

## LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

### ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM FÓRMULAS: A IMPORTÂNCIA DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

IZABELA NOGUEIRA DOS SANTOS

MARCELA RIBEIRO MARIA

IZABELA NOGUEIRA DOS SANTOS  
MARCELA RIBEIRO MARIA

ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM FÓRMULAS: A IMPORTÂNCIA DO  
PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Me. Ana Paula Rangel de Andrade

Campos dos Goytacazes  
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

S237a Santos, Izabela Nogueira dos.  
Análise combinatória sem fórmulas: a importância do princípio multiplicativo / Izabela Nogueira dos Santos, Marcela Ribeiro Maria – 2015.  
87 f.: il. color.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos Centro. Campos dos Goytacazes (RJ), 2015.

Referências: p. 77-79.

1. Análise combinatória. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Maria, Marcela Ribeiro. II. Andrade Ana Paula Rangel de, orient. III. Título.

CDD – 511.6

IZABELA NOGUEIRA DA SILVA

MARCELA RIBEIRO MARIA

## ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM FÓRMULAS: A IMPORTÂNCIA DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 10 de julho de 2015.

Banca Avaliadora:

---

Prof<sup>ª</sup> Ana Paula Rangel de Andrade (orientadora)  
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/ UCAM/ RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

---

Prof<sup>ª</sup> Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo  
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

---

Prof<sup>ª</sup> Carla Antunes Fontes  
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos primeiramente a Deus, pela força e inspiração diária.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática, por contribuírem em nossa formação, em especial, à Prof<sup>a</sup>. Ana Paula Rangel de Andrade, por ter nos orientado nesse trabalho e por sempre nos motivar a alcançar nossos objetivos.

Aos nossos familiares, pelo amor, apoio e incentivo para continuar essa caminhada. Aos nossos amigos e companheiros de estudos que, também, contribuíram para nossa formação.

Aos participantes do Teste Exploratório e da Experimentação, pela contribuição para a realização desse trabalho.

À banca examinadora, pela disponibilidade e contribuição que nos foi dada.

Enfim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a conclusão de mais uma realização em nossas vidas.

Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.

Paulo Freire

## RESUMO

O estudo da Análise Combinatória tem sido apresentado nas escolas de forma mecanizada, explorando questões em que a resolução é focada na aplicação de fórmulas. O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é utilizado apenas como uma introdução a este conteúdo e, assim como o diagrama de árvore, é preterido em meio às regras e macetes. Diante desse panorama, desenvolveu-se um trabalho monográfico que objetiva promover um estudo de problemas de contagem com base no PFC, sem o uso de fórmulas de Arranjo e Combinação. Nessa perspectiva, elaborou-se uma proposta didática voltada para alunos da 2ª série do Ensino Médio, que não tenham estudado Análise Combinatória. A ênfase no PFC está apoiada no uso da árvore de possibilidades, permitindo uma melhor visualização dos agrupamentos. De natureza qualitativa, a pesquisa utilizou os seguintes instrumentos de coleta dos dados: a observação, o diário de bordo e o registro das respostas dos alunos nas Atividades. Os resultados obtidos permitem afirmar que é possível trabalhar o raciocínio combinatório resolvendo problemas de contagem sem o uso de fórmulas.

**Palavras-chave:** Árvore de Possibilidades. Princípio Fundamental da Contagem. Raciocínio Combinatório.

## ABSTRACT

The study of Combinatorial Analysis has been presented in schools mechanized, exploring issues where the resolution is focused on the application of formulas. The Fundamental Principle of Count (FPC) is used only as an introduction to this content, as well as the tree diagram, it is passed over in the midst of the rules and tricks. Against this background, it developed a monograph which aims to promote a counting problem study based on the FPC, without the use of arrangement and combination formulas. From this perspective, it elaborated a forward-looking teaching proposal for pupils of the 2nd. year of high school who have not studied Combinatorial Analysis. The emphasis on FPC is supported in the use of the tree of possibilities, allowing better visualization of clusters. Qualitative, research used the following instruments for the collected data: observation, logbook and record the answers of students in activities. The results allow us to state that you can work the combinatorial reasoning solving counting problems without the use of formulas.

**Keywords:** Possibilities Tree. Fundamental Principle of Counting. Combinatorial Reasoning.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Questão 5 da Atividade 1.....	26
Figura 2 - Questões 1 e 10 da Atividade 1.....	27
Figura 3 - Questão 1 da Atividade 2 com a resolução pela árvore de possibilidades.....	28
Figura 4 - Questões 2 e 7 da Atividade 2.....	28
Figura 5 - Questões 1 e 9 da Atividade 3.....	29
Figura 6 - Questão 3 da Atividade 3 com a resolução pela árvore de possibilidades.....	30
Figura 7 - Questão 7 da Atividade 3 com a resolução pela árvore de possibilidades.....	31
Figura 8 - Primeira questão da Atividade 1 do teste exploratório.....	33
Figura 9 - Árvore de possibilidades da primeira questão da Atividade 1 do teste exploratório.....	33
Figura 10 - Segunda questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	34
Figura 11 - Questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução.....	34
Figura 12 - Quarta questão da Atividade 1 do teste exploratório e a resposta de um dos alunos.....	35
Figura 13 - Questões 1, 2 e 3 da Atividade 1 do teste exploratório resolvidas pelo princípio multiplicativo.....	35
Figura 14 - Resposta da questão 3 da Atividade 1 dada por um aluno.....	36
Figura 15 - Quinta questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução.....	36
Figura 16 - Sexta questão da Atividade 1 do teste exploratório com um dos alunos mostrando a sua resolução.....	37
Figura 17 - Sétima questão da Atividade 1 com a resolução.....	37
Figura 18 - Oitava questão da Atividade 1.....	38
Figura 19 - Nona questão da Atividade 1 do teste exploratório.....	38
Figura 20 - Primeira questão da Atividade 2.....	39
Figura 21 - Resposta da primeira questão da Atividade 2 do teste exploratório.....	39
Figura 22 - Segunda questão da Atividade 2 do teste exploratório.....	39
Figura 23 - Terceira questão da Atividade 2 com a resolução.....	40
Figura 24 - Quarta questão da segunda Atividade.....	40
Figura 25 - Quinta questão da Atividade 2 do teste exploratório com a resolução.....	41

Figura 26 - Sexta questão da Atividade 2 do teste exploratório com uma das alunas mostrando a sua resolução.....	42
Figura 27 - Questão 1 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos.....	43
Figura 28 - Questão 2 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos.....	43
Figura 29 - Questão 3 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos.....	44
Figura 30 - Questão 4 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos.....	44
Figura 31 - Questão 5 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de um dos alunos.....	45
Figura 32 - Questão 6 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	46
Figura 33 - Questão 7 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	47
Figura 34 - Questão 8 da Atividade 3 do Teste Exploratório.....	47
Figura 35 - Questão 9 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	48
Figura 36 - Questão 10 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de três dos alunos.....	48
Figura 37 - Questão 11 da Atividade3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	49
Figura 38 - Questão 12 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos.....	50
Figura 39 - Resolução da primeira questão da Atividade 1.....	52
Figura 40 - Resolução da segunda questão da Atividade 1.....	52
Figura 41 -Resolução da terceira questão da Atividade 1.....	53
Figura 42 - Resolução da quarta questão da Atividade 1.....	54
Figura 43 - Resolução da quinta questão da Atividade 1.....	54
Figura 44 - Resolução da sexta questão da Atividade 1.....	55
Figura 45 - Resolução da sétima questão da Atividade 1.....	56
Figura 46 -Resolução da oitava questão da Atividade 1.....	56
Figura 47 - Resolução da nona questão da Atividade 1.....	57

Figura 48 - Resolução da décima questão da Atividade 1.....	58
Figura 49 - Questão 10 da Atividade 1 apresentada no início do segundo encontro.....	59
Figura 50 - Definição do Princípio Fundamental da Contagem.....	59
Figura 51 - Resolução de dois alunos da primeira questão da Atividade 2.....	60
Figura 52 - Resolução da primeira questão da Atividade 2.....	60
Figura 53 - Resolução de dois alunos da segunda questão da Atividade 2.....	61
Figura 54 - Resolução de dois alunos da terceira questão da Atividade 2.....	61
Figura 55 - Resolução de dois alunos da quarta questão da Atividade 2.....	62
Figura 56 - Resolução de um dos alunos da quinta questão da Atividade 2.....	63
Figura 57 - Resolução de dois alunos da sexta questão da Atividade 2.....	63
Figura 58 - Resolução de um dos alunos da sétima questão da Atividade 2.....	64
Figura 59- Resolução de três alunos da primeira questão da Atividade 3.....	65
Figura 60 - Resolução de três alunos da segunda questão da Atividade 3.....	65
Figura 61 - Resolução de três alunos da terceira questão da Atividade 3.....	66
Figura 62 - Resolução de três alunos da quarta questão da Atividade 3.....	66
Figura 63 - Resolução de três alunos da quinta questão da Atividade 3.....	67
Figura 64 - Resolução de três alunos da sexta questão da Atividade 3.....	67
Figura 65 - Resolução de três alunos da sétima questão da Atividade 3.....	68
Figura 66 - Diferentes resoluções da oitava questão da Atividade 3 dada pelos alunos.....	68
Figura 67 - Resolução de três alunos da nona questão da Atividade 3.....	69
Figura 68 - Resolução de três alunos da décima questão da Atividade 3.....	70
Figura 69 - Correção das questões 3 e 8 da Atividade 3.....	70
Figura 70 - Correção da questão cinco da Atividade 3.....	71
Figura 71 - Resolução da nona e décima questões da Atividade 3 no quadro.....	71
Figura 72 - Questão 1 da Atividade 4 com a resolução.....	72
Figura 73 - Questão 2 da Atividade 4 com a resolução.....	73
Figura 74 - Resolução pela árvore de possibilidades da segunda questão da Atividade 4.....	73
Figura 75 - Resolução da terceira questão da Atividade 4.....	74

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
INTRODUÇÃO .....	11
1. APORTE TEÓRICO.....	14
1.1.A importância do Raciocínio Combinatório.....	14
1.2. Estudos Relacionados.....	17
2. ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	24
2.1.Pesquisa Qualitativa.....	24
2.2.Elaboração das Atividades.....	26
3. RELATO DE EXPERIÊNCIA.....	32
3.1. Teste Exploratório.....	32
3.1.1. Primeiro Encontro.....	32
3.1.2. Segundo Encontro.....	38
3.1.3. Terceiro Encontro.....	42
3.1.4. Quarto Encontro.....	50
3.2. Experimentação das Atividades.....	51
3.2.1. Primeiro Encontro.....	51
3.2.2. Segundo Encontro.....	58
3.2.3. Terceiro Encontro.....	62
3.2.4. Quarto Encontro.....	64
3.2.5. Quinto Encontro.....	70
3.2.6. Sexto Encontro.....	71
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
REFERÊNCIAS.....	77
APÊNDICES.....	80
APÊNDICE A.....	81
APÊNDICE B.....	83
APÊNDICE C.....	85

## INTRODUÇÃO

Durante o Ensino Médio e Superior, as licenciandas, autoras dessa monografia, observaram, por experiência própria e pelos relatos dos colegas, que a Análise Combinatória é considerada uma das matérias mais complicadas do currículo escolar. Muitas vezes é entendida assim, devido ao uso demasiado de fórmulas e em muitos momentos, os alunos as utilizam sem nem ao menos entender o porquê. Morgado (2006) afirma que o ensino desse conteúdo é abordado de forma mecânica e que os alunos têm dificuldade de encontrar o procedimento certo para resolver cada questão. Além disso, não se acostumam a analisar o problema, mas sim, a aplicar fórmulas complexas.

Sabo (2007, p.52) também evidencia que o estudo de Combinatória é pautado na utilização de regras e na aplicação das mesmas em sequências de exercícios.

O processo de estudar Análise Combinatória expõe o aluno frente a um novo raciocínio, como também, a novos signos e significados. As análises realizadas [...] evidenciam que esses signos são expressos, na maioria das vezes, por fórmulas algébricas tecnicistas, seguidas por sequências de exercícios, nos quais, as técnicas de resoluções são repetitivas.

Esse mesmo autor, em análise a livros didáticos, constatou por meio de exercícios que os alunos apenas manipulam os procedimentos, mas muitas vezes não os entendem de fato (SABO, 2007).

Souza (2008), também, avaliando livros didáticos, afirma que uma grande parte apresenta o conteúdo de Análise Combinatória por meio de fórmulas sem a preocupação em deduzi-las. Lima (2001), no livro “Exame de Textos”, destaca que a forma como é apresentada a Análise Combinatória empobrece o seu potencial em desenvolver o pensamento, a criatividade e a imaginação do aluno. Segundo o autor, o princípio multiplicativo, embora presente no início dos textos, fica esquecido quando disponibilizam-se as fórmulas seguidas de exercícios de manipulação.

Almeida e Ferreira (2009) corroboram com esse assunto e complementam afirmando que, na maioria das vezes, a aprendizagem não é alcançada a partir desse método, e que é necessário se desprender dos modelos tradicionais e buscar novas propostas.

Mediante as críticas apresentadas, acredita-se que a Análise Combinatória deve ser abordada valorizando-se o raciocínio do aluno. Essa proposta é corroborada por Souza (2008, p.11) que acrescenta:

Faz-se necessário então um estudo que explore os conceitos primitivos da Análise Combinatória, o Princípio Fundamental da Contagem ou o Princípio Multiplicativo e Aditivo, trabalhando de modo intuitivo com o aluno, descrevendo os casos possíveis, formando agrupamentos e contando-os, utilizando técnicas de contagem com o auxílio da árvore de possibilidades ou tabelas de dupla entrada.

As Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+) também defendem a ideia de se utilizarem problemas de contagem, explorando questões sem a utilização de regras:

[...] decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis, não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas sim como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p. 126).

Guirado e Cardoso (2007), citados por Pessoa (2009), apontam a importância do aluno enumerar os casos possíveis para depois contá-los, assim, terão um primeiro contato com problemas de contagem. E ainda atentam que resolver um problema de Análise Combinatória sem o uso de fórmulas desenvolve o pensar de forma criativa e crítica.

Esteves (2001) considera necessário iniciar o estudo de Combinatória com situações-problema, de modo que o aluno utilize uma forma intuitiva para análise. E, aos poucos, devem-se inserir questões mais complexas, introduzindo ou não, as fórmulas.

Diante do exposto, surgiu a seguinte questão de pesquisa: “De que forma um estudo de problemas de contagem, com base no princípio multiplicativo e sem o uso de fórmulas de Arranjo e Combinação, pode contribuir para o processo de ensino aprendizagem do aluno em Análise Combinatória?”

Para responder a essa questão, traçou-se o seguinte objetivo: promover um estudo de problemas de contagem com base no princípio multiplicativo e sem o uso de fórmulas de Arranjo e Combinação.

Pretendem-se explorar questões que, comumente, seriam de Arranjo, Permutação e Combinação utilizando apenas o PFC, sem o uso de regras.

Ressalta-se, também, que, mesmo sendo imprescindível a utilização de fórmulas em alguns casos, o PFC está implícito na compreensão das mesmas. Sendo assim, o professor pode usá-lo como recurso para que o aluno compreenda melhor as questões.

Este trabalho monográfico está dividido em três capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, encontra-se o aporte teórico que embasou a pesquisa. Nesse caso, a importância do raciocínio combinatório e os estudos relacionados.

O segundo capítulo é dedicado aos aspectos metodológicos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, desenvolvida por meio de um estudo de caso, na qual foram utilizadas como técnicas de coleta de dados a observação, as anotações no diário de bordo e o registro das respostas dos alunos. Na seção referente à sequência didática, são descritas as Atividades propostas, com seus respectivos objetivos.

No terceiro capítulo, são apresentadas a descrição e a análise das aplicações das Atividades desenvolvidas, que ocorreram na forma de um teste exploratório e da experimentação da proposta didática, realizada em uma turma de 2ª série do Ensino Médio.

Nas considerações finais, são expostas as reflexões sobre o desenvolvimento do trabalho, a resposta à questão de pesquisa e as sugestões para trabalhos futuros.

## 1. APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o aporte teórico que subsidiou o processo de elaboração deste trabalho monográfico.

### 1.1. A Importância do Raciocínio Combinatório

Problemas de contagem estão inseridos no cotidiano, e na Matemática muitos são estudados em Análise Combinatória. De acordo com Borba (2010):

A Combinatória é conhecida como a *arte de contar*, pois nas situações Combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma, a Combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições (BORBA, 2010, p.1).

Para Pessoa, existe uma forma de pensar referente à Combinatória “[...] que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas” (PESSOA, 2009, p.27), e esse modo de pensar pode ser definido como raciocínio combinatório.

Segundo Borba, o raciocínio combinatório é:

[...] um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p.3).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam que os problemas de contagem não devem ser abordados de forma mecânica, com uma lista de fórmulas, e sim, de modo que os alunos possam explorar todos os casos possíveis, organizando-os por meio de um modelo simplificado (BRASIL, 2002).



Pessoa (2009) destaca que o raciocínio combinatório é muito importante, pois auxilia em estudos de diversas áreas do conhecimento, e em diversas situações do dia a dia. Borba (2010, p.3) corrobora com essa afirmação e complementa:

Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do *Raciocínio Combinatório*, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica.

Os PCN (1998) concordam com a ideia acima e acrescentam que raciocínio combinatório é base para estudos futuros em Matemática, como probabilidade e estatística.

Rocha e Borba (2008) destacam que problemas de Combinatória são desafiadores e despertam a curiosidade dos alunos. Sendo assim, os mesmos participam mais das aulas e perdem a vergonha de falar, discutindo, questionando e sugerindo soluções. Ressaltam, também, que este tema está associado ao cotidiano extraescolar e, por esse motivo, os alunos opinam mais sobre as formas de analisar e resolver questões dessa natureza.

Barreto e Borba (2010), em pesquisas em livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, observaram que problemas que utilizam o raciocínio combinatório estão presentes nos mesmos, porém não são apresentadas ao professor orientações sobre os seus significados. Os autores concluem que, mesmo não sendo sugerido pelo livro didático, os professores devem trabalhar questões, envolvendo esse tipo de raciocínio.

Borba (2013) afirma que o raciocínio combinatório se desenvolve nos alunos em um longo período de escolarização, e para isso é necessário que professores de diferentes níveis trabalhem juntos. Azevedo e Borba (2013) corroboram com essa ideia afirmando que esse tipo de raciocínio deve ser desenvolvido desde as séries iniciais da Educação Básica. Destacam, ainda, que diferentes recursos como a resolução de problemas, o uso das tecnologias, entre outros podem facilitar o raciocínio combinatório.

Para Ferreira (2013), o pensamento combinatório pode ser desenvolvido de forma mais significativa com o uso do PFC e da divisão nos casos em que há a contagem de agrupamentos repetidos.

Pessoa e Borba destacam que “[...] o Princípio Fundamental da Contagem não caracteriza um tipo específico de problema combinatório, mas sim, uma estratégia de

resolução, válida para todos os tipos de problemas combinatórios” (PESSOA; BORBA, 2007 apud AZEVEDO; CALHEIROS; BORBA, 2013, p.42).

Ainda sobre esse assunto, Niwa (2011) aponta o PFC como uma forma de se iniciar a Análise Combinatória e sugere que as questões sejam resolvidas por meio desse conceito. Essa mesma autora, também, indica que as deduções das fórmulas de permutações, arranjos e combinações, podem ser justificadas por meio do princípio multiplicativo.

Como já foi apresentado neste trabalho, as análises de alguns livros didáticos do Ensino Médio mostram que a Análise Combinatória é abordada basicamente por meio de fórmulas, nem sempre deduzidas, e que se faz o uso do PFC somente como parte inicial do conteúdo e não como uma estratégia de resolução de questões. O diagrama da árvore, nesse caso, não é explorado (SABO, 2007).

Para Moro e Soares (2006), citadas por Azevedo e Borba (2013), esse diagrama também conhecido como árvore de possibilidades, pode ser fonte de progressos no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Azevedo e Borba (2013) corroboram com essas autoras quando concluem que alunos que constroem árvores de possibilidade avançam em seus raciocínios combinatórios.

Gonçalves (2014), também, observou em sua pesquisa que os alunos que resolvem questões de Combinatória por meio do PFC obtêm sucesso, e ainda constata que:

Resolver esse tipo de questão utilizando o diagrama de árvores se torna agradável para os alunos menores e faz com que o Raciocínio Combinatório seja desenvolvido desde cedo. Esse tipo de raciocínio vai ajudar consideravelmente no entendimento de conceitos de probabilidade, que também podem ser iniciados nas séries iniciais do Ensino Fundamental (GONÇALVES, 2014, p.34).

Fischbein (1975), citado por Borba (2010), ressalta que a árvore de possibilidades auxilia no pensamento combinatório, pois proporciona uma melhor visualização da enumeração de dados.

No presente trabalho, é utilizada a definição de raciocínio combinatório segundo Borba (2010), ou seja, um modo de pensar ao se resolver problemas de Combinatória em que se organizam agrupamentos, atendendo a determinados critérios.

Será utilizada, nas resoluções das questões, a árvore de possibilidades com o intuito de facilitar a visualização dos agrupamentos e a aplicação do princípio multiplicativo.

## 1.2 Estudos Relacionados

Nesta subseção, serão apresentadas sete pesquisas que envolvem o estudo da Análise Combinatória sem o uso de fórmulas, tema tratado neste trabalho monográfico.

A primeira delas é a dissertação escrita por Rafaela Ramos Soares Gonçalves intitulada “Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio: A utilização do Princípio Multiplicativo e da Resolução de Problemas como ferramenta didático-pedagógica” e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro de Oliveira em 2014 no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Durante alguns anos que lecionou como professora de Matemática no Ensino Médio, a autora observou que muitos alunos apresentavam dificuldades na aprendizagem de alguns conteúdos de Análise Combinatória e que muitos professores, por não se identificarem com o tema, ou evitavam o conteúdo ou o apresentava de forma superficial. Além desse fato, a autora queria compreender quais obstáculos enfrentam professores e alunos com relação ao raciocínio combinatório.

Este trabalho tem por objetivo mostrar como o PFC e as técnicas de resolução de problemas, quando trabalhados de forma planejada e correta, atingem resultados surpreendentes relacionados aos aspectos cognitivos dos alunos nessa área da Matemática. Utilizou como metodologia de ensino a Engenharia Didática. Na validação da sequência didática, participaram quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio.

Gonçalves (2014) desenvolveu duas propostas: (i) abordar o conteúdo de forma tradicional, com o uso de fórmulas, e (ii) apresentar o conteúdo sem o uso de fórmulas, com base no princípio multiplicativo, chegando à formalização das mesmas no final das atividades.

Para tal, a autora elaborou uma atividade que chamou de avaliação diagnóstica inicial, que continha três questões de Análise Combinatória. Com essa avaliação, observou quais as duas turmas que apresentaram um melhor raciocínio lógico-matemático para que fosse utilizada a proposta sem o uso de fórmulas. Nas outras turmas, foi empregada a proposta fórmula-aplicação.

A autora era a professora titular das quatro turmas e para a experimentação foram utilizadas as duas propostas. Em seguida, realizou um confronto entre os dados recolhidos e percebeu que cada turma se adaptou à metodologia aprendida. No ano seguinte, com as mesmas turmas, a autora retomou o tema trabalhando com o princípio multiplicativo. E, após uma avaliação, constatou que os alunos que viram as duas formas de resolução preferiram a que utilizava o princípio multiplicativo e, ainda, afirmaram que se sentiam mais seguros com

esse método de resolução, pois não precisavam decorar as fórmulas, podendo resolver uma questão sem saber se era de Arranjo ou de Combinação.

A autora conclui que os alunos se sentem mais à vontade com o princípio multiplicativo. E, ainda, afirma que essa metodologia pode trazer um melhor desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos mesmos.

A dissertação de Gonçalves (2014) apresenta pontos em comum com esse trabalho monográfico: (i) abordagem da Análise Combinatória por meio do princípio multiplicativo e (ii) a valorização da resolução dos alunos. Também possui pontos diferentes como: (i) a formalização das fórmulas; (ii) as duas propostas, sendo uma delas com a utilização das fórmulas e (iii) a metodologia de ensino.

Outro trabalho analisado foi a dissertação intitulada “Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas”, escrita por Francinária Parente Ferreira e orientada pelo Prof. Me. Edson Leite Araújo em 2013, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Ferreira (2013) descreve que a motivação de seu trabalho surgiu a partir das dificuldades que muitos alunos encontram no estudo de Análise Combinatória, e que grande parte delas é provocada pela prática pedagógica do professor que, na maioria das vezes, foca na aplicação de algoritmos. O objetivo deste trabalho é elaborar uma proposta pedagógica de ensino que trabalhe a Análise Combinatória voltada para o Ensino Médio, sem o uso de fórmulas, fundamentada em estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório por meio da resolução de problemas e enfatizando o Princípio Fundamental de Contagem como principal estratégia de resolução. A metodologia de pesquisa utilizada pela autora foi a resolução de problemas e elaboraram-se atividades com problemas do cotidiano. A finalidade da proposta é colocar o aluno no papel de construtor do seu conhecimento.

Para se alcançar o objetivo, a autora organizou a proposta em quatro momentos: a aplicação do Teste Diagnóstico e a resolução de três atividades que trabalham o conceito do Princípio Fundamental da Contagem, de Arranjo, de Permutações e de Combinação.

A autora conclui que é necessário que o professor busque metodologias diferentes para a abordagem da Análise Combinatória, valorizando sempre o raciocínio do aluno. E, ainda, destaca que a proposta apresentada por ela pode contribuir com o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, visto que, ao resolver as atividades propostas, o aluno torna-se construtor do seu próprio conhecimento, desenvolvendo sua capacidade de resolver problemas e tomar decisões criticamente.

A dissertação de Ferreira (2013) tem alguns pontos em comum com este trabalho monográfico, como: (i) abordagem da Análise Combinatória por meio do PFC; (ii) valorização do raciocínio do aluno; (iii) a não formalização das fórmulas; (iv) a organização, em parte, da sequência didática e (v) a ênfase na resolução das questões pela árvore de possibilidades. As principais diferenças são: (i) a exploração dos conceitos de Arranjo e Combinação e (ii) a metodologia de ensino.

Outra pesquisa analisada foi a monografia de especialização de Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia, intitulada “Análise Combinatória para o Ensino Médio”, orientada pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Aniura Milanés Barrientos e coorientada pela Prof<sup>ª</sup>. Nora Olinda Cabrera Zúniga em 2012 na Universidade Federal de Minas Gerais.

A motivação do autor se deu devido à dificuldade de alunos e professores em relação à Análise Combinatória que, em sua opinião, tem sido ensinada por meio de fórmulas. O objetivo desta monografia é propor o desenvolvimento de atividades que desafiem e motivem tanto professores como alunos a estudarem, aprenderem e entenderem o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio; como um instrumento que facilite a relação entre o ensino do docente e a aprendizagem do discente. A metodologia utilizada foi a Resolução de problemas.

Foram elaboradas dez questões envolvendo problemas de contagem. Essas questões devem ser resolvidas por meio do raciocínio combinatório. Desejando alcançar o objetivo, o autor elaborou um guia para os professores com a sinopse de cada atividade e com indicações de como desenvolvê-la em sala de aula. Preparou, também, a folha do aluno, com a atividade e o objetivo proposto pela mesma.

O autor indica que a resolução de problemas é muito importante no processo de ensino, pois o ser humano é desafiado a resolver problemas no seu cotidiano. Ele conclui que a resolução de problemas auxilia o desenvolvimento da criatividade. De acordo com o autor, para resolver as atividades o professor deve ouvir e deixar que os alunos desenvolvam estratégias para a resolução dos problemas, valorizando as resoluções e trabalhando com os erros.

Os principais pontos em comum com esse trabalho são: (i) a resolução das atividades pelo raciocínio combinatório e (ii) a valorização do pensamento do aluno. As principais diferenças são: (i) a utilização de fórmulas, (ii) a sequência didática e (iii) a metodologia de ensino.

Também foi pesquisado o trabalho monográfico que tem como título “Uma justificativa para se ensinar Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da

Contagem” escrito por Seiji Niwa e orientado pelo Prof. Me. Amari Goulart em 2011 no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

O interesse pelo assunto surgiu devido ao autor considerar que existem muitas falhas na Educação Básica a respeito desse tema. Este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem do ensino de Análise Combinatória na Educação Básica sustentada pelo Princípio Fundamental da Contagem.

A proposta didática está dividida em duas etapas. Na primeira, são construídas as demonstrações das fórmulas de Arranjo, Permutação e Combinação, a partir do PFC. Em outra, são resolvidos seis exercícios, sendo dois sobre Arranjos, dois sobre Permutações e dois sobre Combinações, na qual o autor mostra as resoluções pela fórmula e pelo Princípio Fundamental da Contagem. A metodologia utilizada foi a Teoria Antropológica do Didático<sup>1</sup> desenvolvida por Chevallard, pela qual investigou a tarefa proposta, quais as possíveis técnicas que poderão ser utilizadas e, por fim, em qual teoria/tecnologia elas estão fundamentadas.

O autor sugere que o professor instigue o raciocínio lógico-dedutivo dos discentes, propondo a resolução de problemas de Análise Combinatória pelo PFC e pela intuição e só depois utilize as fórmulas.

O principal ponto em comum com esse trabalho monográfico é a utilização do PFC como técnica de resolução de problemas de Análise Combinatória. As diferenças são: (i) formalização das fórmulas, (ii) a metodologia de ensino e (iii) a sequência didática.

Outro trabalho estudado foi a dissertação intitulada “Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª. série do Ensino Fundamental”, escrita por Inês Esteves e orientada pela Profª Drª Sandra M. P. Magina, em 2001, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A motivação da autora vem de sua experiência como professora, pois percebeu que existem dificuldades tanto no ensino quanto na aprendizagem de Análise Combinatória e na formação de seu campo conceitual. Esse trabalho tem por objetivo estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de Análise Combinatória em adolescentes de 14 anos de idade cursando a 8ª. série do Ensino Fundamental.

Para atingir o objetivo, a autora utilizou dois grupos chamados de experimental e de referência. O experimental foi formado por alunos da 8ª. série do Ensino Fundamental e,

---

<sup>1</sup> Para maior esclarecimento sobre o tema consultar a obra: ALMOULOU, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

nesse, o tema foi abordado a partir de uma sequência didática elaborada pela autora, utilizando-se materiais concretos. O grupo de referência foi formado por alunos da 2ª série do Ensino Médio, e nesse caso, o assunto foi abordado por meio do livro didático utilizado pela escola, sem a utilização de outros métodos. É importante ressaltar que nenhum dos dois grupos havia estudado Análise Combinatória

Realizou-se um pré-teste com os dois grupos, composto de dez questões de Análise Combinatória, a fim de verificar os conhecimentos prévios dos alunos. Depois, foi abordado o assunto com os grupos, cada um com a sua referida proposta e, por último, aplicou-se o pós-teste.

Ao final, a autora fez uma comparação quantitativa com relação aos acertos dos dois grupos e concluiu que o grupo experimental teve um percentual de acertos no pós-teste, muito maior que o grupo de referência. Além disso, os objetivos com o grupo experimental foram alcançados enquanto que a evolução do grupo de referência foi insatisfatória.

Esteves (2001) afirma que é relevante trabalhar a Análise Combinatória de forma significativa e em etapas, conforme as descritas na transposição didática<sup>2</sup>. E, ainda, sugere que tal assunto seja abordado desde as séries iniciais sem a apresentação de fórmulas para que, no Ensino Médio, seja institucionalizado o conceito com a apresentação das fórmulas.

O principal ponto em comum com esse trabalho é a apresentação do conteúdo sem o uso de fórmulas, mesmo que para um grupo. E as principais diferenças são: (i) realização de um pré-teste e um pós-teste, (ii) aplicação da proposta em dois grupos distintos e (iii) a apresentação do conteúdo conforme o livro didático.

No artigo de Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (2010), denominado “O Raciocínio Combinatório na Educação Básica”, a autora aborda a importância do raciocínio combinatório, e declara que esse é um modo de pensar ao se resolverem problemas de Combinatória, em que se organizam agrupamentos, atendendo a certos critérios. A autora, também, afirma que o raciocínio combinatório deve ser ensinado na Educação Básica, tendo em vista que esse pensamento auxilia em outras áreas da Educação.

Após, a autora analisa alguns trabalhos realizados sobre raciocínio combinatório e descreve que as crianças, adolescentes e adultos aprendem o raciocínio combinatório na escola e na vivência extraescolar, mas que são necessárias instruções para ampliar este tipo de raciocínio.

---

<sup>2</sup> “O saber estudado pelos matemáticos sofre inúmeras transformações até chegar ao aluno. Ao conjunto dessas transformações dá o nome de transposição didática” (ESTEVES, 2001, p.16).



O artigo, também, trata dos livros e dos *softwares* como recursos de ensino da Combinatória. Na análise dos *softwares* e dos objetos de aprendizagem, verificou-se que esses recursos têm um grande potencial no ensino de Combinatória, porém alguns têm limitações, como a linguagem no *software Árbol*<sup>3</sup>, que está em espanhol e a impossibilidade de ver simultaneamente todas as combinações na tela.

Nas considerações finais, a autora afirma que problemas de Combinatória ajudam a desenvolver o raciocínio lógico em distintas modalidades (Ensino Regular e Educação de Jovens e Adultos). Conclui que o raciocínio combinatório é desenvolvido em experiências escolares e extraescolares e, para o desenvolvimento mais amplo do mesmo, devem ser utilizados diversos recursos em sala de aula.

Outro artigo analisado foi o do Barreto e Borba (2010) intitulado “Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de Anos Iniciais?”. O objetivo foi observar como são tratados os problemas de raciocínio combinatório em livros e manuais do professor de 1ª. a 4ª. série (atuais 2º. a 5º. anos de escolarização básica), analisando se há uma preocupação em abordar esse conteúdo, levando em consideração variedades nas três dimensões de conceitos<sup>4</sup> propostas por Vergnaud.

De acordo com as autoras, é necessário compreender o processo que os alunos utilizam para se apropriarem dos conhecimentos e para tal, é de extrema importância compreenderem o desenvolvimento de conceitos dentro dos campos conceituais. Segundo Vergnaud (1986 apud BARRETO; BORBA, 2010), o indivíduo compreende um conceito dentro de um vasto contexto de problemas.

O artigo aborda a relevância de se conhecer como o raciocínio combinatório vem sendo desenvolvido nos livros didáticos, pois estes são os principais - ou os únicos - materiais de apoio do professor. Ressalta a importância de observar as variedades de situações propostas nos livros didáticos para o ensino de diversos conceitos. As autoras afirmam que ainda existem deficiências nos livros didáticos, principalmente, no que diz respeito aos procedimentos de avaliação de aprendizagem.

---

<sup>3</sup> Para maiores informações sobre o *software* consultar a referência: AZEVEDO, J.; COSTA, D. M. E. da; BORBA, R.E. de S.R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais eletrônicos....** Recife: UFPE, 2011. p. 1-12. Disponível em: [http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/view/626](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/626). Acesso em: 25 jun. 2015.

<sup>4</sup> As três dimensões do conceito propostas por Vergnaud são: os significados, as representações simbólicas e as invariantes. Para maior esclarecimento sobre o tema consultar a obra: VERGNAUD, Gérard. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas**. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986, pp. 75-90.



Na conclusão do artigo, sugerem a exploração, nas propostas de trabalho, de diferentes abordagens dos significados, propriedades e representações simbólicas dos conceitos, assim como é sugerido por Vergnaud (1986).

## **2. ASPECTOS METODOÓGICOS**

Nesta seção, será apresentada a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho e a elaboração da sequência didática.

A pesquisa tem caráter qualitativo e foi desenvolvida por meio de um estudo de caso com alunos da 2ª. série do Ensino Médio de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes.

### **2.1. Pesquisa Qualitativa**

A pesquisa qualitativa elucida o contexto no qual se depara o objeto da pesquisa, visando à incorporação de informações verdadeiras com uma meticulosa análise dos acontecimentos, do objeto e fenômenos reais (OLIVEIRA, 2010).

Goldenberg (2009, p.53) explicita que “os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos”.

Segundo Ponte (2006, p.2), este método propõe um questionamento das questões cotidianas, o entendimento do “‘como’ e os ‘porquês’ de uma entidade no seu contexto real, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador”.

Neves afirma que:

[...] a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo do seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise de dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos. Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo. Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados (NEVES, 1996, p. 1).

A pesquisa qualitativa faz uso de diferentes concepções, por isso, é importante ter diversas estratégias de investigação. Como afirma Creswell (2010, p.206):

A investigação qualitativa emprega diferentes concepções filosóficas; estratégias de investigação; e métodos de coleta, análise e interpretação de dados. Embora os processos sejam similares, os procedimentos qualitativos baseiam-se em dados de textos e imagens, têm passos singulares na análise dos dados e se valem de diferentes estratégias de investigação.

Neste trabalho, os dados serão coletados por meio das seguintes técnicas: observação, anotações no diário de bordo e registro das respostas dos alunos.

Para Yin (2010, p. 136), “A evidência observacional é frequentemente útil para proporcionar informação adicional sobre o tópico sendo estudado”. Ainda sobre o assunto, Creswell (2010, p. 214) afirma que as “Observações qualitativas são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as Atividades dos indivíduos no local de pesquisa”.

Tais observações podem ser registradas no diário de bordo, instrumento utilizado para registrar “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha reflectindo [sic] sobre os dados de um estudo qualitativo” (BOGDAN; BIKLEN, 1994 apud ARAÚJO; et. al, 2008, p.14).

Neste trabalho monográfico, a pesquisa qualitativa ocorre por meio do estudo de caso, aliando todas as informações detalhadas e utilizando diferentes técnicas de pesquisa, com o objetivo de apreender a totalidade de uma situação e descrever a complexidade de um caso concreto. É importante destacar que esse método ressalta as diferenças comportamentais individuais e não analisa o todo, pois assim, os dados obtidos não ficam escondidos em uma suposta homogeneidade (GOLDENBERG, 2009). Essa mesma autora, ainda, ressalta que explorando intensamente o mesmo caso, pode-se obter mais conhecimento do fenômeno estudado.

O objetivo geral de um estudo de caso é: “explorar, descrever, explicar, avaliar e/ou transformar” (GOMEZ; et. al, 1996 apud ARAÚJO; et. al, 2008, p.9).

Na próxima seção, serão descritas as Atividades desenvolvidas para a Proposta Didática, bem como o objetivo de cada uma.

## 2.2. Elaboração das Atividades

A proposta didática elaborada neste trabalho monográfico, composta por três Atividades, tem como objetivo iniciar o estudo de questões de Análise Combinatória, utilizando o PFC como técnica de resolução.

A Atividade 1 (APÊNDICE A) consta de dez questões. O objetivo dessa é introduzir o PFC em problemas tradicionalmente apresentados no estudo de Arranjo. É importante que o aluno perceba inicialmente, por meio da árvore de possibilidades, todos os casos possíveis em uma determinada situação, além da operação de multiplicação que fica evidenciada pela arrumação dos dados em árvore. Ao aplicar essa Atividade é muito importante tomar cuidado para que os alunos não decorem o PFC, por isso o interesse em se buscar a compreensão da operação por meio da organização dos agrupamentos em árvore.

É necessário, porém, “desfazer-se” da árvore quando essa tornar-se complicada, ou seja, quando a resolução for muito extensa, com muitos casos. Entretanto, deve-se retornar ao desenho da árvore sempre que houver uma dúvida quanto ao princípio multiplicativo.

Nessa Atividade, é introduzida a noção de fatorial numa questão (Figura 1) em que a ideia de permutar – trocar a ordem dos elementos – é bastante clara. O conhecimento do significado do símbolo ! é interessante para o aluno uma vez que, em muitas questões, tal imagem aparece.

Figura 1 – Questão 5 da Atividade 1

**5. (IEZZI et. al)** Aline (A), Bia (B), Claudinha (C) e Diana (D) são alunas do sexto ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

Fonte: IEZZI et. al, 2010, p. 257.

O grau de dificuldade das questões é crescente. A primeira é uma questão simples, na qual é possível fazer uma árvore de possibilidades com poucos “ramos” (Figura 2a), já na décima, a árvore é mais extensa (Figura 2b)

Figura 2 – Questões 1 e 10 da Atividade 1

<p><b>1.</b> (HAZZAN. Adaptada) Um homem vai a um restaurante disposto a fazer uma refeição. O cardápio oferece três pratos distintos de carne, duas opções de bebida e dois pratos diferentes de sobremesa.</p> <p>a) De quantas maneiras distintas ele pode fazer a refeição incluindo um prato de carne e uma bebida?</p> <p>b) E se for incluída a sobremesa? <span style="float: right;">(a)</span></p>
<p><b>10.</b> (FIGUEREDO) Uma pessoa está escolhendo um carro entre os modelos de duas marcas. A primeira marca tem três modelos que a interessa, e cada modelo pode vir em cinco cores diferentes. Enquanto que a segunda marca tem cinco modelos que a interessa, e cada um deles pode vir em oito cores diferentes. Quantas possibilidades há para se escolher o carro? <span style="float: right;">(b)</span></p>

Fonte: (a) HAZZAN, 2013, p. 9.

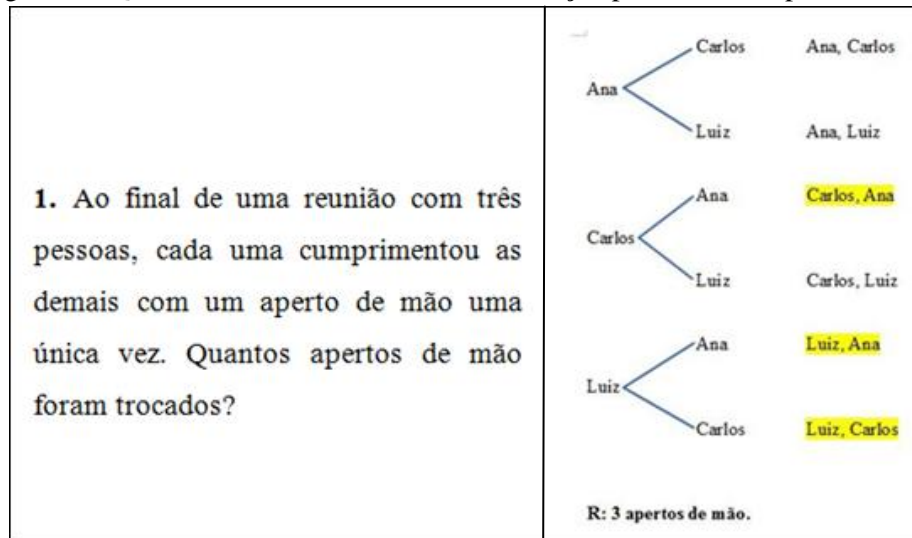
(b) FIGUEREDO, 2006, p. 64.

Em cada questão desta Atividade, é necessário perguntar e registrar todas as formas de resolução dos discentes. A discussão sobre os possíveis erros é feita mediante a apresentação da árvore de possibilidades ou parte dela e, conseqüentemente, do PFC.

A segunda Atividade (APÊNDICE B) é composta por sete questões e tem como objetivo apresentar problemas, normalmente abordados no estudo de Combinação. Espera-se que os alunos percebam que, nesse tipo de questão, alguns agrupamentos indicados na árvore são iguais, ou seja, indicam o mesmo caso, e por esse motivo é necessário dividir o total de agrupamentos pelo número de repetições de um mesmo caso.

É importante ressaltar a importância da árvore de possibilidades na visualização dos casos iguais, além da organização dos agrupamentos (Figura 3), como na Atividade anterior.

Figura 3 – Questão 1 da Atividade 2 com a resolução pela árvore de possibilidades



Fonte: elaboração própria.

Espera-se que os alunos compreendam o porquê da divisão. Caso contrário, serão mostrados outros exemplos com números pequenos, em que eles devem enumerar todos os casos para perceberem os que se repetem.

Assim como na Atividade anterior; nessa lista, as questões também têm grau de dificuldade crescente, como é possível observar na segunda e última questões (Figura 4).

Figura 4 – Questões 2 e 7 da Atividade 2

<p>2. (SILVA; BARRETO) Há doze inscritos num campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas entre os inscritos é:</p> <p>A) 12    B) 24    C) 33    D) 66    E) 132</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>
<p>7. (PAIVA) Entre oito operadores de uma máquina, devem ser escalados quatro para o turno da noite. De quantas maneiras diferentes a escalação pode ser feita se os operadores João e Pedro não podem trabalhar no mesmo turno?</p> <p style="text-align: right;">(b)</p>

Fonte: (a) SILVA; BARRETO, 2005, p. 256.

(b) PAIVA, 2009, p. 185.

A dinâmica na resolução das questões da Atividade 2 é a mesma da Atividade 1, ou seja, o importante é considerar e discutir as opiniões dos alunos sobre os problemas apresentados.

A terceira Atividade (APÊNDICE C) é composta de dez questões em que se misturam os dois casos estudados anteriormente (Figura 5). Os problemas foram retirados do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de vestibulares pensando-se no público alvo desse trabalho, jovens que prestarão essas provas num tempo próximo.

Figura 5 – Questões 1 e 9 da Atividade 3

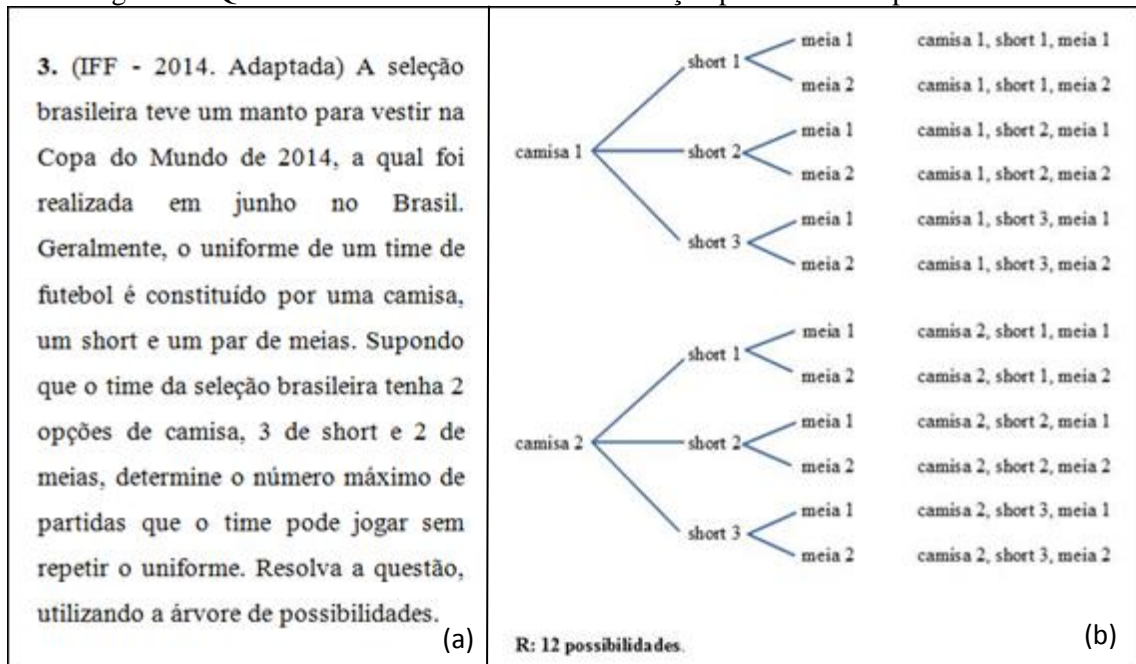
<p><b>1. (UEFS) O número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador, são:</b></p> <p>A) 240      B) 360      C) 480      D) 600      E) 720</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>
<p><b>9. (UFOP) Numa classe de 10 estudantes universitários, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado, se dentre os estudantes existe um casal que não pode ser separado?</b></p> <p style="text-align: right;">(b)</p>

Fonte: (a) vestibular UEFS, s.d.  
 (b) vestibular UFOP, s.d.

A Atividade 3 será entregue aos alunos juntamente com uma folha em branco, na qual deverão deixar registrada a resolução das questões. No próximo encontro, as licenciandas discutirão as questões com base no registro da resolução deles.

O objetivo é verificar se os alunos conseguem distinguir e resolver problemas em que a divisão ora se faz necessária, ora não. Para facilitar essa visualização, no enunciado de duas questões é solicitado que se indique a árvore de possibilidades (Figuras 6 e 7), pois assim ficará claro se houve a compreensão do problema evitando a “decoreba” do princípio multiplicativo.

Figura 6 – Questão 3 da Atividade 3 com a resolução pela árvore de possibilidades



Fonte: (a) vestibular IFF, 2014.

(b) elaboração própria.

Outra questão foi adaptada para que pudesse ser respondida pelo diagrama da árvore (Figura 7).



Figura 7 – Questão 7 da Atividade 3 com a resolução pela árvore de possibilidades

7. (Enem - 2004. Adaptada) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura. O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, determine o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem. Resolva a questão, utilizando a árvore de possibilidades.



(a)



R: 7 variações.

(b)

Fonte: (a) Enem, 2004.

(b) elaboração própria.

### **3. RELATO DE EXPERIÊNCIA**

Neste capítulo, será apresentado o relato da aplicação deste trabalho monográfico, por meio do teste exploratório e da experimentação das Atividades.

#### **3.1. Teste Exploratório**

O teste exploratório foi aplicado em uma turma da segunda série do Ensino Médio de uma escola estadual de Campos dos Goytacazes, cujos alunos não haviam estudado Análise Combinatória.

O teste ocorreu em quatro encontros com duração de dois tempos cada. O primeiro aconteceu no dia 20 de outubro de 2014 com a participação de 25 alunos, o segundo no dia 21 de outubro de 2014 com 14 alunos, o terceiro no dia 23 de outubro de 2014 com 7 alunos e o quarto foi marcado para o dia 27 de outubro de 2014, porém os alunos não compareceram.

A realização desse teste teve por objetivos: (i) verificar a clareza dos enunciados das questões das Atividades 1, 2 e 3 para que assim, se necessário, fosse possível fazer modificações e (ii) investigar se o grau de dificuldade e o tempo de aplicação das mesmas estava adequado ao público-alvo.

A proposta didática elaborada para o teste exploratório não foi igual à da experimentação. No teste, a sequência didática era composta por três Atividades. A primeira continha nove questões, que tradicionalmente, são apresentadas no estudo de Arranjo e Combinação; a segunda com seis questões do mesmo tipo que a primeira, mas com o grau de dificuldade maior, a terceira com doze questões de vestibulares e do Enem.

Sendo assim, as questões serão expostas no texto, para situar melhor o leitor na análise das respostas dos alunos.

##### **3.1.1. Primeiro Encontro**

Neste encontro, foi distribuída a Atividade 1 e as licenciandas discutiram a primeira questão (Figura 8) com a participação dos alunos.

Figura 8 – Primeira questão da Atividade 1 do teste exploratório

1. (IEZZI. Adaptada) Uma lanchonete oferece aos seus clientes dois tipos de sanduíche: *hot dog* ou hambúrguer, para bebida há três opções: refrigerante, suco ou *milkshake*, e para sobremesa há duas opções: sorvete ou torta.

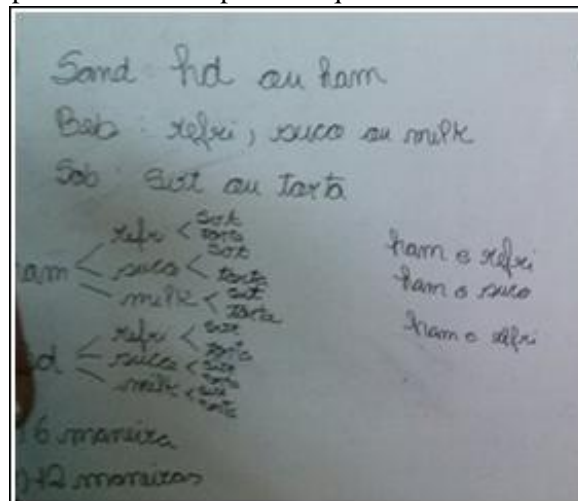
a) De quantas maneiras uma pessoa pode fazer uma refeição incluindo um sanduíche e uma bebida?

b) E se for incluída a sobremesa?

Fonte: IEZZI et. al, 1997, p. 423.

Em relação ao item **a**, as licenciandas perguntaram aos alunos quais opções eles escolheriam. As respostas foram registradas no quadro e organizadas, a seguir, no formato da árvore de possibilidades (Figura 9), facilitando a visualização das mesmas. Os alunos entenderam o processo de resolução.

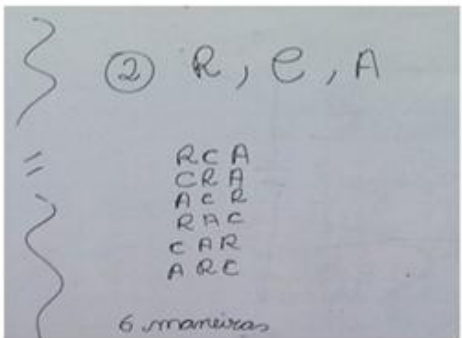
Figura 9 – Árvore de possibilidades da primeira questão da Atividade 1 do teste exploratório



Fonte: elaboração própria.

Assim como na primeira, foram registradas no quadro as respostas que os alunos encontraram para o segundo problema (Figura 10).

Figura 10 – Segunda questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

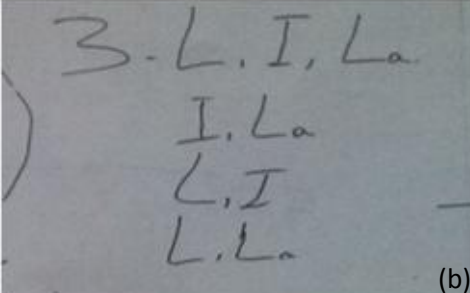
<p>2. De quantos modos podemos colocar três livros distintos juntos em uma estante de biblioteca?</p>	
---	--

Fonte: elaboração própria.

Nesta questão, explicou-se o que é permutar e introduziu-se a noção de fatorial, explorando a tecla ! da calculadora. Foi pedido aos alunos que apertassem a tecla 3 seguida da tecla ! e observassem se a resposta era a mesma encontrada anteriormente, no cômputo manual. Em seguida, foi perguntado como eles resolveriam se fossem quatro livros e eles responderam 4!.

Na terceira (Figura 11a), perguntou-se quantos apertos de mão foram trocados em uma reunião e as respostas foram registradas no quadro (Figura 11b). Essas respostas foram faladas e registradas sem nenhuma ordenação.

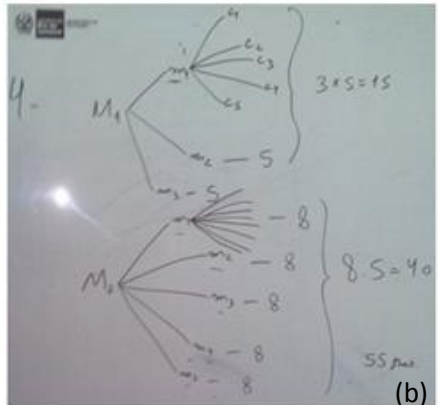
Figura 11 – Terceira questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução

<p>3. Ao final de uma reunião com três pessoas, cada uma cumprimentou as demais com um aperto de mão uma única vez. Quantos apertos de mão foram trocados?</p> <p>(a)</p>	 <p>(b)</p>
---	---

Fonte: elaboração própria.

Na quarta (Figura 12a), os alunos iniciaram a resolução sozinhos e, em seguida as licenciandas registraram algumas respostas obtidas pelos discentes. Em algumas, utilizaram a árvore de possibilidades, porém perceberam que a resolução ficava muito extensa, então foi destacada a multiplicação (Figura 12b), fazendo alusão à árvore de possibilidades.

Figura 12 – Quarta questão da Atividade 1 do teste exploratório e a resposta de um dos alunos

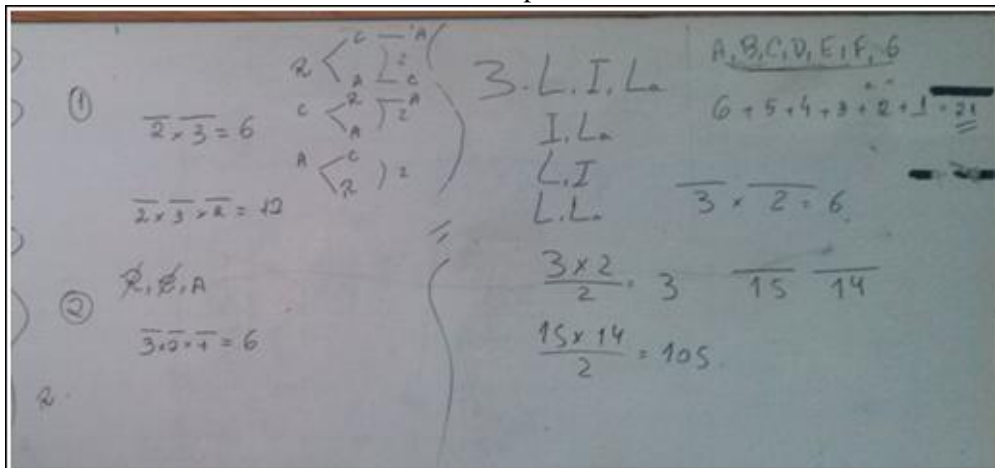
<p>4. (FIGUEREDO) Uma pessoa está escolhendo um carro entre os modelos de duas marcas. A primeira marca tem três modelos que a interessa, e cada modelo pode vir em cinco cores diferentes. Enquanto que a segunda marca tem cinco modelos que a interessa, e cada um deles pode vir em oito cores diferentes. Quantas possibilidades há para se escolher o carro?</p> <p>(a)</p>	 <p>(b)</p>
---	---

Fonte: (a) FIGUEREDO, 2006, p. 64.

(b) elaboração própria.

Após essa questão, as licenciandas retornaram às anteriores, destacando a multiplicação (Figura 13) por meio da árvore de possibilidades. Nesse momento, foi possível observar que a utilização da árvore auxiliou na organização dos dados e na visualização dos agrupamentos, visto que, inicialmente, os alunos respondiam sem nenhuma ordem como mostra a Figura 12.

Figura 13 – Questões 1, 2 e 3 da Atividade 1 do teste exploratório resolvidas pelo princípio multiplicativo



①  $2 \times 3 = 6$   
 $2 \times 3 \times 2 = 12$

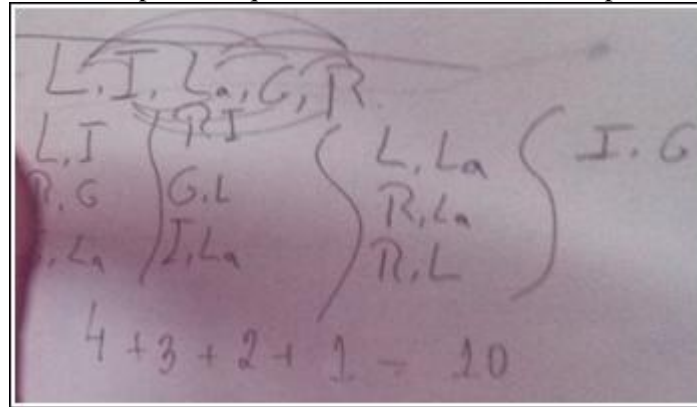
②  $3 \times 2 = 6$   
 $\frac{15 \times 14}{2} = 105$

③  $3 \times 2 = 6$   
 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

Fonte: elaboração própria.

Na terceira, foi explicado aos alunos que o total de agrupamentos, nesse caso,  $3 \times 2 = 6$ , teria que ser dividido por dois porque de “dois em dois” o resultado se repetia. Em seguida, foi perguntado qual seria a resolução se, ao invés de três, estivessem mais pessoas na reunião. Um dos alunos respondeu que, no caso de cinco pessoas, a resposta seria  $4 + 3 + 2 + 1$  (Figura 14). As licenciandas ressaltaram que essa era uma outra forma de resolver a questão.

Figura 14 – Resposta da questão 3 da Atividade 1 dada por um aluno



Fonte: elaboração própria.

Após o retorno às questões iniciais, foi pedido aos alunos que resolvessem sozinhos as próximas questões.

À medida que apresentavam dúvidas ou terminavam cada questão, as licenciandas discutiam as mesmas no quadro.

Parte dos discentes resolveu a quinta questão (Figura 15a) pela árvore de possibilidades e os demais pelo princípio multiplicativo. Em seguida, a questão foi corrigida, expondo a resolução dos discentes. (Figura 15b).

Figura 15 – Quinta questão da Atividade 1 do teste exploratório com a resolução


<p>5. Uma moeda é lançada três vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara ou coroa?</p>	<p>Handwritten student solution for question 5. Part (a) shows a tree diagram for three coin tosses. Part (b) shows the calculation <math>3 \times 2 \times 1 = 6</math>.</p>
(a)	(b)

Fonte: elaboração própria.

A sexta questão (Figura 16a) foi respondida utilizando o PFC, mas alguns alunos tiveram dúvidas com relação ao que eles multiplicariam: se  $5 \times 4 \times 3$  ou  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Um dos alunos explicou a sua resolução no quadro (Figura 16b) e os outros, que estavam com dúvidas, entenderam que tinham que escolher apenas três estilos dentre cinco.



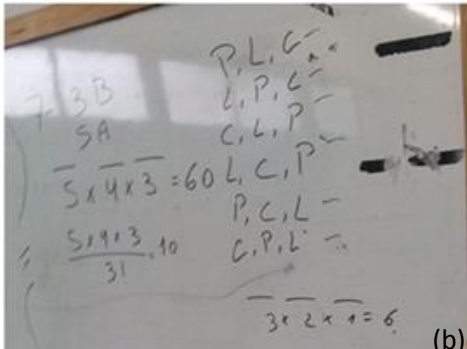
Figura 16 – Sexta questão da Atividade 1 do teste exploratório com um dos alunos mostrando a sua resolução

<p>6. (IEZZI. Adaptada) Para animar uma festa, um <i>DJ</i> dispõe de cinco tipos de música: <i>funk</i>, pagode, eletrônica, sertanejo e MPB. De quantas maneiras o anfitrião pode organizar os ritmos, sendo que ele deseja escolher apenas três?</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	 <p style="text-align: right;">(b)</p>
---	--

Fonte: (a) IEZZI, 1997, p.428.  
(b) elaboração própria.

Na sétima (Figura 17a), os alunos perceberam que tinham que dividir o total de agrupamentos, só não sabiam por qual número. Então, uma das licenciandas foi ao quadro e mostrou que “de seis em seis” repetia-se o mesmo resultado. Foi indagado aos alunos por que tal fato acontecia, mas eles não souberam responder. Então as licenciandas explicaram que estavam permutando três elementos, e retomaram o conceito de fatorial (Figura 17b).

Figura 17 – Sétima questão da Atividade 1 com a resolução

<p>7. (IEZZI. Adaptada) Cinco alunos participam de um concurso em que serão sorteadas três bicicletas idênticas. Quais os possíveis resultados do concurso?</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	 <p style="text-align: right;">(b)</p>
---	--

Fonte: (a) IEZZI, 1997, p. 431.  
(b) Elaboração própria.

A oitava (Figura 18) foi solucionada pelo PFC. Um dos alunos falou que a resposta era  $4!$  (quatro fatorial), pois estava-se permutando as quatro tarefas e os demais concordaram.

Figura 18 – Oitava questão da Atividade 1

8. (FIGUEREDO. Adaptada) Uma pessoa sai de casa com a incumbência de ir ao supermercado (S), à feira (F), ao banco (B), e ao mecânico de seu carro (M). Ela pode realizar essas quatro tarefas em qualquer ordem. Dê quantas maneiras pode fazê-las?

Fonte: FIGUEREDO, 2006, p.70.

A nona (Figura 19) também foi resolvida pelo PFC. Alguns alunos perguntaram se tinham que dividir o total de agrupamentos e uma das licenciandas levantou a questão da importância da ordem na pintura das listras mostrando exemplos de diferentes faixas decorativas que utilizavam as mesmas cores para as listras. A partir desses exemplos, perguntou-se aos alunos se a ordem dessas cores importava e se quando a ordem importa divide-se ou não. Os mesmos chegaram à conclusão de que só divide quando a ordem não importa, porque nesse caso, repete-se o mesmo resultado várias vezes.

Figura 19 – Nona questão da Atividade 1 do teste exploratório

9. (DANTE) Dispomos de cinco cores e queremos pintar uma faixa decorativa com três listras de cores diferentes. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Fonte: DANTE, 2009, p.289.

### 3.1.2. Segundo Encontro

Foi entregue neste encontro a segunda Atividade e dado um tempo aos alunos para resolverem cada questão. A correção foi feita à medida em que os alunos iam terminando a resolução ou apresentando dúvidas. Resolveu-se a primeira questão (Figura 20) no quadro, com base nas respostas dos alunos. Eles utilizaram o princípio multiplicativo e quase todos responderam corretamente.



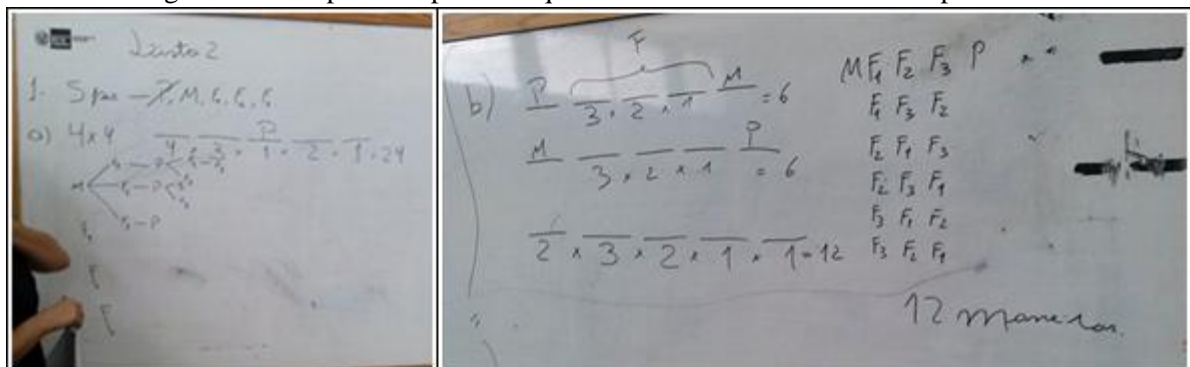
Figura 20 – Primeira questão da Atividade 2

1. Um casal e seus três filhos serão colocados lado a lado em uma foto. De quantos modos a família poderá tirar a foto,
- a) se o pai deve ficar sempre no meio?
- b) se todos os filhos devem ficar entre os pais?

Fonte: elaboração própria.

Uma das licenciandas perguntou como ficaria o desenho da árvore de possibilidades, então, foi feita uma parte da árvore com eles (Figura 21) para reforçar a compreensão sobre o princípio multiplicativo. Ferreira (2013) comenta que, ao explorar a diagrama da árvore, é possível visualizar a multiplicação das possibilidades, e este método de resolução auxilia na compreensão do PFC.

Figura 21 – Resposta da primeira questão da Atividade 2 do teste exploratório



Fonte: elaboração própria.

Quanto à segunda questão (Figura 22), percebeu-se que muitos alunos usaram a divisão. Foi discutida a importância da ordem de escolha, e para melhor entendimento, uma das licenciandas citou um exemplo real perguntando a um dos alunos suas preferências de curso universitário e se faria diferença a ordem de escolha do curso. Ele respondeu que sim, e, enfim, todos entenderam.

Figura 22 – Segunda questão da Atividade 2 do teste exploratório

2. (OSEC-SP) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Então, o número possível de formas de optar é: \_\_\_\_\_.

Fonte: vestibular OSEC, s.d.

Os alunos não conseguiram responder à terceira questão (Figura 23a). Eles não sabiam como iniciar a resolução. A fim de sanar a dúvida, uma das licenciandas indagou aos alunos as várias possibilidades do *shopping* estar aberto. Foi registrando as respostas no quadro (Figura 23b) e perguntou qual a única possibilidade do *shopping* não estar aberto, e então responderam que seria o caso de todas estarem fechadas. Assim, encontraram a resposta final.

Figura 23 – Terceira questão da Atividade 2 com a resolução

<p>3. Em um <i>shopping</i> há quatro portas de entrada. De quantas maneiras esse <i>shopping</i> pode ser aberto?</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	<p>3 - 4 portas</p> <table border="1"> <tr><th>P<sub>1</sub></th><th>P<sub>2</sub></th><th>P<sub>3</sub></th><th>P<sub>4</sub></th></tr> <tr><td>A</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>A</td><td>A</td><td>F</td></tr> <tr><td>A</td><td>A</td><td>F</td><td>A</td></tr> <tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> </table> <p><math>2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16</math></p> <p><math>16 - 1 = 15</math></p> <p>R. 15 maneiras</p> <p style="text-align: right;">(b)</p>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	A	F	F	F	F	A	A	F	A	A	F	A	F	F	F	F
P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>																		
A	F	F	F																		
F	A	A	F																		
A	A	F	A																		
F	F	F	F																		

Fonte: elaboração própria.

Na quarta questão (Figura 24a), os alunos apresentaram dúvidas em relação a fazer ou não a divisão. Então uma das licenciandas mostrou um exemplo de comissão com três pessoas e destacou que, mesmo permutando esses três elementos, a comissão continua sendo a mesma. Por isso, a necessidade de dividir por 3!, (Figura 24b) que é o número de repetições de cada agrupamento a ser considerado.

Figura 24 – Quarta questão da segunda Atividade

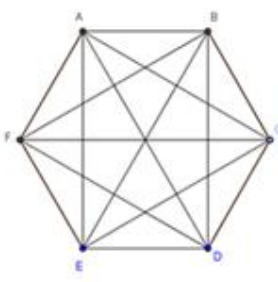
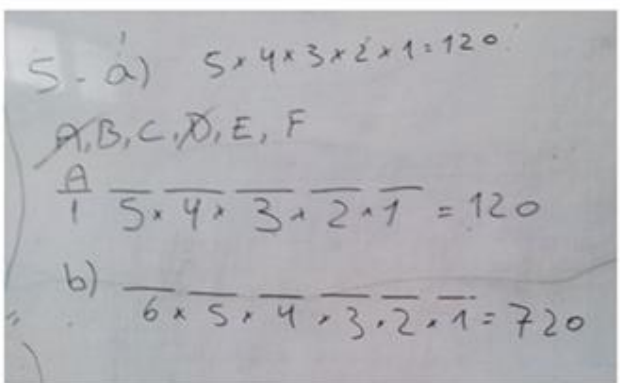
<p>4. (UNITAU) O número de maneira que se pode escolher uma comissão de três elementos num conjunto de dez pessoas é:</p> <p>A) 12 B) 210 C) 102 D) 220 E) 110</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	<p>Lista 2</p> <p>4. 10 pessoas Escolher 3</p> <p><math>10 \times 9 \times 8 = 720</math></p> <p><math>\frac{720}{6} = 120</math></p> <p>ABC DEF GHI BAC GHI CAB GHI GHI I GH DCB</p> <p style="text-align: right;">(b)</p>
--	---

Fonte: (a) vestibular UNITAU, 1995.

(b) elaboração própria.

A quinta (Figura 25a) os alunos resolveram sozinhos e responderam corretamente os dois itens. Quando perguntados sobre o item **a**, responderam que só tinha uma opção para iniciar, e para as demais escolhas, seria  $5!$ , pois ele teria que passar por mais cinco cidades em qualquer ordem. Em relação ao item **b**, responderam  $6!$ , pois o vendedor passaria por seis cidades em qualquer ordem. Uma das licenciandas registrou as respostas no quadro (Figura 25b).

Figura 25 – Quinta questão da Atividade 2 do teste exploratório com a resolução

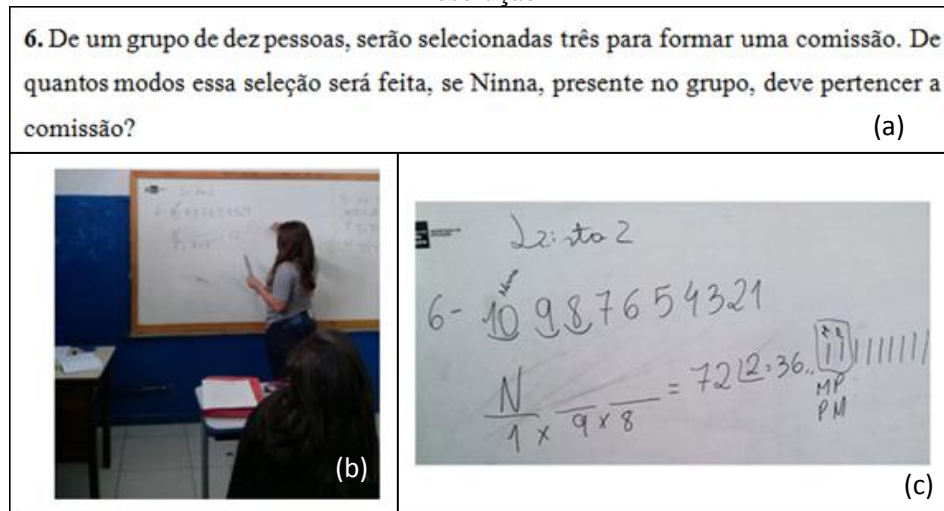
<p><b>5. (FIGUEREDO)</b> A figura abaixo representa seis cidades: A, B, C, D, E e F. Um vendedor ambulante deve passar por todas, visitando cada cidade uma única vez.</p>  <p><b>a)</b> Se o vendedor começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?</p> <p><b>b)</b> E se ele começar e terminar por qualquer cidade?</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	 <p style="text-align: right;">(b)</p>
---	---

Fonte: (a) FIGUEREDO, 2006, p.72.

(b) elaboração própria.

Na sexta (Figura 26a), a maioria dos alunos entenderam, e um deles quis ir ao quadro explicar a sua resolução (Figura 26b). Comentou que o primeiro lugar já estava reservado para Ninna, e por esse motivo para selecionar o segundo havia nove pessoas, e para o terceiro sobraram oito opções. Sendo assim, fariam  $9 \times 8$  e dividiriam o resultado por  $2!$  (Figura 26c), e os mesmos demonstraram compreender a solução apresentada.

Figura 26 – Sexta questão da Atividade 2 do teste exploratório com uma das alunas mostrando a sua resolução



Fonte: elaboração própria.

### 3.1.3. Terceiro Encontro

O terceiro encontro foi marcado para os dois últimos horários do turno da tarde. Em geral, nessa escola em que foi aplicado o teste, os alunos são liberados nos últimos horários e, quando as licenciandas chegaram à sala, só havia seis alunos.

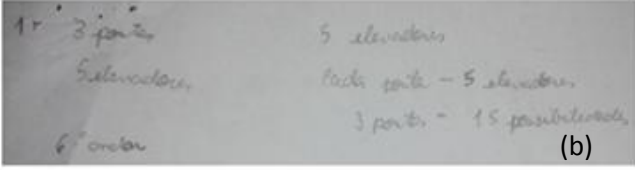
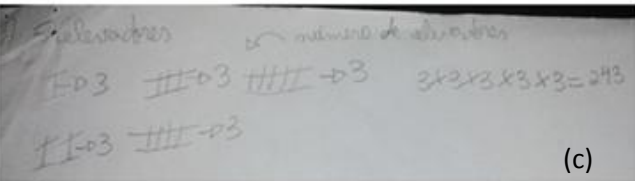
Foi entregue a Atividade 3 e uma folha em branco para que os mesmos registrassem as suas resoluções. As licenciandas analisaram as anotações feitas nessas folhas e prepararam a próxima aula com base nessa análise.

É importante ressaltar que os alunos não demonstraram interesse em resolver as questões. Estavam com pressa e disseram que haviam marcado outros compromissos naquele horário.

Após o encontro, as licenciandas analisaram as respostas dos alunos.

Na primeira questão (Figura 27a), cinco alunos responderam corretamente, sendo que um respondeu sem explicar, três resolveram multiplicando três por cinco (Figura 27b) e um por tentativa. Apenas um errou, escrevendo  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  (Figura 27c).


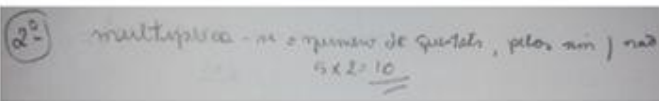
Figura 27 – Questão 1 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos

<p>1. (FAAP-SP) - Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo saguão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao 6°. andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?</p> <p>(a)</p>	 <p>(b)</p>  <p>(c)</p>
---	---

Fonte: (a) vestibular FAAP, s.d.  
(b) e (c) protocolo de pesquisa.

Na segunda questão (Figura 28a), apenas um aluno acertou e resolveu multiplicando  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  (Figura 28b). Quatro não responderam, e um multiplicou o número de questões por dois (Figura 28c).

Figura 28 - Questão 2 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos

<p>2. (UEL-PR) Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado abaixo, colocando-se um "x" em uma só resposta para cada questão.</p> <table border="1" data-bbox="239 1332 718 1534"> <thead> <tr> <th colspan="6">CARTÃO RESPOSTA</th> </tr> <tr> <th>Questões</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sim</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Não</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário? (a)</p> <p>A) 3125 B) 120 C) 32 D) 25 E) 10</p>	CARTÃO RESPOSTA						Questões	1	2	3	4	5	Sim						Não						 <p>(b)</p>  <p>(c)</p>
CARTÃO RESPOSTA																									
Questões	1	2	3	4	5																				
Sim																									
Não																									

Fonte: (a) vestibular UEL, 1996.  
(b) e (c) protocolo de pesquisa.

Nenhum aluno respondeu à terceira questão (Figura 29a) corretamente. Três responderam seis e não justificaram; um respondeu seis, multiplicando seis por cinco e dividindo o resultado por cinco (Figura 29c); um multiplicou  $6 \times 5 \times 4 \times 3$  (Figura 29b), porém não dividiu o resultado por cinco, e um não respondeu.

Figura 29 - Questão 3 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos

<p>3. (UNIOESTE) Quatro amigos vão ao cinema e escolhem, para sentar-se, uma fila em que há seis lugares disponíveis. Sendo <math>n</math> o número de maneiras como poderão sentar-se, o valor de <math>n/5</math> é igual a:</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>3) I II III IIII <math>\times</math> número de amigos  <math>\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow</math>          6 5 4 3  <math>6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360</math> (b)</p> <hr/> <p>3 - 6 lugares - 4 amigos.          0 0 0 0 0 0          1 2 3 4 5 6          0  <math>6 \cdot 5 = 30 \div 5 = 6</math> (c)</p> </div>
--	--

Fonte: (a) vestibular UNIOESTE, 1999.  
 (b) e (c) protocolo de pesquisa.

Ninguém acertou a quarta questão (Figura 30a). Quatro completaram as lacunas com os números 10, 50 e 20 (Figura 30b) e, não justificaram. Um completou as lacunas com os números 5, 10 e 90 (Figura 30c) e, também, não justificou. Outro não respondeu.

Figura 30 - Questão 4 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de dois dos alunos

<p>4. (UFSM-RS) Considerando o número de 5 algarismos distintos,</p> <p style="text-align: center;"> <input type="text" value="2"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text"/> </p> <p>o número de formas possíveis para preencher as lacunas, de modo a obter um múltiplo de 5, é:</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;"> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="50"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="20"/> (b)                 </p> <hr/> <p style="text-align: center;"> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="90"/> (c)                 </p> </div>
--	--

Fonte: (a) vestibular UFSM, s.d.  
 (b) e (c) protocolo de pesquisa.

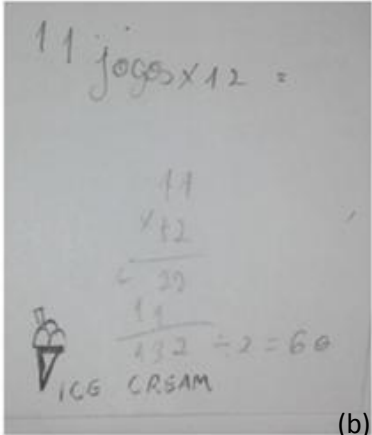
As licenciandas acreditam que os alunos não entenderam o enunciado da questão. Com relação à dificuldade de interpretação de enunciado, Coutinho e Albuquerque (2013), afirmam que:



Um dos problemas mais evidenciados pelos professores de todas as áreas do conhecimento está relacionado às dificuldades de escrita e leitura dos alunos. Em geral os professores afirmam que os alunos não interpretam adequadamente as questões propostas, apresentam dificuldades de argumentar seus pontos de vista e não conseguem resolver situações-problema (COUTINHO; ALBUQUERQUE, 2013, p.2).

Na quinta questão (Figura 31a), apenas um aluno não respondeu e os demais resolveram com a explicação de uma das alunas, que dividiu o total de agrupamentos por dois, porque, segundo ela, time A jogar com time B é o mesmo que time B jogar com time A (Figura 31b).

Figura 31 - Questão 5 da Atividade 3 do teste exploratório com as resoluções de um dos alunos

<p>5. (CESGRANRIO) Em um campeonato de futebol, cada um dos 12 times disputantes joga contra todos os outros uma só vez. O número total de jogos desse campeonato é :</p> <p>A) 32 B) 36 C) 48 D) 60 E) 66</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	 <p style="text-align: right;">(b)</p>
--	---

Fonte: (a) CESGRANRIO, 1990.

(b) protocolo de pesquisa.

Na sexta questão (Figura 32a), apenas um aluno acertou e respondeu  $2 \times 20 \times 30$  (Figura 32b), os outros erraram e não explicaram como fizeram.

Figura 32 - Questão 6 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

6. (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

A) 1.320    B) 2.090    C) 5.845    D) 6.600    E) 7.245    (a)

6)  $2 \times 20 \times 33 = 1320$     (b)

Fonte: (a) Enem, 2007.

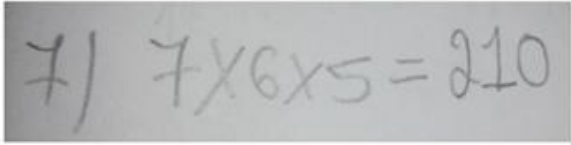
(b) protocolo de pesquisa.

Nenhum aluno conseguiu resolver a sétima questão (Figura 33a). Seis marcaram a resposta 210, sendo que desses, cinco não justificaram e um escreveu  $7 \times 6 \times 5$  (Figura 33b). As licenciandas concluíram que os alunos não entenderam que tinham que dividir o resultado da multiplicação  $7 \times 6 \times 5$  por seis.

Essa situação foi destacada por Esteves (2001) que afirma que os alunos têm dificuldades de interpretar e distinguir problemas em que a ordem importa ou não, ou seja, se é necessário efetuar a divisão ou não e, sendo assim resolvem os problemas de forma equivocada.




Figura 33 - Questão 7 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

<p>7. (UFMG) Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é</p> <p>A) 35 B) 45 C) 210 D) <math>7^3</math> E) <math>7!</math> (a)</p>	 <p>(b)</p>
--	---

Fonte: (a) vestibular UFMG, 1995.  
(b) protocolo de pesquisa.

Nenhum aluno respondeu a oitava questão (Figura 34). Acredita-se que os alunos não compreenderam a questão devido a mesma ser extensa, visto que, muitos alunos já possuem dificuldades em leitura e, conseqüentemente, não conseguem interpretar problemas matemáticos, como afirma Smole e Dinniz (2001).

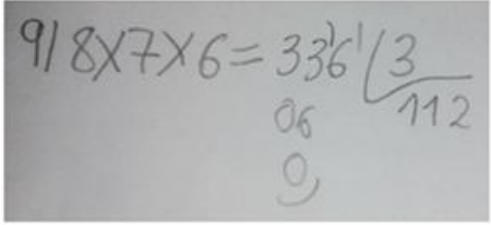
Figura 34 - Questão 8 da Atividade 3 do Teste Exploratório

<p>8. (Enem) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura. O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é</p> <p>A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10</p>	
--	---

Fonte: Enem, 2004.

Todos erraram a nona questão (Figura 35a). Cinco responderam 12, sem justificativa e um multiplicou  $8 \times 7 \times 6$  e dividiu o resultado por três em vez de  $3!$  (Figura 35b).

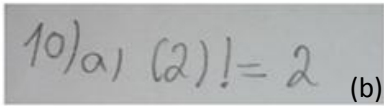
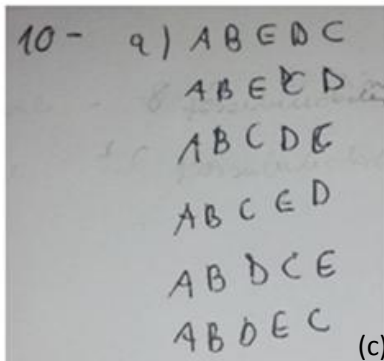
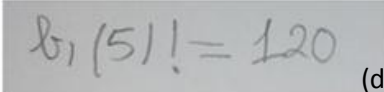
Figura 35 - Questão 9 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

<p>9. (FAAP) Um engenheiro de obra do "Sistema Fácil", para determinados serviços de acabamento tem a sua disposição três azulejistas e oito serventes. Queremos formar equipes de acabamento constituídas de um azulejista e três serventes, o número de equipes diferentes possíveis, é:</p> <p>A) 3 B) 56 C) 112 D) 168 E) 12</p>	 <p>(a) (b)</p>
--	---

Fonte: (a) vestibular FAAP, 1996.  
(b) protocolo de pesquisa.

Apenas um aluno errou o problema referente ao item **a** da décima questão (Figura 36a), respondendo 2! (Figura 36b). Os demais acertaram escrevendo cada caso (Figura 36c). Nenhum aluno conseguiu responder à pergunta do item **b**. Um fez uma permutação de 5 elementos, sem considerar A e B juntos (Figura 36d); os outros não registraram, mas comentaram no momento da aplicação que permutaram C, D e E, e multiplicaram por dois, que seria a permutação de A e B, mas as licenciandas perceberam que só consideraram A e B na posição inicial.

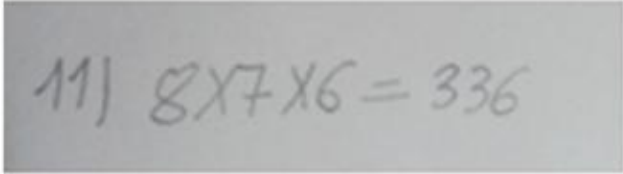
Figura 36 - Questão 10 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de três dos alunos

<p>10. (FGV) Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.</p> <p>a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve anteceder B?</p> <p>b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo?</p>	 <p>(b)</p>
	 <p>(c)</p>
	 <p>(d)</p>
	<p>(a)</p>

Fonte: (a) vestibular FGV, 1997.  
(b), (c) e (d) protocolo de pesquisa.

Todos erraram a décima primeira questão (Figura 37a). Marcaram a resposta 336, sendo que um respondeu multiplicando  $8 \times 7 \times 6$  (Figura 37b) e os demais não explicaram. Mais uma vez as licenciandas constataram que os alunos não perceberam que era necessário dividir o resultado  $8 \times 7 \times 6$  por  $3!$ .

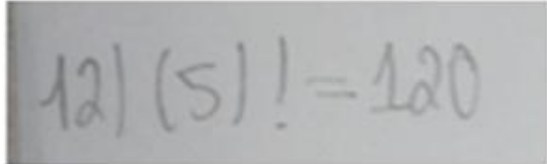
Figura 37 - Questão 11 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

<p><b>11.</b> (UFF) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:</p> <p>A) 8    B) 24    C) 56    D) 112    E) 336</p>	(a)
	(b)

Fonte: (a) vestibular UFF, 2005.  
(b) protocolo de pesquisa.

Todos acertaram a décima segunda questão (Figura 38a), respondendo 5! (Figura 38b).

Figura 38 - Questão 12 da Atividade 3 do teste exploratório com a resolução de um dos alunos

<p><b>12. (CESGRANRIO) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?</b></p> <p>A) 180      B) 120      C) 100      D) 48      E) 24</p>		(a)
		(b)

Fonte: (a) CESGRANRIO, 1997.

(b) protocolo de pesquisa.

### 3.1.4. Quarto Encontro

O quarto encontro também foi marcado nos últimos horários, pois não havia outra data possível. Devido ao ocorrido no encontro anterior, as licenciandas confirmaram o horário da aula com o inspetor e os alunos, mas mesmo assim, quando chegaram à escola os alunos já haviam sido liberados e estavam descendo as escadas. Todos se negaram a voltar para a sala e pediram as licenciandas que voltassem outro dia. Como não havia mais dias disponíveis para o retorno, encerrou-se o teste exploratório.

Foi possível notar que o horário atrapalhou a conclusão do trabalho, pois já é uma prática dessa escola não ter aula nos últimos horários. Como relatado, mesmo sabendo que a aula ocorreria, houve a liberação da turma pelo inspetor.

É importante ressaltar que, mesmo não ocorrendo o encontro, os objetivos do teste foram cumpridos. A perda maior ocorreu para os alunos que não puderam compartilhar as resoluções comentadas. É importante observar que os sete alunos que resolveram a Atividade 3 foram extremamente participativos nos encontros anteriores. As seguintes mudanças ocorreram após o teste exploratório, a saber:

- Foi modificado o critério para a escolha das questões das Atividades 1 e 2. Separaram-se as que são trabalhadas tradicionalmente no estudo de Arranjo, das que são estudadas em Combinação. Percebeu-se que era necessário mais tempo para misturar todas as questões e que seria mais produtivo reforçar cada caso separadamente.

– Atualizaram-se as questões utilizando livros e vestibulares mais atuais.

– Foi retirada a terceira questão da Atividade 2 do teste exploratório, pois percebeu-se que estava em um nível de dificuldade maior do que o desejado.

– Incluíram-se questões com o grau de dificuldade maior, pois o público da experimentação já era conhecido. A saber, alunos da rede federal que já passaram por um processo seletivo.

Optou-se, no texto monográfico, por fazer os comentários das respostas dos alunos na Atividade 3, visto que as análises serviram para embasar algumas das modificações descritas anteriormente.

### 3.2 Experimentação das Atividades

A experimentação das Atividades foi realizada em uma Instituição Federal de Educação com um grupo de alunos da 2ª. série do Ensino Médio, na cidade de Campos dos Goytacazes.

A Tabela 1 traz informações referentes aos encontros.

Tabela 1 - Data, carga horária e número de alunos de cada encontro

Data	Carga Horária	Número de Alunos
09/12/2014	2 horas/aula	25
10/12/2014	1 hora/aula	24
11/12/2014	1 hora/aula	21
16/12/2014	2 horas/aula	20
17/12/2014	1 hora/aula	17
18/12/2014	1 hora/aula	19

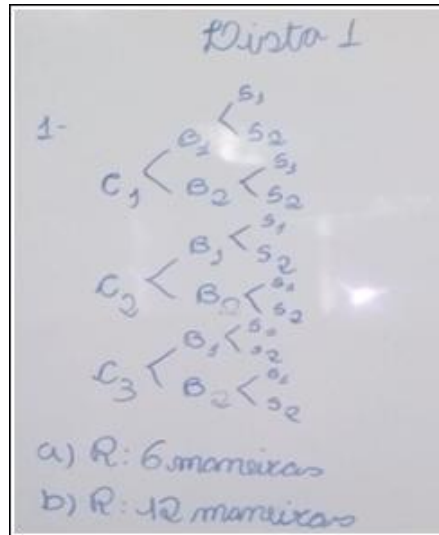
Fonte: elaboração própria.

#### 3.2.1 Primeiro encontro

No início do primeiro encontro, foi entregue a Atividade 1. Uma das licenciandas foi ao quadro e iniciou a primeira questão com o auxílio dos alunos. Como era uma questão de

escolha de refeição, os alunos foram indagados sobre as várias opções de refeição que cada um poderia fazer. As respostas foram registradas no quadro e em seguida a licencianda as arrumou na árvore de possibilidades (Figura 39). Os discentes entenderam o procedimento.

Figura 39 - Resolução da primeira questão da Atividade 1

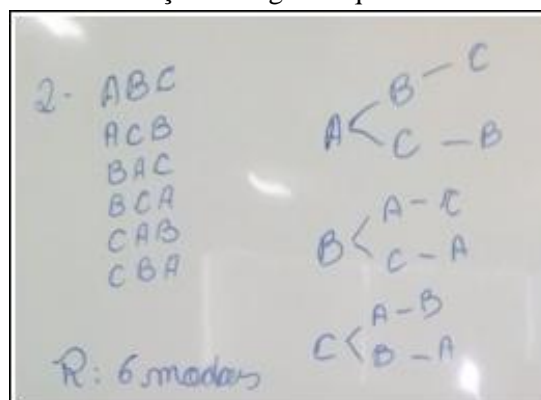


Fonte: elaboração própria.

Depois desse momento, foi pedido aos alunos que tentassem resolver as demais questões. As licenciandas foram resolvendo no quadro nos momentos de dúvida ou quando os alunos terminavam de fazer cada questão.

A segunda questão foi respondida pelos alunos que falaram aleatoriamente como poderia ser a arrumação dos livros. Essas respostas foram registradas no quadro e organizadas por meio da árvore de possibilidades (Figura 40).

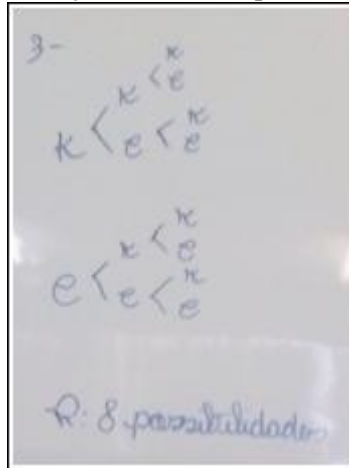
Figura 40 - Resolução da segunda questão da Atividade 1



Fonte: elaboração própria.

Na terceira, os alunos responderam aleatoriamente as possíveis sequências de cara ou coroa. Então uma das licenciandas foi ao quadro e junto aos alunos arrumou as respostas na árvore de possibilidades (Figura 41).

Figura 41 - Resolução da terceira questão da Atividade 1

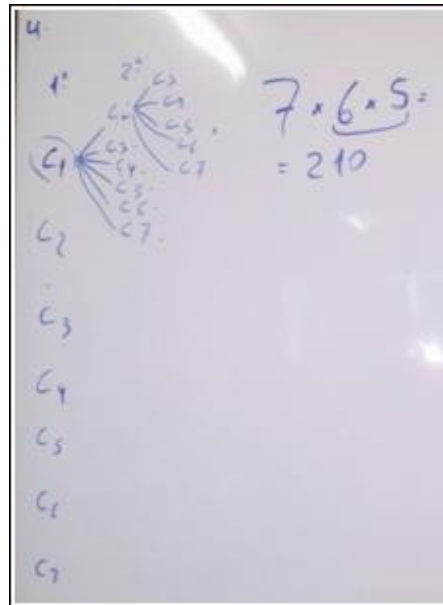


Fonte: elaboração própria.

Na quarta questão, os alunos perceberam que a resolução pela árvore de possibilidades ficaria muito extensa. Então, as licenciandas os instigaram para que procurassem uma nova estratégia de resolução. Para tal, foi construído, junto aos alunos, o primeiro ramo da árvore de possibilidades e solicitado que o observassem melhor a fim de perceber qual operação matemática poderia determinar o número total de possibilidades. Após algumas discussões, os discentes chegaram à conclusão de que era a multiplicação (Figura 42).



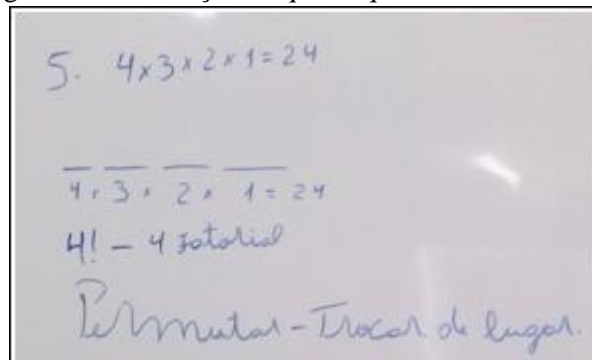
Figura 42 - Resolução da quarta questão da Atividade 1



Fonte: elaboração própria.

Na quinta, alguns alunos responderam pela multiplicação e outros não conseguiram resolver. Então, uma das licenciandas foi ao quadro e perguntou quantas possibilidades havia para a primeira aluna escolher uma carteira para se sentar. Depois da escolha da primeira, quantas carteiras sobraram para a escolha da segunda aluna e assim sucessivamente. Os discentes responderam quatro para a primeira, três para a segunda, dois para a terceira e uma para a quarta. Logo após falaram que era para multiplicar essas possibilidades, o que resultou no total de dias necessários para esgotar todas as possibilidades (Figura 43).

Figura 43 - Resolução da quinta questão da Atividade 1



Fonte: elaboração própria.

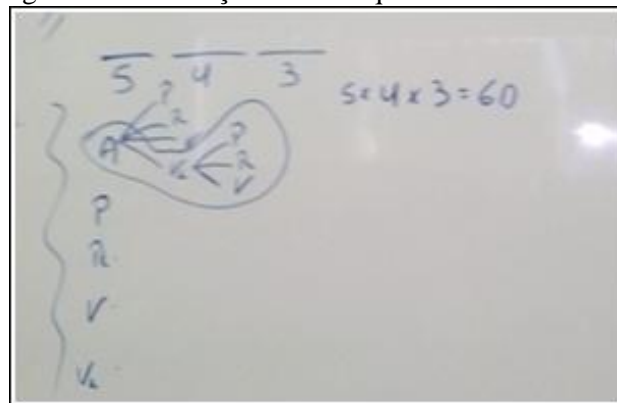
Em seguida, com o intuito de introduzir a noção de fatorial, apresentou-se o símbolo ! e foi pedido aos alunos que utilizassem a calculadora, apertando as teclas 4 e !. Em seguida,



perguntou-se o que eles puderam observar em relação ao resultado obtido na calculadora e o da questão cinco. Eles constataram que o resultado foi o mesmo. E, então, explicou-se que eles estavam permutando, ou seja, trocando as mesmas alunas de lugar. Depois, solicitou-se aos alunos que explorassem a tecla ! da calculadora utilizando outros números.

Na sexta questão, uma das licenciandas expôs algumas possíveis faixas no quadro, pintando-as com cores diferentes e, em seguida, os alunos responderam que teriam cinco possibilidades para pintar a primeira faixa, quatro para a segunda e três para a terceira (Figura 44).

Figura 44 - Resolução da sexta questão da Atividade 1



Fonte: elaboração própria.

Na sétima, item **a**, quando perguntados sobre como resolveram, disseram  $4!$ , garantindo o lugar do pai e permutando os outros elementos. No item **b**, surgiram três respostas: (i)  $3!$ , permutando apenas os filhos; (ii)  $3! + 3!$  fazendo duas arrumações, uma com o pai na primeira posição, a mãe na quinta posição e os filhos no meio e outra com a mãe na primeira posição, o pai na quinta posição e os filhos no meio e (iii)  $2! \times 3!$  considerando a permutação dos pais  $2!$  vezes e a permutação dos filhos  $3!$ . A primeira resposta estava incorreta, e uma das licenciandas indagou sobre a arrumação dos pais. Eles falaram que já estava garantido o lugar dos pais nas pontas, e, então, a licencianda perguntou se o pai e a mãe tinham um lugar fixo ou se poderiam estar tanto em uma extremidade quanto em outra. Nesse momento, eles responderam que podia permutar os pais e chegaram à conclusão de que deveriam permutar os filhos e os pais e, ao final, multiplicar os resultados dessas permutações (Figura 45).

Figura 45 - Resolução da sétima questão da Atividade 1

Distância

$P, H, F_1, F_2, F_3$

$$\frac{P}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

$$\frac{H}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

a)  $4! = 24$

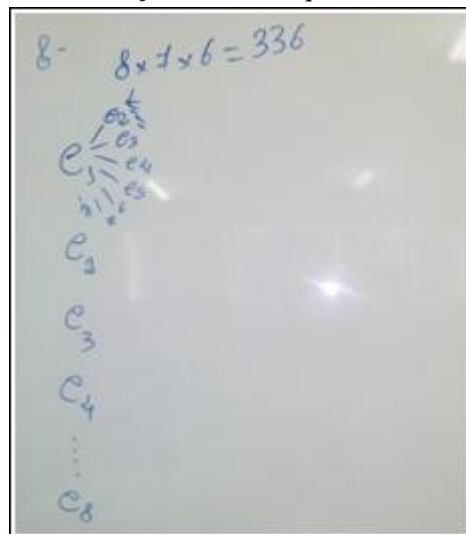
b)

$3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$

Fonte: elaboração própria.

Na oitava, todos os discentes responderam  $8 \times 7 \times 6$  e uma das licenciandas construiu um dos ramos da árvore de possibilidades, reforçando o sentido dessa multiplicação (Figura 46).

Figura 46 - Resolução da oitava questão da Atividade 1



Fonte: elaboração própria.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio recomendam a utilização da árvore de possibilidades para organizar o pensamento: “A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento” (BRASIL, 2006, p. 79).

Na nona questão, item **a**, os alunos responderam  $5!$ , pois reservaram o primeiro lugar para a cidade A, e permutaram as demais cidades e no item **b**,  $6!$ , pois permutaram todas as cidades (Figura 47).

Figura 47 - Resolução da nona questão da Atividade 1

$$9.a) 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{A}{1} \quad \frac{\quad}{5} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{3} \times \frac{\quad}{2} \times \frac{\quad}{1} = 120$$

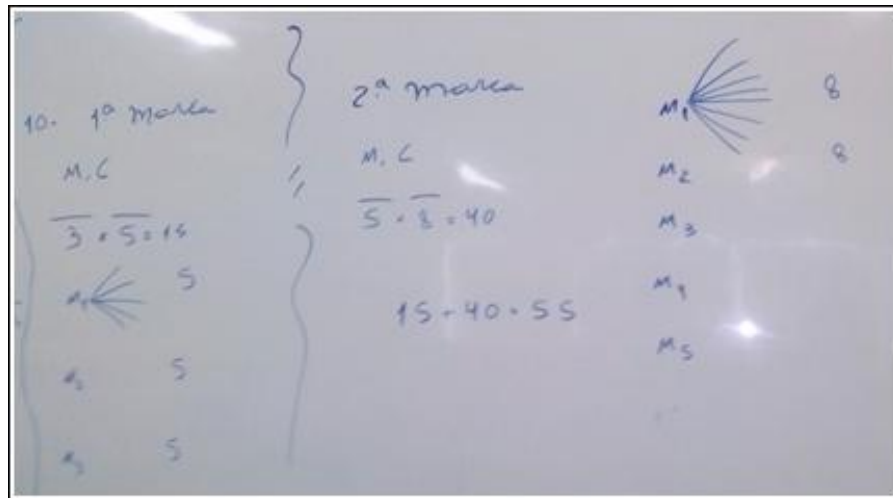
$$b) \frac{\quad}{6} \times \frac{\quad}{5} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{3} \times \frac{\quad}{2} \times \frac{\quad}{1}$$

$$= 720$$

Fonte: elaboração própria.

Na décima, uma parte dos alunos respondeu analisando a questão em duas situações, uma referente à marca 1 e outra à marca 2. Nesse caso, multiplicaram o número de possibilidades de modelo com o número de possibilidades de cores para a marca A e somaram com o número as possibilidades segundo esses mesmos critérios para a marca B, o que resultou no total de possibilidades para a compra de um carro nas condições propostas. A outra parte só entendeu essa resolução quando uma das licenciadas foi ao quadro e construiu alguns ramos da árvore de possibilidades (Figura 48). Por meio de perguntas, eles entenderam a multiplicação correspondente a cada marca e verificaram que, nesse caso, era necessário somar os dois resultados.

Figura 48 - Resolução da décima questão da Atividade 1



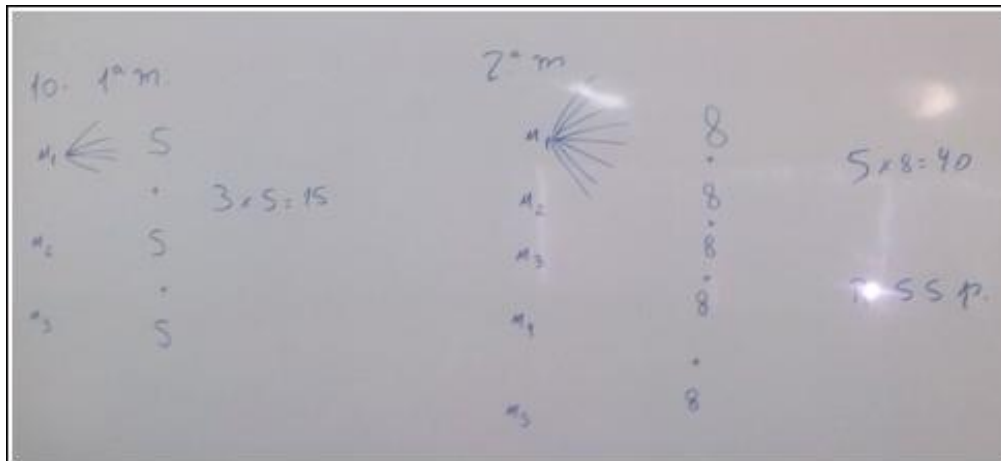
Fonte: elaboração própria.

### 3.2.2. Segundo Encontro

Iniciou-se o segundo encontro relembrando a décima questão da Atividade 1, reforçando o uso da árvore de possibilidades e mostrando a multiplicação em cada ramo (Figura 49). Decidiu-se repetir essa resolução para mostrar o porquê da multiplicação, pois percebeu-se, ao final do primeiro encontro, que os alunos estavam automatizando essa operação. Com relação a esse assunto, Reboul (1982) comenta que:

O aluno registra palavras ou fórmulas sem compreendê-las. Repete-as simplesmente para conseguir boas classificações ou para agradar ao professor (...) habitua-se a crer que existe uma língua do professor que tem de aceitar sem a compreender, um pouco como a missa em latim.(...) O verbalismo estende-se até as matemáticas; pode-se passar a vida inteira sem saber porque é que se faz um transporte numa operação; aprendeu-se mas não se compreendeu; contenta-se em saber aplicar uma fórmula mágica (REBOUL, 1982 apud ANASTASIOU, 2003, p. 2).

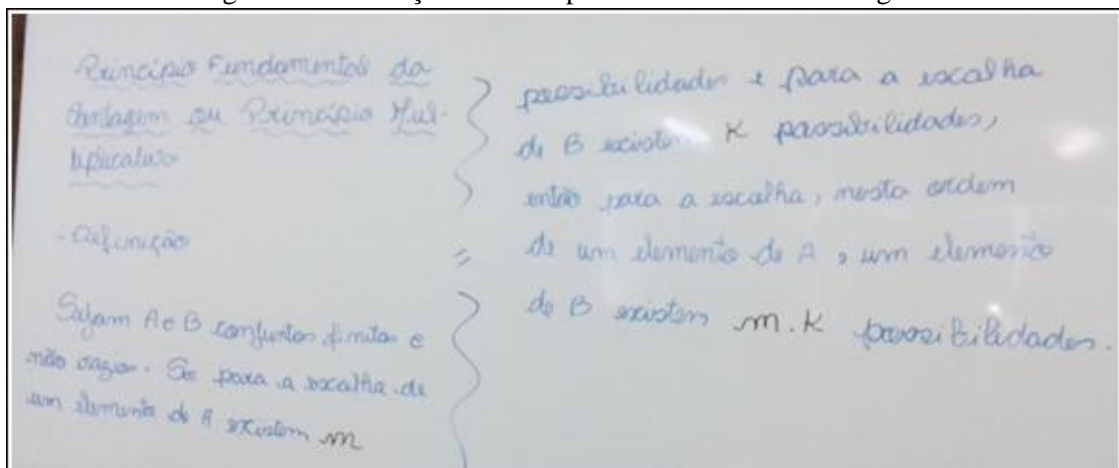
Figura 49 – Questão 10 da Atividade 1 apresentada no início do segundo encontro



Fonte: elaboração própria.

Em seguida, foi exposta e explicada a definição do Princípio Fundamental da Contagem (Figura 50). Logo depois, distribuiu-se a segunda Atividade e solicitou-se que os alunos a resolvessem. Assim como na primeira, as licenciandas resolveram no quadro quando surgiam dúvidas ou quando a maior parte dos alunos terminavam de responder a cada questão.

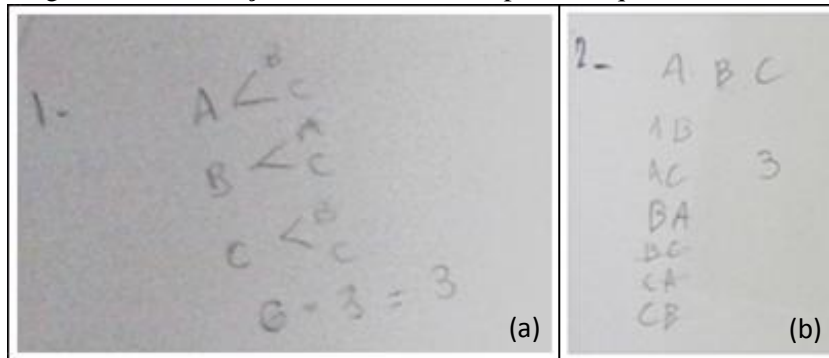
Figura 50 - Definição do Princípio Fundamental da Contagem



Fonte: elaboração própria.

A primeira questão foi respondida de duas formas pelos alunos: uns falaram aleatoriamente todos os casos (Figura 51b) e depois retiraram os repetidos, e outros organizaram as respostas na árvore de possibilidades (Figura 51a) retirando as repetidas.

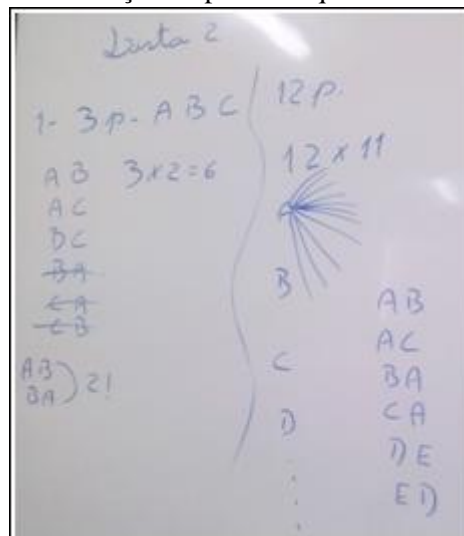
Figura 51 – Resolução de dois alunos da primeira questão da Atividade 2



Fonte: elaboração própria.

Logo após ouvir os alunos, uma das licenciandas os indagou sobre como encontrar a solução utilizando a multiplicação. Mesmo sabendo que a resposta era três, os alunos responderam  $3 \times 2$ . Então, a licencianda perguntou o que deveriam fazer para encontrar o resultado. Eles perceberam que cada caso estava sendo contado duas vezes, logo teriam que dividir por dois (Figura 52).

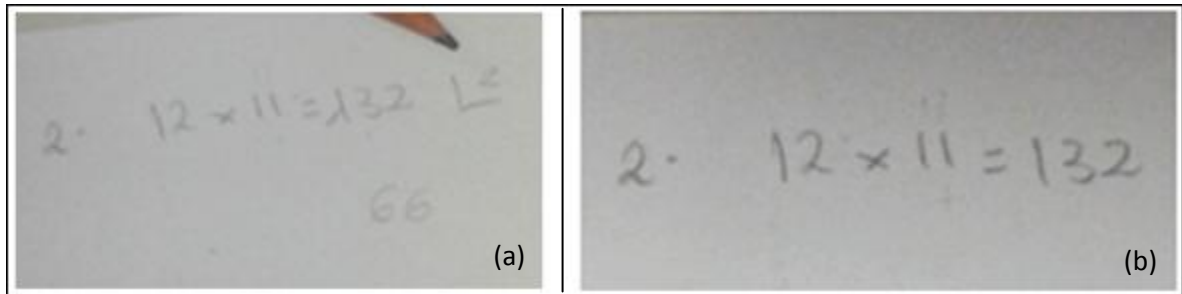
Figura 52 - Resolução da primeira questão da Atividade 2



Fonte: elaboração própria.

Na segunda questão, alguns alunos responderam corretamente (Figura 53a), e outros, equivocadamente, não efetuaram a divisão (Figura 53b).

Figura 53 - Resolução de dois alunos da segunda questão da Atividade 2



Fonte: elaboração própria.

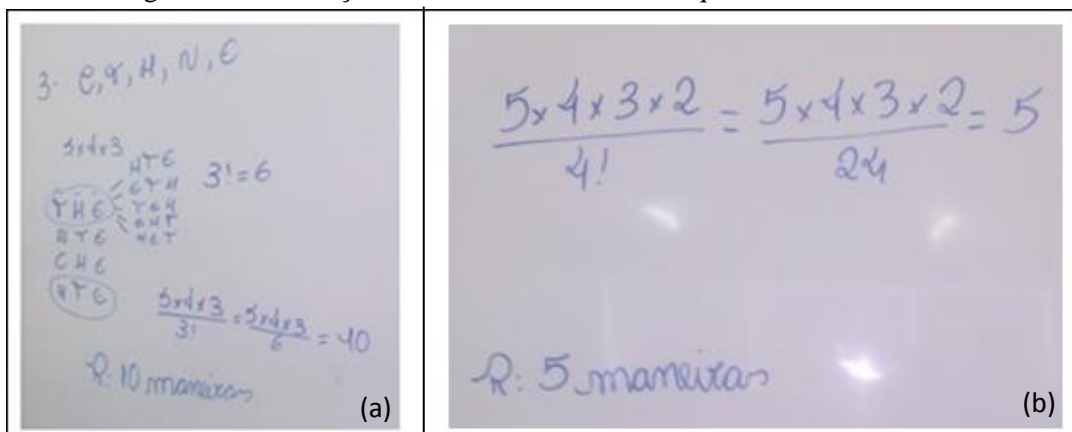
A licencianda foi ao quadro, registrou algumas respostas que iriam gerar a mesma luta e então os alunos perceberam que, assim como a primeira, cada caso estava sendo contado duas vezes e, por isso, teriam que dividir por dois.

Na terceira questão, muitos alunos dividiram por três e por quatro, acreditando que um mesmo caso se repetiria três ou quatro vezes e outros responderam corretamente, ou seja, falaram que a resposta era  $5 \times 4 \times 3$  dividido por  $3!$ .

Uma das licenciandas foi ao quadro e pediu para alguns alunos escolherem três das cinco modalidades. Em seguida, circulou um dos casos e perguntou quais seriam as variações desse mesmo caso e os alunos responderam seis. Então a licencianda explicou que estavam permutando três elementos, por isso a divisão era por  $3!$  e não por três (Figura 54a).

Quando perguntados, sobre a escolha de quatro modalidades, todos os alunos responderam que cada caso se repetiria 24 vezes e por isso a divisão seria por  $4!$  (Figura 54b).

Figura 54 - Resolução de dois alunos da terceira questão da Atividade 2



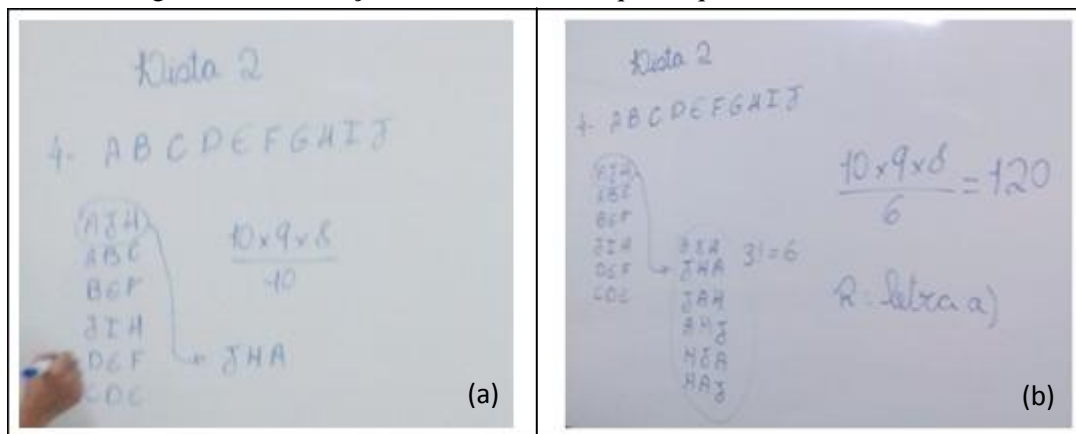
Fonte: elaboração própria.

### 3.2.3 Terceiro Encontro

No terceiro encontro, continuou-se com a segunda Atividade.

Na quarta questão, um dos alunos respondeu que teria que dividir o número de comissões por dez (Figura 55a). Após registrar algumas soluções, uma das licenciandas perguntou se a resolução estava correta. Muitos alunos demonstraram dúvidas. Discutiu-se então, quantas vezes um mesmo caso se repetia. Encontraram seis repetições e por isso teriam que dividir o número de agrupamentos por  $3!$  e não por dez (Figura 55b).

Figura 55 – Resolução de dois alunos da quarta questão da Atividade 2



Fonte: elaboração própria.

A maior parte dos alunos resolveu a quinta questão corretamente. Uma das licenciandas foi ao quadro e perguntou quantos amigos teriam para primeira escolha, quantos para a segunda, e assim até a quarta escolha. Em seguida, indagou se haveria-casos repetidos, ou seja, situações em que as mesmas pessoas tivessem sido convidadas. Os alunos responderam que haveria 24 casos repetidos em cada escolha, ou seja, deveria dividir o número de alunos selecionados por  $4!$  (Figura 56).



Figura 56 - Resolução de um dos alunos da quinta questão da Atividade 2

5-  $7 \times 6 \times 5 \times 4$   
 $4!$

7 6 5 4  
 A B C D - 24  
 4!

Fonte: elaboração própria.

Na sexta questão, os alunos não tiveram dúvidas. Deixaram o lugar de Ninna reservado e para os outros dois lugares fizeram  $9 \times 8$  dividido por  $2!$ . Uma das licenciandas foi ao quadro e registrou a resolução apresentada (Figura 57).

Figura 57 - Resolução de dois alunos da sexta questão da Atividade 2

6.  $\frac{9 \times 8}{2!} = \frac{72}{2} = 36$      $10 - 1 = 9$   
 $3 - 1 = 2$

6.  $10P_3$   
 $9 \times 8 = 36$   
 $\frac{3A}{23}$     R: 36 maneiras

Fonte: elaboração própria.

Na sétima, a licencianda indagou aos alunos como responderam e um deles sugeriu que iniciasse a resolução descobrindo o total de agrupamentos sem João e depois, o total de agrupamentos sem Pedro e somassem, ao final, os dois resultados (Figura 58).

Figura 58 - Resolução de um dos alunos da sétima questão da Atividade 2

Handwritten work on a whiteboard showing the calculation of permutations for a group of 7 people (A, B, C, D, E, F) and a person P, excluding João and Pedro. The work shows two calculations for the number of permutations of 4 elements (A, B, C, D) in a group of 7 people, both resulting in 35 permutations.

$$\frac{7+6+5+4}{4!} = 35$$

$$\frac{4+3+5+4}{4!} = 35$$

Fonte: elaboração própria.

A licencianda registrou todos os passos no quadro e observou com a turma que foram considerados grupos repetidos, os que desconsideravam tanto João quanto Pedro. Então, percebeu-se que era preciso retirar uma vez essa contagem.

Foi discutida com a turma outra possibilidade: a de se retirar de todas as escalações possíveis àquelas em que Pedro e João estão presentes.

### 3.2.4 Quarto encontro

Nesse encontro, as licenciandas lembraram que nos problemas em que a ordem dos elementos a serem considerados em cada agrupamento não importa, é necessário que se efetue a divisão do número total de agrupamentos pela quantidade de repetições de um mesmo caso e, quando essa ordem importa, tal operação não é feita.

Em seguida, distribuiu-se a Atividade 3 juntamente com uma folha em branco e foi pedido aos alunos que a resolvessem individualmente, sem nenhum auxílio, registrando os cálculos nesta folha.

Foram consideradas as respostas de 19 alunos, que estavam presentes em todos os encontros anteriores.

Na primeira questão, 14 alunos acertaram, respondendo  $10 \times 9 \times 8$  (Figura 59b). Cinco responderam errado, sendo que desses, três dividiram por três (Figura 59a) e dois dividiram por dois (Figura 59c). Um dos alunos que dividiu por três justificou escrevendo que “três é o número de repetições”.

Figura 59 - Resolução de três alunos da primeira questão da Atividade 3

<p>① <math>\frac{10 \times 9 \times 8}{3} = 240</math></p> <p>(a)</p>	<p>1- <math>10 \times 9 \times 8 = 720</math></p> <p>(b)</p>
<p>①</p> <p>A B C D E</p> <p>10 x 9 x 8 2!</p> <p><math>\frac{10 \times 9 \times 8}{2!} = \frac{720}{2} = 360</math></p> <p>3</p> <p>(c)</p>	

Fonte: protocolo de pesquisa.

Na segunda, todos encontraram a resposta certa, mas seis não justificaram corretamente: um multiplicou 30 por 4 (Figura 60a), um resolveu por tentativa e quatro responderam 5!. Desse último grupo, dois desenharam um dos ramos da árvore de possibilidades (Figura 60c). Os demais responderam  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  (Figura 60b).

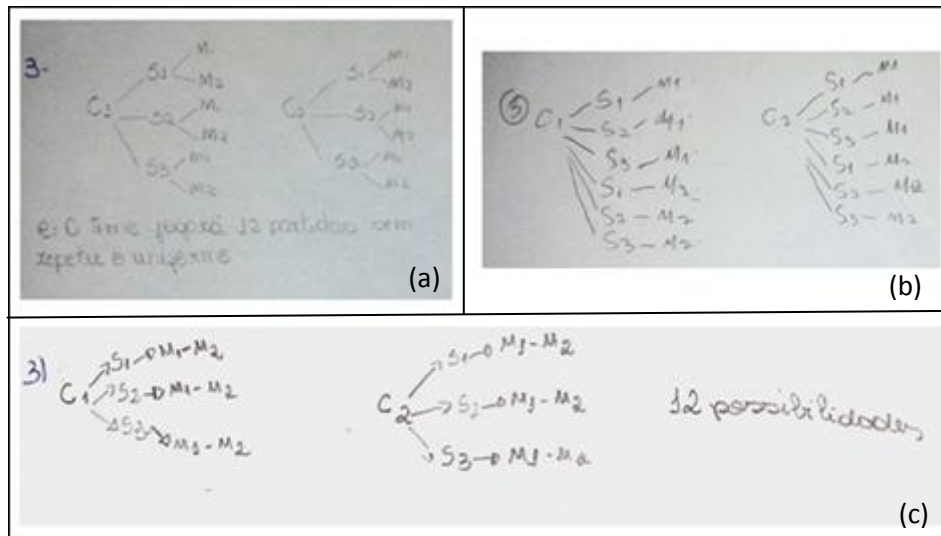
Figura 60 – Resolução de três alunos da segunda questão da Atividade 3

<p>② <math>30 \times 4 = 120</math></p> <p>(a)</p>	<p>2. A B C D E <math>5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120</math> pontos</p> <p>(b)</p>
<p>2- 1 frase - 1 resposta</p> <p>③</p> <p><math>5!</math> <math>5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120</math></p> <p>(c)</p>	

Fonte: protocolo de pesquisa.

Na terceira, 14 alunos responderam corretamente, porém desses, dois fizeram árvores diferentes (Figura 61b e 61c) das que são construídas normalmente (Figura 61a)

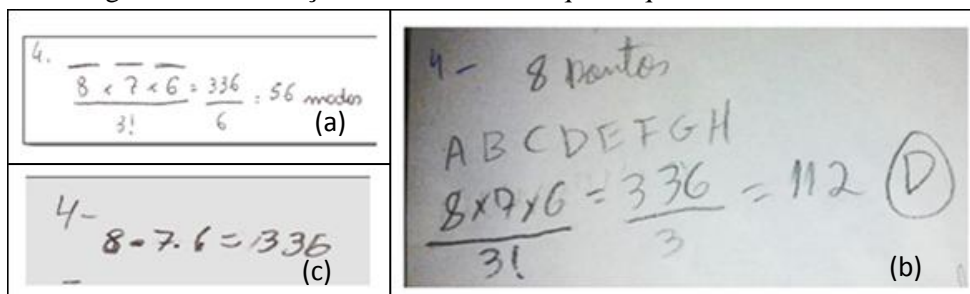
Figura 61 – Resolução de três alunos da terceira questão da Atividade 3



Fonte: protocolo de pesquisa.

Na quarta questão, 12 alunos responderam corretamente, multiplicando  $8 \times 7 \times 6$  e dividindo o resultado por  $3!$  (Figura 62a). Um aluno errou porque escreveu  $3!$  no divisor, mas dividiu por três (Figura 62b). E seis alunos erraram porque não dividiram (Figura 62c).

Figura 62 – Resolução de três alunos da quarta questão da Atividade 3

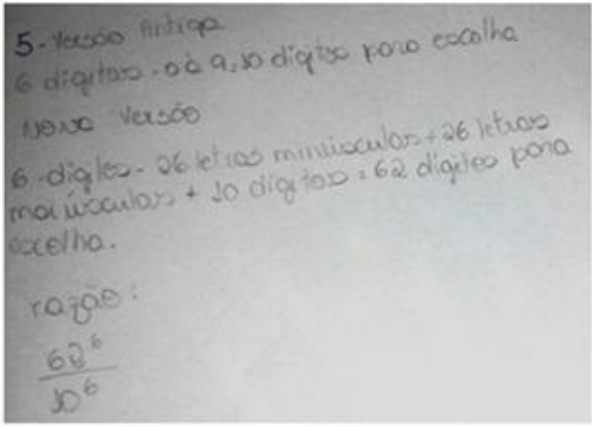
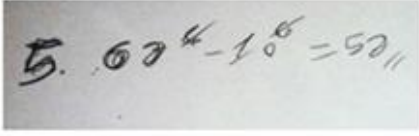
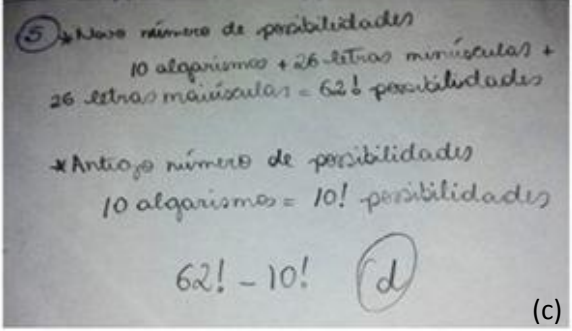


Fonte: protocolo de pesquisa.

Os alunos da Experimentação apresentaram a mesma dificuldade que os do Teste Exploratório com relação à importância da ordem. Ferreira (2013), em seu trabalho, observou essa mesma dificuldade e Almeida e Ferreira (2009, p. 5) afirmam que “uma das principais dificuldades é interpretar qual tipo de elementos combinar, qual esquema combinatório utilizar e assim ver se a ordem importa e se há repetição”.

Na quinta, apenas dois alunos acertaram (Figura 63a). Oito erraram porque não sabiam o que significava razão e por isso alguns, ao invés de dividir, subtraíram (Figura 63b e 63c). Os demais não responderam.

Figura 63 – Resolução de três alunos da quinta questão da Atividade 3

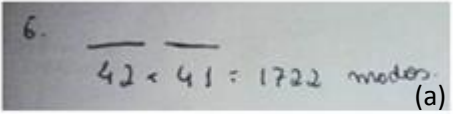
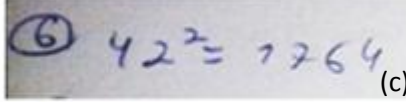
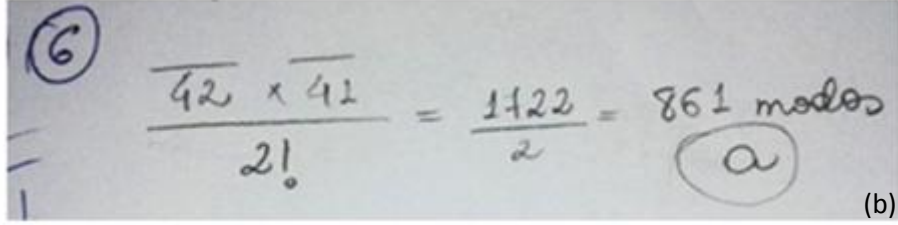
 <p>5 - Versão Antiga 6 dígitos - 0 à 9, 10 dígitos para escolha</p> <p>10 para Versão Nova</p> <p>6 dígitos - 26 letras minúsculas + 26 letras maiúsculas + 10 dígitos = 62 dígitos para escolha.</p> <p>razão: <math>\frac{62^6}{10^6}</math></p>	 <p>5. <math>62^6 - 10^6 = 5211</math></p>
(a)	(b)
 <p>5 - Novo número de possibilidades 10 algarismos + 26 letras minúsculas + 26 letras maiúsculas = 62 possibilidades</p> <p>Antigo número de possibilidades 10 algarismos = 10! possibilidades</p> <p><math>62! - 10!</math> (d)</p>	
(c)	

Fonte: protocolo de pesquisa.

Sete alunos acertaram a sexta questão (Figura 64a), dez erraram porque dividiram por 2! (Figura 64b), um errou porque respondeu  $42^2$  (Figura 64c) e um não resolveu a questão.

Novamente a dificuldade de entender quando divide. Na verdade, essa dificuldade está atrelada a outra, a de entender o problema. Ferreira (2013) afirma que problemas de combinatória apresentam dificuldades tanto para alunos quanto para professores com relação à formulação e interpretação dos enunciados.

Figura 64 – Resolução de três alunos da sexta questão da Atividade 3

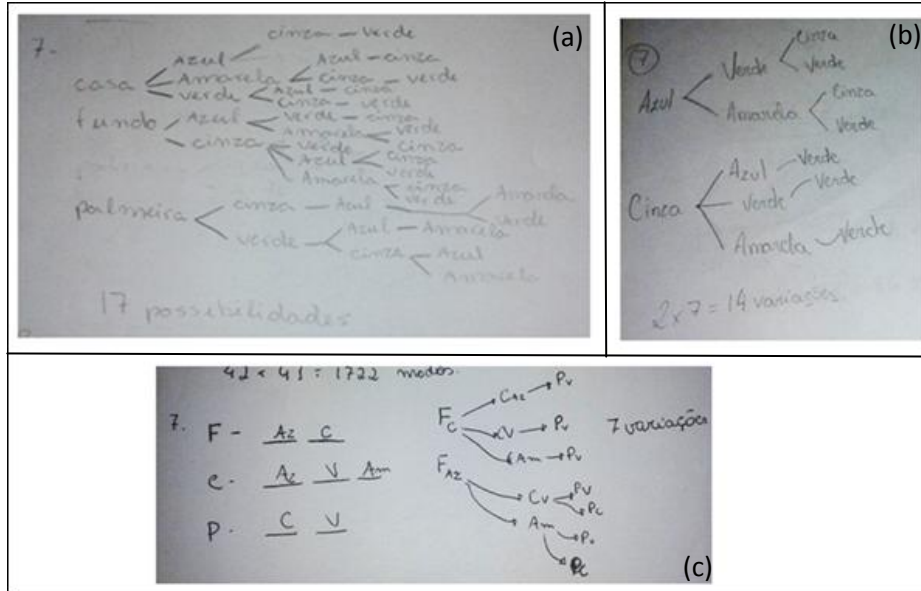
 <p>6. <math>42 \times 41 = 1722</math> modos</p>	 <p>6 <math>42^2 = 1764</math></p>
(a)	(c)
 <p>6 <math>\frac{42 \times 42}{2!} = \frac{1764}{2} = 861</math> modos (a)</p>	
(b)	

Fonte: protocolo de pesquisa.

Seis alunos responderam corretamente a sétima questão (Figura 65c). Quanto aos outros, um construiu a árvore, porém multiplicou o número de resultados encontrados por dois (Figura 65b); outro construiu três árvores e somou o número de resultados encontrados

em cada uma, mas dessas três, apenas uma estava correta (Figura 65a); oito utilizaram cálculos aleatórios como  $7 \times 6 \times 5$  dividido por  $3!$ ; e três não responderam.

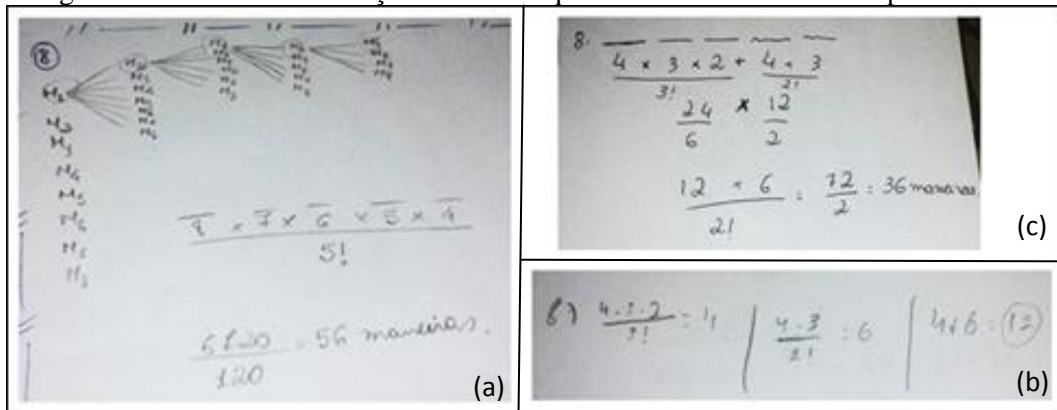
Figura 65 – Resolução de três alunos da sétima questão da Atividade 3



Fonte: protocolo de pesquisa.

Nenhum aluno respondeu a oitava questão corretamente. Três alunos consideraram a soma de todos os museus em vez de separar os nacionais dos internacionais; um dividiu por três o que deveria ter dividido por  $3!$ ; um respondeu o início de forma correta, escrevendo  $(4 \times 3 \times 2) \div 3!$  e  $(4 \times 3) \div 2!$ , mas, no final somou, embora erradamente, o que deveria ter sido multiplicado (Figura 66b); e os demais erraram toda a justificativa como, por exemplo,  $(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4)$  dividido por  $5!$  (Figura 66a).

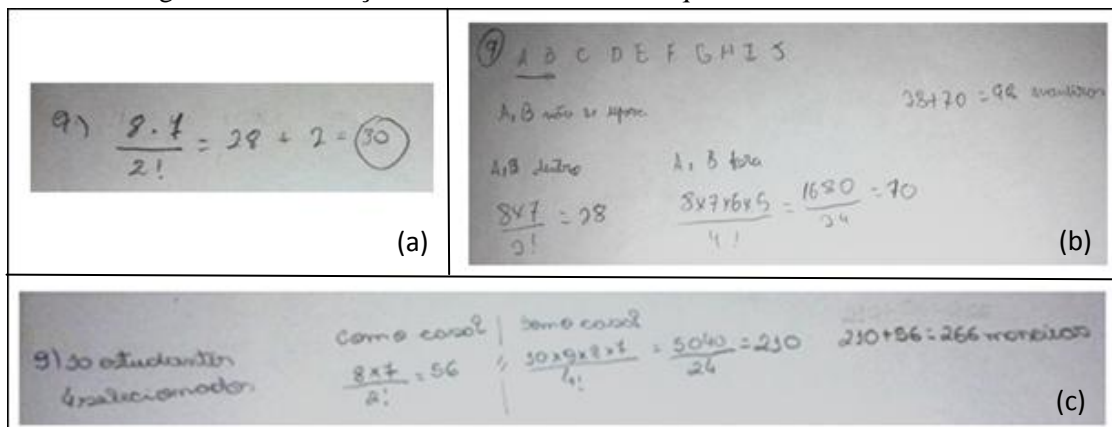
Figura 66 - Diferentes resoluções da oitava questão da Atividade 3 dada pelos alunos



Fonte: protocolo de pesquisa.

Apenas três acertaram a nona questão, resolvendo da seguinte forma:  $(8 \times 7)/2 + (8 \times 7 \times 6 \times 5)/4!$  (Figura 67b). Doze erraram e desses, dois separaram em dois grupos: com o casal e sem o casal; mas ocorreram erros de conta. Na parte sem o casal esqueceram de desconsiderar o mesmo fazendo  $10 \times 9 \times 8 \times 7$  ao invés de  $8 \times 7 \times 6 \times 5$  (Figura 67c). Dois excluíram a possibilidade de o casal ir e os demais indicaram cálculos do tipo  $(8 \times 7) \div 2!$  (Figura 67a).

Figura 67 – Resolução de três alunos da nona questão da Atividade 3



Fonte: protocolo de pesquisa.

Dois alunos acertaram a décima questão. Eles responderam diminuindo o número de grupos só com homens do total de equipes (Figura 68a). Na Figura 68a é válido observar que ao invés de  $8 \times 7 \times 6$  deveria estar  $8 \times 7 \times 6 \times 5$ . Mas como o total 70 está correto imagina-se que tenha sido um erro de escrita. Oito resolveram a questão somando o número de homens e mulheres, mas não retiraram a possibilidade de não ter mulher (Figura 68b); dois erraram com cálculos indevidos como  $6 \times 5 \times 4 \times 3$  e cinco não responderam.

Figura 68 – Resolução de três alunos da décima questão da Atividade 3

(a)

(b)

Fonte: protocolo de pesquisa.

### 3.2.5 Quinto Encontro

No quinto encontro, foi iniciada a correção da terceira Atividade. As licenciandas corrigiram as questões comentando os acertos, os erros e as diferentes resoluções (Figura 69).

Figura 69 – Correção das questões 3 e 8 da Atividade 3

3 - 2C, 3S, 2M

$\frac{C \cdot S \cdot M}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 12$

8 - 5m  
3n  
2i  
4p.p.o.m.

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$

$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$

$4 \cdot 6 = 24$

R: 24 maneiras.

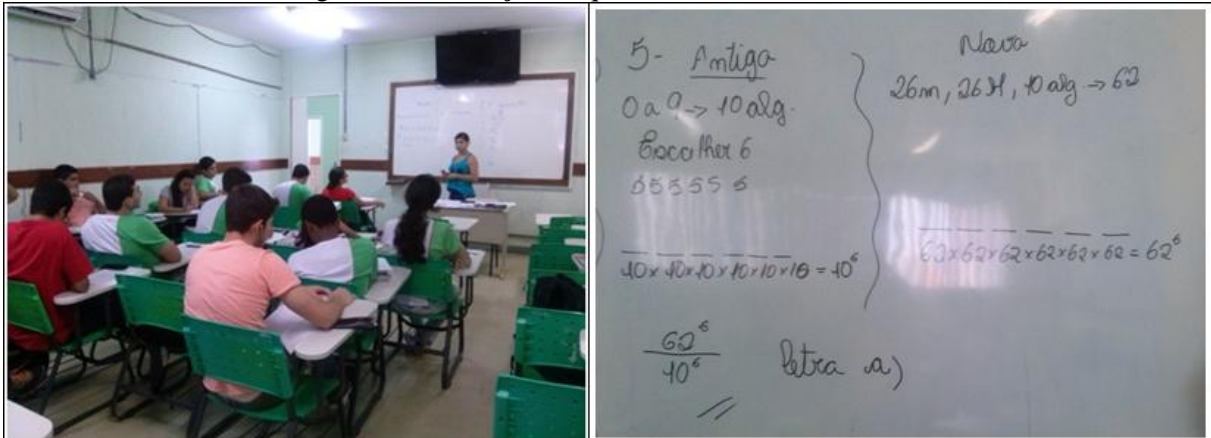
Fonte: elaboração própria.

Foi possível observar que os alunos ficaram bem atentos e interessados. Todos demonstraram entender as correções, o que erraram e porque erraram.

A quinta questão gerou mais comentários, pois muitos alunos afirmaram que não lembraram o significado de razão, então as licenciandas explicaram que razão está relacionada à divisão (Figura 70).



Figura 70 – Correção da questão cinco da Atividade 3



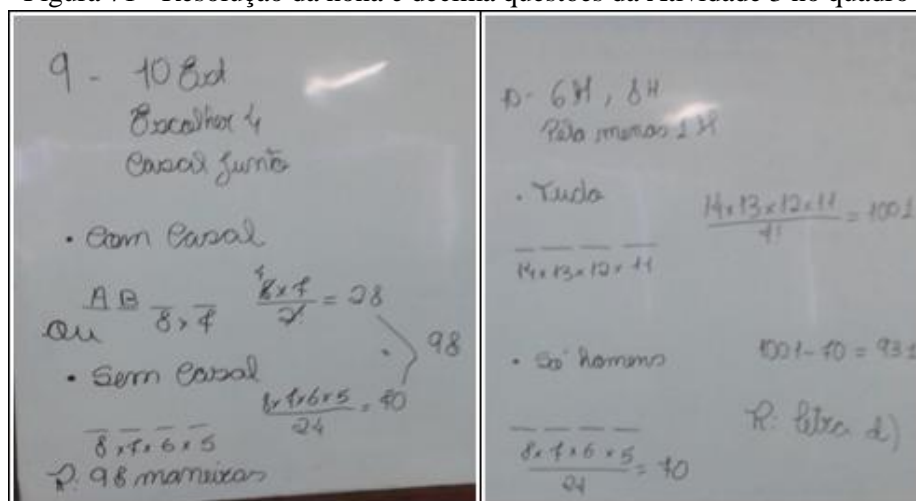
Fonte: elaboração própria.

Foi percebido, ao final desse encontro, que haveria tempo para resolver outras questões. Então, elaborou-se a Atividade 4 que continha três questões com um grau de dificuldade maior que as anteriores.

### 3.2.6 Sexto encontro

Nesse encontro, as licenciandas terminaram a correção da terceira Atividade (Figura 71) e entregaram a Atividade 4. Os alunos tiveram um tempo para resolvê-la.

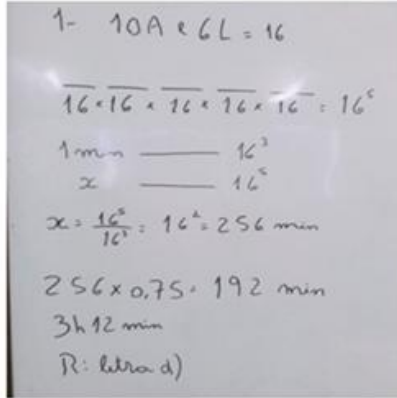
Figura 71 - Resolução da nona e décima questões da Atividade 3 no quadro



Fonte: elaboração própria.

Quando questionados sobre a primeira questão (Figura 72a), os alunos responderam que dispunham de dez algarismos e seis letras para compor a senha, num total de  $16^5$  possibilidades. Depois, usaram a regra de três para determinar o tempo total de testar todas as senhas e, por fim, calcularam o tempo necessário para testar 75% das senhas. A licencianda registrou a resolução no quadro (Figura 72b).

Figura 72 – Questão 1 da Atividade 4 com a resolução

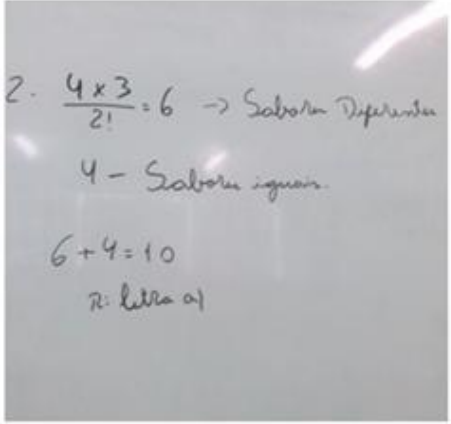
<p>1- (Mackenzie - 2006) Um hacker está tentando invadir um site do Governo e, para isso, utiliza um programa que consegue testar <math>16^5</math> diferentes senhas por minuto. A senha é composta por 5 caracteres escolhidos entre os algarismos de 0 a 9 e as letras de A a F. Sabendo que o programa testa cada senha uma única vez e que já testou, sem sucesso, 75% das senhas possíveis, o tempo decorrido desde o início de sua execução é de:</p> <p>a) 2 horas e 16 minutos.  b) 1 hora e 40 minutos.  c) 3 horas e 48 minutos.  d) 3 horas e 12 minutos.  e) 2 horas e 30 minutos.</p> <p style="text-align: right;">(a)</p>	 <p>1- 10A e 6L = 16</p> $\overbrace{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16} = 16^5$ <p>1 min ——— <math>16^5</math>  x ——— <math>16^5</math></p> $x = \frac{16^5}{16^5} = 16^4 = 256 \text{ min}$ $256 \times 0,75 = 192 \text{ min}$ <p>3h 12 min  R: letra d)</p> <p style="text-align: right;">(b)</p>
---	--

Fonte: (a) vestibular Mackenzie, 2006.

(b) elaboração própria.

Uma das licenciandas perguntou aos alunos como resolveram a segunda questão (Figura 73a). Disseram que multiplicaram 4 por 3 e dividiram o resultado por 2!. Como havia mais 4 possibilidades referentes aos sorvetes com sabores iguais, encontraram um total de seis tipos de sorvetes com sabores diferentes (Figura 73b).

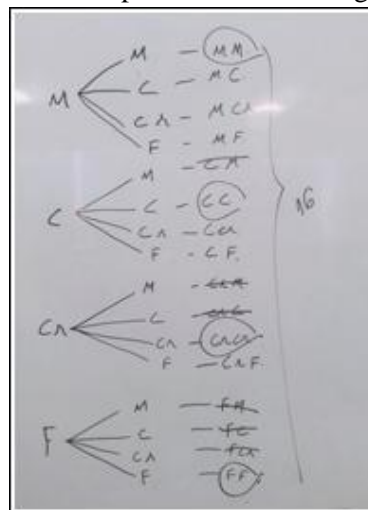
Figura 73 – Questão 2 da Atividade 4 com a resolução

<p>2- (PUC-RIO - 2013) Em uma sorveteria há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos. De quantas maneiras podemos montar uma casquinha com duas bolas nessa sorveteria?</p> <p>a) 10 maneiras b) 9 maneiras c) 8 maneiras d) 7 maneiras e) 6 maneiras</p>	
--	--

Fonte: (a) vestibular PUC-RIO 2013.  
(b) elaboração própria.

No intuito de utilizar a árvore de possibilidades para ilustrar as operações de multiplicação e divisão, a licencianda fez com o auxílio dos alunos, todas as possibilidades na árvore, mostrando todos os casos e excluindo os repetidos (Figura 74).

Figura 74 - Resolução pela árvore de possibilidades da segunda questão da Atividade 4

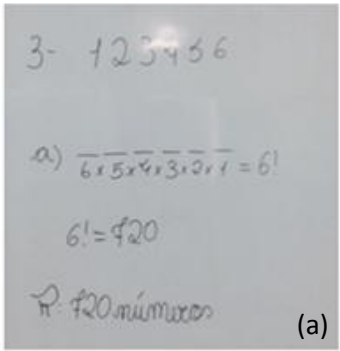
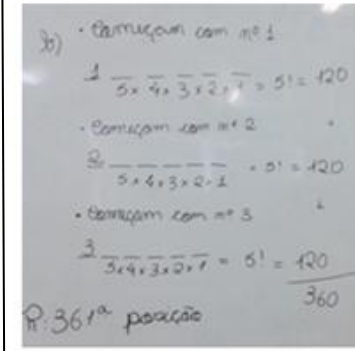


Fonte: elaboração própria.

Na terceira questão (Figura 75a), item **a**, os alunos responderam 6! e não tiveram dúvidas (Figura 75b), diferentemente do item **b** a que não conseguiram responder. Uma das licenciandas indagou os alunos quantos números iniciavam com a algarismo 1. Eles responderam 120, pois falaram que a resposta era 5!. Depois estenderam a pergunta para o início 2 e 3. Por fim, os alunos disseram que tinham que somar os resultados, acrescentando

um, pois a questão solicitava a posição do primeiro número iniciado com o algarismo 4 (Figura 75c).

Figura 75 - Resolução da terceira questão da Atividade 4

<p>3- (UFMG - 2013) Permutando-se os algarismos do número 123456, formam-se números de seis algarismos. Supondo-se que todos os números formados com esses seis algarismos tenham sido colocados numa lista em ordem crescente,</p> <p>a) Determine quantos números possui essa lista.</p> <p>b) Determine a posição do primeiro número que começa com o algarismo 4.</p>	
 <p>3- 123456</p> <p>a) <math>\overline{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6!</math></p> <p><math>6! = 720</math></p> <p>R. 720 números</p> <p>(a)</p>	 <p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Permutam com n=1</li> <li>1 <math>\overline{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5! = 120</math></li> <li>• Permutam com n=2</li> <li>2 <math>\overline{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5! = 120</math></li> <li>• Permutam com n=3</li> <li>3 <math>\overline{3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5! = 120</math></li> </ul> <p style="text-align: right;">360</p> <p>R. 361ª posição</p> <p>(b)</p>

Fonte: (a) vestibular UFMG 2013.

(b) e (c) elaboração própria.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Perante o estudo realizado, foi possível observar que os alunos conseguem resolver problemas comumente apresentados como de Combinação e de Arranjo sem utilizar fórmulas, apenas pelo PFC. Porém, segundo trabalhos afins, o ensino da Análise Combinatória tem sido realizado de forma mecânica, e os autores dos livros didáticos abordam o PFC rapidamente, como uma introdução ao tema. Quando apresentam as fórmulas, focam que as resoluções dos problemas devem ser feitas utilizando essas fórmulas.

Com essa maneira de trabalhar, o tema tem se tornado um dos mais difíceis na Matemática, pois muitas vezes, os alunos apenas aplicam técnicas de resolução sem entender o porquê de estarem usando-as.

Diante desse panorama, as licenciandas desenvolveram essa monografia, com a proposta de trabalhar a Análise Combinatória sem o uso das fórmulas de Arranjo e Combinação, comumente apresentadas nesse conteúdo e utilizando o PFC como a técnica de resolução das questões. Após a elaboração da proposta, foi realizado um teste exploratório que teve grande importância para esse trabalho, pois determinou mudanças nas Atividades de modo a se alcançar o objetivo proposto.

Percebeu-se, na aplicação do trabalho, que o raciocínio combinatório possui um caráter desafiador, o que contribui para uma maior participação dos alunos e para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Foi possível observar que a maior dificuldade dos alunos é diferenciar as questões em que os agrupamentos se repetem, e por esse motivo é necessário utilizar a divisão daqueles que não se repetem, não sendo necessária a divisão. Porém, reforçando a ideia de que, quando a ordem importa, os agrupamentos não se repetem e quando a ordem não importa vários agrupamentos vão se repetir, os alunos obtiveram uma melhor compreensão. A árvore de possibilidades, também, foi uma importante ferramenta, pois com a sua utilização os alunos conseguiram visualizar de forma mais clara a organização dos agrupamentos e o princípio multiplicativo.

É importante ressaltar que os alunos responderam à Atividade 3, conhecendo apenas o PFC e que em nenhum momento foram apresentadas as fórmulas de Arranjo e Combinação, nem os nomes, fato que não interferiu na resolução das questões.

É possível concluir que a questão de pesquisa foi respondida de forma afirmativa, pois o objetivo foi alcançado, visto que os alunos conseguiram responder a todas as questões somente com o PFC sem utilizar fórmulas.

Para trabalhos futuros sobre o tema, sugere-se a utilização de tecnologias, como por exemplo, o aplicativo Árbol, que auxilia na organização de dados com a árvore de possibilidades

Não se utilizou o aplicativo Árbol nesse trabalho, pois as licenciandas ainda não tinham conhecimento do mesmo antes da aplicação das Atividades.

Espera-se que o trabalho desenvolvido ressalte a importância do PFC e do raciocínio combinatório. É necessário destacar que as autoras deste trabalho não são contra a utilização das fórmulas, e sim, ao uso demasiado das mesmas sem a exploração do PFC. Defende-se que as fórmulas devem ser apresentadas somente após a compreensão dos problemas por meio do raciocínio combinatório e do PFC.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de; FERREIRA, A. C. Aprendendo Análise Combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 4.,2009, Ouro Preto. **Anais..**, Ouro Preto: UFOP, 2009. p.1-20.

ANASTASIOU, L. G. C. Ensinar, aprender, apreender e processos de ensinagem. Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula. **Revista Univille**, Joinville v. 7, n.1, p. 1-26, 2003.

ARAÚJO, C; et. al. **Estudo de Caso** 2008. 25 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Educativa) - Universidade do Minho, Portugal, 2008.

AZEVEDO, J; BORBA, R. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Santa Catarina, v.6, n.2, p.113-140, junho, 2013.

AZEVEDO, J; CALHEIROS, J; BORBA, R. Problemas Combinatórios Inversos Resolvidos por alunos do 9º. ano do Ensino Fundamental e do 3º. ano do Ensino Médio. **Revista Paraense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.2, n.2, p.1-22. jan./jun., 2013.

BARRETO, F.; BORBA, R. Como o Raciocínio Combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...**Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2010.p.1-10.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2010.p.1-16.

\_\_\_\_\_. Vamos Combinar, Arranjar e Permutar: aprendendo a Combinatória desde os Anos Iniciais de Escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 11., 2013, Curitiba: **Anais...** Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2013.p.1-16

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

CRESWELL, J. H. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** Tradução Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

COUTINHO, S. M. P.; ALBUQUERQUE, R. L. T. de. **Leitura e Escrita: um desafio na resolução de problemas matemáticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2013. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica23.pdf>. Acesso em: 21 maio 2015.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o Raciocínio Combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental.** 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifca Universidade Católica de São Paulo, 2001.

FERREIRA, F. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas.** 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Vale do São Francisco – Juazeiro, 2013.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisas qualitativas em Ciências Sociais.** 11. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o Ensino de Análise Combinatória para o Ensino Médio.** 2014. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: VITAE: IMPA: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática)

MORGADO, A. C. O. et. al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração,** São Paulo, v. 1, n. 3, p.5, 1996.



NIWA, S. **Uma justificativa para se ensinar Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da Contagem.** 2011. 50 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2011.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

PESSOA, C. A. S. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º. ano do Ensino Fundamental ao 3º. ano do Ensino Médio.** 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Didática de Conteúdos Específicos) – Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2009.

PONTE, J. P. da. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, v.19, n. 25, 2006. p. 1-23.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. O ensino de problemas de Raciocínio Combinatório: uma reflexão sobre a prática docente. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2., 2008, Pernambuco. **Anais...** Pernambuco: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008. p.1-7.

SABO, R. D. **Análise de livros didáticos do Ensino Médio: um estudo dos conteúdos referentes à Combinatória.** 2007. 54 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro Universitário Fundação Santo André de São Paulo, 2007.

SMOLE, K. C. S.; DINNIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2001. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?hl=ptBR&lr=&id=B0VshZSfjP8C&oi=fnd&pg=PR5&dq=smole&ots=pqRibUEIKa&sig=unwyL7yEAIoXRvDFHp7cbkUOd9w#v=onepage&q=smole&f=false>>. Acesso em: 24 jun. 2015.

SOUZA, A. C. P. de. Análise Combinatória apoiada na Metodologia de Ensino Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da resolução de problemas. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 7., 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: Universidade Estadual Paulista 2008. p.1-20.

TATAIA, P. E. C. O. **Análise Combinatória para o Ensino Médio.** 2012. 85 f. Monografia (Especialização Matemática para Professores) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 4 ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A: Atividade 1



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE

Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIRELIC**  
DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS

**105**  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014

**matemática**  
LICENCIATURA

Licenciandas: Izabela Nogueira dos Santos e Marcela Ribeiro Maria

Disciplina: Monografia – Experimentação

Nome: \_\_\_\_\_ Data: 09 / 12 / 2014

### Atividade 1

1. (HAZZAN. Adaptada) Um homem vai a um restaurante disposto a fazer uma refeição. O cardápio oferece três pratos distintos de carne, duas opções de bebida e dois pratos diferentes de sobremesa.
  - a) De quantas maneiras distintas ele pode fazer a refeição incluindo um prato de carne e uma bebida?
  - b) E se for incluída a sobremesa?
  
2. De quantos modos podemos colocar três livros A, B e C, distintos, juntos em uma estante? Consideram-se as arrumações ABC e ACB como respostas para essa questão.
  
3. Uma moeda é lançada três vezes. Qual o número de seqüências possíveis de cara (K) ou coroa (C)?
  
4. (BARROSO) Três alunos chegam atrasados em uma palestra. No auditório, só estão vazias sete cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras?
  
5. (IEZZI et. al) Aline (A), Bia (B), Claudinha (C) e Diana (D) são alunas do sexto ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

6. (DANTE) Dispomos de cinco cores e queremos pintar uma faixa decorativa com três listras de cores diferentes. De quantas maneiras isso pode ser feito?

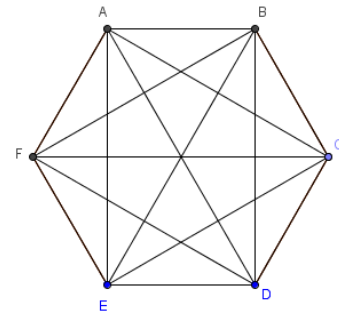
7. Um casal e seus três filhos serão colocados lado a lado em uma foto. De quantos modos a família poderá tirar a foto,

- se o pai deve ficar sempre no meio?
- se todos os filhos devem ficar entre os pais?

8. (OSEC-SP) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Então, o número possível de formas de optar é: \_\_\_\_\_.

9. (FIGUEREDO) A figura abaixo representa seis cidades: A, B, C, D, E e F. Um vendedor ambulante deve passar por todas, visitando cada cidade uma única vez.

- Se o vendedor começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?
- E se ele começar e terminar por qualquer cidade?



10. (FIGUEREDO) Uma pessoa está escolhendo um carro entre os modelos de duas marcas. A primeira marca tem três modelos que a interessa, e cada modelo pode vir em cinco cores diferentes. Enquanto que a segunda marca tem cinco modelos que a interessa, e cada um deles pode vir em oito cores diferentes. Quantas possibilidades há para se escolher o carro?

### Referências

BARROSO, J. (Ed.) **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v.2.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2004.

FIGUEREDO, L. M. **Matemática Discreta**. 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006. v.1.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.5.

IEZZI, G. et. al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

## APÊNDICE B: Atividade 2



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE

Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIRELIC**  
DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS

**105**  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014

**matemática**  
LICENCIATURA

Licenciandas: Izabela Nogueira dos Santos e Marcela Ribeiro Maria

Disciplina: Monografia – Experimentação

Nome: \_\_\_\_\_ Data: 10 / 12 / 2014

### Atividade 2

1. Ao final de uma reunião com três pessoas, cada uma cumprimentou as demais com um aperto de mão uma única vez. Quantos apertos de mão foram trocados?
2. (SILVA; BARRETO) Há doze inscritos num campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas entre os inscritos é:  
A) 12      B) 24      C) 33      D) 66      E) 132
3. (SOUZA. Adaptada) O pentatlo moderno é uma modalidade olímpica realizada pela primeira vez nos Jogos Olímpicos de Estocolmo, na Suécia, em 1912. Esse esporte é composto das seguintes modalidades: corrida, tiro, hipismo, natação e esgrima.

Figura 1 - Yane Marques, medalhista de bronze no pentatlo moderno nos Jogos Olímpicos de Londres em 2012.



Fonte: SOUZA, 2013, p. 231.

Um atleta, a fim de se preparar para esse esporte, inicialmente treinará três ou quatro dessas modalidades. De quantas maneiras distintas ele poderá escolher as três modalidades que treinará inicialmente? E as quatro?

4. (UNITAU) O número de maneiras que se pode escolher uma comissão de três elementos num conjunto de dez pessoas é:

A) 120      B) 210      C) 102      D) 220      E) 110

5. (BARROSO) Um garoto gostaria de convidar sete amigos para um acampamento, porém só há lugar para quatro amigos na barraca. Calcular de quantas maneiras o garoto pode escolher quatro amigos entre sete.

6. De um grupo de dez pessoas, serão selecionadas três para formar uma comissão. De quantos modos essa seleção será feita, se Ninna, presente no grupo, deve pertencer à comissão?

7. (PAIVA) Entre oito operadores de uma máquina, devem ser escalados quatro para o turno da noite. De quantas maneiras diferentes a escalação pode ser feita se os operadores João e Pedro não podem trabalhar no mesmo turno?

### Referências

BARROSO, J. (Ed.) **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v.2.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009.

SILVA, C. X; BARRETO, B. **Matemática Aula por Aula**. 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática**. 2 ed. São Paulo: FTD, 2013

### APÊNDICE C: Atividade 3



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE

Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIRLIC**  
DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS

**105**  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014

**matemática**  
LICENCIATURA

Licenciandas: Izabela Nogueira dos Santos e Marcela Ribeiro Maria

Disciplina: Monografia – Experimentação

Nome: \_\_\_\_\_ Data: 16 /12 / 2014

#### Atividade 3

1. (UEFS) O número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador, é:

A) 240      B) 360      C) 480      D) 600      E) 720

2. (CESGRANRIO) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

A) 180      B) 120      C) 100      D) 48      E) 24

3. (IFF -2014. Adaptada) A seleção brasileira teve um manto para vestir na Copa do Mundo de 2014, a qual foi realizada em junho no Brasil. Geralmente, o uniforme de um time de futebol é constituído por uma camisa, um short e um par de meias. Supondo que o time da seleção brasileira tenha 2 opções de camisa, 3 de short e 2 de meias, determine o número máximo de partidas que o time pode jogar sem repetir o uniforme. Resolva a questão, utilizando a árvore de possibilidades.

4. (UFF - 2005) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes

com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

- A) 8      B) 24      C) 56      D) 112      E) 336

5. (Enem - 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco cadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

- A)  $\frac{62^6}{10^6}$       B)  $\frac{62!}{10!}$       C)  $\frac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$       D)  $62! - 10!$       E)  $62^6 - 10^6$

6. (UEL - 2007) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

- A) 861      B) 1722      C) 1764      D) 3444      E) 242

7. (Enem - 2004. Adaptada) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura. O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, determine o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem. Resolva a questão, utilizando a árvore de possibilidades.





**8.** (Enem 2ª aplicação -2010. Adaptada) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madri
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

**9.** (UFOP) Numa classe de 10 estudantes universitários, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado, se dentre os estudantes existe um casal que não pode ser separado?

**10.** (Mackenzie -2008) Em um escritório, onde trabalham 6 mulheres e 8 homens, pretende-se formar uma equipe de trabalho com 4 pessoas, com a presença de pelo menos uma mulher. O número de formas distintas de se compor essa equipe é:

- A) 721      B) 1111      C) 841      D) 931      E) 1001