LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GRAFOS EULERIANOS NO ENSINO MÉDIO: UMA IMERSÃO À LUZ DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

IGOR CARDOSO DE ABREU

LARISSA CONSOLE DE OLIVEIRA

THIAGO FRAGOSO GONÇALVES

Campos dos Goytacazes – RJ

2016

IGOR CARDOSO DE ABREU

LARISSA CONSOLE DE OLIVEIRA

THIAGO FRAGOSO GONÇALVES

GRAFOS EULERIANOS NO ENSINO MÉDIO: UMA IMERSÃO À LUZ DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Coorientadora: Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes – RJ

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

A162g Abreu, Igor Cardoso de.
Grafos eulerianos no Ensino Médio: uma imersão à luz da resolução de problemas / Igor Cardoso de Abreu; Larissa Console de Oliveira; Thiago Fragoso Gonçalves – 2016.
106 f. : il.

Orientador: Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo.

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos-Centro. Campos dos Goytacazes (RJ), 2016.
Referências: p. 85 - 90.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas, exercícios etc. I. Azevedo, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues, orient. II. Título.

CDD 510

IGOR CARDOSO DE ABREU

LARISSA CONSOLE DE OLIVEIRA

THIAGO FRAGOSO GONÇALVES

GRAFOS EULERIANOS NO ENSINO MÉDIO: UMA IMERSÃO À LUZ DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 11 de outubro de 2016.

Banca Avaliadora:

Carmem Lúcia V. R. Azevedo

....

Profª. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo (orientadora)
Mestre em Economia Empresarial /UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Carla A F.

....

Profª. Carla Antunes Fontes (coorientadora)
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro

....

Profª. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

....

Profª. Mylane dos Santos Barreto
Mestre em Matemática/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de registrar nossos mais sinceros agradecimentos a todos aqueles que foram fundamentais para que obtivéssemos êxito na conclusão desta etapa tão importante de nossas vidas.

Primeiramente, a Deus, por iluminar nossos caminhos e nos dar forças para superar mesmo os mais difíceis obstáculos, permitindo que chegássemos até aqui.

Aos nossos pais, que sempre se fizeram presentes, nos motivando, por mais distantes que precisássemos estar.

Aos nossos companheiros, também grandes incentivadores, que perdoaram nossas ausências, mostrando-se muito amáveis e compreensivos.

Às nossas professoras orientadoras Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo e Carla Antunes Fontes, por toda a dedicação, comprometimento, boa vontade e carinho conosco, ao longo dessa trajetória. São duas pessoas que nos inspiram tanto profissionalmente, quanto pelo caráter.

À professora Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto que norteou o início da pesquisa, na disciplina de Monografia I.

Às professoras Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro e Mylane dos Santos Barreto que compuseram a banca.

Aos demais professores do curso de Licenciatura em Matemática deste instituto, não só pelo ensino dos conteúdos, mas também pelo exemplo diário da postura que devemos ter como professores.

A todos os nossos amigos, pelo apoio e amparo nos momentos mais difíceis.

Enfim, a todos os que de alguma forma nos auxiliaram nessa trajetória, o nosso muito obrigado!

A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original.
Albert Einstein

RESUMO

A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática Discreta que, mesmo com seu início no século XVIII, ainda hoje é pouco explorada no meio acadêmico, apesar de suas aplicações em situações e mecanismos modernos como o *Facebook*. O Espírito Santo é um dos poucos estados a terem adotado este tema em seu currículo mínimo, demonstrando o longo caminho que se deve percorrer para sua ampla divulgação. Esta pesquisa tem por objetivo analisar a percepção de alunos, do Ensino Médio, a respeito da aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas. Nesse sentido, elaborou-se uma sequência didática para alunos da 2ª. série do Ensino Médio, composta por duas Atividades: a primeira foi solucionada sem o conhecimento da Teoria e a segunda, com problemas contextualizados, resolvida após a formalização da Teoria. A metodologia de ensino adotada, nessa pesquisa qualitativa, realizada por meio de um estudo de caso, foi a Resolução de Problemas que desenvolve a capacidade de raciocínio e a autoconfiança dos estudantes, ampliando sua autonomia. Os dados analisados para a construção do presente trabalho foram obtidos por meio dos seguintes instrumentos: observação, registros das atividades dos alunos e questionários. Os resultados apontaram que a maioria dos alunos sentiu a necessidade de uma ferramenta que os auxiliasse durante a resolução dos problemas e revelaram que, sabendo a Teoria, foi mais fácil solucioná-los. O ensino da Teoria dos Grafos Eulerianos é justificável por se tratar de um assunto que desperta a curiosidade e o interesse, além de desenvolver o raciocínio lógico.

Palavras-chave: Grafos Eulerianos. Resolução de Problemas. Ensino Médio.

ABSTRACT

The Graph Theory is a branch of Discrete Mathematics that, even having its beginning in the XVIII century, is still an unexplored area in the academic community, despite of its applications in modern situations and mechanisms, such as Facebook. The state of Espírito Santo is one of the few states that adopted this topic in its minimum curriculum, demonstrating a long way to go to its full disclosure. This research aims to analyze the high school students' perception about the application of The Eulerian Graph Theory in solving mathematical problems. In this regard, it was made a didactic sequence for high school's second grade students, composed by two Activities: the first one was solved without the Theory's knowledge and the second one, with contextualized problems, solved after Theory's formalization. The adopted teaching methodology in this qualitative research, performed by a case study, was the Problem Solving that develops thinking ability and the students' self-confidence, expanding their autonomy. The data analyzed for the construction of this academic work were obtained by the following instruments: observation, registries from the students' activities and questionnaires. The results pointed that most of the students felt the need of a tool that helped during solving mathematical problems and revealed that, knowing the Theory, it was easier to solve. Teaching The Graph Theory is explainable because it's a subject that arouses the curiosity and the interest, in addition to developing logical reasoning.

Keywords: Eulerian Graph. Problem Solving. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação no Brasil sofreu uma série de transformações. O maior desafio, entretanto, não está mais em apenas levar as pessoas a aprenderem, mas, sim, em fazer com que a aprendizagem de fato ocorra, visto que os atrativos fora da escola tendem a desviar a atenção do educando (MALTA, 2008).

As mudanças têm acontecido rapidamente e a necessidade por algo novo tem sido grande, sendo assim, “[...] a escola precisa manter o seu objetivo de trabalhar com o conhecimento que a humanidade foi construindo, mas ela também precisa estar atenta ao conhecimento recente e incorporar nas suas práticas a abordagem dos mesmos” (MALTA, 2008, p. 3).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000) destacam a importância do trabalho feito a partir de conhecimentos práticos, contextualizados, e, também, conhecimentos mais amplos e abstratos, ambos voltados para a vida do educando em sociedade.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, os PCNEM orientam que “[...] os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea [...]” (BRASIL, 2000, p. 6).

A respeito dessa orientação, Malta (2008) diz que existem claras indicações para a inclusão de novos temas no Ensino Médio. Isso pode ser percebido com a inclusão da Probabilidade, por exemplo, um ramo da Matemática Discreta que é considerada, pela autora, um dos temas de que a Educação Básica deve se ocupar.

As atividades que abordam temas relacionados com a Matemática Discreta na Educação Básica

> i) Permitem a apresentação de problemas interessantes do mundo contemporâneo que motivam o aluno a buscar um entendimento completo da questão proposta e da sua solução. Muitas vezes esses problemas naturalmente possibilitam um debate interdisciplinar;
> ii) Possibilitam o exercício constante da enumeração de casos, do desenvolvimento de estratégias variadas de solução e da análise crítica das soluções encontradas por cada caminho para os problemas propostos;
> iii) Estão sendo temas atuais em olimpíadas de Matemática (OBM, OMERJ, OBMEP, etc) e concursos de vestibulares (ENEM) no país. (COSTA, 2013, p. 9).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006) sugerem a Matemática Discreta como tema complementar e apresentam diferentes exemplos de problemas que poderiam ser trabalhados na escola. Um deles é sobre as pontes de Könisberg, que foi resolvido por Euler, dando origem à Teoria dos Grafos.

Em relação ao estudo dessa Teoria, pode-se afirmar que

> [...] abre-se a possibilidade de trabalhar com problemas mais pertinentes do ponto de vista da vida contemporânea. [...] Hoje, percebemos uma produção muito intensa e rápida de informações e a escola, na maioria das vezes, não acompanha de forma satisfatória como poderia. Não defendemos aqui que a escola deva dar conta de tudo, mas pensamos que poderia olhar um pouco para fora dos seus conceitos tradicionalmente trabalhados e eleger outros que com certeza contribuiriam para a formação de alunos mais críticos e capazes de entender o mundo que os cerca. (MALTA, 2008, p. 62).

O problema das pontes de Könisberg, resolvido por Leonhard Euler no século XVIII, de acordo com Sá e Silva (2013), originou o que se conhece por grafos eulerianos, mas não foi o único. “Outro problema clássico da teoria de grafos é proposto por Sir William Hamilton, no século seguinte. Conta-se que Hamilton teria criado um mundo, representado por um dodecaedro e, em cada vértice, teria colocado uma cidade do mundo, sendo Londres uma delas” (MALTA, 2008, p. 12). Este problema deu origem ao que se chama, hoje, de grafos hamiltonianos.

O problema de Hamilton abriu espaço para outros como o do Caixeiro Viajante, que segundo Pereira e Câmara (2008) é um problema de grafo hamiltoniano em que se deve percorrer todos os vértices uma única vez, de maneira otimizada.

Outro conhecido tipo de grafo é o planar, que conforme Conte (2003) é todo grafo passível de ser representado no plano sem que haja cruzamento de arestas. Desta categoria de grafo deriva o Problema das Quatro Cores, cuja demonstração, segundo Malta (2008), prova que qualquer mapa pode ser colorido com a utilização de apenas quatro cores, segundo o critério de que regiões fronteiriças possuam cores distintas.

Há também o problema do Carteiro Chinês que Jurkiewicz (2009) aponta ser um problema de grafos com arestas valoradas, cujo objetivo é fazer o carteiro percorrer, com esforço mínimo, todas as ruas de uma cidade e retornar ao ponto de partida, sendo, portanto, um problema de grafos eulerianos.

A despeito dos mais variados tipos de grafos existentes, para este trabalho monográfico escolheu-se trabalhar com os grafos eulerianos, “[...] muito em função da simplicidade na modelagem do problema [...] bem como pela forma bem resolvida, simples e elegante de entendimento da solução" (COSTA, 2013, p. 9).

Optou-se neste trabalho monográfico pela metodologia de ensino de Resolução de Problemas, que é "o ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da matemática" (GUALANDI, 2012, p. 26).

Dessa forma, "[...] com a aliança entre a Resolução de Problemas e a Teoria de Grafos é possível trabalhar conceitos matemáticos de forma contextualizada com a realidade e experiências dos alunos, deixando a Matemática mais interessante, além é claro, de possibilitar novas descobertas" (MESQUITA, 2015, p. 12).

A partir do que foi exposto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: **Qual a percepção de alunos, do Ensino Médio, a respeito da aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas?**

Para responder tal questão, traçou-se o seguinte objetivo: analisar a percepção de alunos, do Ensino Médio, a respeito da aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas. Para alcançá-lo, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Promover estudos sobre a Teoria dos Grafos e a metodologia de ensino Resolução de Problemas, tendo em vista a elaboração de uma sequência didática[1];
- Construir instrumentos de coleta de dados para captar a percepção dos alunos;
- Apresentar uma proposta de inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio.

Este trabalho encontra-se estruturado em três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais. O primeiro capítulo apresenta o aporte teórico no qual são abordados alguns aspectos sobre a Teoria dos Grafos, a Resolução de Problemas e são descritos alguns estudos relacionados ao presente trabalho.

No que concerne à Teoria dos Grafos, são abordados os tipos de grafos mais utilizados, situando-os historicamente desde sua origem até as mais modernas aplicações nos dias atuais. É traçado também um panorama geral dos grafos na Educação Básica, em que pesquisas apontam ser próspera sua implementação, principalmente no Ensino Médio, haja visto os inúmeros benefícios que podem trazer para o aluno.

Quanto à Resolução de Problemas, é feito um apanhado histórico das metodologias utilizadas na educação, até o ponto em que a Resolução de Problemas ganha destaque. Em seguida é feita uma descrição desta metodologia de ensino.

[1]Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. (ZABALA, 1998, p. 18).

No segundo capítulo são apresentados os aspectos metodológicos deste trabalho monográfico, a saber, uma pesquisa qualitativa desenvolvida por meio de um estudo de caso, cujos instrumentos de coleta de dados foram: registros das respostas dadas pelos alunos, observação e questionários. A subseção que se refere à elaboração da sequência didática descreve: i) as questões das Atividades 1 e 2, apontando seus objetivos; e ii) o conteúdo da Apostila confeccionada. A elaboração dos questionários é descrita na subseção seguinte.

No terceiro capítulo, é feito o relato da experiência e a análise dos dados tanto do teste exploratório, quanto da experimentação. O primeiro tinha como objetivos verificar se os materiais estavam adequados para o nível de ensino pretendido e avaliar aspectos como tempo de duração e clareza nos enunciados; o segundo tinha o propósito de responder à questão de pesquisa.

Nas Considerações Finais são destacados os aspectos relevantes do trabalho, discute-se a resposta da questão de pesquisa e são apresentadas formas de continuidade do estudo promovido.

1 APORTE TEÓRICO

No presente capítulo apresenta-se o aporte teórico que auxiliou na construção deste trabalho monográfico. Subdivide-se em três seções, na primeira discutem-se os aspectos relacionados à Teoria dos Grafos, na segunda os à Resolução de Problemas e a terceira são descritos os estudos relacionados ao presente trabalho.

1.1 Teoria dos Grafos

1.1.1 História e Classificação dos Grafos

O ramo da Matemática Discreta conhecido como Teoria dos Grafos teve início, segundo Lucchesi (1979), Conte (2003), Bria (2004), Malta (2008), Siqueira (2011), Holanda (2011), Gualandi (2012), Sá e Silva (2013), Costa (2013), Souza (2014) e Mesquita (2015) a partir das ideias do matemático suíço Leonhard Euler.

Segundo Sá e Silva (2013), no início do século XVIII os habitantes da cidade russa de Königsberg, separada pelo rio Pregel em quatro porções de terra, costumavam passear pelas sete pontes que as conectavam (Figura 1). Os autores seguem afirmando que os cidadãos se questionavam se era viável "caminhar ao redor da cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e, se possível, retornar ao seu ponto de partida", que ficou conhecido como o Problema das Sete Pontes.

Figura 1 – Mapa da cidade de Königsberg

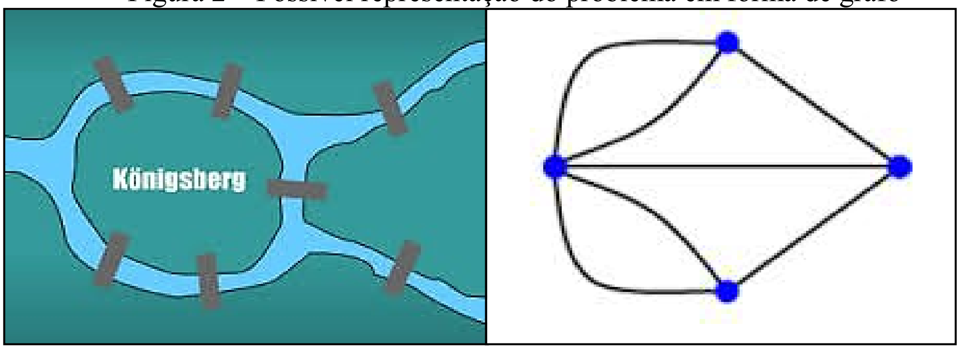
Fonte: Malta, 2008, p. 11.

De acordo com Sá e Silva (2013), Leonhard Euler chegou à Rússia em 1730 e, em 1736, sabendo de sua notoriedade, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg lhe enviou uma carta pedindo que solucionasse este problema. Segue um trecho traduzido[2]:

> [...] você prestaria a mim e a nosso amigo Kiihn o mais valioso serviço, colocando-nos muito em dívida com você, culto Senhor, se você nos enviasse a solução, que você conhece bem, para o problema das sete pontes de Königsberg, juntamente com uma prova. (SACHS; STIEBITZ; WILSON, 1988 apud SÁ; SILVA, 2013, p. 19).

Conte (2003) diz que Euler provou ser o caminho impossível, pois utilizando um modelo em grafos[3], mostrou que a travessia de todas as pontes com início e fim numa mesma porção de terra só seria possível se em cada uma delas concorresse um número par de pontes. Nesse sentido, Malta (2008) indica que Euler não apenas resolveu o caso particular das pontes de Königsberg, mas conseguiu generalizá-lo com uma possível representação em forma de grafo (Figura 2), em que cada porção de terra é um vértice e as pontes, as arestas.

Figura 2 – Possível representação do problema em forma de grafo



Fonte: Cardoso; Matos, 2014, p. 3.

Atualmente existem diversas definições para grafo, das quais algumas estão a seguir.

Holanda (2011, p. 1) e Cardoso e Matos (2014, p. 4) entendem que “grafo é um conjunto de pontos e linhas. A estes pontos nós chamamos de vértices e as linhas denominamos de arestas”.

Souza (2014, p. 3) acredita que “um grafo é um par G = (V;A), onde V é um conjunto finito não vazio e A é uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente

[2]Tradução de Sá e Silva (2013) para “You would render to me and our friend Kiihn a most valuable service, putting us greatly in your debt, most learned Sir, if you would send us the solution, which you know well, to the problem of the seven Konigsberg bridges, together with a proof”.

[3]Cabe destacar que segundo Boaventura Netto (2006, p. 2), “o termo grafo só foi utilizado pela primeira vez por Sylvester em 1878”.

distintos, de V. Os elementos de V são chamados de vértices do grafo, e os elementos de A são as arestas do grafo".

Malta (2008, p.13) e Mesquita (2015, p. 14-15) assim o definem: "Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados vértices do grafo e os segmentos são ditos arestas do grafo". Esta será a definição adotada neste trabalho monográfico por sua maior simplicidade e abrangência. Uma vez que se definiu grafo, cabe então definir grafo euleriano.

> Seja G = (V; A) um grafo. Um passeio em G que percorre cada aresta de G exatamente uma vez é chamado caminho de Euler. Um caminho de Euler que se inicia e termina no mesmo vértice é chamado circuito de Euler. Por fim, se G possui um circuito de Euler, dizemos que G é um grafo euleriano. Se o grafo não possui um circuito de Euler, mas sim um caminho de Euler, ele será denominado semieuleriano [sic]. (SOUZA, 2014, p. 12).

De acordo com Sá e Silva (2013), os grafos eulerianos também podem ser denominados caminhos eulerianos fechados, ao passo que os grafos semi-eulerianos podem ser chamados de caminhos eulerianos abertos.

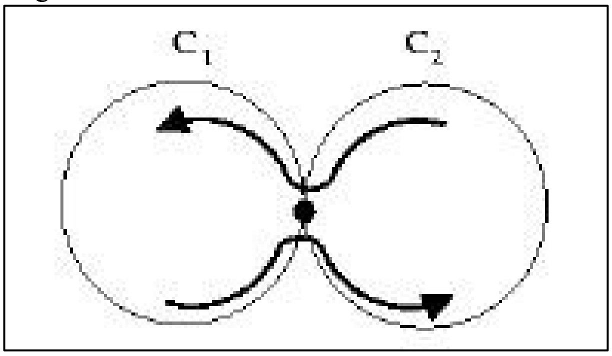
Um grafo conexo é aquele em que todos os vértices tomados dois a dois estão ligados por um caminho, conforme Souza (2014). Holanda (2011) define que grau de um vértice é a denominação usada para a quantidade de arestas que nele incidem.

Um grafo conexo é euleriano se possui todos os vértices com grau par, segundo Costa (2013). O teorema é provado e ilustrado (Figura 3) por Pereira e Câmara (2008, p. 74, grifos dos autores):

> Demonstração: *Ida:* Seja G um grafo euleriano. Logo, ele contém um ciclo euleriano. Por cada ocorrência de vértice desse ciclo, existe uma aresta que chega nesse vértice e associada a ela, outra que sai desse vértice. Como toda aresta faz parte do ciclo, isto é, nenhuma aresta fica fora do ciclo, necessariamente o número de arestas por cada vértice é par.
> *Volta:* Suponhamos que todos os vértices possuem grau par. Seja v_i um vértice do grafo. Tentemos, a partir de v_i, construir uma cadeia que não passa duas vezes pela mesma aresta, e até que não seja possível continuar. Como todos os vértices possuem um grau par, sempre será possível entrar e sair de um vértice. A única exceção é o vértice v_i onde a cadeia vai terminar. Se essa cadeia, que chamaremos C_1, contém todas as arestas de G, temos um ciclo euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de C_1. No grafo resultante G', todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de C_1, senão o grafo não seria conexo.
> Recomeçamos o mesmo processo com o grafo G', partindo de um vértice comum com C_1, obtendo assim um novo ciclo C_2. A figura abaixo mostra que dois ciclos que têm um vértice em comum podem formar um ciclo

> único: chegando ao vértice comum em um dos dois ciclos, continuamos o percurso no outro ciclo. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um ciclo único que contém todas as arestas de G.

Figura 3 – Dois ciclos com um vértice em comum



Fonte: Pereira; Câmara, 2008, p. 75.

Costa (2013) afirma que um grafo conexo é semi-euleriano se possui exatamente dois vértices com grau ímpar; o caminho euleriano se inicia em um desses vértices e termina no outro. Este é um corolário do teorema anterior demonstrado por Souza (2014, p. 14): "A ideia é acrescentar uma aresta a dois vértices de grau ímpar e usar o teorema anterior".

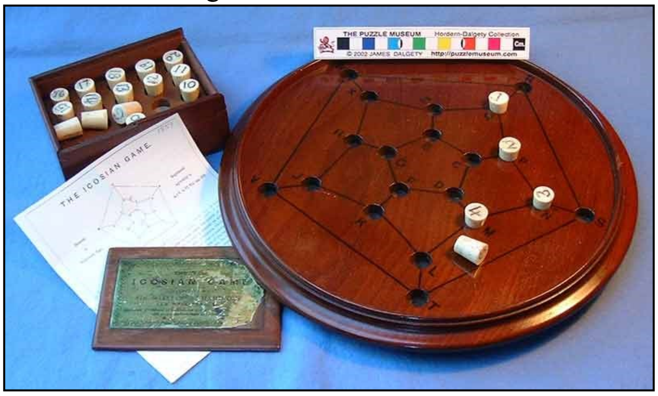
Caso um grafo conexo possua mais de dois vértices de grau ímpar, então não é nem euleriano, nem semi-euleriano, segundo Costa (2013). Esse tipo de grafo é chamado de grafo não euleriano (GUALANDI, 2012).

Malta (2008) garante que os grafos eulerianos têm aplicação em problemas de atendimento em sequência a um número elevado de pessoas, geralmente entregas ou recolhimento a domicílio, como por exemplo: gás, água, luz, telefone, etc.

Foi a partir do Problema das Sete Pontes que diversos outros surgiram, fomentando o aparecimento de algumas subáreas dentro da Teoria dos Grafos (SIQUEIRA, 2011).

Um dos problemas que apareceram foi o proposto, segundo Malta (2008) e Mesquita (2015), por Sir. Willian Hamilton em 1856 com seu jogo *Icosain Game* (Figura 4), basicamente um tabuleiro com uma representação "achatada" de um dodecaedro que simulava o mundo, em que as cidades mais importantes da época eram seus vértices, e que consistia em partir de Londres, passar em cada uma dessas cidades uma única vez e retornar ao ponto de partida. Um trajeto que segue essa regra, segundo Mesquita (2015), é chamado de caminho hamiltoniano.

Figura 4 – *Icosain Game*



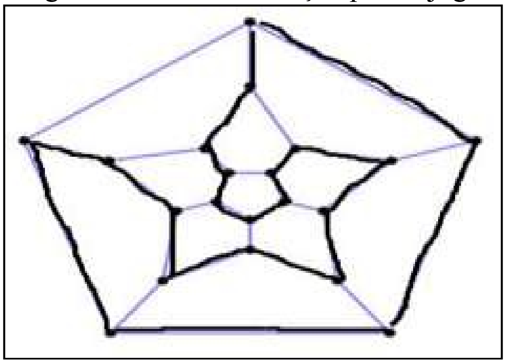
Fonte: Souza, 2014, p. 16.

A definição de grafo hamiltoniano é dada por Souza (2014, p. 15):

> Seja G um grafo. Um caminho em G que passa uma única vez por cada vértice de G é chamado caminho Hamiltoniano. Se, além disso, o caminho começa e termina no mesmo vértice, o caminho é chamado ciclo Hamiltoniano. Por fim, se G possui um ciclo Hamiltoniano, dizemos que G é um grafo Hamiltoniano.

Uma possível solução para o jogo (Figura 5) é apresentada por Mesquita (2015) que chama a atenção para o fato de que, diferentemente dos grafos eulerianos, não é necessário passar por todas as arestas do dodecaedro a fim de completar o desafio.

Figura 5 – Possível solução para o jogo



Fonte: Mesquita, 2015, p. 24.

Jurkiewicz (2009) e Souza (2014) afirmam que os grafos hamiltonianos são bastante estudados devido à sua aplicabilidade às áreas de comunicação, transporte e planejamento. Pereira e Câmara (2008) e Jurkiewicz (2009) ressaltam que, mesmo sendo objetos de estudo há bastante tempo, até hoje as condições necessárias e suficientes para que um grafo seja hamiltoniano não são conhecidas.

Um problema que se utiliza dos grafos hamiltonianos é o do Caixeiro Viajante (MALTA, 2008; PEREIRA; CÂMARA, 2008; MESQUITA, 2015). Kanda (2012) assegura que não há relatos na literatura que indiquem a sua origem, mas é pacífico que foi o matemático Karl Menger, em 1932, o primeiro a analisar uma maneira simples de encontrar sua solução. O problema pode ser assim enunciado

> ‘A um caixeiro viajante é informado um conjunto de cidades e um custo associado a cada par de cidades deste conjunto, representando a distância entre as cidades. O caixeiro deve partir de uma cidade inicial, passar por todas as demais cidades uma única vez e retornar à cidade de partida’. (MALTA, 2008, p. 22).

Pereira e Câmara (2008) atentam para o fato de que a busca pela solução passa por verificar se o grafo é hamiltoniano. O próprio Karl Menger, segundo Kanda (2012) observou que o melhor caminho poderia ser obtido pela comparação de todas as possíveis soluções, mas que isso se tornaria impossível, caso muitas cidades estivessem envolvidas.

De fato, Malta (2008) diz que essa busca pelas soluções é proporcional ao fatorial do número de vértices do grafo. Neste sentido, Jurkiewicz (2009) problematiza envolvendo 20 cidades e diz que a busca pelo melhor caminho envolveria a análise de vinte fatorial (20!) permutações, um número realmente grande. Ainda não existe um algoritmo computacional eficiente para este tipo de problema (JURKIEWICZ, 2009; KANDA, 2012).

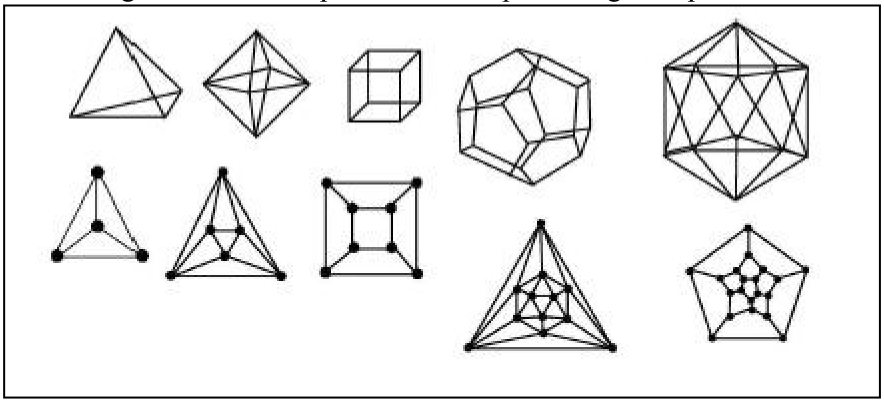
Malta (2008) enumera algumas aplicações para este tipo de problema. Em geral, situações em que se deve determinar a menor distância a ser percorrida em uma rota: coleta de lixo, transporte de produtos, transporte de passageiros, distribuição postal, distribuição de combustíveis e inúmeros outros problemas logísticos.

Outro tipo de grafo é o planar, definido por Conte (2003, p. 18, grifo da autora): “Um grafo é planar se for possível desenhá-lo no plano, de modo que as arestas não se cruzem. Tal desenho é uma *realização gráfica planar* do grafo ou simplesmente *realização planar*”.

Pouco mais recentes que os eulerianos, os grafos planares tiveram o conceito desenvolvido por Leonhard Euler, no início do século XVIII, que acabou por originar a famosa relação de Euler (V–A+F=2, na qual V representa o número de vértices, A o de arestas e F o de faces de um poliedro convexo), como atesta Mesquita (2015).

Exemplos clássicos de grafos planares são obtidos a partir dos sólidos platônicos (Figura 6), como aponta Jurkiewicz (2009).

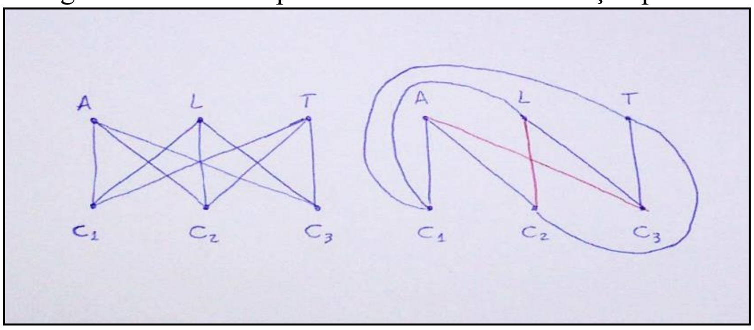
Figura 6 – Sólidos platônicos e respectivos grafos planares



Fonte: Jurkiewicz, 2009, p. 95.

Apresentado anteriormente como hamiltoniano, o jogo *Icosain Game* foi obtido por meio de uma realização planar de um dodecaedro, conforme Malta (2008). Um problema de planaridade bem conhecido, de acordo com Conte (2003) e Malta (2008), é o da distribuição de três utilidades, como água, luz e telefone, a três casas sem que as ligações se cruzem. Conte (2003) afirma ser impossível construir um grafo planar deste problema (Figura 7).

Figura 7 – Grafo do problema e falha de realização planar



Fonte: Elaboração própria.

A planaridade também está presente no Problema das Quatro Cores, referente à coloração de mapas, pois segundo Malta (2008) qualquer mapa é passível de ser transformado em um grafo planar. Conte (2003) e Malta (2008) asseguram que há muito tempo os cartógrafos já conjecturavam ser possível colorir qualquer mapa com apenas quatro cores.

De acordo com Conte (2003), data de 1852 o primeiro registro do problema, quando Augusto de Morgan enviou uma carta a Sir. Willian Hamilton informando o conhecimento desse problema por meio de um aluno seu, Frederik Guthrie.

Explicitando-o, Malta (2008) diz que tomando as regiões de um mapa como vértices de um grafo e as fronteiras como arestas, colori-los é o mesmo que colorir grafos planares, isto é, atribuir cores aos vértices de modo que dois vértices adjacentes tenham sempre cores diferentes.

Uma demonstração havia sido dada por Kempe, em 1879, mas uma falha sutil foi percebida por Heawood, que acabou por invalidá-la onze anos depois (CONTE, 2003; JURKIEWICZ, 2009).

A transformação dessa conjectura em teorema só foi possível em 1976, após 1200 horas de processamento computacional. Logo, hoje é possível afirmar que todo mapa pode ser colorido com não mais que quatro cores (MALTA, 2008). Jurkiewicz (2009, p. 102) diz ainda que esta demonstração é considerada “a mais feia prova da matemática”.

Os grafos planares, conforme Malta (2008), têm importante aplicação em problemas modernos como: projetos de construção civil, projetos de tráfego e mobilidade urbana, circuitos impressos, desenho de redes de comunicação e distribuição de energia.

Outro problema digno de menção é o do Carteiro Chinês, que segundo Cardoso e Matos (2014) foi proposto pela primeira vez em 1962, pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan, que é basicamente um grafo euleriano com arestas valoradas (distância, tempo de percurso, custo, etc.).

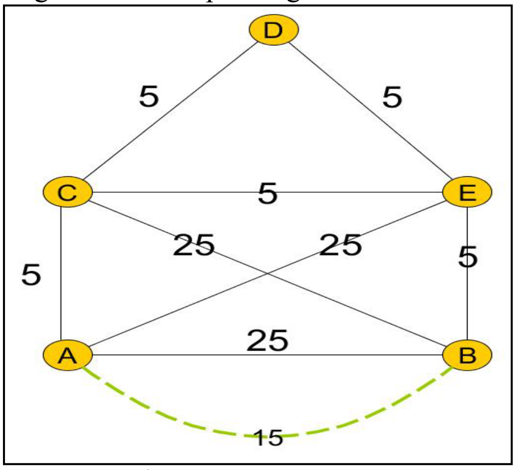
Jurkiewicz (2009) diz que o problema consiste em um carteiro percorrer todas as ruas de uma cidade, com esforço mínimo, voltando ao local de origem. Segue afirmando que se o grafo é euleriano, então não há o que solucionar, mas se é de outro tipo, tem-se que “eulerizá-lo”, e é aí que reside o verdadeiro problema.

Cardoso e Matos (2014) ressaltam que tornar euleriano significa unir os pares de arestas ímpares por uma fictícia. Jurkiewicz (2009) acrescenta que não serão construídas novas ruas, mas o carteiro percorrerá ruas repetidas de modo que o custo seja mínimo.

Lucchesi (1979) afirma que sua resolução data de 1973, por Edmonds e Jhonson. Jurkiewicz (2009), Gualandi (2012), e Cardoso e Matos (2014) asseguram que hoje, o recurso usado para o cálculo do menor caminho é o Algoritmo de Dijkstra.

Para exemplificar o problema, usaremos o grafo a seguir (Figura 8), em que as arestas A e B (ambas de grau ímpar) foram unidas por uma aresta, cujo custo é a menor distância entre esses vértices, no caso o percurso ACEB = 15.

Figura 8 – Exemplo de grafo “eulerizado”



Fonte: Cardoso; Matos, 2014, p. 14.

Diante de tantos tipos de grafos e problemas, optou-se neste trabalho monográfico pela utilização dos grafos eulerianos, pois sua caracterização é mais simples do que a dos hamiltonianos e a dos planares (e os problemas derivados de ambos). Assim, parece ser a escolha correta para o público-alvo que se pretende atingir.

No que diz respeito à caracterização dos grafos hamiltonianos, Malta (2008) aponta que não é tão simples quanto a dos eulerianos, para os quais basta analisar os graus dos vértices. Cardoso e Matos (2014) acrescentam que determinar se um grafo possui caminho ou ciclo euleriano é uma tarefa simples, enquanto que nos hamiltonianos é extremamente difícil.

Com relação à complexidade da caracterização dos grafos planares, Malta (2008) declara que além do modo geométrico, a caracterização faz uso de teoremas como o de Kuratowski, MacLane e Whitney, e indica a Dissertação de Mestrado de Noeli F. Conte (2013) como fonte mais didática e acessível sobre grafos planares.

1.1.2 Grafos na Educação Básica do Brasil

De acordo com Malta (2008), atualmente o desafio da escola não consiste na aprendizagem de todos os alunos, mas em torná-la mais significativa, proporcionando reflexão e entendimento da realidade que os cerca.

Ao encontro dessa ideia, Mesquita (2015) diz que os professores de Matemática devem dar condições aos alunos de pensar e construir significados acerca do que se estuda, explorando a aplicação dos conceitos aprendidos ao mundo real, rompendo com o ensinar por ensinar que privilegia memorizações.

Porém, a realidade do mundo contemporâneo, para Malta (2008), sofre rápidas mudanças. Por isso, sem deixar de lado o conhecimento historicamente construído pela humanidade, a escola deve estar atenta aos novos saberes, agregando-os às suas práticas.

A autora segue dizendo que muito se produz em Matemática, mas muito pouco é incorporado ao currículo da Educação Básica, pois a escola é resistente às novidades.

De acordo com Garcia (2012), o mundo globalizado em que vivemos, na era da informação e tecnologia, pede uma educação de melhor qualidade, o que implica em questionar o currículo escolar, que leva à inclusão de certos conteúdos e à exclusão de outros. Nesse sentido, Malta (2008) declara que se deve levar para o currículo uma Matemática recente, que reflita o mundo contemporâneo.

Malta (2008, p. XI) segue dizendo que "a Teoria de Grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica".

Gualandi (2012) corrobora essas ideias ao dizer que as situações do cotidiano podem ser representadas em linguagem natural ou por meio de um tipo de diagrama que é chamado de grafo. Portanto, o ensino de grafos pode ser uma ponte entre a Matemática da escola e a vida real, tornando a aprendizagem significativa, afetiva e cognitiva.

Pereira e Câmara (2008), Gualandi (2012) e Garcia (2012) destacam que situações que podem ser representadas por grafos estão em todo lugar, logo, problemas que os envolvem possuem importantes aplicações práticas. Bria (1998) acrescenta que sua utilização ocorre nos mais variados ramos do conhecimento. Química, Informática, Engenharia, Psicologia, Indústria, além da própria Matemática são alguns, exemplificados por Pereira e Câmara (2008).

Na Matemática, a Teoria dos Grafos, de acordo com Gualandi (2012) e Garcia (2012), tem conexões com Matrizes, Análise Combinatória e Geometria. Ambos os autores defendem que os grafos podem criar pontes entre conteúdos do currículo, que Garcia (2012) considera fragmentado.

Situações cotidianas em que a Teoria dos Grafos se aplica são ilustradas por Gualandi (2012): rotas de voos entre aeroportos, distribuição de gasolina em postos, rotas de viagens, caminhos entre cidades, rotas de ônibus, otimização de caminhos, custos mínimos de uma rota, entre outros. A esta lista, Cardoso e Matos (2014) acrescentam as linhas de transmissão de energia, construção de placas de circuitos elétricos, relações em redes sociais como o *Facebook*, sistemas de distribuição de água e algoritmos usados em GPS[4].

[4]*Global Positioning System*, traduzido para o Português como Sistema de Posicionamento Global.

Além de todos os benefícios que a Teoria dos Grafos pode trazer para a Educação Matemática já citados, existem outros:

- É simples e interessante o conceito de grafo (BRIA, 1998);
- A Teoria dos Grafos aborda problemas sobre situações curiosas e interessantes (MESQUITA, 2015);
- Os problemas da Teoria dos Grafos podem ser resolvidos sem a necessidade de quaisquer conhecimentos matemáticos prévios (MALTA, 2008; GUALANDI, 2012).

Garcia (2012) declara que os grafos são uma teoria matemática recente; e com tantos aspectos positivos, muitas pesquisas apontam para sua inserção no Ensino Médio, de acordo com Gualandi (2012) e Sá e Silva (2013).

Nesse sentido, Malta (2008) prega que alunos do Ensino Médio devem conhecer os problemas históricos que originaram a Teoria dos Grafos.

Gualandi (2012) defende que essa Teoria pode ser ensinada no Ensino Médio para que os alunos aprendam a resolver problemas e tomar decisões, desenvolvendo sua autonomia. Já Bria (1998, p. 2), versa sobre a indiscutível viabilidade e oportunidade da inclusão dos grafos tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Fundamental, dados

> - a enorme abrangência de possibilidades de aplicação dos grafos [...].
> - a extrema facilidade com que inúmeras situações reais de nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante accessível [sic] aos estudantes de 1º/2º graus, em função da série ou segmento em que sejam trabalhadas.
> - o inegável ‘potencial de competência’ dessas aplicações/exemplos para aumentarem o poder de sedução da Matemática sobre nossos estudantes, notadamente àqueles que não possuam grandes afinidades com a mesma.
> - a natural associação (mas de abordagem opcional!) dos grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico, visto que naturalmente, em nosso cotidiano, movimentamo-nos muito ‘de forma algorítmica’ sem nos darmos conta disso – o leitor iniciante terá oportunidade de melhor entendê-lo em comentário mais adiante.
> - a grande flexibilidade característica do estudo dos grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas distintas, em função da ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou mais estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas, associando-os diretamente ao uso do computador ou não…

Além disso, documentos oficiais como os PCNEM trazem orientações para o ensino de conhecimentos práticos:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (BRASIL, 2000, p. 6).

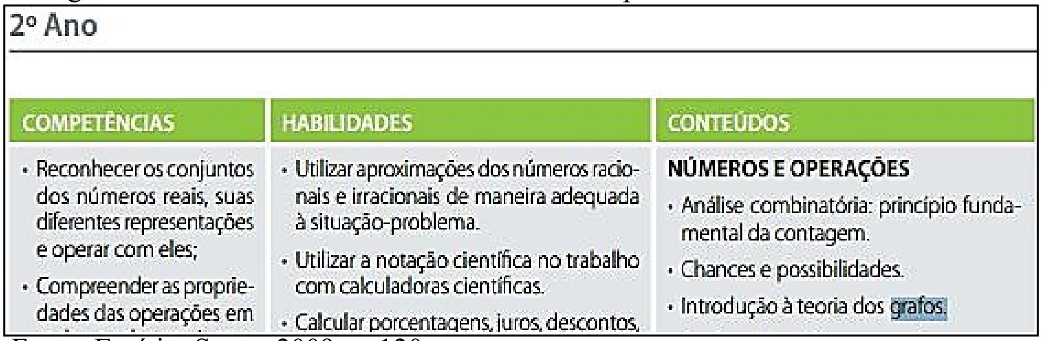
Sobre essa orientação, Malta (2008) diz que são perceptíveis as recomendações para que novos temas sejam incluídos no Ensino Médio.

Já as OCEM (2006) trazem claramente sugestões para a inclusão da Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

> No ensino médio, o termo 'combinatória' está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: 'Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?' Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94).

Gualandi (2012) menciona o Espírito Santo como exemplo por ter adotado os grafos em seu Currículo Básico da Escola Estadual (Figuras 9 e 10).

Figura 9 – Currículo das escolas estaduais do ES para a 2ª. série do Ensino Médio

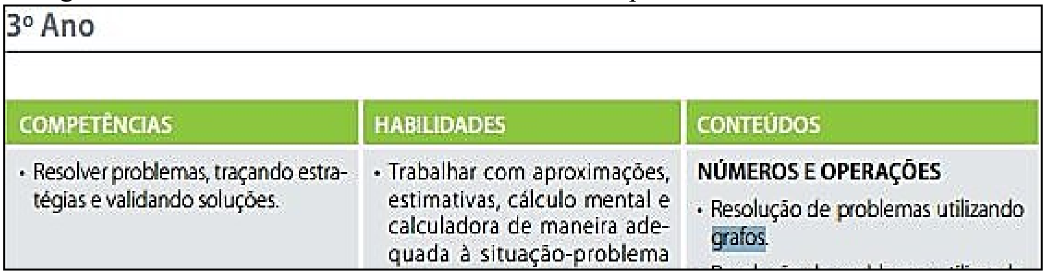


2º Ano

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Reconhecer os conjuntos dos números reais, suas diferentes representações e operar com eles; • Compreender as propriedades das operações em	• Utilizar aproximações dos números racionais e irracionais de maneira adequada à situação-problema. • Utilizar a notação científica no trabalho com calculadoras científicas. • Calcular porcentagens, juros, descontos,	**NÚMEROS E OPERAÇÕES** • Análise combinatória: princípio fundamental da contagem. • Chances e possibilidades. • Introdução à teoria dos grafos.

Fonte: Espírito Santo, 2009, p. 120.

Figura 10 – Currículo das escolas estaduais do ES para a 3ª. série do Ensino Médio



3º Ano

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Resolver problemas, traçando estratégias e validando soluções.	• Trabalhar com aproximações, estimativas, cálculo mental e calculadora de maneira adequada à situação-problema	**NÚMEROS E OPERAÇÕES** • Resolução de problemas utilizando grafos.

Fonte: Espírito Santo, 2009, p. 122.

Observa-se que nas escolas estaduais do Espírito Santo há a introdução à Teoria dos Grafos na 2ª. série do Ensino Médio e a resolução de problemas a partir da Teoria dos Grafos na 3ª. série do Ensino Médio. Essa metodologia será discutida na próxima seção.

1.2 Resolução de Problemas

A forma como se ensina e como se aprende Matemática sofreu mudanças com o passar dos anos. Na sociedade rural, saber Matemática não era necessário a todos. Entretanto, em uma sociedade industrial, devido à necessidade de mão de obra especializada, mais pessoas precisavam aprendê-la. Em seguida, em uma sociedade de informação, a maior parte das pessoas precisava saber Matemática. Já agora, no caminho para uma sociedade do conhecimento, há uma exigência de que todos saibam muita Matemática (ONUCHIC, 1999).

Lambdin e Walcott (2007 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) basearam-se nas escolas americanas e destacaram, no período do século XX até os dias atuais, que o ensino de Matemática passou por seis fases com ênfases diferentes, a saber: i) exercício e prática; ii) aritmética significativa; iii) Matemática Moderna; iv) volta às bases; v) Resolução de Problemas; e vi) padrões e responsabilidade (Quadro 1).

Quadro 1 – Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Exercício e prática (aprox. 1920 – 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo.	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos.
Aritmética significativa (aprox. 1930 – 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da Matemática em problemas do mundo real.	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 – 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex: Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina.	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta.
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de Problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através da resolução de problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL[5])	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	• NSF[6] – desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados aos estudantes vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Onuchic; Allevato, 2011, p. 77[7].

Observando o Quadro 1, é possível perceber que cada fase traz novas práticas e abordagens com relação à Educação Matemática. No início do século XX, o ensino de Matemática tinha como característica a repetição, com foco na memorização, que era considerada muito importante. Anos depois, sob outra orientação, o ensino passou a ser com

[5]NCLB – No Child Left Behind Act – Nenhuma Criança Ficará para Trás
[6]NSF – National Science Foundation – Fundação Nacional de Ciência
[7]Tradução por Lambdin e Walcott (2007, p. 5).

base na compreensão de ideias. Foi nessa época que começou a discussão sobre resolver problemas como um meio para aprender Matemática (ONUCHIC, 1999).

A partir de Polya (1944), a pesquisa sobre Resolução de Problemas e iniciativas acerca da possibilidade de ser uma maneira de ensinar Matemática começaram a receber atenção. A preocupação de Polya era encontrar um modo de resolver problemas e descobrir como ensinar métodos que auxiliassem tais resoluções. Vale ressaltar que, de acordo com o Quadro 1, este trabalho estava inserido no período em que o foco do ensino de Matemática era a aritmética significativa, voltada para a utilização da Matemática em situações do mundo real (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Assim, não se pode falar sobre Resolução de Problemas sem citar George Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas. No livro "*How to Solve it*", escrito em 1945 (traduzido para o português em 1978, por Heitor Lisboa de Araújo com o nome de "A Arte de Resolver Problemas"), Polya (2006) propõe quatro fases de trabalho. São elas: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução do plano; e iv) retrospecto.

O movimento da Matemática Moderna, que ocorreu nas décadas de 1960 e 1970, era tal que a Matemática deveria ser pautada nas estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, dando ênfase à Teoria dos Conjuntos. Entretanto, alguns fatores como o despreparo dos professores, a falta de engajamento dos pais de alunos e, ainda, o tratamento excessivamente abstrato, levaram o movimento ao fracasso (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

A fase "volta às bases" ocorreu nos Estados Unidos com o propósito de retomar as práticas que antecederam as do movimento da Matemática Moderna. Entretanto, não teve continuidade nem adesão de outros países (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Foi então que, na década de 1970, os educadores matemáticos começaram a compreender que desenvolver a habilidade de resolver problemas merecia importância. Deste modo, a Resolução de Problemas, no final dessa década, emergiu e ganhou espaço no mundo inteiro (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Nos Estados Unidos, em 1980, uma publicação do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) chamada *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*, buscava melhorar a Educação Matemática e queria contar com todas as pessoas interessadas em que isso acontecesse (ONUCHIC, 1999). O documento propunha que a Resolução de Problemas fosse o foco da matemática escolar, voltada para sua aplicação no mundo real (ONUCHIC, et al., 2014).

> Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

No Brasil, somente no final da década de 1990 houve a renovação das orientações curriculares e a Resolução de Problemas foi recomendada como uma metodologia para o ensino da Matemática (ONUCHIC, et al., 2014).

Para Gualandi (2012), a Resolução de Problemas é o ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da Matemática, uma vez que é vista como uma importante estratégia de ensino.

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança [sic] e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p. 52).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN+EM (BRASIL, 2002, p. 112) apontam que é esperado do aluno que "[...] seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em Matemática". Também afirmam que os desafios a serem propostos devem fazer sentido e serem reais. Onuchic (1999, p. 204) já defendia esta ideia, afirmando que "Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) destacam que a História da Matemática mostra que a Resolução de Problemas foi construída a partir de perguntas que surgiram de necessidades encontradas, como divisão de terras, cálculo de créditos, etc. Ressaltam, também, que a concepção de ensino e aprendizagem não está focada na simples reprodução de conhecimentos, mas visa a construção dos mesmos.

Contudo, problemas matemáticos, fundamentais no ensino da Matemática, não têm exercido esse papel. Na sala de aula, o trabalho é desenvolvido por meio de exercícios repetitivos, com procedimentos padronizados e previsíveis, tanto pelos alunos, como pelo professor (SILVA; CASTRO FILHO, 2004). De um modo geral, esses problemas visam a fixação dos conteúdos estudados. Existem certas características que aparecem em diversos exercícios, seguindo um padrão a ser utilizado para resolver problemas similares (MEDEIROS, 2001). Os PCN+EM (BRASIL, 2002) assinalam a importância da Resolução de Problemas no ensino da Matemática, que vai contra os métodos padronizados.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002, p. 112).

Schroeder & Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999) apontam três maneiras diferentes de abordar a Resolução de Problemas: i) ensinar sobre Resolução de Problemas; ii) ensinar a resolver problemas; e iii) ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.

Na primeira maneira, ocorre que "[...] seguidores de Polya, com algumas variações, acreditavam em teorizar *sobre* esse tema, ou seja, que era necessário ensinar estratégias e métodos para resolver problemas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 79 – grifo das autoras).

A segunda está voltada para a forma como a Matemática é ensinada, ou seja, mostra--se, primeiramente, a Matemática formal para, em seguida, apresentar aos alunos um problema como aplicação do conteúdo ensinado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Para Allevato e Onuchic (2009), a ideia principal para aprender Matemática era poder utilizá-la. Schroeder e Lester (1989 apud RIBEIRO, 2010, p. 123) ressaltam que "[...] o grande risco dessa abordagem é o de se considerar a resolução de problemas como uma atividade que só pode ser realizada depois da transmissão de um novo conceito ou do treino de alguma habilidade de cálculo ou algoritmo".

A terceira maneira constrói novos conceitos e conteúdos a partir de um problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011), sendo considerada como uma metodologia de ensino em que o problema é tido como o ponto de partida para ensinar novos conceitos e novos conteúdos matemáticos (ONUCHIC, et al., 2014). Para Schroeder e Lester (1989 apud SOUZA; NUNES, 2007), dessa forma, o ensino está centrado no aluno e o mesmo é o responsável pela construção dos conceitos matemáticos ao longo da resolução de um problema, sendo, em seguida, formalizados pelo professor. Este é, portanto, apenas mediador durante o processo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Onuchic (1999, p. 207) ressalta que

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis.

O problema é encarado como um elemento que pode dar início a um processo de construção do conhecimento (SCHROEDER; LESTER, 1989 apud SOUZA; NUNES, 2007). Esse problema precisa ser apropriado para o desenvolvimento de um novo conteúdo ou conceito e os alunos precisam estar responsáveis pela maior parte da aprendizagem que almejam conseguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Ribeiro (2010, p. 125 – grifo do autor) afirma que essa terceira maneira de trabalhar a Resolução de Problemas "[...] não exclui as demais concepções, pois, ao adotar tal metodologia, os alunos aprendem tanto *sobre* resolução de problemas, como conhecer matemática *para* resolver novos problemas *através da resolução de problemas*".

Atualmente, segundo Ribeiro (2010), o processo de ensino e aprendizagem da Matemática tem o foco na compreensão, interpretação e resolução de situações-problema, assim o aluno tem a possibilidade de: i) reorganizar e desenvolver os seus conhecimentos; ii) rever e ampliar conceitos, ideias e métodos matemáticos; iii) buscar caminhos e estratégias próprias de resolução; iv) desenvolver o interesse pela disciplina; e v) construir sua autonomia.

O autor afirma ainda que

> Quando se utiliza a resolução de problemas para a apreensão, construção e entendimento dos conteúdos matemáticos, encara-se esse conhecimento em elaboração e não como pronto e acabado. Isso significa aprender por meio de ações refletidas, suposições e aproximações e não apenas pela reprodução, automatização e memorização. (RIBEIRO, 2010, p. 118).

Conforme Dante (2009), um dos princípios que resumem a proposta da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino é o fato de serem feitas aproximações sucessivas a um determinado conceito e, então, em um outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu na resolução de um novo problema. Dessa maneira, exigem do aluno transferências, retificações e rupturas, analogamente ao que se pode observar na história da Matemática.

Alguns autores têm buscado uma melhor maneira de colocar em prática essa metodologia e a sugestão mais atual, proposta por Onuchic et al. (2014), para desenvolver esse trabalho em sala de aula consiste em dez etapas: i) proposição do problema; ii) leitura individual; iii) leitura em conjunto; iv) resolução de problemas; v) observar e incentivar; vi) registro das resoluções na lousa; vii) plenária; viii) busca do consenso; ix) formalização do conteúdo; e x) proposição e resolução de novos problemas. Cabe destacar, entretanto, que não há um modo único de se trabalhar por meio da Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Na primeira etapa, o professor deve selecionar ou elaborar um problema, ou, ainda, receber um problema proposto pelos próprios alunos (ALLEVATO, 2014). Esse problema é chamado de problema gerador, pois visa a construção de um novo conceito, conteúdo ou procedimento. Ressalta-se que esse conteúdo matemático ainda não foi apresentado em sala de aula, mas é necessário para a resolução do problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Em seguida, após receber o problema, cabe ao aluno realizar a leitura individualmente para que, assim, seja possível refletir e construir sua própria compreensão do mesmo (segunda etapa). A turma, então, separa-se em pequenos grupos que fazem a leitura novamente (terceira etapa), discutindo entre si (ONUCHIC, et al., 2014). Caso haja complicação durante a leitura, o professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema para todos. Se a dificuldade apresentada for por alguma palavra desconhecida, surge, então, um problema secundário e o professor deve buscar uma maneira de esclarecê-la, podendo consultar um dicionário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Na quarta etapa sugerida, que parte do entendimento do problema proposto, os alunos começam a resolvê-lo. Divididos em grupos, tentam resolver o problema gerador que os levará a construção de um determinado conhecimento, que foi planejado pelo professor para aquela aula. Enquanto isso, o professor observa o desenvolvimento do trabalho e incentiva os discentes a utilizarem seus conhecimentos prévios e trocarem ideias uns com os outros (quinta etapa). Também ajuda nas dúvidas que surgirem, mas sem dar respostas prontas. Deve demonstrar que confia nas habilidades dos alunos (ONUCHIC, et al., 2014).

Representantes de cada grupo são chamados, na sexta etapa, para registrarem suas soluções no quadro, sejam essas certas, erradas ou feitas por maneiras diferentes. O importante é que todas sejam expostas para que os alunos possam analisar e discutir cada resposta. Na etapa seguinte, o professor apresenta-se como mediador das discussões enquanto os alunos defendem suas opiniões e esclarecem suas dúvidas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

> Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo. (ONUCHIC, et al., 2014, p. 46).

Na penúltima etapa, a formalização do conteúdo é feita pelo professor, que expõe no quadro uma apresentação organizada e estruturada em linguagem matemática. Os conceitos são padronizados, os princípios e os procedimentos são construídos por meio da resolução do problema e é feito o destaque para as diferentes técnicas operatórias e, caso necessário, demonstrações acerca do assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Por fim, são apresentados outros problemas relacionados ao problema gerador, que têm o propósito de: i) analisar se os conceitos fundamentais apresentados na aula foram internalizados; ii) consolidar os conhecimentos construídos nas etapas anteriores; e iii) aprofundar e ampliar as conclusões sobre o conteúdo ou tópico matemático proposto. Dessa forma, um ciclo é gerado: construir novos conhecimentos e, em seguida, resolver esses problemas; e assim sucessivamente (ONUCHIC, et al., 2014).

Após a análise dos três modos de abordar a Resolução de Problemas, levando-se em consideração a importância dessa metodologia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, optou-se por utilizar a terceira maneira apresentada nesta seção.

Onuchic e Allevato (2011) ressaltam que existem muitas visões diferentes de problemas e, ainda, que muitos falam em utilizá-los para ensinar Matemática, entretanto, não têm um claro entendimento do que seja. Para as autoras, um problema é tudo o que não se sabe fazer, mas se tem interesse em fazer.

Segundo Van de Walle (2001 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81), "[...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”.

Para Vila e Callejo (2006 apud SILVA, 2012, p. 25) um problema

> [...] não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem

> que forme sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas.

Segundo Lester (1982 apud DANTE, 2009, p. 12), "problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução".

Para Polya (2006), um problema precisa ser escolhido com cuidado, deve despertar o interesse do aluno e apresentar um nível de dificuldade de acordo com o da turma. O autor afirma que é tolice responder algo que não tenha sido compreendido ou trabalhar para um fim que não era o desejado. Dessa maneira, é preciso que o enunciado do problema fique claro e possibilite ao aluno compreender seu objetivo, ou seja, o que se deseja alcançar.

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução. (POLYA, 2006, p. 4).

Segundo Onuchic et al. (2014), confirma-se a relevância da Resolução de Problemas em trabalhos desenvolvidos em sala de aula e que envolvam a Matemática. As autoras ainda afirmam que é visível o fato de que esta metodologia permanece presente, seja de maneira explícita ou implícita, levando-nos a acreditar "[...] na importância de compreensões mais profundas sobre suas implicações e formas de implementação em sala de aula de Matemática" (ONUCHIC, et al., 2014, p. 42).

Algumas ideias, sobre a Resolução de Problemas, de Van de Walle e outros autores foram reunidas e compiladas por Onuchic e Allevato (2011, p. 82) em 2004. Destacam-se as vantagens na utilização dessa metodologia, que são: i) coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido; ii) desenvolve poder matemático nos estudantes, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em problemas distintos, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos; iii) desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido – a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam; e iv) fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a Matemática.

Os professores que adotam essa metodologia de ensino sentem-se cativados e não querem ensinar novamente na forma dita tradicional; há uma gratidão quando percebem que os alunos compreenderam os conceitos por seus próprios raciocínios e que estes conceitos fazem mais sentido quando desenvolvidos dessa maneira (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

É importante retomar que, nesta metodologia, os problemas devem ser propostos aos alunos antes que o conteúdo matemático necessário, ou mais adequado para a resolução, seja formalmente apresentado. Dessa maneira, o trabalho é iniciado com um problema que contenha aspectos importantes de determinado tema e, em seguida, procedimentos matemáticos devem ser desenvolvidos durante a procura de soluções coerentes com o problema proposto (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). Este, segundo Soares e Pinto (2001), demandaria reflexão, questionamentos e tomada de decisões.

Além dos aspectos abordados sobre Resolução de Problemas e Teoria dos Grafos, outros, que também foram analisados e estão relacionados ao presente trabalho, são ressaltados por meio dos estudos descritos na próxima seção.

1.3 Estudos Relacionados

Nesta seção são apresentados três trabalhos relacionados à presente monografia, escolhidos por sua similaridade com a pesquisa a ser desenvolvida. Foram analisados os trabalhos de Costa (2013), Gualandi (2012) e Malta (2008). Cabe destacar que em cada subseção, apenas uma obra de cada autor é retratada.

1.3.1 Matemática Discreta no Ensino Médio: um trabalho com grafos eulerianos

O trabalho proposto por Christine Sertã da Costa, Relatório de Pesquisa em Engenharia de Produção, publicado no ano de 2013, intitulado "Matemática Discreta no Ensino Médio: um trabalho com grafos eulerianos", teve como objetivo promover o primeiro contato dos alunos – sujeitos da pesquisa – com a Teoria dos Grafos Eulerianos (COSTA, 2013).

O projeto desenvolvido pela autora foi aplicado em três etapas para alunos da 1ª. série do Ensino Médio do Colégio Pedro II, unidade Humaitá II. A primeira etapa, com o intuito de motivar o público-alvo, trata do caso *Count Van Diamond*, abordado com algumas adaptações.

Na segunda etapa, a autora relata a introdução dos conceitos da Teoria dos Grafos Eulerianos e a solução do problema baseado nesta Teoria, afirmando que os alunos conseguiram naturalmente chegar às conclusões do problema inicial, conforme os novos conceitos propostos.

Na terceira etapa, foi pedido aos alunos que avaliassem o trabalho proposto. Após a análise, a autora pode perceber que os comentários foram bastante positivos e destacou alguns: i) o problema inicial ter como base a elucidação de um crime foi elemento fundamental para gerar o interesse do público-alvo, afirmando que gostariam de um problema com mais suspeitos para que fosse mais difícil; ii) a compreensão do conteúdo e a facilidade de resolução de outros problemas propostos a partir da nova Teoria; iii) a importância de se apresentar um problema de maneira interessante também foi algo ressaltado pelos alunos, sujeitos da intervenção didática; e iv) a curiosidade que é gerada ao abordar temas que não usam contas nem fórmulas.

O projeto teve como metodologia de ensino a Modelagem Matemática, as atividades têm como base problemas contextualizados. Não foi explicitada a metodologia de pesquisa utilizada no projeto.

Em seguida, a autora apresenta outros problemas que podem ser aplicados e suas Considerações Finais. Segundo a mesma, os resultados foram satisfatórios e pode-se verificar que o tema favoreceu o raciocínio e despertou o interesse dos alunos.

Os pontos comuns com esta pesquisa são: o público-alvo, pois também é voltada para o Ensino Médio, especificamente, para a 2ª. série; o problema inicial – o caso *Count van Diamond* – que nos serviu de inspiração, e as atividades com foco em problemas contextualizados. A principal diferença é a não utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

1.3.2 Investigações Matemáticas com grafos para o Ensino Médio

Outro trabalho relacionado é a dissertação de mestrado de Jorge Henrique Gualandi, defendida em 2012, cujo título é "Investigações Matemáticas com grafos para o Ensino Médio", tendo por objetivo: investigar abordagens metodológicas que podem contribuir para uma introdução do conteúdo de grafos na Educação Básica, 3ª. série do Ensino Médio, de forma a integrar os conteúdos de matrizes e análise combinatória (GUALANDI, 2012).

Foi realizado na escola Jesus Cristo Rei, confessional católica da rede privada do município de Cachoeiro de Itapemirim-ES. Essa escolha foi motivada pelo fato de que o estado contempla a Teoria dos Grafos no Currículo Básico da Escola Estadual.

A metodologia de pesquisa usada foi a Engenharia Didática de Michele Artigue. Já as metodologias de ensino utilizadas foram a Resolução de Problemas de George Polya em conjunto com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e as Atividades de Investigação de João Pedro da Ponte.

Quanto à aplicação, foi feita em quatro etapas iniciais, nas quais foram desenvolvidas quatro listas de atividades de forma investigativa, em duas aulas de cinquenta minutos cada. A última etapa constou de uma avaliação do trabalho desenvolvido e socialização de ideias acerca do tema. Gualandi (2012) priorizou situações cotidianas em que a Teoria dos Grafos se relaciona com outros conteúdos matemáticos.

O autor considera que os objetivos foram alcançados e que os alunos responderam de forma positiva à intervenção pedagógica proposta, sempre empenhados em investigar, argumentar e discutir as soluções. Porém, relata que o tempo foi curto para que os alunos internalizassem os conceitos trazidos pela Teoria dos Grafos e também para um melhor aprofundamento das discussões.

Os pontos em comum com este trabalho monográfico são: mesmo nível de ensino; a metodologia de ensino que é a Resolução de Problemas; a delimitação do tema, abordando apenas os grafos eulerianos; e a aplicação envolvendo assuntos contextualizados.

A principal diferença encontrada foi quanto à abordagem, pois enquanto Gualandi (2012) relaciona a Teoria dos Grafos com outros conceitos matemáticos, nesta proposta o conceito de grafo se encerra nele mesmo, sem inter-relações com outros temas da Matemática.

1.3.3 Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível

Gláucia Helena Sarmento Malta é a autora deste trabalho relacionado, cujo título é “Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível”. Esta dissertação de mestrado trouxe dois objetivos gerais: i) apresentar uma proposta de inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio; e ii) apresentar a Resolução de Problemas como a perspectiva metodológica para que tal inserção seja feita (MALTA, 2008).

Como metodologia de ensino foi utilizada a Resolução de Problemas. Malta (2008) realizou sua pesquisa em uma escola particular de Porto Alegre. O Centro de Ensino Médio (C.E.M.) Pastor Dohms faz parte da Rede Sinodal de Educação. Participaram do "Projeto Teoria de Grafos no Ensino Médio" duas turmas de 2ª. série do Ensino Médio da Unidade Higienópolis do C.E.M. Pastor Dohms no ano de 2006.

A aplicação foi dividida em seis encontros, cada um tendo a duração de cinquenta e cinco minutos. De uma forma geral, foram tratados os seguintes assuntos: a parte histórica, os caminhos eulerianos, os conceitos importantes da Teoria dos Grafos, os grafos e a representação matricial, os caminhos hamiltonianos, coloração e um encontro específico para a avaliação.

Para Malta (2008), a proposta implementada em seu projeto foi significativa. O objetivo inicial de tratar o assunto grafos partindo dos problemas históricos foi possível e de fácil compreensão por parte dos dois grupos envolvidos. A autora destacou a importância da Teoria dos Grafos levantando problemas contemporâneos (rotas, coletas, entregas). Ela considera que a experiência foi significativa e que os objetivos iniciais foram plenamente atingidos. Por fim, conclui que a Teoria dos Grafos é um assunto que pode ser inserido no Ensino Médio.

Os pontos em comum com esta pesquisa são: mesmo nível de ensino; a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e a aplicação, que também aborda a história da Teoria. Como ponto divergente, pode-se citar a aplicação envolvendo, além dos grafos eulerianos, os grafos hamiltonianos e os grafos planares, que não serão tratados na experimentação deste trabalho monográfico.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentadas a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho monográfico e também a descrição da elaboração da sequência didática.

Esta pesquisa possui caráter qualitativo e foi desenvolvida por meio de um estudo de caso com alunos da 2ª. série do Ensino Médio de uma instituição pública de Campos dos Goytacazes. A opção por este nível de ensino vai ao encontro das ideias de Bria (1998), Malta (2008) e Gualandi (2012) apresentadas no capítulo anterior, além de seguir as orientações das OCEM (BRASIL, 2006).

2.1 Caracterização da Pesquisa

Este trabalho monográfico tem a seguinte questão de pesquisa: **Qual a percepção de alunos, do Ensino Médio, a respeito da aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas?** Para responder tal questionamento, optou-se por realizar uma pesquisa qualitativa utilizando o estudo de caso como método de pesquisa.

A pesquisa qualitativa é amplamente utilizada em trabalhos de cunho educacional, com destaque para sua eficácia. Nesse sentido, Allevato (2008, p. 184) afirma que "a ênfase qualitativa no processo vem sendo apontada como particularmente útil e adequada a pesquisas educacionais".

Para Oliveira (2010, p. 37), uma pesquisa de caráter qualitativo é "um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação". O objeto de estudo do presente trabalho é a Teoria dos Grafos Eulerianos.

O método de pesquisa utilizado neste trabalho monográfico, o estudo de caso, segundo Ponte (2006, p. 8), "[...] pode ter profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias já existentes". Esse método, para este autor,

> [...] visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o 'como' e os 'porquês' dessa entidade, evidenciando a sua

> identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. (PONTE, 2006, p. 2).

Yin (2010) afirma que o estudo de caso deve ocorrer no ambiente natural do caso analisado e que, dessa forma, é possível fazer observações para coletar os dados da pesquisa. Essa coleta “[...] não é, simplesmente, uma questão de *registro* de dados de modo mecânico, como em alguns outros tipos de pesquisa” (YIN, 2010, p. 97 – grifo do autor). O mesmo complementa que é preciso que o pesquisador seja capaz de interpretar a informação conforme esta é coletada. Existem diversos instrumentos para realizar a coleta de dados. Nesta pesquisa, foram utilizados: registros das respostas dadas pelos alunos, observação e questionários.

Quanto à observação, Creswell (2010, p. 214) afirma que “[...] são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa”. Um ponto forte desse instrumento de coleta de dados, destacado por Yin (2010), é o fato de cobrir o contexto do caso em tempo real. Como pontos fracos, têm-se a difícil cobertura sem uma equipe de observadores e a possibilidade da alteração do comportamento do caso por estar sendo observado.

Acerca dos questionários, Gil (2008, p. 121) define “[...] como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, teores, comportamentos presente ou passado etc”.

Goldenberg (2009) assinala algumas vantagens sobre a utilização do questionário. São elas: i) é menos dispendioso; ii) exige menor habilidade para a aplicação; e iii) pode ser aplicado a um grande número de pessoas ao mesmo tempo. Nascimento e Lassance (2004) complementam citando o direcionamento das respostas, a garantia de anonimato e a obtenção imediata dos dados.

Em relação às desvantagens, Gil (2008) aponta que: i) exclui as pessoas que não sabem ler e escrever; ii) não oferece a garantia de que a maioria das pessoas o devolvam devidamente preenchido, o que pode implicar a significativa diminuição da representatividade da amostra; e iii) proporciona resultados bastante críticos em relação à objetividade, pois os itens podem ter significados diferentes para cada sujeito pesquisado. Há, ainda, a possibilidade de respostas superficiais por parte dos respondentes (NASCIMENTO; LASSANCE, 2004).

O questionário pode apresentar questões abertas, que permitem ampla liberdade de resposta, ou fechadas, que são escolhidas de uma lista apresentada aos respondentes (GIL, 2008). Para Batista (2011), também existem as questões semiabertas, que solicitam comentários, além da opção marcada.

Para Moreira e Caleffe (2008), um questionário aberto dá aos respondentes a chance de escreverem suas preocupações pessoais. Em contrapartida, um questionário fechado os força a responderem dentro dos limites das respostas propostas. Nascimento e Lassance (2004) ressaltam que este modelo de questionário é bastante útil quando o objetivo é mensurar questões macrocontextuais, como sexo, idade, ocupação, nível de escolaridade, entre outras. Os mesmos autores afirmam que o questionário semiaberto (misto) é o mais adequado para complementar a captação de opiniões pessoais, além do aprofundamento qualitativo.

Dentre alguns cuidados para a elaboração, Gil (2008) aponta: i) a constatação de sua eficácia para verificação dos objetivos; ii) a determinação da forma e do conteúdo das questões; iii) a quantidade e ordenação das questões; iv) a construção das alternativas; e v) a apresentação do questionário.

Neste trabalho monográfico foram utilizados dois questionários: i) Questionário 1 (APÊNDICE A), que teve como objetivo traçar o perfil do público-alvo, contendo questões abertas, com exceção da última que é mista; e ii) Questionário 2 (APÊNDICE B), com uma questão mista e uma aberta, que tinha o propósito de captar a percepção dos alunos acerca da aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas.

A análise dos dados foi realizada segundo uma abordagem majoritariamente qualitativa, pois "trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis" (MINAYO, 2001, p. 14). De maneira sucinta, a análise dos dados não se prende à estatística, numerações ou medições de unidades (RICHARDSON, 1989).

Com base nos objetivos propostos, algumas etapas foram realizadas, quais sejam: i) elaboração das atividades que compõem a sequência didática; ii) elaboração dos questionários; iii) realização do teste exploratório; iv) análise dos dados coletados e modificação das atividades, se necessário; v) experimentação das atividades; e vi) análise das respostas dos alunos para verificar se os objetivos foram alcançados.

As etapas i e ii são descritas nas seções 2.2 e 2.3, respectivamente, e as demais, no Capítulo 3.

2.2 Elaboração da Sequência Didática

A sequência didática é composta pela Atividade 1 (APÊNDICE C), Apostila (APÊNDICE D) e Atividade 2 (APÊNDICE E) e questionários.

A Atividade 1 tem por objetivo investigar quais as estratégias de resolução adotadas pelos alunos para solucionar problemas simples, em um primeiro momento sem, e *a posteriori* com o conhecimento dos conceitos da Teoria dos Grafos Eulerianos.

O objetivo da Apostila é conceituar os grafos de maneira geral, e especificamente os grafos eulerianos, com seus elementos, características e classificações.

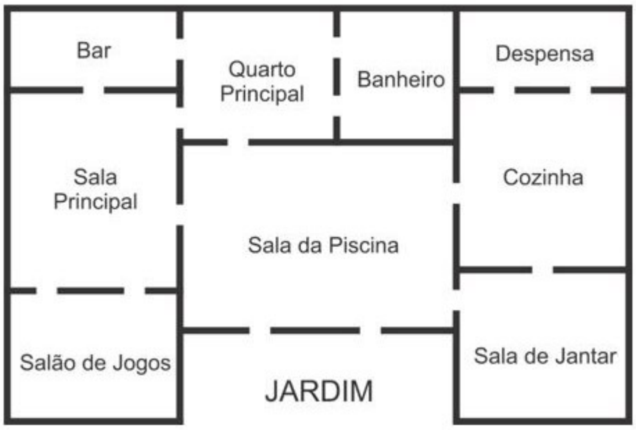
A Atividade 2 tem por objetivo investigar quais as estratégias de resolução adotadas pelos alunos em problemas contextualizados após seu contato com os conceitos da Teoria dos Grafos Eulerianos. Também pretende-se verificar se os alunos que optaram pelo uso da citada Teoria de fato apreenderam seus elementos essenciais.

2.2.1 Atividade 1

A Atividade 1 é composta por seis questões. A escolha de cada uma delas seguiu o crivo da Resolução de Problemas segundo George Polya (2006): problemas ao mesmo tempo não muito simples, nem muito complexos, naturais e interessantes.

A questão 1 (Figura 11) traz a planta de uma mansão, onde ocorreu um crime. Um detetive é chamado para tentar solucioná-lo. A tarefa dos alunos é tentar descobrir como o detetive apontou o culpado apenas analisando os depoimentos dos suspeitos (isso implica em analisar se o trajeto percorrido pelos suspeitos, dentro da mansão, na noite do crime, é plausível). Devem identificar também o motivo que torna o depoimento do culpado contraditório, apontando mudanças que poderiam ser feitas na mansão a fim de torná-lo válido.

Figura 11 – Parte da questão 1 da Atividade 1



Esta é a planta da mansão de Jeniffer Earspring, famosa cantora pop, que foi assassinada na sala da piscina. Chamado ao local, Xerlóque Rôlmes interrogou os empregados presentes no dia do crime. Eles prestaram os depoimentos descritos a seguir:

Fonte: Costa, 2013, p. 10. Adaptada pelos pesquisadores.

O objetivo da questão 1 é estimular a análise e investigação de situações, despertando o interesse dos alunos para o tema deste trabalho monográfico.

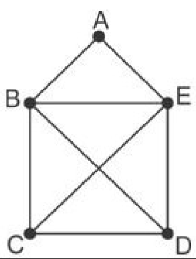
A questão 2 (Figura 12) é composta por seis itens, cada qual com um grafo (os pesquisadores tiveram o cuidado de não usar essa palavra na Atividade 1, nem algo que pudesse remeter ao tema, para que a resolução das questões ocorresse da maneira mais livre possível). A tarefa dos alunos é tentar percorrer todo o grafo sem retirar o lápis do papel, classificando-o segundo o caminho possível de ser realizado.

Figura 12 – Parte da Questão 2 da Atividade 1

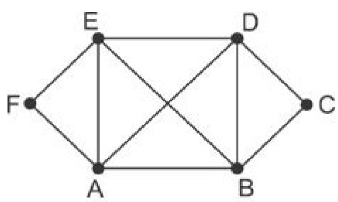
2) Ligue os pontos, passando por todas as linhas apenas uma vez e tente percorrer todo o caminho sem retirar o lápis do papel, classificando cada figura segundo as siglas:

– Caminho impossível (CI);
– Caminho possível com começo e fim no mesmo ponto (CPMP);
– Caminho possível com começo e fim em diferentes pontos (CPDP).

a)



b)



Fonte: Elaboração própria.

O objetivo desta questão é classificar os grafos eulerianos, ainda que de maneira intuitiva e com terminologia informal.

A quantidade de itens segue o critério de ter dois deles por categoria de classificação, e sua disposição foi escolhida de forma a não seguir padrões que pudessem induzir os alunos ao "chute".

A questão 3 (Figura 13) delega aos alunos a tarefa de modificar a classificação de um dos grafos da questão anterior desenhando-o com novas arestas ou vértices.

Figura 13 – Questão 3 da Atividade 1

> 3) Escolha uma das figuras da questão anterior e tente mudar sua classificação inserindo novas linhas e/ou novos pontos. Desenhe abaixo o que você pensou.

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo da questão 3 é perceber que a classificação das figuras (grafos) está, de alguma maneira, relacionada à sua quantidade de linhas (arestas) e pontos (vértices).

As questões 4, 5 e 6 (Figuras 14, 15 e 16, respectivamente) propõem aos alunos a tarefa de investigar os padrões que levam cada par de figuras às classificações que lhes foram dadas: caminho possível com começo e fim no mesmo ponto (CPMP), caminho possível com começo e fim em diferentes pontos (CPDP) e caminho impossível (CI).

Figura 14 – Questão 4 da Atividade 1

> 4) Analise os caminhos possíveis com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?
>
> ____

Fonte: Elaboração própria.

Figura 15 – Questão 5 da Atividade 1

> 5) Analise os caminhos possíveis com começo e fim em diferentes pontos (CPDP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?
>
> ____

Fonte: Elaboração própria.

Figura 16 – Questão 6 da Atividade 1

6) Analise os caminhos impossíveis (CI) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

____

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo dessas questões é perceber a condição necessária e suficiente para a classificação de cada tipo de grafo euleriano, ainda que de maneira intuitiva e experimental.

2.2.2 Apostila

A Apostila objetiva fazer um embasamento teórico acerca dos grafos eulerianos. A interatividade é uma forte característica sua, pois algumas informações foram omitidas, deixando a cargo dos alunos completar estas lacunas.

Inicialmente, a Apostila estabelece a definição de grafo, segue com a conceituação de seus elementos (arestas e vértices) e de "grau de um vértice". A cada conceito introduzido, são estabelecidas as notações matemáticas adequadas (Figura 17).

Figura 17 – Parte 1 da Apostila

A atividade anterior abordou figuras que na Matemática são chamadas de grafos. "Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos" (MALTA, 2008, p.13)[1].

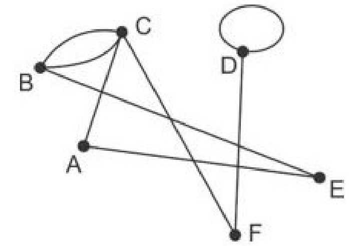
Os pontos dos grafos são chamados de vértices ou nós e os segmentos que os conectam, de arestas ou arcos. Dizemos que um grafo $G = (V, A)$ tem um número V de vértices e um número A de arestas. Os vértices serão representados por letras maiúsculas $(A, B, C, ...)$.

Chama-se grau de um vértice à quantidade de arestas ligadas a ele. Usaremos a notação $d(V) = n,\ n \in \mathbb{N}$ na qual n é essa quantidade de arestas. Observe o grafo $G = (6,9)$ a seguir:

Fonte: Elaboração própria.

Na sequência, são apresentados os conceitos de laço (e seus efeitos na atribuição do "grau do vértice") e de múltiplas arestas (Figura 18).

Figura 18 – Parte 2 da Apostila



Note que há uma aresta que parte de D e retorna a D. Chama-se laço uma aresta desse tipo, que é contada duplamente para fins de atribuição de grau. Note também que há duas arestas ligando B e C, por isso, percebe-se que não há limite quanto ao número de arestas conectando dois vértices. Temos então: $d(A)$ = ___, $d(B)$ = ___, $d(C)$ = ___, $d(D)$ = ___, $d(E)$ = ___ e $d(F)$ = ___

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, apresenta-se o tipo de caminho que se pode fazer quando o grafo é classificado como euleriano e a condição necessária e suficiente para isso, relacionando esta categoria de grafos com a CPMP, informalmente estipulada na Atividade 1 (Figura 19).

Figura 19 – Parte 3 da Apostila

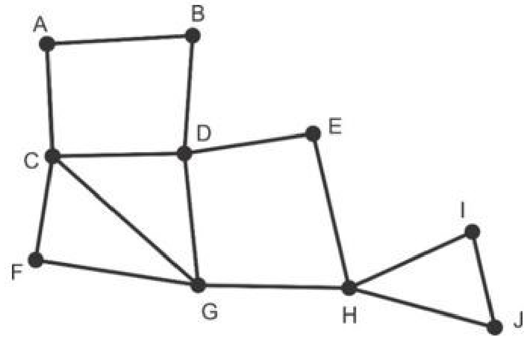
Denomina-se **grafo euleriano** (ou **caminho euleriano fechado**) aquele que possui um caminho com início e fim no mesmo vértice, passando por todas as arestas uma única vez. Na Atividade 1, os grafos que possuem caminho possível com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) são exemplos de grafos eulerianos. A condição necessária e suficiente para que tenhamos um grafo desse tipo é que todos os seus vértices tenham grau par.

Fonte: Elaboração própria.

Um exemplo de caminho euleriano é, então, dado, e dele é pedido o grau dos vértices bem como a indicação de um possível trajeto percorrido (Figura 20).

Figura 20 – Parte 4 da Apostila

Exemplo 1: Observe o caminho euleriano fechado a seguir.



Fonte: <https://is.gd/XXGoJs>

A-1) Dê o grau de cada um dos seus vértices.

B-1) Apresente um caminho do grafo euleriano.

Fonte: Elaboração própria.

A seguir é exposto o tipo de caminho que se pode fazer quando o grafo é classificado como semi-euleriano e a condição necessária e suficiente para isso, relacionando esta categoria de grafos com a CPDP, informalmente introduzida na Atividade 1 (Figura 21).

Figura 21 – Parte 5 da Apostila

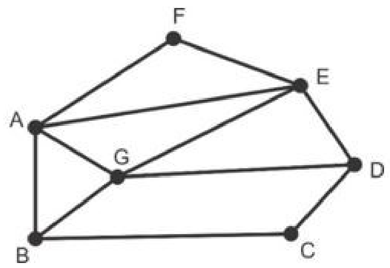
Denomina-se **grafo semi-euleriano** (ou **caminho euleriano aberto**) o grafo que possui um caminho com <u>início e fim em vértices diferentes</u>, passando por todas as arestas uma única vez. Na Atividade 1, os grafos que possuem caminho possível com começo e fim em diferentes pontos (CPDP) são exemplos de grafos semi-eulerianos. A condição necessária e suficiente para que tenhamos um grafo desse tipo é que este possua <u>exatamente dois vértices com grau ímpar</u>. Deve-se escolher <u>um dos vértices de grau ímpar como ponto de partida</u> e o caminho euleriano aberto terá <u>fim no outro vértice de grau ímpar</u>.

Fonte: Elaboração própria.

Um caminho semi-euleriano é em seguida exemplificado, e dele são requisitados o grau dos vértices e a indicação de um possível trajeto percorrido (Figura 22).

Figura 22 – Parte 6 da Apostila

Exemplo 2: Observe o caminho euleriano aberto a seguir.



A-2) Dê o grau de cada um dos seus vértices.

____

____

B-2) Apresente um caminho do grafo semi-euleriano.

____

Fonte: Elaboração própria.

Uma última classificação é apresentada: os grafos não eulerianos (Figura 23).

Figura 23 – Parte 7 da Apostila

Quando um grafo não é euleriano nem semi-euleriano, diz-se que é um **grafo não euleriano**.

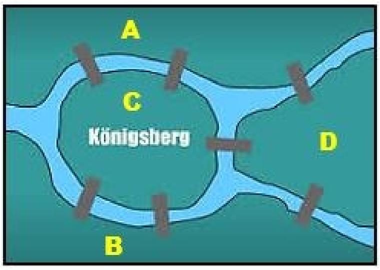
Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar, o Problema das Sete Pontes é brevemente descrito, e pede-se aos alunos que: i) representem a situação em forma de grafo; ii) relatem a conclusão de Euler; e iii) modifiquem a situação original para se obter um caminho euleriano fechado (Figura 24).

Figura 24 – Parte 8 da Apostila

A Teoria dos Grafos surgiu de um problema enviado em 1736 pelo prefeito da cidade russa de Königsberg (atual Kaliningrado) a um dos mais notórios matemáticos que já existiu: Leonhard Euler (1707-1783). Consta que na cidade havia sete pontes sobre o rio Pregel, que uniam quatro porções de terra e o problema consistia em percorrer cada uma dessas pontes uma única vez, retornando ao ponto de partida. Este episódio ficou conhecido como "o problema das sete pontes".

A-3) A figura abaixo ilustra a descrição. Represente-a em forma de grafo.



Fonte: <https://is.gd/i0v3cK>

B-3) A que conclusão Euler chegou?

____

____

C-3) Que modificações você faria no "problema das sete pontes" para que se obtenha um caminho euleriano fechado?

Fonte: Elaboração própria.

2.2.3 Atividade 2

A Atividade 2 é composta por cinco questões, além de um desafio. A escolha de cada uma adotou o mesmo princípio de escolha das questões da Atividade 1. Foram organizadas por ordem crescente de dificuldade.

A questão 1 (Figura 25) consiste na apresentação de uma rede de contatos, cujas relações são dadas em linguagem natural. Os alunos devem então organizá-la em forma de grafo, para responder qual contato é o mais popular e qual o menos popular.

Figura 25 – Questão 1 da Atividade 2

1) Tião (T), Horácio (H), Carlota (C) e Pablo (P), todos se conhecem. Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e também prima de Morena (M) – que namora Simão (S), a quem Carlota (C) ainda não foi apresentada. Simão (S) é amigo de Leocádio (L), e ambos conhecem Pablo (P), ex de Morena (M). Represente essas relações em forma de grafo e responda quem é o mais popular e o menos popular[1].

Fonte: Bria, 2004, p. 7. Adaptada pelos pesquisadores.

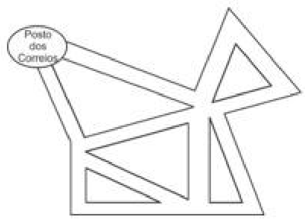
O objetivo dessa questão, embora não se trate de um problema de grafo euleriano, é familiarizar o aluno com problemas contextualizados envolvendo grafos.

A questão 2 (Figura 26) traz o mapa de uma rota que deverá ser seguida por um carteiro. Os alunos devem representar o mapa em forma de grafo e responder se o carteiro conseguirá percorrer um caminho euleriano fechado, indicando-o. Os vértices não foram explicitados na questão, com o intuito de deixar livre a representação em forma de grafo, já que a quantidade de vértices depende dos laços considerados no grafo. Em outras palavras, algumas ruas poderiam ser consideradas arestas ou laços.

Figura 26 – Parte da questão 2 da Atividade 2

2) Querendo otimizar seu tempo, o carteiro Melvin mapeou sua rota de entrega de correspondências e decidiu que, ao sair dos Correios, deverá passar por todas as ruas apenas uma vez, até retornar para seu posto[2].

a) Represente a figura em forma de grafo, nomeando os vértices à sua maneira.



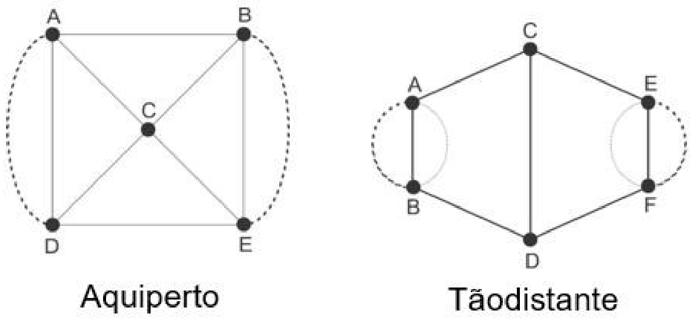
Fonte: Bria; Freitas, 2007, p. 80. Adaptada pelos pesquisadores.

O objetivo da questão 2 é construir um grafo euleriano e identificar o tipo de trajeto possível de ser percorrido neste tipo de grafo.

A questão 3 (Figura 27) traz mais uma contextualização envolvendo rotas. No caso, um gari deve limpar dois bairros distintos, sendo que a representação de um deles é um grafo euleriano e a do outro, um semi-euleriano. Com o intuito de caracterizar cada tipo de grafo, pede-se primeiramente o grau de cada vértice. A etapa seguinte é a caracterização de cada grafo, com a indicação de um possível trajeto.

Figura 27 – Parte da questão 3 da Atividade 2

3) Adamastor, gari dos bairros Aquiperto e Tãodistante, representados abaixo, concluiu que se percorresse apenas uma vez cada uma das vias que precisa limpar, retornando para o ponto onde começou, otimizaria seu trabalho. Os bairros estão representados abaixo e as vias que ele deve limpar são: ruas (representadas pelas arestas cheias); passarelas de pedestres (representadas pelas arestas tracejadas); e ciclovias (representadas pelas arestas pontilhadas). Sabendo que cada vértice é um ponto de encontro entre as vias, responda[3]:



Fonte: Costa, 2013, p. 17. Adaptada pelos pesquisadores.

O objetivo da questão é distinguir grafo euleriano de grafo semi-euleriano e identificar o tipo de trajeto possível de ser percorrido em cada um desses tipos de grafos.

Na questão 4 (Figura 28), apresenta-se a situação de um pintor que deve seguir certos critérios para pintar o prédio de um curso de idiomas. O percurso a ser feito configura um grafo semi-euleriano, no qual a “sala de aula” e o “acesso” têm graus ímpares.

Figura 28 – Parte da questão 4 da Atividade 2

4) Buanazonga foi contratado pelo curso de idiomas Pentabox Slimes para pintar todas as portas do prédio – cuja planta segue abaixo – seguindo os critérios[4]:

– Os dois lados de cada porta devem ser pintados;

– Após pintar um lado da porta, Buanazonga deve pintar imediatamente seu outro lado;

– Após pintar os dois lados da porta, ele deve trancá-la para que seque, não podendo, portanto, passar por ela novamente;

– Não passar por nenhuma porta sem antes pintá-la.

a) Represente a planta do curso Pentabox Slimes em forma de grafo.

Fonte: Pinheiro e Grebot, 2012, p. 5-7. Adaptada pelos pesquisadores.

A tarefa dos alunos consiste em representar a situação em forma de grafo, e dizer se o pintor irá conseguir pintar seguindo os critérios. Caso positivo, deve indicar onde o pintor deve começar e onde deve terminar, e caso haja caminho euleriano, de que tipo é. Deve-se destacar que apesar de, em um grafo semi-euleriano, o percurso poder começar por qualquer um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro, nesta questão em particular os alunos devem perceber que se o pintor começar pelo “acesso”, terminará na “sala de aula” e, pelos critérios, ficará preso.

O objetivo principal dessa questão é perceber que os grafos, quando aplicados a um contexto, podem sofrer restrições em seu número de soluções.

A questão 5 (Figura 29) consiste de um jogo de dominó incompleto, em que as possíveis combinações das peças apresentadas devem ser pensadas como um grafo. Pede-se que os alunos indiquem o grau de cada número (vértice), para perceberem se é possível colocar as peças na sequência do jogo e apontar se a situação é um caminho euleriano aberto ou fechado, justificando.

Figura 29 – Parte da questão 5 da Atividade 2

5) “Existem várias versões que tentam decifrar de onde veio o jogo, mas nenhuma delas até hoje pôde ser confirmada. Acredita-se, porém, que ele tenha surgido na China, inventado por um soldado chamado Hung Ming, que teria vivido de 243 a 181 a.C. Os primeiros indícios da presença do dominó na Europa são de meados do século XVIII, quando era jogado nas cortes de Veneza e Nápoles. [...] O nome dominó provavelmente deriva da expressão latina *domino gratias*, que significa ‘graças a Deus’, dita pelos padres europeus enquanto jogavam” (Mundo Estranho)[5]. Abaixo, temos peças de um dominó incompleto[6]. Pergunta-se:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	5
2	3	5	6	1	3	4	5	6	2	3	5	4	5	6	5

a) Qual o grau de cada número?

____

____

Fonte: Lopes, 2010, p. 15. Adaptada pelos pesquisadores.

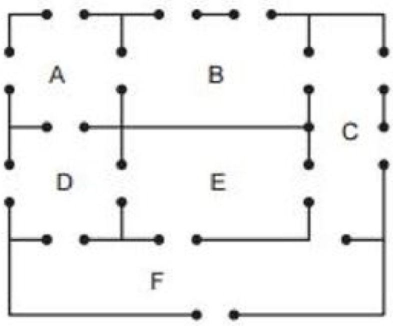
Na questão, não foi requisitada a representação em forma de grafo, pois acredita-se que este é o momento oportuno para se estimular a abstração em torno do tema. Dessa forma, o objetivo principal dessa questão é incentivar a abstração dos conceitos de grafos eulerianos aprendidos.

O desafio (Figura 30) traz uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) com adaptações. Nela, há o esboço da planta baixa de uma escola que teve todas as salas percorridas pelo Joãozinho, passando uma vez por cada porta, com exceção de uma, por onde passou duas vezes.

Figura 30 – Parte do desafio da Atividade 2

Desafio: (OBMEP, 2009 - adaptada) A figura mostra a planta de uma escola que tem seis salas, indicadas pelas letras de A até F. Joãozinho entrou na escola, percorreu todas as salas e foi embora, tendo passado exatamente duas vezes por uma das portas e uma única vez por cada uma das outras. A porta por qual Joãozinho passou duas vezes liga:

a) as salas A e B.
b) as salas C e E.
c) as salas E e F.
d) a sala D e o lado de fora da escola.
e) a sala F e o lado de fora da escola.



Fonte: OBMEP, 2009. Adaptada pelos pesquisadores.

Os alunos são incumbidos de apontar a porta por onde Joãozinho passou duas vezes e explicar o raciocínio que os levou à resposta.

A dificuldade da questão está na justificativa do raciocínio, pois os alunos devem perceber que o exterior da escola também é um vértice do grafo (que não está indicado por uma letra).

O objetivo do desafio é desenvolver a capacidade de argumentação sobre a Teoria dos Grafos Eulerianos, demonstrando domínio do conteúdo abordado.

2.3 Elaboração dos Questionários

Na elaboração de um questionário, deve-se atentar em incluir apenas itens que sejam de suma importância para a pesquisa. Além disso, as perguntas devem ser claras e direcionadas de forma a não haver ambiguidades (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 108).

Como dito anteriormente, foram elaborados dois questionários: 1 e 2. O Questionário 1 é composto por seis perguntas abertas e uma mista, com o intuito de traçar o perfil do público-alvo deste trabalho monográfico. Aborda: i) idade; ii) sexo; iii) justificar se gosta ou não da Matemática; iv) justificar se acha importante estudar esta disciplina; v) apontar se aplica os conhecimentos matemáticos no cotidiano e em quê; e vi) dizer se já ouviu falar da Teoria dos Grafos.

O questionário 2 tem por objetivo captar a percepção dos alunos quanto à aplicação da Teoria dos Grafos Eulerianos em resolução de problemas. Foi dividido em duas partes. A primeira parte consiste de uma questão mista, com itens ordenados de *a* a *p*, em que os alunos deveriam assinalar uma alternativa, conforme a seguinte escala: D (discordo), DP (discordo parcialmente), NCND (não concordo nem discordo), CP (concordo parcialmente) e C (concordo). Ao final desta parte, há um espaço para comentários e justificativas das alternativas para as quais assinalaram D, DP ou NCND.

A segunda parte consiste de uma pergunta aberta, relacionada aos aspectos positivos e negativos percebidos pelos alunos, além de sugestões para melhoria do trabalho.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo estão registrados o relato da aplicação desta pesquisa e a análise dos dados. Essa parte aconteceu em dois momentos: o teste exploratório e a experimentação.

3.1 Teste Exploratório

O teste exploratório foi realizado em três encontros, com aproximadamente duas horas-aula de duração cada, e aplicado para 36 licenciandos do 1º. período do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública, na cidade de Campos dos Goytacazes. A escolha por esse grupo deve-se à sua maior proximidade com o Ensino Médio, nível de escolaridade do público-alvo pretendido por este trabalho monográfico.

A realização desse teste teve por objetivos verificar: i) a adequação da sequência didática ao nível pretendido, bem como a condução do trabalho por parte dos pesquisadores; e ii) aspectos tais como tempo de duração, clareza dos enunciados das questões, dúvidas dos alunos e as atitudes dos mesmos diante das questões propostas.

O primeiro encontro ocorreu no dia 27 de junho de 2016, no qual a princípio houve a apresentação dos pesquisadores, que enfatizaram a importância do teste para o desenvolvimento da pesquisa. Também foi dito que as dúvidas, as soluções e observações feitas pelos licenciandos teriam grande contribuição para o trabalho monográfico. Após a apresentação, foram dadas orientações sobre a dinâmica do encontro, que consistiu em: i) resolver as questões da Atividade 1, sem o auxílio dos pesquisadores que, neste momento teriam o papel de mediadores (Figura 31); e ii) responder ao Questionário 1. Cabe destacar que em nenhum momento foi dito que a Atividade 1 abordava o conteúdo de grafos.

Figura 31 – Pesquisadores como mediadores

Fonte: Elaboração própria.

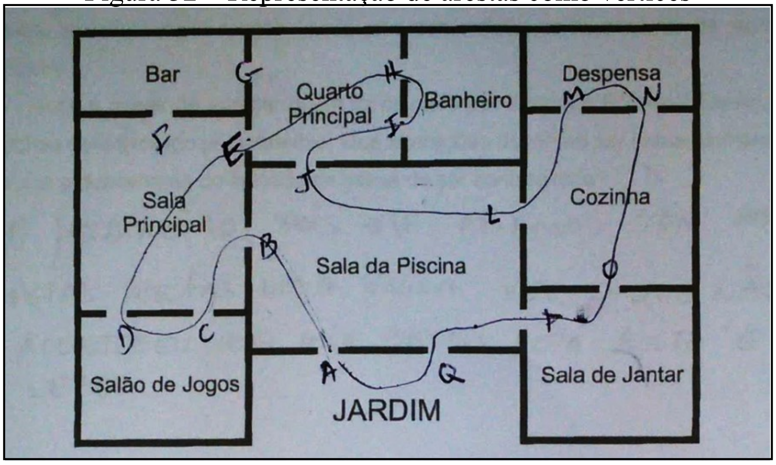
Pode-se verificar, pela análise dos questionários, que nenhum dos licenciandos conhecia a Teoria dos Grafos. Ao resolverem as questões da Atividade 1 não demonstraram dúvidas em relação ao enunciado das questões. Mostraram-se muito motivados e curiosos para saber quem era o culpado do assassinato da primeira questão, assim como ocorreu na experimentação de Costa (2013).

Verificou-se após o primeiro encontro que: i) a Atividade 1 estava adequada ao nível pretendido, assim como a condução da aula por parte dos pesquisadores; ii) os licenciandos terminaram a Atividade 1 antes das duas horas-aula previstas e não tiveram quaisquer dificuldades em interpretar as questões, o que indicou clareza dos enunciados; iii) suas dúvidas recaíram sobre aspectos que, para quem não conhece a Teoria, já eram esperadas, assim como ocorreu na pesquisa de Costa (2013), que esperava que os alunos respondessem o problema apresentado após inúmeras tentativas; e iv) o entusiasmo e empenho com as questões mostraram que essas estavam de acordo com a proposta.

O segundo encontro ocorreu no dia 30 de junho de 2016. Iniciou-se com a história sobre a Teoria dos Grafos Eulerianos e, a partir desta, os conceitos e definições foram expostos aos licenciandos. Pode-se notar que a turma estava bastante atenta ao que estava sendo dialogado, por ainda estarem ansiosos para desvendar o crime da primeira questão do encontro anterior.

Em seguida, foi entregue novamente a Atividade 1 para que os licenciandos a refizessem, com o intuito de saber se a Teoria, agora formalizada, traria benefícios para a resolução das questões. Um erro bastante observado pelos pesquisadores, quando chamados às carteiras pelos licenciandos, foi com relação à representação da planta baixa da primeira questão em forma de grafo, pois muitos consideraram as paredes da planta baixa como arestas do grafo e as portas como vértices, ao invés de identificar que os cômodos seriam os vértices e as portas, as arestas (Figura 32).

Figura 32 – Representação de arestas como vértices



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para a aplicação no Ensino Médio, ficou decidido que, durante a explicação do Problema das Sete Pontes, seria reforçado que as porções de terra eram os vértices e as pontes, as arestas, para que, dessa forma, os alunos tivessem um exemplo de um problema correlato.

Percebeu-se que: i) o tempo de duas horas-aula previsto foi suficiente; ii) as principais dúvidas dos licenciandos foram sobre a resolução das questões aplicando a Teoria aprendida, como identificar o que seria vértice e aresta na primeira questão e contar o grau de cada vértice; e iii) com o domínio da Teoria, os licenciandos alegaram que foi mais rápido e fácil refazer a Atividade 1.

O terceiro encontro ocorreu no dia 04 de julho de 2016 e teve como objetivos: i) a resolução de exercícios com base na Teoria abordada; e ii) a avaliação, por meio do Questionário 2. A metodologia desse encontro consistiu em entregar a Atividade 2 para que os licenciandos a resolvessem, podendo ou não solicitar o auxílio dos pesquisadores e, após a resolução das questões, o Questionário 2.

Na resolução das questões dessa atividade, alguns licenciandos apresentaram dúvidas de interpretação dos enunciados nas questões 1 e 5, fazendo-se necessário o auxílio individual dos pesquisadores. Nesse momento, foram seguidas as orientações de Polya (2006), que declara que os alunos devem ser estimulados a fazer a releitura do problema, com o intuito de tentar compreendê-lo.

A dúvida na questão 1 foi de interpretação, pois na frase “Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e prima de Morena (M) [...]”, alguns entenderam que Brigite era prima de Morena, o que levou à reformulação da questão (Quadro 2).

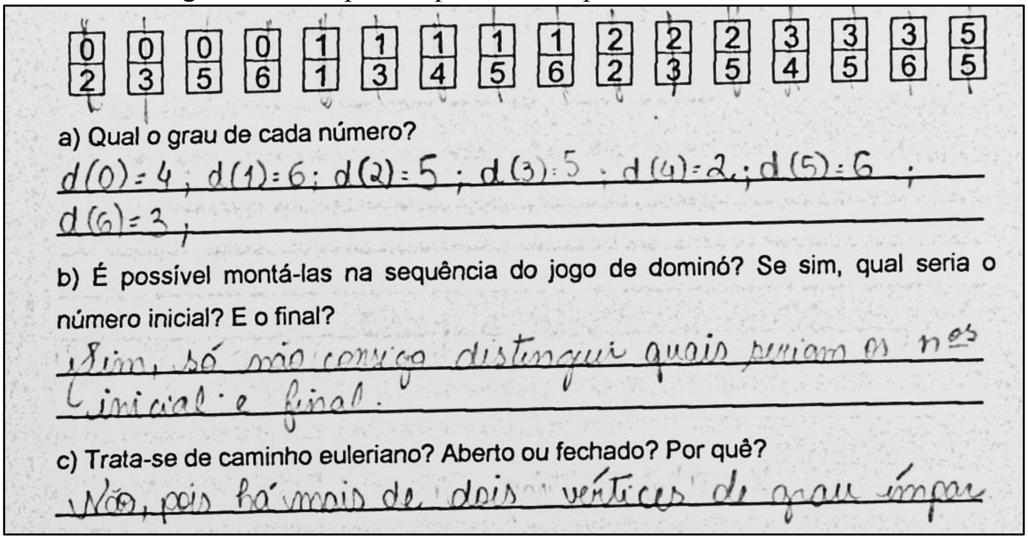
Quadro 2 – Alteração da questão 1 da Atividade 2

Questão 1 antes da alteração
1) Tião (T), Horácio (H), Carlota (C) e Pablo (P) são velhos conhecidos. Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e prima de Morena (M) – que namora Simão (S), a quem Carlota (C) ainda não foi apresentada. Simão (S) é amigo de Leocádio (L), e ambos conhecem Pablo (P), ex de Morena (M). Represente essas relações em forma de grafo e responda quem é o mais popular e o menos popular.
Questão 1 após a alteração
1) Tião (T), Horácio (H), Carlota (C) e Pablo (P), todos se conhecem. Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e também prima de Morena (M) – que namora Simão (S), a quem Carlota (C) ainda não foi apresentada. Simão (S) é amigo de Leocádio (L), e ambos conhecem Pablo (P), ex de Morena (M). Represente essas relações em forma de grafo e responda quem é o mais popular e o menos popular.

Fonte: Elaboração própria.

A dúvida da questão 5 apresentada foi em relação à abstração que a questão exigia. Muitos não conseguiram identificar, sem a ajuda dos pesquisadores, se os números do dominó seriam os vértices ou as arestas. A maioria enxergou cada peça do dominó como um vértice e teve dificuldade em desvincular os números que as formavam. Outros não foram capazes de concluir a questão corretamente, pois se equivocaram durante a contagem do grau de cada vértice (Figura 33).

Figura 33 – Resposta equivocada à questão 5 da Atividade 2



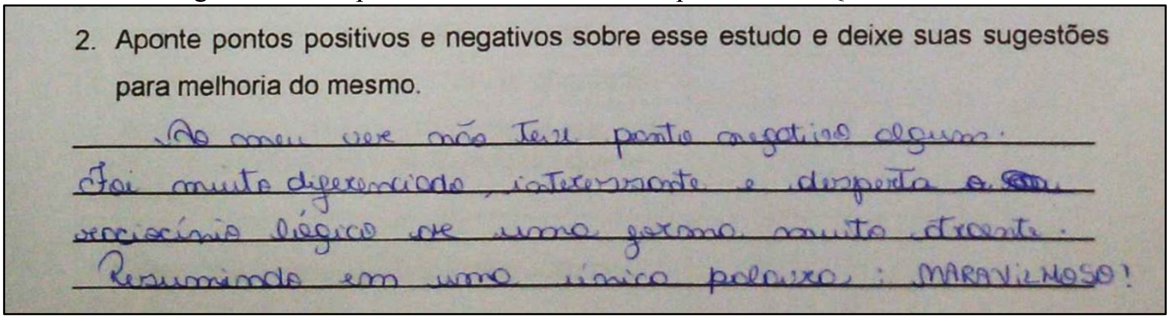
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apesar das dificuldades enfrentadas nessa questão, os pesquisadores optaram por mantê-la, pois seria motivadora. Caso a dificuldade se repetisse na experimentação, os pesquisadores acreditam que minimizá-la não seria um obstáculo, utilizando a Resolução de Problemas.

Constatou-se após o terceiro encontro que: i) a Atividade 2 estava de acordo com o nível pretendido, assim como a condução da aula por parte dos pesquisadores; ii) os licenciandos terminaram a Atividade 2 no tempo previsto de duas horas-aula, entretanto, não foi feita a plenária com a busca pelo consenso das resoluções dos mesmos; dessa forma, decidiu-se acrescentar uma hora-aula para a experimentação; e iii) o entusiasmo e empenho com as questões mostraram que estas estavam de acordo com a proposta, e um dos licenciandos relatou o desejo de desenvolver uma pesquisa sobre o mesmo tema.

A análise das respostas do Questionário 2 revelou que, de modo geral, a avaliação por parte dos licenciandos foi positiva. A maioria relatou que não encontrou pontos negativos e que o estudo sobre a Teoria dos Grafos Eulerianos foi diferenciado e atraente (Figura 34).

Figura 34 – Resposta de um licenciando à questão 2 do Questionário 2



2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.

Ao meu ver não tem ponto negativo algum.
Foi muito diferenciado, interessante e desperta o raciocínio lógico de uma forma muito atraente.
Resumindo em uma única palavra: MARAVILHOSO!

Fonte: Protocolo de pesquisa.

De forma geral, as respostas dadas ao Questionário 2 e as poucas alterações sugeridas revelaram que a sequência didática estava bem encaminhada para a experimentação, que será relatada na seção seguinte.

3.2 Experimentação

A experimentação ocorreu em três encontros com uma turma de 2ª. série de um Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de uma instituição pública, na cidade de Campos dos Goytacazes. O primeiro e o segundo encontros tiveram duração de duas horas-aula e o terceiro de três, num total de sete horas-aula.

No primeiro encontro, 27 alunos estiveram presentes, no segundo, 20 e no terceiro, 23. Para fins de análise, porém, serão considerados apenas os 17 alunos que estiveram presentes nos três encontros. Os mesmos foram denominados A, B, C, ..., Q. Esta nomenclatura foi utilizada para toda a análise dos dados, de tal maneira que o Aluno A, por exemplo, sempre é o mesmo em todos os momentos. A seguir, são descritos cada um dos encontros.

3.2.1 Primeiro Encontro: 18/07/2016

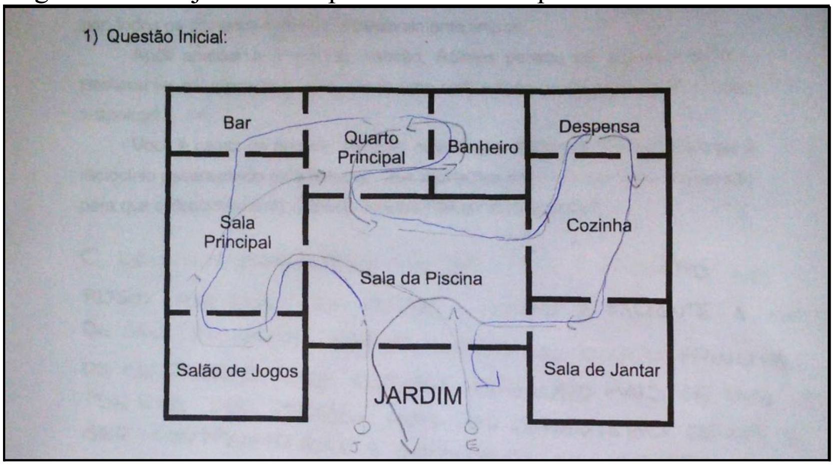
Inicialmente, os pesquisadores se apresentaram e informaram a necessidade de outros dois encontros e que a presença e a participação em todos seriam pontuadas pelo professor regente. Em seguida, foi entregue a Atividade 1 aos alunos, para que procurassem seus próprios métodos de resolução, a fim de chegar às soluções dos problemas propostos, assim como indica Onuchic et al. (2014).

Aos alunos foi pedido que se sentassem em grupos, para que após a leitura individual, pudessem realizar a leitura em conjunto, respectivamente segunda e terceira etapas da Resolução de Problemas proposta por Onuchic et al. (2014).

A questão 1 foi escolhida, pensando em direcionar a atenção dos alunos para o tema, motivando-os, como sugere Polya (2006). A princípio, poucos se mostraram interessados, motivo pelo qual um dos pesquisadores destacou que a questão abordava um crime sobre o qual deveriam apontar o culpado. Essa atitude despertou a curiosidade da maioria e, logo em seguida, discussões empolgadas sobre a identidade do assassino. Costa (2013), em sua experimentação, também aponta o grande interesse de seus alunos pelo tema – a investigação de um crime.

O método de resolução adotado pelos alunos, no problema gerador, foi o de traçar os possíveis caminhos sobre a planta da mansão (Figura 35) e, por tentativa e erro, tentar descobrir quem era o culpado. Fato ocorrido também na pesquisa de Costa (2013).

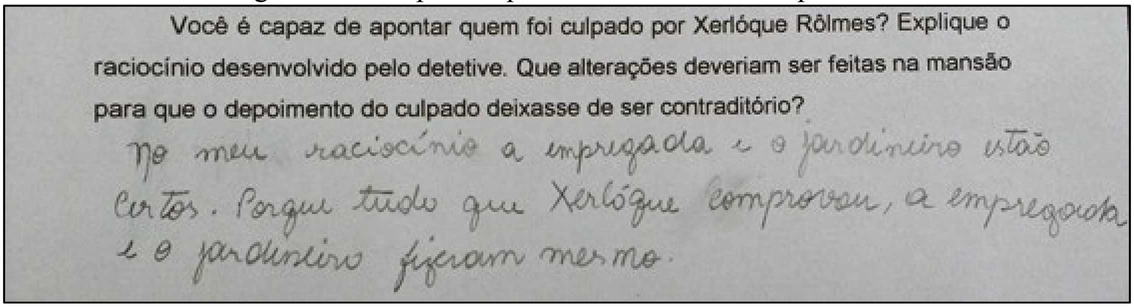
Figura 35 – Trajetos feitos pelo Aluno B na questão 1 da Atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

De todos os alunos, 11 apontaram o culpado corretamente, contudo, dentre as teorias levantadas, o Aluno E surgiu com uma fora do contexto, como a do jardineiro e a empregada serem inocentes (Figura 36). A maioria ter acertado é similar ao resultado de Costa (2013), que afirma que os grupos formados pelos seus alunos logo perceberam que o culpado era o jardineiro, devido à impossibilidade do percurso por este relatado.

Figura 36 – Resposta equivocada do Aluno E à questão 1



Você é capaz de apontar quem foi culpado por Xerlóque Rôlmes? Explique o raciocínio desenvolvido pelo detetive. Que alterações deveriam ser feitas na mansão para que o depoimento do culpado deixasse de ser contraditório?

no meu raciocinio a empregada e o jardineiro estão certos. Porque tudo que Xerlóque comprovou, a empregada e o jardineiro fizeram mesmo.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com relação às modificações que deveriam ser feitas na mansão para inocentar o acusado, apenas os Alunos C, I, J, K e M responderam corretamente. Vale reforçar que os quatro primeiros deram a mesma solução que alguns dos alunos de Costa (2013), que implica em retirar a porta que liga a Sala Principal ao Quarto Principal.

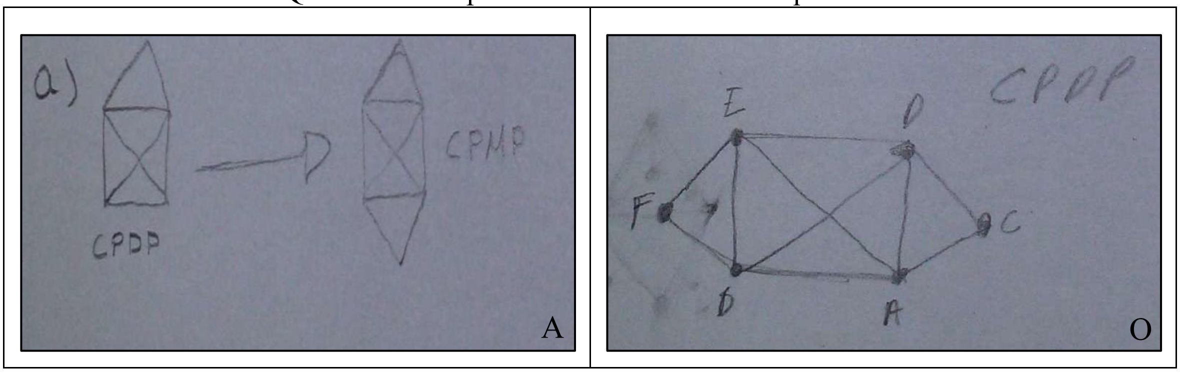
A mesma proposta da questão 2, fazer o percurso sem retirar o lápis do papel, foi também utilizada nos estudos relacionados de Malta (2008) e Gualandi (2012). Como o último autor, os pesquisadores também esperavam que os alunos explorassem o problema, escolhendo pontos de partida e caminhos diferentes com o intuito de verificar, por tentativa e erro, a classificação de cada grafo apresentado na questão.

Nesta questão, os pesquisadores foram chamados às carteiras de alguns alunos que tinham dúvidas de como proceder, pois não conseguiram compreender seu enunciado. Seguindo a metodologia de ensino adotada, os pesquisadores auxiliaram sem dar respostas prontas, demonstrando confiança na capacidade dos alunos, segundo orientações de Onuchic et al. (2014).

Alguns alunos questionaram se poderiam passar, mais de uma vez, pela mesma linha, então os pesquisadores pediram que fizessem a leitura do enunciado novamente, como recomenda Polya (2006), dizendo que é necessário refazer a leitura do enunciado até que o objetivo esteja claro, o que os fizeram perceber que não poderiam. O percentual de erros nessa questão, 15%, e a pouca mediação por parte dos pesquisadores, aponta que os alunos perceberam o que de fato deveria ser feito.

A resolução da questão 3 transcorreu sem problemas, com exceção dos Alunos A e O que perceberam que uma possível transformação, pedida pela questão, poderia ser o grafo do item a da questão 2 para o grafo do item b da mesma questão (Quadro 3). Os alunos não estavam errados, entretanto, a tentativa dos pesquisadores de direcioná-los para o objetivo da questão não surtiu efeito, pois estes alunos se recusaram a modificar suas respostas.

Quadro 3 – Respostas dos Alunos A e O à questão 3

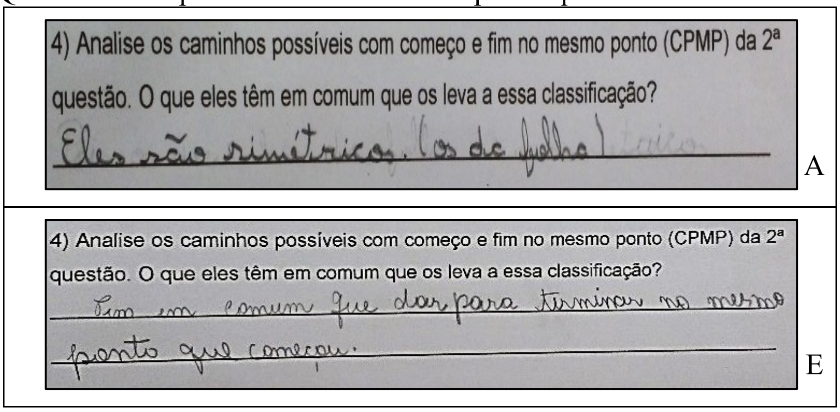


Fonte: Elaboração própria.

As questões 4, 5 e 6 eram o desfecho da Atividade 1, pois levavam os alunos à conclusão das conjecturas por eles imaginadas. Os pesquisadores supuseram, assim como Gualandi (2012) que essas seriam as mais complicadas questões.

Apenas os Alunos C e M responderam corretamente à questão 4, ao passo que nenhum acertou as questões 5 e 6. Somente B e C deixaram essas três últimas questões em branco, pois não perceberam relação alguma. A, D, F e I disseram que estavam relacionadas com a simetria das figuras e outros, como por exemplo, o Aluno E, repetiram a informação da pergunta (Quadro 4). Resultado parecido teve Malta (2008) que em problemas de igual proposta, apontou que várias tentativas de generalização foram feitas, mas nenhuma obteve sucesso.

Quadro 4 – Respostas dos Alunos A e E para a questão 4 da Atividade 1


4) Analise os caminhos possíveis com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

Eles são simétricos. (os de folha)

A

4) Analise os caminhos possíveis com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

Tem em comum que dar para terminar no mesmo ponto que começou.

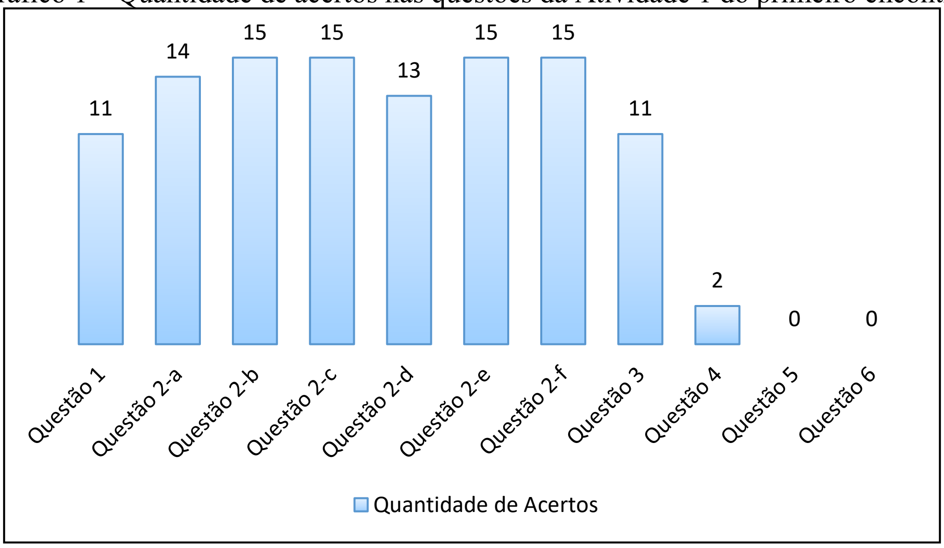
E

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A busca pelo consenso a partir das respostas dos alunos não foi realizada neste encontro, pois a sequência didática foi elaborada para que a Atividade 1 fosse refeita no segundo encontro, como mencionado anteriormente.

Pode-se perceber que nessa Atividade os alunos conseguiram atingir os objetivos de cada questão, uma vez que não houve muitos erros, com exceção das últimas três (Gráfico 1).

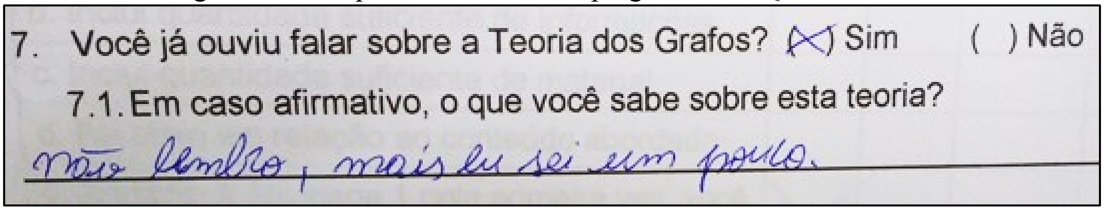
Gráfico 1 – Quantidade de acertos nas questões da Atividade 1 do primeiro encontro



Fonte: Elaboração Própria.

À medida que os alunos terminavam a Atividade 1, era entregue o Questionário 1. O objetivo deste era traçar um perfil da turma e descobrir se conheciam ou já tinham ouvido falar sobre a Teoria dos Grafos. Destes, apenas o Aluno G respondeu que sim, entretanto, justificou que sabia pouco, mas que não lembrava (Figura 37).

Figura 37 – Resposta do Aluno G à pergunta 7 do Questionário 1


7. Você já ouviu falar sobre a Teoria dos Grafos? (X) Sim ( ) Não

7.1. Em caso afirmativo, o que você sabe sobre esta teoria?

não lembro, mais eu sei um pouco.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por meio deste, constatou-se que dentre os 17 alunos analisados, 13 eram homens e a média de idade é de 17 anos. Todos afirmaram ser importante estudar Matemática e aplicar os conhecimentos em seu cotidiano, embora apenas 53% tenham declarado gostar da disciplina.

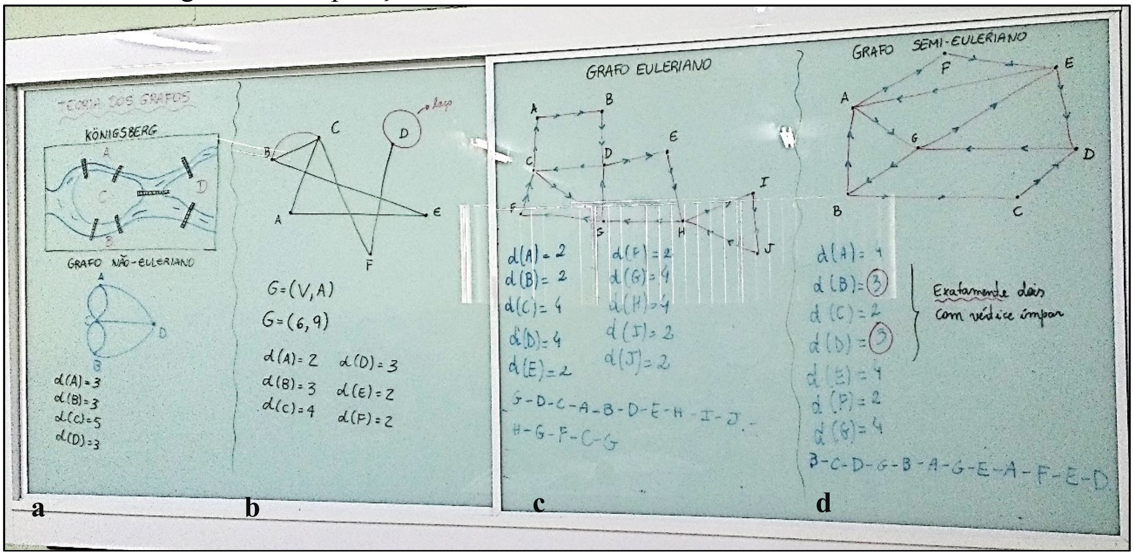
3.2.2 Segundo Encontro: 19/07/2016

Nesse encontro, a ministração da aula foi com a participação dos alunos, proporcionando-os a oportunidade de comentar, perguntar e exemplificar no momento que julgassem oportuno.

Os pesquisadores começaram a aula entregando a cada aluno a Apostila sobre Grafos Eulerianos e seguiram contando a história do surgimento da Teoria dos Grafos, partindo do Problema das Sete Pontes. Para isso, um dos pesquisadores desenhou no quadro o mapa da cidade de Königsberg e posteriormente o grafo originado pelo problema (Figura 38-a), sem esquecer de todo o processo histórico que levou Leonhard Euler a essa representação.

Deve-se ressaltar que até este ponto, em nenhum momento o tema havia sido revelado, pois de acordo com Allevato e Onuchic (2009), os problemas matemáticos devem ser apresentados, antes mesmo que o conteúdo seja introduzido. Mesmo com todo este cuidado, os pesquisadores foram surpreendidos pelo Aluno G, que chegou atrasado e, ao ver o mapa da cidade no quadro, perguntou se a figura representava o Problema das Sete Pontes. Esta situação é bem parecida com a vivenciada por Gualandi (2012), que ressalta que seus alunos não tinham ouvido falar de grafos, embora alguns já tivessem visto algumas questões relacionadas ao tema.

Figura 38 – Exposição dos conceitos da Teoria dos Grafos Eulerianos



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida foram definidos cada componente de um grafo: vértices, arestas e laço. Aproveitou-se o momento para destacar que mais de uma aresta pode conectar dois vértices. Expôs-se a notação matemática de um grafo e também como identificar o grau de cada vértice (Figura 38-b). Esta etapa é a formalização do conteúdo, de acordo com a metodologia de ensino escolhida para este trabalho monográfico.

Seguiu-se com as classificações dos grafos eulerianos e suas respectivas características. Utilizou-se o exemplo 1 da Apostila para definir grafo euleriano ou caminho euleriano fechado. Um aluno voluntário foi ao quadro, a pedido dos pesquisadores, para tentar percorrer o caminho de acordo com a Teoria exposta. Indicou o caminho com setas, verificando a validade da definição (Figura 38-c). O mesmo foi feito para o grafo semi-euleriano. (Figura 38-d).

Retornou-se ao Problema das Sete Pontes para exemplificar os grafos não-eulerianos, e mostrar, de acordo com o grau de cada vértice, porque Euler constatou ser um problema impossível.

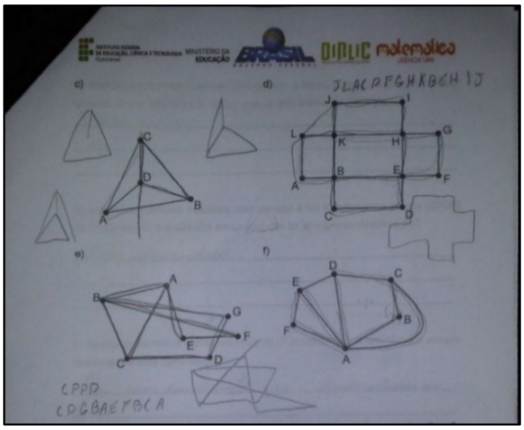
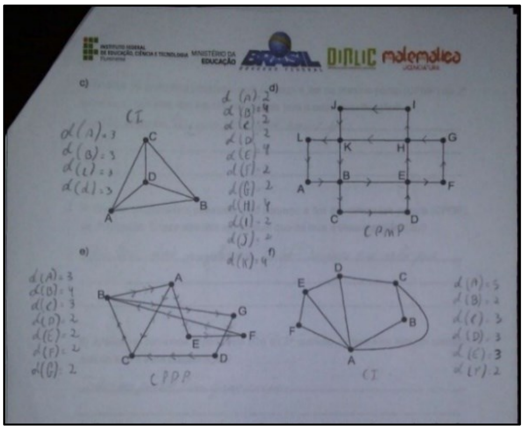
Por fim, foi entregue uma nova impressão da Atividade 1, com o intuito de investigar se os novos conceitos seriam utilizados e, caso positivo, se o rendimento seria melhor. Dentre os estudos relacionados, Costa (2013) procedeu da mesma forma, relatando que durante a repetição das atividades, a nova Teoria apresentada causou maior clareza na resolução.

Como no primeiro encontro, o pedido para se sentarem em grupos foi feito aos alunos, de forma que pudessem desempenhar a segunda e terceira etapas da Resolução de Problemas de Onuchic et al. (2014).

Os pesquisadores alertaram que estavam à disposição para tentar minimizar quaisquer dúvidas que os alunos pudessem apresentar. As intervenções ocorreram conforme indica Polya (2006, p. 1) em que, neste momento, “[...] o professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho”.

O tempo de resolução foi consideravelmente menor, embora não se possa, numa análise inicial, inferir que foi mais fácil para os alunos do que no primeiro encontro, pois o conhecimento da atividade poderia ter agilizado a leitura. Contudo, pela análise das resoluções, foi possível perceber as diferentes respostas dadas pelo Aluno D, antes e depois de saber a Teoria, como mostra o quadro comparativo a seguir (Quadro 5):

Quadro 5 – Respostas do Aluno D à questão 2 no primeiro e segundo encontros

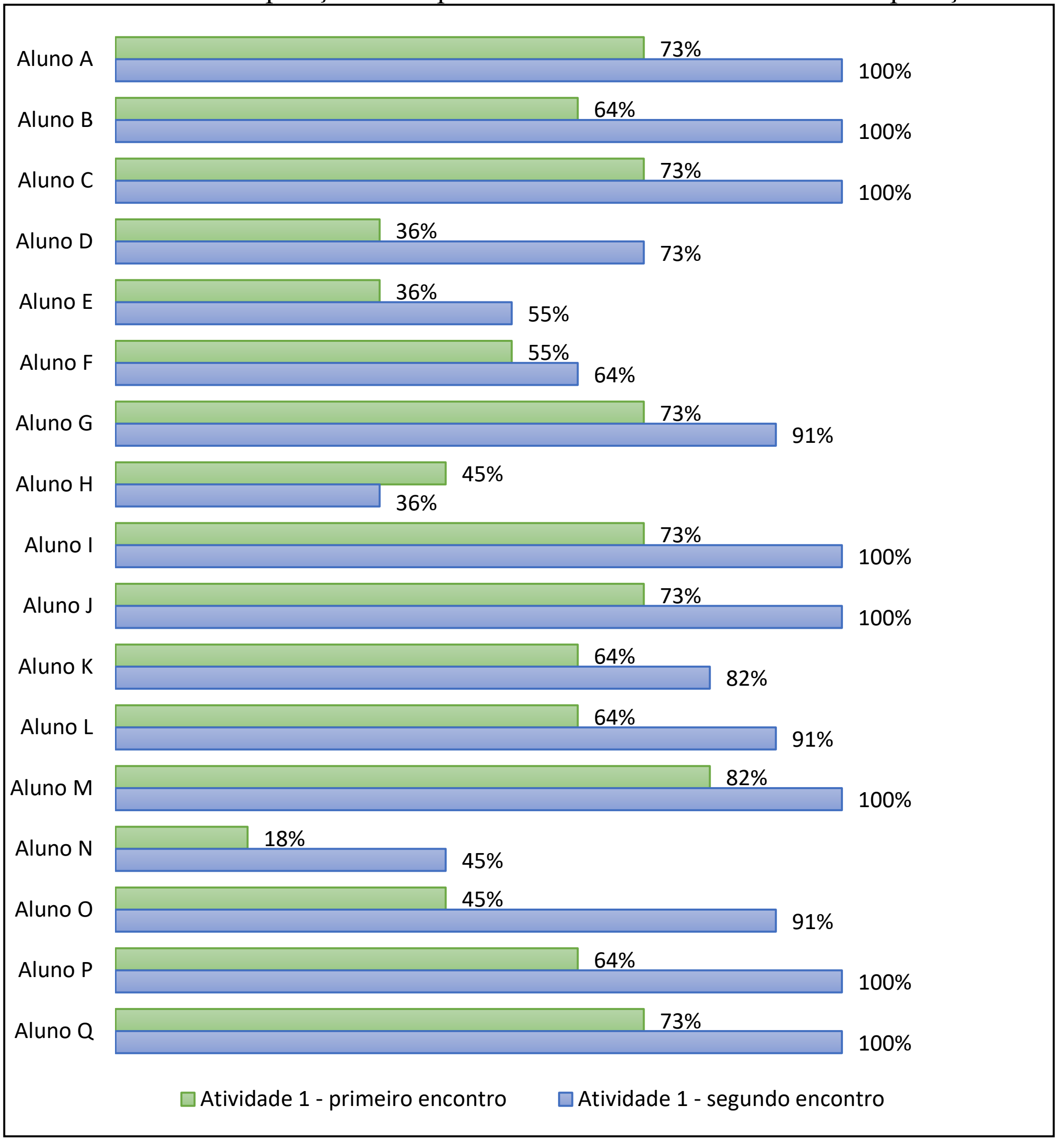
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com o domínio da Teoria, os alunos puderam comprovar o que muitos já haviam suposto no primeiro encontro: o culpado era o jardineiro. Os pesquisadores perceberam por meio da observação que os alunos pareceram satisfeitos em saber que há uma ferramenta que torna mais fácil a resolução de questões como as apresentadas: a Teoria dos Grafos. Semelhante a esta constatação, Costa (2013) relata a facilidade e simplicidade com que os alunos resolveram os problemas após a formalização da Teoria.

A Atividade 1 do segundo encontro foi finalizada com a correção das questões no quadro, partindo das respostas dadas pelos alunos. A partir da discussão das questões, fez-se a busca pelo consenso – oitava etapa da metodologia adotada neste trabalho monográfico –, pedindo-se aos alunos que não alterassem as respostas que estivessem em desacordo.

A reaplicação da Atividade 1 revelou que quase todos os alunos tiveram um maior percentual de acertos nesta, do que no primeiro encontro. Além disso, quase metade da turma teve 100% de acertos (Gráfico 2).

Gráfico 2 – Comparação aluno por aluno entre a Atividade 1 e sua reaplicação

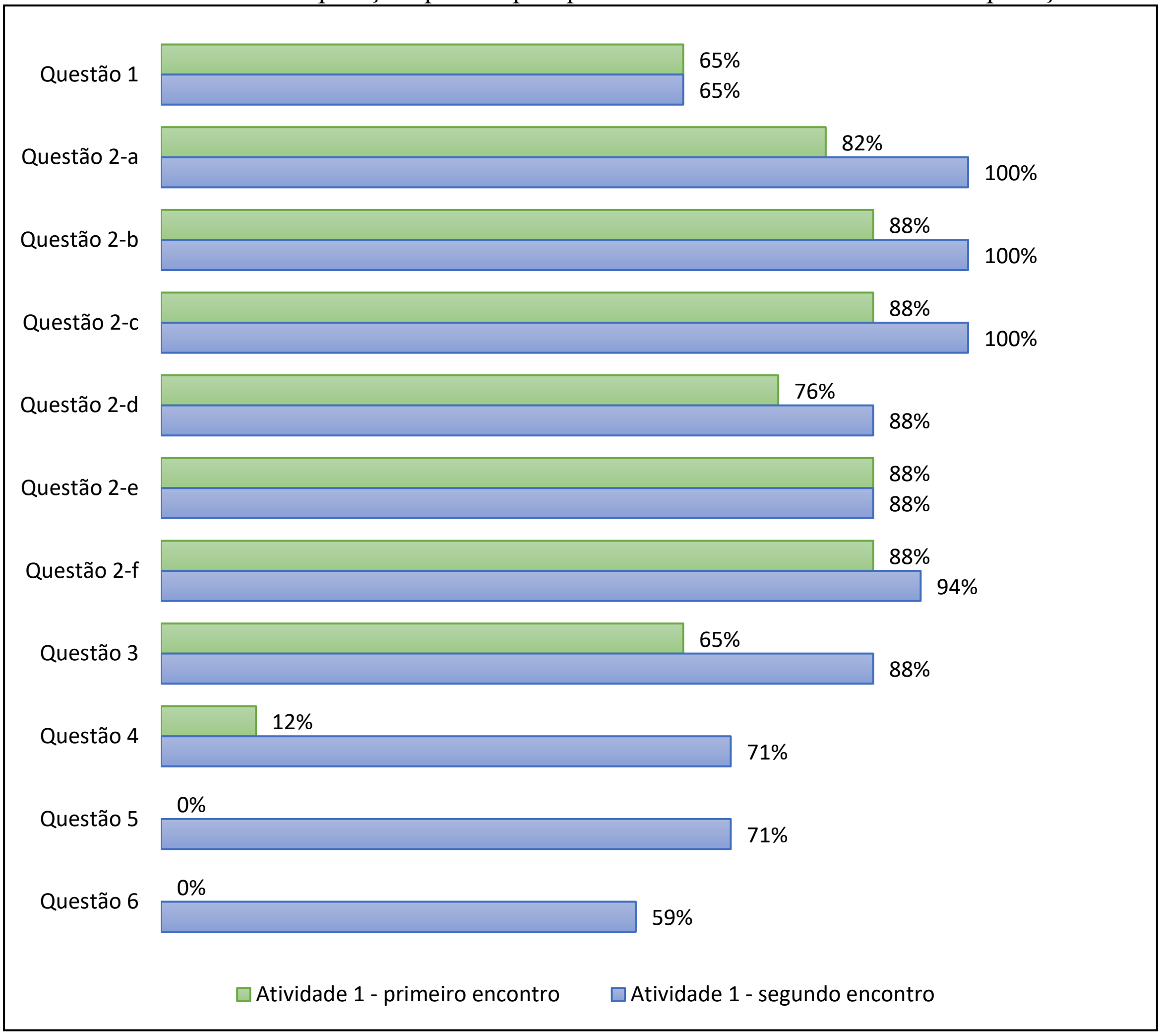


Fonte: Elaboração própria.

Observando o Gráfico 2, é possível perceber que apenas H teve desempenho pior na reaplicação da Atividade 1. É importante mencionar que, de acordo com a observação dos pesquisadores, tal aluno teve dificuldades na interpretação dos problemas. Além do mais, havia sido transferido há pouco para a turma e não estava integrado ao grupo, o que dificultou o diálogo com os demais colegas sobre suas conjecturas e pode ter comprometido o seu rendimento.

Esse maior percentual de acertos deve-se em grande parte às três últimas questões (Gráfico 3), pois os conceitos da Teoria apresentada eram as respostas que deveriam ser dadas. Nas outras questões, esse avanço percentual foi mais sutil.

Gráfico 3 – Comparação questão por questão entre a Atividade 1 e sua reaplicação



Fonte: Elaboração própria.

É importante destacar que a Atividade 1 abordava questões simples e descontextualizadas, com exceção da inicial. Por isso, foi necessária uma atividade contextualizada, para que percebessem a aplicabilidade da Teoria.

3.2.3 Terceiro Encontro: 26/07/2016

Os pesquisadores acharam necessário retomar as condições necessárias e suficientes para a classificação de cada tipo de grafo euleriano, devido ao hiato de uma semana entre este encontro e o anterior.

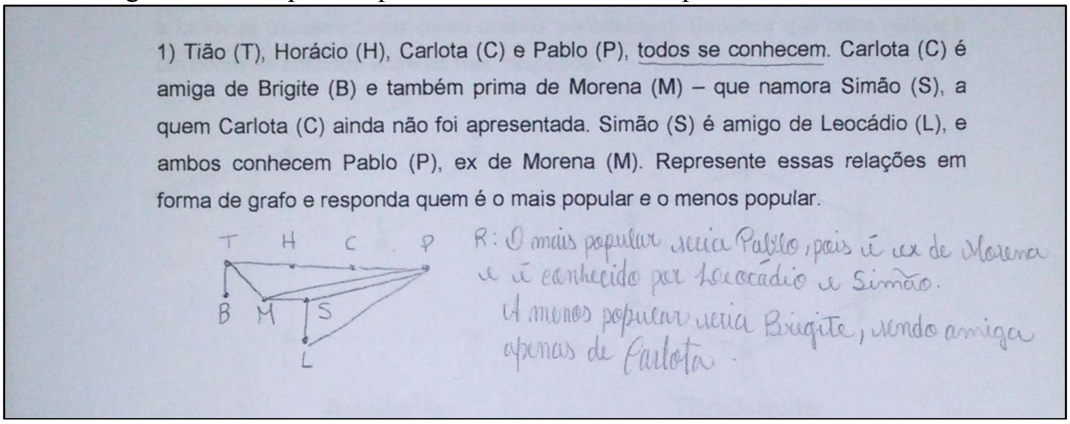
Foi entregue aos alunos a Atividade 2 que conta com cinco exercícios mais um desafio, todos aplicações da Teoria dos Grafos Eulerianos a situações cotidianas. O objetivo desta como instrumento de coleta de dados consiste em verificar a utilização da Teoria apresentada. Deve-se frisar que as questões tinham nível de dificuldade superior às da Atividade 1, por serem contextualizadas e dependerem de interpretação de texto, por isso, já se esperava uma quantidade maior de dúvidas nas questões. Gualandi (2012) tinha expectativa diversa para a etapa final de sua experimentação: poucas dúvidas, pois os alunos já dominariam os conceitos de grafos.

Mais uma vez a turma foi alertada sobre a possibilidade de requisitar, a qualquer momento, o auxílio dos pesquisadores nas dúvidas apresentadas. Estes observaram e incentivaram os alunos, porém sem dar respostas prontas, como sugere Onuchic et al. (2014).

Pode-se ressaltar que, mesmo antes de serem requisitados, os alunos agruparam-se a fim de facilitar a resolução dos exercícios. A leitura em conjunto, realizada pelos discentes, é uma das etapas da metodologia desenvolvida por Onuchic et al. (2014).

Na questão 1, a principal dificuldade dos alunos era na transposição da linguagem natural para a linguagem matemática, principalmente quanto à primeira frase da questão. Os alunos deveriam interligar todos os componentes, já que "todos se conhecem", mas não representaram algumas conexões (Figura 39).

Figura 39 – Resposta equivocada do Aluno F na questão 1 da Atividade 2



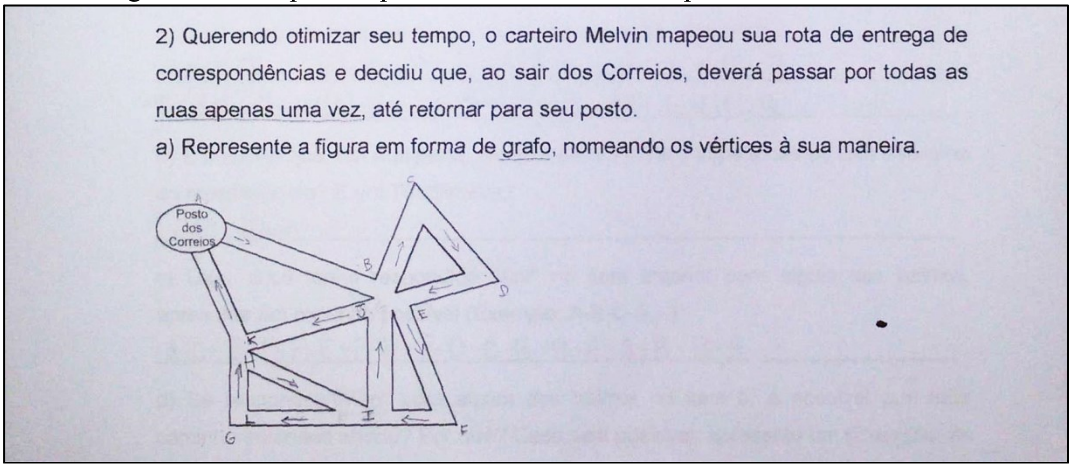
1) Tião (T), Horácio (H), Carlota (C) e Pablo (P), todos se conhecem. Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e também prima de Morena (M) – que namora Simão (S), a quem Carlota (C) ainda não foi apresentada. Simão (S) é amigo de Leocádio (L), e ambos conhecem Pablo (P), ex de Morena (M). Represente essas relações em forma de grafo e responda quem é o mais popular e o menos popular.

R: O mais popular seria Pablo, pois é ex de Morena e é conhecido por Leocádio e Simão.
O menos popular seria Brigite, sendo amiga apenas de Carlota.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 2, os vértices foram propositalmente suprimidos para verificar as soluções adotadas por cada aluno, pois muitas intersecções entre ruas poderiam ser consideradas como vértices ou consideradas num todo como um laço. Isso gerou dúvidas de alguns alunos que não souberam representar o desenho corretamente em forma de grafo. Perguntas como: "*o Posto dos Correios também é um vértice?*" e "*essa esquina são quantos vértices?*" foram feitas. Além disso, alguns usaram mais de um vértice para representar o mesmo entroncamento (Figura 40) e outros percorreram as linhas como se fossem as ruas. Mas a maioria compreendeu a questão e representou corretamente a situação em forma de grafo.

Figura 40 – Resposta equivocada do Aluno F na questão 2 da Atividade 2


2) Querendo otimizar seu tempo, o carteiro Melvin mapeou sua rota de entrega de correspondências e decidiu que, ao sair dos Correios, deverá passar por todas as ruas apenas uma vez, até retornar para seu posto.
a) Represente a figura em forma de grafo, nomeando os vértices à sua maneira.

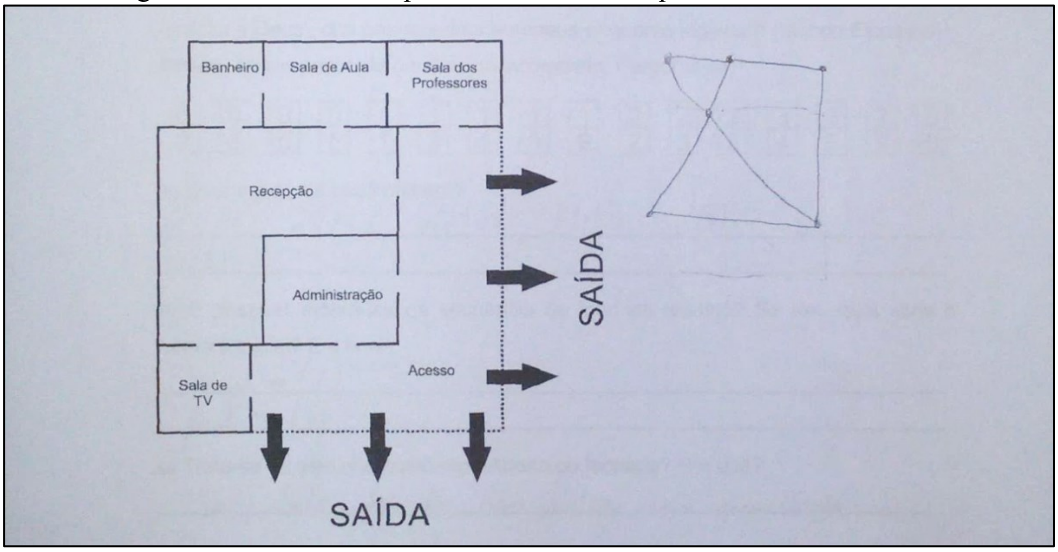
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os grafos da questão 3 possuíam algumas arestas com estilos de linhas diferentes (contínua, tracejada e pontilhada) e também curvas. Isso causou estranheza em alguns alunos que, apontando para essas arestas, perguntaram: "*essas eu conto como arestas também?*" e "*isso é um laço?*". Contudo, a maioria não teve dúvidas na questão, e souberam discernir os dois tipos de grafos eulerianos apresentados na questão por suas características.

Da mesma forma, Gualandi (2012), em questão de objetivo afim, declara que seus alunos também não tiveram problemas em distinguir os tipos de grafos eulerianos apresentados.

A questão 4 gerou muitos questionamentos por parte da turma, tais como: "*as setas são portas de saída?*"; "*o pintor pode começar pelo acesso?*"; e "*como ele pode começar pela sala de aula se para chegar lá ele tem que passar por algumas portas e para passar por uma porta ele deve pintá-la?*". Perguntas como "*que letra eu uso para o acesso?*" mostram que alguns não leram ou se perderam em meio ao enunciado. Além disso, os pesquisadores observaram que alunos que não representaram a figura em forma de grafo tiveram maiores dificuldades em compreender o problema (Figura 41).

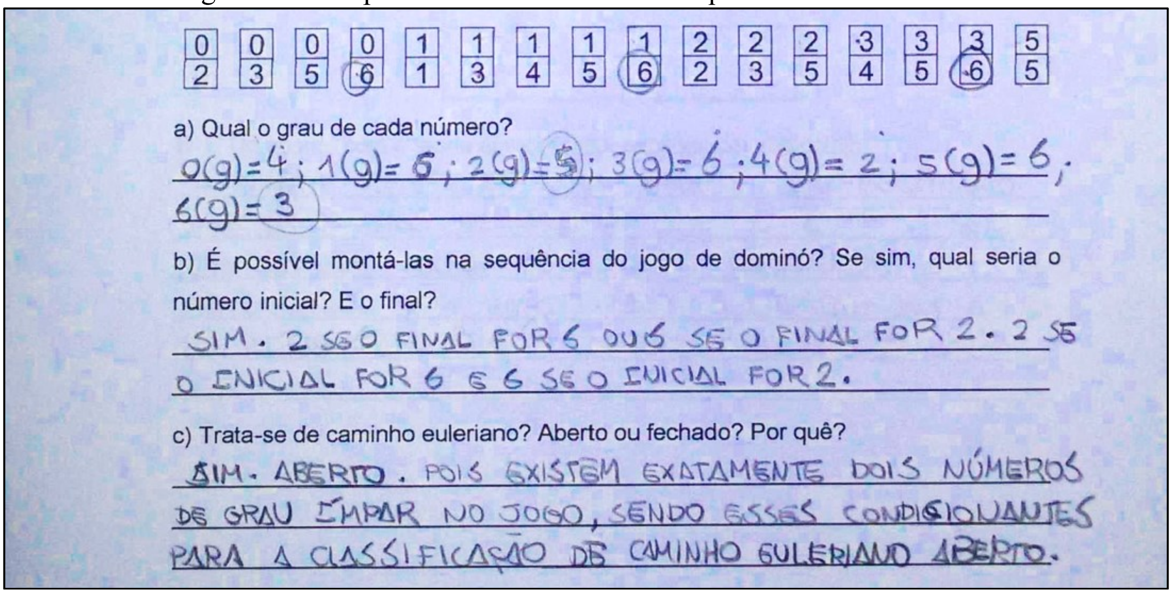
Figura 41 – Grafo incompleto do Aluno K na questão 4 da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A questão 5 foi a que gerou mais dúvidas nos alunos, que não abstraíram o suficiente para transpor do concreto para a representação em forma de grafo. Isto já era esperado, conforme observado no teste exploratório. Os pesquisadores foram muitas vezes às carteiras para auxiliar na compreensão e resolução da questão, solicitando primeiramente que os alunos relessem a questão e, caso a dúvida persistisse, que pensassem em um problema correlato. Embora com erros de nomenclatura, com auxílio, a maioria conseguiu chegar à correta solução do problema (Figura 42).

Figura 42 – Respostas corretas do aluno B à questão 5 da Atividade 2



0|2 0|3 0|5 0|6 1|1 1|3 1|4 1|5 1|6 2|2 2|3 2|5 3|4 3|5 3|6 5|5

a) Qual o grau de cada número?

0(g)=4; 1(g)=6; 2(g)=5; 3(g)=6; 4(g)=2; 5(g)=6;
6(g)=3

b) É possível montá-las na sequência do jogo de dominó? Se sim, qual seria o número inicial? E o final?

SIM. 2 SE O FINAL FOR 6 OU 6 SE O FINAL FOR 2. 2 SE O ENICIAL FOR 6 E 6 SE O INICIAL FOR 2.

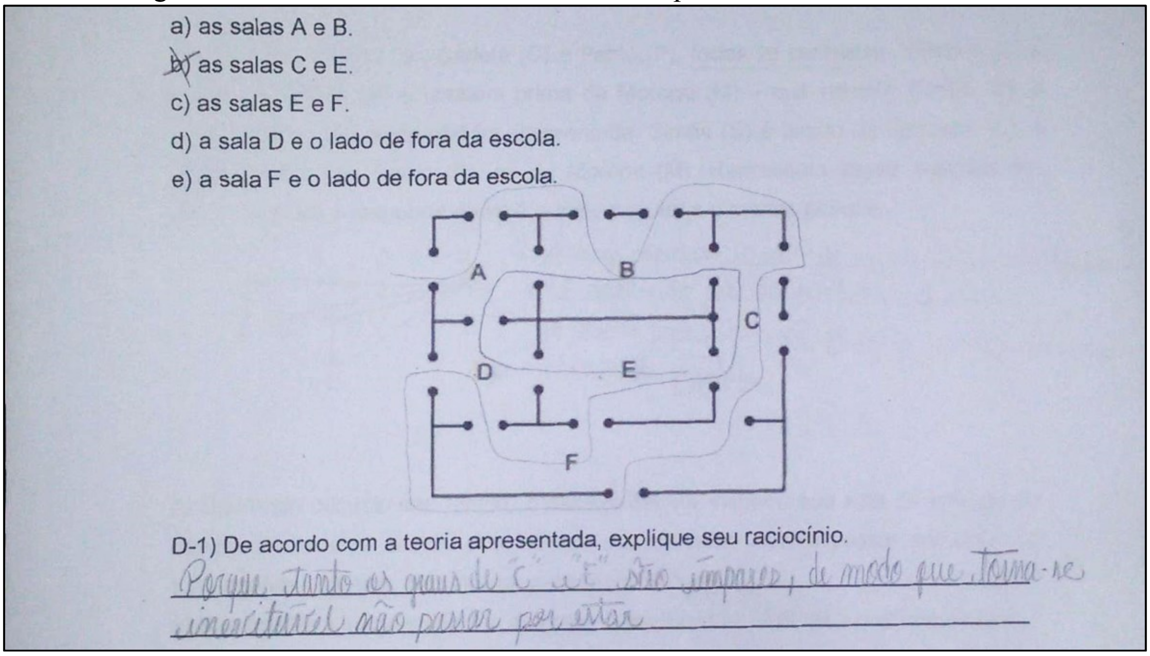
c) Trata-se de caminho euleriano? Aberto ou fechado? Por quê?

SIM. ABERTO. POIS EXISTEM EXATAMENTE DOIS NÚMEROS DE GRAU ÍMPAR NO JOGO, SENDO ESSES CONDICIONANTES PARA A CLASSIFICAÇÃO DE CAMINHO EULERIANO ABERTO.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O desafio era uma questão da OBMEP que, como a questão 5, gerou uma série de questionamentos e embora a maioria tenha conseguido marcar a alternativa correta, poucos foram os que conseguiram justifica-la (Figura 43).

Figura 43 – Justificativa incorreta do Aluno F para o desafio da Atividade 2


a) as salas A e B.
b) as salas C e E.
c) as salas E e F.
d) a sala D e o lado de fora da escola.
e) a sala F e o lado de fora da escola.

D-1) De acordo com a teoria apresentada, explique seu raciocínio.

Porque tanto os graus de "C" e "E" são ímpares, de modo que torna-se inevitável não passar por estar

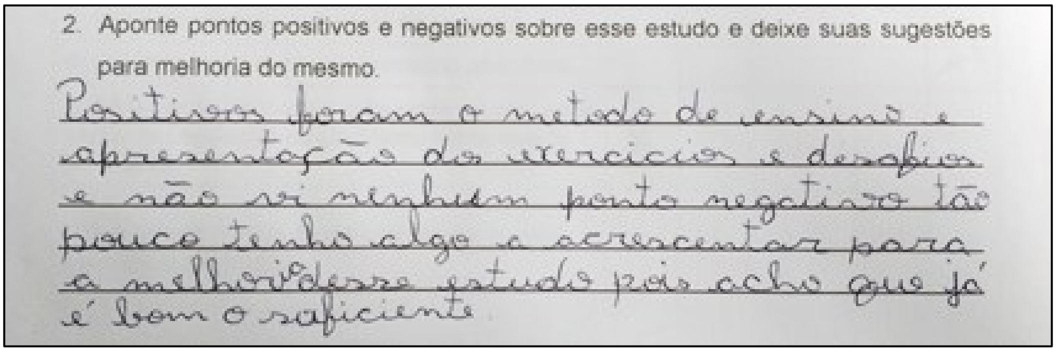
Fonte: Protocolo de pesquisa.

O fechamento das questões da Atividade 2 foi feito por meio de uma correção no quadro, na qual os pesquisadores partiram das respostas dadas pelos alunos. Esta etapa está em consonância com a oitava etapa de Onuchic et al. (2014) que é a busca pelo consenso. Os pesquisadores observaram que os alunos não apagaram as respostas que já haviam dado, conforme havia sido pedido, para fins de pesquisa.

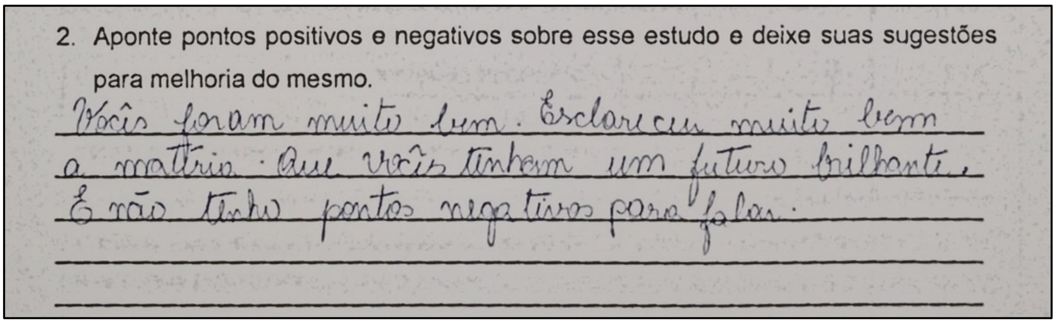
A Atividade 2 foi bem desempenhada pelos alunos, com um percentual de 69% de acertos em questões contextualizadas, nas quais era necessária a correta interpretação dos enunciados. Deve-se frisar que todos utilizaram a Teoria aprendida na resolução das questões. Esse resultado positivo indica que os alunos foram capazes de aplicar a Teoria a diversas situações-problema, como também pode comprovar Gualandi (2012) em sua pesquisa.

Ao final do encontro, foi entregue o Questionário 2 para que os alunos avaliassem o trabalho realizado, do qual se obtiveram respostas bem positivas (Quadro 6).

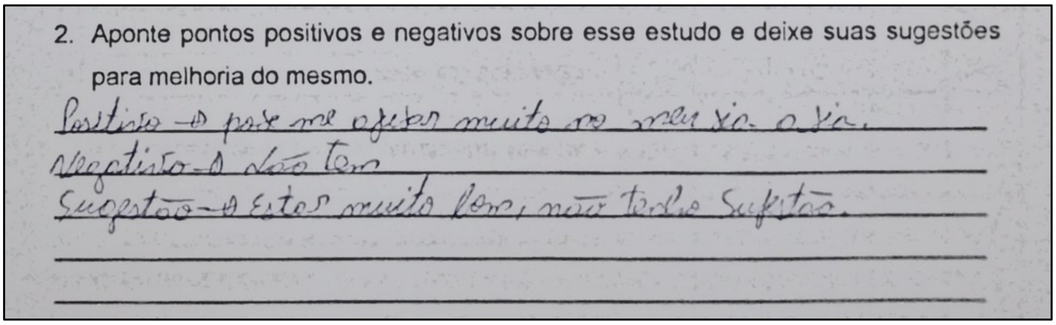
Quadro 6 – Comentários dos Alunos A, E, G e Q sobre a experimentação


2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.
Positivos foram o metodo de ensino e apresentação dos exercicios e desafios e não vi nenhum ponto negativo tão pouco tenho algo a acrescentar para a melhoria desse estudo pois acho que já é bom o suficiente

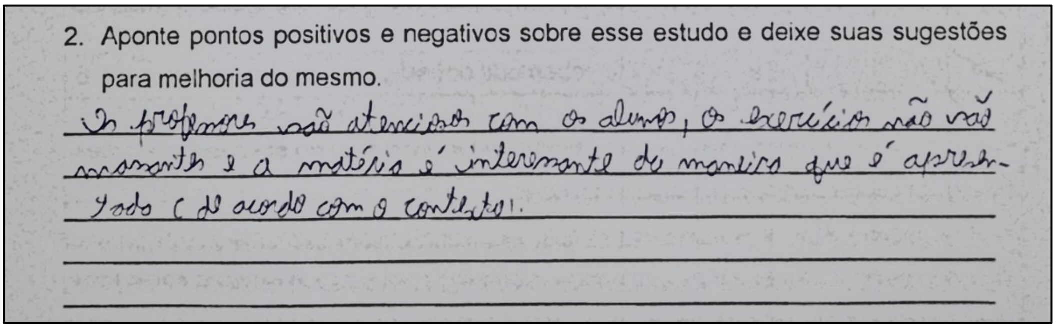
A


2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.
Vocês foram muito bem. Esclareceu muito bem a matéria. Que vocês tenham um futuro brilhante. E não tenho pontos negativos para falar.

E


2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.
Positivo → por me ajudar muito no dia a dia.
Negativo → Não tem
Sugestão → Estar muito bom, não tenho Sugestão.

G


2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.
Os professores são atenciosos com os alunos, os exercícios não são maçantes e a matéria é interessante da maneira que é apresentado e de acordo com o conteúdo.

Q

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Cabe mencionar que o Aluno A, que em um primeiro contato com os pesquisadores mostrou-se desinteressado com o tema, foi o último a sair da sala, tendo deixado respostas positivas em seu Questionário 2, inclusive a respeito da metodologia adotada.

Com base nas respostas obtidas na primeira parte do Questionário 2, foram feitas quatro classes de avaliação: i) das Atividades (Tabela 1); ii) da apresentação da Teoria (Tabela 2); iii) da Apostila (Tabela 3); e iv) da utilização da Teoria (Tabela 4).

Tabela 1 – Avaliação das Atividades

	D	DP	NCND	CP	C
Item e: Ao fazer a Atividade 1 pela primeira vez, você sentiu necessidade de uma ferramenta que te auxiliasse					
	5	0	1	3	8
Item g: As atividades foram relevantes em relação ao conteúdo abordado					
	0	0	0	3	14

Fonte: Elaboração própria.

Observando a Tabela 1, a maioria dos alunos assinalou ter sentido necessidade de uma ferramenta que os auxiliasse na resolução das questões, ao fazerem a Atividade 1 pela primeira vez, assim como a maior parte assinalou que as Atividades foram relevantes em relação ao conteúdo abordado.

Tabela 2 – Avaliação da apresentação da Teoria

	D	DP	NCND	CP	C
Item a: Foi interessante					
	0	0	0	3	14
Item h: Foi apresentado de maneira atraente					
	0	0	0	6	11
Item i: Foi de fácil entendimento					
	0	0	0	3	14
Item j: Despertou a curiosidade e o interesse					
	0	1	1	6	9
Item l: Foi motivador					
	0	0	2	7	8
Item n: Foi diferenciado					
	0	0	1	1	15

Fonte: Elaboração própria.

Cabe destacar que, de acordo com a Tabela 2, com relação à apresentação da Teoria, todos os alunos concordaram ou concordaram parcialmente que foi interessante, apresentada de maneira atraente e de fácil entendimento.

Tabela 3 – Avaliação da Apostila

	D	DP	NCND	CP	C
Item b: Inclui quantidade suficiente de informações					
	0	0	0	3	14
Item c: Inclui quantidade suficiente de material					
	0	0	2	2	13
Item d: Foi claro em relação ao conteúdo abordado					
	0	0	1	1	14

Fonte: Elaboração própria.

Quanto à Apostila, não houve aluno que discordasse que inclui quantidade suficiente de informações e de material, além de ter sido clara no conteúdo abordado, como pode ser observado na Tabela 3.

Tabela 4 – Avaliação da utilização da Teoria

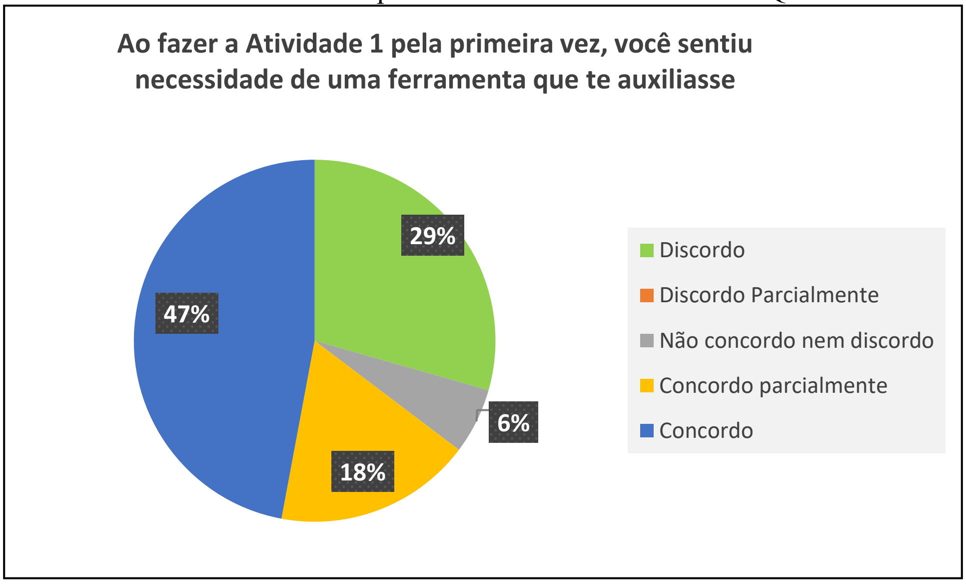
	D	DP	NCND	CP	C
Item f: Saber essa Teoria facilitou a resolução dos exercícios propostos					
	0	1	0	3	13
Item m: Desenvolveu o raciocínio lógico					
	0	0	0	3	14
Item o: É útil na sua vida					
	3	1	1	4	8
Item p: É apropriado para a Educação do Ensino Médio					
	1	0	2	3	11

Fonte: Elaboração própria.

A avaliação dos alunos com relação à utilização da Teoria é, de todas, a classe que mais auxilia na resposta à questão de pesquisa. Em todos os itens desta classe – assim como ocorre nas três outras – a quantidade de alunos que concordam com as afirmativas é superior à quantidade de alunos que assinalaram as demais opções, conforme a Tabela 4.

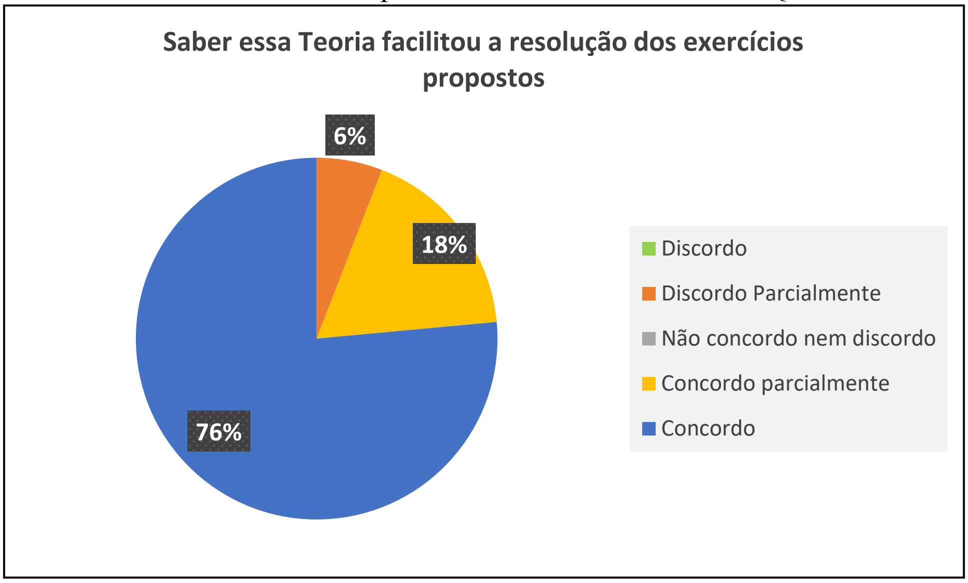
Dos resultados analisados, três merecem destaque devido sua maior contribuição em responder à questão de pesquisa: i) *ao fazer a Atividade 1 pela primeira vez, você sentiu necessidade de uma ferramenta que te auxiliasse* (Gráfico 4); ii) *saber essa Teoria facilitou a resolução dos exercícios propostos* (Gráfico 5); e iii) *é útil na sua vida* (Gráfico 6).

Gráfico 4 – Percentual das respostas dos alunos ao item 1-e do Questionário 2



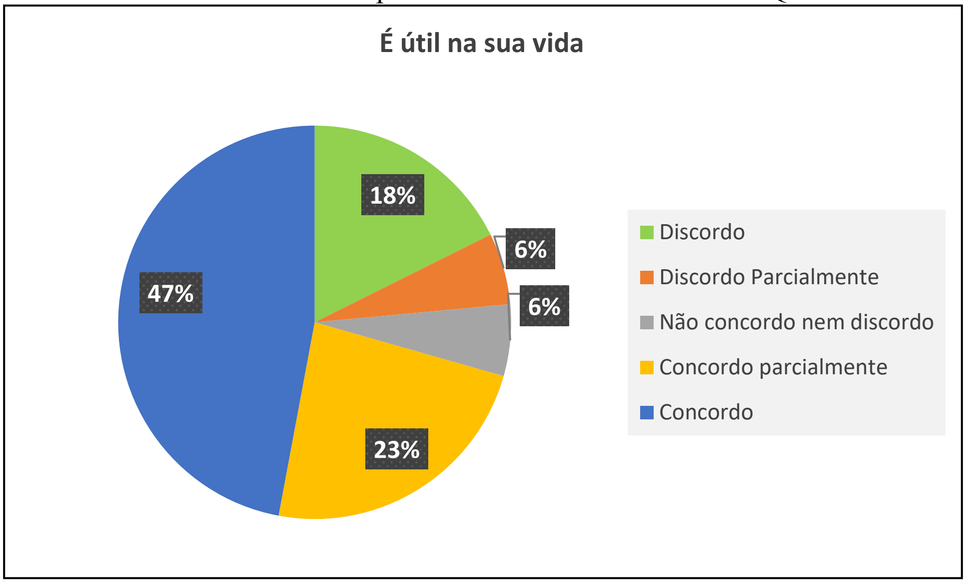
Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 5 – Percentual das respostas dos alunos ao item 1-f do Questionário 2



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 6 – Percentual das respostas dos alunos ao item 1-o do Questionário 2



Fonte: Elaboração própria.

Os alunos que assinalaram D, DP ou NCND em sua maioria justificaram o fato de não terem sentido a necessidade de uma ferramenta que os auxiliasse ao fazer a Atividade 1 pela primeira vez.

Assim como as respostas obtidas por Costa (2013) no questionário de avaliação de sua pesquisa, as respostas ao Questionário 2 foram notoriamente positivas. Somando-se a isto, a observação dos pesquisadores durante a experimentação e a análise das respostas dos alunos às atividades, pode-se dizer que a resposta à questão de pesquisa é positiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria dos Grafos é um novo ramo da Matemática com poder de cativar a atenção dos alunos e despertar seu interesse para a disciplina. Aliado a isto, há inúmeras aplicações desta Teoria em diversas áreas do saber – incluindo a própria Matemática –, e também em muitas situações cotidianas.

Enquanto isso, a escola resiste às novidades, ainda que existam documentos oficiais como os PCNEM (BRASIL, 2000) e as OCEM (BRASIL, 2006) sugerindo a implementação de temas voltados para situações práticas, que atendam às necessidades da vida contemporânea, tais como a Teoria dos Grafos.

Tendo isto em mente, deve-se enriquecer o currículo escolar, incluindo temas mais pertinentes às expensas de outros. É desta forma que se pode melhorar a qualidade da Educação Matemática neste mundo de mudanças rápidas. O que hoje é útil, amanhã pode estar ultrapassado, e o currículo escolar deve estar sempre sendo reformulado para acompanhar este ritmo.

São conteúdos novos, em relação à atual proposta curricular, e com o potencial da Teoria dos Grafos que a Matemática deve ter em seu currículo para tentar melhorar sua imagem perante os alunos, tornando-se mais atraente. As análises do Questionário 2 da experimentação, neste sentido, apontam que os alunos se sentiram motivados, interessados e curiosos com o novo tema apresentado, além de terem respondido positivamente às questões abertas.

As habilidades que esta Teoria pode propiciar ao aluno são inúmeras, podendo-se destacar o desenvolvimento da autonomia e o estímulo ao raciocínio lógico de um aluno que está acostumado a receber estratégias prontas quando deveria construir as suas, e de memorizar, ao invés de aprender. Pode-se ressaltar também que o tema da pesquisa não demanda conhecimentos prévios, podendo ser ensinado inclusive no Ensino Fundamental.

Por todos os benefícios apresentados, além de outros, o ensino da Teoria dos Grafos Eulerianos é justificável. Nesse sentido, diversas pesquisas indicam que a inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio é possível e desejável. Isto já foi feito no currículo básico do Espírito Santo, que pode servir como referência para quaisquer outros estados que também se interessem em implementar a Teoria dos Grafos.

É no panorama, ora apresentado, que esta pesquisa monográfica se insere, tendo as respostas sido obtidas diretamente dos alunos – os que possuem maior interesse no processo educacional –, por meio de um estudo de caso. É bem verdade que esta metodologia de pesquisa não permite generalizações, mas este trabalho monográfico permite apontar uma tendência.

O teste exploratório foi importante como suporte à experimentação, cumprindo seus objetivos e preparando os pesquisadores para possíveis dificuldades a serem enfrentadas.

Quanto à experimentação, as respostas ao Questionário 2 revelaram que os alunos da 2ª. série do Ensino Médio analisados apreciaram o novo tema e que, para a maioria, o uso da Teoria tornou mais fácil a resolução dos problemas propostos. Isto pode ser constatado pela análise das Atividades, já que todos usaram a Teoria apreendida para resolver as questões.

Além disso, a maioria dos alunos analisados também apontou que sentiu necessidade de uma ferramenta – no caso, a Teoria dos Grafos – que os auxiliasse na resolução das questões da Atividade 1, referente ao primeiro encontro.

Observou-se que o problema gerador e o início da formalização com a alusão histórica ao Problema das Sete Pontes foram os momentos que mais motivaram e envolveram os alunos, mostrando-se escolhas acertadas para a sequência didática. A apresentação de aplicações contemporâneas e integradas à realidade dos alunos também tem sua importância, pois reforça a aplicabilidade da Matemática, por vezes questionada em sala de aula.

Com relação a tais questões contextualizadas, o percentual de acertos dos alunos foi considerável, corroborando que os conceitos da Teoria foram apreendidos.

Diante do exposto, a questão de pesquisa teve resposta positiva, pois o tema deste trabalho monográfico foi bem aceito pelos alunos do Ensino Médio analisados. Tal percepção pode ser observada a partir da análise dos instrumentos de coleta de dados.

O tema era desconhecido pelos pesquisadores, por não fazer parte da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática para o qual este trabalho monográfico foi elaborado, como um dos requisitos para a conclusão do curso. O planejamento e o empenho dos pesquisadores em todas as etapas do trabalho, contudo, foram fatores que contribuíram para seu sucesso. A experiência de trabalhar com um novo conteúdo foi importante para o aperfeiçoamento dos futuros professores, pois exigiu estudos aprofundados que colaboraram para o aumento da autonomia tanto como estudantes, quanto como profissionais.

Como estudos futuros, sugere-se a experimentação com o uso de outros tipos de grafos, como os hamiltonianos e os planares. Estes tipos de grafos possuem importantes problemas históricos a eles relacionados, que poderiam servir para motivar a turma, como o Problema do Caixeiro Viajante e o Problema das Quatro Cores. Embora de entendimento mais complexo, estes tipos de grafos já foram abordados em outras pesquisas de âmbito educacional, inclusive em alguns dos estudos relacionados apresentados neste trabalho monográfico. Os grafos podem ser também associados ao ensino de matrizes e análise combinatória.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Modelo de Romberg e o Percurso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro: Unesp, ano 21, n. 29, p. 175-197, 2008. Disponível em: <https://is.gd/MXfCYL>. Acesso em: 08 out. 2016.

_______. Trabalhar Através da Resolução de Problemas: possiblidades em dois diferentes contextos. *Revista Vidya*, Santa Maria: [s.n.], v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun. 2014. Disponível em <https://is.gd/Y4sMg8>. Acesso em: 15 set. 2016.

_______; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula Através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro: GEPEM, ano 33, n. 55, p. 133- 156, jul./dez. 2009.

BATISTA, S. C. F. *M-learnMat*: modelo pedagógico para atividades de m-learning em Matemática. 2011. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://is.gd/CyPrzs>. Acesso em: 23 jun. 2016.

BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos*: Teoria, Modelos e Algoritmos. 4. ed. São Paulo: Editora Blücher, 2006.

BRASIL. *5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1ª. fase – nível 3, 2009, p. 4. Disponível em: <https://is.gd/tczdNS>. Acesso em: 10 mar. 2016.

_______. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006, p. 94. Disponível em: <https://is.gd/bS9ROO>. Acesso em: 05 mar. 2016.

_______. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p. 40. Disponível em: <https://is.gd/xeiJnC>. Acesso em: 28 mai. 2016.

_______. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000, p. 6. Disponível em: <https://is.gd/BkV60i>. Acesso em: 05 mar. 2016.

_______. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 2002, p. 112. Disponível em: <https://is.gd/NDR9cC>. Acesso em: 25 set. 2016.

BRIA, J. Conheça Grafos: interdisciplinaridade e contextualização. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE MATEMÁTICA, 2004. Recife. *Anais*... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <https://is.gd/5hrzWp>. Acesso em 14 jun. 2016.

_______. Grafos, por que não? *Caderno de Licenciatura em Matemática*, Rio de Janeiro, ano 1, n. 1, p. 40-48, mar. 1998. Disponível em: <https://is.gd/Ea794s>. Acesso em: 23 jun. 2016.

_______; FREITAS L. Q. Grafos, Livros Didáticos e Novos Temas. *Caderno Dá-Licença*, v.6, ano 9, p. 78-92, dez. 2007. Disponível em: < https://is.gd/MghfNp>. Acesso em: 23 mai. 2016.

CARDOSO, C. S.; MATOS, F. A. *Grafos Eulerianos e Aplicações em Sala de Aula*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São João del-Rei, Minas Gerais, 2014. Disponível em: <https://is.gd/i0v3cK>. Acesso em: 05 jun. 2016.

CONTE, N. F. *Implicações Geométricas e Topológicas da Planaridade em Grafos*. 2003. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003. Disponível em: <https://is.gd/zBprSt>. Acesso em: 23 jul. 2016.

COSTA, C. S. Matemática Discreta no Ensino Médio: um trabalho com Grafos Eulerianos. *Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção*, v.13, Série B, n.2, p. 8-19, set. 2013. Disponível em: <https://is.gd/iI6bXA> Acesso em: 13 mar. 2016.

CRESWELL, John W. *Projeto de Pesquisa*: métodos qualitativos, quantitativos e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática*: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

ESPÍRITO SANTO (estado). *Currículo Básico da Escola Estadual*: Guia de Implementação. Vitória: Secretaria de Educação, 2009, pp. 120 e 122. Disponível em: <https://is.gd/1NVTwt>. Acesso em: 18 abr. 2016.

GARCIA, V. C. V. Formação de Professores de Matemática e Mudanças Curriculares na Escola. In: BÚRIGO, E. Z. (Org.). *A Matemática na Escola*: novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. p. 11-23.

GIL, A.C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOLDENBERG, M. *A Arte de Pesquisar*: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 11. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GUALANDI, J. H. *Investigações Matemáticas com grafos para o Ensino Médio*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2012. Disponível em: <https://is.gd/nLimaN>. Acesso em: 13 mar. 2016.

HOLANDA, B. *Teoria dos Grafos*. [S.l.: s.n.], 2011. Disponível em: <https://is.gd/qlGwwY>. Acesso em: 17 set. 2016.

JURKIEWICZ, S. *Grafos*: uma introdução. [S.l.: s.n.], 2009. Disponível em: <https://is.gd/PpABGZ>. Acesso em: 14 mai. 2016.

KANDA, J. Y. *Uso de Meta-aprendizado na Recomendação de Meta-heurísticas para o Problema do Caixeiro Viajante*. 2012. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Disponível em: <https://is.gd/hYGNTx>. Acesso em: 21 jul. 2016.

LOPES, M. L. M. L. *Grafos*: jogos e desafios. 1 ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2010.

LUCCHESI, C. L. Introdução à Teoria dos Grafos. In: _______. *Grafos Eulerianos e Hamiltonianos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. p. 99-114.

MALTA, G. H. S. *Grafos no Ensino Médio*: uma inserção possível. 2008. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008. Disponível em: <https://is.gd/b2JOuF>. Acesso em: 05 mar. 2016.

MEDEIROS. K. M. O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, n. 9, p. 32-39, 2001.

MESQUITA, D. R. *Resolução de Problemas Relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental*. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <https://is.gd/3sBkj7>. Acesso em: 05 mar. 2016.

MINAYO, M. C. S. *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2001.

MOREIRA, H; CALEFFE, L. G. *Metodologia da Pesquisa para o Professor Pesquisador*. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

NASCIMENTO, A. F. M.; LASSANCE, R. Avaliação de Programas, Projetos e Atividades Universitárias: referenciando a prática. *Revista Brasileira Extensão Universitária*, [S.l.: s.n.], v. 2, n. 2, p. 63-120, jul./dez. 2004. Disponível em: <https://is.gd/ESk6RG>. Acesso em 24 set. 2016.

OLIVEIRA, M. M. *Como Fazer Pesquisa Qualitativa*. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

ONUCHIC, L. R. Ensino–aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. 3. ed. São Paulo: Unesp, 1999, p. 199-220.

_______.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro: Unesp, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

_______, L. R., et al. *Resolução de Problemas*: teoria e prática. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PEREIRA, G. M. R.; CÂMARA, M. A. Algumas Aplicações da Teoria dos Grafos. *FAMAT em Revista*, Uberlândia: [s.n.], n. 11, p. 67-80, out. 2008. Disponível em: <https://is.gd/WWJZPM>. Acesso em 15 mai. 2016.

PINHEIRO, E.; GREBOT, G. Uso da Teoria de Grafos e Metodologia de Resolução de Problemas. In: I ENCONTRO NACIONAL PIBID-MATEMÁTICA, 2012. Santa Maria. *Anais*... Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2012. Disponível em: <https://is.gd/IIEeUp>. Acesso em: 06 mar. 2016.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Tradução por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro: Unesp, v.25, p. 1-23, 2006. Disponível em: <https://is.gd/OwXJwB>. Acesso em: 30 abr. 2016.

RIBEIRO, M. V. *O Ensino do Conceito de Integral, em Sala de Aula, com Recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas.* 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: <https://is.gd/F4ASqi>. Acesso em: 18 set. 2016.

RICHARDSON, R. J. *Pesquisa Social*: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 1989.

SÁ, L. C.; SILVA, S. A. Uso de História da Matemática no Ensino Médio: uma abordagem inicial para o ensino da Teoria dos Grafos. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, v. 3, n. 1, p. 13-29, jun. 2013. Disponível em: <https://is.gd/qIS1k7>. Acesso em: 03 mar. 2016.

SILVA, C. C. *O Cálculo no Ensino Médio*: as taxas de variação e o conceito de derivada. 2012. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2012. Disponível em: <https://is.gd/n8uz88>. Acesso em: 29 ago. 2016.

SILVA, F. L. Q.; CASTRO FILHO, J. A. Resolução de Problemas como Metodologia para Aprender Matemática. In: VIII ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. *Anais…* Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004, p. 1-15. Disponível em: <https://is.gd/drR04r> Acesso em: 05 set. 2016.

SIQUEIRA, A. S. *Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares*. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Instituto Luiz Alberto Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: < https://is.gd/Rg87bA>. Acesso em: 21 set. 2016.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. *Metodologia da Resolução de Problemas*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2001. Disponível em: < https://is.gd/xMfbKN>. Acesso em: 07 set. 2016.

SOUZA, C. P. A.; NUNES, C. B. *A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática em Sala de Aula.* [S.l.: s.n.], 2007. Disponível em: <https://is.gd/1DPpvM>. Acesso em: 23 set. 2016.

SOUZA, R. F. *Resolução de Problemas via Teoria de Grafos*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Aplicadas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <https://is.gd/qKQ9Pk>. Acesso em: 25 jun. 2016.

YIN, R. K. *Estudo de Caso*: planejamento e métodos. Tradução por Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZABALA, A. *A Prática Educativa*: como ensinar. Tradução por Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Questionário 1

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional promovida por Igor Cardoso de Abreu, Larissa Console de Oliveira e Thiago Fragoso Gonçalves, alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IF Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação das professoras Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo e Carla Antunes Fontes. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Desde já, gratos pela atenção.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO BRASIL GOVERNO FEDERAL DIRLIC matemática LICENCIATURA

Questionário 1

1. Nome: ______________________________
2. Quantos anos você tem? ____ anos.
3. Gênero: (   ) Feminino   (   ) Masculino
4. Você gosta de Matemática? Por quê?

____

____

5. Você acha importante estudar Matemática? Por quê?

____

____

6. Você aplica os conhecimentos de Matemática no seu cotidiano? Em quê?

____

____

____

7. Você já ouviu falar sobre a Teoria dos Grafos? (   ) Sim   (   ) Não

    7.1. Em caso afirmativo, o que você sabe sobre esta teoria?

____

____

APÊNDICE B: Questionário 2

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional promovida por Igor Cardoso de Abreu, Larissa Console de Oliveira e Thiago Fragoso Gonçalves, alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IF Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação das professoras Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo e Carla Antunes Fontes. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Desde já, gratos pela atenção.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO BRASIL GOVERNO FEDERAL DIRLIC matemática LICENCIATURA

Questionário 2

Nome: ________________________________

1. Com base na escala abaixo:

D	Discordo
DP	Discordo parcialmente
NCND	Não concordo nem discordo
CP	Concordo parcialmente
C	Concordo

Em sua opinião, o estudo sobre a Teoria dos Grafos Eulerianos:

	D	DP	NCND	CP	C
a. Foi interessante					
b. Inclui quantidade suficiente de informações					
c. Inclui quantidade suficiente de material					
d. Foi claro em relação ao conteúdo abordado					
e. Ao fazer a Atividade 1 pela primeira vez, você sentiu necessidade de uma ferramenta que te auxiliasse					

f. Saber essa Teoria facilitou a resolução dos exercícios propostos					
g. As atividades foram relevantes em relação ao conteúdo abordado					
h. Foi apresentado de maneira atraente					
i. Foi de fácil entendimento					
j. Despertou a curiosidade e o interesse					
l. Foi motivador					
m. Desenvolveu o raciocínio lógico					
n. Foi diferenciado					
o. É útil na sua vida					
p. É apropriado para a Educação do Ensino Médio					

O espaço a seguir é para comentários relacionados a qualquer afirmativa acima. Caso tenha assinalado a coluna D, DP ou NCND para alguma(s) afirmativa(s), por favor, mencione o(s) motivo(s) que levaram a essa opção.

____

____

____

____

____

____

____

____

2. Aponte pontos positivos e negativos sobre esse estudo e deixe suas sugestões para melhoria do mesmo.

____

____

____

____

____

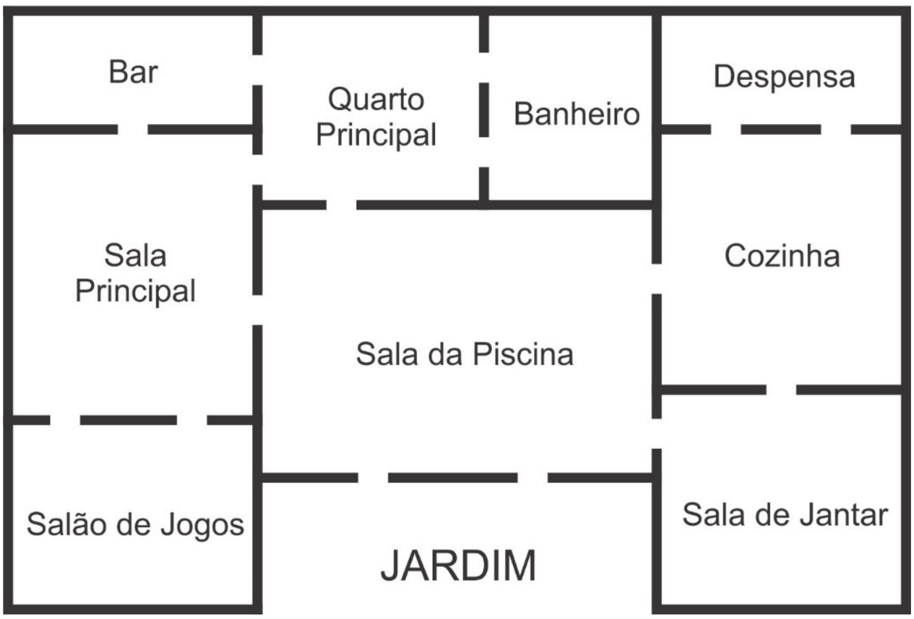
APÊNDICE C: Atividade 1

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO | BRASIL GOVERNO FEDERAL | DIRLIC | matemática LICENCIATURA

ALUNO:________________________________ DATA: ___/___/___

ATIVIDADE 1

1) Questão Inicial[8]:



Esta é a planta da mansão de Jeniffer Earspring, famosa cantora pop, que foi assassinada na sala da piscina. Chamado ao local, Xerlóque Rôlmes interrogou os empregados presentes no dia do crime. Eles prestaram os depoimentos descritos a seguir:

O mordomo disse que viu a empregada e o jardineiro passarem pelo jardim, entrarem na sala da piscina por uma das portas e, algum tempo mais tarde, voltarem ao jardim pela outra porta.

---

[8]Questão adaptada de COSTA, C. S. Matemática discreta no ensino médio: um trabalho com Grafos Eulerianos. **Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção**, v.13, Série B. n.2, p. 8-19, set. 2013. Disponível em: < https://is.gd/il6bXA>.

A empregada, em sua defesa, afirmou que precisava fazer a faxina em todos os cômodos, com exceção do bar. Disse, também, que entrou na mansão por uma das portas da sala da piscina, passou por todas as portas uma única vez, com exceção das que levam ao bar, e saiu pela outra porta.

O jardineiro, em sua defesa, alegou que precisava repor as flores de todos os cômodos da mansão. Afirmou, ainda, que entrou na mansão por uma das portas da sala da piscina, passou por todas as portas uma única vez e saiu pela outra porta.

Xerlóque então comprovou a veracidade dos depoimentos olhando a gravação da câmera de segurança que atestava que o jardineiro e a empregada, de fato, haviam entrado por uma das portas da sala da piscina e saído por outra; viu também que todos os cômodos tinham flores bem viçosas e que, com exceção do bar, todos os cômodos estavam impecavelmente limpos.

Após analisar a planta da mansão, Rôlmes pensou por alguns minutos e declarou ter solucionado o caso. Havia uma contradição no depoimento de um dos suspeitos!

Você é capaz de apontar quem foi culpado por Xerlóque Rôlmes? Explique o raciocínio desenvolvido pelo detetive. Que alterações deveriam ser feitas na mansão para que o depoimento do culpado deixasse de ser contraditório?

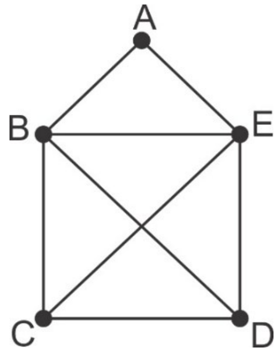
2) Ligue os pontos, passando por todas as linhas apenas uma vez e tente percorrer todo o caminho sem retirar o lápis do papel, classificando cada figura segundo as siglas:

– Caminho impossível (CI);

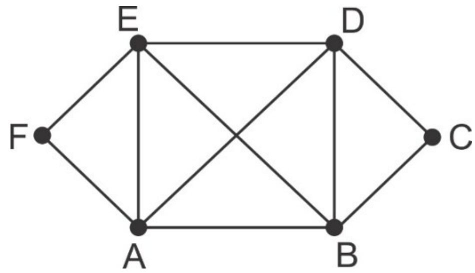
– Caminho possível com começo e fim no mesmo ponto (CPMP);

– Caminho possível com começo e fim em diferentes pontos (CPDP).

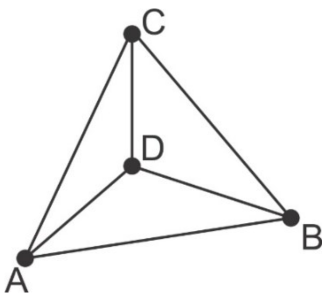
a)



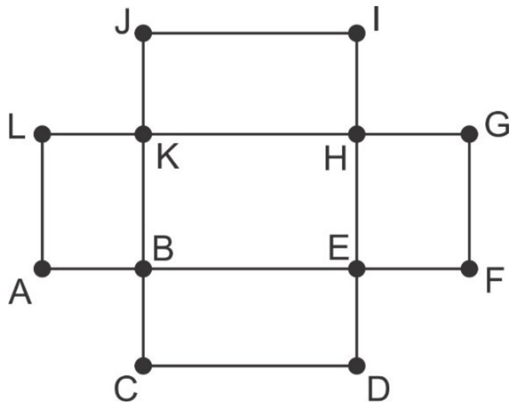
b)



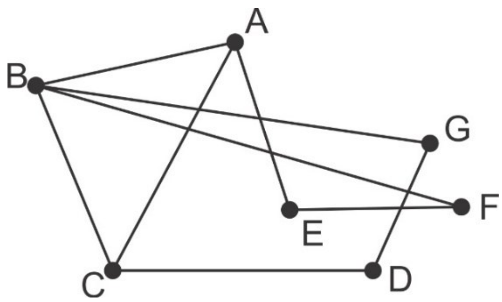
c)



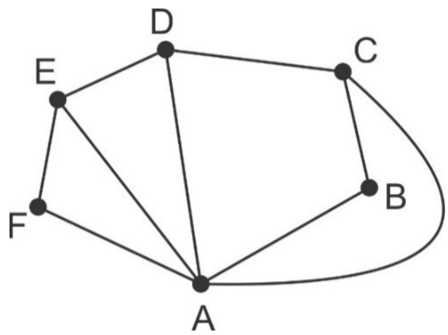
d)



e)



f)



3) Escolha uma das figuras da questão anterior e tente mudar sua classificação inserindo novas linhas e/ou novos pontos. Desenhe abaixo o que você pensou.

4) Analise os caminhos possíveis com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

5) Analise os caminhos possíveis com começo e fim em diferentes pontos (CPDP) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

6) Analise os caminhos impossíveis (CI) da 2ª questão. O que eles têm em comum que os leva a essa classificação?

APÊNDICE D: Apostila

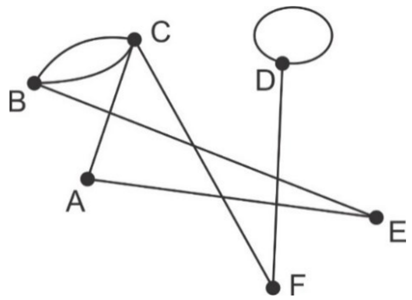
ALUNO: ____ DATA: ___/___/___

GRAFOS EULERIANOS

A atividade anterior abordou figuras que na Matemática são chamadas de grafos. “Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos” (MALTA, 2008, p.13)[9].

Os pontos dos grafos são chamados de vértices ou nós e os segmentos que os conectam, de arestas ou arcos. Dizemos que um grafo $G = (V, A)$ tem um número V de vértices e um número A de arestas. Os vértices serão representados por letras maiúsculas $(A, B, C, \ldots)$.

Chama-se grau de um vértice à quantidade de arestas ligadas a ele. Usaremos a notação $d(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$ na qual n é essa quantidade de arestas. Observe o grafo $G = (6{,}9)$ a seguir:



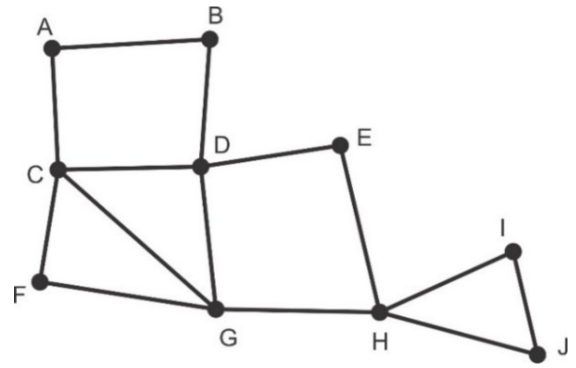
Note que há uma aresta que parte de D e retorna a D. Chama-se laço uma aresta desse tipo, que é contada duplamente para fins de atribuição de grau. Note também que há duas arestas ligando B e C, por isso, percebe-se que não há limite quanto ao número de arestas conectando dois vértices. Temos então: $d(A) =$ ___, $d(B) =$ ___, $d(C) =$ ___, $d(D) =$ ___, $d(E) =$ ___ e $d(F) =$ ___

Denomina-se **grafo euleriano** (ou **caminho euleriano fechado**) aquele que possui um caminho com início e fim no mesmo vértice, passando por todas as arestas uma única vez. Na Atividade 1, os grafos que possuem caminho possível

[9] MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio**: uma inserção possível. 2008. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008.

com começo e fim no mesmo ponto (CPMP) são exemplos de grafos eulerianos. A condição necessária e suficiente para que tenhamos um grafo desse tipo é que todos os seus vértices tenham grau par.

Exemplo 1: Observe o caminho euleriano fechado a seguir.



A-1) Dê o grau de cada um dos seus vértices.

____

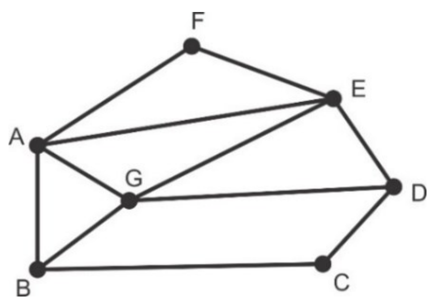
____

B-1) Apresente um caminho do grafo euleriano.

____

Denomina-se **grafo semi-euleriano** (ou **caminho euleriano aberto**) o grafo que possui um caminho com início e fim em vértices diferentes, passando por todas as arestas uma única vez. Na Atividade 1, os grafos que possuem caminho possível com começo e fim em diferentes pontos (CPDP) são exemplos de grafos semi-eulerianos. A condição necessária e suficiente para que tenhamos um grafo desse tipo é que este possua exatamente dois vértices com grau ímpar. Deve-se escolher um dos vértices de grau ímpar como ponto de partida e o caminho euleriano aberto terá fim no outro vértice de grau ímpar.

Exemplo 2: Observe o caminho euleriano aberto a seguir.



A-2) Dê o grau de cada um dos seus vértices.

____

____

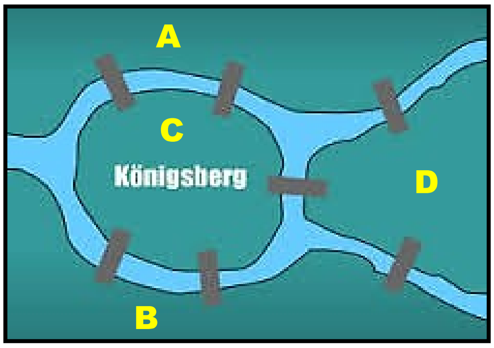
B-2) Apresente um caminho do grafo semi-euleriano.

____

Quando um grafo não é euleriano nem semi-euleriano, diz-se que é um **grafo não euleriano**.

A Teoria dos Grafos surgiu de um problema enviado em 1736 pelo prefeito da cidade russa de Königsberg (atual Kaliningrado) a um dos mais notórios matemáticos que já existiu: Leonhard Euler (1707-1783). Consta que na cidade havia sete pontes sobre o rio Pregel, que uniam quatro porções de terra e o problema consistia em percorrer cada uma dessas pontes uma única vez, retornando ao ponto de partida. Este episódio ficou conhecido como “o problema das sete pontes”.

A-3) A figura abaixo ilustra a descrição. Represente-a em forma de grafo.



B-3) A que conclusão Euler chegou?

____

____

C-3) Que modificações você faria no “problema das sete pontes” para que se obtenha um caminho euleriano fechado?

____

____

APÊNDICE E: Atividade 2

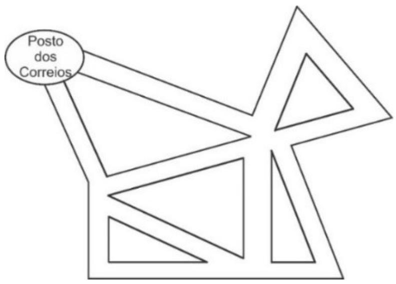
ALUNO: ____________________________________ DATA: ___/___/___

ATIVIDADE 2

1) Tião (T), Horácio (H), Carlota (C) e Pablo (P), todos se conhecem. Carlota (C) é amiga de Brigite (B) e também prima de Morena (M) – que namora Simão (S), a quem Carlota (C) ainda não foi apresentada. Simão (S) é amigo de Leocádio (L), e ambos conhecem Pablo (P), ex de Morena (M). Represente essas relações em forma de grafo e responda quem é o mais popular e o menos popular[10].

2) Querendo otimizar seu tempo, o carteiro Melvin mapeou sua rota de entrega de correspondências e decidiu que, ao sair dos Correios, deverá passar por todas as ruas apenas uma vez, até retornar para seu posto[11].

a) Represente a figura em forma de grafo, nomeando os vértices à sua maneira.



b) Será que ele conseguirá tal feito? Justifique sua resposta a partir da teoria vista, lembrando de indicar o caminho (Exemplo: A-B-C-A…).

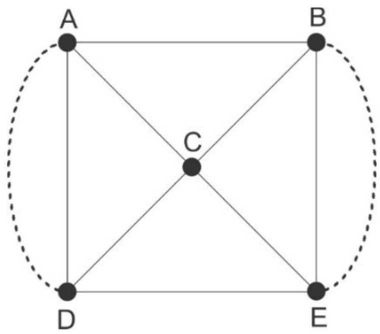
____

____

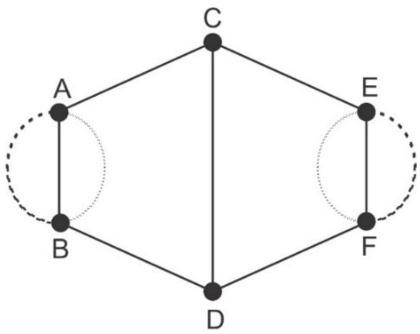
[10]Questão adaptada de BRIA, J. **Conheça Grafos:** interdisciplinaridade e contextualização. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE MATEMÁTICA, 2004. Recife. Anais… Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <https://is.gd/5hrzWp>.

[11]Questão adaptada de BRIA, J.; FREITAS L. Q. Grafos, livros didáticos e novos temas. **Caderno Dá-Licença**, v.6, ano 9, p. 78-92, dez. 2007. Disponível em: < https://is.gd/MghfNp>.

3) Adamastor, gari dos bairros Aquiperto e Tãodistante, representados abaixo, concluiu que se percorresse apenas uma vez cada uma das vias que precisa limpar, retornando para o ponto onde começou, otimizaria seu trabalho. Os bairros estão representados abaixo e as vias que ele deve limpar são: ruas (representadas pelas arestas cheias); passarelas de pedestres (representadas pelas arestas tracejadas); e ciclovias (representadas pelas arestas pontilhadas). Sabendo que cada vértice é um ponto de encontro entre as vias, responda[12]:



Aquiperto



Tãodistante

a) Qual o grau de cada vértice de Aquiperto? E de Tãodistante?

b) É possível que, em Aquiperto, ele saia de um ponto, limpe todas as vias e retorne ao mesmo ponto? E em Tãodistante?

c) Caso você tenha respondido "sim" no item anterior para algum dos bairros, apresente um caminho possível (Exemplo: A-B-C-A…).

d) Se respondeu "não" para algum dos bairros no item b: é possível que haja caminho euleriano aberto? Por quê? Caso seja possível, apresente um (Exemplo: A-B-C-A…).

[12]Questão adaptada de COSTA, C. S. Matemática discreta no ensino médio: um trabalho com Grafos Eulerianos. **Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção**, v.13, Série B. n.2, p. 8-19, set. 2013. Disponível em: < https://is.gd/iI6bXA>.

4) Buanazonga foi contratado pelo curso de idiomas Pentabox Slimes para pintar todas as portas do prédio – cuja planta segue abaixo – seguindo os critérios[13]:

– Os dois lados de cada porta devem ser pintados;

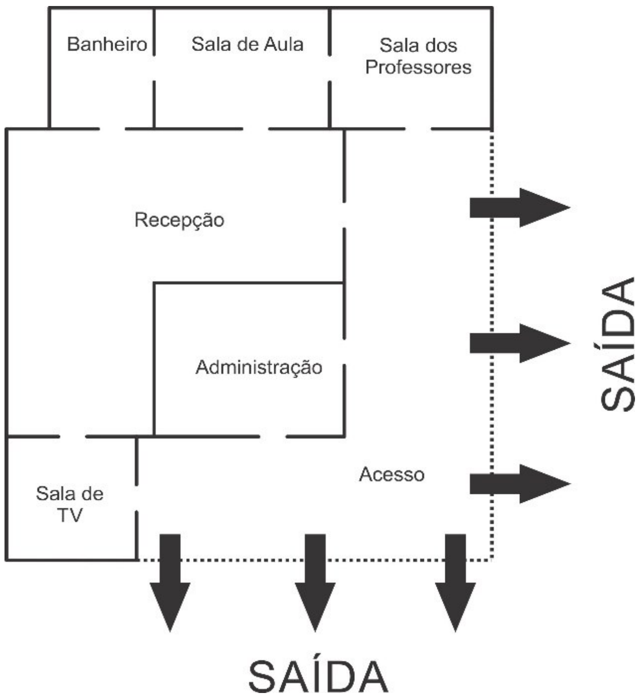
– Após pintar um lado da porta, Buanazonga deve pintar imediatamente seu outro lado;

– Após pintar os dois lados da porta, ele deve trancá-la para que seque, não podendo, portanto, passar por ela novamente;

– Não passar por nenhuma porta sem antes pintá-la.

a) Represente a planta do curso Pentabox Slimes em forma de grafo.

Observação: Use A para a administração, B para o banheiro, P para a sala dos professores, O para o acesso, R para a recepção, S para a sala de aula, T para a sala de TV.



b) O pintor conseguirá seguir estes critérios para terminar o serviço?

____

____

[13]Questão adaptada de PINHEIRO, E.; GREBOT, G. **Uso da Teoria de Grafos e Metodologia de Resolução de Problemas**. In: 1º ENCONTRO NACIONAL PIBID-MATEMÁTICA, 2012. Santa Maria. Anais… Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2012. Disponível em: <https://is.gd/IIEeUp>.

c) Por onde ele deve começar? Onde ele deverá terminar?

d) Há caminho euleriano? Aberto ou fechado?

5) “Existem várias versões que tentam decifrar de onde veio o jogo, mas nenhuma delas até hoje pôde ser confirmada. Acredita-se, porém, que ele tenha surgido na China, inventado por um soldado chamado Hung Ming, que teria vivido de 243 a 181 a.C. Os primeiros indícios da presença do dominó na Europa são de meados do século XVIII, quando era jogado nas cortes de Veneza e Nápoles. […] O nome dominó provavelmente deriva da expressão latina *domino gratias*, que significa ‘graças a Deus’, dita pelos padres europeus enquanto jogavam” (Mundo Estranho)[14]. Abaixo, temos peças de um dominó incompleto[15]. Pergunta-se:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	5
2	3	5	6	1	3	4	5	6	2	3	5	4	5	6	5

a) Qual o grau de cada número?

b) É possível montá-las na sequência do jogo de dominó? Se sim, qual seria o número inicial? E o final?

c) Trata-se de caminho euleriano? Aberto ou fechado? Por quê?

[14]Mundo Estranho. **Qual é a origem do dominó?** Disponível em: <http://mundoestranho.abril.com.br/materia/qual-ea-origem-do-domino>. Acesso em: 16 jun. 2016.
[15]Questão adaptada de LOPES, M. L. M. L. **Grafos:** jogos e desafios. 1 ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2010.

Desafio: (OBMEP, 2009 - adaptada) A figura mostra a planta de uma escola que tem seis salas, indicadas pelas letras de A até F. Joãozinho entrou na escola, percorreu todas as salas e foi embora, tendo passado exatamente duas vezes por uma das portas e uma única vez por cada uma das outras. A porta por qual Joãozinho passou duas vezes liga:

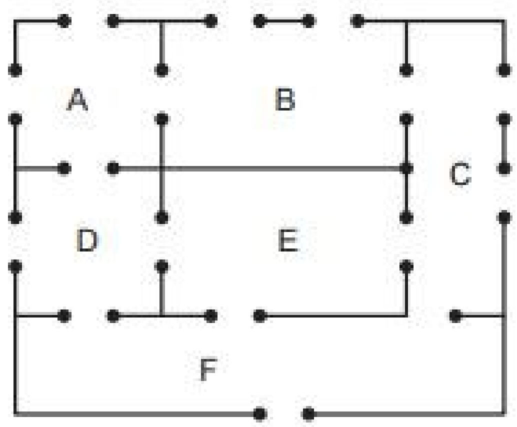
a) as salas A e B.

b) as salas C e E.

c) as salas E e F.

d) a sala D e o lado de fora da escola.

e) a sala F e o lado de fora da escola.



D-1) De acordo com a teoria apresentada, explique seu raciocínio.

____

____

____

____

____

____