LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O ESTUDO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM UMA ABORDAGEM HISTÓRICA: CONTRIBUIÇÕES DE RENÉ DESCARTES

FERNANDA MANHÃES SANTOS

INGRID SUÉLY QUEIROZ DA SILVA

CAMPOS DOS GOYTACAZES

2015

FERNANDA MANHÃES SANTOS

INGRID SUÉLY QUEIROZ DA SILVA

O ESTUDO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM UMA ABORDAGEM HISTÓRICA: CONTRIBUIÇÕES DE RENÉ DESCARTES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos – Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. M.Sc. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

S237e Santos, Fernanda Manhães.
O estudo das equações quadráticas em uma abordagem histórica: contribuições de René Descartes / Fernanda Manhães Santos, Ingrid Suély Queiroz da Silva – 2015.
95 f.

Orientadora:, Ana Paula Rangel de Andrade

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos Centro. Campos dos Goytacazes (RJ), 2015.
Referências: p.76 - 80.

1. Equações quadráticas. 2. Descartes, René, 1596-1650. I. Silva, Ingrid Suély Queiroz da. II. Andrade, Ana Paula Rangel de, orient. III. Título.

CDD – 515.252

FERNANDA MANHÃES SANTOS

INGRID SUÉLY QUEIROZ DA SILVA

O ESTUDO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM UMA ABORDAGEM HISTÓRICA: CONTRIBUIÇÕES DE RENÉ DESCARTES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos – Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 17 de abril de 2015.

Banca Avaliadora:

Profª. Ana Paula Rangel de Andrade (orientadora)
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

----

Profª. Juliana Santos Barcellos Chagas
Mestre em Matemática/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

----

Profª. Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática/ UFRJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradecemos a Deus por ter nos dado força para chegar até aqui e nos proporcionar a realização desse sonho.

À nossa família, principalmente aos nossos pais, pelo amparo, incentivo e apoio nas horas difíceis.

Aos nossos irmãos e irmãs, pelo carinho e companheirismo.

À nossa orientadora Ana Paula Rangel de Andrade, pela paciência e dedicação em nos orientar.

À professora Gilmara Teixeira Barcelos e Mônica Souto da Silva Dias por toda ajuda e competência.

Aos participantes do Teste Exploratório e da Experimentação pela contribuição e colaboração nas aulas.

À banca examinadora deste trabalho, pela atenção e disponibilidade dadas ao nosso trabalho.

Por fim, somos agradecidas a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização desta pesquisa.

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago.

Paulo Freire

RESUMO

A utilização da História nas aulas de Matemática é uma forma de mostrar que o desenvolvimento dessa ciência se deu por um longo processo ligado às necessidades do homem. Muitas culturas, em diversas partes do mundo e diferentes matemáticos realizaram estudos sobre conteúdos presentes nos livros didáticos. Descartes foi um destes que revolucionou a Filosofia e a Matemática e uniu a Álgebra e a Geometria em uma só linguagem. O objetivo desse trabalho é desenvolver um estudo sobre a resolução de equações quadráticas, utilizando o método geométrico desenvolvido por Descartes. Para tal, foram elaboradas e experimentadas Atividades para alunos da 1.ª série do Ensino Médio. A proposta didática foi dividida em cinco partes: a Introdução que contém um vídeo e uma apresentação em *slides*; a Atividade 1, de requisitos; a Atividade 2, que contém os três casos estudados por Descartes e exercícios correlatos; a Atividade 3, com duas questões, e três *applets*. A pesquisa, de caráter qualitativo, teve os dados coletados por meio de questionário, diário de bordo, gravação em áudio, observação direta e respostas das atividades. Os resultados confirmam a importância de se trabalhar com a História da Matemática em sala de aula, e mostram que o método geométrico de Descartes agregou conhecimento ao estudo de equações quadráticas.

Palavras-Chave: História da Matemática. René Descartes. Equação Quadrática.

ABSTRACT

The use of History in Mathematics classes is a way to show that the development of this science came by way of a long process linked to the needs of human beings. Many cultures and mathematicians throughout the world have conducted studies on the material present in textbooks. Descartes was one of them; he revolutionized Philosophy and Mathematics while uniting Algebra and Geometry in a single language. The objective of this work is to develop a study on the resolution of quadratic equations utilizing the geometric method developed by Descartes. To do so, Activities for students of the 1^{st} year of middle school were elaborated and tested. The didactic proposal was divided into five parts: the Introduction, which contains a video and slide presentation; Activity 1, containing requirements; Activity 2, featuring three cases studied by Descartes along with correlating exercises; Activity 3, with two questions; and three applets. This study, which is qualitative, collected data with a questionnaire, journal, audio recordings, direct observation, and the results of activities. The study's results confirm the importance of using the History of Mathematics in the classroom and show that Descartes' geometric method added knowledge to the study of quadratic equations.

Keywords: History of Mathematics. René Descartes. Quadratic Equation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática está presente na vida do homem desde os tempos antigos. Os conteúdos matemáticos estudados atualmente passaram por um longo processo histórico. De acordo com D'Ambrósio (1999), a história da humanidade e a história da Matemática estão intimamente ligadas:

> [...] é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e as interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino de várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade (D'AMBROSIO, 1999, p. 97).

O século XVII foi um período importante para a Matemática. Nessa época, era comum o intercâmbio entre grupos de matemáticos que se empenhavam em resolver diversos problemas (WAGNER, 1991).

René Descartes (1596-1650) viveu durante este período e destacou-se pela associação que fez entre a Geometria e a Álgebra, conhecida hoje por Geometria Analítica. Antes dele, esses dois ramos da Matemática eram tratados de forma desconectada (WAGNER, 1991).

Descartes criou um método novo para o conhecimento do mundo por meio da ciência e do raciocínio, e o expôs em *Discours de la Méthode pour bien conduire la Raison e chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e procurar a Verdade nas Ciências). Filósofo revolucionário, centrou este método na dúvida, pois para ele duvidar era sinônimo de pensar. Daí sua famosa frase: "Penso, logo existo" (WAGNER, 1991).

Um dos anexos desse livro, *La Géométrie*, tinha como um dos objetivos obter construções geométricas para as operações algébricas. Em uma pequena parte, Descartes desenvolveu um método geométrico para obtenção das soluções positivas de equações quadráticas (WAGNER, 1991).

Essa relação entre a Álgebra e a Geometria é destacada por Lorenzato (2010) quando afirma que é necessária uma conexão entre esses dois ramos. Segundo o autor, para que isso ocorra, é importante identificar pontos de conexão entre os campos, e respeitar as suas características.

Neste trabalho, a equação quadrática é representada por meio de dois tipos de registros: o “método de Bhaskara”, que é algébrico e o método de Descartes, que é geométrico. A comparação entre os dois métodos é feita buscando-se estabelecer tais conexões.

Duval (2003) chama a atenção para as mudanças de registro, neste caso, algébrico e geométrico, que segundo ele, são necessárias para que o aluno compreenda as ideias matemáticas. O autor afirma que os fracassos e bloqueios dos alunos aumentam consideravelmente quando uma mudança de registro se torna necessária ou quando uma mobilização simultânea de dois registros é exigida.

Quanto ao estudo de equações, Paz et al. (2011) reforça a sua importância, lembrando que este tema se encontra presente em quase todos os domínios da Matemática, tanto como objeto de estudo quanto como ferramenta para outros estudos. Como exemplos, pode-se citar: (i) a lei da queda dos corpos $s = \frac{a}{2}t^2$ e a equação horária da posição de um móvel em função do tempo $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (SAMPAIO; CALÇADA, 2005, p. 34, 39); (ii) o número de diagonais de um polígono convexo de **n** lados $d = \frac{n.(n-3)}{2}$ (DOLCE; POMPEO, 2005, p.137); (iii) a distância que um automóvel percorre após a frenagem $d = \frac{v}{10} + \frac{v^2}{250}$ (IMENES et al, 1992, p.13).

Diversos povos em diferentes épocas históricas estudaram esse tipo de equação. A compreensão dos processos de resolução dá pistas sobre temas atualmente presentes no ensino de Matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2002) afirmam que é importante para o aluno entender que o conhecimento matemático é construído por meio de um processo histórico, em relação às condições sociais, políticas e econômicas de uma época específica, permitindo a obtenção de uma visão crítica da ciência. Por exemplo, o uso da Geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas diferentes de pensar e representar realidades em momentos históricos distintos.

Assim, a História da Matemática é um recurso que pode instigar a curiosidade dos alunos além de fazê-los compreender como os modos de saber e fazer das civilizações foram gerados, as causas que levaram à sua necessidade e, principalmente, a maneira como foram organizados por determinada civilização. Segundo os PCN:

> [...] conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1998, p. 42).

Dessa forma, é proposto um trabalho que tem como questão de pesquisa: “De que modo o método de resolução de equações quadráticas de Descartes pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem deste tema?”.

O objetivo geral é desenvolver um estudo sobre a resolução de equações quadráticas, utilizando o método geométrico desenvolvido por Descartes. Os objetivos específicos são: (i) identificar as contribuições históricas de diversos povos (egípcios, babilônicos e chineses) na resolução de equações quadráticas; (ii) compreender as contribuições históricas de Descartes na resolução de equações quadráticas e (iii) comparar o método de resolução de equações quadráticas desenvolvido por Descartes com o “método de Bhaskara”.

Este trabalho consta de três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, encontra-se o referencial teórico fundamentado na importância da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, na equação quadrática e no uso das tecnologias digitais no ensino de Matemática.

No segundo capítulo, encontram-se os aspectos metodológicos. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, cujo desenvolvimento ocorreu por meio de um estudo de caso. Foram utilizados na coleta de dados um questionário, o diário de bordo, a gravação em áudio, a observação direta e as respostas das atividades. Na seção referente à elaboração da proposta didática, são descritas todas as atividades desenvolvidas bem como seus objetivos.

O terceiro capítulo apresenta o relato dessas aplicações, tanto no teste exploratório quanto na experimentação. É descrito e analisado todo o desenvolvimento do trabalho, o qual foi apresentado para uma turma de 1.ª série do Ensino Médio, público-alvo desta pesquisa, de uma escola pública de Campos dos Goytacazes. Além disso, são analisados os dados obtidos por meio de um questionário elaborado na proposta didática.

Nas considerações finais, destacam-se alguns aspectos relevantes sobre o desenvolvimento deste trabalho e a resposta à questão de pesquisa.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o referencial teórico que subsidiou o processo de elaboração deste trabalho monográfico.

1.1 A importância da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem em Matemática

A Matemática ensinada hoje nas salas de aula é resultado de processos históricos desenvolvidos pela humanidade que originaram estratégias para resolver problemas do cotidiano e garantir sua sobrevivência. Os conceitos matemáticos transcorrem todos os momentos históricos e todas as civilizações em seus modos de saber e fazer. “Compreender como esses modos de saber/fazer foram gerados, os fatores que levaram a sua emergência e, principalmente, o modo como foram organizados intelectualmente por determinada civilização, pode servir como um método para ensinar Matemática” (LARA, 2013, p.52).

Nessa linha, Groenwald (2004) informa que a História da Matemática é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir como alguns conceitos e métodos que aprenderá em aula foram criados. Isso possibilita que o aluno faça relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens.

D’Ambrósio (1996) cita algumas finalidades da História da Matemática para alunos, professores, pais e público em geral.

> 1. situar a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. mostrar que a matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. destacar que essa matemática teve sua origem nas culturas da Antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio [...] (D’AMBROSIO, 1996, p.10).

Além dos propósitos apresentados por D’Ambrósio, Baroni, Teixeira e Nobre (2009) ressaltam o papel da História da Matemática na sala de aula e apontam que o seu uso pode servir a diversas situações:

> a) como “elemento mobilizador em salas de aulas numerosas ou com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem”;
> b) na “educação de adultos, promovendo a oportunidade ao aluno de observar, ao longo da história, o esforço de pessoas para superar dificuldades semelhantes àquelas que eles possam estar vivenciando”;
> c) com “alunos bem dotados, que possam estar se sentido desestimulados perante a classe, satisfazendo ou dando resposta a questionamentos como “o quê?”, “como?”, “quando?”;
> d) “como estímulo ao uso da biblioteca”;
> e) como humanizadora da Matemática, apresentando suas particularidades e figuras históricas;
> f) como articuladora da “Matemática com outras disciplinas como Geometria, História e Língua Portuguesa (expressão em linguagem, interpretação de texto, literatura)”;
> g) por meio da “dramatização ou produção de textos para sensibilizá-los sobre as realidades do passado e presente, apresentando as dificuldades e diferenças de cada época” (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2009, p. 172).

Neste trabalho monográfico, utilizou-se a História da Matemática como cita D’Ambrósio (1996) no primeiro e segundo itens, pois abordou-se o estudo da equação quadrática por diferentes povos (egípcios, babilônicos, chineses, etc.) mostrando que existem outras formas de apresentar determinados temas, diferentes das praticadas nas escolas.

Explorou-se, também, os aspectos citados por Baroni, Teixeira e Nobre (2009) nos itens *e* e *f*, apresentando a figura histórica de René Descartes, e articulando a História e a Geometria.

Complementando os autores citados, os PCN chamam a atenção para o fato de que “a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática” (BRASIL, 2006, p.86).

Nesta pesquisa, buscou-se recuperar o estudo feito por Descartes sobre o método para obtenção das soluções positivas de equações quadráticas.

Além disso, foram utilizados problemas históricos relacionados à equação quadrática mostrando aos alunos que há tempo já se estudava esse tema, porém com uma linguagem diferente da utilizada atualmente. Roque e Pitombeira (2012) explicam que a Matemática se desenvolveu e continua a se desenvolver a partir de problemas e indicam que a função da História seja a de exibi-los.

> As situações que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais rico. Podem ter sido problemas quotidianos (contar, fazer contas); problemas relativos a [sic] descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai, por que as estrelas giram?); problemas filosóficos (o que é

> conhecer, como a Matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou ainda, problemas matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). Na história da Matemática, encontramos motivações que misturam todos estes tipos de problemas (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. IX).

Em relação à presença da História da Matemática nos livros didáticos, Mendes (2001) afirma que estes, muitas vezes, reduzem a história a biografias de alguns matemáticos famosos e de fatos sobre o desenvolvimento da matemática, indicados cronologicamente. Ao contrário, os PCN reforçam a ideia de que a História da Matemática não deve se limitar à descrição de fatos ocorridos no passado ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos.

As graduandas utilizaram neste trabalho a História da Matemática no papel principal. O conhecimento do método de Descartes permitiu criar Atividades e utilizá-las nas aulas com o objetivo de desenvolver conceitos. A História não foi utilizada com o intuito de informar aos alunos sobre fatos, datas e nomes, mas buscou-se uma visão ampla dos mesmos em relação ao conteúdo. Segundo Brito (2007):

> A história da matemática não deve fazer parte das aulas como coadjuvante, por meio da narração de fatos isolados, mas deve sugerir caminhos para a problematização em forma de atividades que visem à construção de conceitos por parte dos alunos. É importante que os professores tenham a oportunidade de elaborar atividades com esta história e de utilizá-la em suas aulas, pois, nesse processo pressupõe a articulação entre pesquisa e ensino, teoria e prática, os docentes se percebem produtores de novos conhecimentos e a história da matemática assume plenamente seu potencial de formação (BRITO, 2007, p. 15).

Gasperi e Pacheco (s.d.) consideram que com a História da Matemática, tem-se a possibilidade de investigar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais unida com as outras disciplinas, mais criativa e mais humanizada.

1.2 Equação Quadrática

Neste item, serão tratados assuntos referentes à equação quadrática: os primeiros indícios em algumas civilizações, matemáticos que a estudaram e a evolução da sua escrita algébrica.

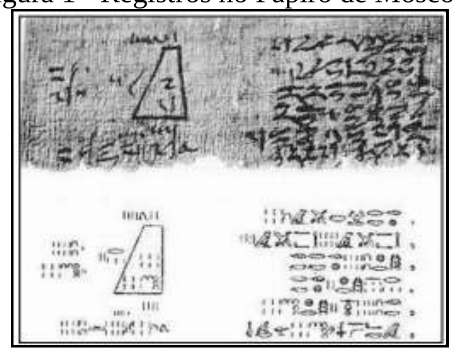
1.2.1 Os primeiros indícios da equação quadrática em algumas civilizações

A equação quadrática passou por um longo processo histórico até chegar ao modelo utilizado, atualmente, nos livros didáticos. Os primeiros indícios de problemas, envolvendo equação quadrática, são datados entre os séculos XX e II a.C. e foram encontrados em tabletes e papiros deixados pelas civilizações do Egito, da Babilônia e da China, entre outras (NOBRE, 2003).

A matemática egípcia era prática. Estava, por exemplo, associada à solução de problemas causados pelas cheias do rio Nilo e possibilitou a construção de estruturas hidráulicas, reservatórios de água, canais de irrigação e drenagem de regiões alagadas (CASTELO, 2013).

No século XVIII foram encontrados vários papiros em escavações no Egito, dentre eles o Papiro de Moscou (CASTELO, 2013). De acordo com Nobre (2003) este papiro foi escrito no século XVII a. C. e nele são encontrados exercícios envolvendo equações do tipo $ax^2 = b$ como: “Um retângulo tem área 12. Sua largura é ½ do comprimento + ¼ do comprimento. Determine os lados do retângulo” (NOBRE, 2003, p. 2). A Figura 1 mostra um dos registros contidos no Papiro de Moscou.

Figura 1 - Registros no Papiro de Moscou



Fonte: ZUIN, 2013, p. 4.

Embora os egípcios tenham inventado técnicas para resolver problemas matemáticos sobre áreas de algumas figuras planas como a do círculo, volumes de alguns sólidos como do tronco de pirâmide e equações do 1º grau, não foram encontrados registros nos papiros do tratamento da equação quadrática utilizado por eles (FRAGOSO, 2000a).

A civilização babilônica, ao contrário dos egípcios, que tinham um sistema de base 10, possuía um sistema de base 60 bem desenvolvido e que trazia grandes facilidades para os cálculos, devido à quantidade de divisores naturais que esse número possui (CASTELO, 2013).

De acordo com Boyer (1996), os babilônicos estudaram equação quadrática de três termos para solucionar problemas antigos.

Os babilônicos tinham um método próprio para resolver equações quadráticas. Segundo Nobre (2003), no tablete babilônico BM 13901 foram encontrados problemas, seguidos de suas resoluções, envolvendo esse tipo de equação.

Um desses escritos é: “Eu subtraí o lado de um quadrado de sua área e o resultado é 870” (NOBRE, 2003, p. 5). De acordo com Fragoso (2000a) a medida do lado do quadrado era encontrada pelos babilônicos da seguinte forma:

> Tome a metade de um (coeficiente de x), que é 0,5, e multiplique 0,5 por ele mesmo, o que dá 0,25. Some o resultado a 870 (termo independente), o que dá 870,25. Isto é, na verdade o quadrado de 29,5 que, somado à metade de um, vai dar o lado do quadrado, que é igual a 30 (FRAGOSO, 2000a, p.57)

Nota-se no texto acima a estrutura de uma “receita”. Nesse exemplo, a forma para se encontrar a medida do lado do quadrado era apresentada de maneira retórica (verbal). Este assunto será abordado no item 1.2.3.

Outro texto de grande importância na história da equação quadrática está em um dos escritos matemáticos mais antigos da China, a obra *Chiu Chang Suan Shu*, cuja tradução é “Nove capítulos sobre a arte matemática”. Esta produção tem origem desconhecida, mas sabe-se que foi impressa em 1084 (NOBRE, 2003). Nela encontra-se o seguinte problema:

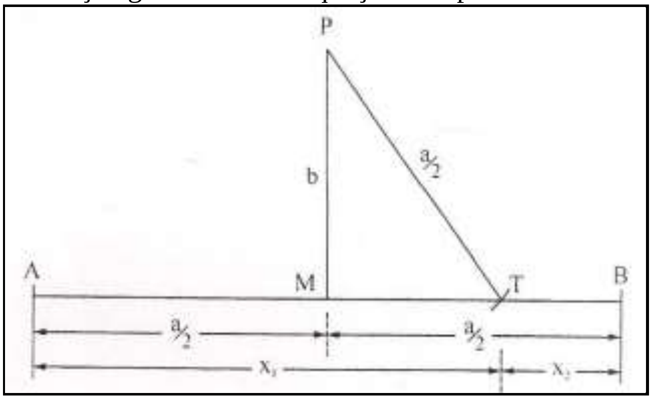
> Agora tem-se uma cidade de forma quadrada, cercada por uma muralha, cujos comprimentos de seus lados são desconhecidos. No meio de cada lado há um portão aberto. Saia do portão norte, no sentido norte e ande 20 passos para encontrar uma árvore. Saia do portão sul, no sentido sul e ande 14 passos, então vire-se no sentido oeste e ande mais 1775 passos. A partir deste ponto pode-se ver a árvore. Pergunta: Quanto mede o lado da cidade? (1 passo = 6 pés ≈ 1,33m) (NOBRE, 2003, p. 6).

Todos os problemas citados nessa seção fazem parte da sequência didática proposta neste trabalho monográfico.

1.2.2 Matemáticos que estudaram a equação quadrática

Além dos indícios deixados por algumas civilizações, muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da equação quadrática. Um deles foi Pitágoras (572 - 497 a.C.) que resolveu por construção geométrica equações quadráticas do tipo $x^2 + b^2 = ax$ com ***a*** e ***b*** representando medidas de segmentos de reta (GARBI, 2006). A construção abaixo ilustra as soluções x_1 e x_2 encontradas geometricamente pelos pitagóricos, desde que $b \leq \frac{a}{2}$ (Figura 2).

Figura 2 – Solução geométrica da equação do tipo $x^2 + b^2 = ax$



Fonte: GARBI, 2006, p.30.

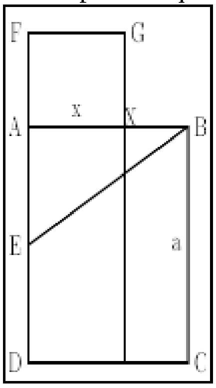
Outro matemático que estudou as equações quadráticas foi Euclides (c.300 a.C.). De acordo com Nobre (2003), a resolução da equação $x^2 + ax = a^2$ pode ser encontrada na proposição 11 do livro II de sua obra, *Elementos*.

Pedroso (2010) traduz esse processo para a linguagem atual da seguinte forma:

> 1. construir o quadrado ABCD sobre o segmento dado AB;
> 2. tomar o ponto médio, E, de DA;
> 3. tomar F sobre o prolongamento de DA de maneira que EF = EB;
> 4. construir o quadrado sobre o lado AF no mesmo semi-plano de BC.
> 5. o vértice X desse quadrado, pertencente ao segmento AB, é a solução do problema (PEDROSO, 2010, p. 5).

Em seguida, este mesmo autor apresenta a construção referente ao processo citado acima (Figura 3).

Figura 3 - Solução geométrica para a equação $x^2 + ax = a^2$



Fonte: PEDROSO, 2010, p.5.

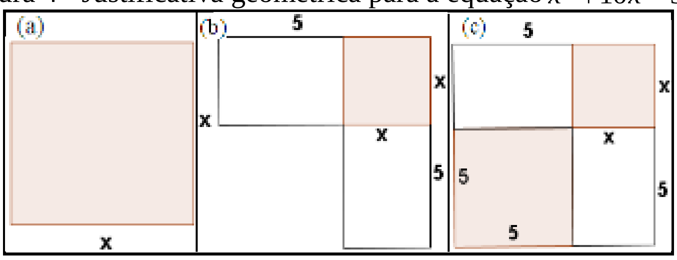
Outro matemático que também tratou de equações quadráticas foi Al-Khwãrizmi (c. 780-850). Apresentou uma resolução retórica (verbal), além da justificativa geométrica, conhecida atualmente como método de completar quadrados (FRAGOSO, 2000a).

A resolução do problema "Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?" dada por Al-Khwãrizmi é a seguinte:

> Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome então a raiz quadrada disto, que é igual a oito, e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove (NOBRE, 2003, p.18).

Utilizando o método de completar quadrados, a justificativa geométrica para o problema acima, que equivale resolver a equação $x^2 + 10x = 39$ é:

Figura 4 - Justificativa geométrica para a equação $x^2 + 10x = 39$



Fonte: Elaboração própria.

As etapas mostradas na Figura acima equivalem a: (i) construir um quadrado de lado *x* (Figura 4a); (ii) construir dois retângulos de área 5*x*, pois 2.5*x* = 10*x* (Figura 4b); e (iii) construir um quadrado de área 25 que completa a Figura 4b de área $x^2 + 10x = 39$ (Figura 4c). Assim a área do quadrado da Figura 4c é 39 + 25 = 64 e a medida *x* do quadrado inicial é 3 (IMENES et al, 1992).

Outro matemático que se destacou no estudo das equações quadráticas foi Bhaskara (1114 – 1185). Para Nobre (2003), os estudos desse matemático que eram na área da Astronomia e da Matemática, tinham como referência os dos seus antecessores Ãryabhata e Brahmagupta.

A expressão "fórmula de Bhaskara"[1], que é dada ao método utilizado para resolução da equação quadrática, estabeleceu-se no Brasil em 1960. Em outros países, esse método recebe o nome de fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau (REFATTI; BISOGNIN, 2005). Segundo Roque (2012), não se pode atribuir a Bhaskara a descoberta da fórmula, pois na época em que viveu, não havia símbolos para expressar os coeficientes genéricos **a**, **b** e **c** de uma equação como $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Segundo a autora, isto só foi proposto por Viète no século XVI.

François Viète (1540 – 1603) é reconhecido como fundador da álgebra simbólica, pois foi o grande responsável pelo desenvolvimento da álgebra no período da Renascença europeia. Ele introduziu uma convenção no tratamento das equações algébricas, utilizando letras do alfabeto para representar grandezas conhecidas e desconhecidas (NOBRE, 2003). Mais especificamente Viète (Figura 5) utilizou vogais na representação de incógnitas e consoantes na representação de constantes (SANTOS, 2011).

---

[1] A equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) pode ser resolvida usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ conhecida como Fórmula de Bhaskara (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 121).

Figura 5 - Viète

Fonte: GARBI, 2006, p.124.

Este matemático percebeu algumas relações entre os coeficientes e as raízes das equações quadráticas e as apresentou em sua obra *De Æquationum Recognitione ET Emendatione Tractatus Duo.* Neste caso, trata-se da soma e produto das raízes x_1 e x_2 na equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, a saber, $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ respectivamente (NOBRE, 2003).

René Descartes (1596-1650), um dos matemáticos mais importantes do século XVII também se dedicou ao estudo das equações quadráticas. Assim como Euclides e Pitágoras, utilizou um método geométrico para resolver esse tipo de equação, considerando as raízes positivas, que será abordado no item 2.2.3 desta monografia.

1.2.3. Evolução da linguagem algébrica

Pode-se perceber que a equação quadrática era resolvida, pela maioria dos matemáticos citados, por métodos geométricos diferentemente dos dias de hoje em que predomina a resolução algébrica. Isso se deve ao fato de que a linguagem algébrica ainda não tinha se estabelecido até o século XVI.

Essa linguagem evoluiu até chegar à álgebra simbólica utilizada atualmente. Dividiu-se em dois estágios: a álgebra antiga e a álgebra moderna. A álgebra antiga (1700 a.C. a 1700 d.C.) passou por três períodos que foram o retórico, o sincopado e o simbólico (VAILATI; PACHECO, s.d.).

O retórico é o período em que eram utilizadas descrições de procedimentos e aplicadas instruções para resolver problemas específicos. Pode-se perceber esse estilo na álgebra babilônica, egípcia e na álgebra geométrica grega (VAILATI; PACHECO, s.d.). Também é possível encontrar esse estilo nas resoluções de problemas fornecidos por Al-Khwãrizmi. De acordo com Trovon (2012), antes do século XV, o método de solução das equações quadráticas era o retórico.

No estilo sincopado, era utilizada a abreviação de palavras. Este era o passo inicial a caminho da escrita algébrica. Pode-se observar esse estilo no quadro abaixo, na equação escrita por Viète. E o simbólico, que é utilizado atualmente, passou por inúmeras transformações até se tornar estável (VAILATI; PACHECO, s.d.). A figura abaixo apresenta a evolução da linguagem algébrica da equação quadrática (Figura 6).

Figura 6 - Evolução da linguagem algébrica da equação quadrática $x^2 + 5x - 6 = 0$

Notação: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Ano	*Matemático*	*Representação*
1494	Luca Pacioli (itália)	Trouame . 5 . n°. che gioto al suo qdrat° facia 6
1514	Vander Hoecke (Inglaterra)	I Se. + 5 Pri. dit is ghelijc 6
1521	F. Ghaligai (Itália)	1 ☐ e 5 C° - 6 numeri.
1525	Christoph Rudolff (Alemanha)	Sit 1ʒ aequatus - 5 ℛ + 6
1545	Girolamo Cardano (Itália)	Quadratus p 5 rebus aequalis 6
1553	Michael Stifel (Alemanha)	5 ℛ + 1ʒ. aequata 6
1559	J. Buteo (Itália)	1 ◊ P 5p [P 6
1572	Rafael Bombelli (Itália)	$\overset{2}{1}$ p. $\overset{1}{5}$ Equale à 6
1585	Simon Stevin (Holanda)	$\overset{②}{1} + \overset{①}{5}$ egale à 6
1591	François Viète (França)	Q p 5N m 6 aequatur 0
1619	Jobst Bürgi (Suiça)	$\overset{ii}{1} + \overset{i}{5}$ eguales à 6
1631	Thomas Harriot (Inglaterra)	aa + 5a ═══ + 6
1637	Renè Descartes (França)	$x^2 + 5x - 6 \propto 0$
1693	John Wallis (Inglaterra)	$x^2 + 5x - 6 = 0$

Fonte: TROVON, 2012, p.2

Inicialmente, a Álgebra esteve associada ao estudo da resolução de equações. Mais tarde, Al-Khwãrizmi, usou o termo “Álgebra” para designar a operação de transposição de termos, na resolução de uma equação. Em meados do século XIX, a Álgebra passou por uma grande evolução, com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e a certeza de que não existem métodos algébricos gerais para a resolução de equações de grau superior ao quarto. Iniciou-se, então, o estudo de estruturas abstratas como grupo, espaço vetorial, anel e corpo, caracterizando o surgimento da Álgebra moderna (PONTE et al, 2009).

1.3 Uso de Tecnologias digitais na Educação Matemática

Este item trata da importância das tecnologias digitais utilizadas neste trabalho, que são: o vídeo produzido no programa *Windows Movie Maker*, os *slides* elaborados no *Microsoft Power Point* e os *applets* construídos no *software* GeoGebra.

A evolução tecnológica tem influenciado cada vez mais os diversos setores da sociedade. As visualizações e movimentações possibilitadas pelos recursos digitais concedem inúmeras possibilidades para o processo de ensino e aprendizagem. O vídeo é um exemplo de um recurso digital que pode ser extremamente eficaz na sala de aula por inúmeras razões.

Segundo Moran (1995, p.28):

> O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não-separadas. Daí a sua força. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no imaginário), em outros tempos e espaços.

Machado e Mendes (2013) afirmam que o vídeo explora todas as possibilidades de combinar som, imagem e movimento para contar histórias, provocar emoções, criar sonhos, acionar a imaginação das pessoas e transmitir novas formas de linguagens em que estão aplicados o pensar e o sentir. De acordo com esses autores, o vídeo permite que os alunos vejam a história exatamente como ela aconteceu. Além de poder trazer diversas informações para a sala de aula, serve também para expor os estudantes a pessoas, lugares e eventos que outros recursos de aprendizagem não poderiam.

Moran (1995) menciona algumas propostas de utilização dos vídeos. Dentre elas, a da ilustração, a qual aproxima o aluno de cenários e épocas históricas desconhecidas:

> O vídeo muitas vezes ajuda a mostrar o que se fala em aula, a compor cenários desconhecidos dos alunos. Por exemplo, um vídeo que exemplifica como eram os romanos na época de Júlio César ou Nero, mesmo que não seja totalmente fiel, ajuda a situar os alunos no tempo histórico. Um vídeo

> traz para a sala de aula realidades distantes dos alunos, como por exemplo a Amazônia, a África ou a Europa. A vida aproxima-se da escola através do vídeo (MORAN, 1995, p.30).

Neste trabalho monográfico, o cenário descrito por meio do vídeo foi a França do século XVII. Como defendido por Moran, mostrou-se ao aluno informações sobre um tempo histórico, muitas vezes desconhecido ou esquecido por ele.

Porém, Machado e Mendes (2013) informam que o vídeo não deve servir para uma aula inteira, simplesmente para preencher o tempo, mas sim como um reforço para uma unidade de ensino. Neste trabalho, o vídeo atendeu a essa finalidade, ou seja, acrescentou informações ao tema principal, que é o método desenvolvido por Descartes na resolução de equações quadráticas, como fatos da vida de Descartes e acontecimentos do século XVII.

O vídeo utilizado, nesse trabalho monográfico, foi produzido no *Windows Movie Maker*, que segundo Menezes et al.(2008) é uma aplicação de edição de vídeo incluída no sistema operativo Windows com a qual é possível importar segmentos de vídeo, analógicos ou digitais, ou criar vídeos, cortá-los, ordená-los, acrescentar legendas ou textos, e outros efeitos.

Outro recurso importante utilizado nesta monografia foi os *slides*. Nogueira (2013) aponta suas vantagens quando afirma que o editor de apresentações *Power Point* tem sido importante no processo ensino e aprendizagem, já que os *slides* possuem um visual atraente, diversificado, com imagens e animações, o que torna os conteúdos mais interessantes.

Neste trabalho, foram apresentadas por meio dos *slides* imagens de papiros e tabletes onde se encontravam os registros das equações quadráticas em antigas civilizações, problemas históricos relacionados a esse tipo de equação além de matemáticos que estudaram a equação quadrática e algumas aplicações sobre esse tema.

Em relação aos *appl*ets, foram construídos no GeoGebra[2], um *software* de Matemática Dinâmica que permite o estudo da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. A expressão "Matemática Dinâmica" é uma extensão da definição de "Geometria Dinâmica" muito utilizada por Markus Hohenwarter, criador do GeoGebra, ao explicar as funções do mesmo. De acordo com Braviano e Rodrigues (2002), a Geometria Dinâmica explora os mesmos conceitos da Geometria clássica por meio de um *software* interativo. Sendo assim, o GeoGebra consegue dar um caráter dinâmico a alguns objetos matemáticos como funções, gráficos, números, etc.

---

[2] *Software* livre e gratuito disponível em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/.

Como defendido por Lévy (1999), as tecnologias digitais possibilitam a simulação e transformam a capacidade de pensar e imaginar. Segundo este autor, “A capacidade de variar com facilidade os parâmetros de um modelo e observar imediata e visualmente as consequências [sic] dessa variação constitui uma verdadeira ampliação da imaginação” (LÉVY, 1999, p. 166).

Nesse sentido, foram desenvolvidos três *applets* com o intuito de permitir que o aluno visualize um maior número de exemplos, reforçando as conclusões até então obtidas. Essa visualização é possível por meio de controles deslizantes[3], recursos disponíveis no *software* GeoGebra.

[3] Controle Deslizante é um recurso do software GeoGebra que representa graficamente um número ou um ângulo associado a uma construção. Assim, ao ser movimentado, altera os elementos da construção que são dependentes dele (MOREIRA; GOMES, 2008).

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo apresenta a metodologia utilizada neste trabalho monográfico, assim como a elaboração da Proposta Didática.

2.1 Pesquisa Qualitativa

Neste trabalho monográfico foi realizada uma pesquisa de caráter qualitativo, desenvolvida por meio de um estudo de caso. Escolheu-se este tipo de pesquisa, pois a preocupação das pesquisadoras não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado e, sim, com a compreensão do tema por um grupo de participantes (GOLDENBERG, 2009).

A pesquisa qualitativa é "uma pesquisa interpretativa, com o investigador tipicamente envolvido em uma experiência sustentada e intensiva com os participantes" (CRESWELL, 2010, p.21).

De acordo com Creswell (2010), os procedimentos qualitativos baseiam-se em dados de textos e imagens, têm passos únicos na análise das informações e possuem diferentes estratégias de investigação. Ainda segundo este autor, outra característica da pesquisa qualitativa são as múltiplas fontes de dados. Para a coleta de dados deste trabalho monográfico, foram utilizados questionário, diário de bordo, gravação em áudio, observação direta e respostas das atividades.

Sobre o uso de questionários, Moreira e Caleff (2008) afirmam que os mesmos possuem as seguintes vantagens em relação a outras técnicas: o uso eficiente do tempo, o anonimato para os respondentes, as perguntas padronizadas e a alta taxa de retorno. Porém, uma das desvantagens é que as pessoas podem não ser tão sinceras sobre o que, realmente, sentem e fornecer apenas uma resposta socialmente desejável. Por este motivo, foram utilizadas outras formas de coletas de dados, como o diário de bordo. Araújo et al. (2008) afirma que essa técnica tem como objetivo ser uma ferramenta em que o pesquisador registra as impressões retiradas de suas observações. Sobre esse tema~~,~~ Creswell (2010) afirma que a pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa, em que os pesquisadores interpretam o que enxergam, ouvem e entendem.

Segundo esse autor, uma das características de procedimentos qualitativos é a amostragem intencional, que sugere uma seleção dos participantes e locais que permite ao pesquisador entender melhor o problema e a questão de pesquisa (CRESWELL, 2010). Como já foi mencionado, nesta monografia escolheu-se uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, pois neste nível de ensino os alunos já têm conhecimentos sobre a equação quadrática, necessários ao trabalho.

É importante ressaltar que a pesquisa deseja identificar <u>como</u> (grifo das autoras) o método de resolução de equações quadráticas de Descartes pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem deste tema. Segundo Ponte (2006), quando se pretende compreender em profundidade o "como" e os "porquês" de uma entidade, trabalha-se com um estudo de caso.

Goldenberg (2009) afirma que o estudo de caso agrupa informações detalhadas, por meio de diferentes técnicas de pesquisa, que têm como finalidade apreender a totalidade de uma situação e expor a complexidade de um caso concreto.

Para Yin (2010, p. 24), "[...] o método do estudo de caso permite que os investigadores retenham as características holísticas e significativas dos eventos da vida real". Goldenberg (2009) corrobora com o autor quando afirma que o estudo de caso não é uma técnica específica, mas uma análise global que considera a unidade estudada como todo, seja um indivíduo, uma família ou uma comunidade com o objetivo de entendê-los em seus próprios termos.

2.2 Elaboração da Proposta Didática

A proposta deste trabalho compreende cinco partes: (i) a Introdução, que contém um vídeo e uma apresentação em *slides*. Esta última acompanha a resolução de cinco questões: a primeira relacionada à civilização egípcia; a segunda, à civilização babilônica; a terceira, à civilização chinesa; a quarta, ao matemático Al-Khwãrizmi, e a quinta ao matemático Bhaskara; (ii) a Atividade 1, de requisitos; (iii) a Atividade 2, principal desta monografia, com os três casos estudados por Descartes e exercícios correlatos; (iv) a Atividade 3 composta de duas questões e (v) três *applets.*

A seguir, serão descritas cada uma das partes, acompanhada de seus objetivos.

2.2.1 Introdução

Esse trabalho monográfico inicia-se com um vídeo de 7’19’’ de duração que tem como objetivo ambientar o aluno para a época histórica em que viveu Descartes, o século XVII. Foi elaborado no programa *Windows Movie Maker* e mostra alguns acontecimentos deste século, como a invenção do telescópio por Galileu e o surgimento do Quilombo dos Palmares (Figura 7).

Figura 7 - Duas telas do vídeo: a invenção do telescópio por Galileu e o surgimento do Quilombo dos Palmares

Fonte: Elaboração Própria.

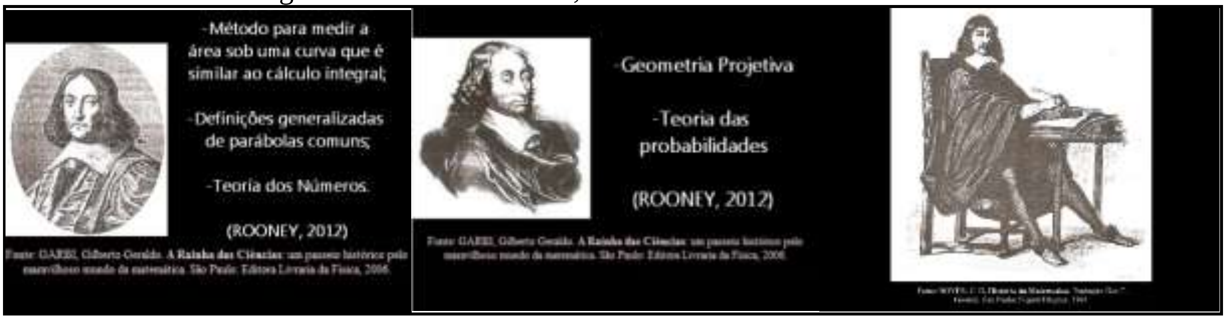
Após essa etapa, são mostradas, no vídeo, imagens da França durante este período, lugar onde nasceu Descartes. É destacada a arquitetura, o vestuário da época e o meio de transporte (Figura 8).

Figura 8 - Três telas do vídeo mostrando a arquitetura, o vestuário e o meio de transporte da França no século XVII

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, destacam-se três matemáticos franceses importantes no século XVII: Pierre de Fermat (1601- 1665), Blaise Pascal (1623 - 1662) e René Descartes (1596 - 1650). É traçado um breve perfil dos matemáticos, citando algumas de suas contribuições para a Matemática (Figura 9).

Figura 9 - Pierre de Fermat, Blaise Pascal e René Descartes



Fonte: Elaboração própria.

Com enfoque em René Descartes, o vídeo mostra imagens: (i) do local onde ele nasceu, (ii) do colégio jesuíta no qual ele permaneceu até os dezesseis anos e onde estudou os clássicos sob rígida orientação dos padres, (iii) dos livros *Discours de la Méthode pour bien conduire la Raison e chercher la Vérité dans les Sciences* e *La Géométrie* que escreveu e (iv) da imagem da rainha Cristina, por quem Descartes foi convidado a ministrar aulas às 5 horas da gélida Suécia, o que o fez contrair uma pneumonia e morrer aos cinquenta e quatro anos.

Além disso, traz informações sobre os motivos que levaram Descartes a se tornar um filósofo e suas principais contribuições para a Matemática, destacando o sistema de eixos cartesianos e seu estudo sobre a equação quadrática, tema deste trabalho.

É importante ressaltar que o vídeo traz como fundo musical a música francesa do século XVII: *Les Lis Naissans* de François Couperin, no intuito de dar uma ambientação mais adequada ao estudo.

Dando continuidade à proposta didática, são apresentados *slides* (Apêndice A) feitos no *Power Point* os quais têm como objetivo mostrar que além de Descartes, outras civilizações e matemáticos se dedicaram ao estudo das equações quadráticas.

A apresentação inicia-se com os primeiros indícios do surgimento da equação quadrática no Egito, na Babilônia e na China e traz uma questão relacionada a cada uma dessas civilizações (Figura 10).

Figura 10 - Questões associadas às civilizações egípcia (a), babilônica (b) e chinesa (c)

(a) **Um retângulo tem área 12. Sua largura é ½ do comprimento + ¼ do comprimento. Determine os lados do retângulo.**

(b) **Eu subtraí o lado de um quadrado de sua área e o resultado foi 870. Determine o lado do quadrado.**

(c) (Problema 20 do livro IX) **Agora tem-se uma cidade de forma quadrada, cercada por uma muralha, cujos comprimentos de seus lados são desconhecidos. No meio de cada lado há um portão aberto. Saia do portão norte, no sentido norte e ande 20 passos para encontrar uma árvore. Saia do portão sul, no sentido sul e ande 14 passos, então vire-se no sentido oeste e ande mais 1775 passos. A partir deste ponto pode-se ver a árvore. Pergunta: Quanto mede o lado da cidade? (1 passo = 6 pés ≈ 1,33m)**

Fonte: (a) NOBRE, 2003, p. 2.
(b) Ibidem. p. 5.
(c) Ibidem. p. 6.

Essas questões são resolvidas pelos alunos utilizando a linguagem algébrica atual, porém deixa-se claro que naquela época, os povos não a utilizavam. Um exemplo está na quarta questão do *slide*, relacionada ao matemático Al-Khwãrizmi, com a respectiva resolução dada por ele (Figura 11). Esta era apresentada por meio do "método das receitas", que segundo Vailati e Pacheco (s.d.) é caracterizado pela descrição de procedimentos, em que instruções verbais fornecidas eram aplicadas a uma sequência de casos específicos. Logo após mostrar o procedimento fornecido por este matemático, é feita uma comparação desta resolução com o "método de Bhaskara".

Figura 11 - Questão formulada por Al-Khwãrizmi e a resolução fornecida por ele

Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?

Resolução:

Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome, então a raiz quadrada disto que é igual a oito, e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove.

Fonte: NOBRE, 2003, p.18.

A quinta questão que compõe a apresentação em *slides* é a relacionada ao matemático Bhaskara. Esta também é retratada com a resolução dada por ele por meio do "método das receitas" (Figura 12).

Figura 12 - Questão formulada por Bhaskara e a resolução fornecida por ele

De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?

"[é] por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar."

Fonte: ROQUE, 2012, p. 240.

Logo após a resolução dessa questão, é explicado aos alunos o motivo pelo qual a "fórmula de Bhaskara" não pode ser atribuída a esse matemático, como citado no item 1.2.2, desta monografia.

Todas as cinco questões dos *slides* são resolvidas pelos alunos em folhas separadas.

A seguir, são mostrados alguns matemáticos que estudaram a equação quadrática como Pitágoras, Euclides, Al-Khwãrizmi, Bhaskara, Viéte e Descartes. Nesta apresentação, também é destacado um quadro (Figura 6) com a evolução da linguagem algébrica na representação da equação quadrática, do ano de 1494 até 1693.

Figura 6 – Evolução da linguagem algébrica na representação da equação quadrática $x^2 + 5x - 6 = 0$

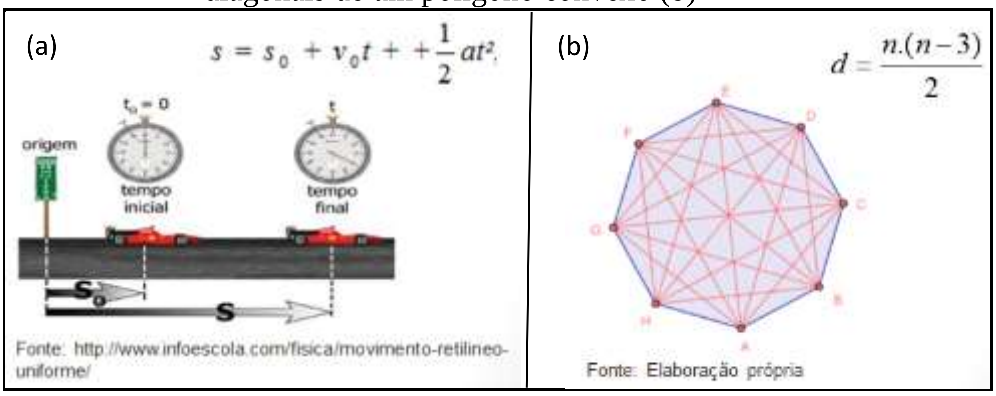
Notação: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Ano	*Matemático*	*Representação*
1494	Luca Pacioli (Itália)	Trouame . 5 . nº. che gioto al suo qdratº facia 6
1514	Vander Hoecke (Inglaterra)	1 Se. + 5 Pri. dit is ghelijc 6
1521	F. Ghaligai (Itália)	1 ⊏ e 5 Cº - 6 numeri.
1525	Christoph Rudolff (Alemanha)	Sit 1_3 aequatus - 5 ℋ + 6
1545	Girolamo Cardano (Itália)	Quadratus p 5 rebus aequalis 6
1553	Michael Stifel (Alemanha)	5 ℋ + 1_3. aequata 6
1559	J. Buteo (Itália)	1 ◊ P 5p [P 6
1572	Rafael Bombelli (Itália)	$\overset{2}{1}$.p.$\overset{1}{5}$.Equale á 6
1585	Simon Stevin (Holanda)	$\overset{②}{1}$ + $\overset{①}{5}$ egale à 6
1591	François Viète (França)	Q p 5N m 6 aequatur 0
1619	Jobst Bürgi (Suiça)	$\overset{ii}{1}$ + $\overset{i}{5}$ eguales à 6
1631	Thomas Harriot (Inglaterra)	aa + 5a ═══ + 6
1637	René Descartes (França)	x² + 5x − 6 ∝ 0
1693	John Wallis (Inglaterra)	x² + 5x − 6 = 0

Fonte: TROVON, 2012, p. 2.

Por fim, são mostradas algumas aplicações da equação quadrática, que se encontram na Física como a equação horária do espaço no movimento uniformemente variado (Figura 13a) e na Geometria como o número de diagonais de um polígono convexo (Figura 13b).

Figura 13 - Equação horária do espaço no movimento uniformemente variado (a) e número de diagonais de um polígono convexo (b)



Fonte: Elaboração própria.

2.2.2 Atividade 1

A Atividade 1 (Apêndice B) tem o objetivo de revisar alguns conceitos de Geometria Plana, necessários para o desenvolvimento da Atividade 2, a saber:(i) o conceito de retas paralelas e perpendiculares, (ii) o traçado de uma reta paralela dados uma outra reta e um ponto e (iii) o traçado de uma reta perpendicular dados uma outra reta e um ponto. Esses exercícios são feitos utilizando um par de esquadros e um compasso.

2.2.3 Atividade 2

O objetivo dessa Atividade é apresentar o método geométrico de Descartes para a resolução de equações quadráticas, aplicá-lo em algumas questões e compará-lo com o "método de Bhaskara".

A Atividade 2 (Apêndice C) se inicia com um breve histórico sobre René Descartes e seus estudos sobre a equação quadrática. A seguir, são abordados os três casos estudados por Descartes em seu livro *Discours de la Méthode pour bien conduire la Raison e chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e procurar a Verdade nas Ciências).

O 1º., 2º. e 3º. casos referem-se, respectivamente, às equações do tipo $x^2 = px + q^2$, $x^2 = -px + q^2$ e $x^2 = px - q^2$, todas com $p > 0$ e $q > 0$. Em cada caso, são apresentadas as instruções para resolver o método geométrico utilizado por Descartes na resolução dessas equações (Figura 14).

Figura 14 - Instruções para resolver as equações do 1º, 2º e 3º casos

1º. CASO: equações do tipo $x^2 = px + q^2$, $p > 0$, $q > 0$.

- Construa um triângulo retângulo com um cateto $\overline{LM}$ de medida q e o outro $\overline{LN}$ de medida $\frac{p}{2}$;
- Prolongue $\overline{MN}$ até O, tal que as medidas dos segmentos $\overline{NO}$ e $\overline{NL}$ sejam iguais;
- $\overline{OM}$ é a linha x procurada.

OBS.: A medida do segmento OM corresponde, em linguagem atual, à raiz da equação.

2º. CASO: equações do tipo $x^2 = -px + q^2$, $p > 0$, $q > 0$.

- Construa um triângulo retângulo com um cateto $\overline{LM}$ de medida q e o outro $\overline{LN}$ de medida $\frac{p}{2}$;
- Sobre a hipotenusa $\overline{MN}$ ponha a medida do segmento $\overline{NP}$ igual a medida do segmento $\overline{NL}$;
- O restante $\overline{PM}$ é x, a raiz procurada.

OBS.: A medida do segmento $\overline{PM}$ corresponde, em linguagem atual, à raiz da equação.

3º. CASO: equações do tipo $x^2 = px - q^2$

- Construa $\overline{LM}$ de medida igual a q e $\overline{LN}$ de medida igual a $\frac{p}{2}$, como anteriormente, porém não construa a hipotenusa do triângulo retângulo;
- Trace uma paralela a $\overline{LN}$, passando por M;
- Com centro em N, descreva um círculo partindo de L que corta a reta paralela nos pontos Q e R;
- A linha procurada pode ser $\overline{MQ}$ ou $\overline{MR}$.

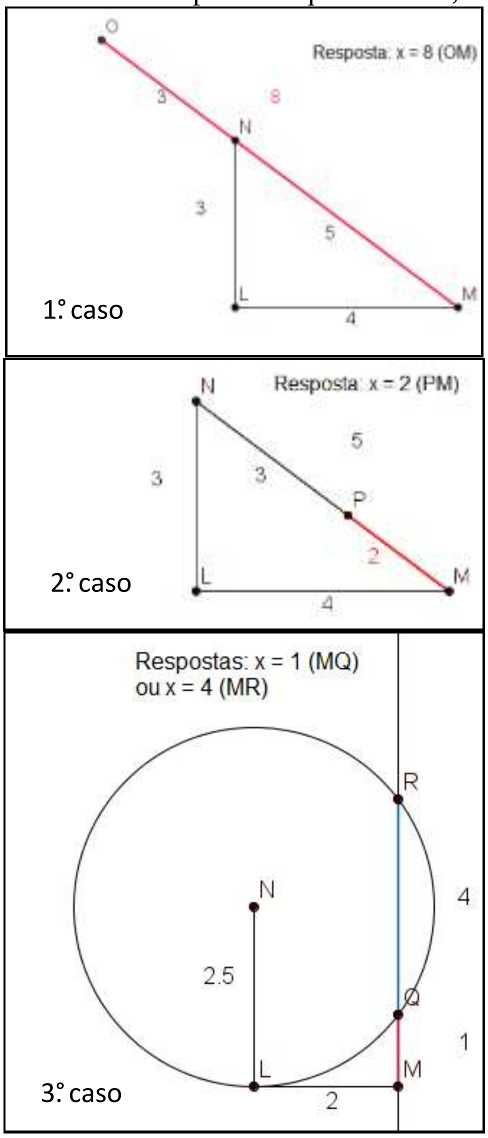
OBS.: A medida do segmento $\overline{MQ}$ ou $\overline{MR}$ corresponde, em linguagem atual, às raízes da equação.

Fonte: Elaboração própria

Logo após, é fornecido para cada caso, um exemplo de uma equação e pedido na primeira questão que os alunos a resolvam: pelo método de Descartes e pelo “método de Bhaskara”. As equações são $x^2 = 6x + 16$, $x^2 = -6x + 16$ e $x^2 = 5x - 4$ respectivamente, para o primeiro, segundo e terceiro casos.

Com o objetivo de facilitar a compreensão dos textos adiantes, são mostradas abaixo as respostas esperadas para as resoluções, pelo método de Descartes, da primeira questão, nos três casos (Figura 15).

Figura 15 - Respostas do item **a** da primeira questão do 1º, 2º e 3º casos



Fonte: Elaboração própria.

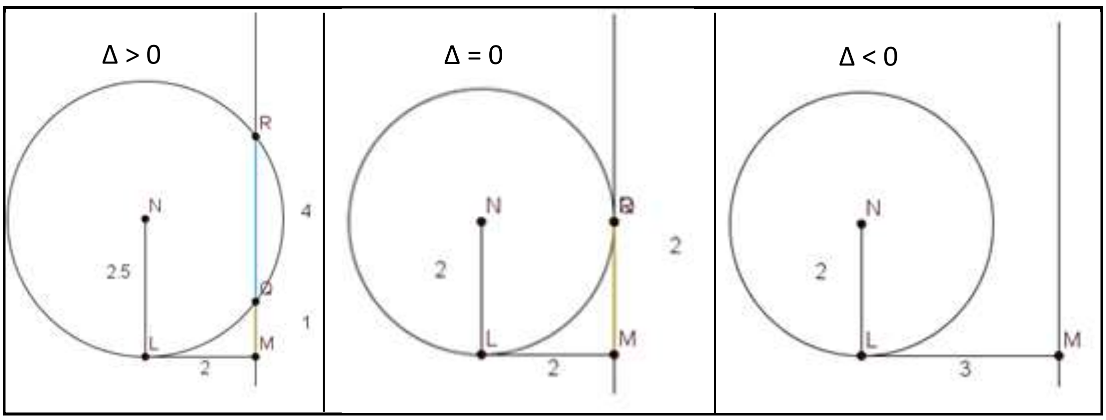
Na segunda questão de cada caso, é pedida a equivalência entre os dois métodos.

2.2.4 Atividade 3

A Atividade 3 (Apêndice D) é composta por duas questões. A primeira pretende verificar se os alunos conseguem identificar cada um dos três casos estudados na Atividade 2 bem como resolvê-los, utilizando o método geométrico de Descartes. É importante destacar que, dentre os cinco itens, três referem-se ao 3º caso., pois cada um corresponde a uma respectiva posição da circunferência em relação à reta paralela à $\overline{LN}$: no item **c**, a circunferência intersecta esta reta em dois pontos, no item **d** a circunferência tangencia a reta e no item **e** a circunferência não intersecta a reta.

A segunda questão tem como objetivo relacionar a posição da circunferência em relação à reta paralela $\overline{LN}$ com o valor da expressão $b^2 - 4ac = \Delta$ na equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) e o número de raízes positivas da equação em cada caso. O que os alunos devem concluir é: (i) se a circunferência corta a reta paralela à $\overline{LN}$ em dois pontos diferentes, a equação possui duas raízes reais distintas e, nesse caso, o valor de Δ é maior que zero; (ii) se a circunferência tangencia a reta paralela à $\overline{LN}$, a equação possui duas raízes reais iguais e, nesse caso, o valor de Δ é igual a zero e (iii) se a circunferência não corta a reta paralela à $\overline{LN}$ a equação não possui raízes reais e, nesse caso, o valor de Δ é menor que zero (Figura 16).

Figura 16 - Relação entre a posição da circunferência em relação à reta paralela a $\overline{LN}$, o número de raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) e o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$.



Fonte: Elaboração própria.

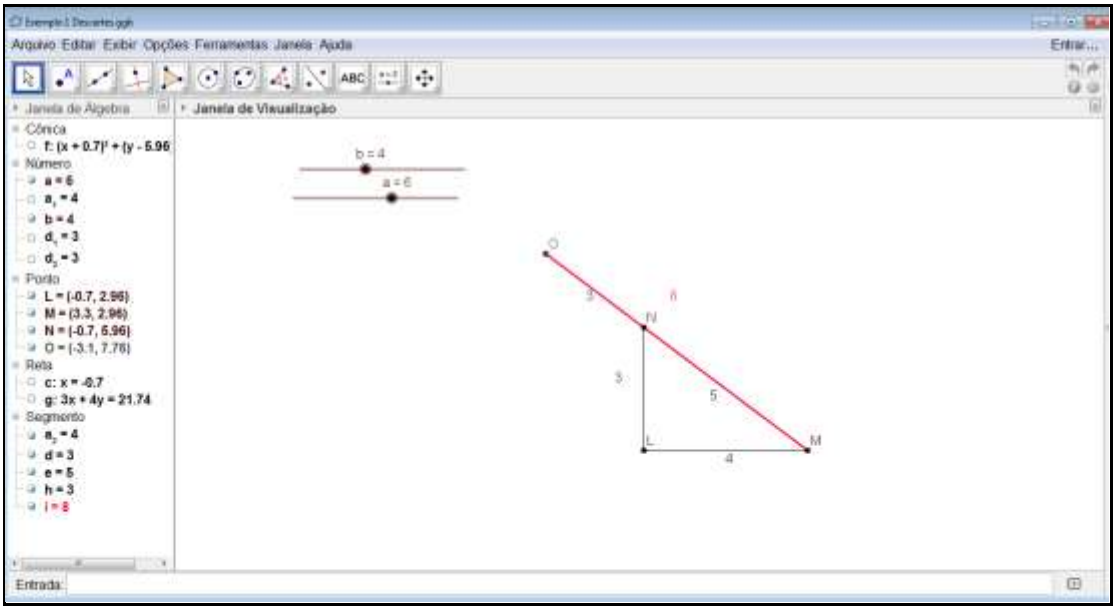
Pretende-se, ao final, informar que existe uma restrição imposta no método de Descartes, a saber, $\frac{p}{2} > q$, que garante a existência de duas raízes reais e distintas para a equação.

2.2.5 *Applets*

Os *applets*[4] têm o objetivo de mostrar que o método de Descartes se aplica a outras equações quadráticas diferentes das que exemplificaram as Atividades. Em especial no 3º caso, espera-se que os alunos percebam, por meio de um maior número de exemplos, a restrição imposta pelo método de Descartes para que a equação quadrática possua duas raízes reais e diferentes. Os *applets* desse trabalho foram feitos no *software* GeoGebra.

Para cada caso do método de Descartes, tem-se um *applet* correspondente. Todos os três contêm dois controles deslizantes que correspondem ao coeficiente de x e a raiz quadrada do termo independente da equação quadrática. No 1º e 2º casos, ao clicar e deslizar o *mouse* sobre os seletores, a medida dos catetos do triângulo retângulo varia bem como as raízes da equação quadrática. Na Figura 17, é dado um exemplo da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$. Pelo método de Descartes, tem-se que a raiz corresponde à medida do segmento $\overline{OM}$.

Figura 17 - Um dos exemplos mostrados por meio do *applet* referente ao 1º caso do método de Descartes

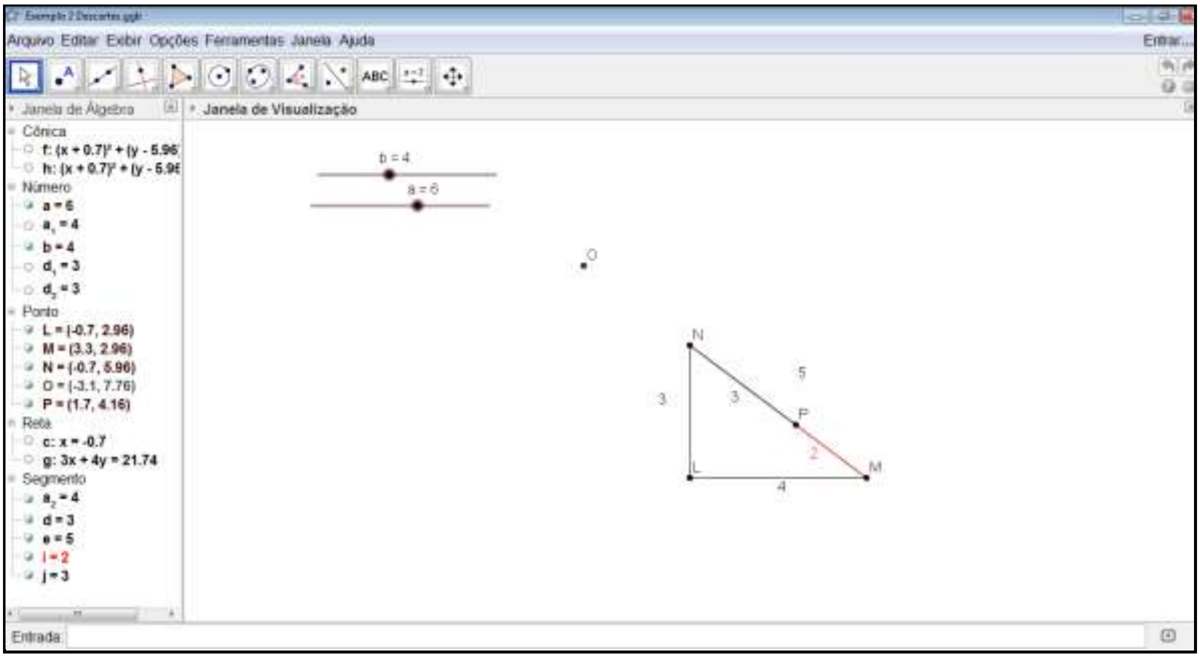


Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/589919.

[4] Os *applets* utilizados nesta monografia são de autoria de Fernanda Manhães Santos e Ingrid Suély Queiroz da Silva.

Na Figura 18, tem-se o *applet* do 2º caso referente à equação $x^2+6x-16=0$. Nesse caso, pelo método de Descartes, a raiz corresponde à medida do segmento $\overline{PM}$.

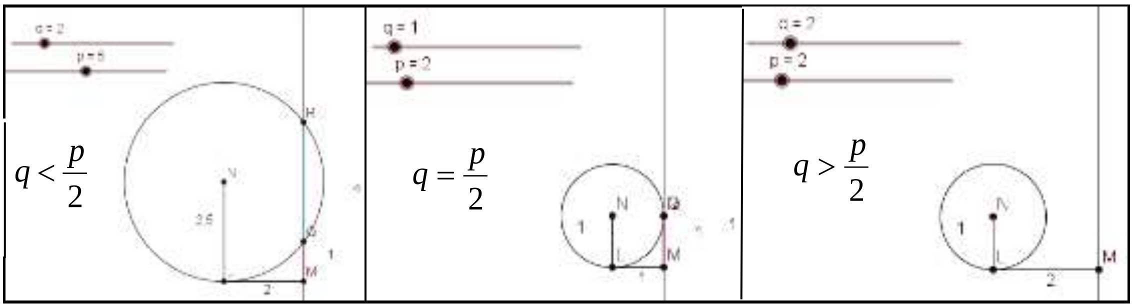
Figura 18 - Um dos exemplos mostrados por meio do *applet* referente ao 2º caso do método de Descartes



Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/590009.

No 3º caso, ao invés de construir um triângulo retângulo, constrói-se uma paralela ao segmento $\overline{LN}$ de medida correspondente ao coeficiente de *x*. As raízes da equação quadrática correspondem às medidas de segmentos sobre esta paralela. Ao clicar e deslizar o *mouse* sobre os controles deslizantes, a circunferência pode cortar em dois pontos, tangenciar ou não cortar a reta paralela à $\overline{LN}$. Com o grande número de exemplos que o *applet* possibilita, pretende-se reforçar: (i) que a circunferência só intersectará a reta paralela à $\overline{LN}$ em dois pontos se o valor de $\frac{p}{2}$ for maior do que o valor de q; (ii) que a circunferência só tangenciará a reta paralela à $\overline{LN}$ se o valor de $\frac{p}{2}$ for igual ao valor de q; (iii) e que a circunferência não intersectará a reta paralela à $\overline{LN}$ se o valor de $\frac{p}{2}$ for menor do que o valor de q (Figura 19).

Figura 19 - Três dos exemplos mostrados por meio do *applet* referente ao 3º caso do método de Descartes



Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/590051.

2.2.6 Elaboração do Questionário

O questionário elaborado (Apêndice E) é composto por seis questões que pretendem verificar, em relação ao trabalho realizado: (i) qual o grau de importância que os alunos deram para as informações históricas, apresentadas no vídeo e nos *slides*; (ii) se os alunos conseguiram identificar as contribuições históricas fornecidas por diversos povos na resolução de equações quadráticas; (iii) se os alunos conseguiram comparar os métodos de Descartes e de Bhaskara na resolução de equações quadráticas; (iv) se a História da Matemática foi um elemento motivador no processo ensino e aprendizagem; (v) se o "método de Descartes" contribuiu para a aprendizagem do aluno sobre o tema equações quadráticas; e (vi) a opinião geral do aluno sobre o trabalho apresentado, esta última opcional.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, será apresentado o relato da aplicação deste trabalho monográfico, por meio do teste exploratório e da experimentação.

3.1. Teste Exploratório

O teste exploratório foi aplicado numa turma de 3º período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes. Ocorreu em dois encontros: um no dia 03 de outubro de 2014 para 24 licenciandos com duração de 2h40min e outro no dia 10 de outubro de 2014 para 27 licenciandos com duração de 1h50min.

A escolha dessa turma se deu devido ao fato de que os licenciandos cursavam a disciplina de História da Matemática e o conteúdo a ser trabalhado era René Descartes e o estudo sobre as equações quadráticas.

O teste exploratório teve por objetivo verificar a clareza dos enunciados das questões, a ordem da sequência didática, o grau de dificuldade das questões propostas e o tempo necessário para aplicação das Atividades, para que assim, se necessário, fosse possível fazer alterações.

3.1.1 Primeiro encontro

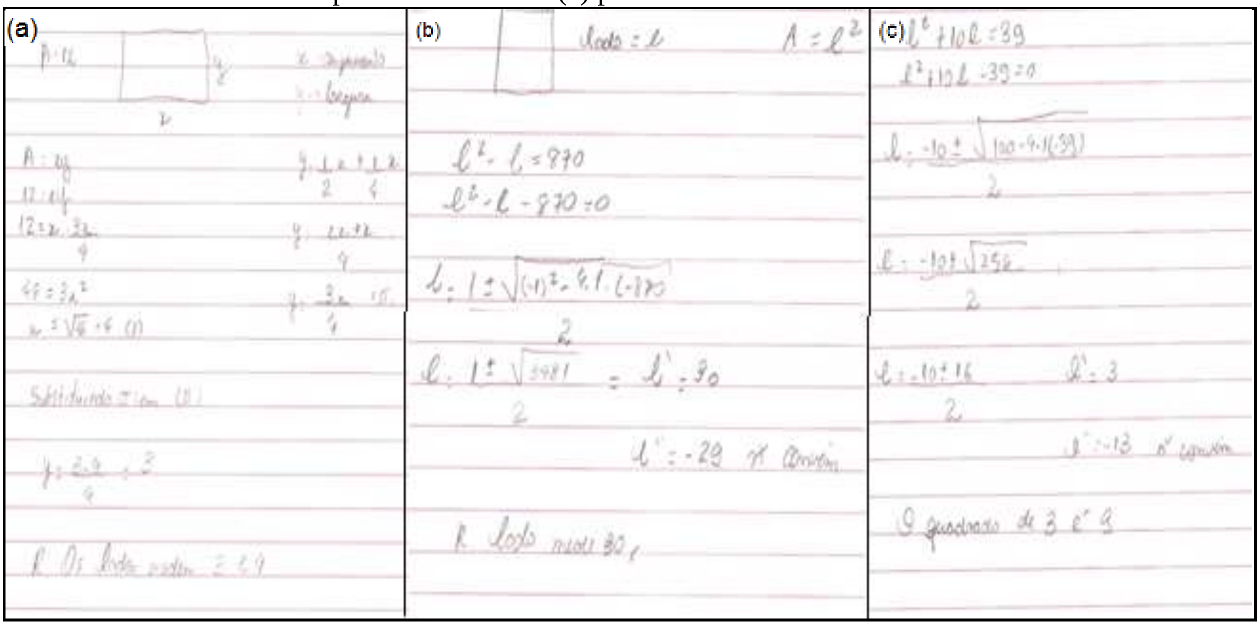
Iniciou-se o teste exploratório com um vídeo (Figura 20) sobre o século XVII, explicando os principais acontecimentos desta época e os matemáticos que se destacaram, dando enfoque à França e à René Descartes.

Figura 20 - Licenciandos assistindo ao vídeo

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, foi feita uma apresentação em *slides* e pedido aos licenciandos que resolvessem as questões propostas, utilizando a linguagem algébrica atual. A Figura 21 mostra a resolução da primeira questão (Figura 21a), da segunda questão (Figura 21b) e da quarta questão (Figura 21c) por um dos licenciandos.

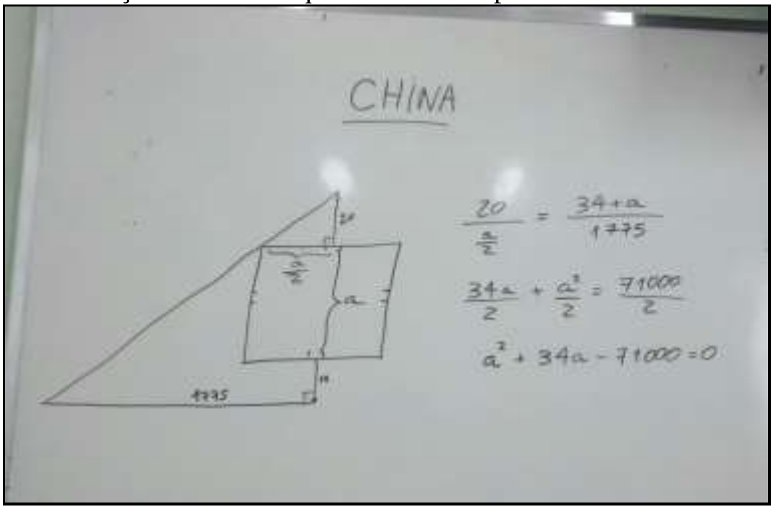
Figura 21 - Resolução das questões referentes às civilizações egípcia (a), babilônica (b) e da resolvida por Al-Khwãrizmi (c) por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto à terceira questão, um dos licenciandos foi ao quadro para mostrar como fez (Figura 22).

Figura 22 - Resolução da terceira questão do *slide* por um dos licenciandos



Fonte: Elaboração própria.

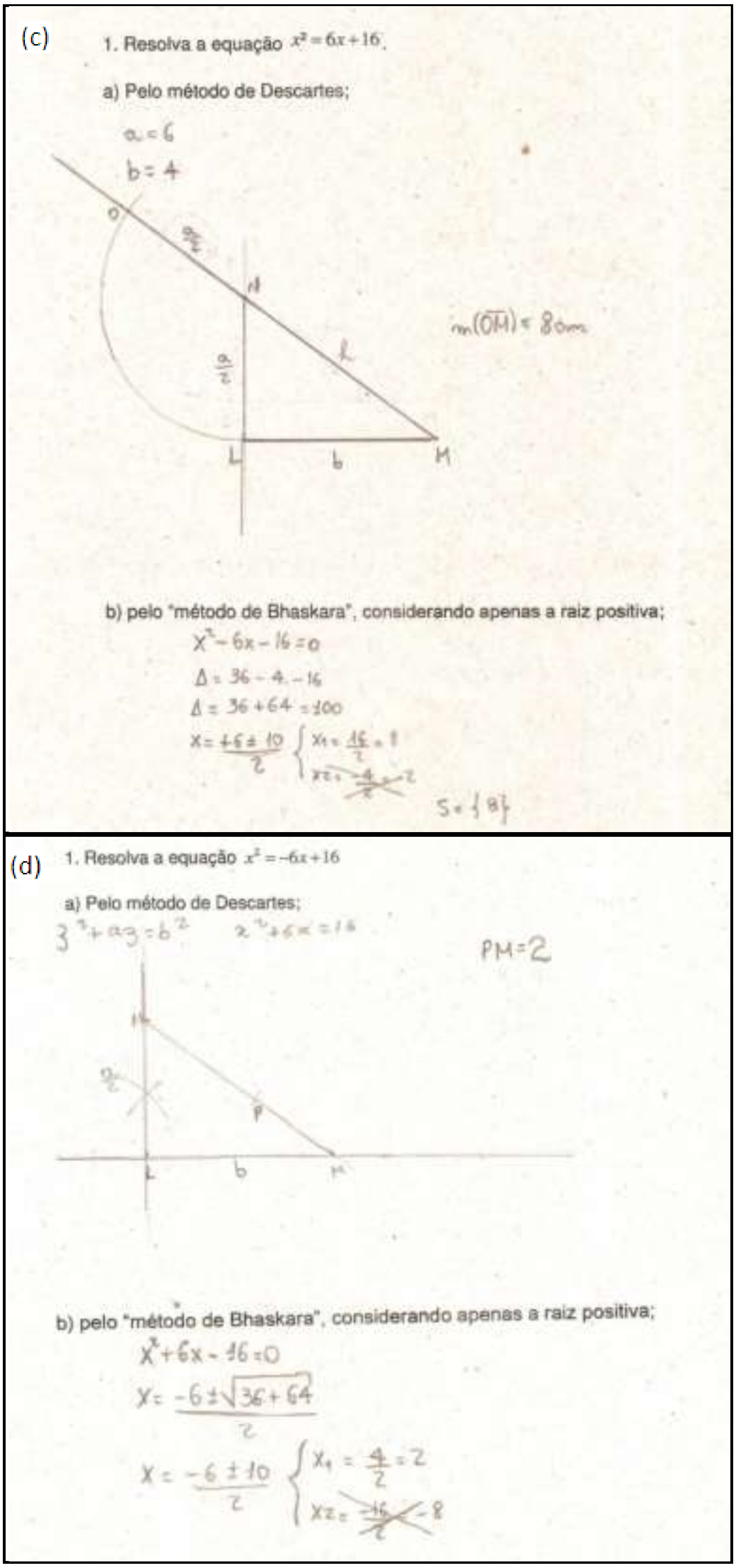
A Atividade 1, prevista para esse momento do trabalho, não foi aplicada, pois esta turma já tinha os requisitos necessários.

Após, foi entregue a Atividade 2. Para cada item, foi dado um tempo para que os licenciandos resolvessem as questões e fizessem a construção seguindo as instruções contidas na Atividade.

Os alunos não tiveram dificuldades na letra **a** e **b** da primeira questão do 1º e 2º casos, referentes à resolução da equação utilizando os métodos de Descartes e de Bhaskara. A Figura 23 mostra a resolução dos itens **a** e **b** do 1ºcaso (Figura 23c) e 2ºcaso (Figura 23d) por dois dos licenciandos..

É importante registrar que no teste exploratório as equações $x^2 = px + q^2$, $x^2 = -px + q^2$ e $x^2 = px - q^2$ foram apresentadas como $z^2 = az + b^2$, $z^2 = -az + b^2$ e $z^2 = az - b^2$.

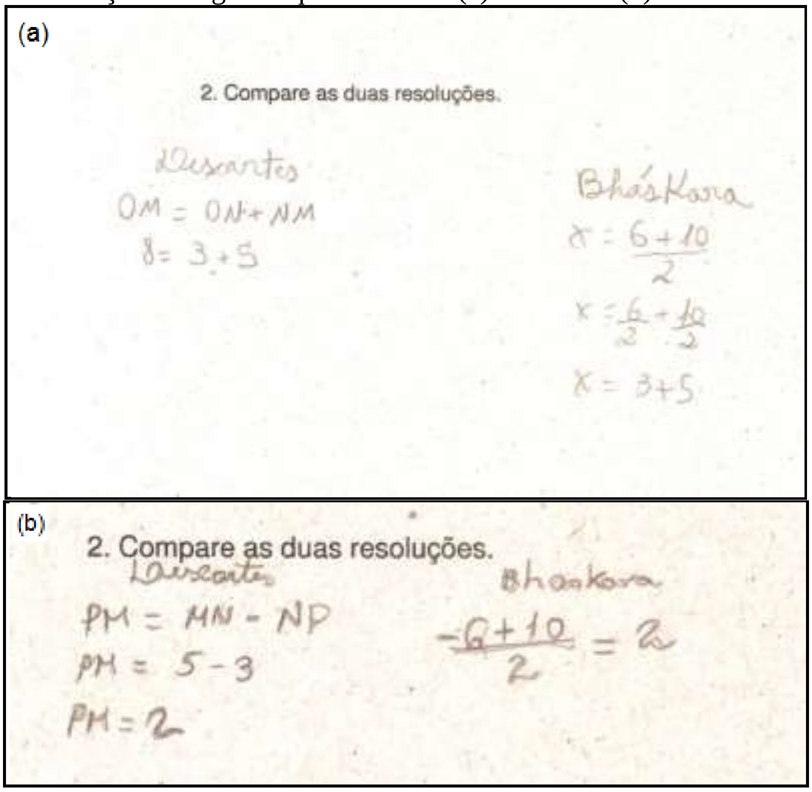
Figura 23 - Resolução dos itens a e b da primeira questão do 1º (c) e 2º (d) casos da Atividade 2 por dois dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os licenciandos não conseguiram resolver a segunda questão do 1º e 2º casos, pois não entenderam que era para comparar as resoluções numericamente. Por este motivo, a questão foi resolvida juntamente com as graduandas no quadro. A Figura 4 mostra a resolução da segunda questão do 1º caso (Figura 24a) e 2º caso (Figura 24b).

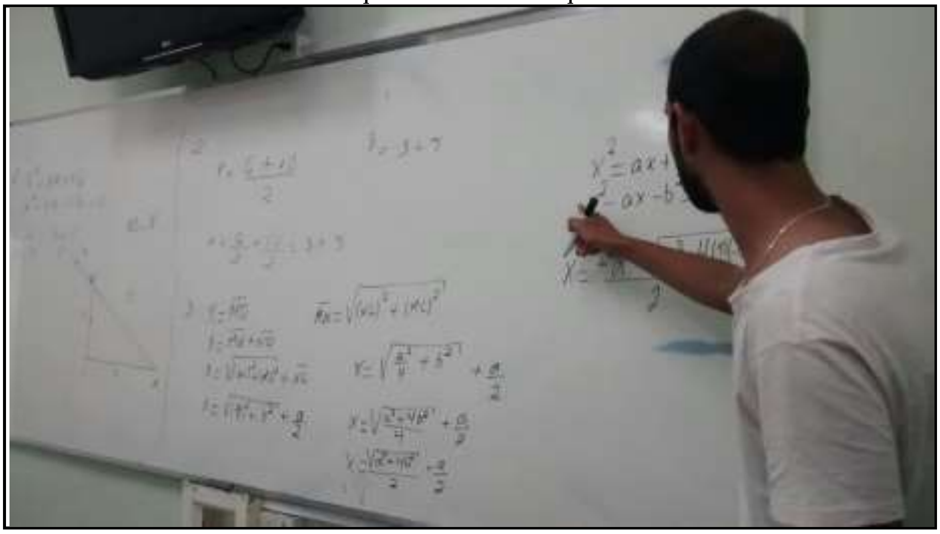
Figura 24 - Resolução da segunda questão do 1º (a) e 2º casos (b) da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por fim, os licenciandos tiveram dificuldade em fazer a equivalência entre o método de Descartes e o “método de Bhaskara” na terceira questão do 1º e 2º casos. No 1º caso, um licenciando conseguiu resolver e foi ao quadro apresentar o que fez (Figura 25).

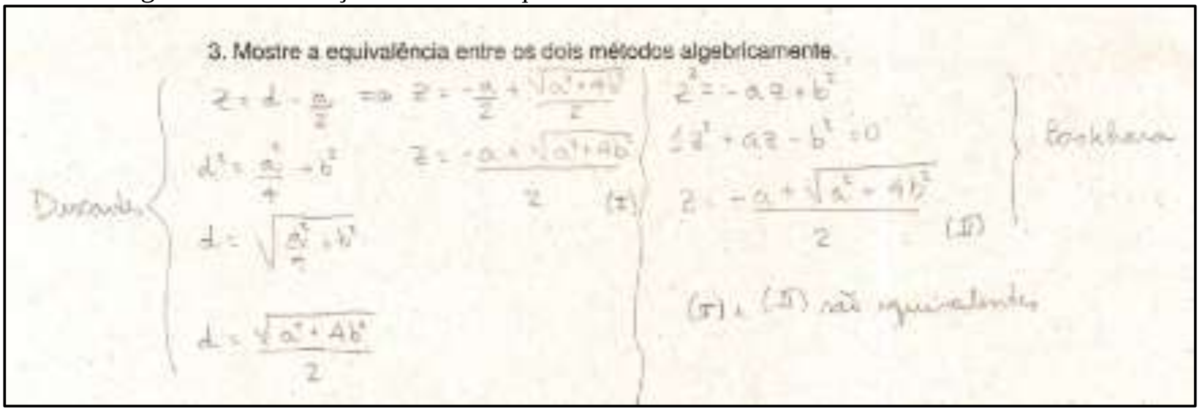
Figura 25 - Licenciando resolvendo no quadro a terceira questão do 1º caso da Atividade 2



Fonte: Elaboração própria.

No 2º caso, nenhum licenciando conseguiu responder à questão, logo a mesma foi resolvida no quadro juntamente com as graduandas (Figura 26).

Figura 26 - Resolução da terceira questão do 2º caso da Atividade 2



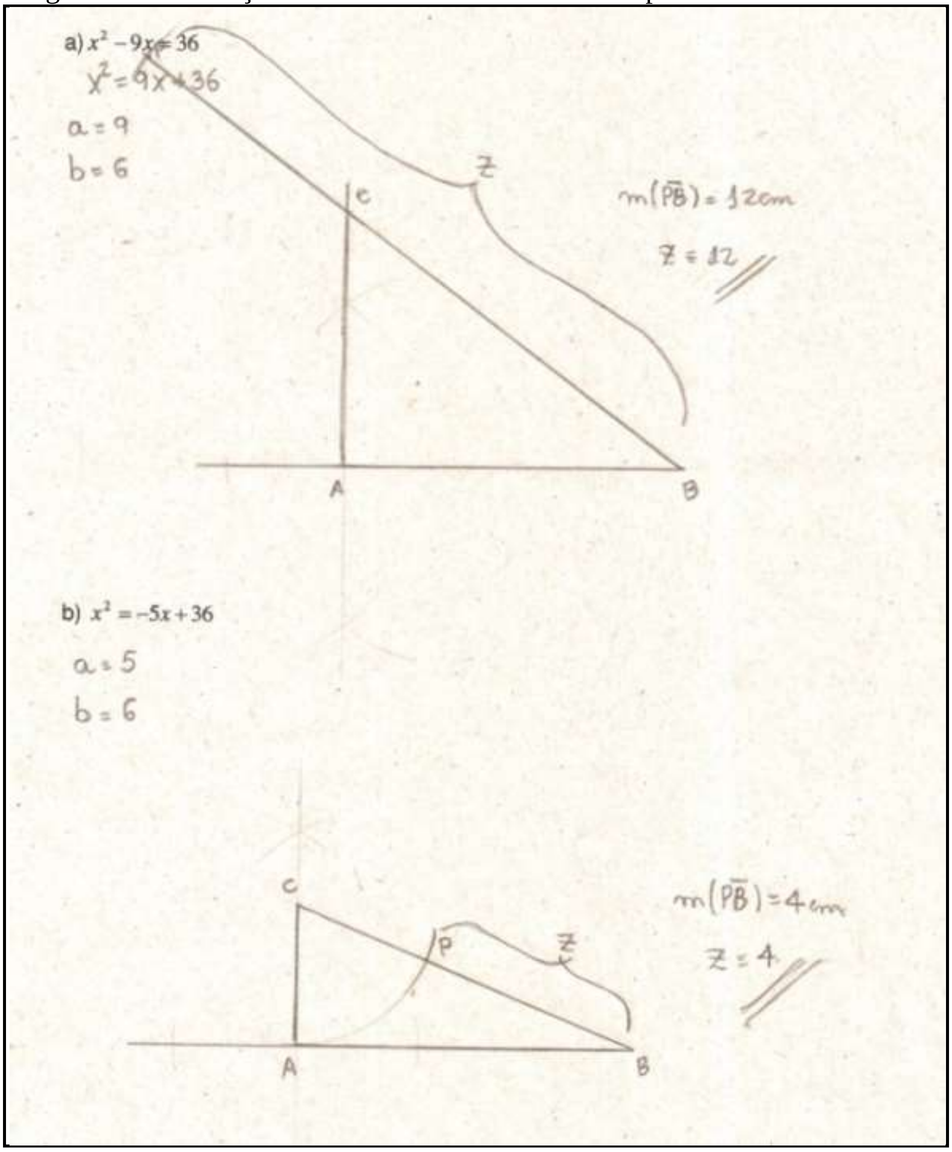
Fonte: Protocolo de pesquisa.

De acordo com Gouvêa (1998), a dificuldade apresentada pelos alunos nas generalizações é reflexo da concepção que alguns professores possuem e evidenciam em suas aulas de que a Matemática é pronta, definitiva e abstrata. Esse autor ressalta que o professor deve propor atividades que favoreçam a pesquisa e a elaboração de conjecturas, estimulando o pensamento dedutivo. No entanto, por não se sentir confiante com o pensamento dedutivo rejeita a demonstração na sala de aula.

Não houve tempo para aplicar o 3º caso, que ficou para o segundo encontro.

Ainda no primeiro encontro, foram feitos os itens **a** e **b** da Atividade 3, que correspondem ao 1º e 2º casos (Figura 27). Foi possível observar a facilidade com que os licenciandos resolveram tais questões.

Figura 27 - Resolução dos itens **a** e **b** da Atividade 3 por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foram sugeridas pelos licenciandos as seguintes modificações no primeiro encontro:

(i) contar a história de René Descartes antes da exibição do vídeo, valorizando a linguagem verbal tão própria dos contadores de história. Agindo dessa maneira, os alunos já estariam mais familiarizados com o tema no momento em que fossem assistir ao vídeo:

(ii) aumentar o tempo de visualização e a fonte do vídeo;

(iii) colocar em folhas separadas cada questão apresentada nos *slides*;

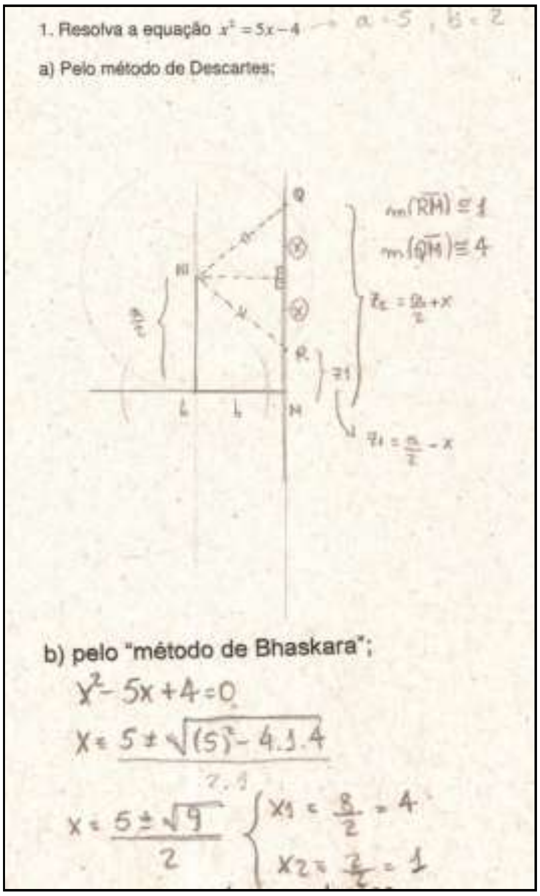
(iv) dividir o quadro da evolução da equação quadrática em três partes, uma em cada *slide*, para facilitar a visualização do mesmo;

3.1.2 Segundo encontro

Iniciou-se o segundo encontro com o 3º caso e foi dado um tempo para os licenciandos lerem as instruções contidas na Atividade.

De forma análoga ao encontro anterior, os licenciandos conseguiram encontrar as raízes da equação quadrática, utilizando os métodos de Descartes (item a) e de "Bhaskara" (item b), sem dificuldade (Figura 28).

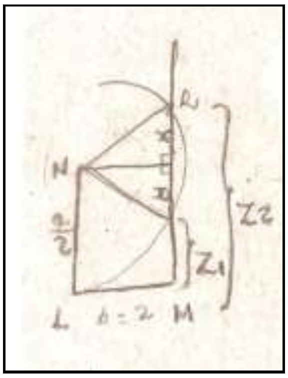
Figura 28 - Resolução dos itens **a** e **b** da primeira questão do 3º caso da Atividade 2 por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão, cujo objetivo era a comparação (numérica) dos resultados, os licenciandos apresentaram dificuldades e, por isso, foram feitas pelas graduandas algumas considerações: (i) poderia ser feita a construção de dois triângulos no item **a** da primeira questão para auxiliar na resolução da segunda questão; (ii) era importante saber, numericamente, o valor de **z** em função de **a** e **b** (Figura 29).

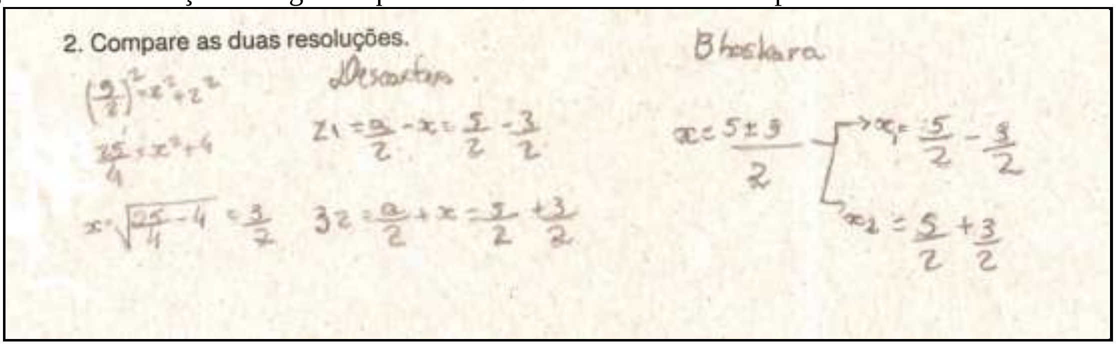
Figura 29 - Desenho da segunda questão do 2º caso da Atividade 2 feito por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com estas considerações, os licenciandos conseguiram resolver a questão sem dificuldades (Figura 30).

Figura 30 - Resolução da segunda questão do 3º caso da Atividade 2 por um dos licenciandos

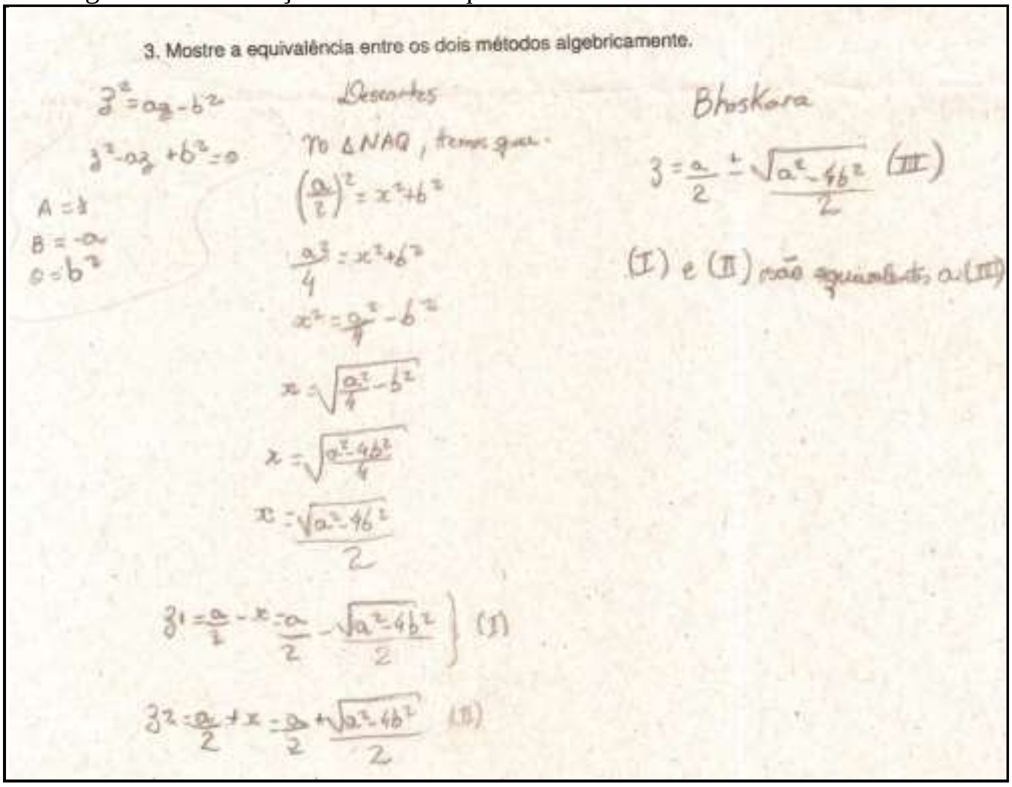


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Percebeu-se que os licenciandos não conseguiram resolver a segunda questão dos três casos, pois o enunciado não estava claro. Logo, esta foi retirada da Atividade 2, mas decidiu-se fazer perguntas referentes à comparação numérica entre os métodos oralmente com os alunos na experimentação.

Na terceira questão, novamente, os licenciandos não conseguiram fazer a equivalência entre os dois métodos algebricamente. Sendo assim, uma das graduandas resolveu a questão no quadro junto com os mesmos (Figura 31).

Figura 31 - Resolução da terceira questão do 3º caso da Atividade 2



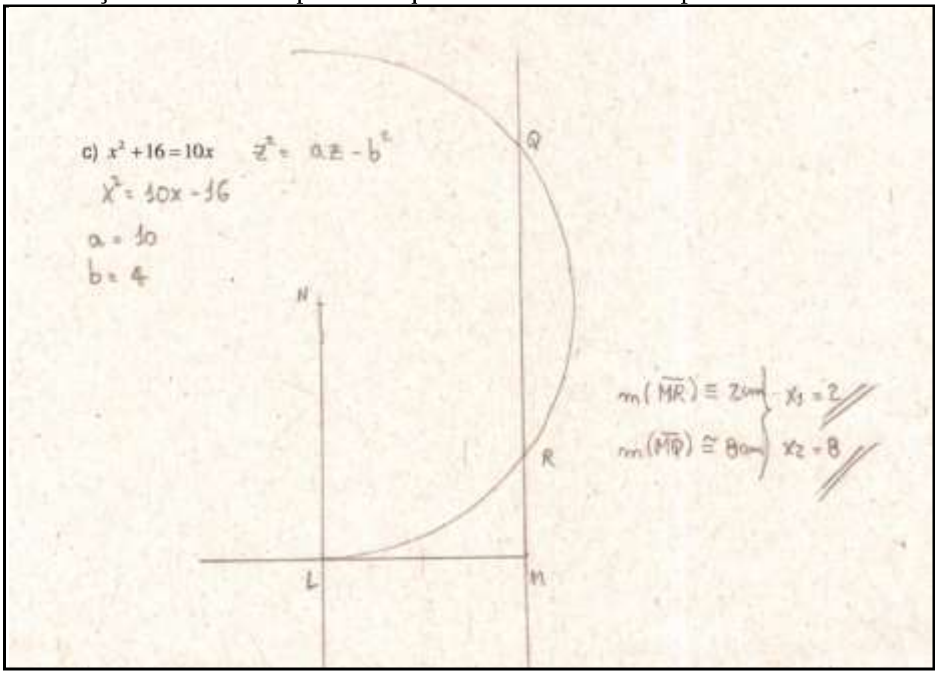
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Assim como Gouvêa (1998), Vailati e Pacheco (s.d.) afirmam que se podem observar na álgebra situações conflitantes, pois muitos alunos são capazes de operar com símbolos matemáticos, mas são incapazes de fazer generalizações. Segundo estes autores, a principal dificuldade dos alunos está no não entendimento dos conceitos algébricos.

Em seguida, foram aplicados os itens **c**, **d** e **e** da Atividade 3, que correspondem ao 3º caso. Durante a resolução, foram feitas algumas observações.

No item **c** (Figura 32), observou-se que a circunferência cortava a reta paralela à $\overline{LN}$ em dois pontos e foi perguntada aos licenciandos qual a relação desse fato com o "método de Bhaskara". Eles responderam que o número de intersecções estava associado ao número de raízes reais e distintas relacionando-o ao valor de delta, neste caso maior do que zero.

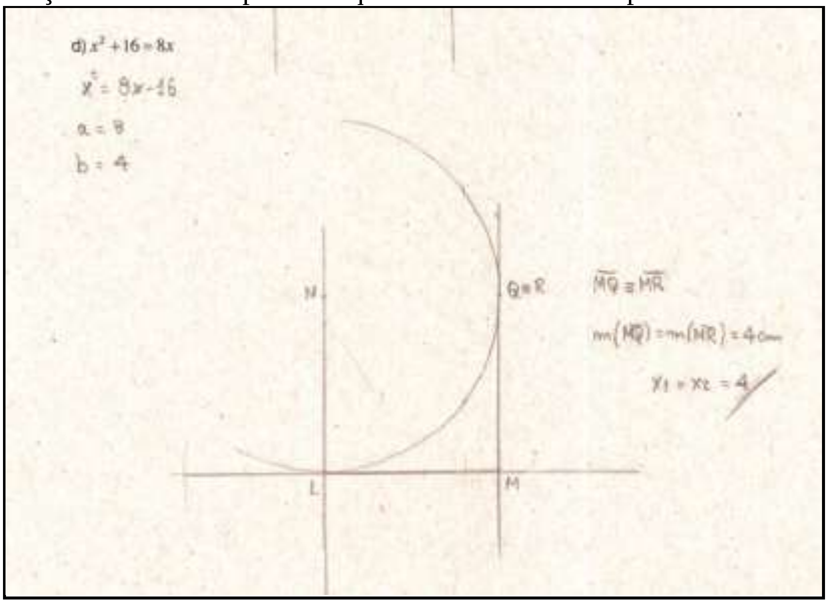
Figura 32 - Resolução do item **c** da primeira questão da Atividade 3 por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item **d** (Figura 33), observou-se que a circunferência tangenciava a reta paralela à $\overline{LN}$. Quando indagados sobre a relação desta situação com o "método de Bhaskara", os licenciandos responderam que, neste caso, com apenas um ponto de intersecção, a equação possuía duas raízes reais iguais associando ao valor de delta igual a zero.

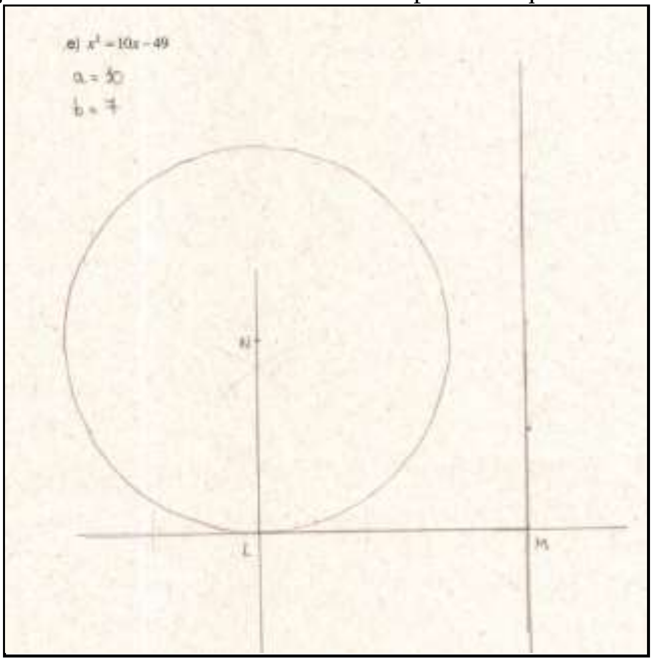
Figura 33 - Resolução do item d da primeira questão da Atividade 3 por um dos licenciandos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item **e** (Figura 34), a circunferência não intersectava a reta paralela à $\overline{LN}$, então quando questionados sobre esse fato, os licenciandos responderam que, em relação ao "método de Bhaskara", não havia raiz real e o valor de delta era menor do que zero.

Figura 34 – Resolução de um licenciando do item e da primeira questão da Atividade 3



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final do item **e**, perguntou-se aos licenciandos se existia alguma restrição relacionada aos coeficientes da equação quadrática para que a mesma possuísse raízes reais e eles responderam que, neste caso, o valor de **b** tem que ser menor do que ou igual ao valor de $\frac{a}{2}$.

Os licenciandos, também, observaram que esta questão está associada ao fato de a circunferência cortar ou não a reta paralela. Se a circunferência corta duas vezes, a equação tem duas raízes reais e distintas. Se a circunferência tangencia a reta paralela, a equação tem duas raízes reais e iguais e, se a circunferência não corta a reta paralela, a equação não tem raízes reais.

A Atividade 3 no teste exploratório só constou de uma questão. A segunda pergunta foi acrescentada depois, para a experimentação, no sentido de reforçar as conclusões ditas oralmente sobre a relação entre a posição da circunferência em relação a reta paralela à $\overline{LN}$, o número de raízes da equação e o valor de delta.

Com relação à linguagem algébrica e geométrica, Duval (2003) afirma que deve existir sempre a possibilidade de o aluno passar de um registro ao outro, num processo de conversão de registros. Neste trabalho, esta conversão se realizou, do algébrico para o geométrico, associados aos métodos de "Bhaskara" e de Descartes, respectivamente.

Em seguida, foram apresentados *applets* para mostrar outros exemplos de equações quadráticas e fazer com que os alunos percebam a restrição imposta pelo método de Descartes para que a equação quadrática possua duas raízes reais e diferentes. Focou-se mais o 3º caso, devido a este abordar um maior número de situações a serem analisados.

Foi sugerida pelos licenciandos a seguinte modificação no segundo encontro: trocar as letras **a** e **b** das equações utilizadas no método de Descartes por outras, para não confundir com a "fórmula de Bhaskara" que comumente, também, usa as letras **a** e **b** e se aplica à equação $ax^2 + bx + c = 0$ (a $\neq 0$). Assim, as equações $z^2 = az + b^2$, $z^2 = -az + b^2$ e $z^2 = az - b^2$ foram substituídas respectivamente por $x^2 = pz + q^2$, $x^2 = -pz + q^2$ e $x^2 = pz - q^2$.

Ao final do encontro, seria aplicado um questionário. Porém, por falta de tempo, as perguntas foram feitas oralmente e as respostas registradas no diário de bordo e em áudio. Eles afirmaram que:

(i) a História da Matemática é um elemento motivador;

(ii) é interessante saber como eram resolvidas as equações quadráticas em outras épocas históricas;

(iii) conseguiram ter um novo olhar sobre a "fórmula de Bhaskara", o geométrico.

(iv) o método de resolução de equações quadráticas de Descartes contribuiu para a aprendizagem do tema de equações quadráticas;

(v) agregou valor conhecer um novo método, além do "método de Bhaskara".

3.2 Experimentação da Proposta Didática

A experimentação foi realizada em uma instituição pública com uma turma da 1ª série do Ensino Médio, na cidade de Campos dos Goytacazes e ocorreu em quatro encontros extraclasse.

No quadro abaixo, estão citadas a data, a duração e o número de alunos de cada encontro.

Quadro 1 – Data, duração e número de alunos dos encontros da experimentação

	Data	Duração	Número de alunos
Primeiro encontro	19/01/2015	1h40min	14
Segundo encontro	20/01/2015	50min	15
Terceiro encontro	26/01/2015	1h50min	15
Quarto encontro	27/01/2015	2h30min	7

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, são descritos cada um dos encontros.

3.2.1 Primeiro Encontro

Por um problema ocorrido no computador, foi necessário alterar a ordem da proposta didática. Assim, iniciou-se o trabalho pela Atividade 1, de requisitos e, logo após, foram mostrados os *slides*.

Durante a realização dessa Atividade, foram entregues aos alunos os pares de esquadros e os compassos e dado um tempo para que fizessem as construções. Porém, notou-se uma grande dificuldade por parte deles com relação ao manuseio dos instrumentos geométricos. A maioria dos alunos construiu as retas paralelas e as retas perpendiculares de maneira incorreta. Por isso, foi necessária a intervenção das graduandas e a correção dos exercícios no quadro (Figura 35).

Figura 35 – Graduanda corrigindo a Atividade 1 no quadro

Fonte: Elaboração própria.

Ao final da Atividade, foi perguntado aos alunos se eles já tinham trabalhado com o par de esquadros e o compasso e construído retas paralelas e perpendiculares, utilizando estes instrumentos. Eles responderam que sim, pois haviam cursado uma disciplina no semestre anterior de Desenho Técnico. Mesmo assim, as graduandas observaram a falta de habilidade dos alunos no momento das construções (Figura 36).

Figura 36 – Aluna manuseando incorretamente o compasso

Fonte: Elaboração própria.

É importante destacar que um dos alunos possuía grande habilidade com esses instrumentos. O mesmo relatou que teve aulas de desenho na escola onde estudou durante o Ensino Fundamental. De acordo com Marinho et al. (2010), em 1971 com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 5692, a disciplina de Desenho Geométrico deixou de ser obrigatória nas escolas, passando a ser optativa. Porém, esses autores destacam a importância da inclusão da disciplina de Desenho Geométrico nos currículos escolares, citando algumas de suas vantagens:

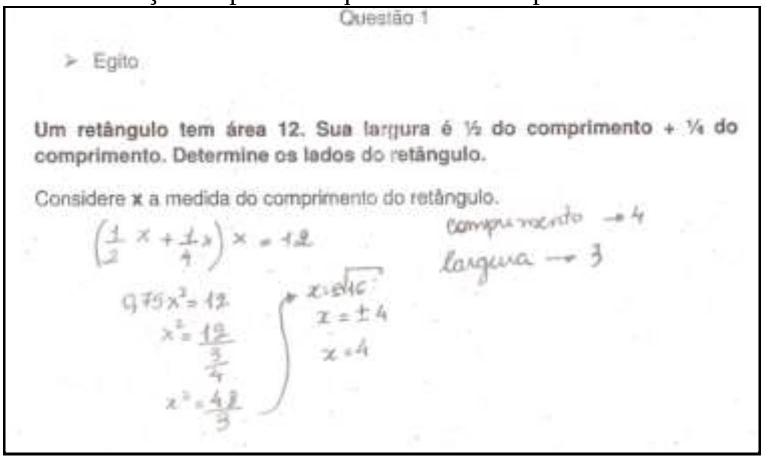
> a. O Desenho permite concretizar os conhecimentos teóricos da geometria, confirmando graficamente as possibilidades das figuras geométricas.
> b. Ao estudar as demais matérias, os alunos aprendem as linguagens verbal e simbólica. Ao estudar Desenho, aprende a linguagem gráfica, precisa e concisa, a mais antiga das linguagens. A criatividade técnico-científica, que é a capacidade de pesquisar e encontrar soluções consegue-se com uma teoria mínima, curta e inesquecível do Desenho. É como se estivéssemos desemaranhando um fio. Numa ponta do fio: o que se sabe. Na outra ponta: o que se quer.
> c. Nada melhor que o desenho geométrico para resolver capacidades importantes como: organização, autodisciplina, iniciativa, serenidade e capricho.

> d. Com exercícios de Desenho apropriados para estimular a conexão de neurônios cerebrais, desenvolve-se a visão espacial (MARINHO et al., 2010, p.53).

Guarnieri (2011), também, afirma que é de grande importância a utilização de instrumentos geométricos para uma boa qualidade de ensino de Geometria, pois eles auxiliam o raciocínio e a aplicação do conhecimento teórico.

A seguir, foram apresentados os *slides*, que continham as cinco questões. A primeira, os alunos resolveram com facilidade (Figura 37).

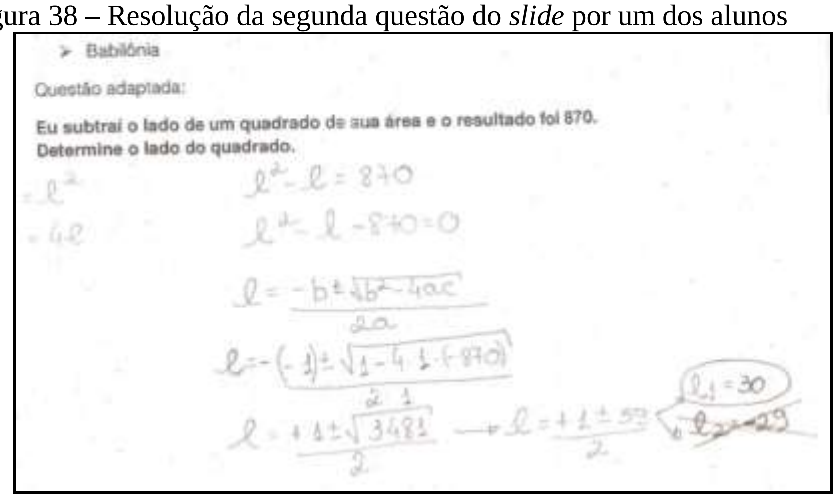
Figura 37 – Resolução da primeira questão do *slide* por um dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão, os alunos também não tiveram dificuldades. Resolveram utilizando a “fórmula de Bhaskara” (Figura 38).

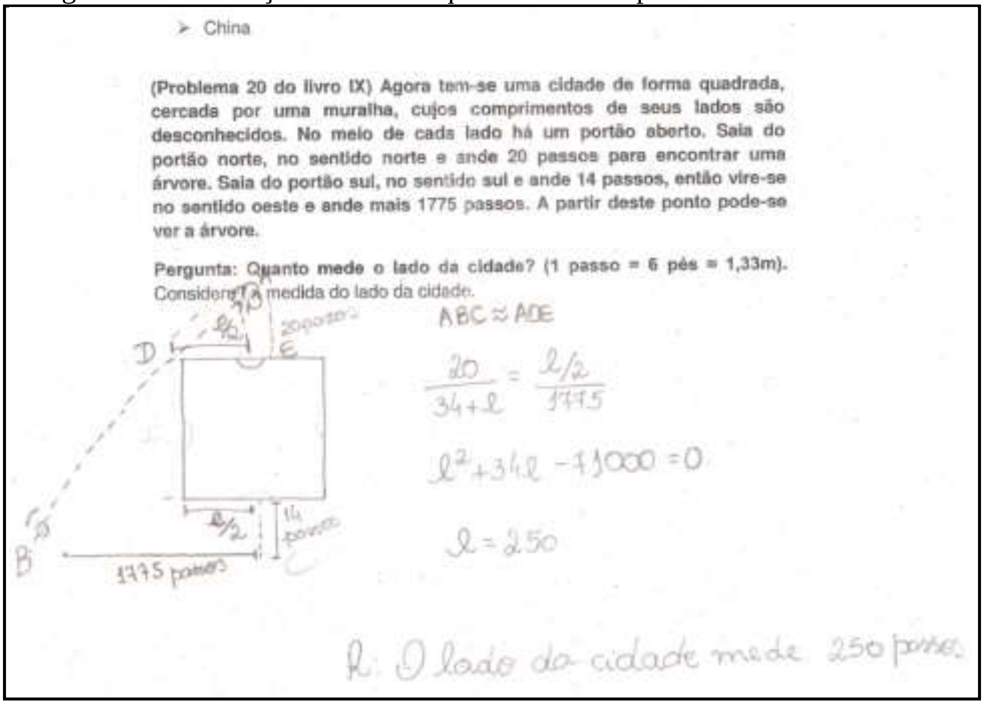
Figura 38 – Resolução da segunda questão do *slide* por um dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na terceira questão, a maioria dos alunos teve dificuldade na interpretação do enunciado. Os que conseguiram fazer o desenho, não perceberam a relação entre os triângulos. Por esse motivo, as graduandas tiveram que falar que a questão poderia ser resolvida por meio de semelhança de triângulos. Ao serem indagados sobre o motivo pelo qual os triângulos eram semelhantes, eles responderam corretamente que os ângulos correspondentes eram congruentes. Com esta observação, conseguiram solucionar a questão (Figura 39).

Figura 39 – Resolução da terceira questão do *slide* por um dos alunos

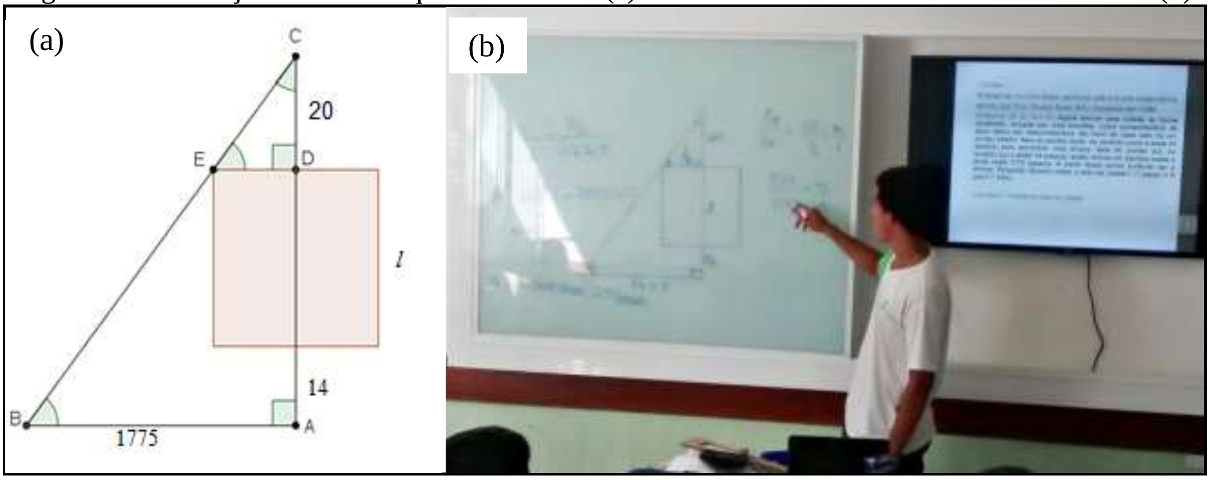


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Porém, um dos alunos resolveu essa questão de maneira diferente. Ele utilizou o conceito de tangente para encontrar a medida do lado da cidade. Percebeu que os triângulos ABC e DEC possuíam os ângulos correspondentes congruentes, logo a tangente de $\hat{E}$ seria igual à tangente de $\hat{B}$, chegando, assim, a relação $tg\hat{B} = \frac{40}{l} = \frac{34+l}{1775}$ (Figura 40b).

Como a foto não mostra claramente o que foi feito pelo aluno, optou-se por construir o desenho (Figura 40a) visando a uma melhor compreensão da solução apresentada.

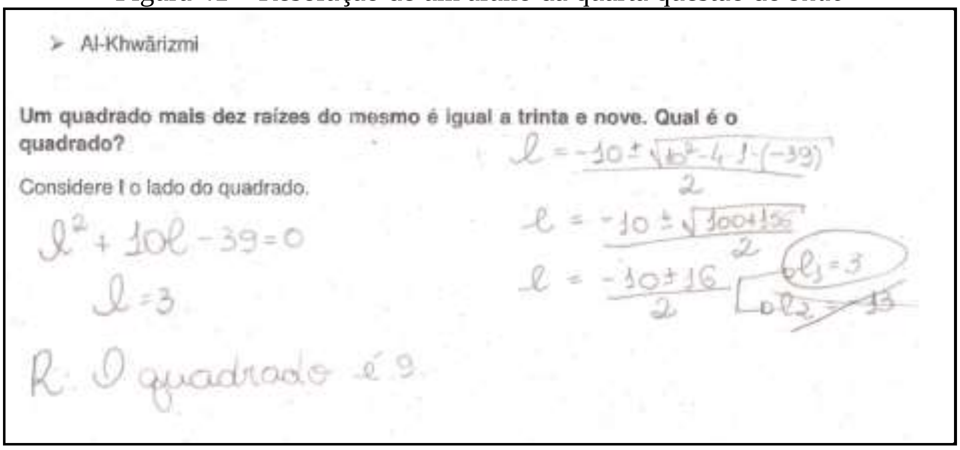
Figura 40 - Ilustração da terceira questão do *slide* (a) e aluno mostrando como resolveu a mesma (b)



Fonte: Elaboração própria.

Na quarta questão, referente a Al-Khwãrizmi, novamente os alunos resolveram sem dificuldades, utilizando a "fórmula de Bhaskara" (Figura 41).

Figura 41 – Resolução de um aluno da quarta questão do *slide*



➢ Al-Khwãrizmi

Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?

Considere l o lado do quadrado.

$l^2 + 10l - 39 = 0$

$l = 3$

R. O quadrado é 9.

$l = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-39)}}{2}$

$l = \frac{-10 \pm \sqrt{100+156}}{2}$

$l = \frac{-10 \pm 16}{2}$

$l_1 = 3$

$\cancel{l_2 = -13}$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A seguir, uma das graduandas fez a comparação entre a resolução dada por Al-Khwãrizmi e o "método de Bhaskara". Neste momento, os alunos ficaram surpresos por observarem que ambos os métodos eram equivalentes.

Em seguida, foi apresentada a quinta questão do *slide*, referente à Bhaskara. Os alunos tiveram muita dificuldade em representar algebricamente o número de abelhas de um enxame, pois, ao substituí-lo por *x*, não conseguiram concluir a resolução. Portanto, foi necessário que a graduanda interviesse explicando que esse número poderia ser representado por $2x^2$, já que eles teriam que considerar a metade e logo após a raiz quadrada desse valor (Figura 42).

Figura 42 – Resolução da quinta questão do *slide* por um dos alunos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após resolverem a questão pela “fórmula de Bhaskara”, foi apresentada a resolução do próprio matemático e indagado aos alunos o significado do referido texto. Eles responderam que não conseguiram compreender, e então as graduandas, juntamente com os alunos, passaram da linguagem textual para a matemática (Figura 43).

Figura 43 – Resolução da quinta questão do *slide* com a regra utilizada por Bhaskara

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi explicado o motivo pelo qual a "fórmula de Bhaskara" não pode ser atribuída a esse matemático. Observou-se o grande interesse da turma por esse assunto, já que eles disseram que sempre utilizaram a fórmula achando que esta tinha sido descoberta por Bhaskara.

3.2.2 Segundo Encontro

Iniciou-se esse encontro com a continuação dos *slides*. Foram apresentados alguns matemáticos que estudaram a equação quadrática, além de um quadro com a evolução da linguagem algébrica na representação desse tipo de equação (Figura 44). Em seguida, foram mostradas, em *slides*, algumas aplicações da equação quadrática. Notou-se um grande interesse por parte dos alunos.

Figura 44 – Graduanda mostrando o quadro de evolução da linguagem algébrica na representação da equação quadrática

Fonte: Elaboração própria.

Depois, as graduandas contaram um pouco sobre a história da França do século XVII, a vida de Descartes e suas contribuições para a Matemática. A seguir, foi exibido o vídeo (Figura 45). Percebeu-se que este foi atrativo para os alunos e que eles se mostraram interessados durante toda a exposição.

O vídeo transporta o aluno para outras realidades, tempos e espaços, entretendo e seduzindo por meio de vários sentidos como o sensorial, o visual e o auditivo (MORAN, 1995).

Figura 45 – Alunos assistindo ao vídeo

Fonte: Elaboração própria.

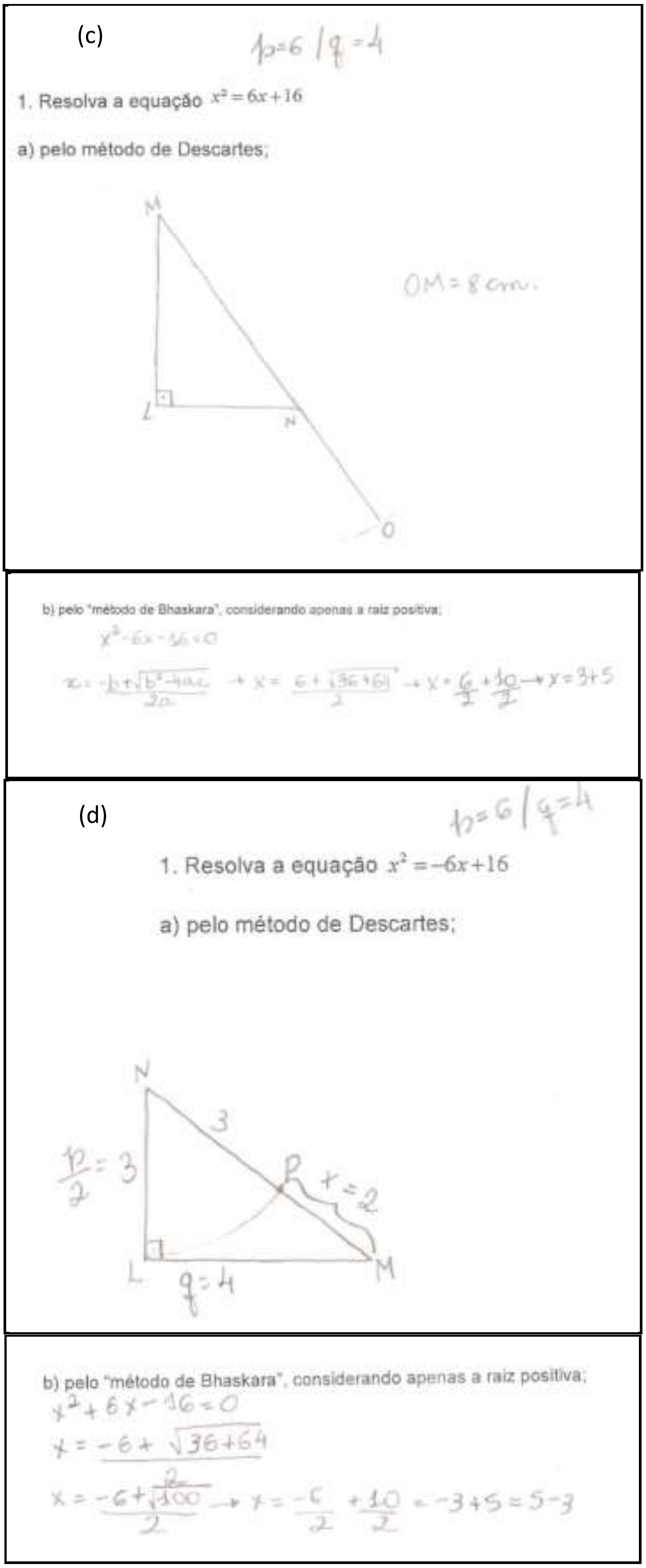
3.2.3 Terceiro Encontro

Esse encontro iniciou-se com a aplicação da Atividade 2. Em cada caso foi dado um tempo para que os alunos lessem as instruções e tentassem fazer a construção correspondente.

Notou-se que antes mesmo de lerem as instruções, já começaram a perguntar o que deveria ser feito. Sobre isso, Costa (s.d.) afirma que a maioria dos problemas dos alunos, ao longo dos anos de estudo, é decorrente de problemas de leitura. A autora afirma que a leitura não pode ficar restrita à literatura e ao noticiário, e que é importante ensinar os alunos a lerem, interpretarem e entenderem não só as palavras, mas os textos específicos de cada matéria, as provas de cada área, as instruções de como fazer algo, entre outros.

Por causa dessa dificuldade com a leitura, as graduandas tiveram que atender individualmente aos alunos, fazendo-os ler com mais atenção o que estava sendo proposto. Assim, conseguiram resolver os itens **a** e **b** da primeira questão do 1º caso (Figura 46c) e 2º caso (Figura 46d).

Figura 46 – Resolução dos itens **a** e **b** da primeira questão dos 1.º (c) e 2.º (d) casos da Atividade 2 por um dos alunos



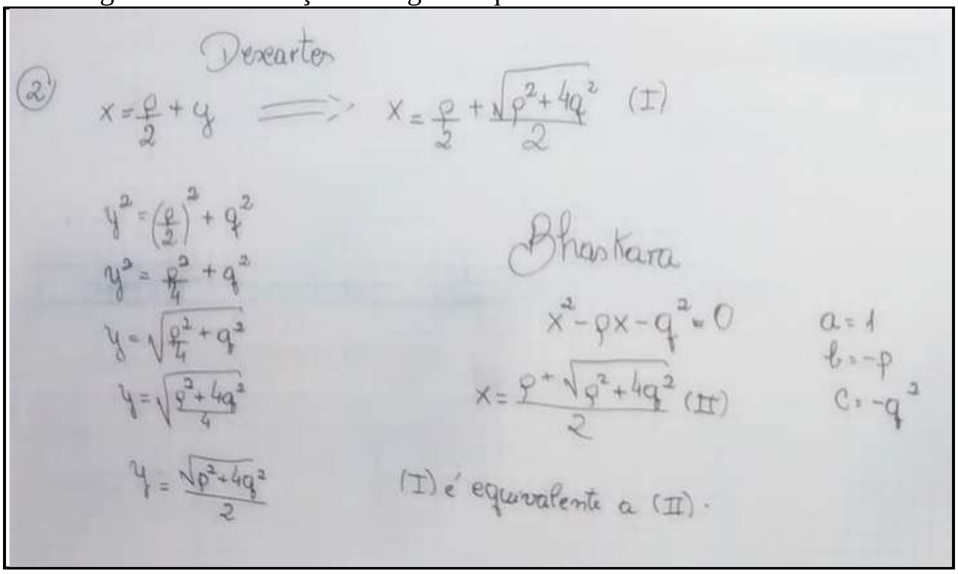
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após o término dessa questão, foram feitas perguntas referentes à comparação entre o método de Descartes e o "método de Bhaskara" numericamente. Os alunos perceberam que, no item **a**, $x = \sqrt{4^2 + 3^2} + 3$ (método de Descartes) e $x = \frac{6}{2} + \frac{10}{2}$ (método de Bhaskara) e no item **b**, $x = \sqrt{4^2 + 3^2} - 3$ (método de Descartes) e $x = -\frac{6}{2} + \frac{10}{2}$ (método de Bhaskara) levando-os a constatar que os dois métodos resultavam nas mesmas soluções para a questão.

A segunda questão do 1º caso, referente à equivalência entre os dois métodos foi resolvida no quadro juntamente com as graduandas (Figura 47). Percebeu-se que os alunos tiveram muita dificuldade em utilizar a linguagem algébrica. Gil (2008) informa que a Álgebra ocupa uma grande parte do currículo escolar, porém os alunos possuem uma deficiência grande nos conceitos e procedimentos que pertencem ao contexto algébrico.

De acordo com Gouvêa (1998), essa dificuldade apresentada pelos alunos no momento da generalização, ou seja, na utilização da linguagem algébrica, deve-se ao fato de que os professores não têm o hábito de trabalhar o pensamento dedutivo em sala de aula. Segundo a autora, esse tipo de pensamento deve ser valorizado em contraponto à memorização de fórmulas, permitindo ao aluno construir seu saber matemático. Afirma ainda que, muitas vezes, os professores não levam em conta a curiosidade do aluno, a sua capacidade de levantar hipóteses, criar estratégias e desenvolver modelos matemáticos para resolver situações.

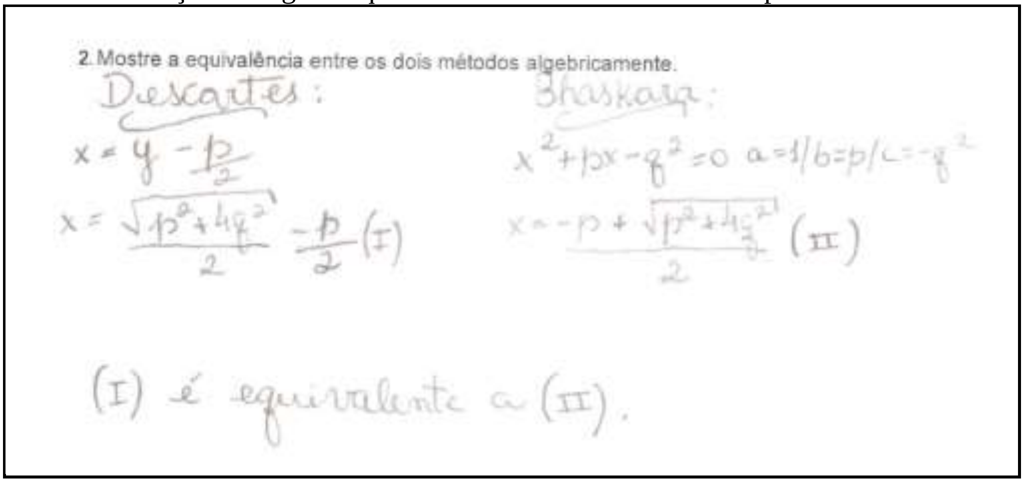
Figura 47 – Resolução da segunda questão do 1º caso da Atividade 2



Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão do 2º caso (Figura 48), foi dado um tempo para que os alunos tentassem resolvê-la e não houve dificuldades.

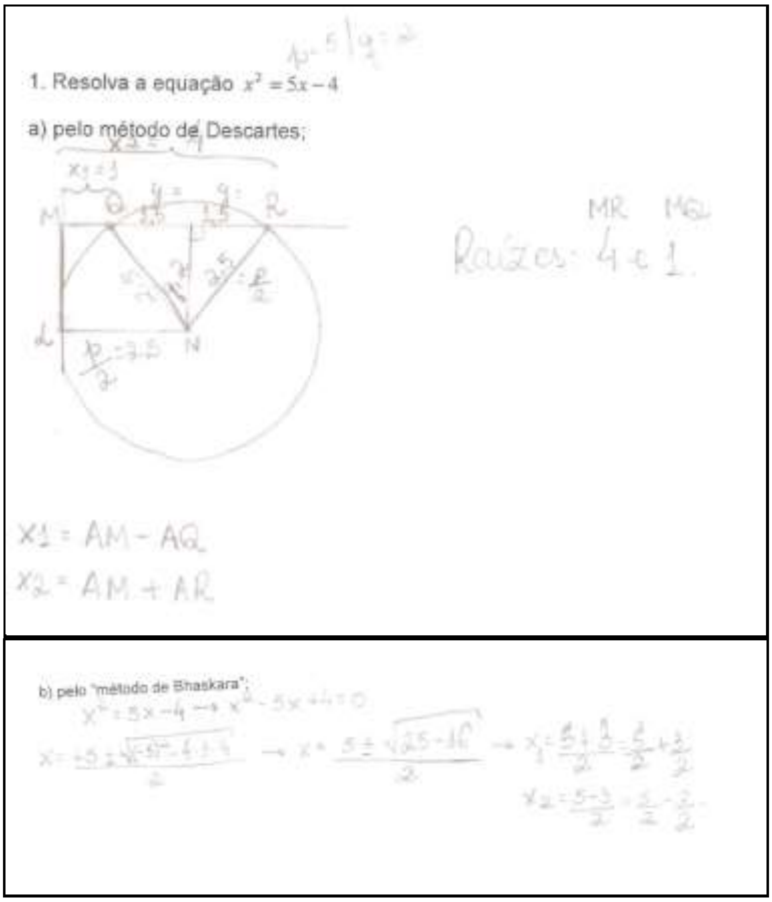
Figura 48 – Resolução da segunda questão do 2º caso da Atividade 2 por um dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, iniciou-se o 3º caso. Notou-se que os alunos tiveram muita dificuldade na interpretação das instruções contidas na apostila. As graduandas foram até as carteiras para auxiliá-los na construção. A Figura 49 mostra a resolução desta questão por um dos alunos.

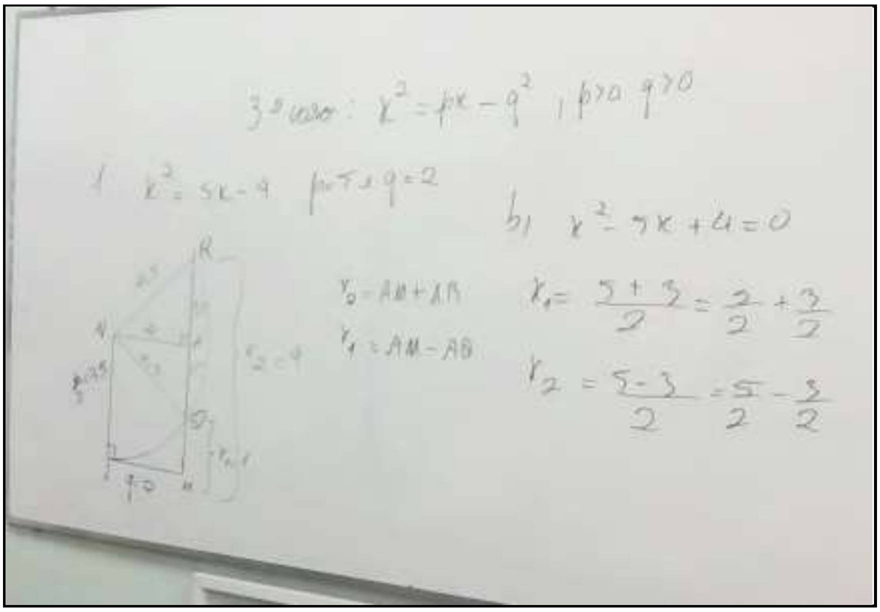
Figura 49 – Resolução dos itens **a** e **b** da primeira questão do 3º caso da Atividade 2 por um dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Da mesma forma que nos outros casos, foi perguntado aos alunos qual a relação entre os métodos de Descartes e de "Bhaskara". Como não perceberam, as graduandas construíram dois triângulos no item **a** da primeira questão e, assim, utilizando o Teorema de Pitágoras, eles conseguiram entender que os dois métodos eram equivalentes numericamente (Figura 50).

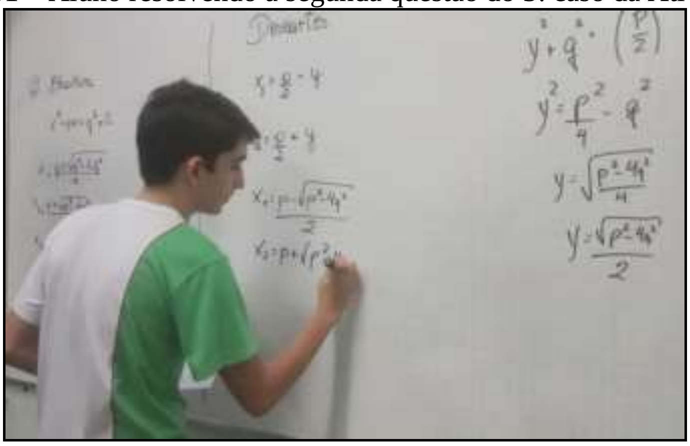
Figura 50 – Comparação numérica entre o método de Descartes e o "método de Bhaskara" do 3º caso da Atividade 2



Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão, uma das graduandas resolveu a equação pelo "método de Bhaskara" e um dos alunos foi ao quadro resolver a equação pelo método de Descartes e fazer a equivalência entre os dois métodos (Figura 51).

Figura 51 – Aluno resolvendo a segunda questão do 3º caso da Atividade 2

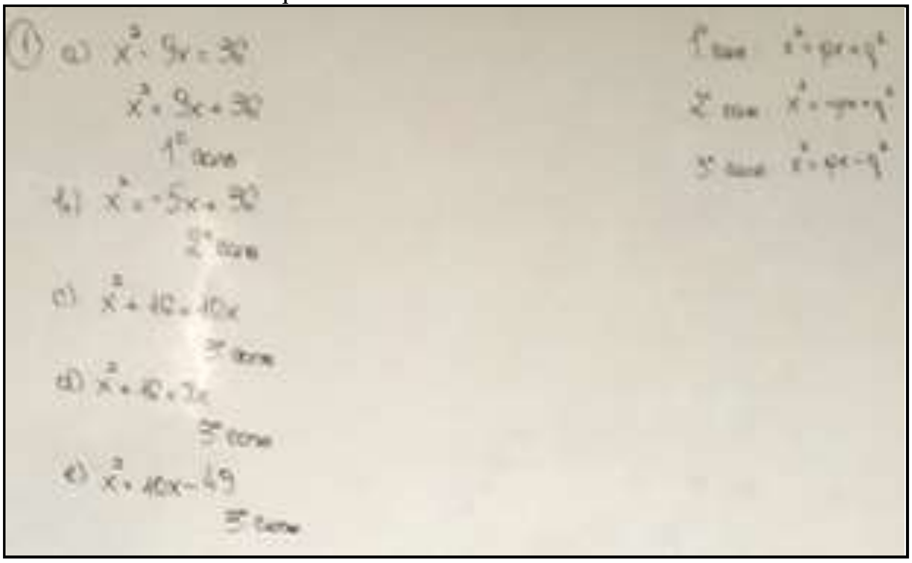


Fonte: Elaboração própria.

3.2.4 Quarto Encontro

Iniciou-se o quarto encontro com a Atividade 3. Primeiramente, as graduandas colocaram do lado direito do quadro as equações referentes a cada caso estudado no encontro anterior. A seguir, perguntou-se aos alunos em qual caso se enquadrava cada um dos itens da primeira questão da Atividade 3 e as respostas foram registradas do lado esquerdo (Figura 52).

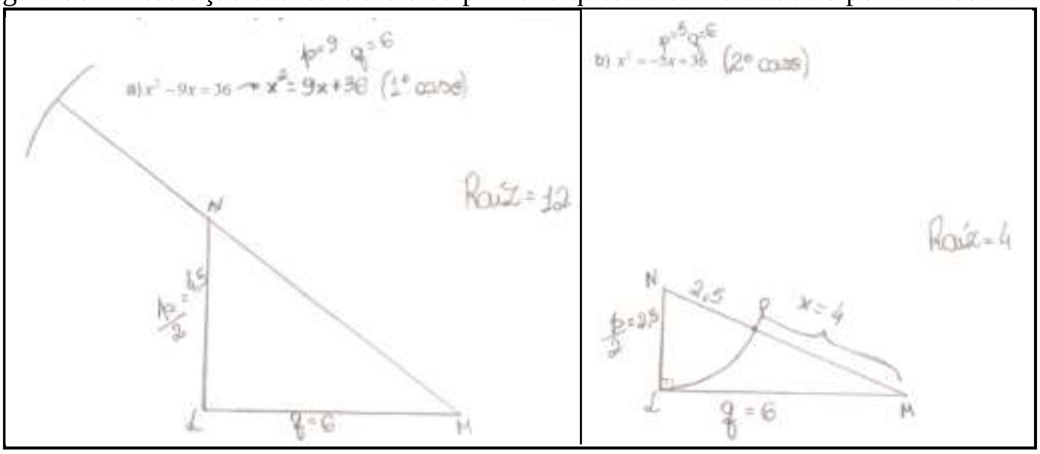
Figura 52 – Associação entre os casos estudados no segundo encontro e as equações da primeira questão da Atividade 3



Fonte: Elaboração própria.

Foi dado um tempo para que os alunos resolvessem esta questão e eles não tiveram dificuldades. A Figura 53 mostra a resolução dos itens **a** e **b** dessa questão por um dos alunos.

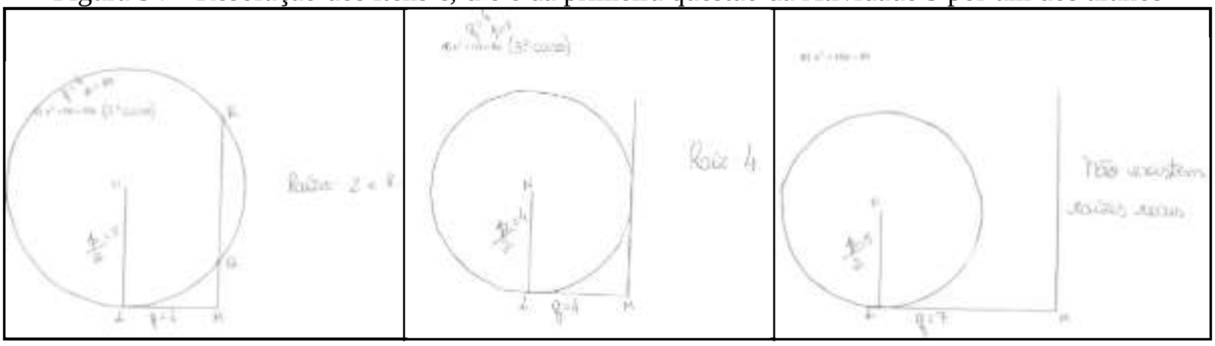
Figura 53 – Resolução dos itens **a** e **b** da primeira questão da Atividade 3 por um dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item **c**, os alunos perceberam que a circunferência cortava a reta paralela à $\overline{LN}$ em dois pontos. As graduandas perguntaram o que isso significava em relação ao número de raízes da equação e estes responderam que a equação possuía duas raízes reais e diferentes. No item **d**, eles viram que a circunferência tangenciava a reta paralela à $\overline{LN}$. Então, novamente, foi perguntado o que isso significava em relação ao número de raízes da equação e eles responderam que a equação possuía duas raízes reais iguais. O mesmo aconteceu no item **e** quando os alunos perceberam que a circunferência não cortava a reta paralela à $\overline{LN}$. Nesse caso, concluíram que a equação não possuía raízes reais. A Figura 54 mostra a resolução dos itens **c**, **d** e **e** dessa questão por um dos alunos.

Figura 54 – Resolução dos itens **c**, **d** e **e** da primeira questão da Atividade 3 por um dos alunos



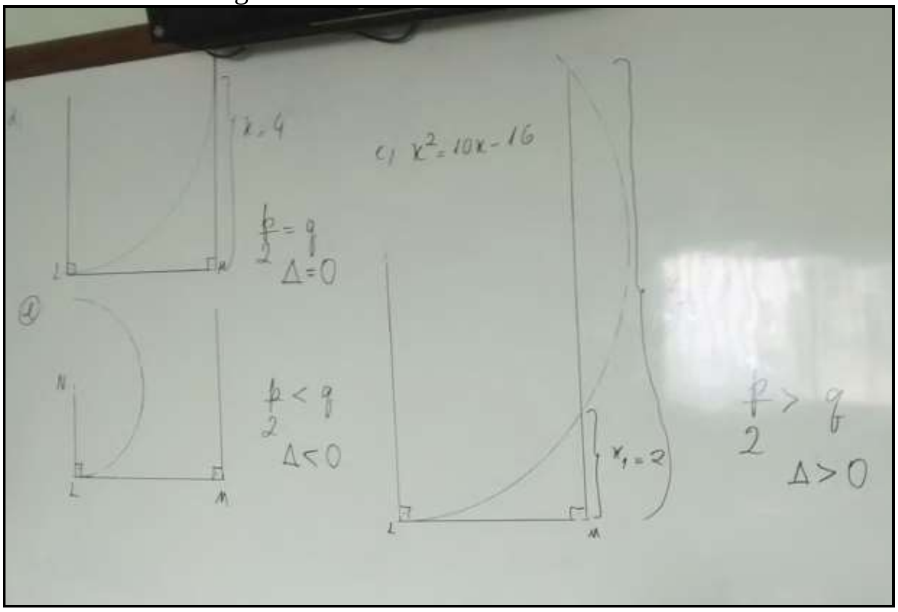
Fonte: Protocolo de pesquisa

Percebeu-se, novamente, a grande falta de habilidade de alguns alunos no manuseio dos instrumentos geométricos. Por este motivo, algumas construções ficaram erradas e com traçados imprecisos. As graduandas tiveram que ajudá-los em alguns momentos.

A seguir, foi dado um tempo para que os alunos resolvessem a segunda questão da Atividade 3, de relacionar a posição da circunferência em relação à reta paralela à $\overline{LN}$, o número de soluções encontradas nos itens **c**, **d** e **e** da questão anterior e o valor de delta. Os alunos conseguiram perceber a relação, em cada caso, entre esses valores.

Logo após, foi feita a correção das questões no quadro (Figura 55) e perguntado aos alunos se existia alguma restrição relacionada aos coeficientes da equação quadrática $x^2 = px - q^2$ para que a mesma possuísse raízes reais. Os alunos responderam corretamente que para isso acontecer $\frac{p}{2} \geq q$.

Figura 55 – Relação entre os coeficientes da equação quadrática, o valor de Δ e as construções geométricas do método de Descartes



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, foi apresentado o *software* GeoGebra, e os *applets* referentes aos três casos do método de Descartes (Figura 56).

Figura 56- Graduanda manipulando o *applet* do 3º caso

Fonte: Elaboração própria.

No *applet* do 3º caso, os alunos perceberam novamente a restrição no método de Descartes para que existam as raízes da equação quadrática observando que: quando $\frac{p}{2} > q$, a circunferência intersecta a reta paralela à $\overline{LN}$ em dois pontos e, neste caso, a equação quadrática possui duas raízes reais e diferentes; quando $\frac{p}{2} = q$, a circunferência tangencia a reta paralela à $\overline{LN}$ e, neste caso, a equação possui duas raízes reais e iguais; e quando $\frac{p}{2} < q$, a circunferência não intersecta a reta paralela à $\overline{LN}$ e então, a equação não possui raízes reais.

É importante ressaltar a importância dos *applets* que, por apresentarem outros casos, reforçaram as conclusões já observadas pelos alunos.

3.3 Análise do questionário

Nesta seção, serão mostradas as respostas obtidas no questionário, respondido por sete alunos, participantes da experimentação. Vale destacar que, embora a quantidade de alunos tenha sido reduzida, os que estavam presentes não faltaram a nenhum encontro além de terem sido os mais participativos. Assim, os comentários feitos por eles contribuíram de maneira significativa para esta monografia.

A primeira questão diz respeito à comparação entre os métodos de Descartes e de Bhaskara na resolução de equações quadráticas. Todos os alunos responderam que conseguiram comparar os dois métodos. Destaca-se o comentário de um aluno.

> Eu consegui perceber que mesmo partindo de pontos diferentes os dois casos são convergentes (Aluno A).

Na segunda questão, a maioria dos alunos respondeu que as informações históricas, apresentadas no vídeo e nos *slides* foram importantes. Um deles, embora reconhecendo o valor do tema, não o acha fundamental ao processo de ensino e aprendizagem.

> É uma ferramenta boa, para atrair a atenção e o interesse dos alunos e é legal e interessante observar a evolução dos métodos, porém não é vital ao processo de aprendizagem (Aluno B).

A primeira parte da escrita do Aluno B está de acordo com Machado e Mendes (2013) quando afirmam que as informações históricas costumam atrair o interesse dos alunos, pois esta pode ser um elemento que viabilize a exploração de fatos, na tentativa de encontrar explicações para os questionamentos comumente utilizados pelos alunos, tais como: “Onde?”, “Por quê?” e “Para quê?”.

Em relação às contribuições históricas dadas por diversos povos na resolução de equações quadráticas, tema da terceira questão, todos os alunos responderam que conseguiram identificar essas contribuições.

> Cada um contribuiu do jeito que sabia fazer, somando ideias e criando regras (Aluno C).
>
> Sem essas contribuições não teríamos chegado aos métodos que conhecemos hoje (Aluno D).

Os relatos acima confirmam o que está escrito nos PCN (2002) de que o conhecimento matemático é construído por meio de um processo histórico. Segundo D'Ambrosio (1999) a história da Matemática se confunde com a história da própria humanidade.

Na quarta questão, todos os alunos responderam que a História da Matemática pode ser um elemento motivador no processo ensino e aprendizagem.

> Fatos históricos e interessantes podem motivar os alunos (Aluno A).
>
> A matemática é por muitos desgastada, acompanhar o processo dela até os dias de hoje facilita um foco novo e expande horizontes, como o método de Descartes, que eu desconhecia e criei certa simpatia (Aluno B).

A escrita do aluno B está em consonância com os PCN (1998) quando afirmam que temas tratados em conexão com a história constituem veículos de grande valor formativo.

Nota-se que a escrita do Aluno B, quando afirma que conhecer novos métodos expande horizontes, corrobora com a fala de um dos licenciandos do Teste Exploratório, quando o mesmo diz que conseguiu ter um novo olhar sobre a "fórmula de Bhaskara", o geométrico.

Na quinta questão, todos os alunos responderam que o método de resolução de equações quadráticas de Descartes contribuiu para a aprendizagem deste tema. Dois dos alunos acrescentaram que este método é mais rápido que o de Bhaskara.

> Sim, falando em termos práticos, tornou possível identificar o caso de Δ ser positivo, negativo ou nulo, simplesmente ao ver a equação (Aluno B).
>
> Sim, pretendo utilizar esse método para realizar exercícios rapidamente (Aluno E).

Os alunos se mostraram bastante interessados no trabalho e fizeram alguns comentários sobre as aulas.

> O trabalho traz um tema a ser abordado que não temos muito contato ou acesso no ensino regular, exceto por algumas pinceladas rápidas. Em suma, o trabalho é bom, já que eu acordei cedo num dia em que não precisaria participar dele (Aluno B).
>
> Foi um bom trabalho que ajudou a tirar dúvidas e ampliar o nosso conhecimento (Aluno A).
>
> Foi um trabalho legal que tirou muitas dúvidas e matou curiosidades (Aluno C)

Com relação ao comentário dos Alunos A e C, Mendes (2001) afirma que a História da Matemática surge como um elemento motivador, pois esclarece as dúvidas de muitos alunos no que diz respeito aos porquês matemáticos.

O aluno B trata da superficialidade com que a História da Matemática se apresenta na sala de aula. Brito (2007) reforça essa ideia ao constatar o papel coadjuvante que as informações históricas possuem no trabalho docente.

De modo geral, os três comentários acima corroboram com Fragoso (2000b) quando afirma que alguns alunos têm curiosidade em saber como certos conteúdos matemáticos se desenvolveram ao longo da história, mas esse esclarecimento não aparece na fala do professor.

Percebe-se nos relatos acima que a utilização da História da Matemática levou a uma maior compreensão sobre a resolução da equação quadrática. Além disso, as informações históricas instigaram a curiosidade dos estudantes e os motivaram a participar da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho monográfico desenvolveu um estudo sobre a resolução de equações quadráticas, utilizando o método geométrico desenvolvido por Descartes, comparou este método com o “método de Bhaskara” e apresentou as contribuições de Descartes e de algumas civilizações na resolução dessas equações.

A pesquisa teve início com a leitura de textos sobre a utilização da História da Matemática nas aulas de Matemática e sobre o método geométrico desenvolvido por Descartes para a obtenção das soluções positivas de equações quadráticas.

Após esta etapa, foi elaborada uma proposta didática e aplicada para alunos da Licenciatura em Matemática. Essa aplicação foi de grande importância, pois permitiu a reformulação de algumas atividades e a adequação no tempo de duração de cada encontro. Os participantes demonstraram grande interesse pelo trabalho, e foi possível analisar por meio dos dados coletados que a proposta foi satisfatória quanto ao cumprimento dos objetivos.

Em seguida, foi feita a experimentação em uma turma de 1.ª série do Ensino Médio. A escolha desta turma se deu devido ao fato de os alunos já terem estudado equação quadrática na série anterior e de possuírem noções básicas de paralelismo e perpendicularidade, necessárias ao trabalho.

Foi possível observar que os alunos tiveram dificuldades em relação à linguagem algébrica e ao manuseio dos instrumentos geométricos. Porém, com a ajuda das graduandas esse problema pôde ser contornado.

Analisando os resultados obtidos, percebeu-se que o trabalho ampliou o conhecimento dos alunos, além de possibilitar um novo olhar para a “fórmula de Bhaskara”. Conhecer a resolução da equação quadrática por outras civilizações permitiu aos alunos entender que essas contribuições foram importantes para se chegar até a fórmula que conhecemos hoje.

Assim, a questão de pesquisa foi respondida de forma afirmativa, ou seja, o método de resolução de equações quadráticas de Descartes contribui para o processo de ensino e aprendizagem deste tema.

A intenção das graduandas ao aplicar este trabalho não foi a de substituir o “método de Bhaskara” pelo método de Descartes e, sim, complementar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos.

É importante ressaltar que foi muito gratificante para as graduandas perceber o interesse dos alunos pelo trabalho, e que a pesquisa acrescentou experiência em sala de aula e um conhecimento aprofundado sobre a História da Matemática e René Descartes.

Neste trabalho, o aluno não ouviu somente a história. Ele refez o estudo das equações quadráticas de Descartes por meio de atividades, num processo autêntico e questionador.

Além disso, espera-se que esta pesquisa possa indicar a importância de se trabalhar História da Matemática não apenas como um apêndice nas aulas de Matemática, mas como protagonista no processo de construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, C; PINTO, E. M. F.; LOPES, J.; NOGUEIRA, L.; PINTO, RICARDO. *Estudo de caso.* 2008. Universidade do Minho. Disponível em: < http://www.grupo4te.com.sapo.pt/estudo_caso.pdf > Acesso em: 14 fev. 2014.

BARONI, R. L.; TEIXEIRA, M.; NOBRE, S. A investigação científica em História da Matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, M.; BORBA, M. (Org.). *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2009, p.164-185.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Ensino Médio. *Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. *Orientações curriculares para o Ensino Médio.* v.2. 135p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 49, p. 22-26, 2002.

BRITO, A. J. A História da Matemática e a Educação Matemática na formação de professores. *Educação Matemática em Revista*, ano 13, n. 22, p. 11-15, 2007.

CASTELO, J. A. M. *Resolução de Equações Quadráticas*: Um Resgate Histórico dos Métodos e uma Proposta de Aplicação da Sequencia Fedathino seu Ensino. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

COSTA, L. S. *O Hábito de Ler: Suas Implicações para o Processo de Formação no Ensino Superior*. Disponível em: <http://www.ie.ufmt.br/semiedu2008/gts/gt14/Poster/LINDALVA%20SOUSA%20DA%20COSTA.pdf> Acesso em 24 mar. 2015.

CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa:* métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D'AMBRÓSIO, U. A História da Matemática: questões histográficas e políticas e reflexos na educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V. *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999, p.97-115.

D'AMBRÓSIO, U. História da Matemática e Educação. *Caderno Cedes 40:* História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, p.7-17, 1996.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9*. São Paulo: Atual, 2005.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. ln: MACHADO, S. D. A. (Org). *Aprendizagem em Matemática.* São Paulo: Papirus, 2003.

FRAGOSO, W. C. Equação do 2º. Grau: Uma Abordagem Histórica. *Educação Matemática em Revista*. s.l., n. 8, p. 57-61, ano 7, 2000a.

FRAGOSO, W. C. Uma abordagem Histórica da Equação do 2º. Grau. *Revista do professor de matemática*. Santa Maria, n. 43, p. 20-25, 2000b.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GASPERI, W. N. H. de; PACHECO, E. R. *A História da Matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica.* [s.d.]. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf>. Acesso em: 24 jan. 2015.

GIL, K. H. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra.* 2008.. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – PUCRS, Porto Alegre, 2008.

GOLDENBERG, M. *A arte de Pesquisar:* como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GOUVÊA, F. A. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração:* uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

GROENWALD, C. L. S. *Perspectivas em Educação Matemática*. Canoas: Ulbra, 2004.

GUARNIERI, D. A importância do desenho geométrico para melhor qualidade do ensino de geometria. *Revista Diálogos & Saberes.* Mandaguari, v. 7, n. 1, p. 67-71, 2011.

IMENES, L. M. P. JAKUBOVIC, J. LELLIS, M. C. T. *Equação do 2º. grau*. São Paulo: Atual, 1992 (Pra que serve matemática?).

LARA, I. C. M. de. O ensino da Matemática por meio da História da Matemática: possíveis articulações com a Etnomatemática. *Vidya*, v. 33, p. 51-62, 2013.

LÉVY, P. C*ibercultura*. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1999.

LORENZATO, S. *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MACHADO, B. F; MENDES, I. A. *Vídeos didáticos de história da matemática*: produção e uso na Educação Básica. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

MARINHO, J. et.al. A importância do desenho geométrico no ensino básico e técnico de nível médio. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E EXTENSÃO DO IFTO, 1., 2010, Tocantins. *Anais*... Tocantins: IFTO, 2010. p. 1-7. Disponível em: <www.ifto.edu.br/jornadacientifica/wp-content/uploads/2010/12/06-A-IMPORTÂNCIA-DO.pdf> Acesso em: 31 mar. 2015.

MENDES, I. A. *O uso da História no ensino da Matemática*: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

MENEZES, A. P.S.; KALHIL, J.B.; MAIA, D. P.; SAMPAIO, E.S. O Uso do *Software Windows Movie Maker* como Recurso Facilitador no Processo Ensino-Aprendizagem no Ensino de Ciências na Amazônia. In: SENEPT - SEMINÁRIO NACIONAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA, 1., 2008, Belo Horizonte. *Anai*s**...** BELO HORIZONTE: CEFET, 2008.

MORAN, J. M. O Vídeo Na Sala de Aula. *Comunicação & Educação.* São Paulo, v. 2, n.2, p. 27-35, 1995.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.* Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, L. S.; GOMES, C. S. *Desenvolvimento de Recursos Pedagógicos para o Estudo de Trigonometria Utilizando o Software Geogebra.* 2008. 114 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2008.

NOBRE, S. *História da resolução da equação de 2º. Grau:* uma abordagem pedagógica. Rio Claro: SBHMat, 2003.

NOGUEIRA, J. B. *A utilização de Animações em Power Point como ferramenta didático-pedagógica para o Ensino da Matemática*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013.

PAZ, A. L.; NANTES, M. A. F.; CARVALHO, D.P. Explorando alguns métodos não convencionais de resolução da equação do segundo grau. In: SIMPÓSIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE NOVA ANDRADINA, 2011, Nova Andradina. *Anais...* Nova Andradina: UEMS, 2011.

PEDROSO, H. A. Uma Breve História da Equação de 2º Grau. *Revista eletrônica de matemática.* Jataí, n. 2, p. 1-13, 2010.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino básico*, 2009. Disponível em: <www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%287Set2009%29.pdf> Acesso em: 31 mar. 2015.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema.* v. 19, n. 25, 2006, p. 1-23.

REFATTI,L. R. BISOGNIN,E. Aspectos Históricos e Geométricos da Equação Quadrática**.** *Disc. Scientia.* Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 6, n. 1, p.79-95, 2005.

ROQUE, T. *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de história da Matemática*.. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

SAMPAIO, J. L. CALÇADA, C. S. *Física*. São Paulo: Atual, 2005.

SANTOS, J. A. G. *O Sentido de Aprender Matemática Acerca da Fórmula de Bhaskara***.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2011. Disponível em: <http://bdtd.ufs.br/tde_arquivos/18/TDE-2013-05-15T164600Z-1104/Publico/JOSE_ALDON_GARCAO_SANTOS.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.. *Matemática*: Ensino Médio. v.1. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

TROVON, A. *A Equação Quadrática*. 2012. Disponível em: <http://people.ufpr.br/~trovon/cursos/2012_Topicos_de_Historia/A_Equacao_Quadratica.pdf > Acesso em: 21 mar. 2015.

VAILATI, J. de S. PACHECO, E. R. *Usando a História da Matemática no Ensino da Álgebra*. s.d. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf >. Acesso em: 29 jan. 2015

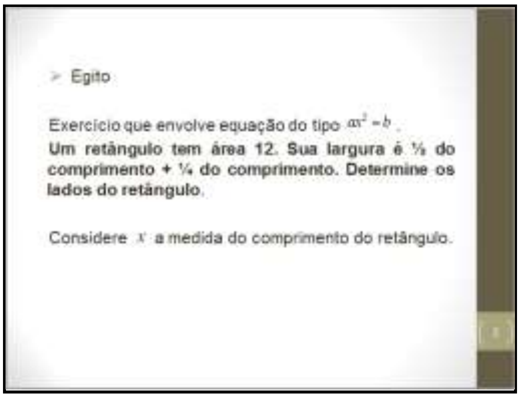
WAGNER, E. Um pouco sobre Descartes. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, n. 19, p. 9-14, 2.sem. 1991.

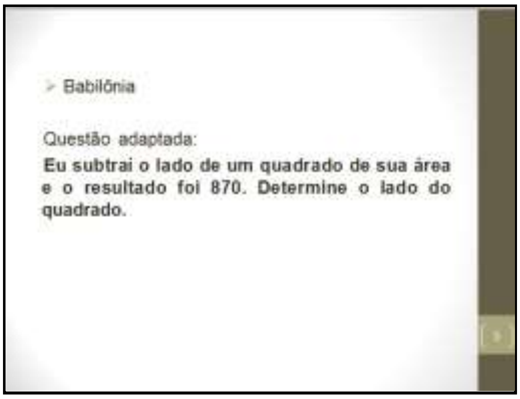
YIN, R. *Estudo de caso:* planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2010.

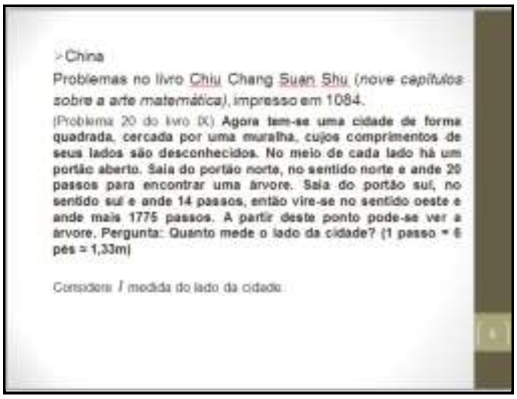
ZUIN, E. S. L. *Os papiros egípcios como fontes para um trabalho com a história da matemática em sala de aula*. 2013. Disponível em: < http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3611_2037_ID.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A: *slides*







Matemáticos que estudaram a equação quadrática

- Pitágoras (572 – 497 a.C.)

Acredita-se que Pitágoras e seus discípulos resolveram, geometricamente equações do tipo $x^2 = ab$, $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ e $x^2 + b = ax$.

7

- Euclides (c.300 a.C.)

Em sua obra *Elementos*, Euclides mostrou como resolver geometricamente problemas que envolviam equações quadráticas.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/euclides.htm

8

- Al-Khwārizmi (c. 780-850)

Apresentava as resoluções de equações quadráticas e logo após justificava geometricamente.

9

Exemplo de um problema e a respectiva resolução dada por Al-Khwārizmi:

Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?

Considere l o lado do quadrado.

10

Resolução:

Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome, então a raiz quadrada disto que é igual a oito, e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove.

$5x5 = 25 \quad 25 + 39 = 64 \quad \sqrt{64} = 8 \quad 8 - 5 = 3 \quad 3 = \sqrt{9}$

11

- Bhaskara (1114-1185)

Problema:

Verso 77 – De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?

12

Resolução:

"[é] por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar."

13

- Viète (1540 – 1603)

- Foi o primeiro a trabalhar com a ideia de uma quantidade desconhecida (incógnita).
- Utilizou uma vogal para representar uma quantidade desconhecida ou indeterminada e uma consoante para representar uma grandeza ou número conhecido ou dado.

14

- Viète desenvolveu dois novos métodos de solução para equações quadráticas e percebeu algumas relações entre seus coeficientes e raízes.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm34/viete.htm

15

- René Descartes (1596-1650)

Fonte: BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

16

Evolução da linguagem algébrica na representação da equação quadrática

Notação: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Ano	Matemático	Representação
1494	Luca Pacioli (Itália)	Trouame . 5 . n°. che gioto al suo qdrat° facia 6
1514	Vander Hoecke (Inglaterra)	1 Se. + 5 Pri. dit is ghelijc 6
1521	F. Ghaligai (Itália)	1 □ e 5 C° - 6 numeri
1525	Christoph Rudolff (Alemanha)	Sit 1$_3$ aequatus - 5 ℨ + 6

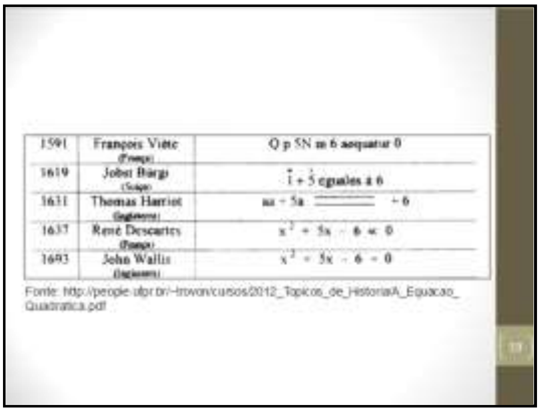
Fonte: http://people.ufpr.br/~hovon/cursos2012_Topicos_de_HistoriaA_Equacao_Quadratica.pdf

17

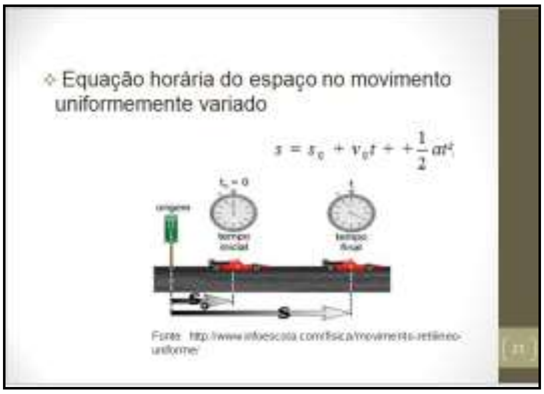
1545	Girolamo Cardano (Itália)	Quadratus p 5 rebus aequalis 6
1553	Michael Stifel (Alemanha)	5 ℨ + 1$_3$ aequata 6
1559	J. Buteo (Itália)	1 ◊ P 5p [P 6
1572	Rafael Bombelli (Itália)	1 p 5 Equale à 6
1585	Simon Stevin (Holanda)	1 + 5 egale à 6

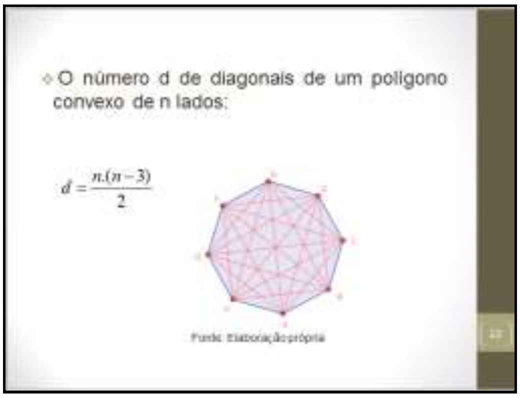
Fonte: http://people.ufpr.br/~hovon/cursos2012_Topicos_de_HistoriaA_Equacao_Quadratica.pdf

18


1591 François Viète (França) Q p 5N m 6 aequatur 0
1619 Jobst Bürgi (Suíça) i + 5 eguales à 6
1631 Thomas Harriot (Inglaterra) aa + 5a ===== + 6
1637 René Descartes (França) x² + 5x - 6 ∞ 0
1693 John Wallis (Inglaterra) x² + 5x - 6 = 0
Fonte: http://people.ufpr.br/~lrowon/cursos/2012_Topicos_de_HistoriaA_Equacao_Quadratica.pdf


Aplicações
Lei da Queda dos Corpos: d = (1/2)gt²
Fonte: http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20041/Ghisiane/queda_dos_corpos.htm


Equação horária do espaço no movimento uniformemente variado
s = s₀ + v₀t + + 1/2 at²
origem
tempo inicial
tempo final
S
Fonte: http://www.infoescola.com/fisica/movimento-retilineo-uniforme/


O número d de diagonais de um polígono convexo de n lados:
d = n.(n-3)/2
Fonte: Elaboração própria

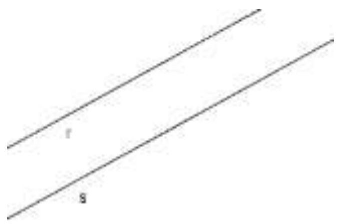
APÊNDICE B: Atividade 1

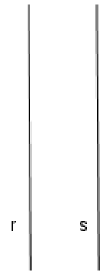
Licenciatura em Matemática
Graduandas: Fernanda Manhães Santos e Ingrid Suély Queiroz da Silva.
Nome:____ Data:___/___/___

Atividade 1

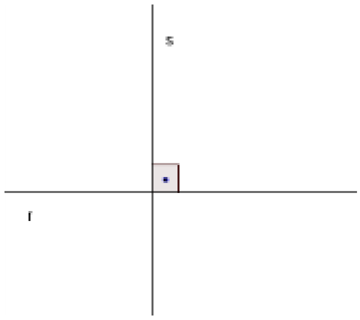
O objetivo dessa Atividade[5] é rever alguns conceitos de Geometria Plana, necessários para o desenvolvimento da Atividade 2, principal deste trabalho.

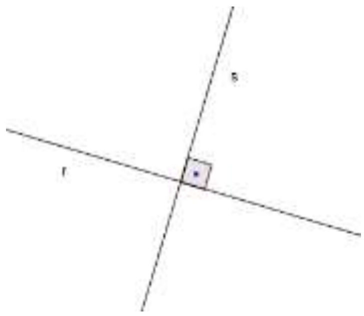
- Duas retas são paralelas quando não têm pontos de interseção e são coplanares (LIMA et al., 1999)[6].





- Duas retas concorrentes são perpendiculares quando se encontram formando quatro ângulos iguais; cada um deles é chamado de ângulo reto (LIMA et al., 1999).





[5]Atividade adaptada do trabalho: Construção de quadriláteros notáveis com o auxílio de instrumentos geométricos, desenvolvido na disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) por Aline Rodrigues da Silva, Fernanda Manhães Santos, Mayara Carlos Barbosa e Pâmella de Alvarenga Souza.

[6] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

Exercícios

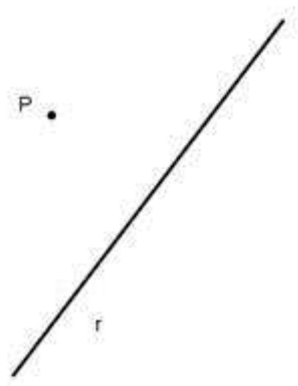
1) Construa, usando um par de esquadros, duas retas paralelas.

2) Construa, usando um par de esquadros, duas retas perpendiculares.

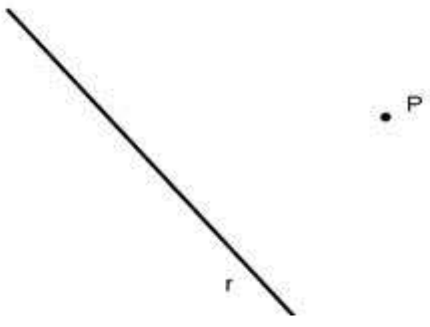
3) Construa, usando um compasso, duas retas perpendiculares.

4) Construa, usando um par de esquadros, uma **reta paralela** à reta r passando pelo ponto P.

a)

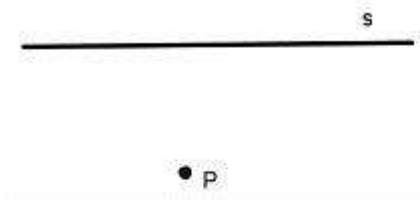


b)



5) Construa, usando um compasso, uma **reta perpendicular** a reta dada passando pelo ponto P.

a)



b)

APÊNDICE C: Atividade 2

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

matemática LICENCIATURA

Licenciatura em Matemática
Graduandas: Fernanda Manhães Santos e Ingrid Suély Queiroz da Silva.
Nome:____ Data:___/___/___

Atividade 2

René Descartes (1596-1650) é considerado um dos grandes matemáticos do século XVII. Conseguiu fazer associações entre a Geometria e a Álgebra e por isso seu nome está associado aos fundamentos da Geometria Analítica (CONEGLIAN et al., 2010).

Descartes criou um método novo para o conhecimento do mundo por meio da ciência e do raciocínio, e o expôs em *Discours de la Méthode pour bien conduire la Raison e chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e procurar a Verdade nas Ciências). Um dos anexos deste livro, chamado *La Géométrie* tinha por objetivo obter construções geométricas para as operações algébricas. Em uma pequena parte, Descartes desenvolveu um método geométrico para obtenção das soluções positivas de equações quadráticas (WAGNER, 1991).

A seguir, analisaremos três casos abordados por Descartes em seu método e que estão presentes nesse livro.

Para cada situação, é proposta a resolução de uma equação com valores numéricos para p e q.

1º. CASO: equações do tipo $x^2 = px + q^2$, $p > 0$, $q > 0$.

- Construa um triângulo retângulo com um cateto $\overline{LM}$ de medida q e o outro $\overline{LN}$ de medida $\frac{p}{2}$;
- Prolongue $\overline{MN}$ até O, tal que as medidas dos segmentos $\overline{NO}$ e $\overline{NL}$ sejam iguais;
- $\overline{OM}$ é a linha x procurada.

OBS.: A medida do segmento $\overline{OM}$ corresponde, em linguagem atual, à raiz da equação.

1. Resolva a equação $x^2 = 6x + 16$

a) pelo método de Descartes;

b)pelo “método de Bhaskara”, considerando apenas a raiz positiva;

2. Mostre a equivalência entre os dois métodos algebricamente.

Referências

CONEGLIAN, S. M. G. G.; SANTOS, C. A. dos; MELO, J. J. P. Reflexões sobre a vida de descartes e o plano cartesiano.In: SIMPÓSIO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2., 2010, Cascavel. **Anais**...Cascavel: UEM, 2010.

WAGNER, E. Um pouco sobre Descartes. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro, n. 19, p. 9-14, 2. sem. 1991

2º. CASO: equações do tipo $x^2 = -px + q^2$, $p > 0$, $q > 0$.

- Construa um triângulo retângulo com um cateto $\overline{LM}$ de medida q e o outro $\overline{LN}$ de medida $\frac{p}{2}$;
- Sobre a hipotenusa $\overline{MN}$ ponha a medida do segmento $\overline{NP}$ igual a medida do segmento $\overline{NL}$;
- O restante $\overline{PM}$ é x, a raiz procurada.

OBS.: A medida do segmento $\overline{PM}$ corresponde, em linguagem atual, à raiz da equação.

1. Resolva a equação $x^2 = -6x + 16$

a) pelo método de Descartes;

b) pelo “método de Bhaskara”, considerando apenas a raiz positiva;

2. Mostre a equivalência entre os dois métodos algebricamente.

3º. CASO: equações do tipo $x^2 = px - q^2$

- Construa $\overline{LM}$ de medida igual a q e $\overline{LN}$ de medida igual a $\frac{p}{2}$, como anteriormente, porém não construa a hipotenusa do triângulo retângulo;
- Trace uma paralela a $\overline{LN}$, passando por M;
- Com centro em N, descreva um círculo partindo de L que corta a reta paralela nos pontos Q e R;
- A linha procurada pode ser $\overline{MQ}$ ou $\overline{MR}$.

OBS.: A medida do segmento $\overline{MQ}$ ou $\overline{MR}$ corresponde, em linguagem atual, às raízes da equação.

1. Resolva a equação $x^2 = 5x - 4$

a) pelo método de Descartes;

b) pelo “método de Bhaskara”;

2. Mostre a equivalência entre os dois métodos algebricamente.

APÊNDICE D: Atividade 3

Licenciatura em Matemática
Graduandas: Fernanda Manhães Santos e Ingrid Suély Queiroz da Silva.
Nome:____ Data:___/___/___

Atividade 3

1) Resolva as equações abaixo pelo método de Descartes.

a) $x^2 - 9x = 36$

b) $x^2 = -5x + 36$

c) $x^2 + 16 = 10x$

d) $x^2 + 16 = 8x$

e) $x^2 = 10x - 49$

2. Relacione a posição da circunferência em relação à reta paralela a $\overline{LN}$, o número de soluções encontradas nos itens **c**, **d** e **e** da questão anterior e o valor da expressão $b^2 - 4ac = \Delta$ na equação $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$.

APÊNDICE E: Questionário

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

matemática LICENCIATURA

Licenciatura em Matemática
Graduandas: Fernanda Manhães Santos e Ingrid Suély Queiroz da Silva.
Nome:____ Data:___/___/___

QUESTIONÁRIO

1. Você conseguiu comparar os métodos de Descartes e de Bhaskara na resolução de equações quadráticas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Comente.

____

____

2. Você considera as informações históricas, apresentadas no vídeo e nos *slides*:

☐ muito importante; ☐ pouco importante;

☐ importante; ☐ quase desnecessário.

☐ desnecessário;

Comente.

____

____

3. Você conseguiu identificar as contribuições históricas dadas por diversos povos na resolução de equações quadráticas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Comente.

____

____

4. Você concorda que a História da Matemática pode ser um elemento motivador no processo ensino e aprendizagem?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Comente.

____

____

5. O método de resolução de equações quadráticas de Descartes contribuiu para a sua aprendizagem sobre esse tema? Comente.

____

____

____

____

6. Se quiser, escreva no espaço abaixo comentários sobre o trabalho.

____

____

____

____