LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE LOGARITMOS

IGOR LEITE SOARES

Campos dos Goytacazes – RJ

2017

IGOR LEITE SOARES

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE LOGARITMOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes – RJ

2017

IGOR LEITE SOARES

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE LOGARITMOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 11 de abril de 2017.

Banca Avaliadora:

....

Prof.ª Carla Antunes Fontes (orientadora)
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

....

Prof.ª Ana Paula Rangel de Andrade
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

....

Prof.ª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por iluminar o meu caminho e me dar forças para concluir os meus objetivos. A toda a minha família (mãe, pai, irmã, avô, avó, tios, tias, primas e primos) por todo o apoio dado.

Não posso deixar também de agradecer aos meus amigos, que nos momentos difíceis e de estresse sempre estiveram ao meu lado, com palavras amigas e o companheirismo que ajudaram a “desestressar”.

Quero deixar um agradecimento especial à família Pré-Vest UENF que abriu as portas para que eu pudesse me preparar para o vestibular e posteriormente começar a lecionar. Lá vivenciei grandes experiências e comecei a perceber que gostava e me sentia bem em sala de aula, além de fazer muitas amizades que certamente levarei para o resto da vida.

Quero agradecer a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, pois, cada um com o seu jeito foi capaz de transmitir lições que vão além do conteúdo. O amor que vocês demonstram ao lecionar nos motiva e nos inspira, o cuidado, o carinho, a preocupação que há conosco, alunos, mostra que o bom professor precisa muito mais do que saber passar o conteúdo. Ele precisa ser “humano”, preocupar-se com os alunos, pois ele tem que amar o que faz, e certamente, essa foi uma das maiores lições que aprendi com todos vocês.

Quero agradecer à professora Carmem Lúcia por me mostrar tudo o que já foi escrito quando fui seu aluno no Ensino Médio. O amor e a preocupação que ela demonstrava em sala de aula fizeram com que eu me apaixonasse ainda mais pela Matemática. Quero agradecer também à Ana Paula Rangel, pelos ensinamentos e por sempre procurar o nosso melhor, se preocupando com o nosso desempenho, quando me procurou para saber se estava acontecendo alguma coisa porque havia apresentado um desempenho abaixo do normal. Por fim, quero agradecer à Carla por todo o apoio dado, principalmente durante o período da monografia, em que me senti completamente amparado e preparado para realizar um grande trabalho. Toda a sua compreensão, calma e orientação foram essenciais para a realização da monografia. Sempre disposta a ajudar, dando dicas, conselhos, conversando, sempre procurando melhorar o trabalho e procurando me ouvir, o que fez com que esse trabalho tenha sido prazeroso para mim, no qual adquiri grandes conhecimentos.

Meus sinceros agradecimentos a todos!

RESUMO

O presente trabalho monográfico tem como objetivo investigar o impacto do uso da metodologia de História da Matemática como agente de cognição no processo de ensino e aprendizagem de logaritmos. Para isto, foi elaborada uma sequência didática com especial enfoque na criação dos logaritmos, destacando ainda algumas mudanças que ocorreram ao longo de sua evolução, tais como a introdução da noção de base e a notação utilizada atualmente. Ressaltou-se também, suas diversas aplicações em outras ciências, tais como Física, Química e Biologia. Tal trabalho foi aplicado para alunos do terceiro ano do Ensino Médio e buscou-se perceber, durante os encontros realizados, se a História da Matemática pôde auxiliar no ensino e aprendizagem dos logaritmos. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados questionários e observações ao longo da aplicação da sequência proposta. Os resultados obtidos sinalizam uma contribuição positiva do uso da metodologia de História da Matemática como agente de cognição na compreensão do conceito de logaritmo e também de suas propriedades.

Palavras chaves: Logaritmos, História da Matemática e Método de prostaférese.

ABSTRACT

This work aims to investigate the impact of using the methodology called History of Mathematics as an agent of cognition in the process of learning and teaching logarithms. To this end, it was elaborated a didactical sequence in which special emphasis was given to the creation of logarithms, highlighting some of the changes that occurred during its evolution, such as the introduction of the notion of base and the notation currently used. Its many applications in other sciences, named in Physics, Chemistry and Biology were also emphasized. The work was applied to third year High School students, and sought to understand, during the meetings that were held, if the use of the History of Mathematics could assist in the teaching and learning of logarithms. As instruments of data collection, surveys and observations during the application of the proposed sequence were used. The results that were obtained point to a positive contribution of using the methodology called History of Mathematics as an agent of cognition in the comprehension of both logarithm’s concept and properties.

Keywords: Logarithms, History of Mathematics and prosthaphaeresis method.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos conteúdos matemáticos em que os estudantes apresentam grande dificuldade é concernente ao estudo dos logaritmos (FERREIRA, 2006). Segundo esta autora, isto se dá porque o conhecimento não pode ser construído somente por meio da definição algébrica, que por vezes é apenas memorizada. Ao mesmo tempo, muitos estudantes concluem o Ensino Médio sem relacionar o logaritmo a outros componentes curriculares, ignorando assim sua aplicabilidade em uma vasta gama de contextos.

Diante disso, é proposto um trabalho com logaritmos que se utilize de outras metodologias, a saber, a História da Matemática como agente de cognição. Almeja-se mostrar aos estudantes como o conceito se desenvolveu, bem como sua importância para diversas ciências. Também com uma abordagem interdisciplinar, passar-se-á por todo o contexto que levou à criação da definição inicial de logaritmo por Napier até chegar à adotada atualmente, com sua notação e simbologia, destacando seus desdobramentos em outras ciências. Corroborando esta ideia, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam que:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2000, p. 43).

No que diz respeito ao uso da História da Matemática como agente de cognição, Mendes, Fossa e Valdés (2006, p. 12) afirmam que “um exercício de investigação e recriação da história matemática faz com que os estudantes reflitam sobre as estratégias cognitivas criadas ao longo da história da humanidade, levando-os a compreensão dos fatos matemáticos praticados pela sociedade”. Dessa forma, destaca-se a importância de uma abordagem histórica e investigativa no ensino da Matemática.

Esse contexto motivou a elaboração de um trabalho de conclusão de curso no qual se busca responder à seguinte questão de pesquisa: “Como a História da Matemática pode auxiliar no ensino e aprendizagem de logaritmos?”. Para responder a esta questão, formulouse o seguinte objetivo: Investigar a utilização da História da Matemática como agente de cognição no ensino e aprendizagem de logaritmos.

Neste trabalho construiu-se uma sequência didática abordando logaritmos e suas propriedades que perpassou ainda os três componentes de ensino segundo Lima (1999): Conceituação, Manipulação e Aplicações, detalhados na seção 1.1.

Previamente à construção da sequência didática, foi realizada uma revisão bibliográfica, em busca de pesquisas que tratassem do mesmo tema. Foram encontrados três trabalhos relacionados: a dissertação de Evanildo Costa Soares, orientado por Iran Abreu Mendes, intitulada "Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula" (SOARES, 2011), a dissertação de Andreia Júlio de Oliveira, orientada por Arlete de Jesus Brito, com o título "O ensino de logaritmos a partir de uma perspectiva histórica" (OLIVEIRA, 2005) e por fim a dissertação de Ronize Lampert Ferreira, intitulada "Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática" (FERREIRA, 2006), orientada pela doutora Eleni Bisognin e coorientada pela doutora Maria Arleth Pereira. Estes trabalhos serão comentados no capítulo 1, seção 1.4.

Quanto à abordagem, foi realizada uma pesquisa qualitativa, e quanto ao procedimento de pesquisa foi realizado um estudo de caso. Foi escolhido como público alvo alunos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública federal do município de Campos dos Goytacazes, que já tivesse aprendido logaritmos segundo a "abordagem tradicional", ou seja, sem referências à época de sua criação ou ao desenvolvimento histórico do conceito. Para a análise dos resultados foram utilizadas as observações feitas durante os encontros, além das respostas dos alunos durante as atividades bem como ao questionário final.

Este trabalho monográfico encontra-se estruturado em três capítulos, além desta introdução e das considerações finais. O primeiro versa sobre o aporte teórico, destacando ainda os trabalhos relacionados ao tema, encontrados ao longo da pesquisa. No segundo, discorre-se brevemente sobre a metodologia de pesquisa e é explicitada a elaboração da sequência didática, com todas as etapas que se pretende cumprir em sua aplicação. Já o terceiro trata da aplicação da sequência proposta e da análise dos resultados obtidos.

1 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo será apresentado o aporte teórico que serviu de base para a construção do trabalho monográfico. Subdivide-se em quatro seções: “Os três componentes do ensino de Matemática segundo Lima”, “História da Matemática como agente de cognição”, “Breve história dos logaritmos” e “Trabalhos relacionados”.

1.1 Os três componentes do ensino de Matemática segundo Lima

O ensino de Matemática deve possibilitar aos estudantes condições de utilizarem o conhecimento adquirido em situações da vida real (LIMA, 1999). Nesta busca, segundo o autor, o ensino deve abranger três componentes, chamadas de Conceituação, Manipulação e Aplicações, e o sucesso do processo de aprendizagem depende da dosagem correta de cada um.

De acordo com Lima (1999), a Conceituação trata da formulação correta e objetiva das definições matemáticas, da prática do raciocínio dedutivo, da conscientização de que as conclusões são provenientes de hipóteses e da criação de conexões entre diversos conceitos. A Conceituação é imprescindível para o bom resultado das Aplicações.

Lima (1999) exemplifica que, no Movimento da Matemática Moderna, ocorrido nas décadas de 1960 e 1970, houve valorização excessiva da Conceituação em detrimento dos outros componentes. Isto levou a Matemática estudada nas escolas a ser “um vago e inútil exercício de generalidades, incapaz de suprir as necessidades das demais disciplinas científicas e mesmo do uso prático no dia-a-dia” (LIMA, 1999, p. 3).

A Manipulação deve gerar no estudante a capacidade de manusear equações, fórmulas e construções geométricas. Esta é a componente que mais aparece nos livros escolares e em salas de aula, com listas de exercícios em abundância (LIMA, 2003). Sua presença é tão marcante que muitos consideram que a Matemática se resume a ela. Essa componente é importante para o ensino, porém seu uso não deve ser excessivo, pois não estimula a criatividade e nem a capacidade de raciocinar abstratamente (LIMA, 2003).

No ensino da Geometria Elementar, por exemplo, segundo Lima (1999), deveria ser dada mais ênfase à conceituação, o que ocorreria por meio do trabalho com demonstrações.

De acordo com o autor, o método atual “enfatiza as relações métricas, ignora as construções com régua e compasso e reduz todos os problemas a manipulações numéricas” (LIMA, 1999, p. 5).

As Aplicações englobam a utilização das noções e teorias matemáticas para resolver tanto problemas do dia-a-dia, como aqueles originados em outras áreas da Ciência, gerando um raciocínio criativo e crítico (LIMA, 2003).

Segundo Lima (1999), para resolver problemas em que o objeto matemático a ser utilizado (logaritmos, funções, etc.) não esteja explícito no enunciado é preciso estar familiarizado com os conceitos envolvidos. Por isso a conceituação é tão importante para as aplicações. Ainda de acordo com o autor, “A falta de aplicações para os temas estudados em classe é o defeito mais gritante do ensino da Matemática em todas as séries escolares.” (LIMA, 1999, p. 6).

1.2 História da Matemática como agente de cognição

A ideia do uso da História da Matemática como elemento facilitador do processo de ensino e aprendizagem da disciplina não é nova.

No ano de 1993, Antonio Miguel já afirmava, em sua tese de doutorado, que

> Certamente, o problema da relação entre a história, e mais particularmente a história da matemática, e a educação matemática não é novo. Já se pode afirmar que ele tem a sua própria história, tal a insistência com que é posto e recolocado desde o momento em que se teve uma clara consciência de sua importância (MIGUEL, 1993, p. 12).

Na tese de doutorado supracitada, o autor apresentou três estudos relacionando História da Matemática e Educação Matemática. Um deles trata do uso da História da Matemática como “meio auxiliar, potencialmente rico, para se promover e repensar o ensino-aprendizagem da matemática” (MIGUEL, 1993, p. 12).

Ainda segundo Miguel (1993), o uso da história no ensino de Matemática remontaria a 1741, tendo sido implementado por Alexis Claude Clairaut, que propôs um caminho para o ensino dos “Elementos” de Euclides baseado na história. Em 1966, inspirada no trabalho de Clairaut, a professora italiana Emma Castelnuovo publicou a obra “Geometria intuitiva”, fundamentada no desenvolvimento histórico da Geometria (MIGUEL, 1993, p. 12-14). “Entre

Clairaut e Castelnuovo e após Castelnuovo até os nossos dias é significativo o número de matemáticos e educadores matemáticos que recolocam esse problema da história como recurso pedagógico.” (MIGUEL, 1993, p. 14).

Em 1999, o eminente Ubiratan D’Ambrosio também discorria sobre o tema.

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D’AMBROSIO, 1999, p. 97)

Para D’Ambrosio (1999), um dos maiores erros que se pode cometer é apresentar a Matemática dissociada das demais atividades humanas. Segundo ele, “é de uma miopia total”, por exemplo, tentar compreender a Matemática do final do século XX sem dar atenção às transformações ocorridas após a segunda guerra mundial. Da mesma forma, o desenvolvimento ocorrido a partir do século XVI deve ser visto sob o painel das grandes navegações, conquistas e colonizações (D’AMBROSIO, 1999, p. 101).

De acordo com Groenwald *et al* (2005),

> A História da Matemática é considerada um tema importante na formação do aluno. Ela proporciona ao estudante a noção exata dessa ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais, contrariando a idéia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas. A História da Matemática tem este grande valor, de poder contextualizar o saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político. (GROENWALD et al, 2005, n.p.)

Nobre (1999, apud GROENWALD *et al*, 2005) defende que “a utilização da História da Matemática no contexto didático não deve se restringir à sua utilização como elemento de motivação ao desenvolvimento do conteúdo, pois sua amplitude extrapola o campo da motivação.” (GROENWALD *et al*, 2005, n.p.).

As palavras de Groenwald *et al* (2005) e Nobre (1999, apud Groenwald *et al*, 2005) vão de encontro à metodologia de ensino a ser utilizada nessa pesquisa, que é a História da Matemática como agente de cognição, proposta por Mendes (2006).

De acordo com Mendes (2006), historicamente, a Matemática construída pela sociedade foi disseminada culturalmente, mantendo-se viva por conta de estudiosos que a selecionavam de acordo com a necessidade da ciência, para depois ser compilada em textos de divulgação científica.

Portanto, é possível que se utilize a Matemática construída por outros povos em outras épocas para produzir novas matemáticas e compará-las com as produzidas anteriormente, aumentando dessa forma o conhecimento já existente. Salienta-se assim a importância de perceber que o conhecimento produzido depende muito do contexto sociocultural e da necessidade de quem o produz (MENDES, 2006). Se investigarmos o modo como os conceitos matemáticos surgiram e foram utilizados em tais contextos, pode-se obter um melhor aprendizado sobre eles (MENDES, 2006).

Mendes (2006, p. 82) ainda afirma que "Um fato histórico da Matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu, na sociedade, uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais."

Tal autor acredita que o uso da História como recurso pedagógico promove um processo de ensino e aprendizagem da Matemática que permite dar um novo significado para o conhecimento matemático que foi produzido pela sociedade ao longo dos anos, aumentando assim a motivação em sala de aula. Isso porque o estudante fica ciente do motivo e da finalidade da criação de um determinado objeto matemático. Tal objeto, inserido em um contexto, faz mais sentido do que como um conhecimento pronto, que será apenas utilizado (MENDES, 2006).

Além da questão motivacional, Mendes (2006) cita Fauvel (1991), que aponta em seu artigo "Using History in Mathematics Education" várias razões para usar a História em Educação Matemática. Eis algumas: 1) os alunos aprendem como os conceitos se desenvolveram; 2) contribui para as mudanças de percepção dos alunos com relação à Matemática; 3) ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade; 4) faz da Matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para a comunidade em geral.

A respeito de tornar a Matemática menos assustadora, Mendes (2006) afirma que a História tem o papel fundamental de mostrar que a Matemática é um conhecimento estruturalmente humano. Desta forma, uma vez esclarecidas as questões sobre a Matemática que é feita dentro e fora de sala, esta deveria então ser acessível a todos.

Ainda de acordo com Mendes (2006), a História a ser utilizada em sala de aula deve ser tal que dê significado ao conteúdo estudado pelo aluno e o leve a pensar sobre as informações históricas, "procurando estabelecer conexões entre os aspectos cotidianos, escolar e científico da matemática presente nessa história" (MENDES, 2006, p. 97).

A utilização da história dos objetos matemáticos como recurso didático é imprescindível, pois ela não serve apenas como elemento de motivação, mas também para esclarecer e dar sentido aos conceitos estudados (FERREIRA, 1998 apud MENDES, 2006). Não se trata apenas de fazer referências históricas no começo de um capítulo ou de uma aula, mas de usar a cronologia histórica para a construção do conceito estudado, facilitando assim sua compreensão.

Mendes (2006) ainda comenta a respeito do grande desinteresse dos estudantes, devido à maneira descontextualizada como a Matemática tem sido trabalhada em sala de aula, o que afeta o processo de ensino-aprendizagem. É necessário então buscar novas formas de ensinar, ou seja, metodologias de ensino diferentes. Outro fator que traz dificuldade ao processo de ensino e aprendizagem se refere às vagas respostas dadas às perguntas dos estudantes sobre porquê ou para quê determinados objetos matemáticos existem.

Para responder aos “porquês”, Mendes (2006) discorre sobre como a História pode ser aliada do professor, provendo essas explicações. Segundo o autor, passando por adaptações pedagógicas, incursões históricas podem se tornar atividades mais atrativas para os alunos do que a aula “convencional”, estruturada em apresentação do conteúdo, exemplos e exercícios de fixação. Mendes (2006, p. 101) ressalta que tais atividades “...todavia, devem possuir uma carga muito forte de aspectos provocadores de criatividade imaginativa dos estudantes, bem como de fortes indícios dos aspectos socioculturais que geraram a construção dos tópicos matemáticos abordados na atividade.”.

O autor frisa ainda que, à luz da abordagem histórica, o aluno é capaz de entender certas formalizações utilizadas atualmente, cuja criação remete a outra época e outro contexto sociocultural. Enfatizam ainda que o elo entre a Matemática escolar, a científica e do cotidiano pode ser construído utilizando a História como agente de cognição (MENDES, 2006).

1.3 Breve história dos logaritmos

O texto desta seção foi escrito tendo como referência Boyer (1974), Ferreira (2006) e Maor (2008).

Antes de falar da criação dos logaritmos, é necessário que se entenda o que estava acontecendo na sociedade no momento de sua gênese. Na época do surgimento dos logaritmos, os países europeus estavam envolvidos com as grandes navegações e a expansão territorial, além de atividades comerciais. Com isso, era necessário efetuar multiplicações e divisões com números muito grandes ou muito pequenos, o que envolvia cálculos demorados. Com a necessidade dos astrônomos, engenheiros, comerciantes e navegadores efetuarem cálculos com rapidez e precisão, muitos procuravam maneiras de simplificá-los.

No século XV, por conta da expansão europeia, ocorreram diversos avanços tecnológicos, citando como exemplo as inúmeras melhorias nos instrumentos de navegação. Dessa forma, a era das explorações (como também ficou conhecida a expansão europeia) fez despontar uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse em novas descobertas e pela necessidade de uma nova tecnologia.

Conforme mencionado, uma das principais necessidades era a realização de cálculos com rapidez e precisão. Já havia, na época, um método de simplificação dos cálculos que era conhecido por alguns astrônomos, chamado de método de prostaférese. Este consistia na transformação de multiplicações e divisões em somas e subtrações, com o auxílio de uma tabela trigonométrica e das fórmulas de Werner para produtos de senos e cossenos.

Em uma viagem de James VI (rei da Escócia) à Dinamarca em 1950, com o objetivo de encontrar sua noiva, Anne, o grupo se viu forçado por tempestades a desembarcar perto do observatório de Tycho Brahe, um grande astrônomo. Enquanto esperavam um tempo mais favorável, Tycho Brahe mencionou ao grupo o método de prostaférese, que era utilizado por ele para realizar cálculos no observatório.

Entre os viajantes do grupo, se encontrava o médico de James VI, John Craig, que ficou então conhecendo o método de prostaférese e posteriormente o apresentou a John Napier. Este não era um matemático profissional, mas um proprietário escocês, Barão de Merhiston, que administrava suas terras e escrevia sobre diversos assuntos. Ele era anticatólico e polêmico no que se referia à política e religião, e só se interessava por certos aspectos da Matemática, particularmente os que se referiam à computação (cálculos) e trigonometria.

Napier, ao tomar conhecimento do método de prostaférese, se dedicou então a obter uma técnica de simplificação de cálculos. Seu estudo perdurou por vinte anos, tendo sido publicado em 1614 sob o título “Uma construção da maravilhosa regra dos logaritmos” (Figura 1).

Segundo consta, a ideia para a criação do logaritmo surgiu da observação de tabelas de sequências de potências inteiras sucessivas de um mesmo número, publicadas à época para ajudar em cálculos. Nestas sequências, a soma ou subtração de expoentes correspondia à multiplicação ou divisão das potências. Daí a ideia de operar com os expoentes ao invés das potências – além de somas e subtrações serem mais fáceis de efetuar, os expoentes eram números menores do que as respectivas potências. Porém, as sequências de potências tinham, em geral, intervalos muito grandes entre um termo e seu sucessor. Por exemplo, $2^4 = 16$, já $2^5 = 32$, ou seja, os números de 17 a 31 não apareceriam na tabela. Napier pensou então em usar um número muito próximo de 1 como base para suas potências, de forma a “diminuir a distância” entre dois termos consecutivos da PG. O número escolhido foi $1 - 10^{-7}$. O problema foi que os termos ficaram próximos demais, então Napier multiplicou cada potência por 10^7 “para chegar a um equilíbrio e evitar decimais” (BOYER, 1974, p. 228).

Figura 1 – Folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*

MIRIFICI

LOGARITHMO-
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,

Ejusque usus, in utraque Trigonometria; *ut etiam in omni Logistica Ma*thematica, amplissimi, facillimi, *& expeditissimi explicatio.*

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;

Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eáque præstantiore Logarithmorum specie construenda.
Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Triangula sphærica mirâ facilitate resolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart.
Anno 1619.

Fonte: MAOR, 2008, p. 20.

Assim, para Napier, se $N = 10^7(1-10^{-7})^L$, então L era o *logaritmo* do número N. Ou seja, era basicamente o termo de uma Progressão Aritmética (PA), associado ao termo de uma Progressão Geométrica (PG). Ele utilizava uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 0, e uma PG de primeiro termo 10^7 e razão $1-10^{-7}$, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Sequências utilizadas por Napier

PA	PG	PA	PG
0	10000000	11	9999989
1	9999999	12	9999988
2	9999998	13	9999987
3	9999997	14	9999986
4	9999996	15	9999985
5	9999995	16	9999984
6	9999994	17	9999983
7	9999993	18	9999982
8	9999992	19	9999981
9	9999991	20	9999980
10	9999990	21	9999979

Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que, na definição de Napier, a propriedade do produto não era válida, uma vez que o primeiro termo da PG era diferente de 1. Porém, como o produto por 10^7 foi apenas para um ajuste nos números da tabela, Napier sabia que as propriedades de transformação de produto em soma e de divisão em subtração seriam válidas se cada termo da PG fosse dividido por 10^7. Por exemplo, na tabela, o "logaritmo de Napier" de 9999996 é 4, e o "logaritmo de Napier" de 9999992 é 8. O produto de 9999996 por 9999992 tem como resultado o número 99999880000032, que não consta da tabela. Porém, dividindo 9999996 e 9999992 por 10^7, teríamos 0,9999996 x 0,9999992 = 0,9999988. Multiplicando o resultado obtido por 10^7, encontramos 9999988, cujo "logaritmo de Napier" é 12. Vale então a propriedade de transformação de produto em soma, pois 4 + 8 = 12.

Após a publicação do seu estudo, a comunidade científica da época, constituída principalmente por astrônomos e matemáticos, aceitou imediatamente o conceito de logaritmos por causa da facilidade que trazia para a realização das operações de multiplicação e divisão.

Um professor de geometria de Londres, Henry Briggs, ao tomar conhecimento das tabelas de Napier e estudá-las, resolveu ir à Escócia se encontrar com ele. Este encontro foi relatado por um astrólogo chamado William Lilly, como citado no livro "*e* – a história de um número" (MAOR, 2008, p. 18 a 21). Segundo o relato, John Marr, excelente matemático e geômetra, chegou à Escócia antes de Briggs, com o intuito de estar presente ao encontro entre Briggs e Napier. Briggs marcou um encontro em Edimburgo, porém não compareceu. Napier então passou a duvidar que Briggs viesse ao seu encontro. Eis que alguém bateu à sua porta, e para a felicidade de John Marr, era o professor Briggs.

Neste encontro, Briggs propôs a Napier algumas mudanças. Entre elas, colocar o logaritmo de 1 igual a 0, e também implementar a ideia de base. Napier prontamente concordou com as modificações, no entanto, por conta da idade avançada, não tinha mais energia para computar novas tabelas. Briggs então construiu-as, publicando em 1624 tábuas de logaritmos de base 10, para todos os inteiros de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, com uma precisão de 14 casas decimais. Parte desta tabela aparece na Figura 3.

Figura 3 – Tabela de logaritmos decimais.

2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Fonte: SCHUBRING, 2008, p. 387.

Observa-se que, além da mudança da base para 10, a forma de apresentação da tabela também foi modificada. Naquela elaborada por Napier, a primeira coluna correspondia ao "logaritmo de Napier". Já nesta, de autoria de Briggs, a primeira coluna traz o número cujo logaritmo foi calculado, ou seja, o que atualmente é chamado de logaritmando. O logaritmo, agora em base dez, aparece na segunda coluna.

Ao longo dos anos o logaritmo foi sofrendo diversas mudanças, e a forma como o estudamos hoje começou a ser implementada por Leonhard Euler em 1728. O logaritmo também foi ganhando importância para outras áreas, e hoje é utilizado em diversos campos da ciência, como por exemplo, na Física, na Química e na Biologia.

1.4 Trabalhos Relacionados

Durante as pesquisas para a elaboração do projeto e ao longo da escrita monográfica, foram encontrados vários trabalhos que se relacionavam ao tema proposto para o desenvolvimento da monografia. São destacados aqui três deles. O primeiro é a dissertação de mestrado de Evanildo Costa Soares, orientado por Iran Abreu Mendes, intitulada “Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula” (SOARES, 2011).

Tal trabalho tem como objetivos principais: investigar a formulação dos logaritmos por Napier, Briggs e Burgi no século XVII visando apontar suas contribuições para a Matemática escolar, bem como auxiliar o professor na construção de uma abordagem didática conceitual dos logaritmos, de modo a complementar e ampliar a existente nos livros didáticos.

Nesta dissertação, foram realizados levantamentos bibliográficos que descrevessem a investigação histórica e epistemológica com o objetivo de integrar o tema ao processo de ensino de Matemática. Soares (2011) procurou articular os estudos para o desenvolvimento desse instrumento de cálculo, seu conceito, propriedades e aplicações na sociedade da época.

A pesquisa apontou, de maneira geral, de que forma esse conteúdo pode ser abordado pelos professores no Ensino Médio, a fim de obter um processo de ensino que propicie uma melhor aprendizagem por parte do aluno.

A principal diferença entre o presente trabalho e o de Soares (2011) é que, neste último, não houve a elaboração e aplicação de uma sequência didática. A semelhança diz respeito ao tema, que envolve a história dos logaritmos e sua utilização no processo de ensino e aprendizagem.

Outro trabalho relacionado ao tema proposto é a dissertação de mestrado de Andreia Júlio de Oliveira, orientada por Arlete de Jesus Brito, com o título: “O ensino de logaritmos a partir de uma perspectiva histórica” (OLIVEIRA, 2005).

O trabalho de Oliveira tem como principal objetivo apresentar uma sequência de atividades que possam desencadear questionamentos e descobertas por parte dos alunos, procurando resgatar o processo histórico de construção do conceito de logaritmos, com o objetivo de dar ao estudante a oportunidade de compreender o significado matemático dessas ideias. Oliveira (2005) afirma que, embora tenha sido feita uma investigação histórica, o objetivo da pesquisa é pedagógico.

Foi realizado um estudo completo, separado em três fases: avaliação, diagnóstico e atividades. Este estudo foi feito em um período de 14h/aula, divididos em sete encontros com

2h/aula cada, sendo realizado em uma turma do sexto período de um curso de Licenciatura em Matemática. Na análise de resultados, foram utilizados registros escritos feitos pelos autores durante os encontros, transcrições de fitas de áudio gravadas durante as aulas, e os cadernos dos alunos, sendo considerados somente aqueles que participaram de todos os encontros.

Oliveira (2005) concluiu que foi notória a interação dos alunos com o conteúdo, e que existe um grande potencial da História da Matemática auxiliar no ensino e aprendizagem de logaritmos.

A pesquisa de Oliveira (2005) teve como público alvo alunos de graduação, ao invés de estudantes do Ensino Médio, que é o caso do presente trabalho monográfico. Por outro lado, assemelha-se a este ao buscar resgatar o processo histórico de construção dos logaritmos.

Por fim, o terceiro trabalho relacionado é o de Ronize Lampert Ferreira. Trata-se de uma dissertação intitulada “Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática”, orientada pela doutora Eleni Bisognin e coorientada pela doutora Maria Arleth Pereira.

A dissertação de Ferreira tem como principal objetivo descrever o desenvolvimento de uma sequência de atividades e de problemas que dê mais significado ao estudo dos logaritmos, pois segundo Fereira (2006), as atividades desenvolvidas em sala de aula podem influenciar significativamente na construção do conceito por parte do aluno.

Na pesquisa de Ferreira foi feito um estudo histórico dos logaritmos para mostrar aos alunos o quanto sua descoberta foi útil, à semelhança do presente trabalho monográfico, sendo feita também uma análise dos livros didáticos. Antes de aplicar a sequência idealizada, foi realizado um teste diagnóstico, com o objetivo de identificar as dificuldades que os alunos possuíam em relação ao conteúdo de logaritmos. Este teste foi aplicado para 27 alunos do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM).

Após a análise do teste diagnóstico foi aplicada a sequência didática para os alunos do CMSM, dividida em sete sessões. Apenas a quinta sessão trabalhava os logaritmos utilizando a parte histórica. O procedimento metodológico utilizado foi o da engenharia didática, diferenciando-se dessa forma do presente trabalho.

Segundo Ferreira (2006), o trabalho teve seus objetivos alcançados, fazendo com que os alunos tivessem um bom entendimento dos logaritmos, mostrando empenho em realizar as atividades propostas.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.1 Caracterização da pesquisa

Neste trabalho será realizada uma pesquisa qualitativa. Segundo Silveira e Córdova (2009), “A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc...”. Portanto, os pesquisadores que utilizam a pesquisa qualitativa procuram explicar o porquê das coisas, não quantificar os valores (SILVEIRA E CÓRDOVA, 2009, p. 31).

Deslauriers (1991, apud SILVEIRA E CÓRDOVA, 2009) afirma que, na pesquisa qualitativa, o pesquisador é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas, no sentido em que o desenvolvimento é imprevisível, e a amostra tem como objetivo produzir informações aprofundadas e ilustrativas.

De acordo com Silveira e Córdova (2009), a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade. Sendo assim, não é possível quantificá-los, e o foco é a compreensão e explicação das relações sociais.

Uma das características da pesquisa qualitativa é sua imprevisibilidade. Pode-se acrescentar ainda a forte interação entre as metas estabelecidas pelos pesquisadores, seus pressupostos teóricos e seus dados experimentais (SILVEIRA E CÓRDOVA, 2009).

Neste trabalho, os dados serão obtidos a partir da observação participativa durante a aplicação da sequência didática, bem como da análise das respostas aos alunos ao questionário final. O foco desta análise será o teor das respostas obtidas, e não seu aspecto quantitativo.

Quanto aos procedimentos de pesquisa, será realizado um estudo de caso, pois, segundo Yin (2010), o estudo de caso é limitado a poucas unidades, podendo abranger um grupo de pessoas, uma família, uma instituição, uma comunidade ou até mesmo um país. Esse tipo de estudo é caracterizado por uma pesquisa bem detalhada e profunda.

Fonseca (2002, apud SILVEIRA E CÓRDOVA, 2009, p. 39) afirma que:

> O estudo de caso pode decorrer de acordo com uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes, ou uma perspectiva pragmática, que visa simplesmente apresentar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente, do objeto de estudo do ponto de vista do investigador.

Situações mais comuns de estudo de caso são aquelas que focam em apenas uma unidade: um indivíduo, um pequeno grupo e uma instituição (MAZZOTTI, 2006, apud SILVEIRA E CÓRDOVA, 2009).

Na presente pesquisa, a aplicação da sequência didática se dará em apenas uma turma de terceiro ano de Ensino Médio de uma escola pública federal do município de Campos dos Goytacazes, ou seja, o estudo estará restrito a um pequeno grupo de indivíduos.

2.2 Elaboração da sequência didática

Como parte da sequência didática, foi preparada uma atividade de sondagem com questões de progressões aritméticas, progressões geométricas e logaritmos, chamada de "Questionário inicial". O objetivo é verificar o que os alunos recordam sobre estes três conteúdos, para saber, por um lado, se haveria necessidade de recordar progressões e, por outro, o que eles se lembravam sobre logaritmos.

As duas primeiras questões estão relacionadas com o estudo de progressões, e têm como objetivo verificar se o aluno sabe identificar e diferenciar as progressões, além de encontrar suas respectivas razões (Figura 4).

Figura 4 – Questões 1 e 2 da atividade de sondagem

Q1. Analise cada sequência abaixo e diga se é progressão aritmética, geométrica ou nenhuma das duas.

	Sequências	P.A.	P.G.	Nenhuma das duas
a)	(0, 3, 6, 9, 12, 15)			
b)	$(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$			
c)	(16, 13, 10, 7, 4, 1)			
d)	(-2, 0, 3, 6, 12, 16, 21)			
e)	(2, 6, 18, 54, 162)			
f)	(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)			

Q2. Dê a razão de cada sequência que você identificou como progressão aritmética ou geométrica no exercício acima.

	Sequências	Razão
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Fonte: Elaboração própria.

A terceira e a quarta questões envolvem a definição e propriedades dos logaritmos, por meio de exercícios de aplicação direta (Figura 5).

Figura 5 – Questões 3 e 4 da atividade de sondagem

Q3. Calcule os logaritmos abaixo.

a) $\log_2 8$

b) $\log_9 81$

c) $\log_3 243$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

Q4. Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule, indicando como você fez.

a) $\log 4$

b) $\log 6$

c) $\log_2 3$

d) $\log 1{,}5$

e) $\log 20$

f) $\log 2{,}5$

Fonte: Elaboração própria.

A quinta questão é uma pergunta a respeito das aplicações dos logaritmos - se o aluno conhece alguma e caso conheça, qual seria (Figura 6).

Figura 6 – Questão 5 da atividade de sondagem

Q5. Você conhece alguma aplicação dos logaritmos? Caso conheça, fale um pouco sobre ela.

____

____

Fonte: Elaboração própria.

O restante da sequência didática é dividido em quatro momentos, divididos igualmente em dois encontros (Quadro 1).

Quadro 1 – Momentos da sequência didática

Momento	Sequência didática
Primeiro: A sociedade à época da criação dos logaritmos.	Primeira parte do vídeo e Atividade 1
Segundo: A criação dos logaritmos por Napier.	Segunda parte do vídeo acompanhada de texto e Atividade 2.
Terceiro: Evolução dos logaritmos.	Primeira parte da apresentação e Atividade 3.
Quarto: Aplicações dos logaritmos em outras ciências.	Segunda parte da apresentação e Atividade 4. Questionário final.

Fonte: Elaboração própria.

No primeiro momento, os alunos tomarão conhecimento do que ocorria no mundo à época da criação dos logaritmos, e quais as demandas científicas da época. Para este primeiro momento, foram elaborados um vídeo, dividido em duas partes, disponibilizado no CD anexo, e também a Atividade 1, exibida mais adiante.

A primeira parte do vídeo tem como objetivo fazer os alunos se situarem e entenderem o mundo na época do surgimento do logaritmo, apresentando-lhes um panorama cultural e científico. Discorre sobre a necessidade de se efetuar cálculos com números muito grandes e números muito pequenos envolvendo a Astronomia durante as navegações para a expansão territorial europeia, que ocorreu no período de 1492 a 1700.

Esta expansão ocorreu em três fases, sendo a primeira fase a do comércio, onde os mercadores europeus negociavam com a Ásia, e algumas cidades europeias ocupavam uma posição geográfica favorável, diferentemente de outras que precisaram procurar rotas alternativas, o que culminou com a descoberta de novos territórios. A segunda fase foi a da exploração pela Europa, marcada pela conquista e anexação de territórios. A terceira fase foi a da colonização e efetiva migração dos europeus para outros continentes (FERREIRA, 2006, p. 45).

Portanto, no século XV ocorreram diversos avanços tecnológicos cruciais para a expansão europeia, e o desenvolvimento da Matemática se deveu principalmente ao crescimento político, social e econômico da época, pois havia a necessidade de astrônomos, navegadores, comerciantes e engenheiros realizarem cálculos rápidos e precisos (FERREIRA, 2006, p. 46).

Nesta época de avanços científicos, por volta de 1590, em uma viagem a Dinamarca, o grupo que viajava com James VI (rei da Escócia) foi forçado por tempestades a desembarcar perto do observatório de Tycho Brahe, um grande astrônomo. Enquanto esperava um tempo mais favorável, Tycho Brahe mencionou um artifício para se realizar cálculos no observatório, chamado método da prostaférese (BOYER, 1974, p. 228).

Aproveitando esse fato histórico, ao final da Atividade 1 (Figuras 7 e 8) foi colocado um exemplo do método para ser feito com os alunos, utilizando a tabela de senos e cossenos, também fornecida. O objetivo é que os estudantes percebam o quão trabalhoso era utilizar tal método para efetuar um produto.

Figura 7 – Atividade 1: texto e exemplo de prostafélese

ATIVIDADE 1

Na época do surgimento dos logaritmos, era necessário efetuar cálculos complexos, principalmente envolvendo a Astronomia durante as navegações para expansão territorial europeia. Esta expansão ocorreu entre os anos de 1492 a 1700, e se deu em três fases.

A primeira fase foi a do comércio, onde os mercadores europeus negociavam com a Ásia, sendo que algumas cidades europeias ocupavam uma posição geográfica favorável para o comércio de especiarias e tecidos finos que eram trazidos em navios pelo mar Mediterrâneo. As cidades que não possuíam uma boa localização tiveram que procurar rotas alternativas, o que culminou com a descoberta de outros territórios. A segunda fase foi a da era das explorações pela Europa, marcada pela conquista e anexação de territórios. A terceira fase foi a colonização e a efetiva migração dos europeus para outros continentes.

No século XV, ocorreram diversos avanços tecnológicos cruciais para a expansão europeia. Os equipamentos de navegação e os projetos de navios foram melhorados. Dessa forma, a era das explorações despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse de novas descobertas territoriais e por uma percepção de necessidade de uma nova tecnologia, principalmente na navegação.

Portanto, o avanço da Matemática durante esse período se deu principalmente ao crescimento político, social e econômico da época, pois havia necessidade dos astrônomos, navegadores, comerciantes e engenheiros realizarem cálculos rápidos e precisos.

O desenvolvimento da Astronomia, navegação, matemática comercial e financeira estava enfrentando problemas devido à necessidade de simplificar cálculos aritméticos complexos e trabalhosos, pois, na época das grandes navegações, exigiam-se cálculos bastante precisos.

James VI, rei da Escócia, viajou em 1590 para a Dinamarca, com o objetivo de encontrar a sua noiva, Anne da Dinamarca. O grupo que viajava com o rei foi forçado por tempestades a desembarcar perto do observatório de Tycho Brahe, um grande astrônomo. Enquanto esperavam um tempo mais favorável, Tycho Brahe mencionou um maravilhoso artifício para realizar cálculos no observatório.

Por exemplo, para efetuar o produto de 0,8192 por 0,3746, recorria-se a uma tabela de senos e cossenos, procurando pelos ângulos cujos cossenos ou senos correspondessem aproximadamente a esses valores. No caso, $0{,}8192 \cong \cos(35°)$ e $0{,}3746 \cong \cos(68°)$. Em seguida, utilizavam-se as fórmulas que transformavam produtos de senos ou cossenos em somas (Método da prostaférese).

Fonte: Elaboração própria.

Figura 8 – Atividade 1: tabela trigonométrica.

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Fonte: Elaboração própria.

Para que eles compreendam bem o método, após os comentários sobre o vídeo será resolvido com eles o seguinte produto: 0,8192 × 0,3746.

Inicialmente será explicado que o método de prostaférese tem como principal objetivo transformar produtos em somas e divisões em subtrações. As fórmulas de Werner, que são utilizadas no método de prostaférese, podem ser obtidas por meio das fórmulas de soma e subtração de arcos.

A fórmula para o produto será deduzida com os alunos no quadro a partir do cosseno da soma e da diferença de arcos, da seguinte forma:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \text{ (I)}$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \text{ (II)}$$

Fazendo (I) + (II), tem-se:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B\ .$$

Assim, $\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$ (fórmula de Werner).

Utilizando a fórmula de Werner, resolve-se o produto que será dado como exemplo, 0,8192 × 0,3746.

Fazendo $\cos A \cong 0{,}8192$ e $\cos B \cong 0{,}3746$, procura-se na tabela trigonométrica fornecida o ângulo cujo cosseno é aproximadamente igual a 0,8192 e o ângulo cujo cosseno é aproximadamente igual a 0,3746. Encontra-se:

$\cos A = \cos 35^{\circ} \cong 0{,}8192$ e $\cos B = \cos 68^{\circ} \cong 0{,}3746$.

Após encontrar os ângulos, utiliza-se a fórmula de Werner para efetuar a multiplicação, sabendo que:

$$\cos 35^{\circ} \times \cos 68^{\circ} = \frac{\cos(35^{\circ}+68^{\circ}) + \cos(35^{\circ}-68^{\circ})}{2}$$

$$\cos 35^{\circ} \times \cos 68^{\circ} = \frac{\cos(103^{\circ}) + \cos(-33^{\circ})}{2}$$

Da tabela trigonométrica fornecida: $\cos(33^{\circ}) = 0{,}8387$ e $\cos 103^{\circ} = -0{,}225$.

Assim:

$$\cos 35^{\circ} \times \cos 68^{\circ} = \frac{-0{,}225+0{,}8387}{2}$$

$$\cos 35^{\circ} \times \cos 68^{\circ} = \frac{0{,}6137}{2} = 0{,}30685$$

Logo, concluir-se-á que:

$$0{,}8192 \times 0{,}3746 = \cos 35^{\circ} \times \cos 68^{\circ}$$

$$0{,}8192 \times 0{,}3746 = 0{,}30685$$

Assim, ao final do primeiro momento, os alunos terão ideia não só do contexto sociocultural da época, mas também das dificuldades que a comunidade científica enfrentava no que dizia respeito a produtos e quocientes de números grandes utilizando o método de prostaférese.

O segundo momento inicia-se com a segunda parte do vídeo, que tem como objetivo ser um elo entre o primeiro momento e o surgimento dos logaritmos, objeto do segundo momento. Ela se refere a John Napier e sua "maravilhosa regra dos logaritmos", que levou 20 anos para ser formalizada. O texto que o acompanha está na Figura 9. Após tecer comentários sobre o vídeo, será aplicada a Atividade 2, que estimula o aluno a refazer o raciocínio de Napier na criação doa logaritmos (Figura 10).

Figura 9 – Texto que acompanha a segunda parte do vídeo.

John Craig, o médico de James VI, também se encontrava com o grupo que viajara com o rei para a Dinamarca e conhecendo o método de prostaférese, o apresentou a John Napier, que não era um matemático profissional, era um proprietário escocês, Barão de Merhiston, que administrava suas terras e escrevia sobre diversos assuntos. Ele era anticatólico e polêmico no que se referia a política e religião, e só se interessava por certos aspectos da matemática, particularmente os que se referiam a computação e trigonometria.

Como já dito, a preocupação da época era descobrir um método para simplificar cálculos aritméticos complicados, e Napier estava interessado nesses estudos, dedicando-se durante 20 anos aos estudos relativos à simplificação de cálculos, publicando em 1614, "Uma construção da maravilhosa regra dos logaritmos".

Fonte: Elaboração própria.

Figura 10 – Atividade 2

ATIVIDADE 2

1) Efetue as operações a seguir, procurando relações com a tabela dada.

P.A.	P.G.
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

a) $4 \cdot 32 =$

b) $16 \cdot 64 =$

c) $32 \cdot 4194304 =$

d) $16384 \cdot 32768 =$

e) $1024 \cdot 1048576 =$

f) $1073741824 \div 512 =$

g) $8388608 \div 2048 =$

h) $268435456 \div 524288 =$

2) Que relações você percebeu entre as operações realizadas e os valores da tabela?

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo desta atividade (Figura 10) é propiciar ao aluno a oportunidade de construir o conceito de logaritmo conforme feito por Napier historicamente. Para isso são propostos os cálculos de multiplicações e divisões que devem ser efetuados com o auxílio de uma tabela. Nesta tabela há uma coluna com os termos de uma progressão aritmética (PA) de termo inicial igual a zero e razão um, e outra coluna com termos de uma progressão geométrica (PG) de termo inicial um e razão dois.

Consultando a tabela, os números a serem multiplicados ou divididos encontram-se na coluna da PG. O termo da PA que estiver na mesma linha de cada fator será o expoente da potência de base dois cujo resultado será o termo da PG.

Por exemplo, na linha em que o elemento da PA é 10, o elemento correspondente da PG é 1024, ou seja, 10 é o expoente tal que 2^{10}= 1024.

Em seguida, utilizando as propriedades de produtos e quocientes de mesma base, soma-se ou subtrai-se os termos da PA, encontrando o resultado correspondente na coluna da PG.

Para realizar o produto 16 x 32, por exemplo, tem-se que o 16 está na mesma linha que o 4 e o 32 está na mesma linha que o 5 (Figura 10). Neste caso, basta fazer 4 + 5 = 9, e procurar o termo da PG que está na mesma linha que o 9. Este termo é o 512, logo 16 x 32 = 512.

No caso da divisão realiza-se o mesmo processo, porém faz-se uma subtração ao invés de uma adição.

O expoente da PG (que é o termo da PA) é análogo ao que John Napier chamou de logaritmo. Optou-se por utilizar a base 2 para as potências, ao invés de $1 - 10^{-7}$, por acreditar que facilitará a compreensão da relação entre a PA e a PG e a construção do conceito. A ideia é destacar a mesma relação observada por Napier na sequência de potências de um número, e que o levou à definição de logaritmo.

No momento da criação dos logaritmos, não havia o conceito de “base”, desenvolvido posteriormente por Briggs. Este será o objeto do terceiro momento.

Para a introdução do terceiro momento foi preparada uma apresentação de *slides* que faz referência ao processo de evolução do conceito de logaritmo, utilizada apenas na aplicação na turma regular, pois a ideia surgiu após o teste exploratório. Dividida em duas partes, inicialmente cita as modificações teóricas sofridas pelos logaritmos. Sua segunda parte traz exemplos de aplicações do conceito em outras ciências, e será utilizada na introdução do quarto momento.

Acompanhando a apresentação de *slides*, o professor em formação discorrerá sobre o encontro entre Henry Briggs (professor de Geometria, em Londres) e Napier, que deu origem à ideia de base do logaritmo, e sobre a notação utilizada atualmente.

A Atividade 3 (Figura 11) propõe a utilização do mesmo método desenvolvido historicamente para a elaboração de tabelas de logaritmos decimais, com a aplicação do logaritmo do produto e do quociente aos logaritmos decimais de número primos. O objetivo é que os alunos compreendam a utilidade prática das propriedades na construção das tabelas, usadas por vários séculos como instrumento de cálculo, e vivenciem as dificuldades pelas quais passaram aqueles que as elaboraram.

Figura 11 – Atividade 3

ATIVIDADE 3

Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule, indicando como você fez.

a) $\log 4$

b) $\log 6$

c) $\log_2 3$

d) $\log 1{,}5$

e) $\log 20$

f) $\log 2{,}5$

Fonte: Elaboração própria.

No item (c) da Atividade 3 é necessária a propriedade de mudança de base, que será demonstrada junto com os alunos, conforme explicitado a seguir.

Sejam $\log_a b$ = x, $\log_c b$ = y e $\log_c a$ = z, onde $z \neq 0$ pois $a \neq 1$. Usando a definição de logaritmo, chega-se a

$$\begin{cases} \log_a b = x \;\Rightarrow\; a^x = b \\ \log_c b = y \;\Rightarrow\; c^y = b \\ \log_c a = z \;\Rightarrow\; c^z = a \end{cases}$$

E então $(c^z)^x = b = c^y$, ou seja, $c^{zx} = c^y$, isto é, $zx = y$ ou ainda $x = \frac{y}{z}$.

Substituindo-se $x = \log_a b$, $y = \log_c b$ e $z = \log_c a$, chega-se a $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Por fim, o quarto momento, introduzido por meio da segunda parte da apresentação de *slides* citada anteriormente, propõe exercícios envolvendo as aplicações dos logaritmos e tem como objetivo mostrar sua importância não só na Matemática, mas em outras áreas da Ciência (Atividade 4 – Figuras 12 e 13).

Figura 12 – Questões 1, 2 e 3 da Atividade 4

1. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão pH = –log [H^+], em que [H^+] indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era [H^+] = $5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

A) 7,26
B) 7,58
C) 7,32
D) 7,74
E) 7,64

2. (UERJ – 2013) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

• A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.

• O nível de toxidez $T(x)$, após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_o\ 0{,}5^{0{,}1x}$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo log 2 = 0,3, o valor de D é igual a:

A) 30
B) 32
C) 34
D) 36

3. (ENEM –Modificado - 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão:

$M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,5.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27
B) 36
C) 50
D) 54
E) 100

Fonte: Elaboração própria.

Figura 13 – Questão 4 da Atividade 4

4. (Enem – 2011) A escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada por M_w) introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_o se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_o)$$

Onde M_o é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.
O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_o do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) $10^{12,00}$
D) $10^{21,65}$
E) 10^{27}

Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar o quarto momento e consequentemente a aplicação da sequência didática, foi elaborado um questionário final, que tem por objetivo analisar a percepção dos participantes sobre as atividades realizadas e sua contribuição para a compreensão do conceito de logaritmo. Este instrumento de coleta de dados é composto por quatro questões semi abertas (Figura 14).

Figura 14 – Questionário final

A parte histórica foi importante para ajudar a compreender o conceito de logaritmo?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ______________________________

O conhecimento da origem do logaritmo ajudou a compreender suas propriedades?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ______________________________

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento do logaritmo?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ______________________________

Nestas atividades você conheceu novas aplicações dos logaritmos?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ______________________________

Fonte: Elaboração própria.

Todos os questionários e atividades aplicadas na turma regular constam do Apêndice. O vídeo e a apresentação de *slides* constam do CD anexo.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DE DADOS

3.1 Teste Exploratório

O teste exploratório foi aplicado na data de 12/08/2016, com duração de 3 horas aula. Participaram do teste um total de sete alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense – *campus* Campos-centro. Os participantes eram alunos do quinto e sétimo períodos.

Antes da data da aplicação do teste exploratório, foi entregue aos participantes a atividade de sondagem ("Questionário inicial"), para ser feita por eles, buscando verificar o que recordavam a respeito de progressões aritméticas, progressões geométricas e logaritmos. Todos conseguiram resolver corretamente as questões propostas.

Percebeu-se que alguns ficaram surpresos, pois não entendiam "o que PA e PG tinham a ver com logaritmo", conforme dito por um dos participantes quando iniciamos o teste exploratório.

Dando início ao primeiro momento, foi exibida a primeira parte do vídeo, que durou cerca de sete minutos. Ao final, foram feitos comentários explicando a necessidade que existia, na época, de efetuar cálculos rápidos e precisos. Juntamente com o texto do vídeo foi entregue um exemplo para ser realizado pelo método de prostaférese, que foi mencionado por Tycho Brahe ao grupo de Jaime VI (rei da Escócia) conforme citado anteriormente na elaboração da sequência didática (Atividade 1).

O exemplo que foi resolvido com os alunos foi o produto de 0,8192 por 0,3746, em que utilizamos uma das fórmulas de Werner:

$$cos\alpha cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Esta fórmula foi deduzida juntamente com os participantes.

Para a resolução pelo método de prostaférese é preciso que se encontre os ângulos α e β tais que $\cos\alpha = 0{,}8192$ e $\cos\beta = 0{,}3746$, utilizando uma tabela trigonométrica. Neste caso, α = 35º e β = 68º.

Ao substituir os ângulos encontrados na Fórmula de Werner, encontrava-se o valor da multiplicação com certa aproximação.

Para a realização do produto por meio do método de prostaférese, é necessária a utilização da tabela trigonométrica, que foi disponibilizada para os licenciandos ao final do vídeo, na tela da TV da sala. Porém, a imagem não ficou nítida, surgindo como sugestão acrescentar a tabela trigonométrica no verso da folha da Atividade 1, o que foi feito.

Em relação a este primeiro momento, os participantes gostaram do vídeo e entenderam bem o método utilizado para simplificar os cálculos, transformando a multiplicação em soma e a divisão em subtração.

Conforme explicitado na elaboração da sequência didática, o vídeo foi dividido em duas partes, ficando a parte 1 para a Atividade 1 (primeiro momento) e a parte 2 para a Atividade 2 (segundo momento). A parte 2 do vídeo discorre sobre Napier, o criador dos logaritmos. Esta parte do vídeo levou pouco mais de um minuto, sendo entregue em sequência a Atividade 2. Esta foi resolvida sem problemas pela maioria dos participantes, que perceberam a relação entre a tabela e os cálculos a serem efetuados, não sendo sugerida modificação alguma.

Na explicação da Atividade 2, foi esclarecido aos participantes que as propriedades do produto e do quociente foram na verdade a origem da definição do logaritmo. Isto finalizou o segundo momento.

No terceiro momento, foi aplicada a Atividade 3, na qual um dos itens envolvia a propriedade de mudança de base, que foi deduzida com os participantes.

Foi sugerida na Atividade 3 a correção do valor do $\log 3$, de 0,407 para 0,477. Neste momento, os participantes encontraram valores de logaritmos decimais utilizando as propriedades já vistas, como foi feito por Henry Briggs após o conhecimento do livro publicado por John Napier.

No quarto momento foram trabalhados exercícios contextualizados de aplicação dos logaritmos, nos quais os participantes deveriam utilizar tanto a definição atual de logaritmo quanto as propriedades vistas (Atividade 4).

Foi requisitado pelos participantes que se acrescentasse um vídeo ou uma apresentação falando sobre as aplicações, pois segundo eles, a Atividade 4 teria ficado muito dissociada das outras, já que não havia referência à parte histórica. De acordo com esta sugestão, foi elaborada uma apresentação de slides abordando tanto a evolução dos logaritmos quanto suas aplicações em outras ciências. Tal apresentação será utilizada no terceiro e quarto momentos da aplicação na turma regular, de forma a estabelecer um vínculo entre eles, via evolução dos logaritmos.

Outra sugestão advinda do teste exploratório foi a troca na ordem das questões da Atividade 4, qual seja, a quarta questão pela primeira. Após o teste, porém, ponderou-se que seria melhor excluir a questão 2 da Atividade 4 na aplicação em turma regular, já que havia suscitado muitas dúvidas mesmo entre os alunos da Licenciatura em Matemática. Além disso, a questão que originalmente era a quarta passou a ser a segunda, por ter sido considerada mais simples pelos licenciandos.

3.2 Experimentação

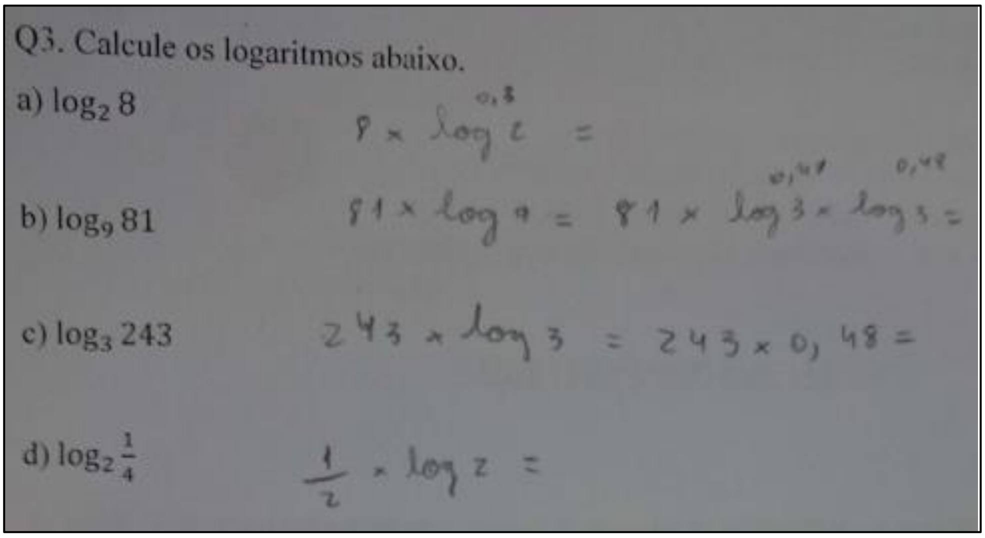
O público alvo desta experimentação foram alunos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma instituição federal de ensino do município de Campos dos Goytacazes, que já havia estudado progressões aritméticas e geométricas e também logaritmos pela “abordagem tradicional”, ou seja, sem a utilização da História como agente de cognição. Os dois encontros ocorreram em horários vagos da turma, e o professor regente ofereceu um bônus em pontuação aos alunos que participassem de ambos.

No dia 15/08/2016, o professor regente da turma em que ocorreria a experimentação aplicou a atividade de sondagem (“Questionário inicial”), que foi respondida por 17 alunos. A atividade era composta por cinco questões, e tinha como principal objetivo verificar, nas duas primeiras questões, se os alunos saberiam reconhecer progressões aritméticas e geométricas, identificando a razão de cada uma. As outras procuravam verificar o quanto recordavam sobre logaritmos e também se conheciam alguma de suas aplicações.

Nas duas primeiras questões os alunos não tiveram dificuldades e mostraram saber reconhecer as progressões e identificar sua razão.

Na terceira questão, alguns alunos mostraram dificuldade em aplicar a definição de logaritmos, conforme exemplificado na Figura 15.

Figura 15 – Questão 3 do questionário inicial: resolução de um aluno



Q3. Calcule os logaritmos abaixo.

a) $\log_2 8$ — $8 \times \log 2^{0,3} =$

b) $\log_9 81$ — $81 \times \log 9 = 81 \times \log 3^{0,48} \times \log 3^{0,48} =$

c) $\log_3 243$ — $243 \times \log 3 = 243 \times 0,48 =$

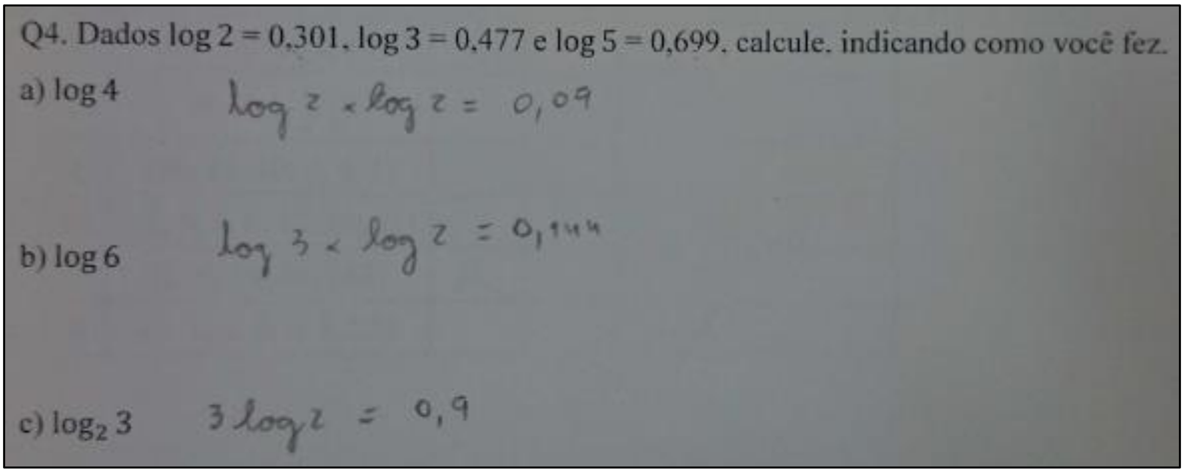
d) $\log_2 \frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2} \times \log 2 =$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta questão, a maioria dos alunos não se recordou das propriedades e confundiu-se na resolução, transformando em produto ao invés de soma (Figura 16).

Quanto às aplicações de logaritmos em outras áreas da Ciência, a maioria deixou em branco, sinalizando que as desconhecia.

Figura 16 – Questão 4 do questionário inicial: resolução de um aluno



Q4. Dados log 2 = 0,301, log 3 = 0,477 e log 5 = 0,699, calcule, indicando como você fez.

a) $\log 4$ — $\log 2 \times \log 2 = 0,09$

b) $\log 6$ — $\log 3 \times \log 2 = 0,144$

c) $\log_2 3$ — $3 \log 2 = 0,9$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vale ressaltar que o teste de sondagem foi aplicado posteriormente a uma avaliação (prova). Isto pode ter influenciado nas respostas, pois talvez os alunos estivessem cansados mentalmente.

A aplicação na turma regular ocorreu em dois encontros de duas horas/aula cada um. O primeiro encontro aconteceu na data de 18/08/2016 e contou com a participação de 17 alunos, ocorrendo em dois horários vagos da turma. O segundo ocorreu no dia 25/08/2016 e contou com a participação de 16 alunos.

3.2.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro iniciou-se com o primeiro momento: foi entregue aos alunos a folha da Atividade 1, que continha o texto correspondente ao áudio do vídeo, o exemplo para ser resolvido com eles pelo método de prostaférese e a tabela trigonométrica que auxiliaria na resolução do exemplo.

A parte 1 do vídeo foi exibida para os 11 alunos que estavam presentes no início da aula, e após o vídeo foram feitos comentários explicando-o. Falou-se a respeito do que estava ocorrendo no mundo naquela época, destacando as grandes navegações e a importância de realizar cálculos com rapidez e precisão. Ou seja, o que estava em foco na época era a procura por métodos que tornassem os cálculos mais simples de serem efetuados.

Isto está de acordo com o proposto por Mendes (2006), que, conforme a seção 1.2, cita justamente a importância de mostrar ao aluno que o conhecimento produzido depende do contexto sociocultural e da necessidade de quem o produz.

Partindo de uma situação real mencionada no vídeo (o encontro entre o médico de James VI e o astrônomo Tycho Brahe), explicou-se aos alunos o método de prostaférese, que era utilizado pelos astrônomos para simplificar os cálculos.

Conforme citado na elaboração da sequência didática, foi resolvido com os alunos o produto $0{,}8192 \times 0{,}3746$ pelo método de prostaférese.

Após a dedução da fórmula de Werner, os alunos procuraram na tabela trigonométrica fornecida o ângulo cujo cosseno fosse aproximadamente igual a 0,8192 e o ângulo cujo cosseno fosse aproximadamente igual a 0,3746. Encontraram:

$\cos A = \cos 35^\circ \cong 0{,}8192$ e $\cos B = \cos 68^\circ \cong 0{,}3746$.

Assim:

$$\cos 35^\circ \times \cos 68^\circ = \frac{\cos(35^\circ+68^\circ) + \cos(35^\circ-68^\circ)}{2}$$

$$\cos 35^\circ \times \cos 68^\circ = \frac{\cos(103^\circ) + \cos(-33^\circ)}{2}$$

Nesse momento foi mostrado aos alunos por meio do ciclo trigonométrico que $\cos 103° = -\cos 77°$ e que $\cos(-33°) = \cos(33°)$.

Foi pedido então que os alunos procurassem na tabela trigonométrica os valores para o cosseno de cento e três graus e o cosseno de trinta e três graus. Os valores encontrados foram: $\cos(33°) = 0{,}8387$ e $\cos 103° = -0{,}225$.

Dessa forma, continuou-se a conta no quadro, substituindo os valores encontrados para os cossenos:

$$\cos 35° \times \cos 68° = \frac{-0{,}225+0{,}8387}{2}$$

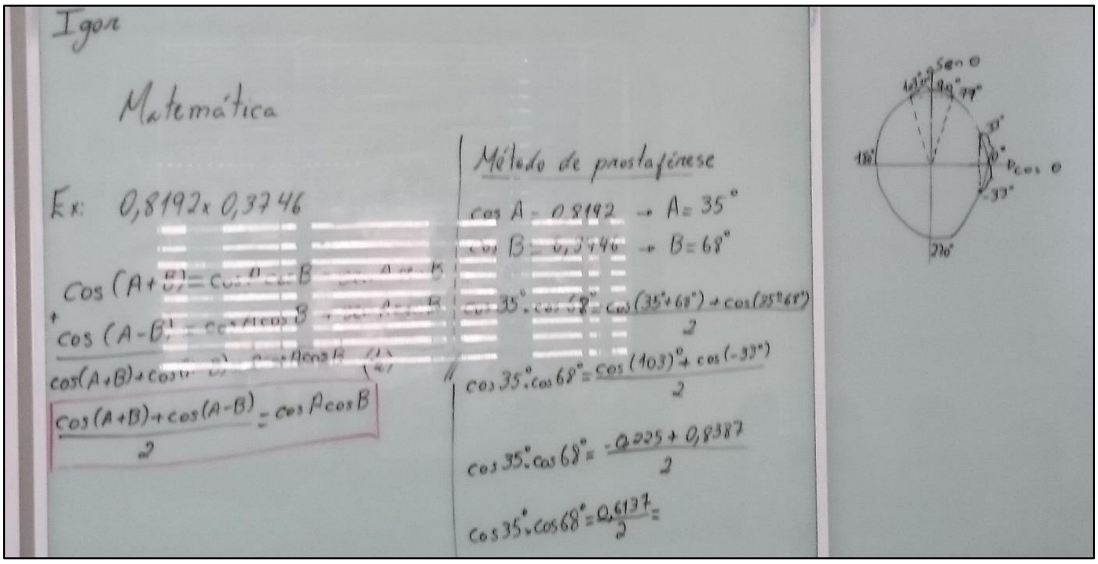
$$\cos 35° \times \cos 68° = \frac{0{,}6137}{2} = 0{,}30685$$

Logo, foi concluído com os alunos que (Figura 17):

$$0{,}8192 \times 0{,}3746 = \cos 35° \times \cos 68°$$

$$0{,}8192 \times 0{,}3746 = 0{,}30685$$

Figura 17 – Exemplo de prostaférese feito com os alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pediu-se então que os alunos fizessem a mesma conta na calculadora. Ao encontrar o resultado de 0,30687232, perceberam que o cálculo realizado obtém precisão razoável, mas que o método de prostaférese não é muito rápido, nem totalmente preciso. Notaram, então, que havia a necessidade da criação de um método que auxiliasse a efetuar produtos de números com várias casas decimais, e que tal método deveria ser mais rápido e mais preciso.

Isto está de acordo com o proposto por Mendes (2006), segundo o qual a investigação do modo pelo qual os conceitos matemáticos surgiram e de como foram utilizados pode ajudar os alunos a alcançar um aprendizado mais significativo sobre eles.

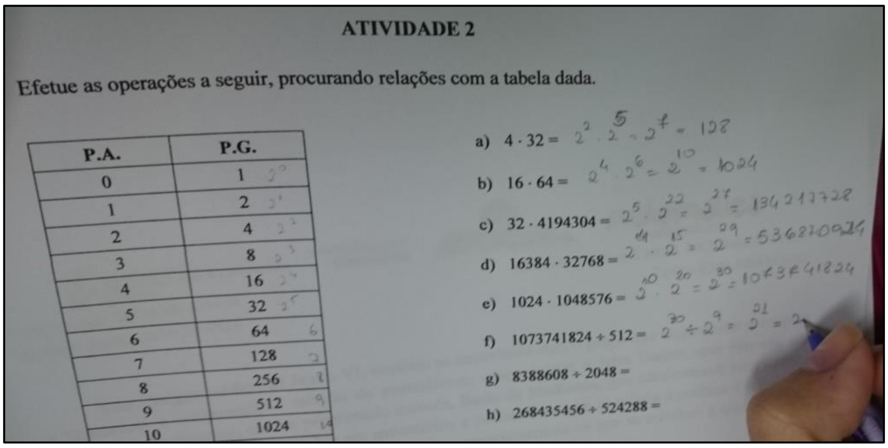
Após a realização do exemplo por meio do método de prostaférese, finalizando o primeiro momento, foi exibido o vídeo completo, tanto a parte 1 que já havia sido mostrada, como a parte 2. A parte 1 foi reexibida porque seis alunos chegaram após sua exibição. Iniciou-se assim o segundo momento da aplicação, constituído pela segunda parte do vídeo e pela Atividade 2.

Os comentários sobre a segunda parte do vídeo foram feitos, enfatizando como Napier tomou conhecimento do método de prostaférese, e a partir dele começou a intensificar e aprofundar seus estudos para a simplificação de cálculos. Mendes (2006) ressalta que pode-se utilizar a matemática construída por outros povos em outras épocas para se produzir novas matemáticas, aumentando o conhecimento já existente, dependendo da necessidade. Isto é justamente o que mostra a segunda parte do vídeo, partindo do princípio de que Napier tomou conhecimento do método de prostaférese e a partir dele intensificou seus estudos na simplificação dos cálculos, encontrando um método mais rápido do que o utilizado até então, apoiado inclusive em saberes anteriores ao método de prostaférese, como as tabelas de sequências de potências de números (BOYER, 1974).

Ao fim dos comentários, foi entregue a Atividade 2, e pediu-se que eles resolvessem as multiplicações e divisões sem o auxílio da calculadora, procurando utilizar a tabela. A maioria dos alunos conseguiu resolver as multiplicações rapidamente, e os poucos que tiveram certa dificuldade foram ajudados pelo professor em formação e pelos próprios colegas.

Alguns perceberam que os elementos da progressão geométrica eram potências de base 2, dessa forma fizeram as operações utilizando as propriedades de potência: no caso da multiplicação somavam os expoentes, e na divisão subtraíam os expoentes (Figura 18).

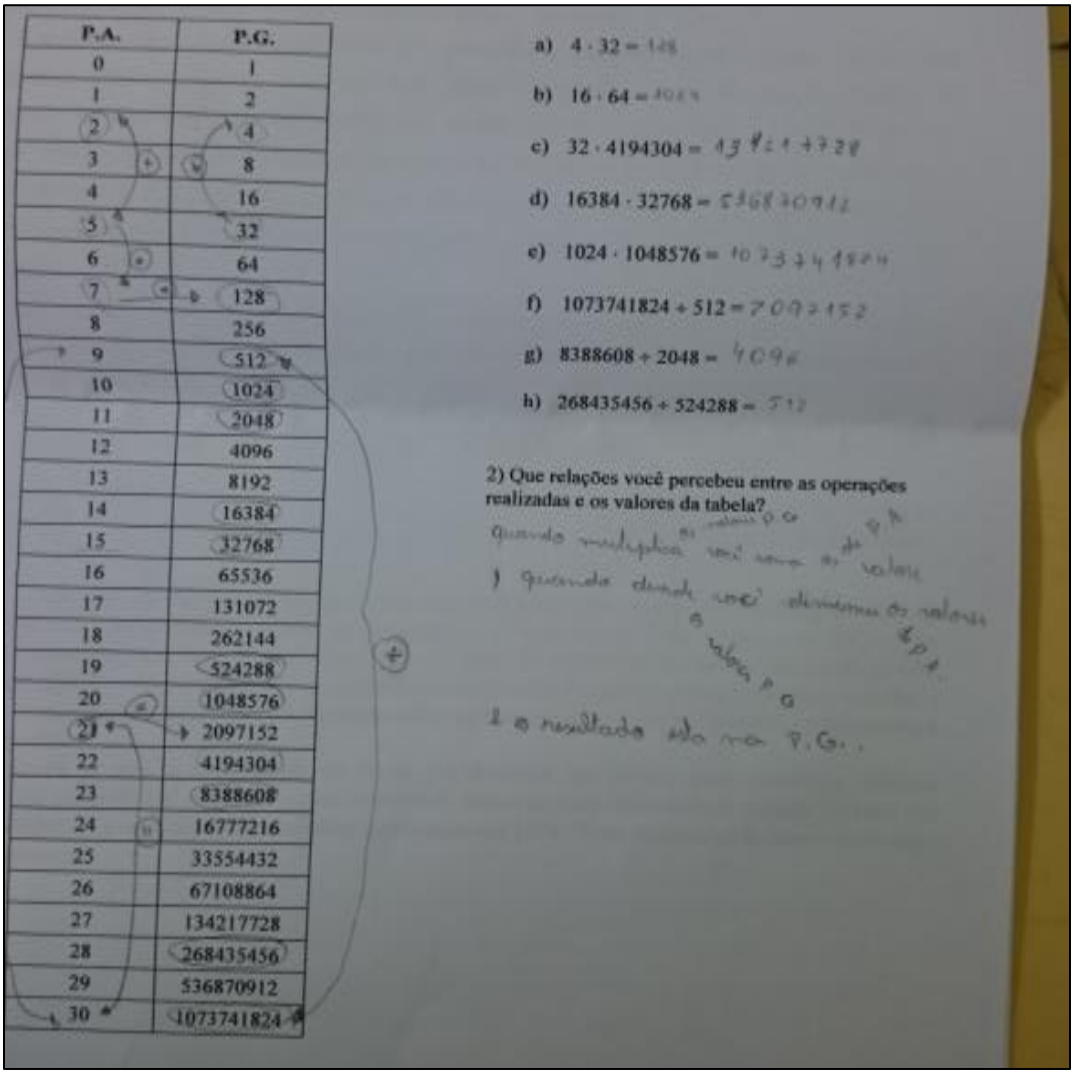
Figura 18 – Questão 1 da Atividade 2: resolução utilizando propriedades de potências



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros alunos não chegaram a escrever os termos da PG em forma de potência, mas perceberam que os números que estavam sendo multiplicados ou divididos se encontravam na coluna da PG, e que para multiplicar os dois números que se encontravam na PG, bastava somar os números da PA que se encontravam na mesma linha dos elementos da PG. Dessa forma, a soma dos elementos da PA iria resultar em um terceiro elemento também na PA, e o resultado da multiplicação seria o termo da PG que se encontrava na mesma linha do terceiro elemento encontrado na PA (Figura 19).

Figura 19 – Questão 1 da Atividade 2: resolução utilizando a tabela



P.A.	P.G.
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

a) 4 · 32 =

b) 16 · 64 =

c) 32 · 4194304 =

d) 16384 · 32768 =

e) 1024 · 1048576 =

f) 1073741824 ÷ 512 =

g) 8388608 ÷ 2048 = 4096

h) 268435456 ÷ 524288 = 512

2) Que relações você percebeu entre as operações realizadas e os valores da tabela?

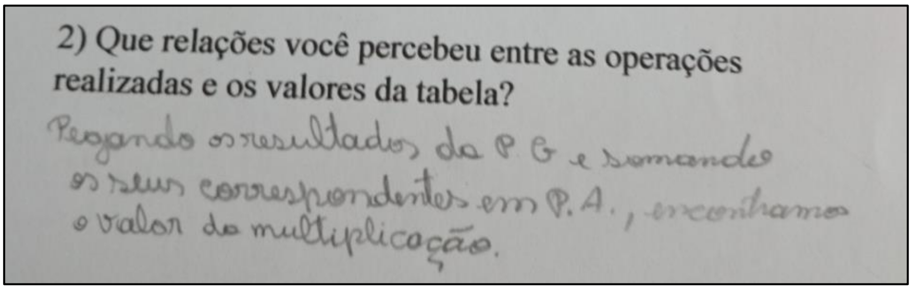
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por exemplo, em 16 x 64, o elemento da PA que se encontra na mesma linha que 16 é o 4, e para o 64 obtém-se o 6. Somando os termos da PA obtemos como resultado 10, que se encontra na mesma linha de 1024 (termo da PG), logo o resultado da multiplicação 16 x 64 é 1024.

No caso da divisão, foi feito um processo semelhante, porém, ao invés de somar os termos, realizaram uma subtração. Por exemplo, em 8388608 ÷ 2048, o elemento que se encontra na mesma linha que 8388608 na PA é o 23, e para 2048 tem-se o 11. Subtraindo os dois termos da PA obtém-se 12, que se encontra na mesma linha de 4096 (termo da PG), logo o resultado da divisão 8388608 ÷ 2048 é 4096.

Após as multiplicações e divisões realizadas, os alunos deveriam escrever as relações percebidas por eles entre as operações propostas e os elementos da tabela. As respostas demonstraram que houve a clara percepção de que, ao invés de efetuar multiplicações e divisões, a tabela poderia ser utilizada para transformá-las em adições e subtrações, que foi exatamente a ideia de Napier. Isto pode ser observado nas Figuras 19 e 20.

Figura 20 – Questão 2 da Atividade 2: exemplo de resposta


2) Que relações você percebeu entre as operações realizadas e os valores da tabela?

Pegando os resultados da P.G e somando os seus correspondentes em P.A., encontramos o valor da multiplicação.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Depois que os alunos terminaram a Atividade 2, o professor em formação foi ao quadro corrigi-la e ouvir deles como haviam efetuado os cálculos.

Foi explicado então que o objetivo de Napier era simplificar os cálculos por meio da transformação da multiplicação em soma e da divisão em subtração, e que o método encontrado por ele foi justamente o que eles (alunos) haviam acabado de usar. Napier possuía duas tabelas, uma com elementos em PA e outra com elementos em PG, e o termo da PA que se encontrava na mesma linha de um termo da PG foi chamado por ele de logaritmo. A tabela da Atividade 2 foi utilizada como exemplo. De acordo com ela, o “Logaritmo de Napier” de 1 é igual a 0, o “Logaritmo de Napier” de 2 é igual a 1, o “Logaritmo de Napier” de 4 é igual a 2, e assim sucessivamente.

No decorrer dessas explicações, uma aluna chegou a exclamar: “Agora sim eu aprendi logaritmo!”. Uma grande surpresa para eles foi o fato de que, aquilo que hoje em dia é chamado de “propriedade” do logaritmo foi, de fato, a razão de sua origem. Ou seja, o logaritmo foi criado para transformar produtos em somas e divisões em subtrações. É daí que vem sua definição. Na “abordagem tradicional”, com a qual eles haviam tido contato, em primeiro lugar é vista a definição de logaritmo, fora do contexto em que foi criada, e posteriormente suas “propriedades”, como se fossem um adendo à definição.

Foi explicado ainda que, quando os logaritmos surgiram, não havia a ideia de base. Porém, o professor em formação fez um “link” mostrando o paralelo com o que é estudado hoje em dia. Nesse caso, a base do logaritmo tal como é definido atualmente seria a razão da PG. Mencionou-se também que Napier utilizou para a construção da progressão geométrica uma razão bem pequena: $1 - \frac{1}{10^7}$, para que dessa forma abrangesse bastante números com várias casas decimais.

Depois da explicação do conceito de logaritmo na época, o professor em formação resolveu alguns exemplos da Atividade 2 utilizando o “recém descoberto” conceito de logaritmos, conforme será mostrado a seguir.

No primeiro exemplo, 4×8, utilizando a ideia de Napier transforma-se o produto em soma, substituindo o 4 por 2 e o 8 por 3. Assim, ao invés de multiplicar o 4 pelo 8, soma-se o 2 ao 3, obtendo 5, que corresponde a 32 na coluna da PG, logo 4×8 = 32.

Utilizando o conceito de “logaritmo de Napier”, denotado aqui por “nap” a conta feita para se chegar a 32 foi uma soma entre 2 e 3. Desse modo: 2 + 3 = 5, em que 2 = $\text{nap}\,4$, 3 = $\text{nap}\,8$ e 5 = $\text{nap}\,32$.

Assim, $\text{nap}\,4$ + $\text{nap}\,8$ = $\text{nap}\,32$, e sabe-se que 32 = 4 × 8, ou seja,

$\text{nap}\,4 + \text{nap}\,8 = \text{nap}(4 \times 8)$, que é justamente a propriedade do logaritmo do produto estudada por eles na “abordagem tradicional”.

No logaritmo do quociente, o raciocínio é análogo. O exemplo feito foi o sexto da Atividade 2, 1073741824 ÷ 512.

Utilizando a ideia de Napier, transforma-se a divisão em subtração, substituindo o 1073741824 por 30 e o 512 por 9. Desta forma, ao invés de dividir 1073741824 por 512, subtrai-se o 9 de 30, obtendo como resultado 21, que corresponde a 2097152 na coluna da PG, logo 1073741824 ÷ 512= 2097152.

Utilizando o conceito de “logaritmo de Napier”, a conta feita para se chegar a 2097152 foi uma subtração entre 30 e 9. Assim,

30 – 9 = 21, em que 30 = $\text{nap}\,1073741824$, 9 = $\text{nap}\,512$ e 21 = $\text{nap}\,2097152$.

Ou seja:

$\text{nap}\,1073741824 - \text{nap}\,512 = \text{nap}\,2097152$ e 2097152 = 1073741824÷512, e tem-se $\text{nap}\,1073741824 - \text{nap}\,512 = \text{nap}(1073741824 \div 512)$, que é justamente a propriedade do logaritmo do quociente vista na “abordagem tradicional”.

No decorrer do segundo momento, ficou perceptível que a utilização da História não é apenas um fator motivacional, mas serve também para mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram, contribuindo para a mudança de percepção dos alunos em relação à Matemática e ajudando a explicar o papel que ela tem na sociedade, como dito por Fauvel (1991) citado por Mendes (2006).

Além disso, Mendes (2006) ainda ressalta a importância de utilizar a ordem histórica dos acontecimentos, facilitando dessa forma a construção do conceito.

De acordo com Lima (1999), neste primeiro encontro foi contemplada a etapa de conceituação, pois, segundo o autor, este componente compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, a prática do raciocínio dedutivo, a conscientização de que as conclusões são provenientes de hipóteses e a criação de conexões entre diversos conceitos.

3.2.2 Segundo encontro

O segundo encontro ocorreu no dia 25/08/2016 e contou com a participação de 16 alunos. Iniciou-se, porém, com apenas oito, tendo os demais chegado no decorrer das atividades. Isto ocorreu porque os dois tempos anteriores à aplicação ficaram vagos, devido à ausência de um professor. Assim, alguns alunos saíram da instituição e demoraram a retornar.

Iniciando o terceiro momento, foi mostrada uma apresentação de *slides* durante a qual o professor em formação discorreu sobre a evolução dos logaritmos. Explicou que, após a publicação do livro de Napier, em 1614, quando Henry Briggs (professor de Geometria, em Londres) tomou conhecimento das tabelas de Napier e estudou-as, resolveu ir à Escócia encontrar-se com Napier. Neste encontro, Briggs propôs algumas modificações a Napier, dentre elas a ideia de base e, notadamente, a base 10. Napier concordou com as sugestões, porém, como já tinha idade avançada, não possuía mais energia para computar novas tabelas. Briggs então construiu-as, publicando em 1624 tábuas de logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, com uma precisão de 14 casas decimais.

Ressaltou ainda que a definição e a notação utilizadas atualmente foram introduzidas por Leonhard Euler no século XVIII (MAOR, 2008), e que uma propriedade muito importante é aquela que diz respeito à de mudança de base de um logaritmo.

Neste momento, a apresentação de *slides* foi interrompida, e foi demonstrada junto com os alunos a propriedade de mudança de base, conforme explicitado na elaboração da sequência didática.

Após a demonstração, os alunos resolveram a Atividade 3, utilizando um processo parecido com o de Henry Briggs, que encontrou os logaritmos decimais utilizando-se do conceito de logaritmo desenvolvido por Napier. Pode-se utilizar como exemplo o logaritmo de 6: $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$.

Em um dos exemplos da Atividade 3, os alunos precisaram utilizar a propriedade de mudança de base. Isto ocorreu na letra c, em que $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0{,}477}{0{,}301} = 1{,}\ 585$.

A Atividade 3 foi corrigida com os alunos, fazendo um paralelo com o processo utilizado por Henry Briggs para construir as tabelas de logaritmos decimais.

Embora seja um tipo de exercício feito por eles várias vezes quando estudaram os logaritmos, o conhecimento da história fez com que mudassem suas perspectivas e entendessem o desenvolvimento e o surgimento dos logaritmos decimais. Tanto é que todos participaram com interesse, realizando a atividade proposta e tecendo comentários durante sua correção. A utilização de fatos históricos como recurso pedagógico permite que os alunos tenham um novo olhar sobre os conceitos estudados, pois tais acontecimentos dão um novo significado a estes conceitos, fazendo com que a motivação dos alunos aumente. Isto foi dito por Mendes (2006), e foi o que ocorreu na Atividade 3.

Segundo Lima (1999), neste terceiro momento da sequência didática o componente predominante foi a Manipulação, pois para resolver os exercícios que envolviam a utilização de propriedades, os alunos precisavam reescrever o logaritmo a ser calculado de forma conveniente e em seguida aplicar a propriedade pertinente.

Terminada a correção participativa da Atividade 3, teve início o quarto momento. O professor em formação deu continuidade à apresentação de *slides*, cuja segunda parte versava sobre algumas aplicações dos logaritmos em outras ciências. Isto porque, percebida a importância dos logaritmos para o desenvolvimento da Matemática, é importante relatar como esse conceito se tornou importante para diversas áreas, por exemplo no cálculo do Ph, na quantidade de energia liberada em terremotos, na obtenção da meia-vida de elementos radioativos, entre outros.

Foi proposta aos alunos a Atividade 4, composta por três exercícios de vestibular que versavam sobre as aplicações citadas. Para resolvê-los, os alunos precisavam aplicar o conceito e as propriedades dos logaritmos. Após aguardar algum tempo para que resolvessem as questões, a correção foi feita no quadro, sempre escutando e seguindo as sugestões dadas pelos discentes.

Mendes (2006) afirma que “Um fato histórico da Matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu, na sociedade, uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais.” Isto é exatamente o que ocorre com os logaritmos e fica claro no quarto momento, pois o conceito passou a ser utilizado em diversas outras áreas.

De acordo com Lima (1999), este último momento está inserido no componente Aplicações.

A principal dificuldade apontada pelos alunos na Atividade 4 diz respeito à questão 3 (Figura 21).

Figura 21 – Questão 3 da Atividade 4

3. (ENEM –Modificado - 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão:

$M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,5.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?
A) 27
B) 36
C) 50
D) 54
E) 100

Fonte: <download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf>.

Segundo os alunos, houve dificuldade no uso da informação sobre a meia-vida, de modo que M(30) $= \frac{A}{2}$, e também causou estranheza o parâmetro A, que permaneceu desconhecido.

Ao final da Atividade 4, os alunos responderam o questionário final, composto por quatro perguntas, que foram respondidas pelos 16 alunos que participaram dos dois encontros, e sua análise será feita na próxima seção.

3.2.3 Análise de resultados

A análise dos resultados será feita com os dezesseis alunos que participaram dos dois encontros, e serão utilizados como instrumentos as observações feitas durante os encontros, as atividades realizadas pelos alunos e o questionário final.

Primeiro momento

Aqui, o objetivo era situar os alunos no tempo, mostrando que, na época do surgimento dos logaritmos, era preciso fazer cálculos (multiplicações e divisões) com rapidez e precisão, e esses cálculos eram realizados por um método chamado de prostaférese.

O objetivo foi alcançado, pois os alunos presentes conseguiram entender quais eram os anseios da sociedade da época, e como os cálculos eram realizados então. Perceberam assim a necessidade da obtenção de ferramentas de cálculo mais eficientes do que o método de prostaférese.

Segundo momento

Almejava-se fazer com que os alunos entendessem o conceito e as propriedades dos logaritmos, utilizando a ideia desenvolvida por Napier, que era relacionar os elementos de uma PA com os elementos de uma PG. Este elemento da PA era chamado de logaritmo do elemento da PG, de forma que não existia a ideia de base.

Pode-se dizer, por meio da observação e das respostas da Atividade 2, que o objetivo foi alcançado, pois os alunos conseguiram compreender os conceitos estudados, e uma aluna durante a Atividade 2 acabou por exclamar: “Agora sim aprendi logaritmos!”, como já foi dito durante o relato da aplicação.

Terceiro momento

O objetivo deste momento era mostrar aos alunos o processo que Henry Briggs utilizou para encontrar os logaritmos decimais, além de comentar as mudanças que foram ocorrendo ao longo dos anos, como a ideia de base e a notação atual do logaritmo.

Tal objetivo foi alcançado, pois os alunos se mostraram atentos à apresentação feita antes da atividade, e conseguiram compreender o processo utilizado por Henry Briggs para a construção de alguns logaritmos decimais, até porque tal processo ainda é muito utilizado hoje em dia nas aulas de logaritmos, porém não com o “olhar” voltado para a história como foi explicado na Atividade 3.

Quarto momento

Este momento foi idealizado para mostrar aos alunos o quanto o logaritmo foi importante no decorrer da história, pois ele não se restringiu apenas à Matemática, sendo aplicado em diversas outras ciências. Além disso, trabalhou-se com exercícios que envolvem essas aplicações, utilizando os conceitos estudados ao longo dos dois encontros.

O objetivo foi alcançado, pois os alunos conheceram novas aplicações ao longo da apresentação. A maioria dos alunos conseguiu resolver os exercícios sem problemas, utilizando as propriedades vistas ao longo das aulas.

O questionário final será destacado dentro da análise do quarto momento, por constituir um instrumento de avaliação em separado.

Questionário final

Conforme relatado anteriormente, o questionário final era composto de quatro questões, tendo como objetivo auxiliar a análise dos resultados da aplicação da sequência didática.

Pergunta 1: A parte histórica foi importante para ajudar a compreender o conceito de logaritmos?

Grande parte dos alunos respondeu afirmativamente a esta pergunta, e algumas observações foram feitas por eles, como:

Aluno A: Ajudou a entender onde se pode aplicar e de onde ele veio.

Aluno B: O surgimento do método auxilia no seu entendimento geral.

Pergunta 2: O conhecimento da origem do logaritmo ajudou a compreender suas propriedades?

Apenas um aluno respondeu negativamente a esta pergunta, deixando a seguinte observação:

Aluno C: Não, mas gostei de saber.

Pergunta 3: Essas atividades contribuíram para um melhor entendimento do logaritmo?

Todos os alunos responderam a essa pergunta afirmativamente, deixando alguns comentários, como:

Aluno D: Sim. Aprendi logaritmo agora.

Aluno A: Sim. Ajudou a relembrar e compreender conceitos esquecidos.

4. Nestas atividades você conheceu novas aplicações dos logaritmos?

A maioria dos alunos respondeu que sim, mas alguns disseram o contrário. Vejamos alguns comentários deixados por eles:

Aluno E: Não. Eu já conhecia as aplicações usadas.

Aluno A: Sim. Não sabia que era aplicado em terremotos, por exemplo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi elaborada uma sequência didática para o ensino de logaritmos, utilizando como metodologia a História da Matemática como agente de cognição e passando pelas três componentes do ensino de Matemática segundo Lima: Conceituação, Manipulação e Aplicações.

A pesquisa trazia a seguinte questão: “Como a História da Matemática pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de logaritmos?” e tinha como objetivo: “Investigar a utilização da História da Matemática como agente de cognição no ensino e aprendizagem de logaritmos.”

Pode-se dizer, por meio das observações feitas durante as aulas, das respostas às atividades e ao questionário final, que o objetivo do trabalho foi alcançado, pois foi possível perceber o que o uso da história proporcionou aos alunos, agregando e facilitando o aprendizado do conceito de logaritmos e suas propriedades. Nesta turma, a aplicação da sequência didática auxiliou tanto a compreensão de alguns conceitos não apreendidos anteriormente bem como a recordação de outros (por exemplo, a mudança de base).

Este trabalho de monografia veio confirmar a importância de procurar outros métodos de ensino, fugindo do “tradicional”. Isto faz com que os alunos se motivem e vejam a Matemática de outra forma, mais divertida, instigante e “humana”.

No caso desta monografia, foi utilizada a História da Matemática como agente de cognição, vindo a confirmar a importância da História no ensino da Matemática. Isto já havia sido percebido por mim, ao cursar a disciplina de História da Matemática no terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática e nela participar de atividades. Porém, realizar um trabalho utilizando esta metodologia de ensino fez com que essa percepção se tornasse uma certeza, pois foram vistos em sala de aula os benefícios que tal metodologia pode trazer aos alunos.

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se o estudo sobre o surgimento do número *e*, e dos logaritmos neperianos (ou naturais), assunto em que os alunos têm bastante dificuldade. Outro assunto que também pode ser explorado nessa área é o cálculo dos logaritmos decimais dos números primos, realizado por Henry Briggs após a publicação do livro de Napier.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

FERREIRA, Ronize Lampert. *Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática*. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - UNIFRA, Rio Grande do Sul, Santa Maria, 2006. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp038952.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

GROENWALD, Claudia Lisete O.; SAUER, Lisandra de O.; FRANKE, Rosvita F. A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico. *Paradígma*, Maracay , v. 26, n. 2, p. 35-55, dic. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200003&lng=es&nrm=iso>. Acesso em 18 abr. 2017.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. *Revista do professor de Matemática*, Rio de Janeiro: SBM, n. 41. 1999. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/rpm41.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2016.

LIMA, Elon Lages. *Matemática e ensino*. 2 ed. Sociedade brasileira de matemática, 2003.

MAOR, Eli. *e: A História de um Número*. Rio de Janeiro: Record, 2008. 5. ed.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. *A História como um agente de cognição na Educação Matemática.* 1. ed. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. *A História como um agente de cognição na Educação Matemática.* 1. ed. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MIGUEL, Antonio. *Três estudos sobre história e educação matemática*. Campinas: tese de doutorado, Faculdade de Educação - UNICAMP, 1993. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000069861>. Acesso em: 12 dez. 2016.

OLIVEIRA, Andreia Julio de. *O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2005. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_40.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2016.

SCHUBRING, Gert. Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2008, vol. 11, no 3, p. 383-412. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000300004>. Acesso em: 12 dez. 2016.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A Pesquisa Científica. In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. *Métodos de Pesquisa*. 1. ed. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS: UFRGS Editora, 2009.

SOARES, Evanildo Costa. *Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula*. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: <http://www.natal.rn.gov.br/bvn/publicacoes/EvanildoCS_DISSERT.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2016.

YIN, Robert K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICE

DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNO: IGOR LEITE SOARES

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
APLICAÇÃO NA TURMA REGULAR

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional promovida por Igor Leite Soares, aluno do curso de Licenciatura em Matemática do IF Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação das professoras Carla Antunes Fontes e Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Desde já, gratos pela atenção.

QUESTIONÁRIO INICIAL

Nome:

Q1. Analise cada sequência abaixo e diga se é progressão aritmética, geométrica ou nenhuma das duas.

	Sequências	P.A.	P.G.	Nenhuma das duas
a)	(0, 3, 6, 9, 12, 15)			
b)	$(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$			
c)	(16, 13, 10, 7, 4, 1)			
d)	(-2, 0, 3, 6, 12, 16, 21)			
e)	(2, 6, 18, 54, 162)			
f)	(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)			

Q2. Dê a razão de cada sequência que você identificou como progressão aritmética ou geométrica no exercício acima.

	Sequências	Razão
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO BRASIL GOVERNO FEDERAL matemática LICENCIATURA

Q3. Calcule os logaritmos abaixo.

a) $\log_2 8$

b) $\log_9 81$

c) $\log_3 243$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

Q4. Dados log 2 = 0,301, log 3 = 0,477 e log 5 = 0,699, calcule, indicando como você fez.

a) $\log 4$

b) $\log 6$

c) $\log_2 3$

d) $\log 1{,}5$

e) $\log 20$

f) $\log 2{,}5$

Q5. Você conhece alguma aplicação dos logaritmos? Caso conheça, fale um pouco sobre ela.

____

____

ATIVIDADE 1

Na época do surgimento dos logaritmos, era necessário efetuar cálculos complexos, principalmente envolvendo a Astronomia durante as navegações para expansão territorial europeia. Esta expansão ocorreu entre os anos de 1492 a 1700, e se deu em três fases.

A primeira fase foi a do comércio, onde os mercadores europeus negociavam com a Ásia, sendo que algumas cidades europeias ocupavam uma posição geográfica favorável para o comércio de especiarias e tecidos finos que eram trazidos em navios pelo mar Mediterrâneo. As cidades que não possuíam uma boa localização tiveram que procurar rotas alternativas, o que culminou com a descoberta de outros territórios. A segunda fase foi a da era das explorações pela Europa, marcada pela conquista e anexação de territórios. A terceira fase foi a colonização e a efetiva migração dos europeus para outros continentes.

No século XV, ocorreram diversos avanços tecnológicos cruciais para a expansão europeia. Os equipamentos de navegação e os projetos de navios foram melhorados. Dessa forma, a era das explorações despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse de novas descobertas territoriais e por uma percepção de necessidade de uma nova tecnologia, principalmente na navegação.

Portanto, o avanço da Matemática durante esse período se deu principalmente ao crescimento político, social e econômico da época, pois havia necessidade dos astrônomos, navegadores, comerciantes e engenheiros realizarem cálculos rápidos e precisos.

O desenvolvimento da Astronomia, navegação, matemática comercial e financeira estava enfrentando problemas devido à necessidade de simplificar cálculos aritméticos complexos e trabalhosos, pois, na época das grandes navegações, exigiam-se cálculos bastante precisos.

James VI, rei da Escócia, viajou em 1590 para a Dinamarca, com o objetivo de encontrar a sua noiva, Anne da Dinamarca. O grupo que viajava com o rei foi forçado por tempestades a desembarcar perto do observatório de Tycho Brahe, um grande astrônomo. Enquanto esperavam um tempo mais favorável, Tycho Brahe mencionou um maravilhoso artifício para realizar cálculos no observatório.

Por exemplo, para efetuar o produto de 0,8192 por 0,3746, recorria-se a uma tabela de senos e cossenos, procurando pelos ângulos cujos cossenos ou senos correspondessem aproximadamente a esses valores. No caso, $0{,}8192 \cong \cos(35°)$ e $0{,}3746 \cong \cos(68°)$. Em seguida, utilizavam-se as fórmulas que transformavam produtos de senos ou cossenos em somas (Método da prostaférese).

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — matemática LICENCIATURA

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNO: IGOR LEITE SOARES

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
APLICAÇÃO NA TURMA REGULAR

ATIVIDADE 2

1) Efetue as operações a seguir, procurando relações com a tabela dada.

P.A.	P.G.
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

a) 4 . 32 =

b) 16 . 64 =

c) 32 . 4194304 =

d) 16384 . 32768 =

e) 1024 . 1048576 =

f) 1073741824 ÷ 512 =

g) 8388608 ÷ 2048 =

h) 268435456 ÷ 524288 =

2) Que relações você percebeu entre as operações realizadas e os valores da tabela?

DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNO: IGOR LEITE SOARES

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
APLICAÇÃO NA TURMA REGULAR

ATIVIDADE 3

Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule, indicando como você fez.

a) $\log 4$

b) $\log 6$

c) $\log_2 3$

d) $\log 1{,}5$

e) $\log 20$

f) $\log 2{,}5$

ATIVIDADE 4

1. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão pH = –log [H^+], em que [H^+] indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era [H^+] = 5,4 · 10^{-8} mol/L. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

A) 7,26
B) 7,58
C) 7,32
D) 7,74
E) 7,64

2. (Enem – 2011) A escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada por M_w) introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_o se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_o)$$

Onde M_o é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.
O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_w= 7,3.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_o do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

A) $10^{-5{,}10}$
B) $10^{-0{,}73}$
C) $10^{12{,}00}$
D) $10^{21{,}65}$
E) 10^{27}

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO BRASIL GOVERNO FEDERAL matemática LICENCIATURA

3. (ENEM –Modificado - 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão:

$M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,5.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27
B) 36
C) 50
D) 54
E) 100

QUESTIONÁRIO FINAL

DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNO: IGOR LEITE SOARES

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
APLICAÇÃO NA TURMA REGULAR

A parte histórica foi importante para ajudar a compreender o conceito de logaritmo?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ____

O conhecimento da origem do logaritmo ajudou a compreender suas propriedades?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ____

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento do logaritmo?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ____

Nestas atividades você conheceu novas aplicações dos logaritmos?
( ) Sim. ( ) Não.

Observações: ____