LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# A MATEMÁTICA DO JOGO DO NIM EM UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

BEATRIZ IGNACIO ALMEIDA
RAFAELA BARCELOS DE CARVALHO

Campos dos Goytacazes – RJ

2016

BEATRIZ IGNACIO ALMEIDA

RAFAELA BARCELOS DE CARVALHO

# A MATEMÁTICA DO JOGO DO NIM EM UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcialpara conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Ana Paula Rangel de Andrade

Campos dos Goytacazes – RJ

2016

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

A447m

Almeida, Beatriz Ignacio
A matemática do jogo do Nim em uma abordagem investigativa / Beatriz Ignacio Almeida, Rafaela Barcelos de Carvalho - 2017.
79 f.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2017.

1. Jogo do Nim. 2. Investigação Matemática. 3. Padrões. I. Andrade, Ana Paula Rangel de , orient. II. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BEATRIZ IGNACIO ALMEIDA

RAFAELA BARCELOS DE CARVALHO

# A MATEMÁTICA DO JOGO DO NIM EM UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 22 de dezembro de 2016.

Banca Avaliadora:

Ana Paula Rangel de Andrade

---

Prof ª. Ana Paula Rangel de Andrade (orientadora)
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades /UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Carla A. F.

---

Prof ª. Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática Aplicada /UFRJ/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Mônica Souto da Silva Dias

---

Prof ª. Mônica Souto de Silva Dias
Doutora em Educação Matemática/PUC/SP
Universidade Federal Fluminense

## AGRADECIMENTOS

Queremos registrar a nossa sincera gratidão a todos aqueles que foram essenciais para que obtivéssemos êxito na conclusão desta etapa de nossas vidas.

Primeiramente a Deus, pela vida e pelas bênçãos derramadas, pelas pessoas que colocou em nossos caminhos, pelo sustento e pela ajuda ao longo de toda caminhada.

Aos nossos pais, que sempre se fizeram presentes, nos motivando e nos dando palavras de apoio.

Às nossas irmãs, pelo carinho epela compreensão.

À nossa orientadora Ana Paula Rangel de Andrade, por toda a dedicação, ensinamentos, orientações e carinho conosco ao longo dessa trajetória.

Às professoras Carla Antunes Fontes e Mônica Souto da Silva Dias que aceitaram participar da banca avaliadora.

Aos demais professores do curso de Licenciatura em Matemática pelo excelente ensino que nos proporcionaram.

A todos os participantes do teste exploratório e da experimentação da sequência didática pelo convite aceito e pelas contribuições dadas.

Aos nossos amigos Carolina Gonçalves Guimarães, Emanuelle da Costa Figueiredo, Flávia Gomes de Abreu Siqueira, Genaldo Guilherme Teixeira e Maysa Bomfim que estiveram conosco desde o início. Se a caminhada ficou mais fácil foi porque também tínhamos vocês nos apoiando e dividindo o “peso” nos ombros.

Enfim, a todos que nos ajudaram, de forma direta ou indireta, a concluir esta etapa de nossas vidas, o nosso mais sincero agradecimento.

Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente.

Roger Von Oech

# RESUMO

Pesquisas revelam que a utilização de jogos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem sido uma ferramenta eficaz, pois faz com que os alunos se interessem pela disciplina além de proporcionar uma aprendizagem mais dinâmica e divertida. Dentre os diferentes tipos de jogos, destaca-se neste trabalho o jogo de estratégia conhecido como jogo do Nim. O objetivo dessa pesquisa é investigar se um trabalho com o jogo do Nim acompanhado de atividades investigativas contribui para a percepção de padrões relacionados à divisão. Elaborou-se, dessa forma uma sequência didática para alunos do 9°. ano do Ensino Fundamental. A pesquisa, de caráter qualitativo, teve os dados coletados por meio de entrevista semi-estruturada, diário de bordo, gravação em áudio, observação e respostas das atividades. A metodologia de ensino adotada foi a Investigação Matemática, o que permitiu dividir a sequência didática em três etapas: apresentação do jogo, exploração e formulação de questões; formulação das conjecturas, realização de testes e reformulação; e justificação das conjecturas e avaliação do trabalho. Vale ressaltar que o jogo do Nim foi de grande importância para o trabalho, pois além da Matemática envolvida na estratégia de vitória, proporcionou grande motivação entre os alunos. Os resultados confirmam a importância de pesquisas como essa, que utilizam jogos para abordar conceitos da Matemática.



**Palavras-chave:** Jogo do Nim. Investigação Matemática. Padrões.

# ABSTRACT

Research reveals that using games in teaching and learning in Mathematics has been an effective tool because it makes students interested in the discipline. In addition, it provides a more dynamic and fun learning. Amongst the different types of games, the game of strategy known as Nim gameis highlighted in this work. The purpose of this research is to investigate whether a work with the Nim game followed by investigative activities contributes to the perception of patterns related to the division. Thus, a didactic sequence was developed for students from the 9$^{th}$ year of Elementary School. This research, of qualitative character, had the data collected through a semi-structured interview, logbook, audio recording, observation, and responses of the activities. The teaching methodology adopted was the Mathematical Investigation, which allowed to divide the didactic sequence in three stages: presentation of the game, exploration and formulation of questions; formulation of conjectures and testing; and justification of the conjectures and evaluation of the work. It is worth mentioning that the Nim game had a great importance in this work, because besides the Mathematics involved in the strategy, it provided great motivation among the students. The results confirm the importance of researches such as this, which use games to approach Mathematical concepts.



**Keywords:** Nim game. Mathematical investigation.Patterns.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

## SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO

A inspiração para a escolha do tema desta pesquisa ocorreu pela vontade de propor algo novo, diferente do "ensino tradicional" praticado em muitas escolas, em que os alunos se apresentam numa posição passiva frente ao conhecimento respondendo com desinteresse, falta de vontade de aprender, indisciplina, dentre outros fatores. Dessa forma, as pesquisadoras consideraram que uma das estratégias para a motivação dos alunos é a utilização de jogos no ensino e aprendizagem de Matemática.

Segundo Borin (1998), para os alunos que apresentam dificuldades em Matemática ou mesmo para aqueles se que sentem incapacitados de aprendê-la, um recurso interessante capaz de minimizar essa situação é a inserção de jogos nas aulas.

Grando (2000) afirma que uma das justificativas para inserir jogos no ensino é a presença da ludicidade, capaz de despertar o interesse e o desejo do jogador no planejamento de suas próprias ações no jogo. Outra vertente é a motivação na superação de desafios e a presença do sentimento de competição, aspectos que permitem ao aluno/competidor conhecer seus limites e adquirir confiança e coragem ao se arriscarem nas jogadas.

Grando (2000) reforça que durante a partida os sujeitos estabelecem várias relações como a cooperação, a reavaliação do que precisa ser trabalhado, além das ações planejadas no jogo (estratégias), minimizando o sentimento de competição e promovendo a socialização do conhecimento. Além disso, por ser uma atividade capaz de gerar situações estimulantes, os sujeitos podem coordenar diversos pontos de vista. Considerando esses aspectos, Kishimoto pontua:

> As crianças ficam mais motivadas a usar a inteligência, pois querem jogar bem; sendo assim, esforçam-se para superar obstáculos, tanto cognitivos quanto emocionais. Estando mais motivadas durante o jogo, ficam também mais ativas mentalmente (KISHIMOTO,1996, p.96).

Porém, é importante destacar que, para a utilização dos jogos nas aulas de Matemática, é imprescindível um planejamento detalhado, sendo necessário definir e analisar todas as etapas propostas bem como a metodologia adequada de acordo com o nível trabalhado. Dessa forma, é necessário que o professor utilize de mecanismos que validem o jogo como prática pedagógica no processo de aprendizagem, tornando-o uma atividade desafiadora para o aluno.

Fiorentini e Miorim (2009, p. 9) reforçam que "o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico". Segundo os autores, “[...] nenhum material é válido por si só. [...]. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da Matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina”.

Grando (2000) considera que:

> O jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação (GRANDO,2000,p 28).

Segundo Almeida (1990), com uma proposta de atividade adequada, o jogo pode permitir que os alunos lidem com questões abstratas que exigem reflexão, planejamento estratégias e soluções para as situações apresentadas, além de permitir exercitar liderança, autonomia e negociação.

Borin (1998), também, destaca que o jogo pode ser um instrumento de diagnóstico das dificuldades apresentadas por alguns alunos, já que não estão, sendo submetidos a uma avaliação tradicional.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o jogo é uma atividade prazerosa que, apesar de demandar regras e exigências, não impõe nenhuma obrigação externa e, quando praticado em grupo, desenvolve habilidades e conhecimentos matemáticos. Assim, os PCN destacam:

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes– enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório - necessárias para aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998,p.48).

Nesse sentido, com a intenção de desenvolver um trabalho com jogos nas aulas de Matemática, propõe-se uma atividade investigativa a partir do jogo do Nim cujo detalhamento está exposto na seção 1.2 deste trabalho.

A presente pesquisa pretende responder à seguinte questão: “O uso do jogo do Nim acompanhado de atividades de investigação contribui para a percepção de padrões relacionados à divisão?”.

Para responder a essa questão, traçou-se o seguinte objetivo: investigar se um trabalho com o jogo do Nim acompanhado de atividades de investigação contribui para a percepção de padrões relacionados à divisão.

Este trabalho monográfico é composto de três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

O primeiro capítulo apresenta o aporte teórico que embasou o planejamento, o desenvolvimento e a análise da sequência didática. Trata do uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em especial do jogo do Nim; da metodologia de ensino adotada, da Investigação Matemática; e de estudos correlatos a este trabalho.

No segundo capítulo, encontram-se os aspectos metodológicos, abordando a caracterização da pesquisa e a elaboração da sequência didática, em que são descritas as três etapas referentes às atividades propostas, bem como seus objetivos.

No terceiro capítulo, são apresentadas a descrição e a análise das aplicações das etapas da sequência didática elaborada, que ocorreram no teste exploratório e na experimentação. Por fim, as considerações finais destacam pontos relevantes sobre o desenvolvimento deste trabalho monográfico e a resposta à questão de pesquisa.

# 1 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, é apresentado o aporte teórico que subsidiou a elaboração desta pesquisa. Está subdividido em quatro seções. A primeira aborda o uso de jogos nas aulas de Matemática; a segunda trata exclusivamente do jogo do Nim; a terceira é dedicada à metodologia de ensino utilizada nas atividades da pesquisa, a Investigação Matemática e a última aos estudos que envolvem aspectos similares a esta monografia.

## 1.1 O Uso de Jogos no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática

O ensino de Matemática deve ser mais do que “um fazer de contas”. Segundo Groenwald e Timm (2000), ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas.

Novos caminhos devem ser buscados para uma prática docente mais coerente com a sociedade atual, fazendo com que os alunos se interessem pela Matemática além de contribuirem para o desenvolvimento do aluno, enquanto ser social (MATHEUS; KATO, 2011).

Nesse sentido, o uso de jogos desponta como um importante recurso para o professor dessa disciplina, trabalhando o lúdico e proporcionando um ambiente de construção de conhecimento a partir de uma aprendizagem mais dinâmica e divertida, além dos aspectos de socialização e de autoestima (ANTUNES, 2005).

As pesquisas bibliográficas revelam a presença do uso de jogos na educação desde antes de Cristo, com Platão em 397, afirmando que as crianças deveriam realizar atividades educativas por meio dos jogos. Há relatos, também, na Grécia Antiga, França, Roma, mas só no século passado teorias mais significativas sobre o uso do lúdico no processo de ensino e aprendizagem despontaram, como a de Maria Montessori, Vygotsky e Piaget (SANT’ANNA; NASCIMENTO, 2011).

Usualmente, jogar é uma atividade relacionada à diversão e ao lazer. A palavra jogo é de origem latina e significa gracejo. No sentido etimológico, exprime um divertimento, brincadeira, passatempo submetido a regras que devem ser observadas quando se joga (ANTUNES, 2005).

Antunes (2005, p. 4) destaca o papel educativo dos jogos, definindo-os como “atividades de natureza lúdica e educativa, uma relação interpessoal entre o educador e o educando, estabelecida por algumas regras e por objetivos”.

De acordo com Grando (2000), vários fatores justificam o uso de jogos em situações de ensino, como o desafio que motiva o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação na busca da vitória.

Segundo Groenwald e Timm (2000, p.1), “devemos utilizá-los [os jogos] não como instrumentos recreativos na aprendizagem, mas como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos”.

Conforme as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os jogos são um importante recurso metodológico em sala de aula, visto que:

> [...] constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (BRASIL, 1998, p. 47).

Dessa forma, a Matemática pode contribuir para a formação do educando quando são utilizadas metodologias que “[...] enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios” (BRASIL, 1998, p. 27).

Nicoletti e Filho (2004 apud LIMA; SILVA, L; SILVA, S, 2009) chamam a atenção para o aspecto de socialização que os jogos promovem.

> Os jogos educativos possibilitam ao aluno aprender de forma natural, prazerosa e dinâmica, porque trás [sic] desafios que despertam na criança o interesse na busca dos conhecimentos, além de oferecer um maior envolvimento social entre os alunos, bem como a formação de conceitos éticos, de solidariedade, de regras, de trabalho em grupo, de respeito mútuo, etc (NICOLETTI; FILHO, 2004 apud LIMA; SILVA, L.; SILVA, S., 2009, p.2).

Lara (2007) cita, também, a socialização e outros aspectos, além das habilidades matemáticas que podem ser desenvolvidos no aluno por meio do jogo, como a concentração, a curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a autoconfiança e a autoestima. A interação entre os alunos é um dos fatores mais evidentes em trabalhos com jogos, pois podem acompanhar suas ações com os outros, além de defender suas opiniões tornando-se mais confiantes (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007).

O comportamento do professor influencia no sucesso de uma atividade que utiliza esse recurso. Durante a aplicação do jogo, o professor deve agir como mediador realizando considerações e intervenções quando achar necessário. Por isso, é preciso que o educador esteja sempre atento ao que ocorre no jogo para ajudar os alunos a compreenderem as informações que vão surgindo.

Porém, não se pode utilizar um jogo com o único objetivo de fazer algo diferente dentro da sala de aula. Ao se utilizar essa ferramenta, o professor precisa ser cuidadoso e possuir um planejamento bem formulado, assim como em qualquer outro recurso empregado. Antunes afirma que:

> [...] jamais pense em usar os jogos pedagógicos sem um rigoroso e cuidadoso planejamento, marcado por etapas muito nítidas e que efetivamente acompanhem o processo dos alunos, e jamais avalie sua qualidade de professor pela quantidade de jogos que emprega, e sim pela qualidade dos jogos que se preocupou em pesquisar e selecionar (ANTUNES, 2005, p. 37).

Fialho (2008) apresenta alguns cuidados que o professor precisa ter ao utilizar o jogo na sala de aula: (i) experimentar os jogos antes da aplicação para evitar imprevistos além de acertar detalhes como o preparo do material, a elaboração de questões e a formação dos grupos; (ii) verificar as regras, pois estas devem ser claras e concisas; (iii) propor atividades relacionadas aos conteúdos dos jogos para que se tenha um real significado para sua utilização; e (iv) pontuar as partidas, pois esse é um fator que atrai e motiva os alunos já que eles não querem perder.

Segundo Grando (2004), as atividades que envolvem jogos são divididas em sete momentos: (i) familiarização com o material do jogo; (ii) reconhecimento das regras, que podem ser fornecidas nas formas escrita e oral ou por meio de uma partida-modelo; (iii) o “jogo pelo jogo”, ou seja,  jogar para compreender as regras; (iv) intervenção pedagógica verbal: momento que se caracteriza pela interferência do professor a fim de estimular os alunos a pensarem sobre suas jogadas; (v) registro do jogo, ou seja, é uma forma deformalizar as ideias; (vi) intervenção escrita: momento em que os conceitos matemáticos são explorados e (vii) o jogo executado com “competência”: momento em que o aluno joga utilizando as estratégias elaboradas durante as partidas.

Quanto à classificação dos jogos, destacam-se, nesta monografia as delineadas por autores da área de Matemática: Grando (1995), Groenwald e Timm (2000) e Krulik e Rudnik (1983) citados por Borin (1996).

De acordo com Krulik e Rudnik, os jogos são categorizados em dois tipos: jogos de treinamento e jogos de estratégia. Os de treinamento são aqueles que ajudam na memorização de conceitos, fórmulas ou técnicas de algum conteúdo trabalhado na sala de aula; os de estratégia coincidem com a definição de Grando que, também, utiliza a nomenclatura jogos de construção de conceitos, exposta a seguir. Groenwald e Timm (2000) acrescentam além desses os jogos geométricos. Esses têm como objetivo desenvolver a aptidão de observação e o pensamento lógico. Por meio desses jogos, podem-se trabalhar figuras geométricas, semelhanças de figura, ângulos e polígonos. Grando (1995), em outra classificação, aborda seis tipos:

- jogos de azar: são jogos que dependem exclusivamente da sorte, por isso, também são chamados de “jogos de sorte”. É um tipo de jogo que não depende das habilidades dos jogadores;
- jogos de quebra-cabeça: geralmente, são jogos jogados sozinhos e o jogador deve resolver o problema proposto;
- jogos computacionais: são jogos planejados e efetuados em ambientes virtuais;
- jogos de fixação de conceitos: são aqueles utilizados após a apresentação dos conteúdos, pois seu objetivo é fixá-los. São os tipos de jogos mais comuns e apresentam sua utilidade quando substituem as listas de exercícios;
- jogos de estratégia: também podem ser chamados de jogos de construção de conceitos, pois o jogador precisa elaborar uma estratégia de vitória. O fator sorte não está presente no jogo e depende unicamente das ações dos jogadores;
- jogos pedagógicos: são todos aqueles utilizados durante o processo de ensino e aprendizagem. Esse tipo de jogo engloba todos os citados acima.

No presente trabalho monográfico, será utilizado um jogo de estratégia que segue a definição de Grando (1995).

Ainda de acordo com essa autora, esse tipo de jogo vincula-se à teoria dos jogos estratégicos ou dos jogos matemáticos. Essa teoria foi estabelecida pelo matemático húngaro John Von Neumann, que provou que, para alguns jogos com características singulares, existe uma estratégia máxima ou ótima, ou seja, que garante sempre a vitória a um dos jogadores (GRANDO, 1995). É justamente essa estratégia máxima que caracteriza os jogos estratégicos.

O fascínio desse tipo de jogo está em investigar a estratégia vencedora que garantirá a um dos participantes a vitória (GRANDO, 2000).

O uso de jogos de estratégia envolve a construção do saber prático e teórico. Nesse sentido, conceitos e noções matemáticas estarão presentes na ação do jogo, de forma que os alunos possam elaborar estratégias, encontrar razões para as jogadas e observar regularidades (GRANDO, 2000).

## 1.2 O Jogo do Nim

O jogo do Nim é um dos jogos mais antigos que se conhece, mas sua origem ainda é desconhecida. De acordo com Gardner (1961), os primeiros trabalhos que se têm conhecimento são conferidos ao matemático Charles L. Bouton, que considera este jogo ter se originado na China, apesar de ser jogado na Europa, desde o séc. XVI.

Além disso, a palavra NIM é bastante curiosa: em inglês arcaico significa apanhar, em alemão significa tirar, e numa rotação de 180º, obtém-se a palavra *win* que significa vencer.

Em 1951, no Festival Britânico, foi apresentado um robô nomeado “Nimrod", que era usado exclusivamente para jogar o jogo do Nim (PIRES, 2012).

Segundo Grando, a grande popularidade do jogo do Nim deve-se ao fato de sua estratégia máxima ser de fácil programação computacional e de ser utilizado em testes a fim de selecionar pessoas para trabalharem em empresas, pois envolve o raciocínio lógico-dedutivo na sua formulação (GRANDO, 2000).

Utilizou-se, neste trabalho monográfico, a versão original do jogo do Nim. Souza (2013) apresenta outras versões do jogo.

Neste trabalho, utiliza-se como material uma quantidade de palitos previamente estabelecida. O objetivo do jogo é deixar o último palito para o adversário, pois quem retirar o último palito perde a partida. Seguem abaixo as regras:

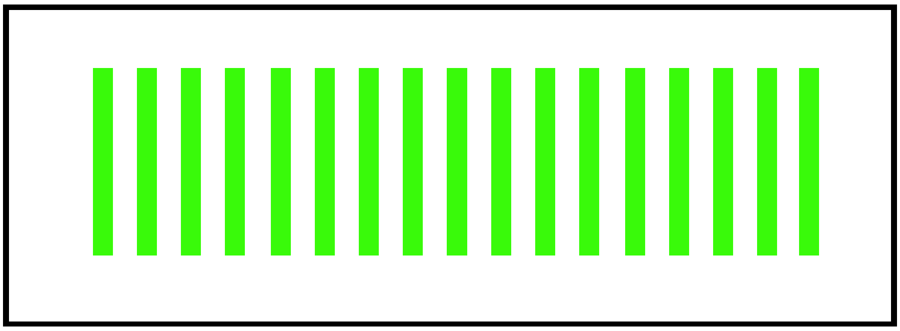
- uma quantidade N de palitos é disposta;
- os jogadores jogam alternadamente;
- cada jogador, na sua vez, retira uma determinada quantidade de palitos, sendo fixado no início do jogo a quantidade mínima de um palito e um número máximo de retirada de palitos em cada jogada ;
- quem retirar o último palito perde o jogo.

O jogo do Nim é caracterizado por possibilitar a construção de um modelo que permite uma estratégia máxima, ou seja, uma estratégia que garanta a um dos adversários a vitória. Para descobri-la, o jogador deverá, segundo Grando (2000), explorar o raciocínio hipotético-dedutivo, generalizar soluções e procedimentos, observar regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático.

Com a intenção de tornar mais claro o jogo e a estratégia máxima, exemplifica-se uma partida, atribuindo valores para a quantidade total de palitos e o número máximo de palitos retirados em cada jogada.

Supõe-se um jogo com 17 palitos e com o limite máximo de 5 palitos por retirada, ou seja, cada jogador poderá retirar, em sua vez, 1,2,3,4 ou 5 palitos.

Figura1- Configuração inicial com dezessete palitos



Fonte: Elaboração própria.

Nomeou-se de A e B os jogadores que irão disputar a partida hipotética abaixo, sendo o jogador A o que iniciará a partida e ganhará o jogo. Para determinar a estratégia, esse jogo será analisado do final para o começo[1].

Etapa 1: perde o jogo quem retirar o último palito, então o jogador A terá que deixar um palito para o seu adversário garantindo assim a sua vitória;

Etapa 2: como o objetivo de A é deixar o último palito para B, é preciso que B deixe sobre a mesa 2,3,4,5 ou 6 palitos (se B deixar 2 palitos, A retira 1; se B deixar 3 palitos, A retira 2; se B deixar 4 palitos, A retira 3; se B deixar 5 palitos, A retira 4 ouse B deixar 6 palitos, A retira 5);

[1]A descrição das etapas foi adaptado de:SOUZA, B. O. *Ensinando Matemática com jogos*. 2013. 148 f.Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro-UENF, Campos dos Goytacazes, 2013.

Etapa 3: para assegurar que B deixará 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos, basta que A deixe 7 palitos sobre a mesa (se B retirar 1, sobram 6; se B retirar 2, sobram 5; se B retirar 3, sobram 4; se B retirar 4, sobram 3 e se B retirar 5, sobram 2);

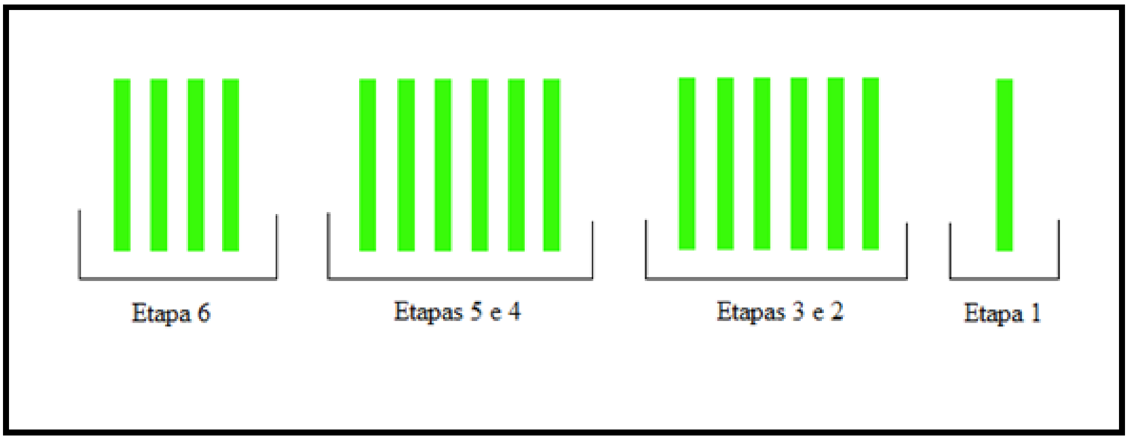
Etapa 4: Para que o jogador A deixe exatamente 7 palitos para o jogador B, é preciso que B tenha deixado sobre a mesa 8, 9, 10, 11 ou 12 palitos (se B deixar 8, A retira 1; se B deixar 9, A retira 2; se B deixar 10, A retira 3; se B deixar 11, A retira 4 e se B deixar 12, A retira 5);

Etapa 5: para assegurar que B deixará 8, 9,10,11 ou 12 palitos, basta que A deixe 13 palitos sobre a mesa (se B retirar 1, sobram 12; se B retirar 2, sobram 11; se B retirar 4, sobram 9 ou se B retirar 5, sobram 8);

Etapa 6: para deixar 13 palitos sobre a mesa, basta que A retire 4 palitos em sua primeira jogada garantindo, então, a sua vitória.

As etapas, na ordem decrescente, são exemplificadas na figura abaixo

Figura 2 - Ilustração das etapas




Fonte: Elaboração própria.

Na etapa 6, o jogador A retira quatro palitos (jogada inicial) e nas etapas 5,4,3,2 de dois a dois, a cada retirada de palitos por B, A retira um número de palitos de modo que a soma nas duas jogadas resulte na retirada de seis palitos. Então, na etapa 1, resta apenas um palito para B retirar, tornando o jogador A, o ganhador da partida.

O jogo possui algumas ações que levam a regularidades em sua estrutura, a saber: (i) deixar um palito no final para que ocorra a derrota do adversário; (ii) formar, a partir da segunda jogada, grupos de palitos de número igual ao de retiradas máximas permitidas em cada partida mais um, determinado pela soma de duas jogadas consecutivas; e (iii) retirar, na primeira jogada, o que falta para completar o total de palitos.

Observa-se que, se fossem formados, no item (ii) do parágrafo acima, grupos maiores que este, ficaria inviável a situação de o primeiro jogador retirar um palito. O mesmo aconteceria se fossem formados grupos menores, inviabilizando a situação de o primeiro jogador retirar o número máximo permitido em cada jogada.

Assim, o número de palitos retirados na primeira jogada é determinado pelo resto da divisão entre o total de palitos menos uma unidade (palito reservado para o adversário) e a quantidade de grupos formados. Outro modo é dividir o total de palitos pelo número de agrupamentos e retirar uma unidade do resto. O novo resto corresponde à retirada inicial de palitos.

Assim, para obter a estratégia máxima e vencer todas as partidas, é possível considerar o seguinte raciocínio: supõe-se, inicialmente, que **N** é a quantidade total de palitos e **n** é o número máximo de palitos retirados em cada jogada. Divide-se **N-1** palitos por **n+1**, resultando em **q** grupos de **n+1** palitos e mais o resto **r**. O primeiro jogador, então, retira **r** palitos na primeira jogada e, nas próximas, completa cada retirada do adversário com um número de palitos que resulte em n+1.

Outra forma de conseguir a vitória é considerar o seguinte raciocínio: supõe-se, inicialmente, que **N** é a quantidade total de palitos, **n** é o número máximo de palitos retirados em cada jogada e **R** é o resto da divisão de N por n+1. Divide-se **N** por **n+1**. Nesse caso, a divisão resulta em **q** grupos de **n+1** palitos mais o resto **R**. Assim, o primeiro jogador deve retirar **R-1** palitos, inicialmente, e completar cada retirada do adversário com um número de palitos que resulte em n+1.

Agindo dessa forma, a vitória é de quem inicia o jogo, desde que esse jogador conheça a estratégia descrita acima, em uma das duas versões.

Essa estratégia, nas duas versões, utiliza em sua estrutura o conceito de divisão e o reconhecimento de padrões expressos nos significados do dividendo, quociente, divisor e resto. Além disso, é válida apenas quando o resto é um número maior do que um.

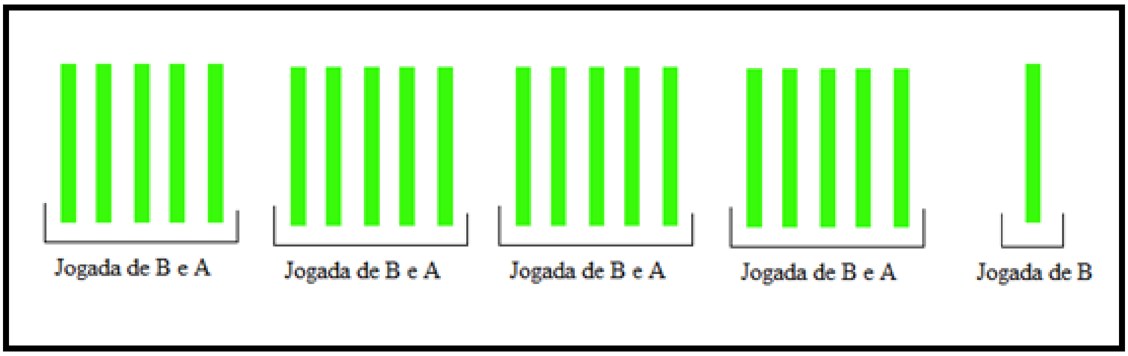
Abaixo é apresentada uma análise para restos que diferem dessa condição. Nesse caso, igual a um ou a zero. As pesquisadoras desenvolveram esse estudo utilizando o raciocínio combinatório. No caso do resto igual a zero, não foi encontrado nenhum estudo relacionado ao tema, o que torna a exposição ainda mais interessante.

Para o caso em que o resto é igual a um, a estratégia é de fácil compreensão, pois toma como base a de resto maior do que um. Utiliza-se, novamente, para fins explicativos, os jogadores hipotéticos A e B, sendo A o conhecedor da estratégia.

Para que o jogador A continue sendo o vencedor, tendo ele o conhecimento da estratégia máxima do caso anterior, é preciso que ele ceda a primeira jogada para o adversário, ou seja, ele precisa agora ser o segundo jogador. Isso é imprescindível, pois a primeira jogada para jogos com resto maior do que um possuía o objetivo de retirar uma determinada quantidade inicial de palitos de forma a assegurar um palito restante. Como nesse caso o resto da divisão de N por n+1 é igual a um, o jogador A não precisa iniciar a partida, pois já está garantido que um palito sobrará. Assim, quem começa é o jogador B, e nas jogadas seguintes o jogador A apenas irá completar a jogada de B de modo a formar n+1 palitos (Figura3).

Na figura abaixo, exemplifica-se uma partida, com resto igual a um, considerando a quantidade total de vinte e um palitos e o número máximo de retiradas em cada jogada igual a quatro.

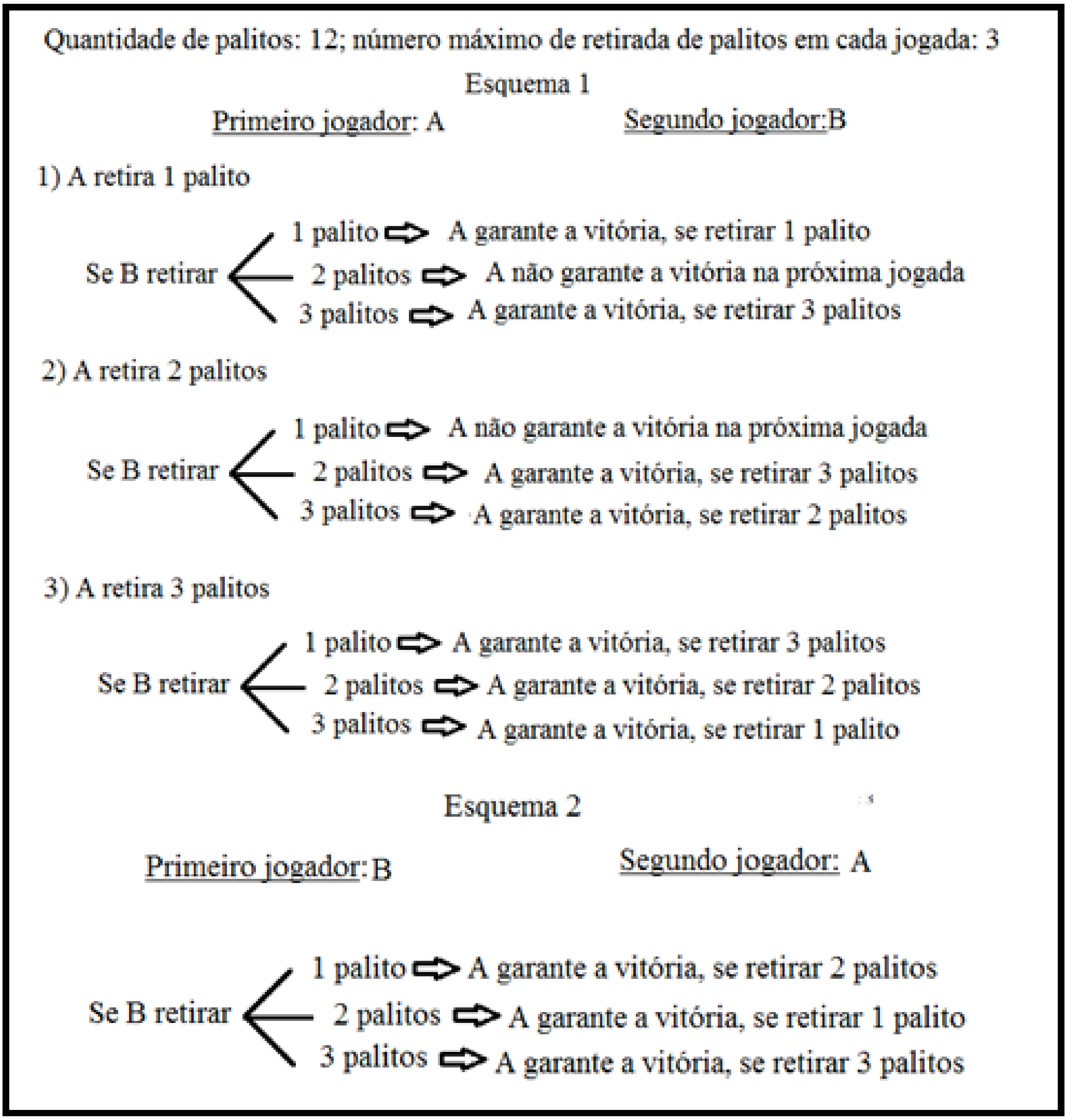
Figura 3 – Representação de um exemplo de um jogo com resto igual a um




Fonte: Elaboração própria.

Para o caso em que o resto é zero, não há uma estratégia máxima definida, mas caminhos que permitem a um dos jogadores uma maior probabilidade de vencer. Na página seguinte existem os esquemas de um jogo cujo número de palitos é doze sendo retirado em cada partida de um a três palitos por jogada. No primeiro esquema, A é o primeiro jogador e no segundo, A é o segundo jogador. Destaca-se que o jogador A é o único conhecedor da estratégia máxima para o $R > 1$.

Figura 4 – Esquemas 1 e 2 para resto igual a zero.




Fonte: Elaboração própria.

Neste trabalho monográfico, a sequência didática foi desenvolvida considerando o resto maior do que um. Os outros casos analisados se apresentam como um aprofundamento teórico.

### 1.3 A Investigação Matemática como Metodologia de Ensino

A partir dos anos 1980 a investigação matemática tornou-se presente nos currículos dos Estados Unidos e do Reino Unido. No Brasil e em Portugal, pesquisas acerca dessa metodologia de ensino têm ganhado destaque nos currículos escolares (BERTINI; PASSOS, 2008).

Enfatiza-se, nesta metodologia, o comprometimento do aluno como um requisito essencial para a aprendizagem. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23), “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo”. Nesse sentido, Braumann destaca:

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p.5).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 75) defendem que, em relação aos alunos, é preciso levar em consideração o “desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados”. Além disso, afirmam que:

> Se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, deve propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e não a passividade. Deve valorizar o processo e a qualidade, e não apenas a rapidez na realização. Deve esperar estratégias criativas e originais e não a mesma resposta de todos (BRASIL, 1998, p.65).

Dentro desse contexto, considera-se apropriada a metodologia de investigação matemática já que os alunos podem tomar diferentes caminhos para resolverem uma atividade proposta, além de cada aluno e turma serem diferentes (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2005).

As investigações matemáticas podem ser de três tipos: numérica, geométrica e estatística. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 55), as investigações numéricas favorecem o aprimoramento da compreensão sobre os números e as operações, permitindo aos alunos a “descoberta de fatos, propriedades e relações entre conjuntos de números”, além da possibilidade de um trabalho conjunto com a geometria. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – Matemática tecem orientações aos professores para que proponham:

> [...] situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia [sic] de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (BRASIL, 1998, p. 117).

Em relação às investigações geométricas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 71) afirmam que as mesmas ajudam os alunos a conectarem acontecimentos da realidade com a Matemática e a desenvolverem capacidades como “visão espacial e o uso de diferentes formas de retratar”.

Por último, as investigações estatísticas, que possuem um papel relevante na educação para a cidadania, pois segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 91) a estatística é “utilizada em cada passo do dia-a-dia para apoiar afirmações em domínios como a saúde, o desporto, a educação, a ciência, a economia e a política”.

Destaca-se, neste trabalho, a investigação numérica.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) salientam quatro momentos da investigação matemática: (i) exploração e formulação de questões; (ii) formulação de conjecturas; (iii) teste e reformulação e (iv) justificação e avaliação.

O primeiro momento abrange o reconhecimento da situação, em que os alunos se familiarizam com os dados, observando suas regularidades e permitindo explorações de acordo com os conhecimentos matemáticos de cada um. Tal procedimento demanda um tempo maior para que os alunos comecem a gerar dados e organizá-los na formulação de questões e conjecturas. O professor possui, nesse momento, um papel decisivo para estimular e integrar os conhecimentos matemáticos na investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas, que pode surgir de várias formas: na observação direta dos dados, na manipulação ou, até mesmo, por analogia com outras conjecturas. Após a arrumação dos dados, os alunos registram suas ideias (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

A etapa seguinte inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas, já que algumas podem não estar corretas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

No último momento, justificam-seas conjecturas com base em um raciocínio adequado. Nessa etapa, devem surgir pequenas provas matemáticas. A justificação ou prova das conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo, fundamental para levar os alunos a compreender seu caráter provisório (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Após a realização desses quatro momentos, é importante que haja um tempo de discussão para que os alunos entendam o rico sentido de investigar, desenvolvendo a capacidade de se comunicar matematicamente e de refletir sobre seu trabalho e seu poder de argumentação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Segundo Ponte Brocardo e Oliveira (2005), em aulas de cunho investigativo, o professor precisa ter dois objetivos: (i) dar autonomia aos alunos para que eles próprios consigam desenvolver suas ideias; e (ii) garantir o encaminhamento do trabalho numa perspectiva significativa para a Matemática. Assim, o professor tem a função de conciliar esses dois objetivos de forma que ao interagir com cada aluno, respeite suas especificidades e conduza-o em direção ao objetivo da atividade.

De acordo com Paulek et al (2009, p. 3), essa interação do professor “certamente vem contrapor a posição dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, pois eles não estão habituados a comunicar suas ideias e nem a argumentar sobre elas”.

Ao longo de uma investigação, são quatro as funções desempenhadas pelo professor: (i) desafiar os alunos; (ii) avaliar o progresso dos alunos; (iii) raciocinar matematicamente; e (iv) apoiar o trabalho dos alunos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Na primeira, o professor precisa motivar os alunos além de gerar um ambiente adequado para a realização da investigação. É importante que o professor desafie os alunos, elaborando questões instigantes, principalmente quando chegam a um impasse (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Na segunda função, o professor precisa estar atento a todas as ações dos alunos. Além disso, é preciso compreender o raciocínio dos mesmos por meio de perguntas. À medida que o professor observa o progresso dos alunos, ele consegue optar por estratégias de interação que mais se adéquam às necessidades do momento (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

A função seguinte requer que o professor raciocine matematicamente, pois em atividades de natureza investigativa os alunos podem levantar questões não previstas por ele. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 49) “é impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante”. O raciocinar matematicamente do professor, geralmente, é posto à prova no momento em que os alunos formulam conjecturas.

Por fim, o apoio ao trabalho dos alunos pode ser concedido de diversas formas: usar questões de forma a clarear as ideias; conceder ou relembrar informações importantes para assegurar que a sequência da investigação não se perca; e incentivar a reflexão dos alunos por meio da síntese da atividade (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Pretende-se, em atividades investigativas, que o aluno esteja apto a usar os conhecimentos matemáticos na resolução da atividade proposta e, também, que desenvolva a habilidade de realizar investigações. Além disso, é importante estimular atitudes como, por exemplo, a persistência e o interesse pelo trabalho investigativo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Ainda de acordo com os autores supracitados (no parágrafo acima), para avaliar se os alunos atingiram esses objetivos, consideram-se os seguintes instrumentos: (i) relatório escrito pelos alunos com o detalhamento de toda a atividade, que pode ser feito tanto individualmente quanto em grupo; (ii) observação informal dos alunos durante toda a atividade investigativa numa postura ativa, indagando-os a fim de entender melhor as suas ações; (iii) apresentações orais que podem ser feitas individualmente ou em grupo com o objetivo de avaliar o processo de raciocínio e a capacidade de comunicação oral; e (iv) avaliação multifacetada em que o professor pode utilizar mais de um instrumento de avaliação.

Utilizou-se, neste trabalho, a avaliação multifacetada com base nos seguintes instrumentos: (i) gravação em áudio; (ii) diário de bordo; (iii) registro das respostas dos alunos ao exercício proposto; (iv) observação informal dos alunos durante a atividade; e (v) entrevista semiestruturada que contou com a apresentação oral dos grupos sobre a atividade realizada com o jogo do Nim, prevista na etapa final da metodologia utilizada.

### 1.4 Estudos Relacionados

Nesta seção, serão destacados cinco trabalhos relacionados à utilização de jogos nas aulas de Matemática.

O primeiro é a tese “O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula”, escrita por Regina Célia Grando e orientada pela Profª. Drª. Lucila Diehl Tolain Fini, em 2000, pela Universidade de Campinas. Grando (2000) investigou os processos desencadeados na construção ou no resgate de conceitos e habilidades matemáticas a partir da intervenção pedagógica com jogos.

Para alcançar esse objetivo, a autora realizou uma pesquisa qualitativa e utilizou a metodologia de ensino resolução de problemas. Os instrumentos de coleta de dados usados foram: observação, filmagem dos grupos, gravação das expressões verbais dos sujeitos e registro em protocolo das observações feitas. A pesquisa contou com dois jogos: o Contig 60 e o Nim e foi desenvolvida com oito alunos do 7ºanodo Ensino Fundamental.

No decorrer da aplicação, discutiu-se o processo de construção da estratégia máxima a partir dos conceitos matemáticos presentes nos jogos como as quatro operações básicas efetuadas por meio do cálculo mental, o significado do resto na divisão não exata, o algoritmo de Euclides.

Segundo a autora, o objetivo do trabalho foi alcançado, pois a análise dos resultados revelou a eficácia do uso de jogosno desenvolvimento deuma aprendizagem matemática significativa, além de proporcionar momentos de descontração, envolvimento e alegria, pela atividade lúdica que o jogo representa. Verificou-se, também, que tais jogos, se fossem trabalhados em classes numerosas, exigiriam a presença de mais de um professor para um melhor encaminhamento de todo o processo.

As pesquisadoras deste trabalho monográfico, assim como Grando (2000), optaram por utilizar o jogo do Nim considerando a sala de aula como um ambiente de investigação. Além disso; o trabalho nos dois estudos, foi feito com um número reduzido de alunos. Porém, as duas pesquisas diferem pelo número de jogos abordados, pela metodologia de ensino adotada e pelo público-alvo escolhido.

O segundo trabalho analisado foi a monografia “A utilização de jogos adaptados em busca da estratégia vencedora do jogo do Nim” escrita por Daiane dos Santos da Silva e orientada pela Profª. Me. Patrícia da Conceição Fantinel, em 2008, pelo Centro Universitário La Salle – Unilasalle. Neste trabalho, o objetivo foi verificar se um conjunto de jogos adaptados auxilia no reconhecimento da estratégia vencedora do jogo do Nim.

Para tal, desenvolveu-se um estudo teórico sobre jogos estratégicos para embasar a parte prática da pesquisa. A metodologia de pesquisa foi a qualitativa utilizando-se o estudo de caso com o intuito de realizar uma investigação aprofundada dos processos de raciocínio do sujeito dentro de um contexto real. Os instrumentos metodológicos foram: estudo bibliográfico envolvendo os jogos estratégicos utilizados, aplicação dos jogos adaptados com o sujeito, questionamentos ao sujeito referentes aos jogos usados durante a aplicação e análise da entrevista com o sujeito participante da pesquisa.

O trabalho foi aplicado a um aluno de doze anos que cursava o7º ano do Ensino Fundamental. Primeiramente, realizou-se uma entrevista com sua professora de Matemática e pode-se notar que o uso de jogos nas aulas ocorreu apenas uma única vez para explicar o conteúdo de frações. Assim, suas aulas eram “tradicionais” e o livro didático era o principal recurso pedagógico utilizado.

Nas lições pretendidas pela autora, aplicaram-se ao sujeito alguns jogos que seriam adaptações do Nim; para que, ao final, fossem trabalhadas duas versões do jogo.Por meio de questionamentos e intervenções didáticas, o sujeito conseguiu descobrir a estratégia vencedora dos jogos, que estava relacionada ao conteúdo de divisão.

Concluiu-se que, a partir das adaptações feitas, foi possível descobrir a estratégia vencedora do jogo. Com as versões trabalhadas e com o auxílio dos jogos adaptados, foi possível contribuir de alguma forma para o desenvolvimento das habilidades do aluno como o raciocínio indutivo e dedutivo; as operações básicas mentais e noções de quantidade e sequência além da construção de conhecimentos matemáticos.

Ao final da pesquisa, a autora expôs as seguintes indagações envolvendo jogos estratégicos para inspirar futuros trabalhos relacionados ao tema: “Será que um trabalho realizado em sala de aula, em pequenos grupos ou em duplas, utilizando jogos estratégicos poderia contribuir para a aprendizagem matemática? O jogo do Nim aplicado por um determinado período com alunos do ensino regular[2]poderia auxiliá-los no raciocínio lógico de cada um?”.

Tanto na pesquisa de Silva (2008) quanto neste trabalho monográfico, utilizou-se o jogo do Nim, adotando a entrevista como uma das técnicasde coleta de dados. Além disso, este trabalho monográfico responde em parte às indagações da pesquisa de Silva (2008) ao aplicar o jogo do Nim a um grupo de alunos a fim de constatar se tal jogo acompanhado de atividade de investigação contribui para a percepção de padrões relacionados à divisão.

Como diferenças entre os dois trabalhos: o número de participantes, a utilização de jogos adaptados para auxiliar na descoberta da estratégia vencedora do jogo do Nim, o uso de

[2]A atual estrutura do sistema educacional regular brasileiro compreende a educação básica - formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio - e a educação superior (MENEZES, SANTOS, 2001).

duas versões do jogo do Nim e a metodologia Investigação Matemática utilizada apenas nesta monografia.

O terceiro trabalho analisado foi a dissertação “Jogos de estratégia: uma proposta didática para o estudo de matrizes e probabilidades” de Lucas Ferreira Borges, orientado pelo Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade, em 2014, pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Borges (2014) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de elaborar atividades que possibilitassem ao professor dinamizar sua prática pedagógica de maneira lúdica, a fim de reduzir a evasão escolar e estimular seus alunos. Esperou-se estabelecer uma ponte entre o conhecimento matemático estudado e a ferramenta lúdica, nesse caso, o jogo Roletrix, criado pelo autor. Para tal foram elaboradas sequências didáticas sobre matrizes e probabilidades com auxílio deste jogo.

Neste trabalho, são apresentadas propostas metodológicas de algumas sequências didáticas de ensino envolvendo a temática da Teoria das Matrizes e Probabilidade a partir da exploração do jogo Roletrix. O público-alvo sugerido são alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

De acordo com o autor, o objetivo foi alcançado e o próximo passo seria realizar uma análise minuciosa da aplicabilidade em sala de aula do jogo Roletrix, bem como das atividades propostas.

O trabalho desenvolvido por Borges (2014) se relaciona com este quando busca desenvolver uma atividade a partir de jogos, criando um ambiente favorável à criação e à reflexão. Neste caso, o aluno, sujeito principal do processo, insere-se num espaço lúdico de aprendizagem. As diferenças estão presentes no tipo de jogo, no conceito matemático envolvido e por ser uma proposta de trabalho, ainda, não aplicada no ambiente escolar.

O quarto trabalho analisado foi a monografia intitulada “Jogo nas aulas de Matemática: possibilidades e limites” de Thais Paris Maluta, orientada pela Profª. Drª. Cármen Lúcia Brancaglion Passos, em 2007, pela Universidade Federal de São Carlos.

Maluta (2007) desenvolveu um trabalho monográfico delineado a partir de estudos teóricos relacionados à utilização do jogo no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. O mesmo foi realizado com professores das séries iniciais do Ensino Fundamental para analisar se eles utilizavam jogos nas aulas de Matemática.Procurou-se desenvolver através de uma entrevista semiestruturada uma investigação, a fim de compreender como eram utilizadas e desenvolvidas as atividades matemáticas por meio de jogos.

Concluiu-se que, apesar de o jogo ser um recurso pedagógico importante, poucos professores o utilizam em sala de aula e aqueles que o fazem, não têm clareza da importância do registro das jogadas bem como das intervenções pedagógicas para o aprendizado dos conceitos matemáticos pelos alunos. Assim, Maluta destaca a necessidade de alterar tal situação, pois bem orientado, o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de Matemática.

Tanto na pesquisa de Maluta(2007) quanto neste trabalho, é ressaltado o papel do jogo como instrumento para o aprendizado de conceitos matemáticos.Assim,ao elaborar estratégias, previsões e analisar as possibilidades de cada situação, é dada ao aluno a possibilidadede um significativo aprendizado. Quanto às diferenças destaca-se o próprio objetivo do trabalho que está voltado diretamente aos professores e não aos alunos.

O último trabalho analisado foi a monografia intitulada “O lúdico e a Matemática” de Eni Fátima de Souza Chaves, orientada pela Profª. Maria das Graças Gomes Barbosa, em 2009, pela Faculdade Pedro II.

Chaves (2009) realizou um trabalho, cujo objetivo foi investigar a influência da utilização do jogo nas aulas de Matemática para resolver situações-problema. A autora desenvolveu uma pesquisa, a partir da utilização do jogo como elemento exploratório e como recurso didático-pedagógico para trabalhar o estudo de fração. Para isso, selecionou-se um grupo de alunos do 6ºano do Ensino Fundamental e analisou-se a relação dos alunos com o jogo, por meio de uma atividade investigativa.

Concluiu-se que o jogo é um instrumento que deve ser valorizado no processo de ensino e aprendizagem, visto que os alunos desenvolveram habilidades de raciocínio lógico, resgataram conceitos já trabalhados, construíram outros e se socializaram por meio das atividades propostas.

Assim como no trabalho desenvolvido por Chaves (2009), utilizou-se, nesta monografia uma atividade investigativa com o uso de jogos. Diferem, portanto, no público-alvo, no tema matemático abordado e na utilização do jogo do Nim; presente, apenas, neste trabalho.

## 2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho monográfico e a elaboração da sequência didática.

O público-alvo são alunos do 9º.ano do Ensino Fundamental. Foram convidados para participar da pesquisa oito alunos. Justifica-se o número pequeno de participantes pela necessidade de se observar qualitativamente as ações empreendidas. Também, foi um facilitador para as pesquisadoras no sentido das interferências que a metodologia prevê.

A escolha do nível de ensino teve por base a leitura de trabalhos já desenvolvidos com o jogo do Nim neste segmento, mostrando adequação e resultados positivos com vistas a uma nova aplicação.

### 2.1 Caracterização da Pesquisa

Este trabalho monográfico tem por questão de pesquisa: "O uso do jogo do Nim acompanhado de atividades de investigação contribui para a percepção de padrões relacionados à divisão?" Para responder essa questão, optou-se por fazer uma pesquisa do tipo qualitativa.

Segundo Creswell (2010, p.21) a pesquisa qualitativa é "uma pesquisa interpretativa, com o investigador tipicamente envolvido em uma experiência sustentada e intensiva com os participantes". Neste trabalho, as pesquisadoras desenvolveram um trabalho com jogos no ensino de Matemática, especificamente o jogo do Nim. A pesquisa teve por base a observação de situações de aula que requerem a participação ativa dos alunos a partir de uma atividade de investigação.

De acordo com Oliveira (2012), a pesquisa qualitativa pretende obter informações legítimas, capazes de esclarecer o significado e as características de cada contexto. Além disso, propõe uma análise detalhada dos acontecimentos, objetos, grupos de pessoas e fenômenos da realidade.

Os métodos qualitativos destacam as peculiaridades de um fenômeno no que diz respeito ao seu significado para o grupo pesquisado, observando diretamente como cada indivíduo ou grupo experimenta a realidade estudada, destacando a compreensão que os mesmos têm sobre o assunto abordado (GOLDENBERG,2009).

Neste trabalho, o grupo pesquisado foi composto por alunos do 9º.ano do Ensino Fundamental. Verificou-se se os mesmos empregaram conceitos e procedimentos matemáticos ao buscar padrões, realizar abstrações, formalizar, testar e validar os resultados a partir da aplicação do jogo do Nim.

A investigação qualitativa faz uso de inúmeras percepções como concepções filosóficas, estratégias de investigação e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados (CRESWELL, 2010).

Na pesquisa qualitativa, o pesquisador mantém o foco na aprendizagem do significado que os participantes dão ao problema investigado (CRESWELL, 2010). Nesta monografia, as pesquisadoras avaliaram o processo de desenvolvimento e construção de relações de cada aluno, ao analisarem e discutirem com os sujeitos suas jogadas e estratégias.

Os dados desta pesquisa foram coletados por meio dos seguintes instrumentos: observação, diário de bordo, gravação em áudio, registro das respostas dos alunos e entrevista semiestruturada.

Sobre a observação qualitativa, Creswell (2010) afirma que é aquela em que o pesquisador está focado no comportamento e nas atividades desenvolvidas pelos indivíduos, sujeitos da pesquisa, no local em que a mesma ocorre. Essas observações podem ser anotadas no diário de bordo, um instrumento que tem como objetivo registrar de maneira detalhada todos os acontecimentos relevantes para a pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Quanto à entrevista semiestruturada, Fiorentini e Lorenzato (2012, p.121) afirmam que se propõe a "aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organizando um roteiro de questões que não são fixas", pois podem ocorrer alterações durante sua execução.

A escolha pela entrevista semiestruturada como um dos instrumentos de coleta de dados desta pesquisa parece bem apropriada, pois além do número pequeno de alunos envolvidos, tal recurso possibilita uma apreensão mais particular do significado do trabalho para cada um.

Sobre a utilização de gravador de áudio, Muldoon (1999) destaca a vantagem de utilizar este recurso, pois além de capturar as respostas verbais dos sujeitos, colabora para uma interação espontânea no contexto de sala de aula em que o pesquisadorse sinta livre na conversação. Erickson (1990) afirma que a gravação em áudio possibilita que o pesquisador descubra detalhes significativos daquele contexto que não foram percebidos antes.

## 2.2 Elaboração da sequência didática

A sequência didática do presente trabalho monográfico está dividida em três etapas: (i) Etapa 1 – apresentação do jogo, exploração e formulação de questões; (ii) Etapa 2 – formulação de conjecturas, testes e reformulação; e (iii) Etapa 3 - justificação das conjecturas e avaliação do trabalho. A seguir, é apresentado o detalhadamente cada uma das etapas.

### 2.2.1 Etapa 1

É a etapa em que ocorre o reconhecimento e a exploração da situação proposta. O aluno se familiariza com a situação e assimila o objetivo da tarefa para que assim possa formular as questões (PONTE; OLIVEIRA; BROCARDO, 2005).

Assim, a Etapa 1 é dividida em duas partes: apresentação do jogo, exploração e formulação de questões. A apresentação inicia-se com a história sobre o surgimento do jogo do Nim, aplicações como na seleção de recursos humanos para ingresso em empresas e as regras, escritas e entregues em um papel (Figura 5).

Figura 5 – As regras do jogo do Nim

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
BRASIL GOVERNO FEDERAL
matemática LICENCIATURA

**Jogo do Nim**

Número de palitos: **29**
Podem ser retirados de **1** a **4** palitos em cada jogada.

**Objetivo do jogo:** Deixar o último palito para o adversário, pois quem retira o último palito perder o jogo

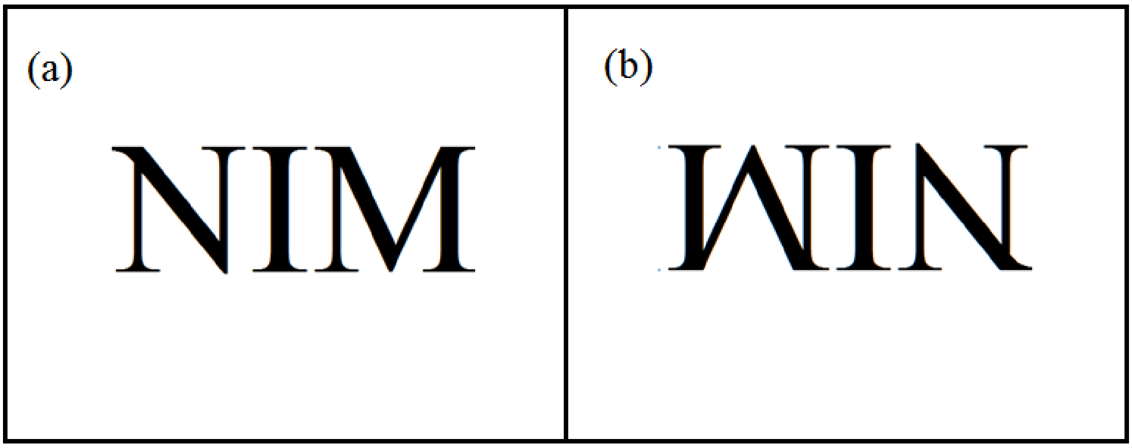
**Regras:**

1) Uma quantidade N de palitos é disposta;
2) Os jogadores jogam alternadamente;
3) Cada jogador, na sua vez, retira uma determinada quantidade de palitos, sendo fixado no inicio do jogo a quantidade mínima de um palito e um número máximo de retirada de palitos em cada jogada;
4) Quem retirar o último palito perde o jogo.

Fonte: Elaboração própria.

Algumas curiosidades, também, foram apresentadas, como a inversão da palavra Nim. Quando rotacionada de$180^0$, a palavra NIM vira *win,* que significa vencer (Figura 6).

Figura 6 - A palavra NIM escrita com a grafia usual (a) e rotacionada $180^0$ (b)




Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, os alunos, divididos em duplas, recebem um conjunto de cinquenta palitos de picolé. Após a apresentação, os grupos iniciam a parte da exploração. Todas as duplas jogam as primeiras partidas com número total de vinte e nove palitos e número máximo de retirada de palitos em cada jogada igual a quatro. Denomina-se esse momento de “jogo livre”, pois é a fase de familiarização com o jogo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA,2005).

Após algumas partidas, inicia-se a última parte da Etapa 1. Os alunos são indagados acerca da vitória. O objetivo é verificar se os mesmos elaboraram alguma estratégia para vencer, percebendo certas regularidades.

A partir das respostas dos alunos, inicia-se o jogo das pesquisadoras com os alunos, com a mesma quantidade de palitos e número máximo de retirada de palitos em cada jogada. As pesquisadoras vão sempre iniciar e ganhar as partidas, desafiando os alunos a descobrirem o porquê de suas vitórias. Ao mesmo tempo, as estratégias elaboradas pelos alunos para ganhar são confirmadas ou não.

Espera-se que, nesse momento, questões sejam levantadas a partir da observação das ações das pesquisadoras no jogo como: Existe alguma estratégia de vitória? Existe regularidade na retirada de palitos das jogadas consecutivas dos adversários a partir da segunda jogada? Com as questões formadas, inicia-se a Etapa 2.

A seguir, apresenta-se o quadro resumo da etapa 1.

Quadro 1 – Resumo da Etapa 1

| |
|---|
| **Exploração** |
| História do jogo |
| **Explicação do jogo e das regras**<br>Quantidade de palitos: 29  Número máximo de retirada de palitos: 4 |
| **Jogo livre entre os alunos**<br>Familiarização com o jogo |
| **Formulação de questões** |
| **Indagações aos alunos acerca do jogo**<br>Percepção de regularidades |
| **Jogo livre entre os alunos e as pesquisadoras com indagações ao final** |

Fonte: Elaboração própria.

### 2.2.2 Etapa 2

Nessa etapa, os alunos organizam os dados e formulam conjecturas. Em seguida, testam suas conjecturas validando-as ou não.

A Etapa 2 é dividida, então, em três partes: formulação das conjecturas, realização de testes e reformulação das conjecturas.

A formulação das conjecturas ocorre a partir das questões elaboradas na etapa anterior. Espera-se pelas seguintes suposições:(i) a soma das jogadas consecutivas dos adversários, a partir da segunda, é o número máximo de retirada de palitos em cada jogada mais um; e (ii) o primeiro jogador sempre ganha se souber a estratégia.

À medida que os alunos levantam conjecturas, são levados a testá-las em novas partidas. Assim, inicia-se a segunda parte da Etapa 2, a realização de testes. Os seguintes jogos são previstos:

- quantidade de palitos: 34; número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 5
- quantidade de palitos: 28; número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 7
- quantidade de palitos: 15; número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 5
- quantidade de palitos: 37; número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 4

Ressalta-se que os jogos acima levam em consideração a mudança na paridade do número total de palitos e, também, no número de retiradas na primeira jogada. Outros jogos podem ser pensados no momento da aplicação caso surjam conjecturas não previstas pelas pesquisadoras.

A última parte da Etapa 2 é a reformulação das conjecturas. A partir dos resultados obtidos nos testes, os alunos validam ou não suas conjecturas, podendo reformulá-las. Nesse momento, são capazes de compreender a estratégia máxima do jogo. Desse modo inicia-se a última etapa da sequência didática.

A seguir, apresenta-se o quadro resumo da Etapa 2.

Quadro 2 – Resumo da Etapa 2

| **Conjecturas** |
| --- |
| **Formulação das conjecturas a partir das respostas das questões da Etapa 1** |
| **Testes** |
| **Jogo livre com quantidades diferentes de palitos e números de retiradas**<br>• quantidade de palitos: 34 com número máximo de retirada: 5<br>• quantidade de palitos: 28 com número máximo de retirada: 7<br>• quantidade de palitos: 15 com número máximo de retirada: 5<br>• quantidade de palitos: 37 com número máximo de retirada: 4 |
| **Reformulação** |
| **Reformulação ou não das conjecturas iniciais** |

Fonte: Elaboração própria.

### 2.2.3 Etapa 3

Nessa etapa, ocorre a justificação matemática das conjecturas e a avaliação de todo o trabalho. É então dividida em duas partes: justificação das conjecturas e avaliação do trabalho.

Embora na teoria, a justificação ocorra nesta etapa, as pesquisadoras entendem que ela se dá a partir do momento em que o aluno entende a estratégia de vitória. Porém, essa compreensão é reforçada a partir das respostas a três questões elaboradas em forma de exercício que exploram a ideia de divisão e de identificação de padrões. No caso da divisão, são apresentadas duas questões: uma com foco na aritmética e outra na álgebra.

Dessa forma, na primeira parte, são resolvidas três questões (Apêndice A). O objetivo da primeira é verificar se o aluno compreendeu a estratégia máxima do jogo. Para isso, deverá descobrir a quantidade de palitos a ser retirada na primeira jogada.

O objetivo da segunda é provar, por meio da divisão, uma dada fórmula que determina o número de palitos retirados na primeira jogada em função: do número total de palitos do jogo; do número de grupos formados, excluindo o último palito e a primeira retirada; e do número máximo de retirada de palitos em cada jogada. Pretende-se utilizar a linguagem algébrica para fins de generalização; além de dar significado para o dividendo, o divisor, o quociente e o resto de cada uma das divisões associadas a cada jogo. O item **a** tem a função de auxiliar o aluno na busca pela dedução a ser feita no item **b**.

O objetivo da última questão é citaros padrões observados no jogo e explicar como são gerados. Espera-se por respostas do tipo:

(i) sempre sobra um palito ao final – esse padrão é gerado pela própria regra do jogo;

(ii) a soma de duas jogadas consecutivas dos adversários, a partir da segunda, é sempre a mesma, correspondendo ao número máximo de retiradas permitidas em cada jogada mais um. Assim, se o número mínimo é um e o máximo é quatro, tem-se grupos de cinco já que, no caso de um jogador retirar o mínimo, ou seja, um palito, o outro tem condições de retirar o máximo, valendo também a situação contrária. Se fossem formados grupos maiores do que cinco, ficaria inviável a situação em que o primeiro retira um palito e, no caso de serem formados grupos menores que cinco, ficaria inviável a situação do primeiro jogador retirar o máximo permitido.

(iii) o número de palitos retirados na primeira jogada é determinado pelo resto da divisão entre o total de palitos menos um (palito que sobra) e a quantidade de grupos formados ou então é determinado por um número a menos do resto da divisão entre o número total de palitos e o número de agrupamentos – esse padrão é consequência dos dois anteriores. Nos dois casos, o número de palitos retirados é o que falta para completar o total de palitos.

A última parte da terceira etapa é a avaliação que compreende a entrevista semiestruturada realizada com cada grupo separadamente. A entrevista é composta por três perguntas: (i) Vocês acham que o jogo do Nim trouxe significado à operação de divisão? (ii) Quais foram as maiores dificuldades encontradas ao longo de toda a sequência didática? (iii) Vocês acham importante trabalhar esse tipo de atividade em sala de aula? Por quê?

A seguir, apresenta-se o quadro resumo da Etapa 3.

Quadro 3 – Resumo da Etapa 3

| Justificação |
|---|
| **Justificativa matemática das conjecturas a partir das respostas às atividades investigativas** |
| **Avaliação** |
| **Avaliação do trabalho**<br>Observação,diário de bordo, gravação em áudio, registro das respostas dos alunos e entrevista. |

Fonte: Elaboração própria.

# 3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo estáregistrado o relato da aplicação deste trabalho monográfico que ocorreu em dois momentos: no teste exploratório e na experimentação.

## 3.1 Teste Exploratório

O teste exploratório foi aplicado para seis alunos do 1º período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino pública da cidade de Campos dos Goytacazes. O encontro ocorreu no dia oito de setembro de 2016 com duração de 2h30 min.

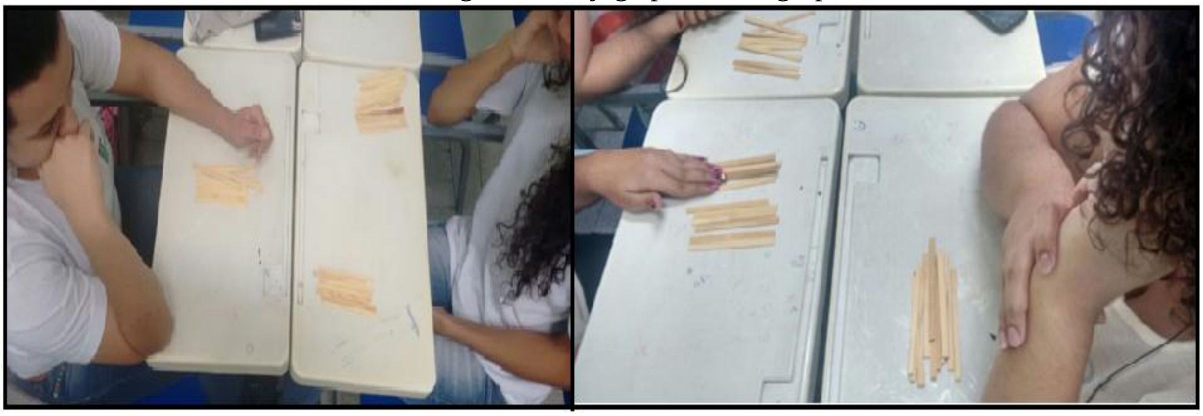
O objetivo do teste foi avaliar a adequação da sequência didática elaborada quanto ao tempo, à metodologia de ensino escolhida e à dificuldade do jogo como um todo, ou seja, relacionada às estratégias elaboradas pelos jogadores durante a partida, à descoberta da estratégia de vitória e à resolução das questões propostas.

Os licenciandos se dividiram em dois trios. Para fins de escrita, esses alunos serão nomeados de A,B,C,D, E e F, sendo os três primeiros do grupo 1 (G1) e os demais do grupo 2 (G2). Além disso, as pesquisadoras serão representadas pela letra P, quando utilizados os diálogos gravados para detalhar as ações dos participantes do teste.Vale ressaltar que cada trio foi dividido em uma dupla e um jogador, caracterizando, assim, os adversários.

A primeira parte da Etapa 1 da sequência didática se refere à apresentação do jogo. Primeiramente, os licenciandos foram indagados se já conheciam o jogo do Nim e todos falaram que o desconheciam.

Na primeira rodada do "jogo livre", já na parte da exploração, constatou-se que os jogadores fizeram as jogadas aleatoriamente, porém na rodada seguinte foi possível verificar as primeiras percepções; iniciando, assim, a segunda parte da Etapa 1, a formulação de questões.

Figura 7 – O jogo pelos dois grupos



Fonte: Elaboração própria.

As pesquisadoras intervieram perguntando para cada dupla do grupo que ganhava a partida como ela conquistou a vitória. Em ambos foi relatado que para vencer, deixavam seis palitos para o adversário. O diálogo abaixo[3] refere-se ao G2:

P - Vocês estão elaborando alguma estratégia para vencer?

F - Estamos deixando sempre seis palitos no final para ela.

De fato, deixar seis palitos para o adversário garante a vitória, pois se o oponente retirar um, dois, três ou quatro palitos, a dupla retira quatro, três, dois e um palitos respectivamente, deixando em todos os casos um palito para o adversário. Essa foi a única percepção que os alunos tiveram jogando somente entre eles.

Para tornar mais claras algumas regularidades que ocorreram no jogo, iniciou-sea partida entre as pesquisadoras e os licenciandos, prevista na terceira parte da Etapa 1.

No início, os licenciandos continuaram presos à ideia da configuração perdedora, a dos seis palitos citados anteriormente. Foi preciso chamar a atenção deles para as ações da pesquisadora no jogo.

Assim, na segunda partida começaram a construir algumas conjecturas, iniciando a primeira parte da Etapa 2 da metodologia, formulação das conjecturas. O G1 notou dois fatos: o primeiro, sobre a soma das jogadas consecutivas de dois adversários e o segundo, sobre o fato de que o primeiro que joga sempre ganha. O diálogo a seguir mostra a formação dessas conjecturas.

[3] A transcrição do áudio que originou a escrita dos diálogos do teste e da experimentação foi feita mantendo-se as expressões utilizadas pelos alunos.

B - Se eu tirar número par ela vai tirar ímpar de novo, mas se eu tirar ímpar ela vai tirar par, quer ver?

A - Então vamos tirar número ímpar para ver.

B - Oh, ela tirou par... Está vendo? Então se eu tirar par ela vai tirar ímpar.

C - Você vai tirar ímpar mesmo?

B - Viu? Quando eu tiro ímpar ela tira par.

P - E é só isso?

C - A quantidade está dando quanto? Quantos pares e quantos ímpares?

P - É qualquer ímpar?

C - É isso que eu estou falando.

A - Se eu tiro um ela tira quatro. Se eu tiro dois ela tira três.

P - Repete pra mim isso, por favor.

A - Se eu tiro um, ela tira quatro. Se eu tiro dois ela tira três.

C - Então sai sempre de cinco em cinco. São vinte e nove, mas fica um.

B - Se tira cinco fica vinte e três. Se eu tiro dois ela tira quanto? Três.

P - Se vai saindo de cinco em cinco...

A - A pessoa que começou ganha.

B - Se eu tiro um ela tira quatro, se eu tiro quatro ela tira um.

C - Então o problema é começar. Quem começou?

P - Eu.

B - Você sempre ganha né?

C - Por isso você sempre ganha.

P - Então vocês acham isso. Estou ganhando porque estou sempre começando?

A - As duas coisas. Sempre sai cinco e você está começando.

B - Mas não, ela pode virar o jogo[4].

A pesquisadora percebeu que os alunos ficaram presos à ideia de ímpar e par, então ela lhes indagou se era qualquer ímpar ou qualquer par a fim que eles prestassem atenção no valor e não na classificação dos números. A partir dessa indagação, o aluno C notou que cada vez que dois adversários jogavam consecutivamente, saíam sempre cinco palitos da mesa. Com esse fato, concluíram, também, que começar ajuda a vencer, mas não garante a vitória, pois mesmo se P fosse o segundo jogador ela poderia vir a ganhar o jogo.

[4] A expressão "virar o jogo" neste caso significa que o adversário pode mudar a seu favor alguma situação no jogo, ou seja, a pesquisadora pode vencer mesmo não iniciando a partida.

Assim, iniciou-se uma nova partida sendo um dos licenciandos o primeiro a jogar e a pesquisadora a segunda. Para essa rodada, manteve-se o mesmo número de palitos e o mesmo número máximo permitido de palitos retirados em cada jogada. Abaixo está o trecho final dessa partida; que, neste momento, possui dez palitos na mesa.

> B - E agora eu tiro quatro, ela tem a opção de tirar de um a quatro.
>
> C- Só que ela não vai fazer isso. Vai tirar um só.
>
> B - Se eu tirar três ela tira quanto?
>
> A - Dois.
>
> B - Quem tem que ficar com cinco é quem ganha.
>
> P - Então vamos lá. Nessa discussão concluiu o quê? Uma pessoa pode ganhar começando ou não?
>
> B - Começando ou não.
>
> A - Tem que ter o domínio do cinco[5]para você.
>
> P - Então quem começa também pode perder?
>
> B - Pode.

Ainda na formulação de conjecturas, nota-se por meio do diálogo acima que o licenciando B fazia por tentativa as jogadas possíveis para ambos os jogadores. Porém, C deu certeza de que a pesquisadora tiraria um palito, pois assim ficariam seis palitos na mesa garantindo a sua vitória. Com essa observação, B afirma que o jogador que completa a soma de cinco palitos é o ganhador da partida; concluindo, então, que uma pessoa pode ganhar o jogo começando ou não.

Já o G2, na primeira parte da Etapa 2, formulação das conjecturas, teve dificuldade em reparar na soma das jogadas. Uma das pesquisadoras então sugeriu que os palitos retirados por ela e pelos licenciandos fossem arrumados juntos (Figura 8).

---

[5]A expressão “domínio do cinco” significa neste caso, que ganhará apartida o jogador que sempre completar cinco palitos somados com a jogada do adversário.

Figura 8 – Os palitos que foram retirados sendo formados em grupos

Fonte: Elaboração própria.

F - Ela tirou no começo três de novo!

P - Agora vamos juntar nossas retiradas.

D - Vamos tirar dois!

(A licencianda faz sua jogada e junta os palitos).

F - Você tem que formar cinco?

P - Vamos continuar para ver se sempre vai ser cinco.

D - Vamos tirar quatro então.

D, E e F - Ah! Ela sempre forma cinco.

Após a formação das conjecturas nos dois grupos, os licenciandos iniciaram a segunda parte da Etapa 2. Testaram tais conjecturas com outras quantidades de palitos e número máximo permitido de retiradas de palitos em cada jogada a fim de reformulá-las ou não.

Os novos jogos foram: com dezessete palitos e número máximo de retirada em cada jogada igual a cinco; e onze palitos com número máximo de retirada igual a três. A próxima ação dos licenciandos era generalizar a quantidade de palitos referente à soma das jogadas consecutivas dos adversários.

P - Vamos trocar a quantidade de palitos, para analisar se isso acontece com outros valores. A quantidade de palitos agora é dezessete, com máximo de retirada cinco.

D - Ah, é sempre um a mais. Se o máximo é cinco, tem que dar seis. É sempre um a mais.

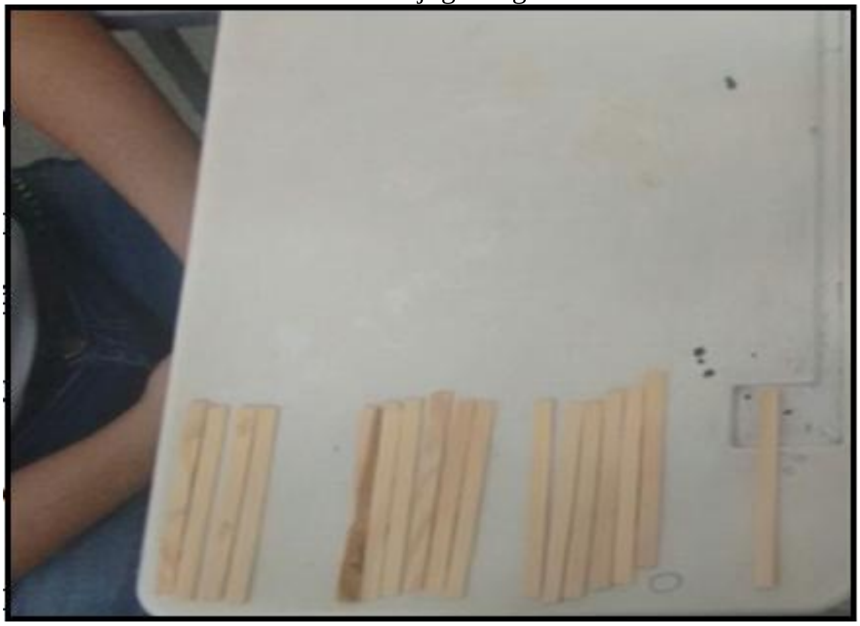
Para conferir a hipótese do grupo, outro jogo foi iniciado:

> P - Vamos trocar para onze palitos com máximo de retirada três.
>
> F - O somatório das próximas jogadas é um a mais do valor limite de retiradas.

Já o G1 teve dificuldade em perceber como é definida a soma. Vale destacar que esse grupo quase não brincou, ou seja, ficou mais preocupado em verificar a "lógica" do jogo e com isso não percebeu as regularidades que o jogo possuía. O G2 teve um comportamento diferente, brincou e pode perceber a estratégia de vitória bem como as regularidades. A importância do brincar ao invés do conjecturar. Com isso foi preciso mostrar ao G1 caso a caso para que pudessem perceber as regularidades.

> P- Agora vamos observar uma coisa. Na primeira vez que a gente jogou com vinte e nove palitos formavam-se grupos de quantos palitos?
>
> B - Cinco.
>
> P - Nesse caso agora.
>
> A - Seis.
>
> P - E qual era o total de palitos?
>
> B - Dezessete.
>
> P - Com que número máximo de retirada?
>
> B - Cinco.
>
> P - E nesse caso aqui? (apontando para o jogo com onze palitos de quantidade inicial)
>
> B - Onze palitos e número máximo três.
>
> P - Quanto que dá a soma de duas jogadas consecutivas?
>
> A - Nessa deu quatro. É sempre um número maior da jogada, não é isso? Por exemplo, se são no máximo três palitos, a minha soma tem que dá quatro. Um palito a mais.
>
> P - Aconteceu isso nos dois jogos?
>
> B - Sim.

Figura 9 - A arrumação de um jogo proposto: dezessete palitos e número máximo permitido de retiradas em cada jogada igual a cinco



Fonte: Elaboração própria.

À medida que os grupos jogavam com outras quantidades de palitos, novas conjecturas surgiram.

C - Sempre é número primo que é colocado na mesa.

[...]

A- A primeira jogada é um número a menos que o número máximo de retiradas que você pode fazer em cada jogada.

[...]

D - A quantidade total de palitos é sempre ímpar.

O jogador D observou que a quantidade inicial de palitos era sempre ímpar e o jogador C foi além e reparou que os números eram primos. Isso era verdade para esses jogos, mas em relação à elaboração da estratégia vencedora esses fatos não faziam diferença. Assim, a pesquisadora pediu que jogassem com oito palitos e número máximo de retiradas em cada jogada igual a quatro. Dessa forma, os licenciandos verificaram que essas conjecturas eram falsas.

Quanto à conjectura referente à quantidade de palitos retirados pelo primeiro jogador, os dois grupos entenderam que a jogada inicial era o número máximo de retiradas menos um.

Os grupos foram levados a testar essa conjectura por meio de um exemplo elaborado na hora. Nesse caso, um jogo com trinta e sete palitos e número máximo de retirada igual a sete.

Sobre esse fato, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) lembram uma das funções do professor no uso da metodologia de Investigação Matemática, que é raciocinar matematicamente. Essa atribuição surge no momento em que os alunos levantam questões não previstas pelo pesquisador (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Os licenciandos jogaram a partida acreditando que a pesquisadora seria a vencedora segundo algumas conjecturas já feitas: a soma dos palitos de duas jogadas consecutivas, a partir da segunda, era o número máximo de retirada permitido mais um; a retirada inicial de palitos era o número máximo de retiradas permitidas menos um; e o jogador que iniciava a partida, se soubesse a estratégia de vitória, ganhava. Abaixo, é descrita a partida:

A - Então eu tenho que te ajudar a ganhar agora. Você tem que tirar seis.

P - Por quê?

A - É um número a menos.

P - Tirei seis.

A - Vou tirar dois.

P - Então quanto que eu tenho que tirar então?

A - No caso forma oito.

P - O que a gente fazia? Separava a minha primeira jogada e depois formávamos o grupo.

A - Você tem que tirar seis novamente pra formar oito aqui.

P – Tirei.

A- Vou tirar três agora.

P - E quanto que eu tenho que tirar agora?

A - Cinco.

B- E agora, posso tirar quanto?

P - No máximo sete.

P - Fechou a jogada? Tem alguma coisa errada.

A - Você de início tem que tirar seis e a soma do oito ficar com você.

P - Sim. Você falou que tinha que tirar um a menos.

P - Deu certo?

A-Não, eu ganhei.

P - Então temos um contra exemplo.

B - Você tinha que fazer ela ganhar!

A pesquisadora realizou o jogo com base no que os alunos iam falando. Nesse exemplo, o grupo verificou que a conjectura sobre o número inicial de retiradas não foi válida. Esses dois últimos jogos marcam a terceira parte da Etapa 3, reformulação ou não das conjecturas.

Embora não tenha sido intencional, as pesquisadoras perceberam que os exemplos induziram a essa conjectura pela coincidência, ou seja, em todos os jogos o número inicial de retiradas foi igual ao número máximo de retiradas permitidas em cada jogada menos um. Para a experimentação, essa situação foi revista.

Ressalta-se que o G2, também, chegou a essa conjectura. Assim como o G1, por meio de uma nova partida, G2 verificou que a conjectura era falsa.

Após esse momento, os grupos foram desafiados a descobrir quantos palitos deveriam ser retirados na primeira jogada do primeiro jogador para garantir que o último palito sobrasse para o adversário. Foi proposto aos dois grupos analisar os jogos anteriores e jogar um novo jogo com vinte e três palitos e número máximo de retirada igual a quatro.

Segundo a metodologia adotada, é importante que o professor desafie os alunos, propondo questões instigantes, em especial em situações que gerem um impasse (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

O diálogo abaixo mostra a formação e a conclusão da conjectura, após a partida:

P - Agora olhem, por que eu tirei dois no começo?

A - Calma aí. Você tirou dois no começo pra dar soma de cinco em cinco e sobrar um.

P - Aha!!

A - Aqui (apontando para um grupo de palitos) tem vinte.

P - De um total de vinte e três.

A - Ela tirando dois no início e fazendo com que a soma seja um número maior que a jogada que você pode fazer, vai fazer com que aqui (apontando para um grupo de 20 palitos) o número seja par tal que a soma que ela tirou mais esse número venha sobrar um.

P - Você está no caminho certo.

A - Tinha vinte e três. Ela tirou dois, ficou vinte e um. A soma que ela teria usado deveria dar vinte pra sobrar o um.

B - Aqui vai tirando de cinco em cinco.

A - Ela sabe que se ela formar o primeiro cinco ela vai formar o segundo, o terceiro e quarto e o adversário dela vai ficar com o último.

P - Se você descobrir quantos grupos de cinco tem em vinte e três, vocês conseguem matar a charada? Quantos grupos de cinco tem?

B e A - Quatro.

P - Por que então tinha que ficar dois lá na frente?

B- Pra sobrar um.

P - Isso. Você sabe que com vinte e três você consegue formar quatro grupos de cinco com esse aqui...

A - Vinte e um e vinte três.

A - Entendi.

B - Esse aqui, o de onze.[6]

A e B - Dois grupos de quatro e sobram três.

A - Um tem que sobrar e dois têm que ser o meu início.

P - Isso! Vamos fazer com um outro número.

B - Pode ser vinte e dois?

P - Pode. E qual será o número de retirada de palitos em cada jogada?

B - Eu posso escolher?

P - Lógico.

B - Três.

A - Então vinte e dois com número máximo três, então vou formar grupos de quatro. Então quantos grupos de quatro eu tenho em vinte e dois?

C- Cinco. Sobram dois.

A- Tenho que iniciar retirando um palito.

C- E sobra um no final.

P- Então se eu tivesse um número muito grande, qual a conta que eu teria que fazer para descobrir minha jogada inicial?

B- O número total de palitos menos um e o que sobrar eu vou fazer dividido pelo número de retirada mais um.

A - E o meu início vai ser o que sobrar.

---

[6] O grupo estava se referindo a um jogo anterior feito com onze palitos e com número máximo de retiradas permitidas igual a três.

O diálogo mostra a construção da finalização da estratégia e o início da primeira parte da Etapa 3. A pergunta sobre quantos grupos de cinco têm em vinte e três foi fundamental para que o grupo chegasse ao objetivo final.

No diálogo, ao descobrirem a estratégia máxima, o licenciando B ficou empolgado e quis saber o que aconteceria se fosse outra quantidade de palitos. Além disso, quando proposto que os alunos inventassem um novo exemplo, eles ficaram espantados com a possibilidade de escolher qualquer valor.

O G2 também chegou à conclusão da estratégia máxima a partir dos jogos anteriores. Realizaram uma nova partida com vinte e seis palitos e número máximo de retirada em cada jogada de três palitos para confirmar a estratégia.

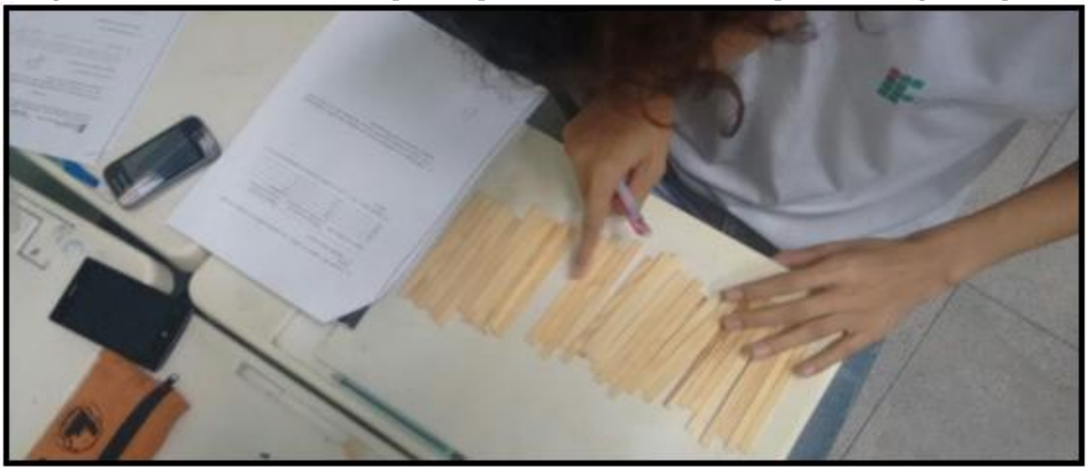
Após a compreensão da estratégia máxima, foi entregue para cada aluno uma folha de exercícios. Na primeira questão os alunos não tiveram dificuldade. Porém, chamou a atenção o seguinte comentário feito pelo licenciando B no item **a** que refere-se a um total de 33 palitos com número máximo de palitos retirados em cada jogada igual a seis: “Trinta e três menos um é igual a trinta e dois. Trinta e dois dividido por sete é igual a quatro e sobram quatro. Então formam sete grupos de quatro”.

Foi preciso intervir, pois a propriedade comutativa precisa ser vista com atenção no jogo do Nim. Sete grupos de quatro palitos cada não é o mesmo que quatro grupos de sete palitos cada, pois quando se formam grupos de sete é porque a quantidade máxima de retirada de palitos em cada jogada é seis e quando se formam grupos de quatro é porque o número máximo de retirada de palitos em cada jogada é três.

Pela fala do aluno, se um único jogador tirar seis palitos, a soma dos palitos retirados pelo adversário já será ultrapassada, já que estão formados sete grupos de quatro palitos.

No item **a** da segunda questão, os licenciandos não tiveram dúvidas. Uma licencianda, depois de responder a questão, fez a representação com os palitos como mostra a figura a seguir.

Figura 10- Aluna utilizando os palitos para conferir uma das respostas da segunda questão, item a.



Fonte: Elaboração própria.

Já no item **b**, os licenciandos tiveram dificuldade. As pesquisadoras sugeriram substituir as letras por números para que pudessem entender melhor a questão. O licenciando B depois de resolvê-la comentou que a questão trata da prova real da divisão de N por n+1.

Figura 11- Resolução do item b da segunda questão pelo licenciando B

| | |
|---|---|
| $r = N - 1 - q(n+1)$ | $q(n+1) + R = N$ |
| $2 = 35 - 1 - q(3+1)$ | $R = N - q(n+1)$ |
| $2 = 34 - 4q$ | $r + 1 = N - q(n+1)$ |
| $4q = 32$ | $r = N - q(n+1) - 1$ |
| $q = \frac{32}{4} = 8$ | |

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na última questão, os alunos enumeraram os padrões que perceberam na determinação do número de palitos retirados na primeira jogada: (i) a formação de grupos com um mesmo número de palitos. A quantidade de grupos é o quociente da divisão de N por n+1; (ii) a quantidade de palitos em cada grupo é n+1; e (iii) a retirada inicial de palitos é R -1.

A segunda parte da Etapa 3 da metodologia utilizada no trabalho consiste na avaliação que, neste teste, foi feita em conjunto e oralmente. Os principais pontos levantados foram: a motivação, a quantidade de alunos e o público-alvo.

Quanto à motivação, os licenciandos ressaltaram que o jogo do Nim é muito motivador, pois a todo momento surgem novas situações que precisam ser analisadas com o objetivo de descobrir a estratégia máxima do jogo. Destacaram, também, que a atividade exigiu durante todo tempo o uso do raciocínio lógico.

Os licenciandos disseram, ainda, que a proposta de trabalho apresentada não poderia ser aplicada em uma turma numerosa e com apenas um professor, pois em muitos momentos as pesquisadoras precisaram auxiliá-los. Outro ponto foi a formação de grupos de três, em que dois jogaram “contra” um. A maioria declarou que, em jogos de estratégia, trabalhar dessa forma não era o ideal, pois em alguns momentos os comentários dos três atrapalharam o raciocínio. Assim, sugeriram para a experimentação da atividade, a formação de duplas em vez de grupos de três alunos.

Por fim, em relação ao público-alvo, ressaltaram que o trabalho pode ser aplicado em diferentes níveis de ensino, pois o jogo do Nim envolve operações básicas da Matemática.

As pesquisadoras, ao final, comentaram sobre a restrição do resto R; que, no caso, deste trabalho foi a de ser maior do que um. Apresentaram, também, as várias possibilidades de jogadas nos casos de restos zero ou um.

## 3.2 Experimentação da Sequência Didática

O presente trabalho foi aplicado no dia trinta de setembro de 2016 nas dependências de uma escola pública do município de Campos dos Goytacazes. Teve duração de 2h30min e contou com a participação de sete alunos do 9º.ano do Ensino Fundamental, embora tenham sido convidados oito.

Cinco alunos eram de duas escolas particulares do município de Campos dos Goytacazes e dois de duas escolas públicas, umano município já citado e outra, localizada na cidade de São João da Barra. A ideia inicial era formar quatro duplas, mas como um aluno não compareceu, formaram-se duas duplas e um trio. Neste último caso, dois alunos jogaram “contra” um.

Para a experimentação, os alunos serão nomeados de A,B,C,D,E,F e G sendo A e B do grupo 1 (G1), C e D do grupo 2 (G2) e E, F e G do grupo 3 (G3). As pesquisadoras serão representadas pela letra P.

No primeiro momento, houve a familiarização dos alunos com o jogo (Figura 12).Nesse momento, o aluno F chamou uma das pesquisadoras e apresentou a sua dúvida. Perguntou se em uma situação que restassem dois palitos sobre a mesa, haveria a possibilidade de ele retirar os dois. Os próprios colegas do grupo souberam esclarecer, reforçando que não poderiam retirar os dois palitos porque o objetivo do jogo é deixar o último palito para o adversário.

Figura 12–O jogo pelos três grupos

Fonte: Elaboração própria.

Notou-se que, no início, os grupos realizaram jogadas aleatórias sem se preocuparem com planejamentos e táticas. Quando indagados sobre a estratégia pensada por eles para vencer, G1 e G2 relataram o mesmo episódio ocorrido no teste:a possibilidade de vitória acontecia somente ao final do jogo deixando uma determinada quantidade de palitos para o perdedor. Abaixo, segue o diálogo do G2:

D - Quando sobrou oito, sempre dava para ganhar. Quando tinha nove também.

P - Vocês perceberam então que tem que sobrar oito?

C - Nove também.

D - Agora tem que ver se dez também dá.

O diálogo acima mostrou que o aluno D chegou à conclusão de que se deixasse oito ou nove palitos para o adversário ele ganharia a partida. Porém, não se pode afirmar esse fato, pois, por exemplo, deixando oito palitos na mesa, C em sua vez poderia tirar dois palitos deixando, assim, seis palitos para D, quantidade esta que representa a configuração perdedora de palitos, já mencionada no teste exploratório.

O G2 chegou a outra conclusão: de que ganharia a partida se deixasse cinco palitos. Essa conclusão, também, não está correta, pois se o adversário tirar o número máximo de palitos permitidos em cada jogada, neste caso, quatro, ele ganharia, pois deixaria o último palito para o oponente.

As pesquisadoras preferiram não intervir, pois os dois jogadores do G2 estavam ainda muito inexperientes com o jogo.

Já no G3, os alunos E e F declararam que não traçaram nenhuma estratégia, ou seja, foram simplesmente jogando. O aluno G falou que sempre ia tirando um a menos que seu adversário, porém não soube explicar o porquê de sua estratégia.

Dessa forma, iniciou-se a segunda parte da Etapa 1. As pesquisadoras jogaram contra os grupos, enfatizando que em todas as partidas tinham a certeza de sua vitória, provocando-os a analisarem as jogadas realizadas. Algumas perguntas foram feitas aos alunos: "Vocês percebem algumas regularidades no jogo?"; "Existe alguma estratégia de vitória?".

As conjecturas que surgiram, anteriormente, puderam ser revistas, já que não eram verdadeiras e outras foram sendo elaboradas, a partir das respostas dadas às perguntas feitas pelas pesquisadoras. Embora prevista para a Etapa 2 da metodologia, na prática não se pode determinar o momento exato em que a reformulação de conjecturas ocorrerá. Certamente, nesta etapa, outras conjecturas serão validadas.

Na primeira rodada, com a mesma quantidade de palitos e mantida a retirada de um a quatro palitos em cada jogada, alguns alunos se sentiram desafiados com a possibilidade de jogar contra as pesquisadoras. Esse fato é destacado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) quando afirmam que o professor precisa desafiar os alunos para que estes se sintam motivados na realização de uma atividade.

Assim, os alunos tentaram elaborar estratégias em todas as etapas do jogo. Observou-se que o cálculo mental foi muito utilizado.

> D - Estou pensando aqui.  Uma árvore de possibilidades gigante.
>
> P - Tirei três.
>
> D - Tem uma possibilidade gigante [de jogadas], porque se ele tirar quatro, três, dois, e um ela vai ter que fazer o cálculo para cada caso.
>
> D - Tira um.
>
> C - Eu tô com o cálculo na cabeça.
>
> D - Independente do que você tirar, vai ficar menos que cinco. Se ficar menos de dez ela ganha.
>
> C - Se a gente tirar quatro ela ganha, se, claro, ela tirar o número certo.
>
> D - Se a gente deixar de dez para baixo ela ganha.
>
> C - Está com quanto aí?
>
> D - Dezesseis. Tem algum cálculo que está errado.

P - Por quê?

D - Porque você já ganhou.

C - Vamos rever.

D - Não dá. Era o único que ela não poderia tirar, e ela tirou.

C - Aí ela tira quatro.

D - Era o único que ela não podia tirar cara. Já era.

P - Eu falei com vocês que eu ia ganhar, desde o início.

C - Eu fiz o mesmo cálculo que ela.

D - Do jeito que eu falei ela ganha. Não pode ficar onze.

P - Vocês disseram que deveria ficar dez, por quê?

C - Se eu tirar quatro vai para seis. Aí, se você tirar três eu tiro dois; se você tirar quatro eu tiro um; se tirar dois eu tiro três e se tirar um eu tiro quatro.

Percebe-se que o aluno C utilizou o raciocínio combinatório, considerando todas as possibilidades de retirada para uma certa quantidade de palitos.Esse tipo de raciocínio precisa ser valorizado, pois apoia o desenvolvimento do raciocínio lógico bem como a solução de questões relativas à Matemática ou não (SILVA; PESSOA, 2013). Verifica-se, também, que o foco estava na quantidade de palitos finais.

Os outros grupos não utilizaram tanto este tipo de raciocínio, mas jogaram mais. Fizeram jogadas aleatórias, tentando refazer as táticas elaboradas anteriormente, deixando uma determinada quantidade de palitos no final da partida para vencer. Abaixo, alguns diálogos:

P - Então vamos começar o jogo. Peguei três.

A - Então pega dois! [P apanhou três palitos novamente] Ela pegou três agora, pega um.

P - Ele está analisando.

B - Eu só penso quando tiver terminando.

P - Então vamos lá!

A - Pegou quatro. Pega um.

B – Agora, calma.

A - Tem um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze. Se a gente conseguir deixar sete, a gente ganha.

P - Vamos ver.

A - Você vai pegar, eu pego, [o aluno fala enquanto as jogadas são realizadas] você pega um e vou deixar um para você.

P - Ok

A - Eu acho! Pelo que está aqui, se a gente pegar um vai sobrar nove, aí você pode pegar quatro e vai sobrar cinco.

B - Eu já sei como ela pode ganhar, estou tentando pensar em uma coisa para ela não ganhar.

A - Não pode deixar cinco para ela, senão a gente perde.

P - Interessante.

A - Tem dez palitos.

B - Se eu pegar um, ela pode pegar quatro e sobram cinco, se eu pegar dois, meu Deus!

A - Pega um.

B - Sabia, perdemos!

P - Por que vocês perderam?

B - Porque é impossível agora reverter o jogo. Se eu pegar um e você quatro, se eu pegar dois, você pega os três, se eu pegar três você pega os dois, não tem como reverter isso!

Vale destacar que o grupo não percebeu que em todos os casos a soma de duas jogadas consecutivas, a partir da segunda, era cinco. Quando as pesquisadoras iniciaram uma nova partida com os grupos, mantendo o mesmo número de palitos e o mesmo número de retirada em cada jogada, notou-se que os alunos começaram a levantar hipóteses e demonstrar algumas dificuldades em perceber as regularidades presentes no jogo. Abaixo, um diálogo em um momento em que havia onze palitos sobre a mesa.

A - Se a gente pegar dois sobram nove. Aí, ela pega quatro e sobram cinco.

B - Ai meu Deus!

A - Se a gente pegar dois [no início] não tem como perder.

B - Tem sim!

A - Claro que não! Pegamos dois, sobram nove, se ela pegar um vai sobrar um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, sobram oito. A gente pega quatro, sobram quatro, ela pega três e dá ruim.

B - Se a gente pega dois, ela pega três e ela ganha.

A - Se a gente pegar três?

B - Ela pega dois.

A - Se pegar quatro, ela vai pegar um.

B - Não tem como cara.

A - Como assim?

B - Não tem como! Já perdemos.

A - Se ela pegar três a gente pega cinco, a gente rouba.

P - Mas o máximo é quatro.

A - A gente pega um. Aí ela vai pegar um também.

B - Vamos começar a pensar antes então.

P - Isso!

B - Lá do começo!

No episódio descrito acima, primeiramente o G1 percebeu uma regularidade: quando eles pegavam três, P pegava dois e quando eles pegavam quatro, P pegava 1, porém tiveram dificuldade em assimilar o significado desse padrão. Com a derrota, o aluno B percebeu que, para ganhar a partida, era necessário planejar as jogadas a partir do começo, pois estavam presos à configuração perdedora que era deixar seis palitos no final. Assim, eles organizaram as jogadas iniciais com retiradas que os levassem à quantidade final esperada. Novamente, verifica-se a presença do raciocínio combinatório.

Após realizarem alguns jogos, outras regularidades foram reconhecidas como, por exemplo, a presença de números pares e ímpares a cada duas jogadas consecutivas. Porém, eles não perceberam que o somatório entre o número par e o número ímpar era uma constante. Dessa forma, as pesquisadoras começam a intervir no jogo a partir de indagações, provocando a reflexão nos sujeitos. Uma das funções do professor é ser o mediador entre o aluno e o conhecimento auxiliando-o a pensar de forma crítica (BULGRAEN, 2010).

P - Vocês não perceberam nada em minhas jogadas?

E- Eu percebi que, quando ele pegava ímpar, você pegava par e quando ele pegava par, você pegava ímpar.

P - Sim. Era qualquer ímpar? Era qualquer par que eu pegava?

(silêncio)

Quando uma pergunta era lançada, as pesquisadoras deixavam os grupos sozinhos para que pudessem refletir. Esse fato vem ao encontro do que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.28) quando declaram que é preciso deixar o aluno confortável e ceder um momento para o mesmo "colocar questões, pensar, explorar suas ideias e exprimi-las tanto ao professor quanto aos seus colegas".

Ressalta-se, ainda, que em nenhum momento foram fornecidas as respostas das indagações. Quando as respostas não chegavam ou eram incorretas; mudava-se, então, a abordagem. Em momentos assim, é essencial que o professor encoraje os alunos a olharem em outras direções e pensarem sobre suas ações (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Como os grupos não perceberam que o somatório a cada duas jogadas consecutivas, a partir da segunda, era sempre cinco, as pesquisadoras sugeriram juntar os palitos retirados nas jogadas dois e três, quatro e cinco e assim por diante (Figura 13).

Figura 13 – Representação de vinte e nove palitos em grupos

Fonte: Elaboração própria.

Abaixo, os diálogos de dois grupos:

> G - Se eu tirasse um, você tirava quatro. Se eu tirasse quatro, você tiraria um. Se eu tirava dois, você tirava três. Eu nunca tirava três, aí não sei.
>
> P - Observem o que vocês falaram. Se você tira um, eu tiro quatro, se você tira dois, eu tiro três.
>
> E - Ah, sempre é cinco!

P – Certinho!

F - Ah, se eu tiro quatro, você tira um e dá cinco.

No primeiro diálogo referente ao G3, o aluno G percebeu uma certa regularidade nas retiradas dos palitos de duas jogadas consecutivas, a partir da segunda, porém, não conseguiu deduzir que essa retirada sempre resultava na soma de cinco palitos. Ressalta-se que essa ação do aluno G, também, ocorreu com os alunos do G2.

Dessa forma, a pesquisadora pediu para que o grupo prestasse atenção no que G havia dito. Isso fez com que o aluno E descobrisse que a soma sempre dava cinco. Ressalta-se, ainda, a felicidade desse aluno com essa descoberta.

P - Faz sua jogada e vamos juntar os palitos.

A - Ah, já entendi.

P - O quê?

A - Você tenta tirar um número X em toda rodada para dar onze no final.

P - Que quantidade X é essa que eu estou tirando?

B - Cinco.

P - Mas eu tirei três no começo.

B - Você tira três na primeira e depois junta a sua jogada com a do outro para formar cinco.

P - Tira você, para ver se vou completar cinco.

A - Exatamente.

P - Estão indo bem.

A - Já perdemos.

B - Você tirava três no começo e sobravam vinte e seis, formando grupos de cinco até deixar um.

A - Três, vamos tirar dois para dar cinco.

B - Não vai dar certo isso.

A - Tira três, a gente tira dois para dar cinco então.

B - Não, você não entendeu não.

A - Vamos enganar agora e tirar quatro. Deu cinco, agora a gente ganha.

(Risos)

A - Claro que não ganha. O negócio é começar jogando, vamos começar tirando três.

B - Agora eu já sei.

A - Agora eu já sei também.

P - Mas não vale com a mesma quantidade de palitos.

A - Descobrimos! O negócio é começar jogando.

No G1, após a junçãodos palitos a cada duas jogadas, desconsiderando a primeira, os alunos perceberam rapidamente que formavam sempre grupos de cinco. O aluno B comentou sobre a necessidade de formar grupos de cinco palitos. Além disso, o aluno A percebeu que a pesquisadora sempre iniciava os jogos. Assim, o aluno A afirmou que quem começa ganha.

O processo de intervenção pedagógica realizado pelas pesquisadoras, citado no parágrafo anterior, influenciou diretamente na organização do raciocínio dos alunos. Por meio de intervenções, o educador deve despertar e conduzir os alunos a pensarem criticamente (BULGRAEN, 2010).

Com algumas conjecturas formadas, os alunos foram levados a testá-las, iniciando assim, a segunda parte da Etapa 2, a realização dos testes. Para isso, variou-se a quantidade total de palitos e o valor de retirada de palitos em cada jogada com o intuito de os alunos validarem ou não suas conjecturas.

Os alunos jogaram com trinta e quatro palitos podendo retirar de um até cinco a cada jogada. O G1, nessa nova partida, chegou corretamente à conclusão de que deveriam ser formados grupos de seis palitos. Após, foi proposto um novo jogo com vinte e oito palitos e retiradas de um a sete palitos a cada jogada. Os dois alunos conseguiram perceber de duas maneiras diferentes o somatório oito para cada grupo formado:

A - Então começa.

B – Não! Se você colocar para ela começar, ela ganha [a pesquisadora].

A - Mas o objetivo não é ganhar, é entender o porquê.

P - Isso. Vou pegar três.

A - Pega dois e vamos ver o quanto ela vai pegar.

B – Ah, agora mudou, né? Ela pegou quanto agora?

P - Seis.

B - Agora é oito. Se ficar o último mais oito palitos você ganha.

A - Oh, no começo ela pegou três e depois...

P - Vocês pegaram dois.

A - Depois ela pegou seis.

> A - Esquece o dois que a gente pegou. Você pegou três e depois seis. Aí a gente vai lá e pega um.
>
> P - E eu pego sete.
>
> B - Para formar oito. Só não estou entendendo o método para chegar a oito.
>
> A - O que eu entendi é que sempre tem que dar oito no final da jogada.
>
> P - Com esse tipo de jogo sim, com essa quantidade, porque se eu mudar, vocês perceberam que essa soma varia?
>
> A - Sim. Mas se eu somar o número máximo com o mínimo vai dar um número X. O objetivo é que, no final de todas as rodadas [duas jogadas a partir da segunda] dêesse número X.
>
> L - Essa quantidade surgiu de que valor?
>
> A - Com o mínimo somado com o máximo.
>
> B - O que você precisa formar é o sucessor do número máximo que a gente pode tirar.

Assim, o jogador A percebeu que era preciso somar a partir da quantidade de retiradas, nesse caso, o valor máximo com o valor mínimo. O aluno B, também, encontrou tal regularidade, porém de forma diferente, considerando que essa quantidade seria o sucessor do valor máximo de retiradas, ou seja, o número máximo de retirada mais um.

Os outros dois grupos, também, compreenderam como se formava esse somatório. Tanto G2 quanto G3 analisaram os jogos com vinte e nove, trinta e quatro e vinte e oito palitos para chegar a essa conclusão. Além disso, todos os alunos repararam que a combinação das jogadas só ocorria a partir da segunda retirada.

Então, foi proposto aos alunos que desvendassem qual deveria ser a quantidade de palitos a ser retirados na primeira jogada do primeiro jogador.

À medida que os alunos jogavam, mais conjecturas iam se formando. De acordo com Ponte, Oliveira e Brocardo (2005), no decorrer do manuseiode dados surgem conjecturas, instigandoos sujeitos a efetuarem mais testes, que por sua vez, ocasionarão mais dados.

O G1 apresentou uma conjectura relativa à primeira jogada, dizendo que a quantidade de palitos retirados na primeira jogada era o número máximo de retiradas de palitos permitido de cada partida menos um. Ou seja, se o número máximo de retirada fosse quatro, o primeiro jogador tiraria três. A pesquisadora, então, pediu para que eles analisassem os jogos anteriores verificando a validade dessa conjectura:

A - A partir da terceira. A gente já sabe tudo, mas não sabemos o porquê da quantidade inicial.

B - É o antecessor do número máximo de retiradas.

P - O máximo dessa jogada era cinco e eu tirei quatro. Em todos os jogos aconteceu isso?

A - Não.

O aluno A verificou que sua conjectura ocorreu só em um dos casos jogados, ou seja, não era válida para todos os casos. À medida queo tempo passava e eles não conseguiam descobrir como determinar o número de palitos que era preciso retirar na primeira jogada, os alunos foram ficando preocupados:

P - Vamos anotar aqui na folha os jogos que vocês já fizeram. O primeiro foi vinte e nove palitos com máximo de retirada quatro e tirei três no início, o outro foi trinta e quatro palitos com máximo cinco e eu tirei três.

A - Está vendo, não tem relação.

P - Vamos continuar para ver se vocês percebem alguma coisa. Com vinte e oito palitos e com o máximo sete [de retirada], eu tirei três [no início]. Com quinze palitos e máximo cinco [de retirada], eu tirei dois [no início]. Com dezessete palitos com máximo cinco [de retirada] eu tirei quatro [no início]. Agora, vou deixar um tempo para vocês analisarem.

A - Tá bom.

B - Deve ter alguma coisa a ver com esse número aqui. [referindo-se à quantidade de palitos em cada grupo]

A - Sete vezes três é vinte e um. Cinco vezes dois é dez e não é.

B - O que você está fazendo aí cara?

A - Estou tentando multiplicar para ver se é [neste caso, se é a quantidade total de palitos]. Cinco vezes quatro é vinte e não é. Quatro vezes três é doze e cinco vezes três é quinze e não é multiplicando. Se a gente somar, quatro mais três vai dar cinco. Cinco, não sete. Cara, já sei.

B – O quê?

A - Sete vezes sete?

B - Quarenta e nove.

A - Então não é.

B - Impossível.

A - Cara, é muito difícil, vamos colocar a cachola para pensar, caraça, bicho! Isso é impossível, na moral, a gente não pode perder para C e D. Vamos pensar!

B – Mano, é muito difícil isso, tem alguma lógica.

A - Tipo assim, com quatro é o antecessor. Cinco já não é antecessor. Sete não é o antecessor. Cinco não é, e o último é o antecessor. Tem que ter alguma relação com esses, eu acho. Tia, você não pode me ajudar não?

Na descrição acima, uma das pesquisadoras propôs aos alunos que analisassem os jogos anteriores para poderem encontrar a parte final da estratégia máxima. A pesquisadora relembra com os alunos a primeira jogada de cada jogo anterior. Dessa forma, o aluno A multiplicou a quantidade de palitos em cada grupo pela quantidade de grupos. Porém, percebeu que essa conta não tinha relação com a quantidade total de palitos, e, com isso, foram ficando cada vez mais preocupados.

No diálogo acima, também, é possível identificar que o jogo despertou entre os alunos um sentimento de competição, deixando-os mais engajados a descobrir a parte final da estratégia máxima. É por causa da competição que surge a necessidade, no aluno, de formar as estratégias, a fim de ganhar (GRANDO, 2000).

Notou-se, em todos os grupos, que descobrir como se forma a jogada inicial foi a parte da estratégia que mais demandou tempo, pois os alunos tiveram dificuldade em encontrá-la. Como os grupos não chegaram ao resultado, as pesquisadoras propuseram novamente que os alunos analisassem os jogos anteriores.

Assim, conseguiram desvendar a questão. O diálogo do G3 mostra como se deu a finalização da estratégia neste grupo:

P - Vamos ver uma coisa aqui. Com vinte e nove palitos e o máximo de quatro palitos retirados em cada jogada, formávamos grupo de ....?

G - Cinco em cinco.

P - Quantos grupos de cinco eram formados?

G - Cinco.

P - Quantos palitos retirei no início?

E - Três.

G- Ficavam vinte e seis.

P - O próximo jogo foi....

F- Trinta e sete com máximo quatro.

G- Fazendo de cinco em cinco.

G- Você começou com um.

P - Por quê?

G- Não sei.

F- Pelo número de palitos.

P - De onde sai esse número do grupo? Aqui o número máximo era cinco e formou grupos de...

F - Seis

P - Nesse aqui [referindo-se ao de trinta e sete palitos]o número máximo foi quatro. E eram formados grupos de quantos palitos?

E- Cinco.

E - Esse aqui foi dezessete e máximo dois.

P - Com grupos de quanto?

E e G - Três.

P - De três em três.

E- Ai! Eu penso num negócio e o negócio foge.

(silêncio)

E- Aqui. Vinte e dois com máximo cinco. Aí esse máximo aqui eu somo um. Divido o total de palitos por esse máximo mais um. O resto [da divisão] menos um é a minha jogada de início.

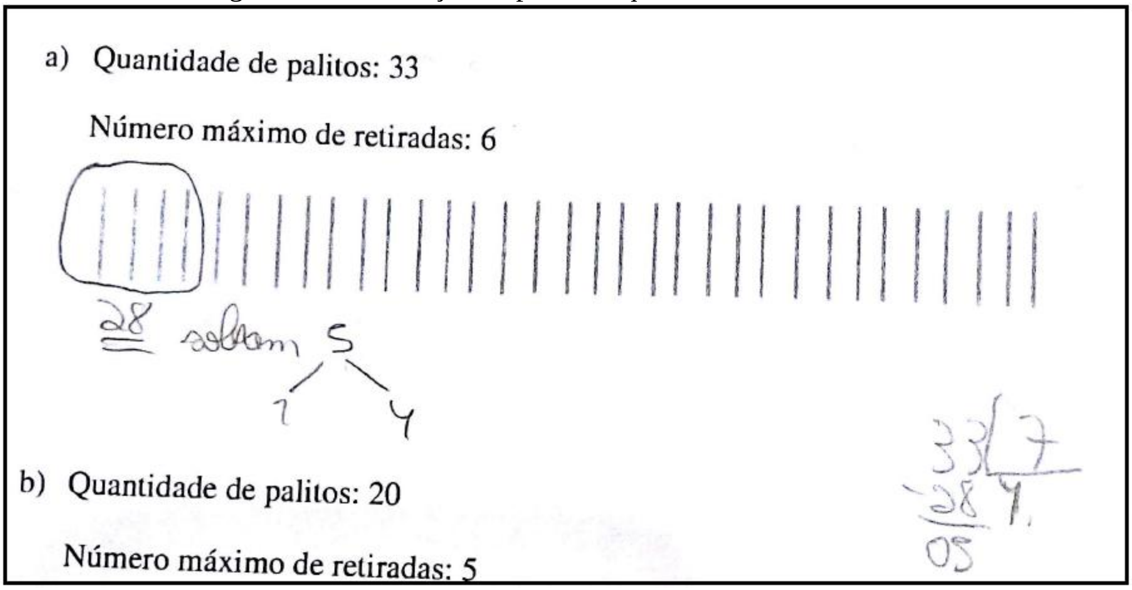
P - Isso. Perfeito!

O aluno E conseguiu entender a estratégia, porém precisou de um tempo para organizar as ideias e assim explicar para o grupo. Pelo registro das falas desse aluno, pode-se identificar a ideia de divisão com significados para: o divisor, nesse caso, seis, que representa o número de palitos em cada grupo; para o quociente, nesse caso, três, que é o número de grupos de seis palitos; e para o resto, neste caso quatro. Este último é subtraído de um, que é o palito que fica com o perdedor, e o restante representa a quantidade inicial de palitos que deve ser retirada.

Em todos os grupos, esses significados foram percebidos na busca pelo número inicial de palitos a serem retirados.

Assim que cada grupo terminou de desvendar a quantidade inicial de palitos a ser retirada para se conseguir a vitória, foi entregue para cada aluno uma folha de exercícios. Na primeira questão, os alunos não apresentaram dificuldade. A maioria registrou as contas e os outros resolveram "de cabeça" as questões. Em seguida, expuseram oralmente a sua resolução para uma das pesquisadoras (Figura 14).

Figura 14–A resolução da primeira questão de um dos alunos

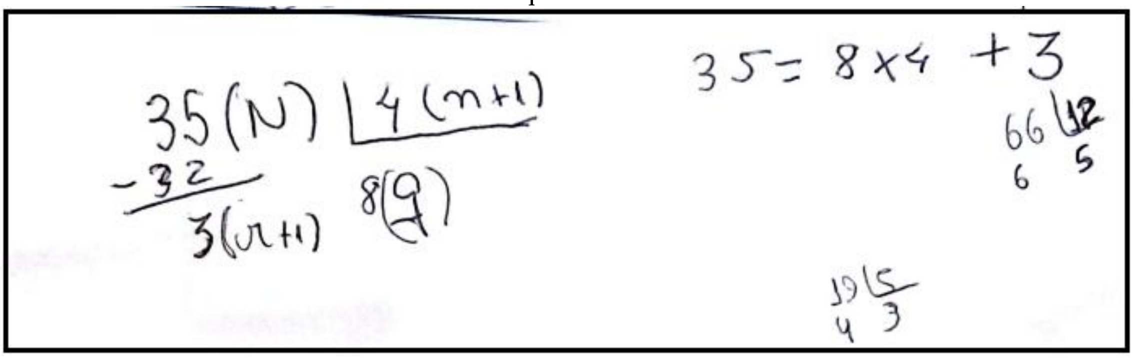



Fonte: Protocolo de Pesquisa.

Na questão seguinte, os alunos não tiveram dificuldade em completar a tabela, porém, no item **b**, a maioria ficou "paralisada", pois não entendeu a questão, precisando assim da interferência das pesquisadoras. Percebeu-se pouca familiaridade no trato com a Álgebra. Segundo Booth (1995), a Álgebra é caracterizada pelos alunos como uma fonte de confusões, promovendo atitudes negativas no seu aprendizado, herdada pela mecanização de procedimentos na educação algébrica. Klüsener (2001) reforça essa atitude e comenta sobre as dificuldades que os alunos trazem na compreensão e manipulação algébrica, exigindo um maior grau de abstração.

Para resolver a questão, as graduandas propuseram que os alunos associassem cada letra aos números da tabela para um melhor entendimento (Figura 15).

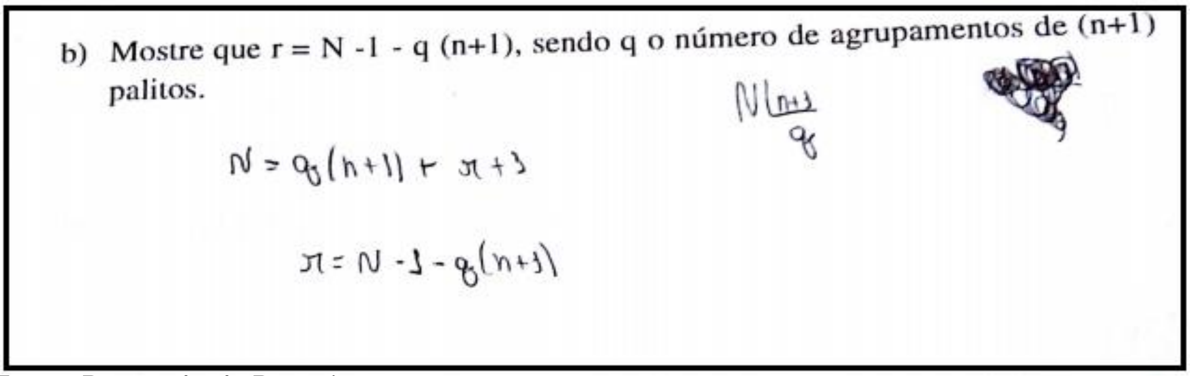
Figura 15 – Associação de cada letra com um número feito pelo aluno G no item **b** da segunda questão




Fonte: Protocolo de Pesquisa

A partir dessa associação, os alunos conseguiram resolver a questão proposta (Figura 16).

Figura 16- Resolução de um dos alunos do item b da segunda questão


b) Mostre que r = N -1 - q (n+1), sendo q o número de agrupamentos de (n+1) palitos.

N = q(n+1) + r + 1

r = N - 1 - q(n+1)

Fonte: Protocolo de Pesquisa

A última questão foi feita oralmente. Eles comentaram sobre as regularidades que observaram ao longo do jogo quanto à formação de agrupamentos e a retirada inicial de palitos, todas relacionadas à divisão. Disseram, também, que quem começa o jogo do Nim ganha desde que saiba a estratégia de vitória que está associada às regularidades citadas.

Por fim, foram feitas entrevistas com os alunos na última parte da Etapa 3, a avaliação. Cada grupo foi entrevistado separadamente, mas as respostas foram bem semelhantes.

Quando perguntados se o jogo deu significado à operação de divisão, todos afirmaram que sim. A pergunta seguinte foi sobre as maiores dificuldades que eles enfrentaram durante a atividade. Todos responderam que foi encontrar a quantidade inicial de palitos que se deve retirar. Quanto à folha de exercícios, todos disseram que tiveram dificuldade na questão **2b**. Indagados por que sentiram dificuldade nessa questão, o aluno F fez o seguinte comentário “não tinha número, só letras”. A fala do aluno vai de encontro à pesquisa de Schneider (2013), pois mostra que a compreensão de conteúdos matemáticos pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental se torna mais difícil quando se defrontam com questões com letras no estudo da álgebra.

O G1 e o G2 sugeriram aplicar esse trabalho no Ensino Médio em vez do Fundamental por considerá-lo difícil para esse último nível de ensino.

Sobre a importância de se trabalhar esse tipo de atividade em sala de aula, os alunos disseram que gostaram muito do jogo e ficaram o tempo todo motivados. Grando (2000, p. 27) afirma que o desafio do jogo motiva o jogador “a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites, na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar”.

Ressalta-se que o aluno G havia avisado no início da atividade que teria que sair mais cedo, pois tinha treino de futebol. Porém, ficou tão empenhado em descobrir a estratégia máxima, que não viu a hora passar e por isso ficou até o término da atividade. O aluno D declarou: “Nunca fiquei tão preso em uma atividade de Matemática” e o aluno C disse: “Se me dessem um exercício para fazer, não seria a mesma coisa que jogar”. O conhecimento adquirido por meio de jogos possibilita que o aluno faça da aprendizagem um momento interessante e até divertido (CHAVES, 2009).

Por fim, acrescentou-se uma última pergunta, que não estava prevista, relacionada à compreensão da quantidade de palitos em cada grupo formado (retirando o último e a jogada inicial) que neste jogo, era o número máximo de retiradas permitidas em cada jogada mais um. Esse questionamento poderia ter sido feito durante as jogadas, mas as pesquisadoras entenderam que haveria um corte no raciocínio desenvolvido pelos grupos. Fatos como esse são percebidos na prática e como não haveria perda se a pergunta fosse feita ao final, optou-se por fazê-la neste momento.

Os grupos responderam utilizando valores, por exemplo, no jogo em que o número máximo de retiradas era quatro, disseram que a quantidade cinco permitiria todas as jogadas possíveis: se um jogador tirasse um, o outro tiraria quatro. O mesmo raciocínio para a retirada de dois, três ou quatro com retiradas do adversário de três, dois e um palitos respectivamente. Se o somatório fosse quatro, não haveria a opção do primeiro jogador retirar quatro e se fosse seis e o primeiro jogador retirasse um, haveria um problema, já que o segundo só poderia retirar, no máximo, quatro. Dificuldades semelhantes ocorreriam para somatórios menores que quatro ou maiores do que seis.

Ressalta-se que o trabalho se restringiu à descoberta da estratégia máxima para resto maior do que um. Não foram comentados os casos do jogo para restos iguais a um ou zero por dois motivos: não houve tempo e nenhum aluno manifestou essa curiosidade.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho monográfico, buscou-se investigar se o uso do jogo do Nim acompanhado de atividades investigativas contribuiria para a percepção de padrões relacionados à divisão.

Para isso, primeiramente, realizou-se uma revisão bibliográfica que permitiu às pesquisadoras conhecer diferentes tipos de jogos, além de uma verificação sobre a inserção desse recurso na sala de aula e os resultados obtidos em pesquisas acadêmicas relacionadas ao seu uso no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Com base nessa revisão bibliográfica, escolheu-se para este trabalho um jogo de estratégia, o jogo do Nim.

Após esta etapa, foi elaborada uma sequência didática considerando como metodologia de ensino a Investigação Matemática. Procurou-se obter uma participação ativa dos alunos com a exploração, formulação, teste, reformulação e justificação de conjecturas ao longo da construção da estratégia máxima do jogo.

Para analisar a sequência didática proposta e a metodologia de ensino adotada, realizou-se um teste exploratório com alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática. Esse teste foi de grande valia, pois permitiu a reformulação de algumas partidas, além de reforçar aspectos do jogo como o número de participantes e o nível de ensino para a aplicação.

Após as alterações promovidas, aplicou-se a sequência didática a um grupo de sete alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa verificou que o pequeno número de alunos contribuiu para um melhor aproveitamento do trabalho, pois a observação utilizada como um meio de avaliação ficaria prejudicada se fosse em uma turma numerosa. Além disso, a pesquisa mostrou a importância das intervenções das pesquisadoras quando os alunos apresentavam dificuldades em prosseguir na atividade.

Durante a experimentação da sequência didática, observou-se uma participação excelente dos alunos em relação às atividades propostas. A literatura pesquisada, exposta no aporte teórico deste trabalho monográfico, indicou como uma das principais contribuições do uso de jogos, a motivação. Destaca-se que essa característica esteve evidente em toda a aplicação da sequência, influenciando positivamente os alunos. Assim como no trabalho de Borges (2014) o jogo criou um ambiente benéfico à reflexão ecom os resultados obtidos percebeu-se a eficácia do uso de jogos no desenvolvimento de uma aprendizagem matemática significativa, também verificado em Grando (2009).

Diante do exposto, em resposta à questão de pesquisa, pode-se afirmar que os resultados apontam para uma possível atribuição de significado à operação de, pois, a partir da fala dos alunos nas atividades, pode-se verificar que conseguiram descobrir a estratégia máxima do jogo por meio da percepção de padrões ligados a divisão.

Espera-se que o trabalho desenvolvido indique a importância do uso de jogos na sala de aula. Neste trabalho, o jogo não foi um mero verificador da aprendizagem de conceitos, mas protagonista para o alcance do objetivo proposto. Destaca-se, também, a metodologia Investigação Matemática, rica para os alunos e as pesquisadoras, a qual permitiu, por meio de seus passos, uma apreensão mais significativa dos conceitos matemáticos envolvidos no trabalho.

Ressalta-se a importância desse trabalho para o aprimoramento da prática pedagógica das pesquisadoras, pois proporcionou uma experiência desafiadora. Além disso, pode-se presenciar a motivação e a ativa participação dos alunos, o que contribuiu diretamente na positiva conclusão do trabalho.

Por meio deste trabalho monográfico, as pesquisadoras desenvolveram algumas competências como a mediação durante as atividades, a intervenção na formulação de questões em tempo real para fazê-los analisar sobre as conjecturas e o respeito ao tempo de resolução do aluno, pois cada um possui o seu próprio ritmo. Também foi imprescindível ouvir atentamente as falas dos alunos durante as atividades, além de um raciocínio matemático rápido a fim de responder às perguntas que eram lançadas.

Referente às atitudes das pesquisadoras ao utilizar os jogos como ferramenta na mediação do conhecimento, é preciso ser claro na explicação, elaborar uma atividade que desafie o aluno, estimular a criatividade, respeitar e compreender a forma de aprender e pensar dos alunos, encorajar a iniciativa e participação e, principalmente, estimular o caráter lúdico da atividade. Assim como Maluta (2007) é importante reforçar a importância do jogo como um grande recurso pedagógico.

Para o trabalhos futuros, sugere-se a possibilidade de aplicação da sequência didática elaborada para uma turma numerosa com a adoção de algumas estratégias, a saber: (i) como a participação de um professor auxiliar; (ii) a divisão da classe em dois grupos, nesse caso, com a aplicação da atividade em dois dias, um para cada grupo e; (iii) a formação de grupos de quatro jogando dois contra dois. Propõe-se, também, a experimentação de atividades que desenvolvam a estratégia do jogo do Nim para resto igual a um ou igual a zero. Ressalta-se que, para a descoberta dessas estratégias, pode-se abordar não somente a divisão, mas também a utilização da árvore de possibilidades, base dos estudos de análise combinatória.

**REFERÊNCIAS**


ALMEIDA, P. N. *Educação Lúdica:* Técnica e Jogos Pedagógi*cos.*São Paulo: Loyola, 1990.

ANTUNES, C. *Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências*. 13 ed. Petrópolis: Vozes, 2005.

BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B. Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. *Anais*... Rio Claro: UNESP, 2008. p. 1-17.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual,1995.

BORGES, L. F..*Jogos de estratégia:* uma proposta didática para o estudo de matrizes e probabilidade. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Bahia, 2014.

BORIN, J*Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM/IME – USP, 1996.

_______.*Jogos e resolução de problemas:*uma estratégia para as aulas de matemática. 3.ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

BRASIL Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRAUMANN, C. *Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.*In:PONTE, J. P. et al. (Eds.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5-24.

BULGRAEN. V. C. *O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento*. 2010. Disponível em: <http://www.conteudo.org.br/index.php/conteudo/article/viewFile/46/39>. Acesso em: 24 nov.2016.

CHAVES, E. F. de S. *O lúdico e a Matemática*. 2009. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade Pedro II, Belo Horizonte, 2009.

CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa:*métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2010.

ERICKSON, F. 1986. *Métodos Qualitativos em Pesquisa sobre Ensino e Aprendizagem.* Nova Iorque: MacMillan Publishing Company, 1990.

FIALHO, N. N.*Os jogos pedagógicos como ferramentas de ensino*. 2008. Disponível em: http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/293_114.pdf. Acesso em: 11 nov. 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática*. Boletim SBEM, São Paulo, v.4, n.7, 2009.

GARDNER, M. *Divertimentos Matemáticos*. São Paulo: Ibrasa, 1961.

GOLDENBERG, M.*A arte de Pesquisar:* como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 11. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GRANDO, R. C.*O jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação – FE, UNICAMP, 1995.

_______.*O conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. Tese (Doutorado em Educação) - UNICAMP, Campinas, 2000.

_______.*O jogo e a matemática no contexto de sala de aula*. São Paulo: Papirus, 2004.

GROENWALD, C. L. O.; TIMM, Ú. T. Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista* Rio Grande do Sul: UNIVATES, v. 1, n. 2, p. 21-26, 2000. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a1/>. Acesso em: 9 nov. 2016.

KISHIMOTO, T. M.*Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação*. São Paulo: Cortez, 1996.

KLÜSENER, R. Ler, escrever e compreender a Matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, I. et al. *Ler e Escrever:* compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Editora da Universidade, 2001.

LARA, I. C. M. de. Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9.,2007, Belo Horizonte.*Anais*...Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html>. Acesso em: 23 abr. 2016.

LIMA, M. C. F. de; SILVA, V. V. S. da; SILVA, M. E. L..*Jogos educativos no âmbito educacional:* um estudo sobre o uso dos jogos no Projeto MAIS da Rede Municipal do Recife. 2009. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_sonia_maria_gabriel_matheus.pdf>. Acesso em: 9 de nov. 2016.

MALUTA, T. P. *O jogo nas aulas de matemática:* possibilidades e limites. 2007. Monografia (Licenciatura em Pedagogia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

MATHEUS, S. M. G.; KATO, L. A. Despertando o interesse pela matemática*:* relato de uma atividade de modelagem matemática. In:PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*, Curitiba: SEED/PR., 2011. (Cadernos PDE). Disponível em:<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_sonia_maria_gabriel_matheus.pdf> Acesso em: 10 nov. 2016.

MENEZES, EbenezerTakuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Verbete sistema educacional brasileiro. *Dicionário Interativo da Educação Brasileira -Educabrasil*. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/sistema-educacional-brasileiro/>. Acessoem: 04 dedez. 2016.

MULDOON, M. Non-observationtechniques for data collection. In: BURNS, A. Collaborativeaction for Englishlanguageteachers. Cambridge UniversityPress,1999.

OLIVEIRA, M. M. de. *Como fazer Pesquisa Qualitativa*.4. ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

PAULEK, C. M et al. Investigação matemática: uma experiência no Ensino de Limites. IN: ENCONTROPARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10.,2009, Guarapuava. *Anais*... Guarapuava: UNICENTRO, 2009, p. 732-740.

PIRES, R. A. E. *Jogos Combinatórios e Jogos de Soma Nula*. Dissertação (Mestrado em Matemática e Aplicações) – Departamento de Matemática–Universidade de Aveiro, 2012.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SANT`ANNA, A.; NASCIMENTO, P. R. A história do lúdico na educação. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 19-36, 2011.

SCHNEIDER, A. A aprendizagem da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. 2013. 68 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2013.

SILVA, D. S. *A utilização de jogos adaptados em busca da estratégia vencedora do jogo do Nim.* Monografia (Licenciatura em Matemática) - Centro Universitário La Salle – Unilasalle, Canoas, 2008.

SILVA, M. C; PESSOA, C. A. dos S. Raciocínio combinatório: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil.2013. Disponível em: <https://www.ufpe.br/ce/images/Graduacao_pedagogia/pdf/2013.2/raciocinio%20combinatorio.pdf>. Acesso em: 22 de Nov. 2016, 19h00min.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; MILANI, E. Jogos de matemática do 6°.ao 9°.ano. *Cadernos do Mathema*. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SOUZA, B. O. *Ensinando Matemática com jogos*. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro-UENF, 2013

# APÊNDICE

## APÊNDICE A: Exercícios

Experimentação da Monografia – 30/09/2016

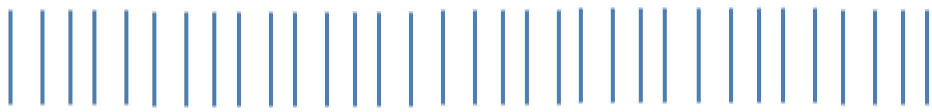
Licenciandas: Beatriz IgnacioAlmeida e Rafaela Barcelos de Carvalho

Exercícios

1) Em cada item abaixo você tem uma determinada quantidade de palitos.Supondo que será o primeiro a jogar, determine qual será a retirada que deve fazer inicialmente para garantir a sua vitória.

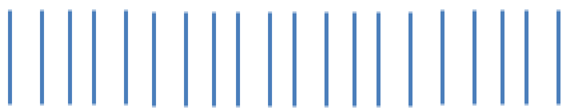
a) Quantidade de palitos: 33

Número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 6



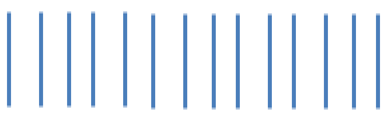
b) Quantidade de palitos: 20

Número máximo de retirada de palitos em cada jogada: 5



c) Quantidade de palitos: 14

Número máximo de retirada de palito em cada jogada: 4



2) Considere **N**, o número de palitos e **n**, o número máximo de retiradas em cada jogada.

a) Complete a tabela abaixo:

| Número de palitos (N) | Número máximo de retiradas por jogada (n) | Número de palitos retirados na primeira jogada (r) |
|---|---|---|
| 35 | 3 | |
| 19 | 4 | |
| 66 | 11 | |
| N | n | r |

b) Com base no item anterior, mostre que r = N -1 - q (n+1), sendo q o número de agrupamentos de (n+1) palitos.

3) A Matemática é considerada a ciência dos padrões. Que padrões (regularidades) você observa na determinação dos números da última coluna da tabela acima? Explique oralmente como foram gerados.