LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO DE CASO NA RESOLUÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS POR ALUNOS CEGOS

LUTYENE DE OLIVEIRA DA SILVA
SARA GOMES DA SILVA DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2015

LUTYENE DE OLIVEIRA DA SILVA
SARA GOMES DA SILVA DE ALMEIDA

UM ESTUDO DE CASO NA RESOLUÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS POR ALUNOS CEGOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos – Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. M.Sc. Mylane dos Santos Barreto.

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

S586u Silva, Lutyene de Oliveira da.
Um estudo de caso na resolução e interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas por alunos cegos./ Lutyene de Oliveira da Silva, Sara Gomes da Silva de Almeida – 2015.
81 f.: il. Color.

Orientadora: Mylane dos Santos Barreto

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos Centro. Campos dos Goytacazes (RJ), 2015.
Referências: p. 61-63.

1. Sistemas lineares. 2.Cegos – Educação – Matemática. I. Almeida, Sara Gomes da Silva de. II. Barreto, Mylane dos Santos, orient. III. Título.

CDD – 515.35

LUTYENE DE OLIVEIRA DA SILVA
SARA GOMES DA SILVA DE ALMEIDA

UM ESTUDO DE CASO NA RESOLUÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS POR ALUNOS CEGOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos – Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 04 de agosto de 2015.

Banca Avaliadora:

____

Profª. Mylane dos Santos Barreto (orientadora)
Mestre em Matemática/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro.

____

Profª. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro.

____

Profª. Sirley Brandão dos Santos
Mestre em Engenharia e Ciência de Materiais/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, principal responsável por tudo, pela força para superar os obstáculos encontrados ao longo da caminhada.

A todos os nossos familiares pelo incentivo, apoio, compreensão, amor e, principalmente, pelo companheirismo, sempre estando ao nosso lado em todos os momentos.

À nossa Orientadora, Mylane dos Santos Barreto, pela paciência, dedicação, incentivo e sabedoria que muito nos auxiliou para conclusão deste trabalho.

Ao corpo docente do curso de licenciatura em Matemática que nos proporcionaram uma excelente formação.

A Sirley Brandão dos Santos, à coordenadora do NAPNEE do IFF *Campus* Campos - Centro pelo apoio e incentivo na confecção dos materiais.

Por fim, a todos os amigos, que nos ensinaram, incentivaram e ajudaram, direta ou indiretamente, contribuindo assim, para nosso crescimento e conclusão deste trabalho.

“Se os meus olhos não me deixam obter informações sobre homens e eventos, sobre ideias e doutrinas, terei de encontrar uma outra forma”. Louis Braille

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo verificar se o uso de materiais manipuláveis facilita o processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas por alunos cegos, identificando possibilidades e dificuldades no uso do material. Pretende-se, também, verificar de que forma os sistemas, háptico, fonador e auditivo devem ser empregados. Assim, elaborou-se uma sequência didática de maneira que explorasse os sistemas háptico, fonador e auditivo, buscando promover uma aprendizagem significativa, pois segundo Vygotsky, os alunos cegos apresentam uma deficiência sensorial e não cognitiva e, portanto, apresentam a mesma capacidade de desenvolvimento da aprendizagem de um aluno “normal”. A experimentação da sequência didática aconteceu com duas alunas cegas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro. A apostila elaborada foi transcrita para Braille, os gráficos foram reproduzidos em películas de PVC, impressas em uma máquina Thermoform Ez-Form. Além disso, foi confeccionada uma malha de EVA com velcro para fixação de números e símbolos matemáticos no momento da resolução de sistemas lineares. Ao usar o sistema háptico, as alunas exploraram as películas para obterem informações sobre representações geométricas dos sistemas lineares. Vale ressaltar que o uso das películas possibilitou a marcação de pontos e a construção de gráficos. Com a utilização dos materiais manipuláveis, os alunos cegos, alcançaram bons desempenhos, além de terem igualmente acesso aos conhecimentos necessários, possibilitando realizar todas as atividades.

Palavras-chave: Deficiência Visual. Materiais Manipuláveis. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

This study aims to determine whether the use of manipulative materials facilitate the teaching and learning of linear systems with two equations and two unknowns for blind students (and to identify) possibilities and difficulties in the use of the material. It is also intended to verify how the systems, haptic, vocal and hearing should be employed. We elaborated a didactic sequence so that we could explore the haptic systems, vocal systems and hearing systems, with the objective to promote meaningful learning.

According to Vygotsky, the blind have a sensory disability and not a cognitive disability, with the same learning capacity development. The trial of the instructional sequence happened to two blind students of the Federal Fluminense Campus Courses Central Institute. The booklet has been prepared in Braille, so that they could do the reading, and the materials were prepared in PVC film, printed on the machine thermoform Ez-Form, in addition to EVA mesh. By using the haptic system, students explored the films for information about geometric representations of linear systems. Furthermore, the use of films allowed the marking points and building graphics. With the use of manipulative materials blind students have achieved good performances, and have also access to the necessary knowledge, allowing them to perform all activities.

Keywords: Visual impairment. Manipulatives materials. Linear Systems.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

I- INTRODUÇÃO

A história mostra que o mundo sofreu muitas desigualdades culturais, sociais e econômicas que permanecem na atual sociedade. Cabe à escola exercer um papel importante contra os reflexos dessas desigualdades no crescimento e desenvolvimento do indivíduo.

> Quanto maior for a capacidade das escolas de oferecer ensino de qualidade capaz de superar as desvantagens de origem social dos alunos, maiores são as chances do sistema diminuir as desigualdades de oportunidades educacionais (RIBEIRO, 2011, p.41).

No contexto em que vivemos, passamos por várias mudanças na área do ensino. Uma delas, bastante significativa, é a discussão sobre a inclusão escolar de estudantes com necessidades especiais. Como salienta Mendes (2006, p.387), “a história da educação especial começou a ser traçada no século XVI, com médicos e pedagogos que, desafiando os conceitos vigentes na época, acreditaram nas possibilidades de indivíduos até então considerados ineducáveis”.

Em 1994, ocorreu a Conferência Mundial sobre Necessidades Educacionais Especiais, que deu origem à Declaração de Salamanca, um importante marco para a explanação da inclusão escolar.

A inclusão escolar implica:

> [...] inserção de todos, sem distinção de condições lingüísticas, sensoriais, cognitivas, físicas, emocionais, étnicas, socioeconômicas ou outras e requer sistemas educacionais planejados e organizados que dêem conta da diversidade dos alunos e ofereçam respostas adequadas às suas características e necessidades (BRASIL, 1998, p.17).

Portanto, é necessário que o sistema educacional esteja preparado para receber e se adequar às diversidades desses alunos que possuem algum tipo de deficiência, buscando meios e alternativas para que haja um aprendizado significativo.

Segundo Vygotsky (1997), cada aluno apresenta, em cada etapa do desenvolvimento cognitivo, características específicas e quantitativas. Além disso, a deficiência cria estímulos para a utilização dos órgãos não afetados, como uma compensação.

Desse modo, é possível que o aluno com deficiência visual tenha o mesmo desenvolvimento cognitivo de um aluno vidente. O aluno cego consegue superar os limites causados pela deficiência de um modo distinto, desenvolvendo e apurando outros órgãos para promover a construção do conhecimento.

A sequência didática abordada neste trabalho é voltada para alunos cegos que tenham domínio da escrita Braille, seguindo os preceitos da Nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei 9394/1996, que institui o processo de inclusão de todas as crianças nas escolas públicas brasileiras, assegurando às pessoas com deficiência, superdotados e portadores de dificuldades educativas o direito ao acesso e permanência nas instituições de ensino, devendo ser respeitados em suas diferenças e acolhidos de forma integral. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> A inclusão escolar constitui, portanto, uma proposta politicamente correta que representa valores simbólicos importantes, condizentes com a igualdade de direitos e de oportunidades educacionais para todos, em um ambiente educacional favorável (BRASIL, p.17, 1998).

Diante do exposto, surgiu a seguinte questão de pesquisa: Como o uso de material manipulável facilita o processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas por alunos cegos?

Sendo assim, neste trabalho será desenvolvida uma sequência didática que aborde a resolução e interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas (LIMA. et al, 2005, p.97) com o objetivo de identificar as possibilidades e dificuldades da utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de alunos cegos.

Serão utilizados, como aporte teórico, os estudos de Araújo e Marszaukowski (2009), Coelho e Barroco (2011), Fernandes (2004), Vygotsky (1993) e a legislação presente no Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA, 1990) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais: Adaptações Curriculares (BRASIL, 1998), entre outros.

Sabe-se que, para estudantes sem deficiência visual, existem diferentes metodologias de ensino de Matemática, entretanto para alunos com deficiência visual existem limitações em alternativas metodológicas. É necessário que a escola e os ambientes educacionais se adaptem para receber os alunos com deficiência visual. Sobre a carência de pesquisas acerca do ensino e aprendizagem de Matemática em uma perspectiva inclusiva, Zuffi, Jacomelli e Palombo (2011, p.11) afirmam,

> Há um vasto campo em aberto para pesquisas e relatos de experiências que possam também colaborar como material de suporte e trocas para o professor de Matemática, que não é um educador especializado para o ensino desse público, mas que tem o desafio de incluí-lo em suas salas de aula.

O interesse pelo tema surgiu da nossa experiência como bosista de monitoria e extensão de projetos para alunos cegos vinculados ao Núcleo de Apoio a Pessoas com Necessidades Educacionais Especiais (NAPNEE) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. O primeiro aborda a legislação que ampara a inclusão de alunos com deficiência apoiada por inúmeras normas jurídicas tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, Constituição Federal, Lei de Diretrizes e Bases, Estatuto da Criança e do Adolescente, Declaração de Salamanca, entre outras. Todas essas normas afirmam que os alunos com deficiência devem fazer parte de uma escola regular e participar de maneira igualitária das atividades escolares. Afirmam, ainda, que as escolas regulares devem estar preparadas para atender todas as necessidades dos alunos, assegurando atendimento especializado. O segundo capítulo apresenta o aporte teórico, trazendo estudos de Vygotsky sobre defectologia, compensação e a supercompensação, funções psicológicas superiores e mediação, além de exibir aspectos importantes sobre a utilização dos sistemas háptico, fonador e auditivo no processo de ensino e aprendizagem. No terceiro capítulo, é exposta a justificativa para a escolha da metodologia de pesquisa, estudo de caso, e ainda relatada a elaboração da sequência didática e sua experimentação. O último capítulo exibe as considerações finais do trabalho.

1. LEGISLAÇÃO: EDUCAÇÃO INCLUSIVA

A educação inclusiva é um movimento mundial que defende a permanência de alunos com deficiência nos estabelecimentos de ensino regular sem sofrer nenhum tipo de discriminação. Como afirma a Constituição Federal (1988, p. 122) no artigo 208, do capítulo III seção I e inciso III, é dever do Estado garantir “atendimento educacional especializado aos portadores de deficiência, preferencialmente na rede regular de ensino”.

A inclusão social vem trazendo várias questões à tona, mudando o nosso jeito de olhar o mundo, as pessoas e as coisas que estão ao nosso redor. É importante termos consciência de que todos nós somos diferentes e temos limitações e dificuldades. As pessoas com deficiência desenvolvem habilidades para suprir as limitações causadas pela deficiência e, principalmente, no caso das deficiências sensoriais, o indivíduo apresenta o mesmo potencial de desenvolvimento cognitivo de uma pessoa dita “normal”.

A educação inclusiva assegura a participação, de todas as pessoas, sem discriminação, da experiência educativa e de qualidade, sendo respeitadas as diferenças e valorizando a diversidade. Além disso, está apoiada por inúmeras normas jurídicas que fortalecem a prática da cidadania.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), no Brasil, esse movimento teve início na década de 90, sem distinção de condições linguísticas, sensoriais, cognitivas, físicas ou outras e requer um ambiente bem planejado e organizado para atender de maneira adequada todas as necessidades e características dos alunos.

Com base no Estatuto da Criança e do Adolescente - ECA (BRASIL, 1990), a lei 8069/90 afirma, no artigo 54, que é dever do Estado assegurar à criança e ao adolescente com deficiência atendimento educacional especializado, preferencialmente na rede regular de ensino.

Em 1994, foi promovida uma Conferência Mundial organizada pelo Governo da Espanha em parceria com a UNESCO. A Conferência teve mais de 300 participantes, representando 92 governos e 25 organizações internacionais com objetivo de estabelecer mudanças fundamentais de política necessárias para desenvolver a abordagem da educação inclusiva.

A Conferência resultou em um dos documentos mais importantes para a educação inclusiva, intitulado como Declaração de Salamanca, e constitui uma importante contribuição ao programa que visa à educação para todos, e norteando caminhos e atitudes que devem ser desenvolvidas para obter uma educação de qualidade para todos.

Tratando-se de alunos com deficiência a Declaração de Salamanca (1994, p.12) afirma que “nas escolas inclusivas, os alunos com necessidades educativas especiais devem receber o apoio suplementar de que precisam para assegurar uma educação eficaz”.

A escola deve apresentar estrutura física e curricular para se tornar inclusiva, a adaptação deve ser por parte da instituição e não do aluno com deficiência. A escola deve se preparar para receber todos os alunos e não exigir que os alunos com deficiência busquem métodos para se adaptar à estrutura e à rotina da escola.

> Os currículos devem adaptar-se às necessidades da criança e não vice - versa. As escolas, portanto, terão de fornecer oportunidades curriculares que correspondam às crianças com capacidades e interesses distintos. As crianças com necessidades especiais devem receber apoio pedagógico suplementar no contexto do currículo regular e não um curriculum diferente. O princípio orientador será o de fornecer a todas a mesma educação, proporcionando assistência e os apoios suplementares aos que deles necessitem (UNESCO, 1994, p.22).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (BRASIL, 2006), no capítulo V, refere-se à Educação Especial e determina como modalidade de educação escolar, oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para educandos com necessidades especiais. No artigo 59, inciso I relata que os sistemas de ensino assegurarão aos educandos com necessidades especiais currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específicos, para atender às suas necessidades. O artigo ainda menciona no inciso III, que os professores deverão receber especialização adequada em nível médio ou superior, visando à inclusão dos alunos com deficiência nas classes comuns e promovendo a sua efetiva integração na vida em sociedade com condições adequadas para a inserção no mercado de trabalho.

O Decreto nº 186/08 (BRASIL, 2008), republicado em 20 de agosto de 2008, aprova o texto da Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência (BRASIL, 2007) e de seu Protocolo Facultativo, assinados em Nova Iorque, em 30 de março de 2007. O propósito da Convenção é promover, proteger e assegurar o exercício pleno e equitativo de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais por todas as pessoas com deficiência e promover o respeito pela sua dignidade inerente.

Nesse Decreto, o artigo 2 inciso I reafirma que todo ser humano tem o inerente direito a vida e garante o efetivo exercício desse direito pelas pessoas com deficiência, em igualdade de oportunidades com as demais pessoas. O artigo 24 assegura o sistema educacional inclusivo em todos os níveis, garantindo o aprendizado e educação ao longo de toda a vida.

De acordo com a Lei nº 7.853 (BRASIL, 2009), de 24 de outubro de 1989, é responsabilidade do poder público viabilizar as seguintes condições para as pessoas com deficiência:

> a) a inclusão, no sistema educacional, da Educação Especial como modalidade educativa que abranja a educação precoce, a pré-escolar, as de 1º e 2º graus, a supletiva, a habilitação e a reabilitação profissionais, com currículos, etapas e exigências de diplomação próprios;
> b) a inserção, no referido sistema educacional, das escolas especiais, privadas e públicas;
> c) a oferta, obrigatória e gratuita, da Educação Especial em estabelecimentos públicos de ensino;
> d) o oferecimento obrigatório de programas de Educação Especial a nível pré-escolar e escolar, em unidades hospitalares e congêneres nas quais estejam internados, por prazo igual ou superior a um ano, educandos portadores de deficiência; Legislação Brasileira sobre Pessoas Portadoras de Deficiência – 5a edição 99
> e) o acesso de alunos portadores de deficiência aos benefícios conferidos aos demais educandos, inclusive material escolar, merenda escolar e bolsas de estudo;
> f) a matrícula compulsória em cursos regulares de estabelecimentos públicos e particulares de pessoas portadoras de deficiência capazes de se integrarem no sistema regular de ensino (BRASIL, 2009, p.98).

Sabemos que são inúmeras as modificações e inovações que as escolas e as políticas educacionais terão que adotar se quiserem construir um espaço de integração, o qual permita a todos os alunos fazerem parte da vida educativa e social da escola. Para tanto, a legislação sela o compromisso de garantir o acesso à educação inclusiva, estabelecendo condições de igualdade e acesso do aluno especial às classes regulares.

É um desafio pertinente da escola construir um espaço físico estruturado e receptivo, e ao mesmo tempo, oferecer ao aluno condições para aprender na convivência com as diferenças, respeitando suas limitações e valorizando suas diversidades, mas é necessário que essa mudança de postura aconteça se quisermos uma educação igualitária.

É importante a participação da sociedade nas escolas, principalmente dos pais, apoiando e ajudando o aluno a criar meios de interatividade. Também se faz necessário o empenho dos professores em desenvolver materiais que auxiliem o processo de ensino e aprendizagem desse aluno.

São essas iniciativas que irão permitir ao aluno desenvolver novos conhecimentos e habilidades, minimizando as dificuldades impostas pela deficiência e aumentando a sua capacidade de aprender.

Visando à inclusão, este trabalho tem a finalidade de elaborar uma sequência didática, usando películas de PVC e materiais manipuláveis para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da resolução e interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. Essa sequência deverá ser aplicada para indivíduos cegos que utilizam o sistema Braille.

2. APORTE TEÓRICO

2.1 Defectologia

A defectologia estuda as pessoas que apresentam algum tipo de “defeito”, ou seja, pessoas que não se enquadram nas características de pessoas “normais” como dito pela sociedade. Todos os problemas relacionados a essa pessoas eram tratados na defectologia tradicional sobre uma perspectiva quantitativa, com isso o desenvolvimento dessas pessoas é considerado quantitativamente mais lento e limitado. De acordo com Vygotsky (1993 *apud* BEZERRA ; ARAÚJO, 2010, p. 2):

> Estamos acostumados a aceitar o que nos parece “normal” e a repudiar, esconder ou conceituar negativamente o que foge do padrão ideal e nos choca com a presença do inusitado, do “anormal”, do defeituoso. Quando se trata de uma deficiência física humana o mesmo acontece, porque o defeito provoca-nos uma sensação de incompletude, “[...] cria um desvio do tipo biológico humano estável” (VYGOTSKY, 1993, s.p.)1 e “[...] se manifesta como uma aberração social” (VYGOTSKY, 1993, s.p.). Parece-nos impossível, senão falacioso, caracterizá-lo além da visão determinista que o tem como “[...] uma desvantagem, uma limitação, uma fraqueza, um atraso no desenvolvimento [...]” (VYGOTSKY, 1993, s.p.) e que, lamentavelmente, condena o sujeito “deficiente” ao isolamento e à perda do seu valor social.

A educação de crianças com deficiência já era tratada por Vygotsky desde 1920, mas foi a partir dos anos de 1980 que Vygotsky se destacou por seus estudos acerca da defectologia. As concepções de Vygotsky sobre defectologia eram diferentes das concepções de defectologia tradicional, pois ele defendia que uma criança com deficiência se desenvolve como qualquer outra criança, porém de maneira particular. Segundo Vygotsky (1997, p. 78 *apud* NETTO; LEAL, 2013, p. 80):

> No homem não existe uma comunicação pura, a-social e direta com o mundo. Por isso a carência da vista ou do ouvido implica, frente a tudo, a perda das mais importantes funções sociais, a degeneração dos vínculos sociais e deslocamento de todos os sistemas de conduta. É preciso propor e compreender o problema da defectividade infantil, na psicologia e na pedagogia, como um problema social, porque seu momento social, anteriormente não observado e considerado comumente como secundário, resulta, na realidade, fundamental e prioritário. Deve ser estimado como principal. É preciso encarar com audácia este problema, como um problema social. Se uma deficiência corporal significa psicologicamente uma luxação

> social, desde o ponto de vista pedagógico, educar a essa criança é inseri-la na vida, como se insere um órgão luxado e enfermo.

Para Vygotsky, a criança com algum tipo de deficiência deve ser inserida na sociedade como qualquer criança “normal”, pois a criança com deficiência alcançará tudo que estiver ao seu alcance, porém no seu tempo.

A teoria da defectologia, de acordo com Vygotsky, não tem como objetivo manter o foco na deficiência como era na defectologia tradicional, e sim, focar na potencialidade da pessoa com deficiência.

> Coerentemente, a defectologia de Vygotski (1997) está estruturada sobre uma base metodológica positiva, uma vez que sua teleologia não objetiva identificar as supostas deficiências em corte isolado como fazia a velha psicologia, mas, sim, em estudar os processos do desenvolvimento infantil em sua diversidade, este é o objeto ao qual a defectologia deve a partir de então se debruçar (VYGOTSKI, 1997 apud PICCOLO; SILVA, 2014, p. 9).

É necessário examinar primeiro a pessoa com deficiência e só depois a deficiência, para não limitar suas capacidades. Padilha (2000 *apud PICCOLO; SILVA, 2014, p. 9)* afirma que:

> [...] é necessário esquadrinhar o local que a deficiência ocupa no desenvolvimento da personalidade do indivíduo, assim como a forma que o mesmo luta contra ela, pois a pessoa com deficiência, conforme frisa Padilha (2000, p.206), “não é deficiente por si só, o tempo todo, como uma entidade abstrata e deslocada. A deficiência está contextualizada e marcada pelas condições concretas de vida social”, as quais podem ser adequadas ou empobrecidas, inibidoras ou facilitadoras do engendrar de uma luta dialética pela compensação.

De acordo com Piccolo e Silva (2014, p. 3), “Para Vygotski ao olharmos uma criança com deficiência devemos ter em mente que antes de tudo é apenas uma criança e só depois pensar como uma criança deficiente”.

> [...] não se deve perceber na criança com deficiência apenas o defeito, os gramas de doença, não se notando os quilogramas de saúde que a criança possui. Do ponto de vista psicológico e pedagógico deve-se tratar a criança com deficiência da mesma maneira que uma normal [...] (PICCOLO; SILVA, 2014, p. 3).

Ou seja, não deve ser observado na criança apenas o defeito, no caso da deficiência analisada neste trabalho, a cegueira. Vygotsky afirma que:

> Así como el niño en cada etapa del desarrollo, en cada una de sus fases, presenta una peculiaridad cuantitativa, una

> estructura específica del organismo y de la personalidad, de igual manera el niño deficiente presenta un tipo de desarrollo cualitativamente distinto, peculiar (VYGOTSKY, 1997, p.12).

Segundo Vygotsky as pessoas cegas têm o mesmo potencial de desenvolvimento mental de uma criança dita como "normal", pois sua deficiência apresentada é sensorial e não cognitiva. Com relação ao processo de ensino e aprendizagem, as crianças cegas têm apenas algumas diferenças como a leitura que, utiliza-se o campo tátil ao invés do visual, mas a capacidade de compreender o que está escrito é a mesma de uma criança vidente. O tato utilizado para a leitura é a maneira de compensar a falta da visão.

2.2 Compensação e a Supercompensação

A teoria da compensação traz a ideia de reparar e compensar. Quando algum órgão apresenta alguma deficiência, outros órgãos são estimulados levando a compensação do órgão deficiente.

Milanez, Oliveira e Misquiatti afirmam que para Vygotsky a compensação:

> [...] consiste em criar condições e estabelecer interações que possibilitem aos sujeitos com deficiência intelectual a se desenvolverem. Para Vygotsky (1997), a deficiência de uma função ou lesão de um órgão faz com que o sistema nervoso central e o aparato psíquico assumam a tarefa de compensar o defeito. Essa ideia constitui o núcleo central das suas proposições sobre o desenvolvimento de crianças com deficiência intelectual: "[...] todo defeito cria os estímulos para elaborar uma compensação" (1997, p.14). Para ele, proporcionar elementos pedagógicos baseados na "compensação" não possibilita a "cura" da deficiência, mas oferece alternativas que podem contribuir para o desenvolvimento de áreas potenciais (MILANEZ; OLIVEIRA; MISQUIATTI, 2013, p. 72-73).

A falta de funcionamento de algum órgão é compensada por outro, como por exemplo, nos indivíduos cegos o tato e a audição são mais apurados do que em um indivíduo vidente, mas essa compensação não acontece de maneira mecânica. De acordo Vygotsky (1989 *apud* COELHO; BARROCO; SIERRA, 2011, p. 6):

> Assim, coerente com o pensamento dialético, Vygotski salienta na deficiência a tendência ao seu contrário, a potência.

> Percebe que a limitação traz consigo a possibilidade contraditória da superação como uma tendência, mas não como uma conseqüência [siq] mecânica direta (VYGOTSKI, 1989 apud COELHO; BARROCO; SIERRA, 2011, p. 6).

A deficiência cria não só a compensação, mas também a supercompensação que é quando um indivíduo, além de compensar, supera seus limites causados pela deficiência acima da média esperada pelos indivíduos que o rodeia.

> A compensação refere-se ao processo substitutivo que garante o desenvolvimento, ou seja, quando uma ou mais vias de apreensão do mundo e de expressão não estão íntegras ou não podem ser formadas, o indivíduo pode eleger outras que estejam íntegras. Isto lhe permite estar no mundo e com ele se relacionar. Acontece, no entanto, que em alguns casos o indivíduo não apenas compensa o que lhe falta, mas vai além. Ele pode supercompensar, isto é apresentar um grau de adaptação na área em que tinha limites biológicos a um nível acima da média esperada para a sociedade na qual está inserido e na qual se humaniza (COELHO; BARROCO; SIERRA, 2011, p. 7).

Sobre a supercompensação, Vygotsky afirma que:

> A criança cega ou surda pode alcançar o mesmo desenvolvimento de um aluno normal, porém as crianças com deficiência alcançam de um modo distinto, por um caminho distinto, com outros meios, e para o professor é importante conhecer a peculiariedade do caminho pelo qual se deve conduzir a criança. A importância desse processo está em possibilitar a transformação do defeito em supercompensação (VYGOTSKY, 1997, p.17).

A deficiência não é somente um “defeito”, mas também uma potencialidade. A sociedade pode limitar uma criança deficiente, porém com a supercompensação a criança elimina qualquer limite imposto sobre ela. Vygotsky (1989, p. 51) afirmou que “[...] é possível vencer o defeito com a incorporação total dos cegos à vida laboral”.

A compensação é um mecanismo particular que ocorre na experiência do indivíduo com a deficiência.

2.3 Funções Psicológicas Superiores e a Mediação

Em seus escritos, Vygotsky, se interessou em entender os mecanismos psicológicos e complexos do ser humano e traz importantes reflexões sobre esse assunto. Ele estudou as funções psicológicas superiores que envolvem o controle consciente do comportamento e a ação intencional. Segundo Oliveira (1993), as funções psicológicas superiores consistem na capacidade de o ser humano "pensar em objetos ausentes, imaginar eventos nunca vividos e planejar ações a serem realizadas em momentos posteriores" (OLIVEIRA, 1993, p. 26).

Conforme Valsiner e Veer (1996 *apud* FERNANDES, 2004, p. 35), para Vygotsky, a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas uma relação mediada e complexa, que se satisfaz por meio de dois elementos mediadores: os instrumentos e os signos. O uso de mediadores amplia a capacidade de atenção e a memória, permitindo maior controle voluntário do indivíduo sobre sua atividade. Vygotsky usou o conceito de mediação para analisar o funcionamento das funções psicológicas superiores, definindo mediação como:

> [...] o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. Quando um indivíduo aproxima sua mão da chama de uma vela e a retira rapidamente ao sentir dor, está estabelecida uma relação direta entre o calor da chama e a retirada da mão. Se, no entanto, o indivíduo retirar a mão quando apenas sentir o calor e lembrar-se da dor sentida em outra ocasião, a relação entre a chama da vela e a retirada da mão estará mediada pela lembrança da experiência anterior (OLIVEIRA, 1993, p. 26).

Segundo Oliveira (1993, p. 27), "a presença dos elementos mediadores insere um elo e torna mais complexas as relações organismo/meio, predominando as relações diretas ao longo do desenvolvimento do indivíduo" e ainda "o instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza" (1993, p. 29).

O instrumento funciona como um objeto social e mediador da relação entre o indivíduo e o mundo, são elementos externos ao indivíduo, voltados para fora dele, sua função é gerar mudanças nos objetos, controlando os processos da natureza. Os signos são, também, chamados por Vygotsky de "instrumentos psicológicos" são norteados para o próprio sujeito, para dentro do indivíduo, dirigindo-se para o controle de ações psicológicas. "Ele age como um instrumento da atividade psicológica de modo análogo ao papel de um instrumento de trabalho" (OLIVEIRA, 1993, p.29).

Os signos auxiliam tarefas que exigem memória ou atenção, ampliando a capacidade e permitindo o armazenamento de informações, além de representar a realidade e referir-se a elementos ausentes do espaço e tempo presentes.

> São inúmeras as formas de utilizar signos como instrumentos que auxiliam no desempenho de atividades psicológicas. Fazer uma lista de compras por escrito, utilizar um mapa para encontrar determinado local, fazer um diagrama para orientar a construção de um objeto, dar um nó num lenço para não esquecer um compromisso são apenas exemplos de como constantemente recorremos à mediação de vários tipos de signos para melhorar nossas possibilidades de armazenamento de informações e de controle da ação psicológica (OLIVEIRA, 1993, p. 30).

Vygotsky trabalha com a relação mediadora dos instrumentos e signos, pois elas são ferramentas auxiliares na construção de atividade psicológica do ser humano. Essas ferramentas são elementos que fazem referência a marcas externas que se transformam em processos internos de mediação. O processo de internalização é formado por sistemas simbólicos que são essenciais para o desenvolvimento das estruturas mentais superiores e comprovam a importância das relações sociais entre o sujeito na construção dos processos psicológicos.

As representações substituem objetos do mundo real, ou seja, o sujeito deixa de precisar de marcas exteriores passando a usar os signos mentais. Portanto, é importante que o indivíduo cego interaja socialmente com outros sujeitos, busque experiências com o mundo, estabeleça relações e formas de perceber e organizar o real, ou seja, construa o sistema de signos, desenvolvendo os instrumentos psicológicos que fazem a mediação entre o indivíduo e o mundo.

2.4 Sistema háptico, fonador e auditivo

A visão é um dos canais sensoriais de aquisição da informação, assim o processo de internalização pode ficar comprometido nas pessoas cegas. Portanto, é necessário que a pessoa com deficiência visual busque outros meios para que o processo de internalização aconteça, ou seja, ela utiliza os sentidos que não foram comprometidos pela deficiência, como o tato, a fala e a audição, que são os sistemas háptico, fonador e auditivo, respectivamente.

É por meio desses sistemas que o cego consegue captar e processar informações dos objetos presentes no ambiente. Com a falta da visão, os outros canais sensoriais são potencializados e permitem o desenvolvimento cognitivo das pessoas cegas.

Ochaita e Rosa (1995 *apud* FERNANDES, 2004, p. 37), comprovaram experimentalmente, sobre o sistema auditivo, "que o deficiente visual não apresenta diferenças, em relação aos videntes, no que diz respeito a sua capacidade de codificação semântica da informação recebida por esse sistema", ou seja, mesmo que a falta da visão comprometa a obtenção de alguma informação, o deficiente visual pode compreender um fenômeno a partir de informações verbais recebidas de outros indivíduos, constituindo o processo de internalização.

Outro aspecto de notória relevância é o sistema tátil-cinestésico que é constituído e dividido em tato passivo e sistema háptico (tato ativo). No tato passivo, as informações táteis são recebidas independentemente, como calor e textura. Já no segundo, as informações são adquiridas de forma intencional. Quando o indivíduo explora com as mãos algum objeto, conseguindo captar algum tipo de informação ou uma imagem, ele está utilizando o sistema háptico, ou seja, a informação é obtida substituindo a visão pelo tato, permitindo analisar o objeto explorado. Esse exemplo nos lembra a ideia de compensação citada por Vygotsky, pois o sistema háptico é utilizado para busca de informações sobre as características de um objeto que seriam adquiridos pela visão.

Desde modo, é preciso que o emprego dos materiais pedagógicos permita que o indivíduo cego consiga fazer a exploração tátil do objeto, buscando características parciais para entender o todo. Entretanto, o material deve apresentar texturas e tamanhos adequados para que se torne útil e significativo. Como afirma BRASIL (2007, p. 26) “A variedade, a adequação e a qualidade dos recursos disponíveis possibilitam o acesso ao conhecimento, à comunicação e à aprendizagem significativa”. Com um material apropriado, é possível trabalhar diversos conteúdos, permitindo que o indivíduo desenvolva seu raciocínio, utilizando a memória durante o aprendizado.

“As informações podem chegar aos deficientes visuais medidas por dois canais principais: a exploração tátil e a linguagem”, como afirma Gil (2000 *apud* FERNANDES, 2004, p. 101). Desse modo, os três sistemas sensoriais são de grande relevância e importância para a aquisição de informação.

Estudos realizados por Vygotsky sobre o desenvolvimento da linguagem revelam a sua importância no desenvolvimento cognitivo. Especificamente permite a comunicação, a organização e o desenvolvimento dos processos de pensamento. Por meio dela, é possível criar relações sociais com outros indivíduos e planejar a solução de problemas. Além disso, a fala pode ser utilizada para auxiliar a busca de características de um objeto explorado manualmente por meio da comunicação com outro indivíduo. Esse será o sistema utilizado na experimentação da sequência didática desenvolvida neste trabalho.

Segundo Valsiner e Veer (1996 *apud* FERNANDES, 2004, p. 40), “para Vygotsky a fala é um instrumento de ação recíproca social, e, ao mesmo tempo, o instrumento de ação recíproca íntima consigo mesmo”.

Para que a aprendizagem aconteça de forma significativa, o aluno cego pode utilizar a fala e os materiais manipuláveis como instrumentos de mediação que irão orientar esse processo, mas para que isso aconteça, o professor, também, tem um papel importantíssimo, pois este deve mediar e orientar, tendo como objetivo facilitar a construção do conhecimento. Como afirma Araújo e Marszaukowski,

> As crianças com necessidades especiais têm os mesmos direitos que aquelas que não as possuem. No entanto, deve-se levar em consideração que estas crianças precisam de cuidados especiais. Em relação ao ensino, o professor deve propor atividades onde todos os alunos trabalhem juntos. Para que a aprendizagem ocorra de maneira significativa é necessário que se usem os recursos didáticos e o professor os adapte para a situação em que se encontra o aluno com limitação visual (ARAÚJO; MARSZAUKOWSKI, 2009, p. 8).

É um grande desafio para o sistema educacional e para os professores criarem meios para que o aluno cego seja inserido de forma igualitária na escola e na sociedade. É fundamental buscar recursos para promover a autoestima e autonomia desse aluno, buscando caminhos para que a deficiência seja superada e para que a aprendizagem significativa aconteça. Para tanto, é necessário compreender a aquisição de conceitos na aprendizagem de acordo com o ponto de vista de Vygotsky, percebendo a real importância do meio social, do papel da interação e os sistemas háptico; fonador e auditivo.

3. METODOLOGIA DE PESQUISA

3. 1 Estudo de Caso

A sequência didática deste trabalho aborda o tema “um estudo de caso na resolução e interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas (LIMA et al, 2005, p. 97) por alunos cegos”. Tal sequência didática foi experimentada com duas alunas cegas usuárias da escrita Braille que já concluíram o Ensino Médio, utilizando materiais táteis para a resolução e interpretação dos sistemas em estudo. Antes de iniciar o relato de nossa experiência e resultado da aplicação da sequência didática elaborada, iremos ressaltar a metodologia de pesquisa utilizada.

Segundo Ponte,

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social (PONTE, 1994, p.2).

O estudo de caso é utilizado como método de pesquisa em diversas áreas, como afirma Yin:

> [...] o estudo de caso é usado em muitas situações, para contribuir ao nosso conhecimento dos fenômenos individuais, grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados (YIN, 2010, p.24).

Nossa pesquisa é de caráter qualitativo, tendo como metodologia de pesquisa o estudo de caso, que segundo Ponte (2006) é:

> Uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (PONTE, 2006, p.2).

Sobre estudo de caso, Ponte afirma que:

> [...] O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador (PONTE, 2006, p.2).

No processo de coleta de dados, o estudo de caso pode recorrer a varias técnicas próprias de investigação qualitativa tais como: diário de bordo, relatório, entrevista e a observação que pode ser direta ou participante.

Assim sendo, utilizamos o diário de bordo que tem como objetivo ser um instrumento em que o investigador vai registrando notas retiradas de suas observações, como afirma Araújo et al., (BOGDAN e BILKEN, 1994, apud ARAÚJO et al, 2008, p. 14) o diário de bordo é "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo".

Para esta pesquisa os dados foram coletados por meio de observação direta e entrevistas, sendo feitas observações e avaliações sobre o material utilizado. Outra técnica de investigação que utilizamos foi a observação participante, em que, segundo Maffezzolli e Boehs (2008, p. 103) "o observador não assume uma posição passiva, neste caso o pesquisador vivencia a realidade do ponto de vista de alguém que está inserido no caso e não fora dele". Assim foi feita a gravação do áudio de toda a aplicação da sequência didática, como sugere CRESWELL, (1997 *apud* MAFFEZZOLLI E BOEHS, 2008, p. 103) "é sugerido ao observador que neste tipo de observação se possível realize a gravação e a transcrição das atividades".

O estudo de caso é utilizado como método em diversas áreas. Na Educação Matemática, tem sido utilizado para investigar questões de aprendizagem, prática profissional dos professores, programa de formação inicial e continuada de professores, entre outros (PONTE, 1994). O principal objetivo do estudo de caso é compreender, explorar, descrever, explicar, avaliar e ou transformar o evento estudado e ao mesmo tempo desenvolver novas teorias a respeito do que foi estudado.

Utilizando o estudo de caso, iremos investigar e avaliar "como" a utilização de películas de PVC e peças com números e símbolos em Braille auxiliam alunos cegos na resolução e interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.

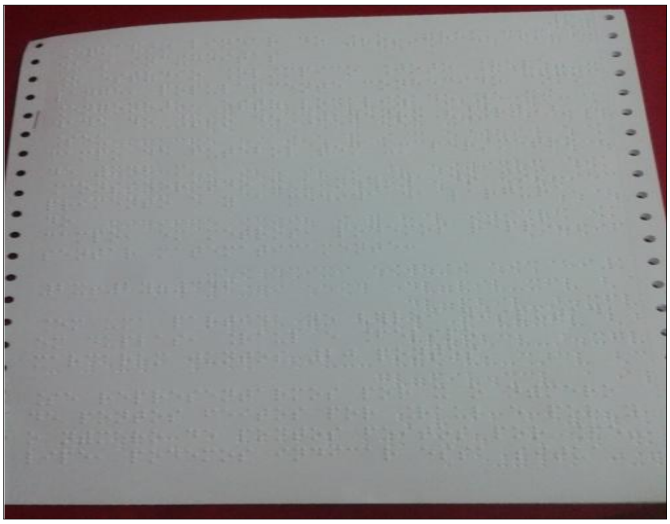
3.2 Elaboração da Sequência Didática

Foi Elaborada uma sequência didática tendo em vista a utilização dos sistemas: auditivo, fonador e háptico, procurando auxiliar o desenvolvimento cognitivo de alunos cegos a partir de suas potencialidades. Segundo Vygotsky (1997), os videntes e os cegos apresentam o mesmo desenvolvimento qualitativo, pois a deficiência cria estímulos para a utilização dos órgãos não afetados, como uma compensação.

Portanto, buscamos elaborar uma sequência didática que abordasse além da resolução, a interpretação geométrica da solução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.

Como o trabalho é desenvolvido para pessoas com deficiência visual, a apostila elaborada durante o planejamento da sequência didática foi transcrita para o Braille de modo que o aluno tivesse a opção de usar o sistema háptico ou o sistema fonador e auditivo, caso optasse pela leitura da mesma.

Figura 3.2.1- Apostila em Braille



Fonte: elaboração própria.

Quando é utilizado o método do escalonamento para resolução de sistemas lineares, a ordem e a arrumação da escrita das equações é imprescindível. Essa escrita é complicada quando feita na reglete e torna a resolução muito trabalhosa para alunos cegos. Visando amenizar essas dificuldades foi elaborado um kit, utilizando folhas de emborrachado, números e símbolos matemáticos em Braille e velcro. Uma parte do velcro foi colada em uma folha de emborrachado e a outra parte nos quadradinhos com os números e símbolos matemáticos. Durante o processo de resolução, os alunos deveriam escrever as equações sobrepondo os quadradinhos com números e símbolos na folha de emborrachado. Os quadradinhos ficariam fixos por meio do velcro.

Figura 3.2.2 – Malha e Números em Braille no emborrachado

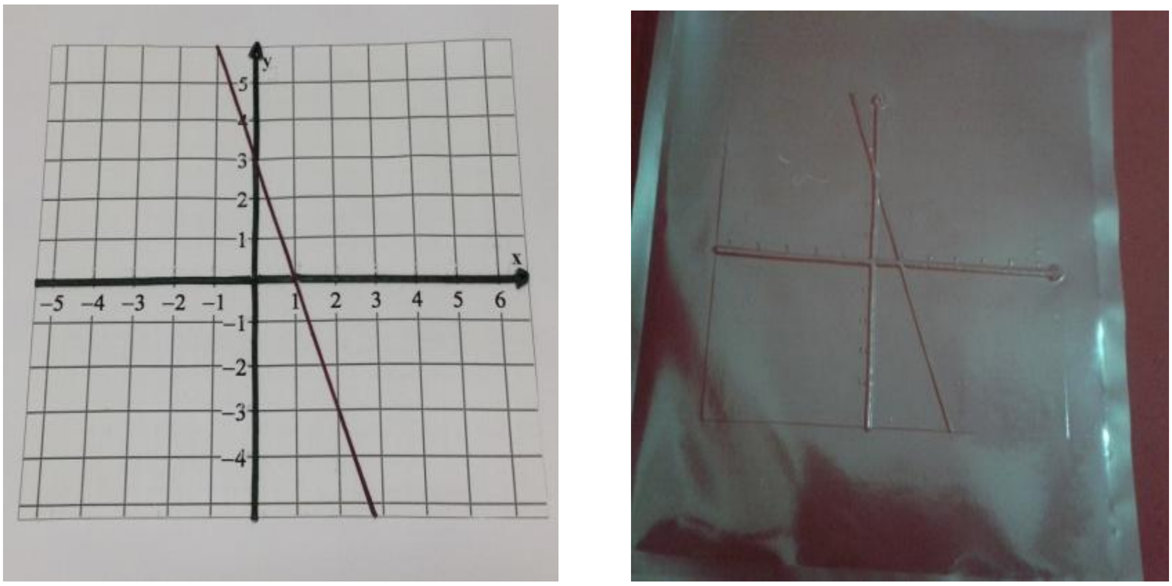
Fonte: elaboração própria.

Foram produzidas matrizes com todos os gráficos e diagramas apresentados na apostila, utilizando fios encerados e miçangas. As matrizes foram reproduzidas em películas de Policloreto de vinila (PVC) por meio de uma máquina de *Thermoform EZ-Fom* (Figura 3.2.3).

Figura 3.2.3 – Gráfico máquina de *Thermoform EZ-Fom*

Fonte: elaboração própria.

Figura 3.2.4 – Gráfico em Alto Relevo e em Película de PVC



Fonte: elaboração própria.

A apostila se inicia com um problema envolvendo o perímetro de um campo de futebol, uma introdução do conceito de equações. Sua representação, também, foi confeccionada com linhas enceradas, conforme mostra a figura 3.2.5.

Figura 3.2.5 – Enunciado do primeiro exemplo

O estádio Olímpico João Havelange, popularmente conhecido como Engenhão, está localizado na cidade do Rio de Janeiro (RJ). Seu campo de futebol tem um perímetro de 346 m. Considerando **x** a medida do comprimento e **y** a medida da largura do campo, em metros, podemos representar matematicamente: $2x + 2y = 346$	

Fonte: elaboração própria.

O segundo exemplo apresenta a relação entre a quantidade de pontos marcados, pelos integrantes de uma dupla de vôlei.

Figura 3.2.6 – Enunciado do segundo exemplo

Em uma partida de vôlei disputada em duplas, Raul e Felipe marcaram juntos 20 pontos. Se representarmos por **x** o número de pontos feitos por Raul e por **y** o número de pontos feitos por Felipe, podemos indicar essa situação matematicamente: $x + y = 20$

Fonte: elaboração própria.

Após a discussão dos exemplos, será apresentada a definição de equações lineares. Em seguida partiremos para outros exemplos de equações lineares, identificando variáveis, coeficientes, termo independente e soluções.

Serão propostos dois exercícios com o intuito de verificar se o aluno consegue determinar a equação linear que representa as situações dadas.

Figura 3.2.7 – Enunciado da atividade 1 e 2

Atividade 1) Mariana tem R$ 12,00 a mais do que Flávia. Considerando x a quantia de Mariana e y a de Flávia, identifique a equação linear abaixo que represente essa situação. a) $x = y + 12$ b) $y = x + 12$ c) $x + y = 12$	**Atividade 2)** Se x e y são as dimensões de um retângulo, indique com uma equação linear o fato de que esse retângulo tem perímetro 40 cm.

Fonte: elaboração própria.

Voltando ao exemplo da partida de vôlei, com 20 pontos marcados pela dupla, serão definidas algumas possíveis soluções e identificadas como pares ordenados, definindo que uma equação linear com duas ou mais variáveis tem infinitas soluções formadas por números naturais.

Assim, apresentaremos outro exemplo em que o aluno deve determinar pelo menos dois pares que sejam solução da equação, mostrando que para isso basta atribuir valores para uma das variáveis, e em seguida, calcular o valor da outra variável. Logo após, na atividade 3, o aluno deve determinar as soluções das equações dadas.

Figura 3.2.8 – Enunciado do exemplo e da atividade 3

1- Determinar pelo menos dois pares ordenados que sejam solução da equação linear $2x + y = 3$. Vamos atribuir valores eventuais para x, calculando em seguida o valor de y: Exemplo: a equação $2x + y = 3$. Se $x = 1$ então $2.1 + y = 3$ e $y=1$. Se $x = -4$ então $2.(-4) + y = 3$ e $y=11$. Logo, os pares $(1, 1)$ e $(-4, 11)$ são algumas das soluções da equação linear.	**Atividades 3)** Determine uma solução das equações: a) $3x - 7y = -12$, para $y = 6$. b) $3(x - 4) + 2y = x$, para $x = 5$

Fonte: elaboração própria.

Em seguida, apresentaremos o plano cartesiano, indicando que este é formado por duas semirretas perpendiculares que representam o eixo das abscissas (eixo x) e o eixo das ordenadas (eixo y). A intersecção entre os eixos ocorre no ponto (0, 0) e é a origem do sistema cartesiano. Também mostraremos a representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis, determinando alguns pares ordenados que são soluções de uma equação linear, de modo que o aluno perceba que esses pontos estão alinhados. Para permitir que o aluno cego conseguisse marcar os pontos, foi produzida uma matriz com o plano cartesiano e a malha quadriculada representados em alto-relevo por meio de linhas enceradas. Tal matriz foi reproduzida em uma película de PVC (Figura 3.2.10). Sobrepondo tal película em uma folha de emborrachado é possível marcar pontos no plano cartesiano usando alfinetes.

Na atividade 4, o aluno deve determinar alguns pares ordenados que solucionam a equação linear dada e representar tais pontos graficamente, utilizando a película de PCV descrita anteriormente. É esperado que o aluno cego se guie contando as marcações em alto-relevo a partir da origem do plano cartesiano. Desta maneira, será possível marcar pontos com alfinetes e traçar retas, utilizando linhas enceradas.

Figura 3.2.9 – Enunciado da atividade 4

Atividade 4) Determine as soluções de cada uma das equações para os valores indicados e represente - as graficamente.

a) x + y = 2, se y = 3 e se x= 3.

b) 2x – 3y = 6, se x = 4 e x = - 3.

Fonte: elaboração própria.

Figura 3.2.10 - Película de PVC com plano cartesiano em alto-relevo

Fonte: elaboração própria.

Após abordar os conceitos que eram julgados pré-requisito para o conteúdo de sistemas lineares, a saber, resolução de equações lineares, marcação de pontos no sistema de eixos coordenados, entre outros, voltamos ao exemplo inicial que relata uma situação onde Raul e Felipe marcaram juntos durante uma partida de vôlei 20 pontos. Tal situação pode ser representada pela equação x+y=20, em que x é o número de pontos marcados por Raul e y é o número de pontos marcados por Felipe. A apostila registra algumas soluções e em seguida adiciona mais uma informação a essa questão. Raul marcou o triplo dos pontos de Felipe, situação representada pela equação x=3y e, também, são registradas algumas soluções dessa equação.

A apostila elaborada apresenta uma sequência de pares ordenados que solucionam a equação x+y=20. Será sugerido que o aluno teste essa sequência de pontos como solução da equação x=3y e é esperado que ele descubra que o par ordenado (15, 5) é solução do sistema linear $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$. Assim começaremos a explicar que um Sistema Linear é formado por equações lineares e que sua solução é uma solução comum das equações que o compõe.

As equações lineares modelam situações presentes em diversas áreas. A apostila elaborada nesse trabalho apresenta uma questão que modela um problema do setor industrial. Tal atitude foi necessária para reduzir a abstração dos conceitos trabalhados.

Figura 3.2.11 – Problema do setor industrial, envolvendo sistemas lineares

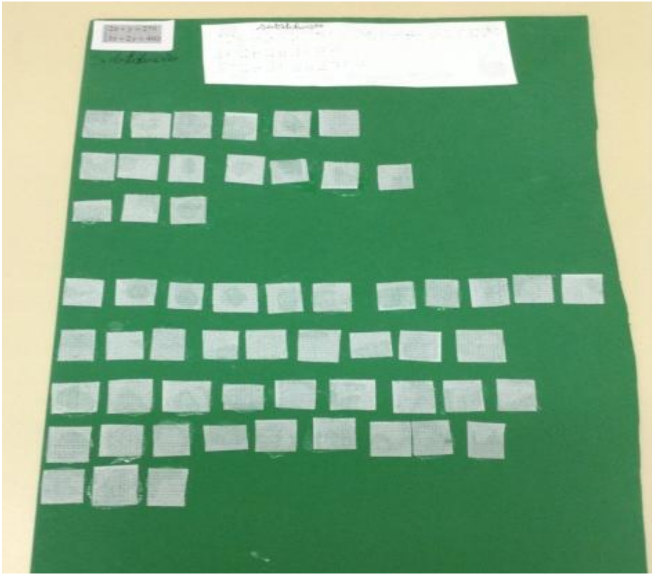
Uma indústria de óleo comestível pretende lançar no mercado um novo produto: trata-se de uma mistura de óleo de soja com azeite de oliva.
Após uma pesquisa, conclui-se que o preço final ao consumidor será competitivo se o custo de produção do litro da mistura for R$ 2,50. Sabendo que o litro do óleo de soja custa R$ 2,00 e que o litro do azeite de oliva custa R$ 4,50, um litro dessa mistura deverá conter que quantidade de azeite de oliva?

Fonte: elaboração própria.

A partir daí, serão apresentados alguns métodos que permitem a resolução de sistemas lineares, a saber, “método da substituição” (Figura 3.2.12), “método da adição” (Figura 3.2.13) e “método comparação” (Figura 3.2.14). O aluno deverá resolver os sistemas utilizando o kit com folha de emborrachado e peças em Braille com velcro.

Figura 3.2.12 – Sistema utilizado no método da substituição e a malha de emborrachado

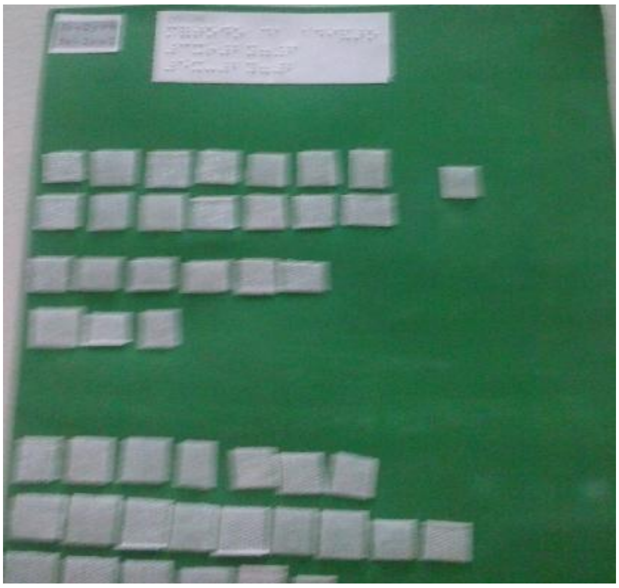
$$\begin{cases} 2x + y = 270 \\ 3x + 2y = 460 \end{cases}$$



Fonte: elaboração própria.

Figura 3.2.13 – Sistema utilizado no método da adição e a malha de emborrachado

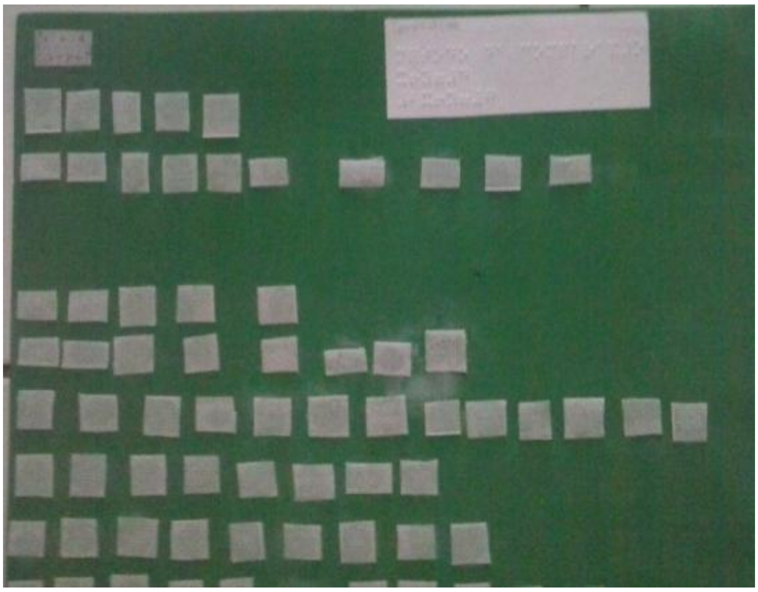
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$



Fonte: elaboração própria.

Figura 3.2.14 – Sistema utilizado no método da comparação e a malha de emborrachado

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$



Fonte: elaboração própria.

Após a resolução de todos os exemplos citados acima, utilizando a malha de emborrachado, serão lançadas às alunas algumas atividades, envolvendo todos os métodos estudados.

A primeira atividade, após os exemplos, é a atividade 5 com itens da letra a até a letra f, onde cada par de itens deverá ser resolvido por um dos três métodos. A letra a é um problema contextualizado em que os dados da questão são montados em forma de sistema linear. Este item deverá ser resolvido pelo método da substituição. A letra b apresenta um exercício objetivo.

Figura 3.2.15 – Atividade 5: itens a e b

Atividade 5) Resolva as questões a seguir:
a) Tina passeava pelo calçadão da praia quando avistou um quiosque de sanduíches e sucos naturais. Em um cartaz havia as seguintes sugestões de pedidos: 3 sucos + 2 sanduíches = R$ 14,00 ou 2 sucos + 1 sanduíches = R$ 8,00.

Tina ficou interessada em saber o preço unitário do suco e do sanduíche. Estudante aplicada representou por x e y os preços unitários do suco
e do sanduíche, respectivamente, obtendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Encontre a solução desse sistema utilizando o método da substituição.

b) Resolva o sistema linear a seguir utilizando o método da substituição

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}.$$

Fonte: elaboração própria.

No item c, as alunas deverão interpretar o problema, elaborar as equações lineares e determinar a solução do sistema formado com tais equações por meio do método da comparação. O item d apresenta um sistema que deverá ser resolvido pelo método da comparação.

Figura 3.2.16 – Atividade 5: itens c e d

c) Pedrinho comprou duas coxinhas e um refrigerante pelos quais pagou R$ 7,00. Seu irmão Joãozinho comprou uma coxinha e um refrigerante a mais, pagando R$ 11,50. Qual é o preço do refrigerante e da coxinha? Monte as equações e resolva o sistema pelo método da comparação.
d) Resolva o sistema linear a seguir utilizando o método da comparação

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - y = 12 \end{cases}.$$

Fonte: elaboração própria.

A interpretação do problema apresentado no item *e* gera um sistema linear com duas equações e o item *f* apresenta um sistema que deverá ser resolvido pelo método da adição.

Figura 3.2.17 – Atividade 5: itens e, f

e) Num depósito existem 24 caixas de papelão, no formato de quadrado e retângulo. Sabendo-se que a quantidade de caixas no formato de quadrado é o dobro da quantidade de caixas retangulares, indique a quantidade de caixas retangulares no deposito:
i) 8 ii) 12 iii) 16

f) Resolva o sistema a seguir, utilizando o método da adição

$$\begin{cases} 7x+2y=10 \\ x-2y=6 \end{cases}.$$

Fonte: elaboração própria.

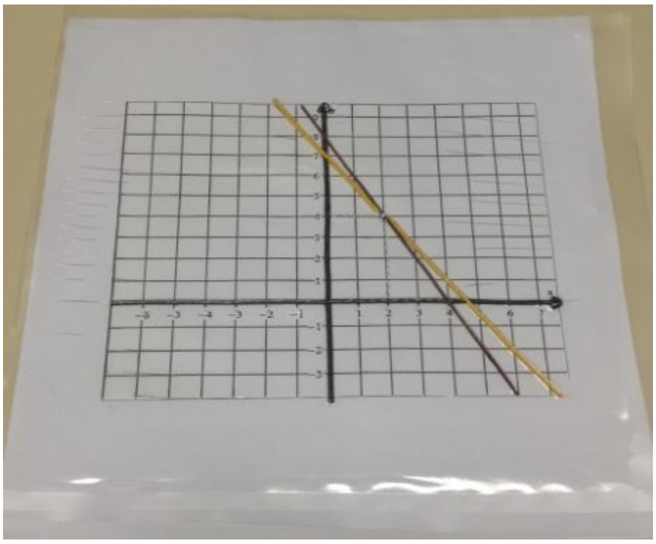
Para cada atividade foi determinado um método algébrico específico de resolução, com o objetivo de avaliar a aprendizagem de todos os métodos ensinados

Além do processo algébrico, a solução de um sistema linear pode ser discutida geometricamente. Como discutido no início da apostila, as soluções das equações lineares são pontos que ficam sempre alinhados e, portanto, os gráficos que representam as soluções dessas equações são retas. Deste modo, após a atividade 5 será discutida a representação e interpretação geométrica da solução de um sistema de equações lineares.

A discussão sobre a interpretação geométrica da solução de um sistema de equações lineares será feita por meio da exploração tátil de películas de PVC que apresentam os gráficos que representam as equações em questão (Figure 3.2.18).

Figura 3.2.18 – Representação geométrica de um sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

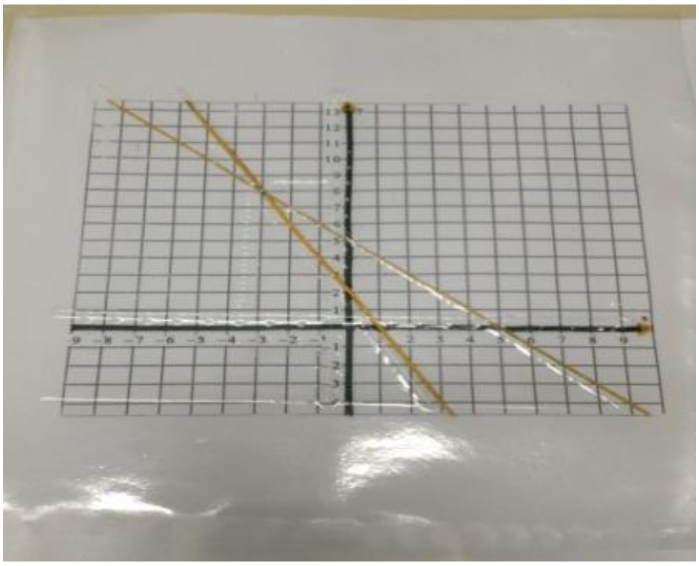


Fonte: elaboração própria.

No sistema apresentado na Figura 3.2.19, os alunos deverão perceber que o ponto de intersecção das retas que representam as equações é a solução geométrica do sistema de equações e suas coordenadas correspondem aos valores das incógnitas que solucionam o sistema. Tal sistema é classificado como possível e determinado.

Figura 3.2.19 – Representação geométrica de um sistema linear possível e determinado

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

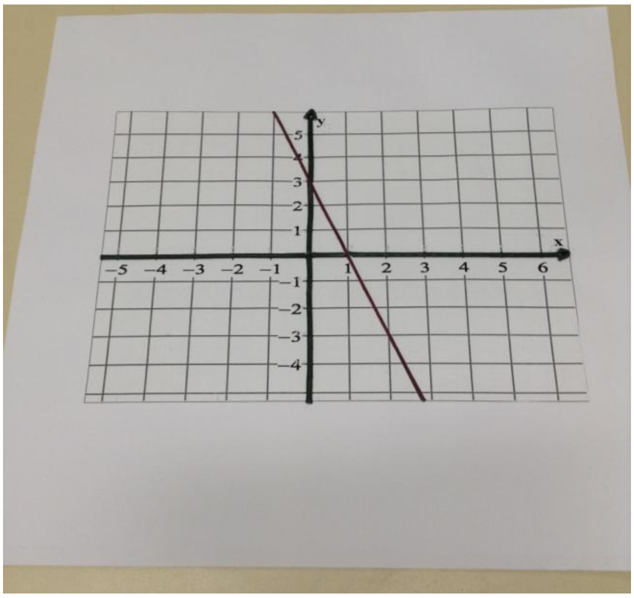


Fonte: elaboração própria.

Em seguida, as alunas deverão avaliar um sistema possível e indeterminado (Figura 3.2.20). Como a representação gráfica das duas equações que compõem o sistema ocupam o mesmo lugar no espaço, será solicitado que o aluno trace as duas retas, utilizando uma folha de emborrachado, alfinetes e uma película de PVC com o plano cartesiano e malha quadriculada. É esperado que o aluno perceba que as duas retas ficam sobrepostas e, portanto, o sistema linear apresenta infinitas soluções que são representadas por todos os pontos das retas.

Figura 3.2.20 – Representação geométrica de um sistema possível e indeterminado

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 9x + 3y = 9 \end{cases}$$

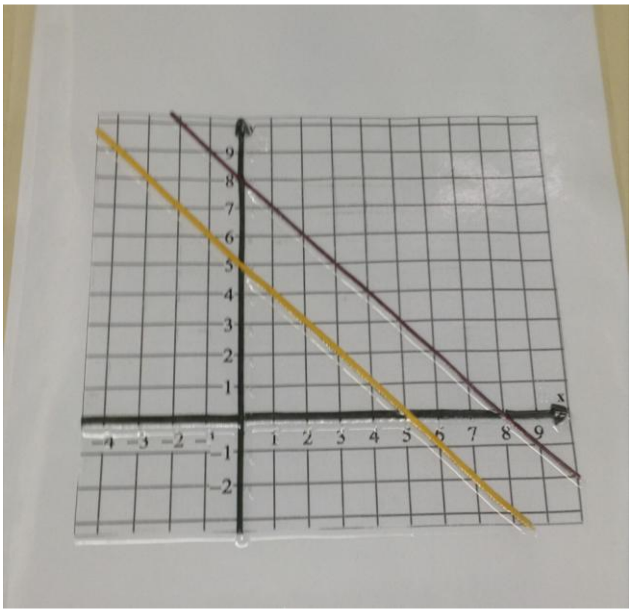


Fonte: elaboração própria.

Em seguida, será apresentada para o aluno uma matriz (Figura 3.2.21) com as retas que representam as equações de um sistema impossível. Algebricamente, o aluno determina que o sistema não possui solução, ou seja, não existe um par ordenado que satisfaça simultaneamente as duas equações que compõem o sistema. Na exploração tátil da matriz, é esperado que o aluno perceba que o sistema é impossível porque as retas que representam as equações não possuem pontos em comum.

Figura 3.2.21 – Representação geométrica de um sistema impossível

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$



Fonte: elaboração própria.

Em seguida, os alunos deverão resolver dois sistemas lineares (Figura 3.2.22), representar geometricamente as equações, identificar geometricamente a solução do sistema e classificá-lo.

Figura 3.2.22 – Atividade 6

Atividade 6) Represente, graficamente, a solução dos sistemas lineares abaixo e classifique-os.

a) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Fonte: elaboração própria.

A partir desse momento, a sequência didática aborda outro método de resolução de um sistema de equações lineares, o método do escalonamento. As professoras em formação mostrarão passo a passo (como descrito na apostila elaborada) a resolução do sistema apresentado na Figura 3.2.23, utilizando o kit com uma folha de emborrachado com velcro, números e símbolos matemáticos.

Figura 3.2 23 – Exemplo de sistema linear que deverá ser resolvido pelo método do escalonamento

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Fonte: elaboração própria.

Em seguida, na atividade 7, serão propostos dois exercícios com o objetivo de avaliar se método de resolução de sistemas lineares por escalonamento foi compreendido. A resolução deverá ser feita com o kit utilizado no exemplo anterior. Essa atividade encerra a sequência didática.

Figura 3.2 24 – Atividade 7

Atividade 7) Resolva os sistemas lineares, a seguir, utilizando o método do escalonamento.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 8x + 6y = 8 \end{cases}$

Fonte: elaboração própria.

Após a confecção dos números e letras em Braille e dos gráficos em película de PVC, as licenciandas realizaram um teste exploratório desses materiais para verificar se as informações contidas nos materiais estão perspectiveis. A sequência didática, elaborada neste trabalho, foi testada com alunos voluntários cegos do (NAPNEE) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFFluminense), *campus* Campos-centro.

Após o teste exploratório, verificou que alguns materiais deveriam ser modificados tais como: o gráfico em película de PVC teve que ser ampliado, permitindo uma melhor manipulação. O plano cartesiano foi confeccionado, utilizando a carretilha para formar os pontos em alto-relevo, após o teste exploratório foi mudado para furador que permitiu uma melhor impressão em alto-relevo ao passar para a película de PVC.

3.3 Aplicação da Sequência Didática

A princípio, a sequência didática, elaborada neste trabalho, seria aplicada em uma turma inclusiva, ou seja, uma turma regular com, pelo menos, um aluno cego, porém a diferença entre o calendário das escolas da comunidade e o calendário do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFFluminense) e a dificuldade em encontrar uma turma do 1º ano do Ensino Médio com algum aluno cego tornaram necessária a aplicação da sequência didática com um grupo de alunos cegos. Assim, a sequência didática foi experimentada com duas alunas cegas que utilizam o Braille, atendidas pelo Núcleo de Apoio a Pessoas com Necessidades Educacionais Especiais (NAPNEE) do IFFluminense *campus* Campos-centro. Tais alunas já haviam concluído o Ensino Médio, porém, em uma entrevista informal mencionaram que tinham muitas dificuldades e deficiências conceituais referentes aos conteúdos de funções, equações e resolução de sistemas lineares.

Relataremos a aplicação da sequência didática, fazendo uma comparação entre as reações e dificuldades das duas alunas. Maria, nome fictício, cursou o Ensino Médio em uma escola estadual de Campos dos Goytacazes e afirmou que seus professores não utilizaram recursos manipuláveis como mediadores no seu processo de ensino e aprendizagem. Joana, nome fictício, cursou o Ensino Médio em uma escola federal de Campos dos Goytacazes que tem um núcleo com recursos materiais e profissionais para atendimento de alunos com deficiência. Joana afirmou que durante as aulas de Matemática eram utilizados matérias manipuláveis.

Maria tem 22 anos, nasceu cega e sempre estudou em escolas públicas. Algum tempo após a conclusão do Ensino Médio, foi aprovada no processo seletivo de uma instituição federal de Campos dos Goytacazes, onde atualmente é aluna do curso Técnico em Informática.

Joana começou a perder a visão aos 11 anos e, com 15 anos, perdeu-a totalmente, devido a uma destrofia retiniana[1], adquirida por sua herança genética.

---

[1] Destrofia Retiniana - As distrofias retinianas são um grupo de doenças hereditárias que cursam com importante disfunção dos fotorreceptores (cones e/ou bastonetes). A distrofia mais

Joana cursou a educação infantil e o Ensino Fundamental em escola privada. Cursou o Ensino Médio em uma instituição federal de Campos dos Goytacazes onde, atualmente, é aluna do curso Técnico em Informática.

A sequência didática foi experimentada individualmente durante três encontros de três horas cada, com a aluna Maria e com Joana a experimentação ocorreu em dois encontros de três horas.

A experimentação foi iniciada com a entrega da apostila elaborada neste trabalho, em Braille, porém as duas alunas pediram que a mesma fosse lida para que pudessem ficar com as mãos livres e usar o sistema háptico na busca de informações proporcionadas pelos materiais manipuláveis. Assim, durante a experimentação, as alunas utilizaram os três sistemas para aquisição de informações: háptico, fonador e auditivo.

Partimos do pressuposto de que as alunas não sabiam o conteúdo que seria abordado, então foi realizada uma revisão de todos os conceitos necessários para abordar sistemas lineares. A saber, composição, resolução e representação gráfica de equações lineares, e composição e marcação de pares ordenados.

Iniciamos a experimentação, abordando situações do cotidiano que podem ser representadas matematicamente. A primeira situação aborda o perímetro de um campo de futebol. Foi utilizado como material manipulável um retângulo confeccionado em uma matriz com linha encerada de modo que as alunas pudessem ter noção de suas dimensões, comprimento e largura.

As alunas não apresentaram dificuldade na manipulação da matriz, pois na instituição de ensino que estudam existe um núcleo que atende a pessoas com deficiência o NAPNEE e já estão habituadas a trabalhar com materiais manipuláveis.

As alunas representaram matematicamente a situação que trata da quantidade de pontos marcados em uma partida de vôlei.

Na atividade 1, é apresentada uma situação envolvendo quantias em dinheiro. As alunas deveriam identificar, das três equações apresentadas, qual

---

conhecida e estudada é a retinose pigmentar, na qual os bastonetes são primariamente afetados, podendo ocorrer o acometimento mais tardio dos cones. Embora a retinose pigmentar possa se manifestar em praticamente todas as faixas etárias, a maioria dos pacientes começa a apresentar sintomas na adolescência e início da idade adulta (MAESTRINI; FERNANDES; OLIVEIRA, 2004, p. 867 - 868).

representava matematicamente a situação. Nessa atividade, Maria apresentou certa dificuldade em representar matematicamente a situação. Foi necessário que as professoras em formação apresentassem outros exemplos com o mesmo formato para que Maria conseguisse entender e resolver o exercício proposto. Joana não apresentou nenhuma dificuldade em resolver a questão.

Na atividade 2, as alunas tiveram o auxílio do material manipulável feito em alto-relevo, pois segundo Sá, Campos e Silva (2007, p.25) “os desenhos, os gráficos e as ilustrações devem ser adaptados e representados em relevo”. O objetivo dessa questão era verificar se as alunas conseguiriam indicar o perímetro do retângulo dado por uma equação linear. As alunas não tiveram dificuldades, acredita-se que o uso do material manipulável auxiliou para uma melhor compreensão do problema.

Para iniciar um diálogo sobre a solução de uma equação linear do 1º grau, voltamos ao 2º exemplo da apostila. Apresentamos as alunas uma tabela em Braille com valores que satisfazem a equação linear $x + y = 20$. Foi pedido que as alunas indicassem outros pares ordenados que não estavam na tabela e que, também, atenderiam a equação em questão. Assim, Maria e Joana deduziram que existem infinitas soluções de números naturais para a equação e que tais soluções são representadas por pares ordenados. Em seguida, na atividade 3, foram apresentadas duas equações lineares não simplificadas e um valor para uma das variáveis. Nesse momento, utilizamos a malha produzida com emborrachado e velcro que apresentava números, letras e símbolos em Braile (Figura 3.3.1).

Figura 3.3.1 – Resolução da atividade 3 pelas alunas

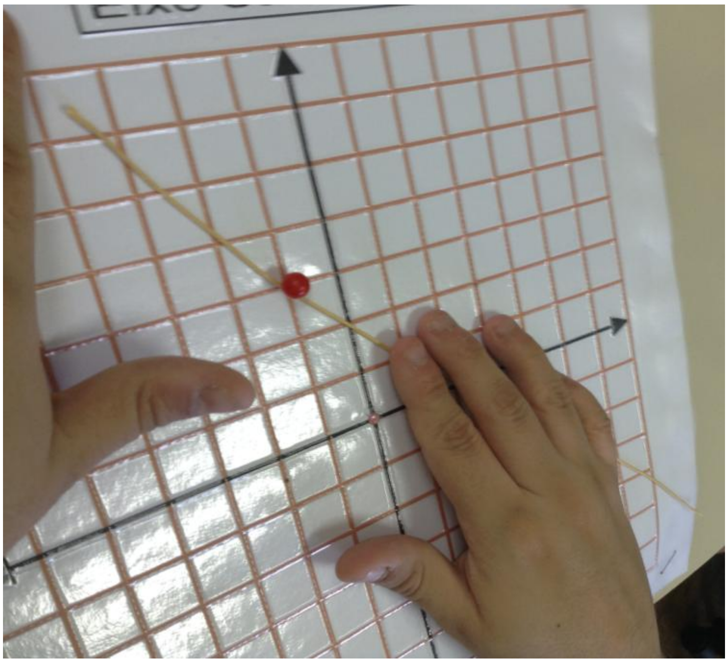
Fonte: elaboração própria.

A utilização da malha se deu de forma muito tranquila. As alunas relataram que a malha ajudou muito no desenvolvimento da atividade, facilitando a resolução das equações, pois os números escritos em Braille ficavam “presos” no velcro. Esse fato impedia que os números, variáveis e símbolos ficassem fora da ordem correta no momento do uso do sistema háptico.

Concluída a etapa de discussão sobre as soluções de uma equação linear, foi iniciada uma nova discussão, sobre a representação gráfica de tais soluções. As professoras em formação apresentaram as alunas um plano cartesiano em alto-relevo (Figura 3.2.10) e solicitaram a exploração de seus elementos. Em seguida, usando alfinetes, as alunas marcaram no plano cartesiano com a película PVC sobre o emborrachado três pontos que satisfazem a equação $2x + y = 1$ (Figura 3.2.10).

As alunas envolveram uma linha nos alfinetes e tatearam a figura formada percebendo que todos os pontos ficaram alinhados, formando uma reta.

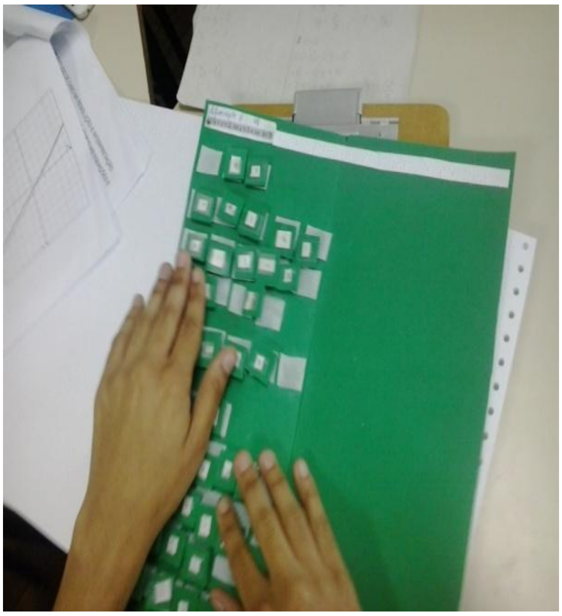
Figura 3.3.2 – Alunas marcando os pontos e em seguida construindo a reta no plano cartesiano

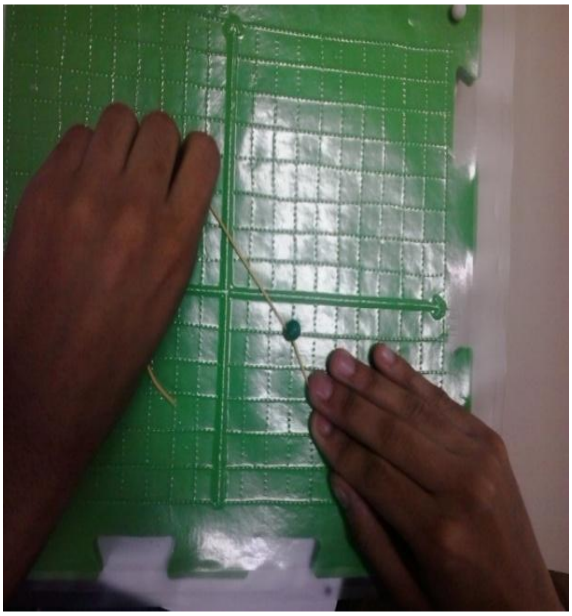


Fonte: elaboração própria.

Na atividade 4, foram dadas duas equações e valores para uma de suas variáveis. As alunas deveriam determinar a solução algébrica e geométrica de cada sistema, marcando os pontos no plano cartesiano usando emborrachado, película em alto-relevo e alfinetes (Figura 3.3.3 e 3.3.4).

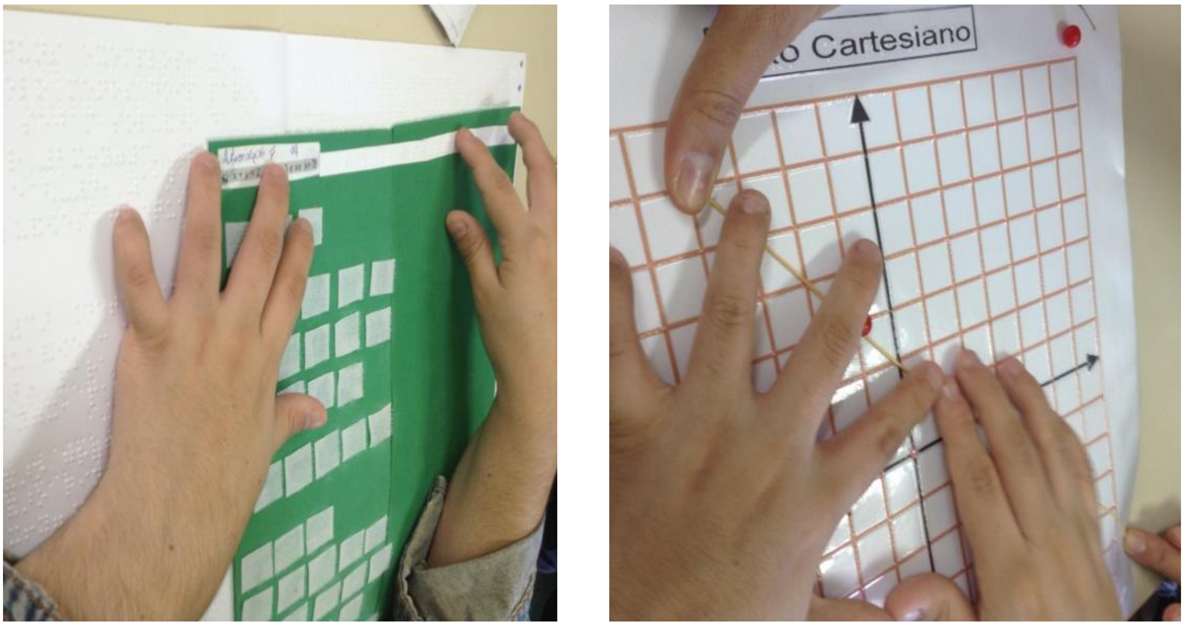
Figura 3.3.3 – Aluna Maria resolvendo atividade 4





Fonte: elaboração própria.

Figura 3.3.4 – Aluna Joana resolvendo atividade 4



Fonte: elaboração própria.

Nesse momento, foi iniciada a discussão sobre resolução de sistemas lineares. Retornando ao exemplo 2, foi acrescentada a informação de que Raul marcou o triplo dos pontos que Felipe marcou. Assim, adicionou-se a equação $x + y = 20$, a equação $x = 3y$ formando um sistema de equações lineares. As alunas registraram algumas soluções de cada equação e fazendo a comparação entre os pares ordenados perceberam que existia um par ordenado que era uma solução comum às duas equações. Nesse momento, as professoras em formação informaram que tal par ordenado é a solução do sistema linear e que as soluções dos sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas seguem essa lógica, sua solução será(ão) o(s) par(es) ordenado(s) que satisfaz(em) todas as equações do sistema. As professoras em formação mostraram para as alunas a notação de sistemas lineares e um exemplo de aplicação para amenizar a abstração do conteúdo.

Com relação à resolução de sistemas lineares, as professoras apresentaram a seguinte situação: “Uma indústria de óleo comestível pretende lançar no mercado um novo produto: trata-se de uma mistura de óleo de soja com azeite de oliva. Após uma pesquisa, conclui-se que o preço final ao consumidor será competitivo se o custo de produção do litro da mistura for R$ 2,50. Sabendo que o litro do óleo de soja custa R$ 2,00 e que o litro do azeite de oliva custa R$ 4,50, um litro dessa mistura deverá conter que quantidade de azeite de oliva?”. Em seguida, foi mostrado um passo a passo (apresentado na apostila elaborada) para a resolução de sistemas de equações lineares por meio do método da substituição, da comparação e da adição. No método da substituição, as alunas não apresentaram nenhuma dificuldade em resolver os sistemas lineares. No método da comparação, as duas alunas apresentaram dificuldade na hora de comparar as incógnitas isoladas. Elas demoraram em compreender que após isolar a incógnita desejada deveriam igualar as equações encontradas. Por fim, no método da adição, ambas as alunas não apresentaram nenhuma dificuldade.

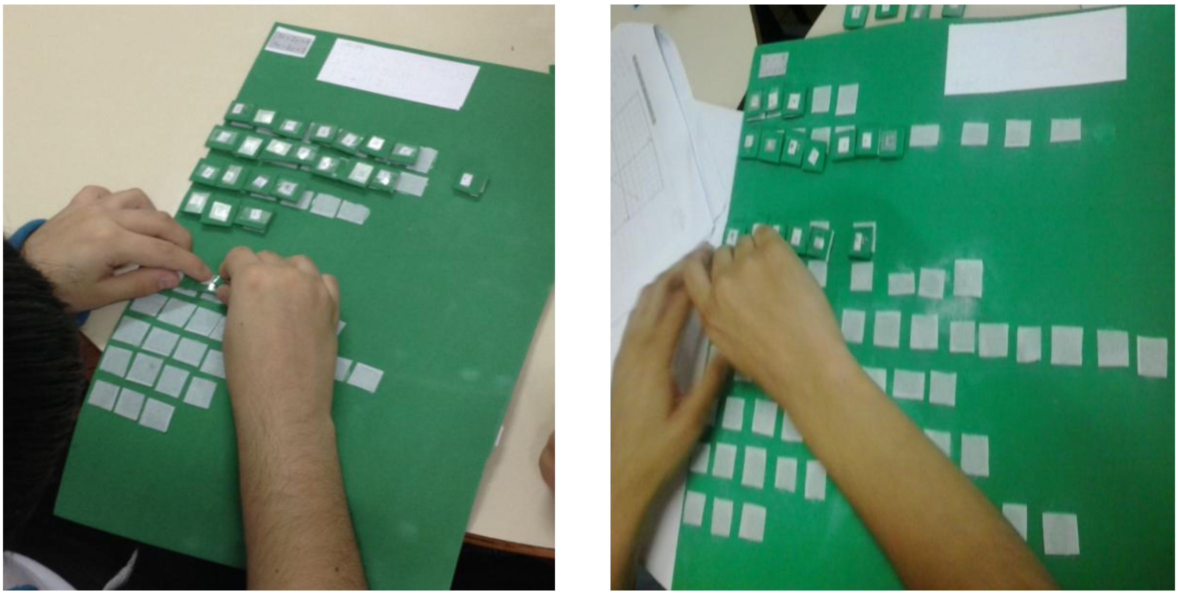
Em todos os métodos, os sistemas de equações lineares foram resolvidos passo a passo pelas alunas com o auxilio das professoras em formação por meio de uma malha construída com material emborrachado e velcro (Figura 3.2.2), onde os números e símbolos matemáticos em Braille deveriam ser posicionados.

Após a resolução do passo a passo de cada método, as alunas deveriam resolver problemas que resultavam em sistemas de equações lineares. A atividade 5 é composta de 6 itens, onde foram trabalhados exercícios de contextualização e diretos. Apenas em um item as alunas deveriam montar o sistema, nos demais o sistema foi dado. No primeiro item da atividade 5, é apresentada uma situação envolvendo duas variáveis e o sistema de equações que a representa. No segundo item, o sistema de equações é apresentado sem uma contextualização, devendo apenas ser resolvido. Nos dois casos, os sistemas devem ser resolvidos por meio do método da substituição. Maria teve dificuldade com a interpretação do primeiro item, onde era dado o preço de 3 sucos com 2 sanduíches por 14 reais e 2 sucos e um sanduíche por 8 reais. O sistema linear que representava essa situação foi dado, mas Maria teve dificuldade em entender como as informações foram organizadas naquele sistema linear. A dificuldade estava no modo como as equações foram montadas, na transcrição da situação para linguagem matemática.

As professoras em formação explicaram que se 3 sucos com 2 sanduíches custam 14 reais, então a equação que representará a situação será composta pelo produto do preço de cada suco por 3, somado com o produto do preço de cada sanduíche por 2 e igualada à 14. Do mesmo modo, se 2 sucos e um sanduíche custam 8 reais, então a equação que representará essa situação será composta pelo produto do preço de cada suco por 2, somado com o preço de um sanduíche e igualada à 8.

Com a orientação das professoras em formação, Maria conseguiu entender como as equações foram montadas e, assim, resolveu tal sistema, assim como o sistema do segundo item, sem transtornos, pois a sua dificuldade foi de interpretação e não na resolução utilizando o método. A aluna Joana não apresentou dificuldade na interpretação nem na resolução de nenhum dos itens aqui citados.

Figura 3.3.5 – Alunas Joana e Maria resolvendo atividade 5



Fonte: elaboração própria.

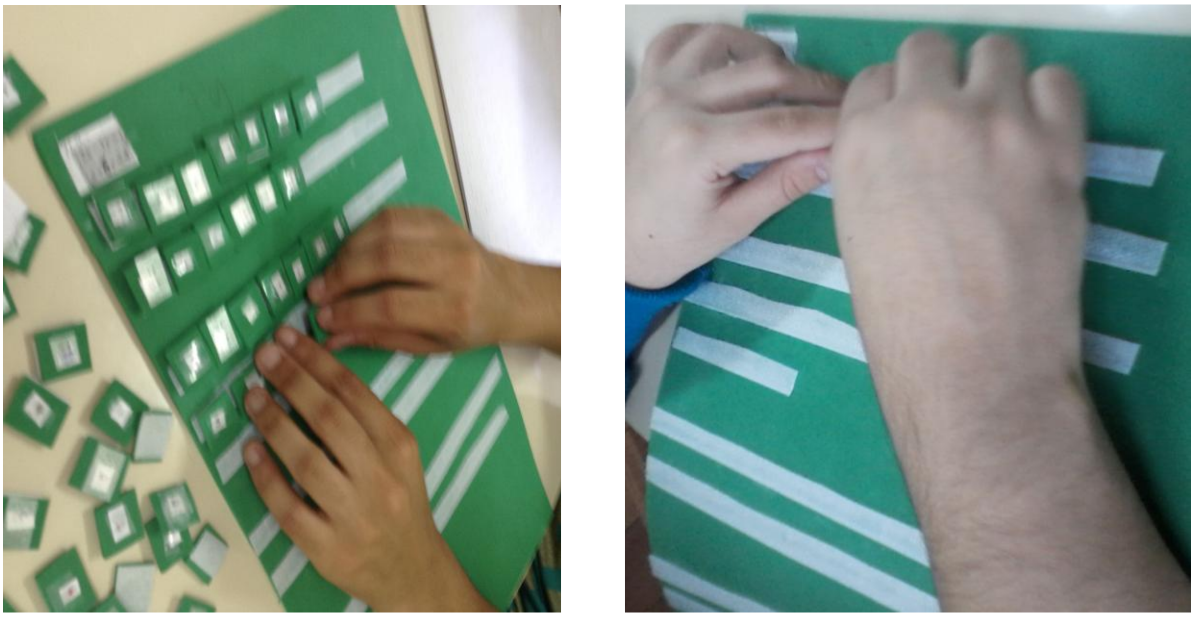
No item **c**, foi apresentado um problema e para sua resolução foi necessário modelar as equações e solucionar o sistema de equações pelo método da comparação. O item **d** apresenta o sistema de equações e pede sua resolução, também, pelo método da comparação. As professoras em formação explicaram que as alunas deveriam “isolar” uma das incógnitas de uma das equações, realizar o mesmo procedimento na outra equação, usando a mesma incógnita anterior, e comparar tais expressões. Tanto Maria quanto Joana apresentaram as mesmas dúvidas: como comparar as duas equações e determinar o valor das incógnitas? As professoras em formação explicaram que a incógnita x das duas equações representam o mesmo número, do mesmo modo a incógnita y. Assim, as alunas conseguiram entender que, após isolar a mesma incógnita nas duas equações, elas deveriam então igualar as expressões encontradas e determinar, assim, o valor de uma incógnita e então substituir esse valor em uma das expressões para encontrar o valor da outra incógnita.

Figura 3.3.6 – Alunas Joana e Maria resolvendo atividade 5 ítem c

Fonte: elaboração própria.

Os itens **e** e **f** têm o mesmo padrão dos itens anteriores, porém deveriam ser resolvidos pelo método da adição. As alunas resolveram os dois itens tranquilamente e mencionaram que dos três métodos de resolução de sistemas de equações lineares que estudaram, o método da adição era o preferido por ser mais fácil.

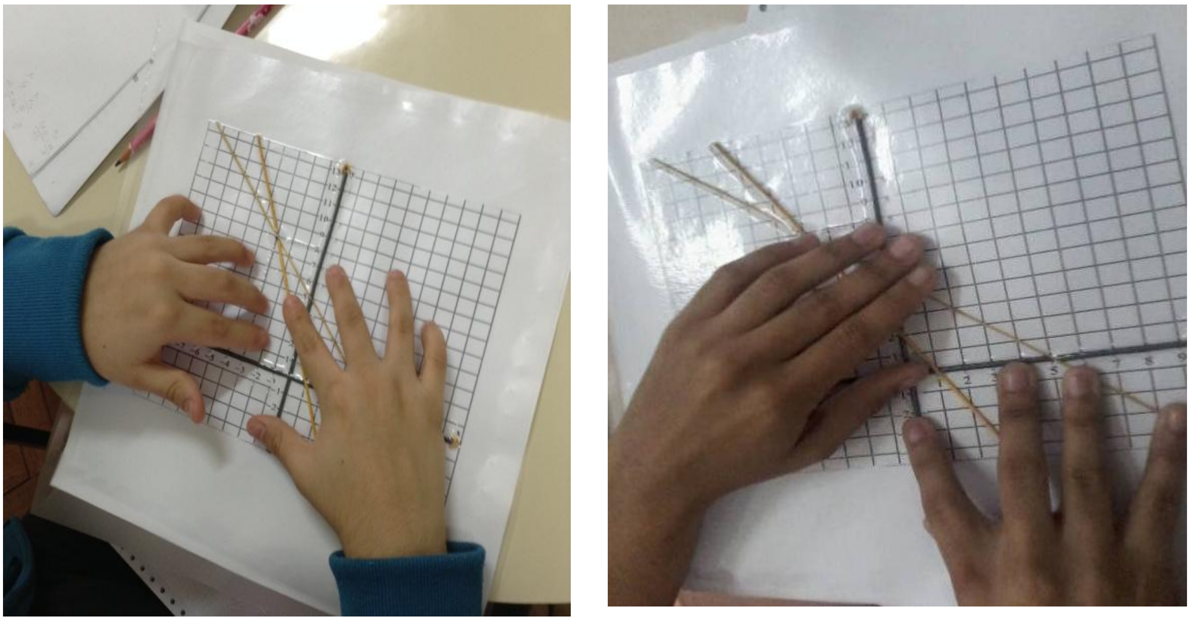
Figura 3.3.7 – Alunas resolvendo atividade 5 itens e, f



Fonte: elaboração própria.

A partir desse momento, foi trabalhada a interpretação geométrica da solução de sistemas de equações lineares. No início da sequência didática, as alunas comprovaram empiricamente, fazendo marcações de pontos com alfinetes no plano cartesiano produzido em alto relevo em uma película de PVC disposta sobre um emborrachado de espessura 1 cm, que o gráfico representativo de uma equação linear com duas variáveis é uma reta. As professoras em formação fizeram discussões sobre o posicionamento entre as retas que representam as equações que formam um sistema linear e sobre o significado geométrico da solução de um sistema linear por meio de películas em alto-relevo com as representações gráficas de sistemas de equações lineares (Figura 3.3.7). As professoras em formação apresentaram outras três películas e solicitaram às alunas que explorassem, usando o sistema háptico. A primeira película apresentava duas retas com um único ponto de intersecção correspondente a um sistema de equações classificado como possível e determinado (Figura 3.3.8).

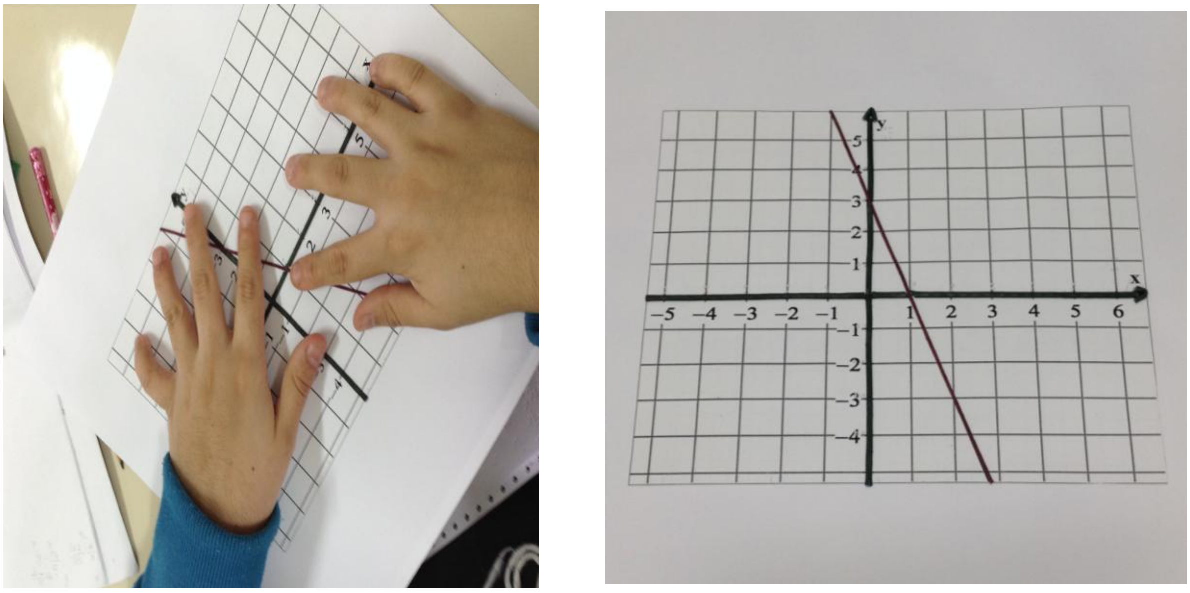
Figura 3.3.8 – Exploração das retas que compõem um sistema linear possível e determinado



Fonte: elaboração própria.

A segunda película apresentava duas retas coincidentes representando um sistema indeterminado, para facilitar a compreensão foi pedido que as alunas em um plano cartesiano separado marcassem pontos que satisfazem cada uma das duas equações que compõem o sistema indeterminado. Assim, as alunas puderam perceber que as retas que representam as equações ficam sobrepostas e um sistema com essas características é classificado como possível e indeterminado por apresentar infinitas soluções (Figura 3.3.9).

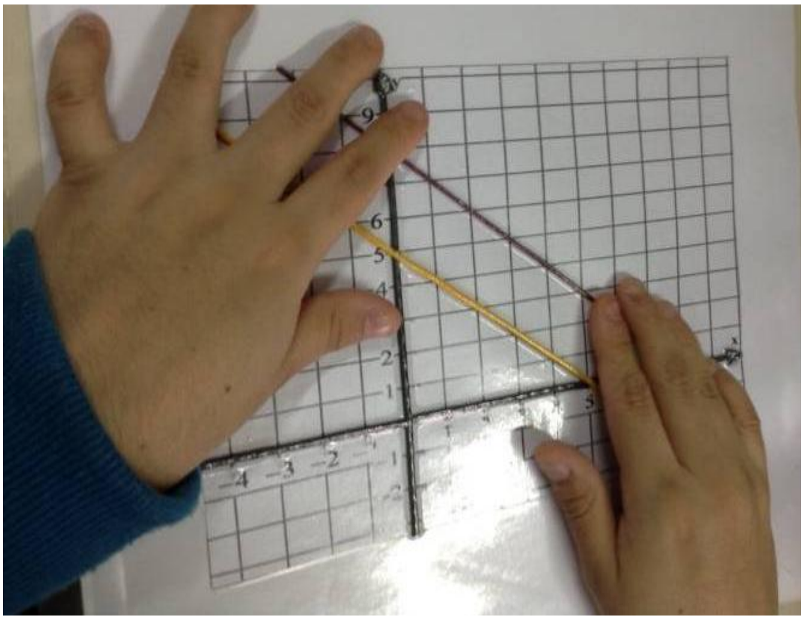
Figura 3.3.9 – Exploração das retas que compõem um sistema possível e indeterminado



Fonte: elaboração própria.

A terceira película apresentava duas retas paralelas, cada uma representando uma equação de um sistema linear. Usando o tato, as alunas perceberam que as retas não possuíam pontos de intersecção, que tal ponto de intersecção não existiria mesmo se as retas fossem prolongadas e que, portanto, o sistema não possui solução. As professoras em formação afirmaram que um sistema sem solução é classificado como impossível (Figura 3.3.10).

Figura 3.3.10 – Exploração das retas que compõem um sistema impossível

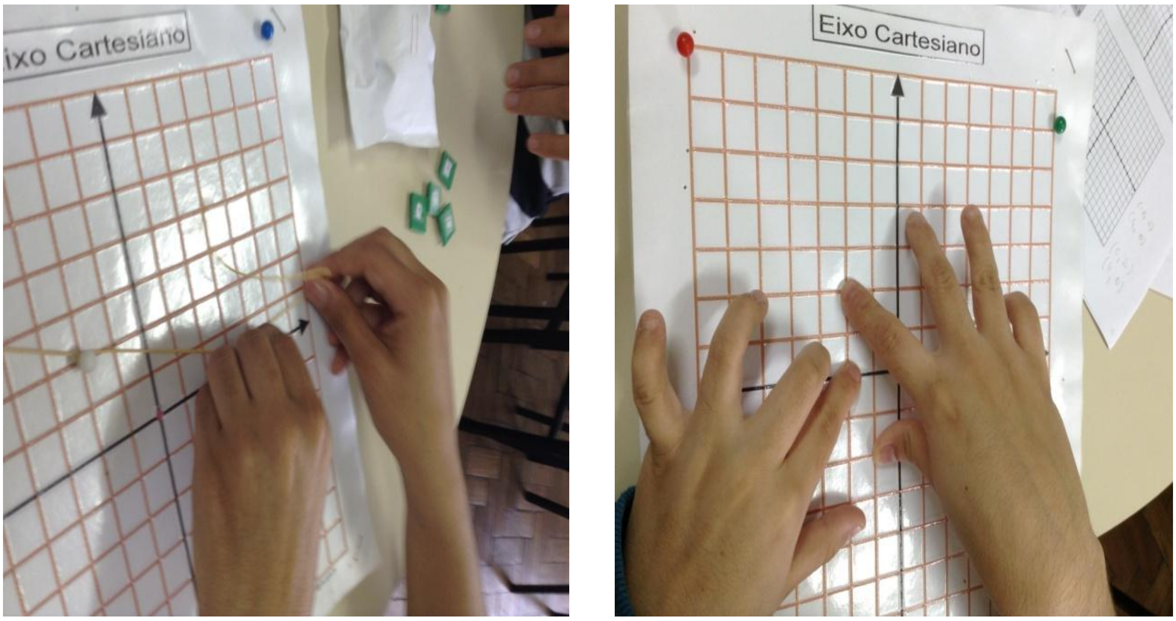


Fonte: elaboração própria.

Mediante essas informações, as alunas foram direcionadas à atividade 6 que continha dois sistemas lineares onde as alunas deveriam traçar, no plano cartesiano, as retas que representam as equações dos sistemas e classificá-los quanto a sua solução.

Uma película de PVC com um plano cartesiano em alto relevo foi sobreposta em um emborrachado de 1 cm de espessura e fixado com alfinetes. As alunas marcaram pares ordenados que solucionavam cada uma das equações que compunham os sistemas, envolveram os alfinetes com linhas, representando retas e usando o sistema háptico, exploraram a imagem para identificar se o sistema apresentava solução e classificá-lo.

Figura 3.3.11 – Alunas resolvendo atividade 6



Fonte: elaboração própria.

Para finalizar a sequência didática, foi trabalhado o método de resolução de sistemas lineares por escalonamento. Esse método era totalmente desconhecido pelas alunas e, por isso, apresentaram certa dificuldade. As professoras em formação resolveram o exemplo com as alunas, usando o passo a passo contido na apostila elaborada e a malha em emborrachado e os números e símbolos matemáticos em Braille colados em quadradinhos de velcro. Como as alunas ainda tinham muitas dúvidas, resolveram os dois itens da atividade 7 sob orientação das professoras em formação. Logo após, as alunas repetiram a resolução desses itens sem a ajuda das professoras em formação (Figura 3.3.12).

Figura 3.3.12 – Alunas resolvendo atividade 7

Fonte: elaboração própria.

Ao finalizar a sequência didática, as professoras em formação pediram a opinião das alunas quanto ao uso do material manipulável na sequência didática. As alunas elogiaram a construção dos gráficos usando as películas de PVC e a malha de emborrachado com velcro. Afirmaram que o material permite o uso do sistema háptico sem a preocupação de que algum número ou símbolo saia da posição correta e possibilite um erro na resolução dos sistemas de equações lineares.

As opiniões das alunas foram de suma importância, pois por meio da fala das mesmas, as professoras em formação puderam chegar à resposta da questão de pesquisa: “como o uso de material manipulável facilita o processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas de alunos cegos?”.

Os materiais manipuláveis elaborados facilitaram o processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares, pois são resistentes e possuem uma boa precisão quanto a sua reprodução em alto-relevo, além de conter todas as informações necessárias, a saber, números, símbolos e letras em Braille, as peças em emborrachado permitiram o registro dos passos da resolução de sistemas de equações lineares e a malha com velcro permitiu a fixação das peças possibilitando a discussão dos métodos de resolução e dando às professoras em formação a possibilidade de corrigir erros conceituais. Os gráficos reproduzidos em películas de PVC permitiram a identificação de pontos comuns entre as retas que representam as equações que compõem o sistema.

Dessa forma, verificou-se que, por meio da utilização dos materiais manipuláveis, as alunas compreenderam os métodos de resolução de sistemas lineares. Ressalta-se que o material foi elaborado de maneira a favorecer a potencialização dos canais sensorias que não a visão, permitindo assim, que as alunas construíssem seu conhecimento por meio da interação com o material, utilizando o sistema háptico, fonador e auditivo.

O material manipulável por si só não influenciará para a otimização do processo de ensino e aprendizagem; o material em alto-relevo deve ter o mínimo de informação possível de modo que, utilizando o sistema háptico o aluno cego consiga buscar informações parciais para entender o todo; todos os sistemas para aquisição de informações devem ser utilizados em conjunto para compensar a falta da visão como afirma Vygotsky.

A importância que os materiais manipuláveis assumem na educação de indivíduos cegos exige que sua confecção seja objetiva e tenha como prioridade a busca por uma aprendizagem significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pessoas com deficiência visual sofriam muitos preconceitos da sociedade. Eram consideradas incapazes de realizar ações e tarefas. Entretanto, apesar de muitos desafios encontrados, hoje, elas participam de diversos ambientes, estão inseridas no sistema educacional e exercem distintas profissões.

A educação inclusiva está passando por muitas reflexões e mudanças, com o intuito de permitir a inclusão de todos nas escolas regulares com ensino de qualidade, mas a inclusão em nosso país ainda depende de um esforço coletivo dos responsáveis pela educação, para que cada vez mais haja melhores condições de acolher os indivíduos com necessidades especiais. Não basta que pessoas com deficiência estejam somente inseridas no ambiente escolar. É necessário que exista integração com os outros colegas e com o conteúdo abordado. Essa convivência é de suma importância, pois permite que todos os alunos aprendam com as diferenças, diminuindo por diversas vezes a discriminação que ainda existe na nossa sociedade.

Em relação ao conteúdo, é relevante que a escola e os professores busquem alternativas para a construção de materiais didáticos atendendo às necessidades dos alunos e promovendo condições para o ensino de qualidade.

Com a experimentação da sequência didática, foi possível responder à questão de pesquisa, pois notou-se que a utilização dos materiais manipuláveis permite que o aluno cego, por meio do sistema háptico obtenha informações exteriores fazendo uso da exploração tátil para que o processo de internalização aconteça. Para isso, o material oferecido deve focar no processo de compensação dos órgãos não comprometidos pela cegueira, ou seja, os resultados da aplicação da sequência didática só foram satisfatórios porque os materiais manipuláveis instigaram o uso dos sistemas háptico, fonador e auditivo.

Desse modo, as informações que seriam obtidas pela visão, não são prejudicadas, pois o indivíduo explora com as mãos na busca de características do objeto de estudo, compensando a falta do canal sensorial da visão.

O emprego do sistema háptico, fonador e auditivo auxiliam o processo de aquisição de informação, permitindo que o aluno compense a falta da visão.

A utilização dos materiais manipuláveis permite a inclusão do aluno cego nas aulas no sentido de acompanhar o mesmo conteúdo ministrado para sua turma e ter referências para fazer perguntas e formular hipóteses.

É desafiador para todos promover meios para que o aluno cego tenha condições reais de aprendizado, mesmo assim, é de fundamental importância desenvolver recursos e ideias inovadoras, pois estas darão suporte ao ensino de qualidade. A deficiência visual deve ser superada, por meio da exploração do sistema háptico, fonador e auditivo, dando espaço para autoestima e autonomia desse aluno.

Acreditamos, também, que os cursos de formação de professores de matemática necessitam capacitar seus licenciandos com condições que permitam a realização de uma educação também inclusiva, evitando a exclusão e o fracasso escolares dos alunos com qualquer tipo de deficiência.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Aline Luzia Leichtfeld de; MARSZAUKOWSKI, Fernanda. **Matemática e a deficiência visual**. 9.ª Semana de Iniciação Científica. FAFIUV, 2009.

ARAÚJO, et al. **Mestrado em Educação Área de Especialização em Tecnologia Educativa Unidade Curricular:** Métodos de Investigação em Educação. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Minho: Instituto de Educação e Psicologia. 2008.

BEZERRA, Giovani Ferreira e ARAUJO, Doracina Aparecida de Castro In: Simpósio Científico Cultural, VII, 2010 Unidade de Paranaíba, **Um Novo Olhar Sobre as Deficiências Humanas: a caracterização positiva do defeito**, Mato Grosso do Sul: UEMS, 2010. p.1-8.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Constituição da República Federativa do Brasil**. promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações adotadas pelas Emendas Constitucionais nos 1/1992 a 76/2013, pelo Decreto Legislativo no 186/2008 e pelas Emendas Constitucionais de Revisão nos 1 a 6/1994. 40º 2013.

BRASIL. **Estatuto da Criança e do Adolescente - Lei nº 8.069**, de 13 de Julho de 1990.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Adaptações Curriculares/Secretaria de Educação Fundamental. Secretaria de Educação Especial. Brasília: MEC/SEF/SEESP, 1998. Disponível em: <http://200.156.28.7/Nucleus/media/common/Downloads_PCN.PDF>. Acesso em: 09 nov. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** LDB 9.394, de 20 de dezembro de 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn2.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Especial. **Atendimento Educacional Especializado em Deficiência Visual**/Secretaria de Educação a Distância. Secretaria de Educação Especial. Brasília: MEC/SEED/SEESP, 2007. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seesp/arqui- vos/pdf/aee_dv.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2014.

BRASIL. **Legislação Brasileira Sobre Pessoas Portadores de Deficiência.** 5º Edição. 2009.

COUTINHO, Clara Pereira. A influência das teorias cognitivas na investigação em tecnologia educativa. Pressupostos teóricos e metodológicos, expectativas e resultados. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga - Portugual, v. 21, n. 001, p. 101 – 127, 2008. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/37421106.pdf>. Acesso em: 02 set. 2014.

COELHO, Talitha Priscila Cabral; BARROCO, Sônia Mari Shima e SIERRA, Maria Ângela In. Congresso Nacional de Psicologia Escolar Educacional, X, 2011 Maringá, **O Conceito de Compensação em L.S. Vigotski e suas Implicações para educação de pessoas Cegas**, Paraná: UEM, 2011. p. 1-11.

FERNANDES, SOLANGE HASSAN AHMAD ALI. **Uma Análise Vygotskiana da Apropriação do Conceito de Simetria por Aprendizes sem acuidade visual**. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio**. v. 3, 5º ed., Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

MAFFEZZOLLI, Eliane Cristine F; BOEHS, Carlos Gabriel Eggerts. Uma reflexão sobre o estudo de caso como método de pesquisa. **Revista da FAE**, Curitiba – PR, v. 11, n. 1, p. 95 – 110, jan/jun. 2008. Disponível em: <http://www.unifae.br/publicacoes/pdf/revista_da_fae/fae_v11_n1/09_Eliane_Carlos.pdf>. Acesso em: 02 set. 2014.

MENDES, Enicéia Gonçalves. A radicalização do debate sobre inclusão escolar no Brasil. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 33, 2006, p. 1- 35. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-24782006000300002&script=sci_arttext>. Acesso em: 10 nov. 2013.

MILANEZ, Simone Ghedini Costa; OLIVEIRA Anna Augusta Sampaio de; MISQUIATTI, Andréa Regina Nunes.
Atendimento Educacional Especializado para alunos com Deficiência Intelectual e Transtornos Globais do Desenvolvimento. São Paulo: Cultura Acadêmica; Marilia: Oficina Universitaria, 2013.

NETTO, Nilson Berenchtein e LEAL, Daniela. Contribuições para uma historiografia soviética. **Nuances:** estudos sobre Educação. Presidente Prudente, SP, v. 24, n.1, p.73-91, jan/abr. 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14572/nuances.v24i1.215673>. Acesso em: 05 dez. 2014.

OLIVEIRA**,** Maria de Lurdes de. **Vigotski e a defesa das compensações das deficiências**. Disponível em: <MDEL DE OLIVEIRA - diaadiaeducacao.pr.gov.br>. Acesso em 16 dez. 2014.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky:** Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1993.

PICCOLO, Gustavo Martins e SILVA, Sandra Cassiano da. A defectologia em Vigotski: do proposto ao pensado na Educação Especial. **Revista Digital**. Buenos Aires - Año 19 - Nº 192 - Mayo de 2014. Disponível em: < http://www.efdeportes.com/>. Acesso em 05 dez. 2014.
PONTE, João Pedro da. **Estudo de caso em Educação Matemática**. Quadrante, vol. 3, n°. 1, 3-17. 2006. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte%28BOLEMA-Estudo%20de%20caso%29.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2013.

PONTE, João Pedro da. **O estudo de caso na investigação em educação matemática.** Quadrante, vol. 3, n°. 1, 3-17. 1999. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Ponte.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2013.

RIBEIRO, Antonio Costa. Desigualdades de Oportunidades e Resultados Educacionais no Brasil. **Revista de Ciências Sociais**, Rio de Janeiro, v. 54, n. 1, 2011, p. 41-87. Disponível em: <http://file:///G:/desigualdades%20de%20oportunidades%20e%20resultados%20educacionais%20no%20brasil.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2013.

SÀ, Elizabet Dias de; CAMPOS, Izilda Maria de; SILVA, Myriam Beatriz Campolina. Atendimento Educacional Especializado: **Deficiência visual**. p. 25. 2007.

UNESCO. **Declaração de Salamanca.** Conferência Mundial sobre Necessidades Educativas Especiais: acesso e qualidade. 1994.

VYGOTSKI, L S. **Obras Completas** – Tomo V. Fundamentos de Defectologia, Ciudade de La Habana: Editorial Pueblo Educación. 1989.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escogidas V – Fundamentos da defectologia**. Traducción: Julio Guillermo Blank. Madrid: Visor. (coletânea de artigos publicados originalmente em russo entre os anos de 1924 e 1934). 1997. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/25672525/Vigotski-Obras-Escolhidas-Tomo-5-Fundamentos-de-Defectologia-Completo-Em-Espanhol>. Acesso em: 07 nov. 2013.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZUFFI, Edina Maura; JACOMELLI Cristiane Vinholes; PALOMBO Renato Dias. Pesquisa sobre a inclusão de alunos com necessidades especiais no Brasil e a aprendizagem em matemática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais**... Recife: CIAEM, 2007. 1-CDROM.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Sequência didática

Licenciatura em Matemática – Sequência didática

Graduandos: Lutyene de Oliveira Silva e Sara Gomes da Silva de Almeida

Equação linear do 1º. grau com duas incógnitas

Muitas situações do dia a dia podem ser representadas matematicamente. Acompanhe alguns exemplos:

O estádio Olímpico João Havelange, popularmente conhecido como Engenhão, está localizado na cidade do Rio de Janeiro (RJ). Seu campo de futebol tem um perímetro de 346 m.

Considerando **x** a medida do comprimento e **y** a medida da largura do campo, em metros, podemos representar matematicamente:

$$\boxed{2x + 2y = 346}$$

Em uma partida de vôlei disputada em duplas, Raul e Felipe marcaram juntos 20 pontos.

Se representarmos por **x** o número de pontos feitos por Raul e por **y** o número de pontos feitos por Felipe, podemos indicar essa situação matematicamente:

$$\boxed{x + y = 20}$$

As representações matemáticas **2x + 2y = 346** e **x + y = 20** dos exemplos dados acima são chamadas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Toda equação do 1º. grau que possui uma ou mais incógnitas é uma <u>equação linear</u>.

A equação $2x + 5y = 10$ é um exemplo de equação linear, onde:

As letras x e y são as incógnitas;

Os números 2 e 5 são os coeficientes das respectivas incógnitas;

O número 10 é o termo independente.

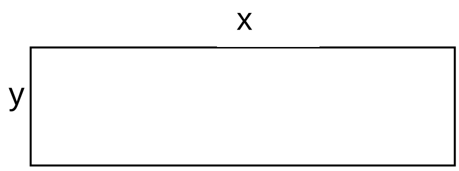
Vejamos outros exemplos:

a) $4x - 5y = 6$, pois equivale a $4x + (-5)y = 6$
b) $7x = 3y$, pois equivale a $7x + (-3)y = 0$
c) $3(m - 2) = 1 - 5n$, pois equivale a $3m + 5n = 7$

Atividade 1) Mariana tem R$ 12,00 a mais do que Flávia. Considerando x a quantia de Mariana e y a de Flávia, identifique a equação linear abaixo que represente essa situação.

a) $x = y + 12$
b) $y = x + 12$
c) $x + y = 12$

Atividade 2) Se x e y são as dimensões de um retângulo, indique com uma equação linear o fato de que esse retângulo tem perímetro 40 cm.



Solução de uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas

Voltando ao 2º exemplo. A informação dada não permite saber quantos pontos marcou cada um dos jogadores, pois são várias as possibilidades:

Pontos de Raul (x)	Pontos de Felipe (y)	Total
12	8	20
10	10	20
15	5	20
...	...	...

Ao analisarmos a tabela, podemos ver que a equação linear **x + y = 20** admite infinitos pares de números que tornam a igualdade verdadeira, tais como: (12, 8); (10, 10); (15, 5) ...ou seja, esses pares de valores são algumas das soluções da equação linear **x + y = 20**. Esses pares de valores são chamados de pares ordenados. Em nosso estudo, vamos combinar que o primeiro número do par seja sempre o valor de x e o segundo seja sempre o valor de y, indica-se o par ordenado: (x, y).

Uma equação linear com duas ou mais incógnitas tem infinitas soluções. Vamos considerar a partir daqui apenas equações lineares com duas incógnitas, onde as soluções serão sempre um par ordenado.

A solução de uma equação linear com duas incógnitas pode ser encontrada, atribuindo - se valores para uma das incógnitas e, em seguida, calculando-se o valor da outra incógnita.

Acompanhe alguns exemplos:

1- Determinar pelo menos dois pares ordenados que sejam solução da equação linear 2x + y = 3.

Vamos atribuir valores eventuais para x, calculando em seguida o valor de y:

Exemplo: a equação 2x + y = 3. Se x = 1 então 2.1 + y = 3 e y=1.

Se x = - 4 então 2.(-4) + y = 3 e y=11. Logo, os pares (1,1) e (-4, 11) são algumas das soluções da equação linear.

Uma equação linear com duas incógnitas tem infinitas soluções, onde cada solução é um par ordenado de números.

Atividades 3) Determine uma solução das equações:

a) 3x – 7y = - 12, para y = 6.

b) 3(x – 4) + 2y = x, para x = 5

Representação gráfica da solução de uma equação linear com duas incógnitas

Como já foi visto anteriormente, a solução de uma equação linear com duas incógnitas é dada em forma de par ordenado, e podemos representá-lo em um plano cartesiano.

O plano cartesiano é formado por duas semirretas perpendiculares que representam o eixo das abscissas (eixo x) e o eixo das ordenadas (eixo y). A intersecção entre os eixos ocorre no ponto (0, 0), origem do sistema cartesiano.

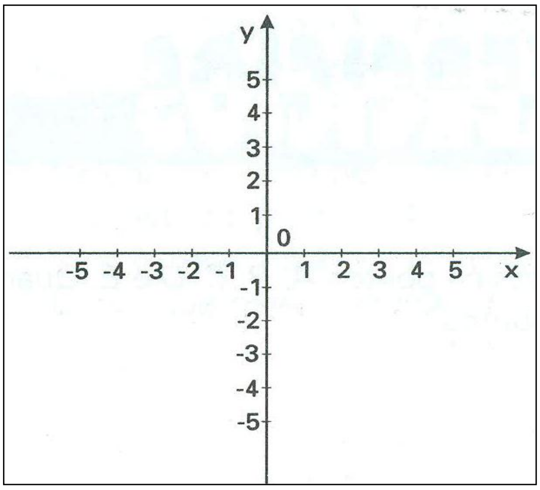


Figura 1

Vamos determinar alguns pares ordenados que sejam soluções da equação linear 2x + y = 1 e representá-los graficamente. Para isso, vamos escrever a equação de forma explicita: y = - 2x + 1.

Se x = 2 então y = -2.2 + 1 ⇔ y = -3. Temos o par ordenado (2, -3).

Se x = 1 então y = -2.1 + 1 ⇔ y = -1. Temos o par ordenado (1, - 1).

Se y = 2 então 2x + 2 = 1 ⇔ x = $-\frac{1}{2}$. Temos o par ordenado ($-\frac{1}{2}$, 2).

Logo os pares ordenados (2, -3); (1, - 1) e ($-\frac{1}{2}$, 2) são soluções da equação linear 2x + y = 1.

Observe a posição dos pontos marcados no plano cartesiano a seguir e perceba que eles estão alinhados, ou seja, é possível colocá-los todos em uma mesma reta.

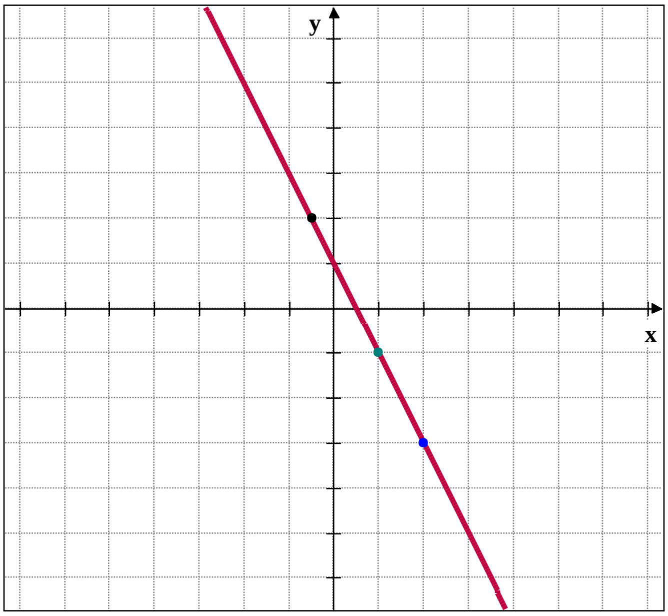
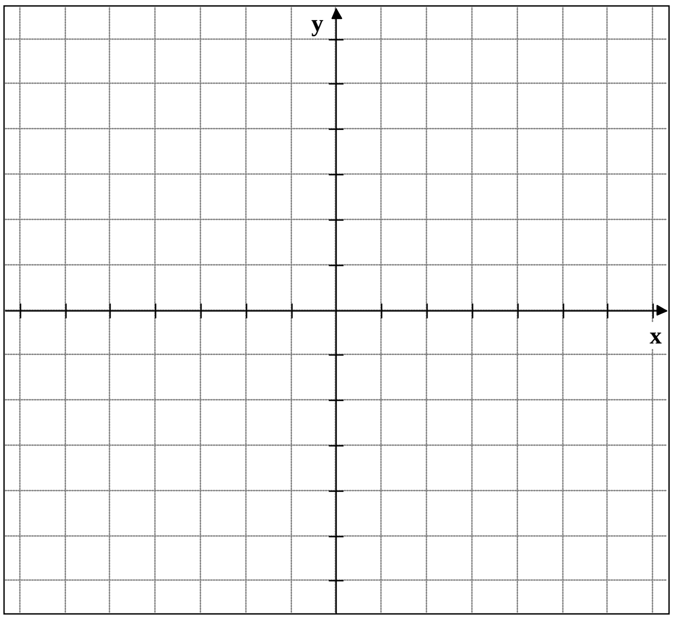


Figura 2

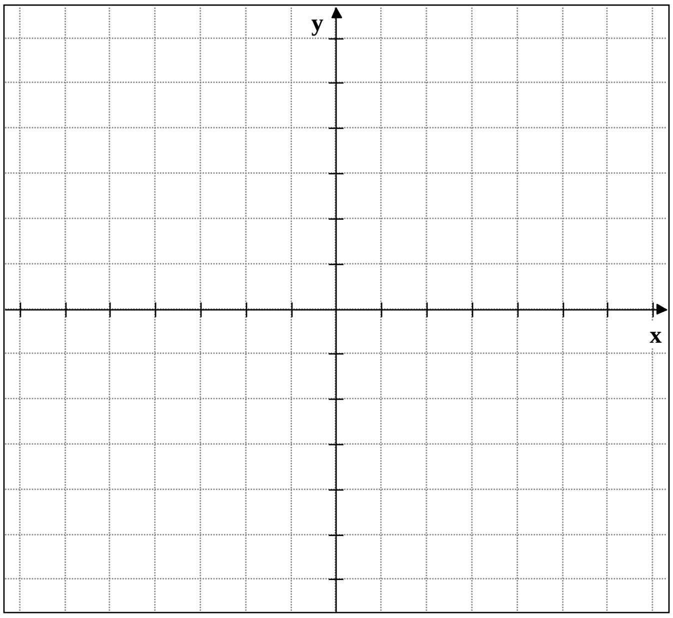
Os pontos correspondentes às soluções de uma equação linear com duas incógnitas estão sempre alinhados, ou seja, estão todos sobre uma mesma reta.

Atividade 4) Determine as soluções de cada uma das equações para os valores indicados e represente - as graficamente.

a) $x + y = 2$, se $y = 3$ e se $x= 3$.



b) 2x – 3y = 6, se x = 4 e x = - 3.



Sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas

No exemplo 2, você viu que Raul marcou x pontos, Felipe marcou y pontos e que juntos marcaram 20 pontos. Com essas informações, podemos escrever x + y = 20 e registrar possíveis soluções: (12, 8); (10, 10); (15, 5) entre outras.

Sabendo uma nova informação para essa situação, que Raul marcou o triplo dos pontos de Felipe, ou seja, x = 3y, vamos registrar possíveis soluções para esta outra equação: (3,1); (6,2); (9,3); (15,5) entre outras.

Comparando as soluções das equações x + y = 20 e x = 3y, é possível notar que o par ordenado (15,5) é uma solução comum. Portanto, assumindo as duas informações, Raul marcou 15 pontos e Felipe 5 pontos no jogo.

Em caso como esse, dizemos que as equações x + y = 20 e x = 3y formam um sistema de duas equações e duas incógnitas, indicado matematicamente por:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$$

Sistema linear é todo sistema formado por equações lineares.

Resolver um sistema linear significa procurar as soluções comuns às duas equações. Na situação anterior, o par ordenado (15,5) é a solução do sistema, pois 15 + 5 = 20 e, ao mesmo tempo 15 = 3.5.

Os sistemas de equações são aplicados nas ciências, na indústria, no comércio entre outros, como mostra o exemplo a seguir.

Uma indústria de óleo comestível pretende lançar no mercado um novo produto: trata-se de uma mistura de óleo de soja com azeite de oliva.

Após uma pesquisa, conclui-se que o preço final ao consumidor será competitivo se o custo de produção do litro da mistura for R$ 2,50. Sabendo que o litro do óleo de soja custa R$ 2,00 e que o litro do azeite de oliva custa R$ 4,50, um litro dessa mistura deverá conter que quantidade de azeite de oliva?

Para resolver esse problema, vamos supor que x e y sejam, respectivamente, as frações de óleo de soja e de azeite de oliva contidas em um litro de mistura. Assim, devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4{,}5y = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y (\mathrm{I}) \\ 2x + 4{,}5y = 2{,}5 (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos: $2(1 - y) + 4{,}5y = 2{,}5 \Rightarrow y = 0{,}2$

Logo, cada litro da mistura deve conter 0,2 L de azeite de oliva.

Resolução de sistemas lineares pelo método da substituição

Um dos métodos utilizados para resolver um sistema consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e substituir o valor encontrado nas outras equações, como foi feito no exemplo anterior.

Vamos resolver o sistema a seguir, usando esse método.

$$\begin{cases} 2x + y = 270 \\ 3x + 2y = 460 \end{cases}$$

1º Passo: escolhemos a equação e a incógnita mais conveniente e determinamos o valor dessa incógnita em relação à outra.

$$2x + y = 270 \Leftrightarrow y = 270 - 2x$$

2º Passo: na outra equação substituímos y por 270 – 2x e obtemos uma equação com uma só incógnita, que já sabemos resolver.

3x + 2y = 460

3x + 2(270 – 2x) = 460

3x – 4x = 460 – 540

– x = – 80 (multiplicando ambos os membros por – 1)

x = 80

3º Passo: usando y = 270 – 2x e sabendo que x = 80, podemos obter o valor de y.

y = 270 – 2x

y = 270 – 2(80)

y = 270 – 160, logo y = 110

Daí a solução do sistema linear é dada pelo par ordenado (x,y) = (80,110).

Resolução de sistemas lineares pelo método da comparação

Vamos resolver o sistema pelo método da comparação.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1º Passo: na primeira equação, vamos determinar o valor de x.

x + y = 4

x = 4 – y (I)

2º Passo: na segunda equação, vamos determinar o valor da mesma incógnita x.

2x + y = 7

2x = 7 - y

$$x = \frac{7 - y}{2} \quad \text{(II)}$$

3º Passo: vamos comparar as igualdades (I) e (II).

x = 4 – y (I) e $x = \frac{7 - y}{2}$ (II)

$4 - y = \frac{7-y}{2}$, achando o mmc obtemos: $\frac{2(4-y)}{2} = \frac{1(7-y)}{2}$

2(4 – y) = 1(7 – y)

8 – 2y = 7 – y

– 2y + y = 7 – 8

– y = – 1 (multiplicando os dois membros por – 1)

y = 1

4º. Passo: por fim, vamos substituir o valor de y em x = 4 – y.

x = 4 – 1

x = 3

Logo, a solução do sistema linear é o par ordenado (3,1).

Resolução de sistemas lineares pelo método da adição

Dado o sistema,

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

vamos considerar 3x + 2y = 6 (I) e 5x – 2y = 2 (II).

Observe que a incógnita y tem coeficiente 2 na equação (I) e coeficiente – 2 na equação (II). Desse modo, podemos encontrar a solução do sistema, somando membro a membro essas duas equações.

$$\begin{array}{lcl} 3x + 2y = 6 & \multirow{2}{*}{+} & (I) \\ 5x - 2y = 2 & & (II) \\ \hline (3x + 5x) + (2y - 2y) = 6 + 2 & & \end{array}$$

Resolvendo o resultado (3x + 5x) + (2y – 2y) = 6 + 2, obtemos:

8x + 0y = 8, ou seja, 8x = 8 ⇔ x = 1.

Substituímos o valor de x em umas das equações do sistema para encontrar o valor de y. Substituindo na 1ª. Equação:

3(1) + 2y = 6 ⇔ 3 + 2y = 6 ⇔ 2y = 3 ⇔ y = $\frac{3}{2}$

Logo a solução do sistema é o par $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$.

Atividade 5) Resolva as questões a seguir:

a) Tina passeava pelo calçadão da praia quando avistou um quiosque de sanduíches e sucos naturais. Em um cartaz, havia as seguintes sugestões de pedidos: 3 sucos + 2 sanduíches = R$ 14,00 ou 2 sucos + 1 sanduíches = R$ 8,00.

Tina ficou interessada em saber o preço unitário do suco e do sanduíche. Estudante aplicada representou por x e y os preços unitários do suco e do sanduíche, respectivamente, obtendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Encontre a solução desse sistema utilizando o método da substituição.

b)Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ utilizando o método da substituição.

c)Pedrinho comprou duas coxinhas e um refrigerante pelos quais pagou R$ 7,00. Seu irmão Joãozinho comprou uma coxinha e um refrigerante a mais, pagando R$ 11,50. Qual é o preço do refrigerante e da coxinha? Monte as equações e resolva o sistema pelo método da comparação.

d)Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - y = 12 \end{cases}$ utilizando o método da comparação.

e)Num depósito existem 24 caixas de papelão, no formato de quadrado e retângulo. Sabendo-se que a quantidade de caixas no formato de quadrado é o dobro da quantidade de caixas retangular, conclui-se que a quantidade de caixas retangulares no deposito é de:

a) 8 b) 12 c) 16

f)Resolva o sistema $\begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ utilizando o método da adição.

Representação e Interpretação geométrica de um sistema linear

Além do processo algébrico, um sistema linear pode ser resolvido graficamente. Acompanhe as situações a seguir.

Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, 3x + 2y = 14 e 2x + y = 8 são equações lineares com duas incógnitas. Como discutido no início da apostila, as soluções de tais equações são pontos que ficam sempre alinhados e, portanto, o gráfico que representa as soluções das equações são retas.

Na figura a seguir, a reta r representa as soluções da equação 3x + 2y = 14 a reta s representa as soluções da equação 2x + y = 8. Observe que as duas retas se intersectam em um único ponto, o par ordenado (2,4). Tal par ordenado é a única solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$.

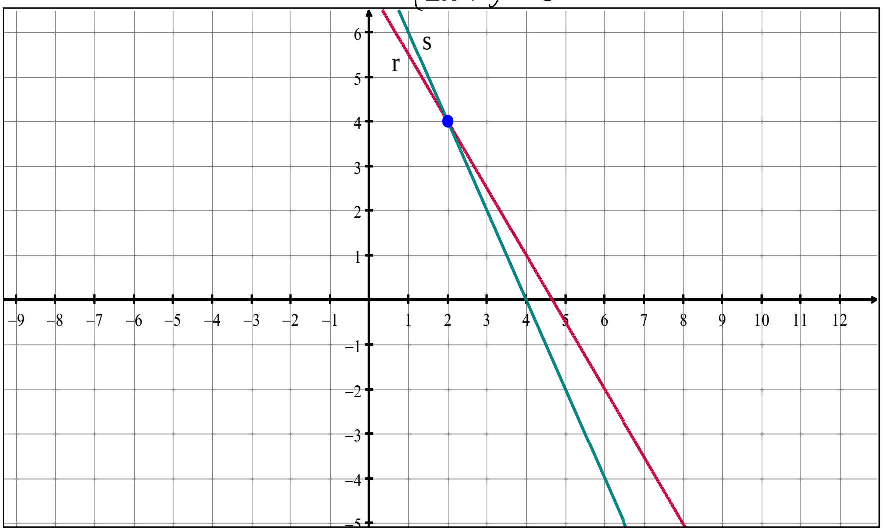


Figura 3

Um sistema de equações lineares com duas incógnitas que apresenta uma única solução é classificado como Possível e Determinado.

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é classificado como Possível e Indeterminado quando as duas retas que representam as equações do sistema são coincidentes.

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é classificado como Impossível quando as duas retas que representam as equações do sistema não têm ponto de intersecção.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ Representando esse sistema, geometricamente, vamos obter a sua solução e sua classificação.

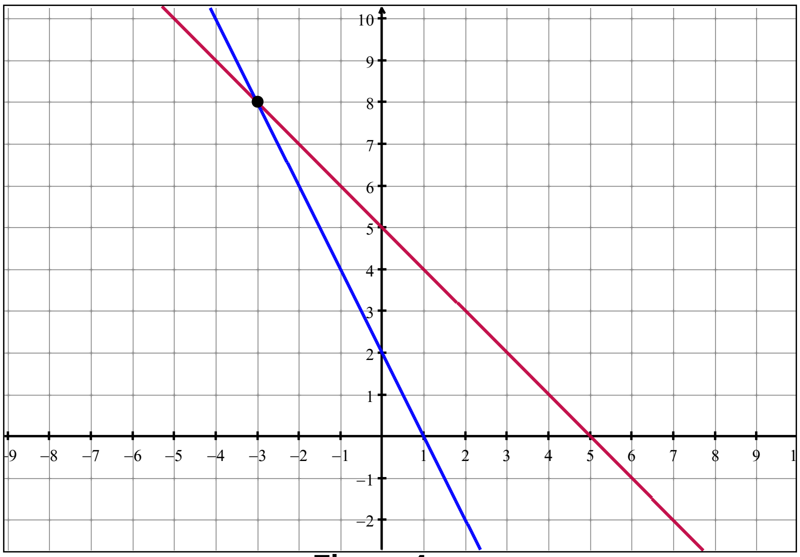


Figura 4

Ao observar a representação geométrica do sistema, obtemos duas retas concorrentes, ou seja, que tem um único ponto em comum. Logo, a solução do sistema linear é o par ordenado (– 3, 8) e o sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 9x + 3y = 9 \end{cases}$

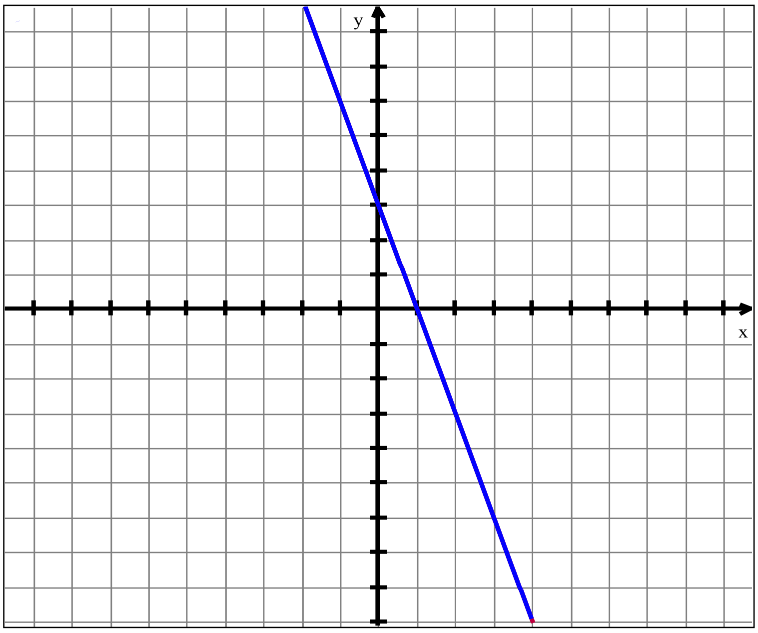


Figura 5

Ao observar o gráfico acima, percebemos que as duas equações têm a mesma reta como representação geométrica, ou seja, são duas retas coincidentes. A solução desse sistema são todos os pontos que estão sobre as retas, ou seja, infinitos pontos. Logo, a solução do sistema linear são infinitos pares ordenados e o sistema é classificado como possível e indeterminado.

c) $$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

O sistema acima é classificado como sistema impossível, pois não existem dois números, x e y, cuja soma seja igual a 5 e, também, igual a 8. Observe como fica a representação geométrica deste sistema.

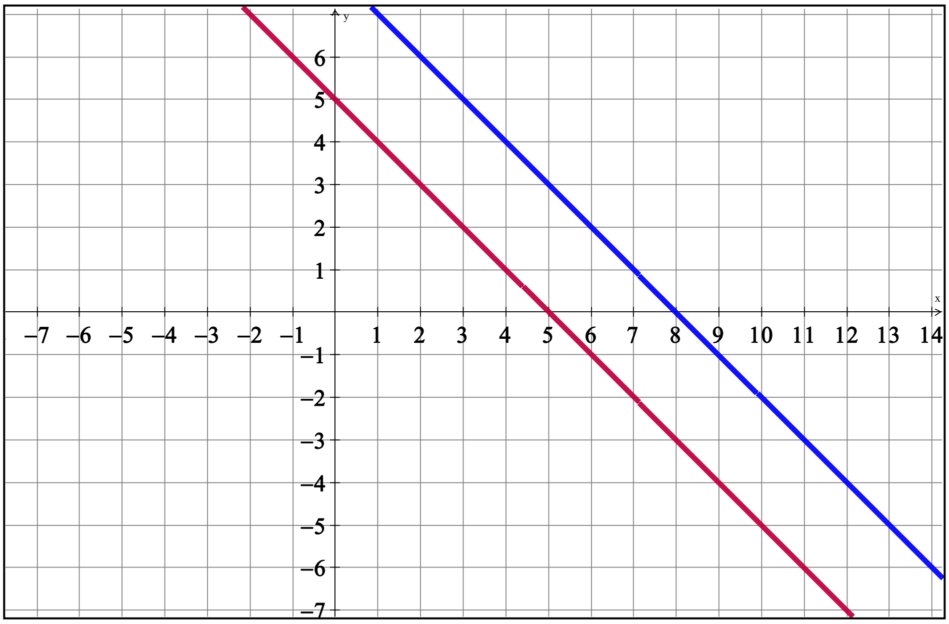


Figura 6

A representação geométrica do sistema são duas retas paralelas, não existe nenhum ponto comum. Logo, o sistema linear não admite nenhuma solução, o sistema é impossível.

Resumindo, temos:

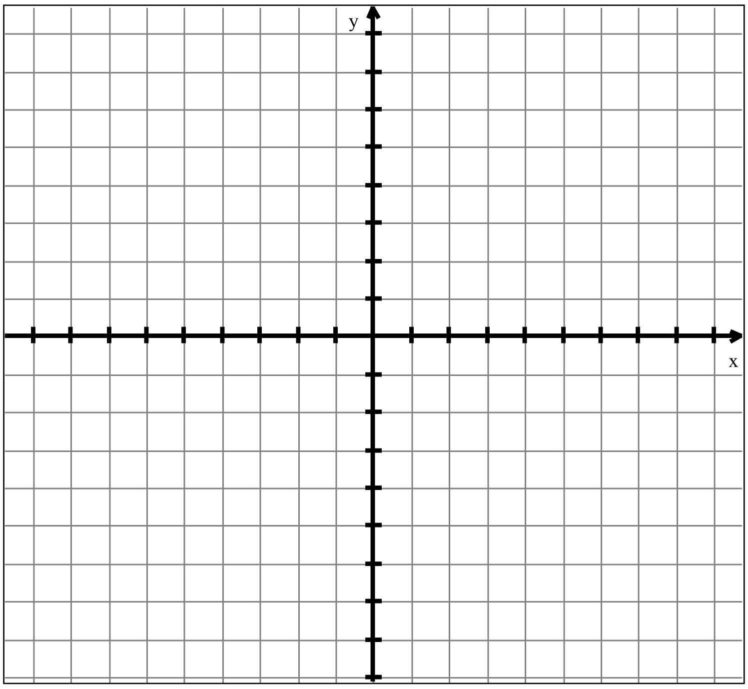
Sistema linear possível e determinado (o sistema tem única solução e a representação geométrica são retas concorrentes);

Sistema linear possível e indeterminado (o sistema tem infinitas soluções e a representação geométrica são retas coincidentes);

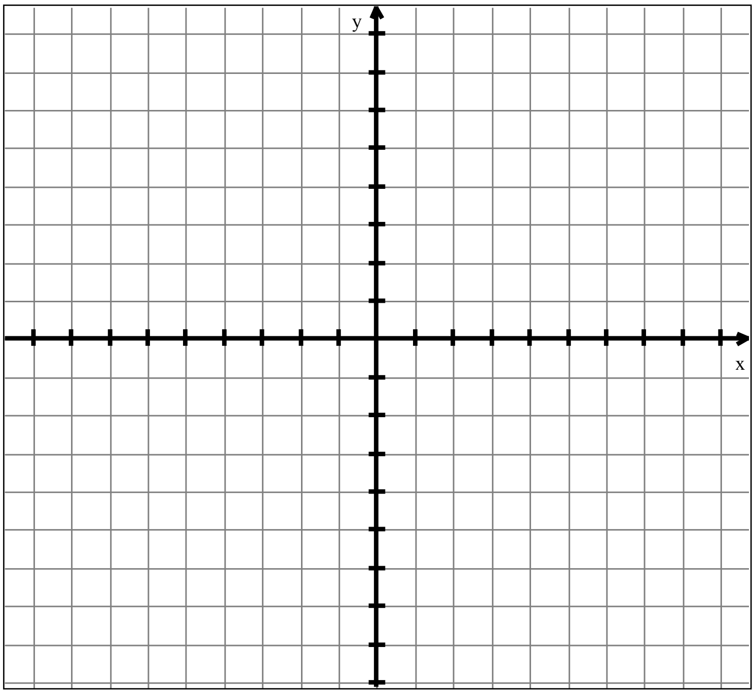
Sistema linear impossível - (o sistema não tem solução e a representação geométrica são retas paralelas).

Atividade 6) Represente, graficamente, as soluções dos sistemas lineares abaixo e classifique - os.

a) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$



Resolução de sistema linear utilizando o método de escalonamento

Para escalonar um sistema, podemos utilizar as seguintes etapas:

1) Colocar como 1ª equação aquela que tenha 1 como coeficiente da 1ª incógnita.
2) Na segunda equação, obter zero como coeficientes da 1ª incógnita, somando cada uma delas com o produto da 1ª equação pelo oposto do coeficiente dessa incógnita.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & * (-2) \\ 2x - 3y = 1 & + \end{cases} \sim \quad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -7y = -7 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$$

Substituindo y = 1 em x + 2y = 4:

x + 2.1 = 4 ⇔ x = 2. A solução do sistema é o par ordenado (2,1).

Atividade 7) Resolva os sistemas lineares a seguir, utilizando o método do escalonamento.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 8x + 6y = 8 \end{cases}$