEM e SEIEM, 2008. p. 477-493.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. 2. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BORTOLOSSI, Humberto José. OLIVEIRA, Raiana Tomazini. Conteúdos digitais para a Matemática do ensino médio: verdades e mentiras sobre o número de ouro. In: ENCONTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 5., 2010, Rio de Janeiro. **Anais** ... Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2010.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. ______. ______. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998.

______. ______. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CABRAL, João Francisco Pereira. **Pitágoras**. s.d. Disponível em <http://www.brasilescola.com/filosofia/pitagoras-1.htm>. Acesso em: 03 out. 2015.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 3 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 2000.

CARRAHER, Terezinha, et al. **Na vida dez, na escola zero.** 7. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A Matemática na arte e na vida.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

CREASE, Robert P. **As grandes equações**: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. Trad. Alexandre Cherman. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

CRESWELL, John. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto.** Tradução Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer**. Piracicaba: Editora Unimep, 1995. p.7-8.

DANTAS, Viviane Andrade de Oliveira. **O ensino de matemática como prática contextualizada**: desafios e contribuições para aprendizagem significativa, 2013. Disponível em: http://midia.unit.br/enfope/2013/GT3/O_ENSINO_DE_MATEMATICA_COMO_PRA%CC%81TICA_CONTEXTUALIZADA.pdf. Acesso em: 25 mar. 2016.

DAVIS, Philip. J. HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DEVLIN, Keith. **Matemática**: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

DUARTE, Paulo César Xavier et al. **Matemática financeira**: um alicerce para o exercício da cidadania. 2012. Disponível em: http://www.nucleus.feituverava.com.br/index.php/nucleus/article/view/698/863. Acesso em: 03 abr. 2016.

EINSTEIN, Albert. Geometria e Experiência. **Scientiae Studia**, São Paulo, v.3, n.4, out./dez, 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000400009. Acesso em: 2 jun. 2015.

FELIX, Regina Lúcia. O gênero exposição oral no contexto do ensino médio. In: Simpósio Internacional de Ensino de Língua Portuguesa, 2012. **Anais**... Uberlândia. EDUFU, 2012. p.1-16.

FERNANDES, Suzana da Silva. **A contextualização no ensino de matemática** – um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do distrito federal. 2006. Disponível em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf. Acesso em: 25 mar. 2016.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio**: o minidicionário de língua portuguesa. 7 ed. Curitiba: Editora Positivo, 2008.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Algumas notas sobre Pesquisa Qualitativa e Fenomenologia. **Interface** – Comunicação, Saúde, Educação, v.1, n.1, p.109-122, 1997.

GIL, Eric de Souza, et al. Estratégias de ensino e motivação de estudantes no ensino superior. In: Vita et Sanitas, Trindade-Go. **Anais...** Trindade**.** n.6, jan-dez./2012. p. 57-81.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 11 ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. **Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953>. Acesso em: 29 out. 2015.

HARTUNG, Guilherme Erwin. **A Matemática na Natureza**. 2012. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaColecaoAula.html?id=822. Acesso em: 17 abr. 2015.

HORTA, Deborah Alves. **Ordenação dos conteúdos de Matemática prioritários no Ensino Médio segundo a percepção de docentes das escolas de Campos dos Goytacazes – RJ.** 2015. 88 f. Dissertação (Mestrado em Pesquisa Operacional e Inteligência Computacional) – Universidade Cândido Mendes, Campos dos Goytacazes, 2015.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

JANOS, Michel. **Matemática e Natureza.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

KLASSMANN, Mário Silfredo. Um relicto latino em Cruz Alta, Rio Grande do Sul. **Organon**, Porto Alegre, n. 27, p. 201-206, julho/dez., 1999.

LIMA, Edsandra de Carvalho. Usos da TV e vídeo em sala de aula: relato de uma experiência com o "Projeto Cultura Afro-Brasileira". In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM ALAGOAS, 5., 2010, Alagoas. **Anais eletrônicos...** Alagoas: UFAL, 2010. p. 1-9. Disponível em: http://dmd2.webfactional.com/media/anais/USOS-DA-TV-E-VIDEO-EM-SALA-DE-AULA-RELATO-DE-UMA-EXPERIENCIA-COM-O-PROJETO-CULTURA-AFRO-BRASILEI.pdf . Acesso em: 12 jan.2015.

LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** 3. ed. Rio de Janeiro. Editora Record, 2012.

______. **Razão áurea**: a história de fi. 7. ed. Rio de Janeiro. Editora Record, 2015.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).

MENDES, Fernanda Manuela Pinheiro. **A Matemática na natureza**. Dissertação (Mestrado em Matemática e Ciências da Natureza). 2007. 218 f. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007.

MENEGASSI, Maria Elvira Jardim. Análise de problemas envolvendo padrões numéricos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007.Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ixenem/Relato.../RE21461236053T.doc> Acesso em: 01 mar. 2013.

MORÁN, José Manoel. O Vídeo na sala de aula. **Comunicação e Educação**. São Paulo, v.1, n.2., p. 27- 35, jan./abr, 1995.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2.ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1993.

NOGUEIRA, Jorge Bomfim. **A utilização de Animações em Power Point como ferramenta didático-pedagógica para o Ensino da Matemática**. 2013. 95f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, Manoel. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2009.

PUPIM, Cláudio Eduardo. **A Matemática na natureza**. 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Dourados, 2013.

ROMANOS. In: BÍBLIA. Português. **Bíblia de estudo arqueológica.** Tradução de Claiton André Kunz, Eliseu Manoel dos Santos e Marcelo Smargiasse. 1 ed. São Paulo: Vida, 2013.

RIBEIRO, Danielly Silva de Oliveira; FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz. **Razão Aúrea**: um elemento motivador para o estudo de razões e sequências na educação básica. 2009. 116 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2009.

SANTOS, Laís Thalita Bezerra. **Educação Financeira nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental**: quais as orientações presentes nos manuais dos professores? 2015. Disponível em: http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd15_lais_santos.pdf. Acesso em: 03 abr. 2016.

SILVA, Renato Rodrigues. **Razão áurea como motivação ao estudo de conteúdos matemáticos.** 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.

SIMEONI, Maria Cristina. Metodologia de ensino: visão de professores do ensino presencial e da educação à distância por meio da entrevista reflexiva. In: CONGRESSO DE EDUCAÇÃO DO NORTE PINHEIRO, 10., 2010, Jacarezinho. **Anais**... Jacarezinho. Universidade Estadual do Norte do Paraná, 2010. p. 461-476.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, São Paulo, n. 14, p. 66-91, 2000.

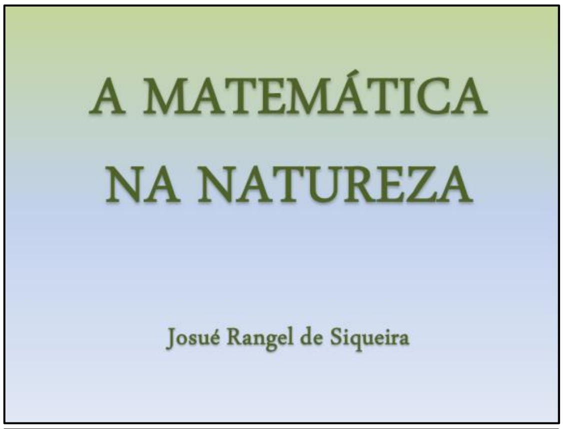
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Simetrias**. s.d. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html Acesso em: 22 nov. 2015.

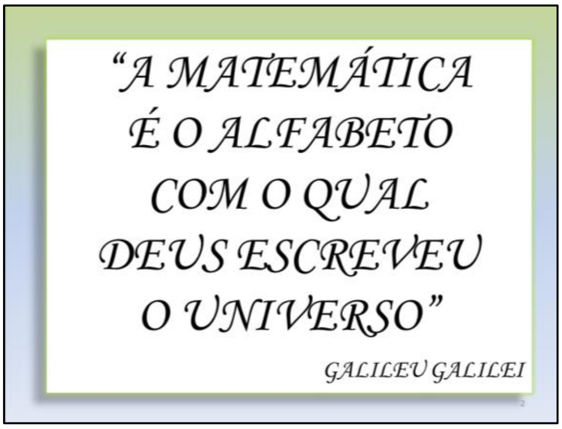
VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer**. Piracicaba: Editora Unimep, 1996.

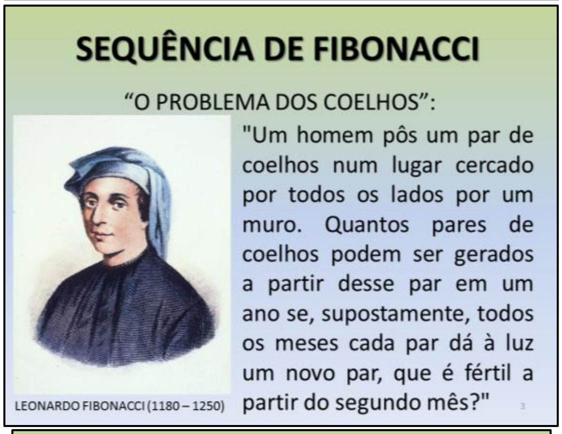
YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4 ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

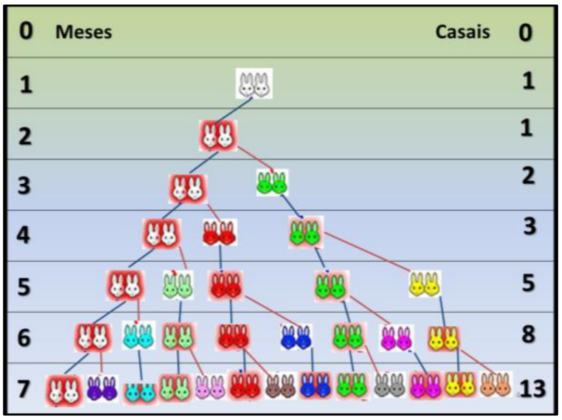
APÊNDICES

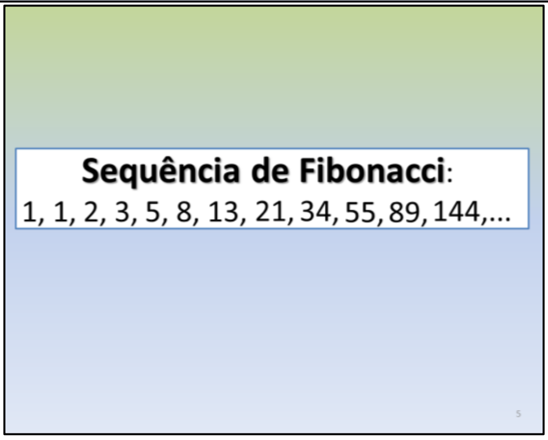
APÊNDICE A: *Slides*

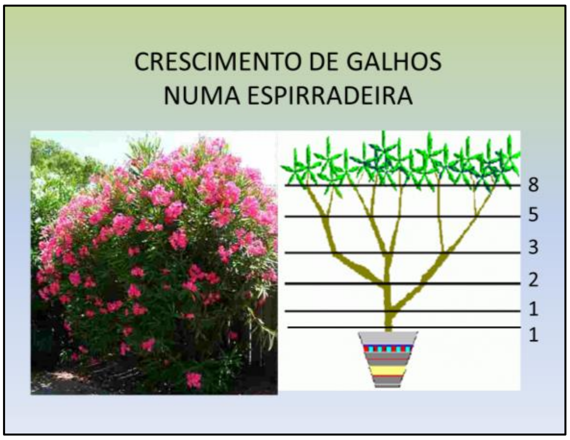


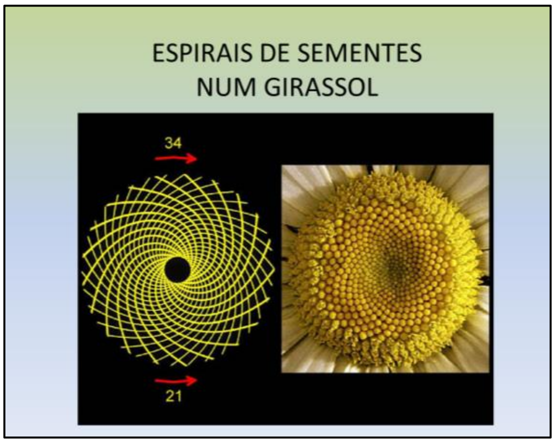












RAZÃO ENTRE OS NÚMEROS SEQUENCIAIS DE FIBONACCI

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{13}{8} = 1{,}625$	$\frac{144}{89} \cong 1{,}618$
$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{21}{13} \cong 1{,}615$	$\frac{233}{144} \cong 1{,}618$
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{34}{21} \cong 1{,}619$	$\frac{377}{233} \cong 1{,}618$
$\frac{5}{3} \cong 1{,}666$	$\frac{55}{34} \cong 1{,}618$	$\frac{610}{377} \cong 1{,}618$
$\frac{8}{5} = 1{,}6$	$\frac{89}{55} \cong 1{,}618$	$\frac{987}{610} \cong 1{,}618$

NÚMERO DE OURO

Φ (phi) $\cong 1{,}618$

Número de ouro com 500 casas decimais:

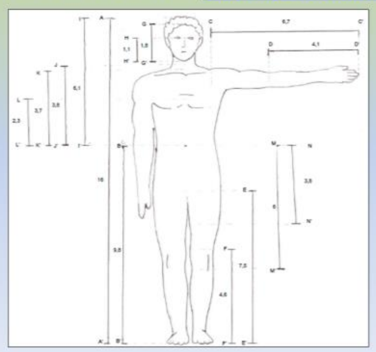
1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227
0526046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386
2223536931793180060766726354433389086595939582905638322661319928
2902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144
3814975870122034080588795445474924618569536486444924104432077134
4947049565846788509874339442212544877066478091588460749988712400
7652170575179788341662562494075890697040002812104276217711177780
531531714101170466659914669798731761356006708748071 0(...)

DIMENSÕES DA LIBÉLULA

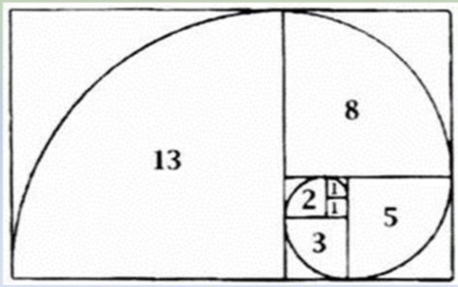
$$\frac{\textit{Comprimento do corpo}}{\textit{Comprimento da cauda}} = \frac{\textit{Comprimento da cauda}}{\textit{Comprimento do tronco}}$$

RAZÃO ENTRE O NÚMERO DE ABELHAS E ZANGÕES NUMA COLMEIA

DIVERSAS RAZÕES NO [CORPO HUMANO]



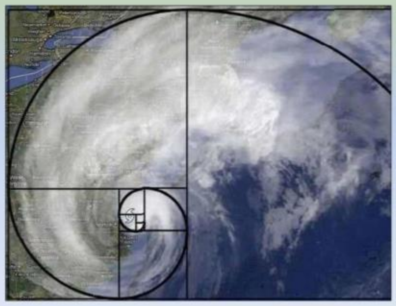
ESPIRAL LOGARÍTMICA



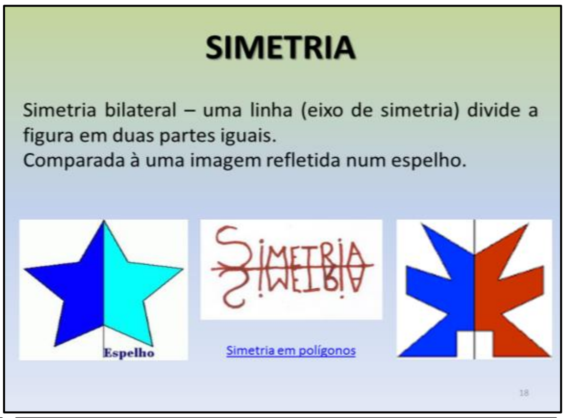
[Construção da espiral logarítmica]

CONCHA DE NÁUTILUS

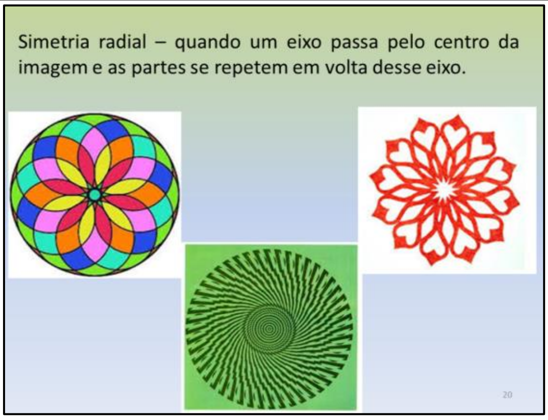
FORMAÇÃO DE UM TORNADO



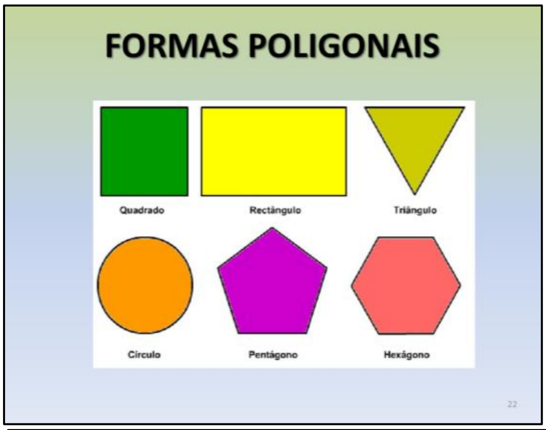

POSIÇÃO DE ESTRELAS NA GALÁXIA
Espiral logarítmica na natureza
17

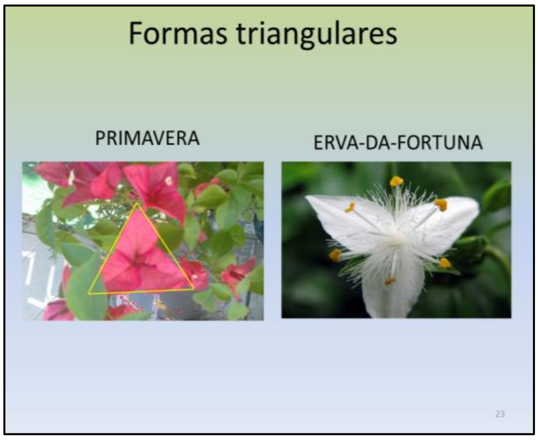

SIMETRIA
Simetria bilateral – uma linha (eixo de simetria) divide a figura em duas partes iguais.
Comparada à uma imagem refletida num espelho.
Espelho
Simetria em polígonos
18

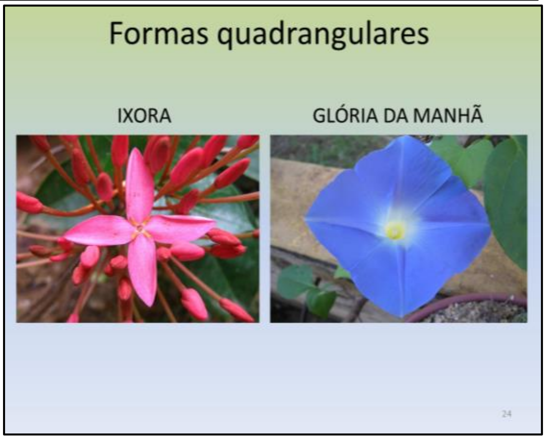

CORUJA
ARARA
Simetria na flor
Simetria na borboleta
Simetria à beira de um lago
19

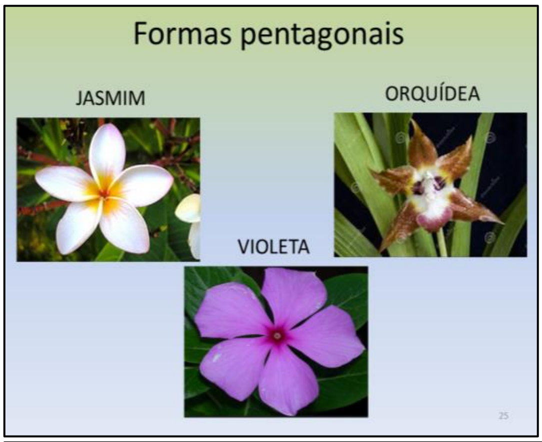

Simetria radial – quando um eixo passa pelo centro da imagem e as partes se repetem em volta desse eixo.
20


FLOR DENTE DE LEÃO
21

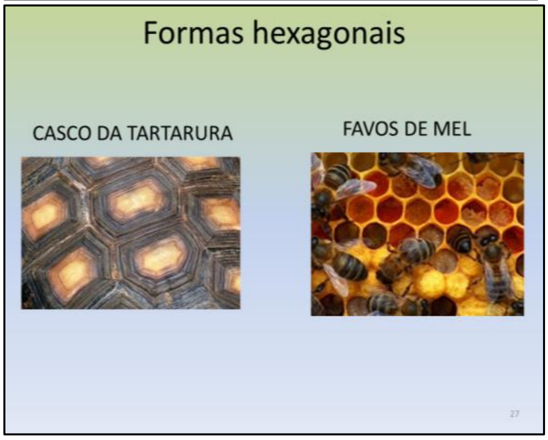

FORMAS POLIGONAIS
Quadrado
Rectângulo
Triângulo
Círculo
Pentágono
Hexágono
22


Formas triangulares
PRIMAVERA
ERVA-DA-FORTUNA
23

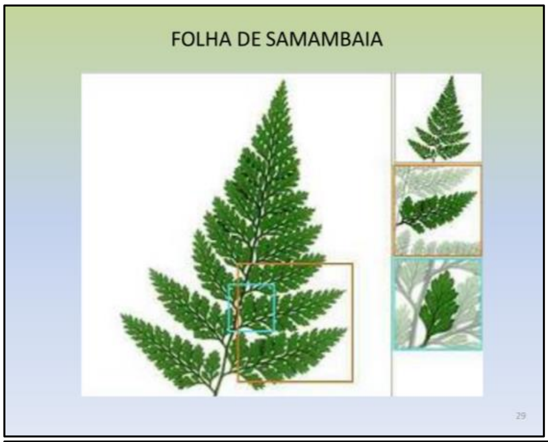

Formas quadrangulares
IXORA
GLÓRIA DA MANHÃ
24

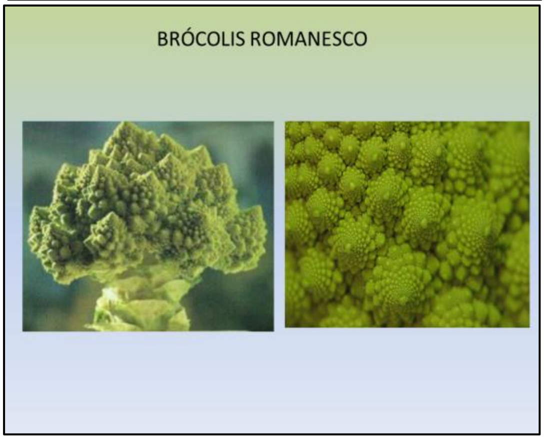

Formas pentagonais
JASMIM
ORQUÍDEA
VIOLETA

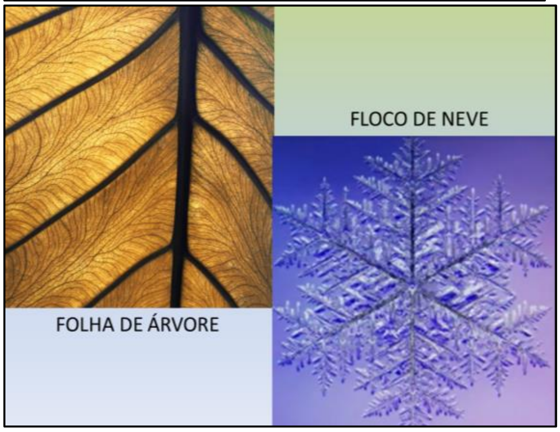

Formas pentagonais
ESTRELA DO MAR
FATIA DE CARAMBOLA
MAMÃO
CASCO DO TATU


Formas hexagonais
CASCO DA TARTARURA
FAVOS DE MEL


FRACTAL
É considerada "a geometria da natureza".
Fractal pode ser definido como "uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos".
Triângulo de Sierpinski
Floco de neve de Koch
Árvore de quadrados


FOLHA DE SAMAMBAIA


BRÓCOLIS ROMANESCO


FLOCO DE NEVE
FOLHA DE ÁRVORE


A Matemática na Natureza
Pois desde a criação do mundo os atributos invisíveis de Deus,
seu eterno poder e sua natureza divina,
têm sido vistos claramente,
sendo compreendidos por meio das coisas criadas,
de forma que tais homens são indesculpáveis.
Romanos 1:20

REFERÊNCIAS

http://www.matematiktesti.org/index.php?sayfa=unluler&no=41&title=LEONARDO%20FIBONACCI

http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/

http://infinito-matematica.co/curiosidades/

http://cienciapatodos.webnode.pt/news/

http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/

RIBEIRO; FARIA, 2009, p. 20

http://www.taringa.net/post/info/17165851/Libelula-el-Animal-mas-Mortifero-del-Planeta.html

http://mauriciofelippe.blogspot.com.br/2011/06/colmeia.html

33

RIBEIRO; FARIA, 2009, p.73

http://iaci.com.br/texto%20nautilus.htm

http://dentalinc.com.br/2015/04/24/os-mitos-e-verdades-sobre-a-proporcao-aurea/

http://naukas.com/2012/11/02/por-que-los-huracanes-tienden-a-formar-una-espiral-logaritmica/

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/diciomat/diciomat.htm

http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.htm

http://curiosidadeuniversal.blogspot.com.br/2013/09/10-coisas-que-voce-nao-sabia-sobre-as.html

http://www.ninha.bio.br/biologia/araras.html

34

https://pensandoconarte.wordpress.com/2014/10/03/la-composicion/

http://romansarts.blogspot.com.br/2010/10/imagens-de-simetria-bilateral-e-radial.html

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/flopcas/simetria-axial/

http://www.mundodeflores.com/rosas-dentes-de-leao.html.

http://cantinhodedesenhos.blogspot.com.br/2012/06/desnhos-com-figuras-geometricas.html

http://www.verdejava.com.br/plantas/2/

http://invasoras.pt/gallery/Tradescantia-fluminensis/

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ixora_coccinea.jpg

35

https://pixabay.com/pt/blue-flor-gl%C3%B3ria-da-manh%C3%A3-101856/

http://www.jardineiro.net/plantas/jasmim-manga-plumeria-rubra.html

http://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-orqu%C3%ADdea-do- gato-image2462964

https://www.flickr.com/photos/rulicamweb/2851191045/in/photostream/

https://fendadimensional.wordpress.com/2013/02/23/animal-da-semana-16-estrela-do-mar/

http://saudenocorpo.com/carambola-e-seus-beneficios-saude/

http://riquezanaturalcascavel.blogspot.com.br/2013_11_01_archive.html

http://viajeaqui.abril.com.br/national-geographic/blog/curiosidade-animal/page/4

36

http://olhares.sapo.pt/casco-de-tartaruga-foto58471.html

http://manthanos.blogspot.com.br/2011/02/porque-afinal-cabe-mais-mel-no-hexagono_01.html

NIEDERMEYER, KOEFENDER, ROOS, 2009 apud ALMEIDA, 2011, p.47.

http://vandretec.blogspot.com/2010/03/fractais-o-que-sao.html apud ALMEIDA, 2011, p. 47.

http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

http://www.cincosolas.com.br/2013/11/a-importancia-de-se-conhecer-deus.html

37

APÊNDICE B: Questionário

QUESTIONÁRIO – PRIMEIRA PARTE

A sua opinião é muito importante para nós. Seja sincero nas suas respostas. Seu sigilo é garantido. Somos gratos, desde já.

1. **Identificação:**
   Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino
   Idade: ___________.

2. **Qual é a sua visão em relação à disciplina Matemática?**

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

QUESTIONÁRIO – SEGUNDA PARTE

Após ter participado da palestra "A Matemática na natureza", responda as perguntas abaixo.

3- Você pôde ter uma nova visão em relação à Matemática?

( ) Sim ( ) Não

Justifique:____

____

____

____

4- Você já conhecia algum dos temas abordados? ( ) Sim ( ) Não

5- Em caso afirmativo, marque qual(is):

( ) Sequência de Fibonacci ( ) Razão Áurea ( ) Espiral Logarítmica

( ) Formas geométricas ( ) Simetria ( ) Fractais

6- O que você mais gostou desta palestra?

( ) a novidade do tema

( ) a utilização de *slides*

( ) a apresentação de vídeos

( ) os exemplos citados

( ) outros ____

Justifique:____

____

7- Você considera que conhecer algumas relações entre a Matemática e a natureza, contribui para o ensino e a aprendizagem da Matemática?

____

____

____

____

____