LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO POR INTEGRAL DEFINIDA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

HALLEF JULIA MACABU
LEOMARIO RIBEIRO MACIEL DA SILVA

Campos dos Goytacazes – RJ
2020

HALLEF JULIA MACABU

LEOMARIO RIBEIRO MACIEL DA SILVA

CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO POR INTEGRAL DEFINIDA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Larissa de Sousa Moreira
Coorientadora: Profª. Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto

Campos dos Goytacazes – RJ

2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS GUARUS
AVENIDA SOUZA MOTA, 350, PARQUE FUNDÃO, CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ, CEP 28060-010
Fone: (22) 2737-2400

PARECER N° 4/2020 - CMACCGPRO/DEACCG/DGCCGUAR/REIT/IFFLU

23 de novembro de 2020

HALLEF JULIA MACABU

LEOMARIO RIBEIRO MACIEL DA SILVA

CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO POR INTEGRAL DEFINIDA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense campus Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 03 de novembro de 2020.

Banca Avaliadora:

____

Prof ª. Larissa de Sousa Moreira (orientadora)

Mestre em Pesquisa Operacional e Inteligência Computacional/UCAM/RJ

Instituto Federal Fluminense Campus Campos Guarus

____

Prof ª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto (coorientadora)

Doutora em Informática na Educação/UFRGS

Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro

____

Prof ª. Paula Eveline da Silva dos Santos

Mestre em Matemática/UENF

Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro

Humberto José Bortolossi

____

Prof º. Humberto José Bortolossi

Doutor em Matemática/ PUC/RJ

Universidade Federal Fluminense

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

M144c

Macabu, Hallef Julia
Cálculo de volumes de sólidos de revolução por integral definida com auxílio do geogebra / Hallef Julia Macabu, Leomario Ribeiro Maciel da Silva - 2020.
188 f.: il. color.

Orientadora: Larissa de Sousa Moreira
Coorientadora: Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2020.
Referências: f. 118 a 126.

1. Atividades Investigativas. 2. Cálculo de Volumes. 3. Integral Definida. 4. GeoGebra. 5. Teoria da Aprendizagem Significativa. I. Silva, Leomario Ribeiro Maciel da. II. Moreira, Larissa de Sousa , orient. III. Título.III. Peixoto, Gilmara Teixeira Barcelos , coorient. IV. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Aos nossos familiares e amigos, que nos apoiaram e nos incentivaram nesta jornada.

Aos professores, que contribuíram profundamente na nossa formação e que inspiram nossa futura prática docente.

Às nossas orientadoras Larissa de Sousa Moreira e Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto, por todos os ensinamentos e por terem aceitado o convite para nos conduzir neste trabalho, desempenhando esse papel com grande carinho e admirável dedicação.

Aos participantes do teste exploratório e da implementação, pelo empenho e pelas colaborações nesta pesquisa.

A todas as pessoas que lutam e lutaram ao longo da história por uma educação democrática, gratuita e de qualidade, tornando possível esta nossa realização.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, possibilitaram a conclusão deste trabalho.

O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele.

Immanuel Kant

RESUMO

A predominância do ensino expositivo e as limitações no que se refere à visualização geométrica têm provocado, em parte dos alunos da Educação Superior, dificuldades de aprendizagem em tópicos de Cálculo Diferencial e Integral. A fim de minimizar esse problema, Atividades Investigativas com apoio de Tecnologias Digitais (TD) podem ser utilizadas na abordagem dos conteúdos de Cálculo. Isso porque, dentre outros fatores, as Atividades Investigativas proporcionam autonomia ao aprendiz na mobilização de seus recursos cognitivos em busca de uma aprendizagem mais significativa, e as TD podem auxiliar na visualização, na compreensão e na construção do conhecimento. Nessa perspectiva, a pesquisa realizada tem o objetivo geral de investigar as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra. Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma pesquisa de cunho qualitativo do tipo intervenção pedagógica, que teve como participantes seis licenciandos em Matemática matriculados na disciplina Cálculo III de uma Instituição Federal de Educação. Esse público foi definido levando em consideração que é na referida disciplina do curso que se estuda o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida. Foram promovidos três encontros, em um laboratório de informática, para a experimentação do material elaborado. Salienta-se que na etapa de planejamento da intervenção, esse material foi submetido a um teste exploratório com o intuito de melhorá-lo. A pesquisa foi fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa, sendo assim, buscou-se que o conteúdo tratado pudesse ser aprendido pelos participantes a partir de interações com conhecimentos já existentes em suas estruturas cognitivas. A partir da análise dos dados, constatou-se que as Atividades Investigativas realizadas com *applets* elaborados no GeoGebra contribuíram para que os sujeitos participantes da implementação pudessem aprender de modo significativo o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Palavras-chave: Atividades Investigativas. Cálculo de Volumes. Integral Definida. GeoGebra. Teoria da Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

The predominance of expository teaching and the limitations regarded to geometric visualization has provoked, in part of the students of Higher Education, learning difficulties in topics of Diferencial and Integral Calculus. In order to minimize the problem, Investigative Activities supported by Digital Technologies (DT) can be used to the approach of Calculus contents. This is because, among other aspects, Investigative Activities provide autonomy to the learner in the mobilization of their cognitive resources in the researching of more meaningful learning, and DT can assist in the visualization, understanding and construction of knowledge. In this perspective, the research done it has the general objective of investigating the possibilities and the challenges in the studying of calculation of volumes of solids of revolution by Definite Integral with the help of GeoGebra. To achieve this goal, it was done qualitative research of the pedagogical intervention type, which had as participants six undergraduate students in Mathematics enrolled in the course Calculus III of a Federal Education Institution. This audience was defined considering that it is in the referred program course that it’s studied the content of calculation of volumes of solids of revolution by Definite Integral. Three meetings were promoted, in a computer laboratory, to the experimentation of the elaborated material. It’s noticed that in the intervention planning stage, this material was submitted to a exploratory test in order to improve it. The research was based on the Theory of Meaningful Learning, therefore, it was sought that the treated content could be learned by the participants from interactions which knowledge already existing in their cognitive structures. From the data analysis, it was verified that the Investigative Activities accomplished with *applets* elaborated in GeoGebra contributed to the subjects participants of the implementation could learn in a meaningful way the content of calculation of volume of solids of revolution by Definite Integral.

Keywords: Investigative Activities. Calculation of Volumes. Definite Integral. GeoGebra. Theory of Meaningful Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

A1-A – Atividade Investigativa 1 A

A1-B – Atividade Investigativa 1 B

A2-A – Atividade Investigativa 2 A

A2-B – Atividade Investigativa 2 B

AF-A – Atividade Final A

AF-B – Atividade Final B

AI-A – Atividade Inicial A

AI-B – Atividade Inicial B

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

QF – Questionário Final

QI-A – Questionário Inicial A

QI-B – Questionário Inicial B

TD – Tecnologias Digitais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas na área de Educação Matemática revelam que uma parte considerável dos alunos da Educação Superior apresenta dificuldades de aprendizagem nos conteúdos estudados em Cálculo Diferencial e Integral (CDI) (ANJOS, SECAFIM, 2018; GOUVEIA, 2010; SANTOS *et al.,* 2012; VIEIRA, A., 2013). Rezende (2003) afirma que esse problema não tem relação com fatores culturais e socioeconômicos, já que a situação em países desenvolvidos é similar à do Brasil. Assim, por não haver uma evidência clara do motivo, as dificuldades de aprendizagem em CDI têm, cada vez mais, se tornado interesse de pesquisas em Educação Matemática (RODRIGUES; NEVES, 2019).

Ao analisar essas dificuldades, deve-se levar em consideração a metodologia adotada nas disciplinas de Cálculo (FRESCKI, PIGATTO, 2009; RAFAEL, ESCHER, 2015; VIEIRA, A., 2013). Miranda (2010) aponta que nos cursos de CDI, geralmente, são utilizadas metodologias tradicionais, em que o professor apenas faz uso do livro-texto e não adota os diferentes recursos disponíveis, como *softwares* e outros recursos computacionais. Ainda, Rubi (2018) destaca que o ensino de Cálculo ocorre de forma unilateral, na qual o docente, como detentor do conhecimento, expõe o conteúdo, resolve exemplos de exercícios e leva os alunos apenas a reproduzirem o que foi feito por ele.

Outro fator que gera dificuldades na aprendizagem de tópicos de CDI é a limitação que os alunos, em grande parte, possuem quanto à visualização no espaço tridimensional (MOTA, 2010). Pereira *et al.* (2017, p. 685), em sua pesquisa, constataram que "[...] uma das maiores dificuldades dos estudantes era conseguir a partir da forma algébrica de uma função dada e um eixo de rotação, ao menos vislumbrar a forma geométrica que seria gerada através da revolução da função em torno do referido eixo."

Diante disso, vários autores como Crisostomo e Lopes (2017), Gonçalves e Reis (2013), Gouveia (2010), Gouveia e Miskulin (2012), Masola e Allevato (2016) e Richit (2010) incentivam o uso de Atividades Investigativas com auxílio de Tecnologias Digitais (TD) no estudo de CDI.

As Atividades Investigativas, ao requererem a participação do aluno e a mobilização de seus recursos cognitivos e afetivos a fim de atingir um objetivo, possibilitam seu envolvimento ativo na construção da aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013). Zômpero e Laburú (2011, p. 73) corroboram com essa afirmação ao expressarem que Atividades Investigativas são relevantes para “[...] o desenvolvimento de habilidades cognitivas nos alunos, a realização de procedimentos como elaboração de hipóteses, anotação e análise de dados e o desenvolvimento da capacidade de argumentação.”

No que tange às TD, seu uso em sala de aula contribui para a visualização geométrica no estudo de CDI (BACKENDORF, BASSO, 2018; MIRANDA, 2010; MOTA, 2010; REZENDE, 2003; SANTOS *et al.*, 2012; VIEIRA, A., 2013). Isso porque, facilitam a construção de conceitos matemáticos; tornam possível a “concretização” dos objetos; dão a sensação de realismo e de existência material; permitem a visualização imediata; possibilitam a manipulação e alteração de propriedades, permitindo criar e recriar objetos matemáticos; otimizam o tempo e proporcionam a realização de conexões entre diversas propriedades Matemáticas (BACKENDORF, BASSO, 2018; NOTARE, BASSO, 2016).

Especificamente, sobre o uso de TD no ensino de Cálculo, Richit (2010) afirma que:

> Incorporar os recursos tecnológicos (como o *software* GeoGebra, entre outros) na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada, e que seja menos enfatizada a abordagem algébrica. Podemos observar, que ao longo dos anos, não houveram [sic] mudanças substanciais na forma como grande parte dos conceitos de Cálculo são abordados. A abordagem de tais conceitos, ainda pauta-se em tecnicalidades, formalismo e rigor, aspectos estes que distanciam e muito da forma como estes conceitos foram construídos e formalizados. As idéias iniciais do Cálculo são de origem geométrica, mas o que vemos hoje é a ênfase no aspecto algébrico. É nesse sentido que entendemos a necessidade do resgate geométrico do Cálculo, por meio de recursos tecnológicos. (RICHIT, 2010, p. 42).

Como sugerido por Richit (2010), dentre as TD que podem auxiliar no ensino de Cálculo, destaca-se o *software* GeoGebra. A autora ressalta as vantagens do GeoGebra na abordagem de tópicos em CDI ao afirmar que o uso desse *software* de Matemática dinâmica torna possível o estudo de conceitos de Álgebra e Cálculo e o trabalho, por meio das janelas algébrica e gráfica, com duas representações diferentes ao mesmo tempo de um mesmo objeto que se interagem. Além disso, ela indica que é possível realizar construções dinâmicas e criar *applets.* Salienta-se ainda, além das possibilidades citadas pelo autor, a interatividade entre as janelas de visualização 2D e 3D.

A partir disso, entende-se que o uso de Atividades Investigativas em conjunto com o *software* GeoGebra pode contribuir para o estudo de CDI, oportunizando o pensamento crítico e reflexivo, conforme afirmam Pinheiro e Leal Júnior (2016).

No âmbito do uso de TD no ensino de Cálculo, Miranda (2010) destaca que as construções e interpretações no IR^3 podem ser relacionadas a conhecimentos prévios do IR^2 e a outros conceitos matemáticos. Quanto à necessidade de se estabelecer uma relação entre conhecimentos anteriores para a construção de novos conhecimentos, Rezende (2003) afirma que:

> [...] o aluno não aprende não é porque não possui “estruturas cognitivas” apropriadas ao desenvolvimento de determinados conceitos, mas, isto sim, porque ainda não construiu os nós e os feixes de relações de conhecimentos necessários para se estabelecer novas conexões e a incorporação de novos nós à rede já construída. (REZENDE, 2003, p. 56).

Frente a isso, percebe-se a necessidade de que a aprendizagem de tópicos de CDI seja significativa. Na Aprendizagem Significativa, a aquisição e a retenção de conhecimento são produtos de um processo ativo e interativo entre o novo e as ideias existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (AUSUBEL, 2000). Assim, as ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com algum conhecimento existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2012). Dessa forma, “A interacção entre novos significados potenciais e ideias relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz dá origem a significados verdadeiros ou psicológicos.” (AUSUBEL, 2000, p. 1).

A motivação para este trabalho se deu pela afinidade dos autores com os conteúdos estudados em CDI e com o uso de TD. Além disso, os autores deste trabalho, durante disciplinas de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, utilizaram por conta própria o *software* GeoGebra para esclarecerem dúvidas e aprofundarem os estudos.

Diante desse contexto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra?

Para responder a essa questão, foi traçado o seguinte objetivo geral: Investigar as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra.

A fim de atingir esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Aprofundar estudos sobre Integrais Definidas em conjunto com o *software* GeoGebra;
- Identificar resultados apresentados por pesquisas nacionais realizadas recentemente sobre o uso de TD no cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida;
- Investigar as contribuições do uso do *software* GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida;
- Contribuir para a visualização espacial no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida por meio do *software* GeoGebra;
- Propiciar, por meio da análise dos dados levantados na pesquisa, reflexões pedagógicas sobre a importância do uso de TD e de Atividades Investigativas no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Esta pesquisa de caráter qualitativo é do tipo intervenção pedagógica, pois busca planejar, implementar e avaliar uma prática pedagógica diferenciada, com o objetivo de maximizar as aprendizagens dos estudantes envolvidos (DAMIANI, 2012).

Os instrumentos de coletas de dados utilizados foram questionários, as respostas dos alunos às atividades e a observação realizada pelos pesquisadores durante a experimentação da sequência didática.

Para discorrer acerca da pesquisa promovida, este trabalho se encontra estruturado em cinco capítulos. O primeiro se refere a esta introdução, que apresenta a justificativa, motivação, questão de pesquisa e objetivos geral e específicos. O segundo trata do referencial teórico adotado, abordando aspectos sobre Atividades Investigativas e TD, GeoGebra e Teoria da Aprendizagem Significativa. Em se tratando do terceiro, apresentam-se os procedimentos metodológicos, em que é descrito o tipo de pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e as etapas percorridas para a realização deste trabalho de conclusão de curso. No quarto capítulo são expostas e esclarecidas as alterações realizadas no material após a aplicação do teste exploratório e, também, é dissertado acerca da implementação e da avaliação dos dados coletados por meio dos questionários e da experimentação da sequência didática. O quinto capítulo é reservado para que sejam feitas as considerações finais sobre a pesquisa realizada.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo trata do referencial teórico e do conhecimento acumulado a respeito do tema abordado neste trabalho, tendo como base a literatura sobre o assunto. Ele se divide em quatro seções, denominadas: i) Atividades Investigativas: tecnologias digitais, que apresenta as características desse tipo de atividade e suas contribuições para a aprendizagem, além de destacar o seu uso juntamente com as TD; ii) Teoria da Aprendizagem Significativa, que apresenta a teoria e seus principais conceitos; iii) Integral Definida: volumes, que trata do cálculo de volumes de sólidos de revolução por meio de Integral Definida; iv) Revisão Sistematizada, que explica o processo de pesquisa dos trabalhos relacionados a este.

2.1 Atividades Investigativas: Tecnologias Digitais

As Atividades Investigativas são caracterizadas pela descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico (PORFÍRIO; OLIVEIRA, 1999). Em se tratando da Matemática, investigar significa descobrir relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, em busca de identificar as respectivas propriedades (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Zômpero e Laburú (2011) destacam que as Atividades Investigativas são utilizadas no ensino com o intuito de possibilitar a realização de procedimentos, tais como a elaboração de hipóteses e análise de dados, além do desenvolvimento da capacidade de argumentação. Para esses autores, o ensino por investigação, conhecido também como *inquiry*, permite "[...] o aprimoramento do raciocínio e das habilidades cognitivas dos alunos, e também a cooperação entre eles, além de possibilitar que compreendam a natureza do trabalho científico." (ZÔMPERO, LABURÚ, 2011, p. 68).

Além disso, o trabalho investigativo deve ter por características: i) buscar que os alunos se sintam interessados em participar da proposta feita; e ii) permitir que a tarefa seja realizada de modo a oportunizar a discussão e a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2013; VIEIRA, F., 2012).

De acordo com Gonçalves (2012), o uso de TD pode propiciar a realização de Atividades Investigativas, permitindo que o aluno analise situações, observe regularidades, teste hipóteses e busque soluções para problemas propostos. Carneiro (2013) afirma que é importante criar um ambiente propício ao desenvolvimento de Atividades Investigativas e que as TD podem ser utilizadas com esse objetivo.

Segundo Cometti (2018), as tecnologias estão presentes no ambiente escolar em todos os níveis de ensino e estiveram atreladas aos processos educacionais ao longo do tempo. Por tecnologias, esse autor entende que são os instrumentos ou os processos utilizados para buscar resultados melhores em algum trabalho. É válido comentar que as tecnologias se desenvolveram de forma mais rápida que os processos pedagógicos (COMETTI, 2018). Corroborando com essa afirmação, Borba e Penteado (2016) afirmam que a partir do século XX a informática se difundiu nas mais diversas áreas, porém sua utilização para fins educativos foi tardia.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) apontam que com o advento da internet rápida, a sociedade está vivendo a quarta fase[1], iniciada em 2004, com relação ao uso das tecnologias em Educação Matemática. Os autores destacam que essa fase é marcada por diversos aspectos como o uso GeoGebra, multimodalidade, novos *designs* e interatividade, tecnologias móveis ou portáteis, performance e performance matemática digital, de modo que se tornou comum o uso do termo Tecnologias Digitais. Assim, em concordância com esses autores, optou-se por utilizar neste trabalho o termo Tecnologias Digitais (TD).

Pode-se definir Tecnologia Digital como “[...] um conjunto de tecnologias que permitem a aquisição, produção e transmissão de informações que podem ser conduzidas por meio de vídeos, áudios, textos ou imagens, entre outros.” (CUNHA, 2018, p. 35).

Rodrigues, G. (2014, p. 30) afirma que as TD possibilitam ir além da apresentação dos conteúdos de forma expositiva com utilização apenas do quadro, elas permitem “[...] manipular, alterar, ensaiar resultados em um ambiente seguro,

[1] Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) adotam uma perspectiva estruturada em quatro fases para o uso das tecnologias na Educação Matemática. A primeira fase, iniciada em 1985 e denominada Tecnologias Informáticas (TI), é marcada pelo uso de computadores, calculadoras gráficas simples e pela utilização da linguagem de programação. Na segunda fase, com início no ano 1990, ocorreu a popularização dos computadores pessoais, calculadoras gráficas e a utilização de *software* de geometria dinâmica, e para essa fase foram utilizados os termos TI, *software* educativo ou tecnologia educativa. A terceira fase, iniciada em 1999, é marcada pelo uso dos computadores, *laptop*s, da internet, *e-mail*, *chats* e Google, e nessa fase foi utilizado o termo Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

reprodutível, dinâmico e rico em experiências, como é o ambiente virtual.”. Além disso, as TD têm a potencialidade de alterar a posição de espectador do aluno, permitindo-lhe mediar seus próprios conhecimentos (RODRIGUES, G., 2014).

Dentre as vantagens das TD, destaca-se ainda “[...] a capacidade de realizar simulações, a criação de realidades virtuais, as facilidades de comunicação, inclusive com a possibilidade de telepresença, viabilizando a concretização de projetos cooperativos entre pessoas participando de locais diferentes [...]” (FURTADO, 2014, p. 63). Quanto à sua utilização, vale considerar “[...] a facilidade de uso, com a disponibilidade de interfaces mais intuitivas, que dispensam a necessidade de manuais de instruções extensos.” (FURTADO, 2014, p. 65).

No que se refere à Matemática,

> Muitas pesquisas apontam que o uso de tecnologias em conteúdos específicos como tabelas, gráficos, Geometria, Álgebra e outros, favorecem de forma real o ensino e, consequentemente, a aprendizagem. Essa abordagem dos conteúdos da Matemática a partir de recursos computacionais pode fazer uma conexão entre o que o aluno geralmente vê em sala ou nos livros numa linguagem formal e abstrata, com os conhecimentos já existentes que ele carrega na sua estrutura cognitiva [...]. (COMETTI, 2018, p. 39).

Assim, o uso de TD pode facilitar a aprendizagem e a construção do conhecimento matemático (CRUZ, 2018). Dentre as tecnologias digitais, destaca-se o *software* GeoGebra.

2.1.1 *Software* GeoGebra

O GeoGebra, que foi criado pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter da *Florida Atlantic University* em 2001, é um *software* gratuito de código aberto com premiações internacionais e possui ferramentas para o estudo de Álgebra, Geometria e Cálculo disponíveis para o ensino de Matemática e de outras disciplinas, podendo ser utilizado da Educação Básica ao Ensino Superior (COMETTI, 2018; HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M.,LAVICZA, 2009; LUIZ, 2015; ORTIZ, PESSOA, DORNELES, 2018).

Este *software* é multiplataforma e está disponível para os sistemas operacionais iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux (GEOGEBRA, 2019a). O GeoGebra pode ser baixado no site www.geogebra.org e está disponível em diversos idiomas, incluindo o português (ZANELLA, 2018). Rodrigues, T. (2019) destaca que “[...] o GeoGebra é uma ótima escolha por ser um *software* livre e que rapidamente pode ser instalado em qualquer computador, não sendo necessário ter acesso a internet após sua instalação.” (RODRIGUES, T., 2019, p. 23).

Em seu trabalho, Zanella (2018) aponta que o GeoGebra é um *software* de fácil utilização, além da precisão das construções e das diversas ferramentas disponíveis. O autor ainda ressalta a potencialidade para a exploração, manipulação, simulação e intuição. Sousa (2018) afirma que o GeoGebra, como recurso pedagógico, pode contribuir para motivação dos alunos, fazendo com que eles se envolvam nas atividades e possam agir ativamente na construção do conhecimento, o que pode favorecer os processos de ensino e de aprendizagem. Esse autor menciona, ainda, que

> [...] a partir do momento que os alunos fazem uso dos recursos disponíveis nessa ferramenta, é possível desempenharem um papel investigativo através das construções e manipulações das figuras e, também, se familiarizarem e argumentarem sobre as propriedades, intencionalmente provocadas na elaboração das atividades e que constituem os conceitos a serem apreendidos, provados e formalizados. (SOUSA, 2018, p. 39).

Sobre o uso do GeoGebra, Souza (2015) concluiu que esse *software* facilita a compreensão dos conceitos e que suas ferramentas auxiliam no estudo do cálculo de volumes, ressaltando que “[...] os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento geométrico e a visualização espacial em relação aos sólidos estudados.” (SOUZA, 2015, p. 70). Além disso, Hohenwarter *et al.* (2008) afirmam que conceitos de Cálculo podem ser explorados e investigados devido à interface dinâmica do GeoGebra, possibilitando conexões entre as representações simbólicas e gráficas.

No *site* do GeoGebra é disponibilizado, na seção materiais, um banco com mais de um milhão de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos para Matemática e Ciência (GEOGEBRA, 2019b). Nesse banco existem construções interativas, que tratam dos mais diversos temas, disponibilizadas por vários autores ao redor do mundo. Cada uma dessas construções se denomina *applet,* que é um *software* aplicativo executado dentro de um programa maior (FERREIRA, 2011).

Em especial, quanto aos *applets* que podem ser elaborados no GeoGebra*,* autores defendem que sua utilização pode trazer benefícios para os processos de ensino e aprendizagem (BACKENDORF, BASSO, 2018; SOUZA, 2015). Segundo Barcelos *et al.* (2009, p. 8), os *applets* possibilitam o estabelecimento de conjecturas e permitem práticas docentes mais coerentes com o perfil dos alunos das atuais sociedades.

Nesse sentido, por possuir uma linguagem simples e potencial para a realização de manipulações, o *software* GeoGebra pode ser utilizado para a realização de investigações matemáticas, de forma a possibilitar que o aluno deixe de ser passivo nos processos de aprendizagem (ASSIS, 2017).

De acordo com Carneiro (2013) as Atividades Investigativas realizadas com o GeoGebra geram entusiasmo nos alunos, além de clareza e compreensão dos conceitos estudados. Sobre o uso do GeoGebra conciliado com Atividades Investigativas no curso de formação de professores, Assis (2017) ressalta a importância de proporcionar o contato dos alunos com atividades que envolvam sua utilização, para que se possam conhecer as possibilidades e limitações desse *software.*

Ainda, como constatado por Borssoi e Almeida (2015), o uso de recursos tecnológicos em sala de aula pode facilitar a ocorrência de aprendizagem significativa. Quanto ao GeoGebra, especificamente, Silveira (2018) concluiu que esse *software* leva os alunos a visualizarem e estabelecerem relação entre propriedades de objetos matemáticos, de forma a estimular um ambiente para a aprendizagem significativa.

2.2 Teoria da Aprendizagem Significativa

A Teoria da Aprendizagem Significativa é de grande relevância e se trata de um referencial teórico muito utilizado na Educação, sobretudo na área de Educação Matemática, com o propósito de orientar a prática pedagógica em sala de aula (CORDEIRO, 2015). Essa teoria foi apresentada e analisada em 1963 por David Paul Ausubel no seu livro *"The Psychology Of Meaningful Verbal Learning",* em que ele buscou compreender, descrever e analisar como o conhecimento é processado e armazenado na estrutura cognitiva do ser humano (CORDEIRO, 2015). Assim, em sua teoria, Ausubel apresenta os fundamentos para compreender como se aprende e mostra caminhos visando à utilização de estratégias que levam a uma aprendizagem significativa (CORDEIRO, 2015). Sobre a Teoria Ausubeliana, Moreira (2012) afirma que a aprendizagem significativa ocorre quando ideias, que estão expressas de forma simbólica, interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com o que o aprendiz já sabe. Segundo esse autor, substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e, não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante que já existe na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

Logo, entende-se que a aprendizagem significativa ocorre quando o aprendiz relaciona uma nova informação a um conhecimento já existente em sua estrutura cognitiva (CORDEIRO, 2015).

Assim, a Aprendizagem Significativa se caracteriza pela interação não-literal e não-arbitrária entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos. Segundo Moreira (2012), nessa interação, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito ou os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. Nesse sentido, na forma de aprendizagem significativa, em que um novo conhecimento passa a subordinar conhecimentos prévios é denominada aprendizagem significativa superordenada. Já na forma de aprendizagem em que um novo conhecimento adquire significado na ancoragem interativa com algum conhecimento prévio é denominada aprendizagem significativa subordinada (MOREIRA, 2012).

A esse conhecimento prévio, que pode ser, por exemplo, um símbolo já significativo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma imagem, uma representação, uma concepção, Ausubel denominou subsunçor ou ideia-âncora (MOREIRA, 2012).

Um determinado subsunçor se modifica à medida que é utilizado pelo aprendiz (MOREIRA, 2012). Desse modo, ele adquire novos significados e fica mais estável, podendo cada vez mais facilitar novas aprendizagens (MOREIRA, 2012). Moreira (2012) destaca que um subsunçor pode variar ao longo do tempo, tratando-se de um conhecimento não estático, que pode evoluir ou regredir. Nesse sentido, segundo esse autor, a estrutura cognitiva, considerada como uma estrutura de subsunçores interrelacionados e hierarquicamente organizados, é dinâmica e caracterizada por dois processos principais que são: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. A diferenciação progressiva é o processo de atribuição de novos significados a um determinado subsunçor resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos. Por outro lado, a reconciliação integradora, ou integrativa, consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações (MOREIRA, 2012).

Na Teoria Ausubeliana, a partir do momento que o sujeito consegue atribuir significados a um conhecimento, ancorando-o interativamente em conhecimentos existentes, ocorre aprendizagem significativa (CORDEIRO, 2015). Ausubel (2000) destaca que pelo fato de a estrutura cognitiva de cada aprendiz ser única, todos os novos significados adquiridos também são únicos.

A aprendizagem significativa pode ocorrer por meio de um processo receptivo ou por descoberta (CORDEIRO, 2015; CORREIA, 2011; MOREIRA, 2012; VIEIRA, F. 2012). Moreira (2012) explica que na aprendizagem por recepção, a informação e o conhecimento a ser aprendido se apresentam ao aprendiz em sua forma final e isso não representa uma aprendizagem passiva, tampouco há relação com o ensino expositivo tradicional. De acordo com ele, a aprendizagem significativa receptiva requer muita atividade cognitiva para relacionar, interativamente, os novos conhecimentos com os que já existem na estrutura cognitiva. No que se refere à aprendizagem por descoberta, o aprendiz deve descobrir o que vai aprender, desde que, para aprender significativamente, também atenda as condições de possuir os conhecimentos prévios adequados e predisposição para aprender (MOREIRA, 2012).

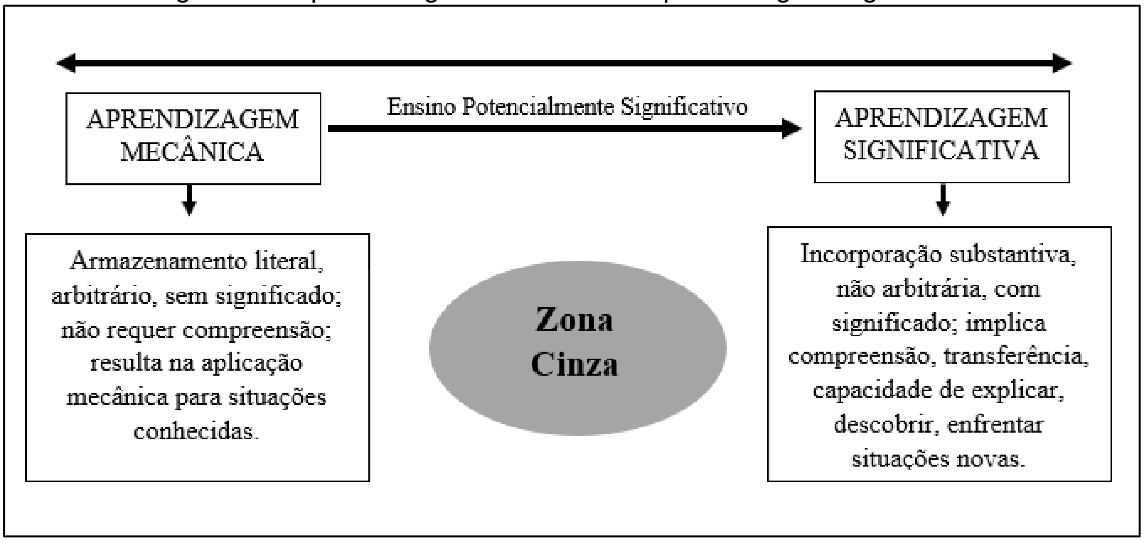
Cordeiro (2015) afirma que quando se aprende significativamente, o sujeito se torna capaz de dar exemplos adequados e explicar com palavras próprias, já que o armazenamento de informações no cérebro é feito de modo organizado. Todavia, a aprendizagem que mais ocorre nas escolas é a mecânica, que é praticamente sem significado, puramente memorística e que serve para as provas, sendo, em seguida, esquecida, apagada (MOREIRA, 2012).

Cordeiro (2015) destaca que na aprendizagem mecânica, a aquisição de novos conhecimentos se dá com nenhuma ou com pouca relação com os conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Assim, esses conhecimentos são limitados e podem ser esquecidos com facilidade (CORDEIRO, 2015).

Ausubel (2000) afirma que há superioridade da aprendizagem significativa em relação à aprendizagem por memorização, já que os conhecimentos adquiridos significativamente estão protegidos de interferências arbitrárias e literais e podem reter-se durante longos períodos de tempo em maior quantidade. Além disso, o autor destaca que a experiência de aprendizagem na aprendizagem significativa é agradável e aguça a curiosidade intelectual e a perspectiva de se adquirir novos conhecimentos.

Moreira (2012) aponta que aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica não representam uma dicotomia, uma vez que é possível a passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa (Figura 1). Todavia, nessa passagem existe uma “zona cinzenta”, ou seja, ela não é natural ou automática, pois depende da existência de subsunçores adequados, da predisposição do aluno para aprender, do uso de materiais potencialmente significativos na aula e da mediação do professor (MOREIRA, 2012).

Figura 1 – Aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa



Fonte: Adaptado de Moreira (2012, p. 41).

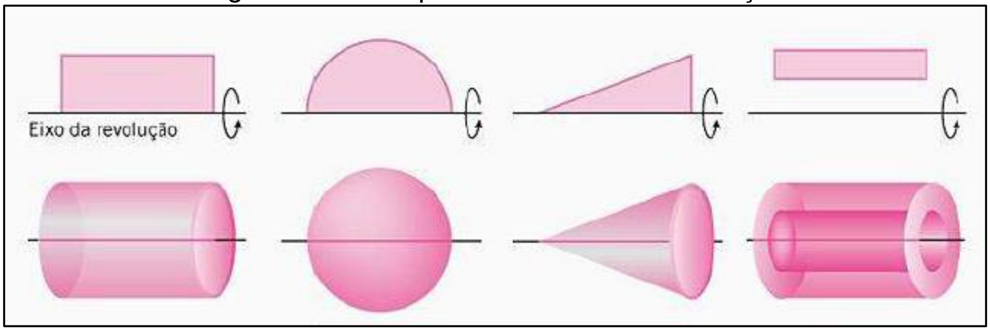
A teoria da Aprendizagem Significativa é de grande importância para a educação, já que trata da possibilidade de aquisição e do armazenamento de uma vasta quantidade de ideias e de informações com qualidade, superando a aprendizagem marcada pela memorização, que apresenta limitações no que se refere à quantidade de informações e ao tempo de fixação (AUSUBEL, 2000).

Alguns pesquisadores como Correia (2011), Menezes (2018), Vieira, F. (2012) e Zômpero, Sampaio e Vieira (2016) constataram que o uso de Atividades Investigativas, por promoverem o desenvolvimento de habilidades e a construção de conceitos por meio de conhecimentos já existentes, propiciam a aprendizagem significativa. As Atividades Investigativas favorecem a aprendizagem e tornam possível que os alunos apresentem resultados satisfatórios mesmo quando se trata do primeiro contato com o conteúdo (ZÔMPERO; SAMPAIO; VIEIRA, 2016). Portanto, recomenda-se o ensino investigativo baseado nos conhecimentos prévios dos alunos, por possibilitar que a aprendizagem adquirida se aproxime cada vez mais de uma aprendizagem significativa (VALADARES, 2011; VIEIRA, F., 2012).

2.3 Integral Definida: volume

Chama-se sólido de revolução um sólido formado a partir da rotação de uma região plana em torno de uma reta pertencente ao mesmo plano denominada eixo de revolução (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007; FLEMMING, GONÇALVES, 2006; LEITHOLD, 1986). Na figura 2 são apresentados exemplos de sólidos de revolução.

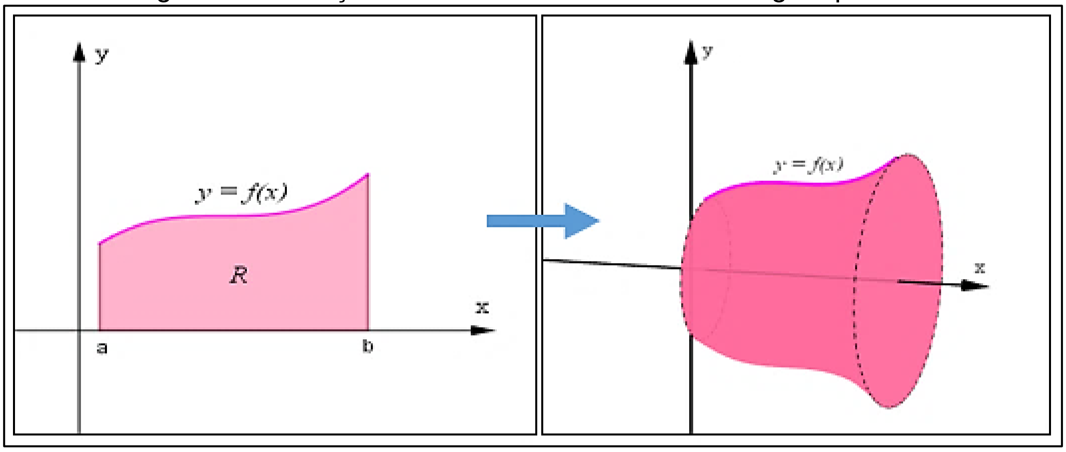
Figura 2 – Exemplos de sólidos de revolução



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007, p. 453).

Para se calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região plana R limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, sendo f uma função contínua compreendida em $[a, b]$ e não negativa nesse intervalo (Figura 3), é necessário dividir $[a, b]$ em n subintervalos, ou seja, repartir o sólido em n partes (fatias), conforme exemplificado na figura 4.

Figura 3 – Rotação em torno do eixo x de uma região plana R



Fonte: Elaboração própria, utilizando o *software* GeoGebra, baseada em Anton, Bivens e Davis (2007, p. 453).

Figura 4 – Divisão de um sólido em fatias

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007, p. 450).

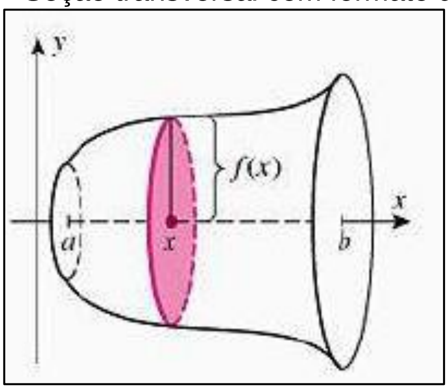
O volume de cada parte pode ser aproximado pelo volume de um cilindro reto com altura Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$ (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007; LEITHOLD, 1986). Somando os volumes desses cilindros, obtém-se o volume aproximado do referido sólido, ou seja, $V \cong \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$ (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007). Dessa forma, quanto maior o valor de n, melhor a aproximação do volume (Figura 5). Tomando o limite quando n cresce e, consequentemente, as alturas de cada cilindro tendem a zero, obtém-se a Integral Definida: $V_s = \lim_{\|\Delta x_k\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$, desde que $A(x)$ seja integrável (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007; LEITHOLD, 1986). A soma que aparece nessa expressão é chamada de soma de Riemann, e a Integral Definida é, às vezes, denominada Integral de Riemann (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007; LEITHOLD, 1986). Desse modo, “O volume de um sólido pode ser obtido integrando-se a área da seção transversal de um extremo ao outro do sólido.” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 452).

Figura 5 – Aproximação do volume de um sólido de revolução

Fonte: Elaboração própria utilizando o *software* GeoGebra.

Diante disso, segundo Anton, Bivens e Davis (2007) o volume de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x de uma região plana limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ será dado por $V = \int_a^b \pi\, [f(x)]^2\, dx$, uma vez que as seções transversais em planos paralelos ao plano yz são círculos cujas medidas dos raios são dadas por $f(x)$ (Figura 6). “Como as secções transversais têm a forma de disco, a aplicação dessa fórmula é conhecida como ‘método dos discos’" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 453).

Figura 6 – Seção transversal com formato de círculo

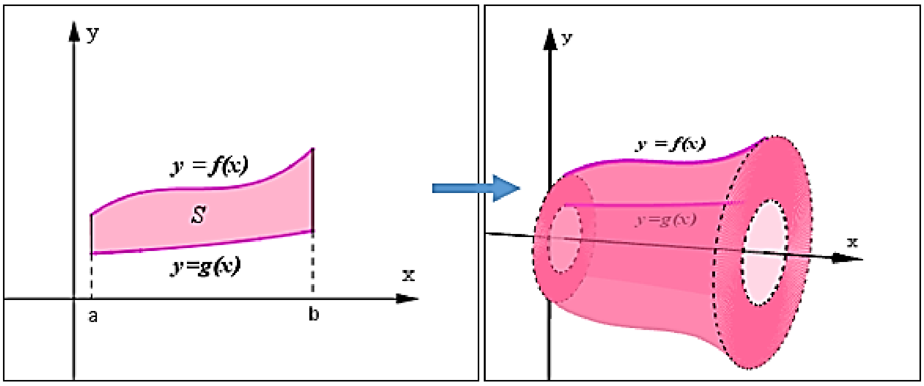


Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007, p. 453).

De acordo com Numer (2017, p. 42) “O método dos discos pode ser estendido para o método das arruelas. Esse método é aplicável aos sólidos de revolução quando a seção transversal é um anel circular de raio maior $f(x)$ e raio menor $g(x)$, x em

$[a, b]$.". Nesse caso, de acordo com Anton, Bivens e Davis (2007), a área da seção transversal será dada pela área do círculo maior menos a área do menor, ou seja $A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$. Dessa forma, o volume do sólido gerado pela rotação de uma região plana S limitada acima por $y = f(x)$ e abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$, sendo f e g funções contínuas e não negativas com $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$ (Figura 7), será dado por $V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$.

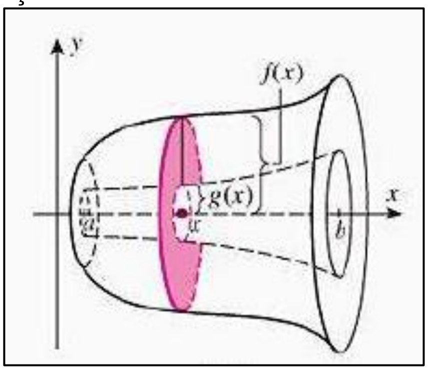
Figura 7 – Rotação em torno do eixo x de uma região plana S



Fonte: Elaboração própria, utilizando o *software* GeoGebra, baseada em Anton, Bivens e Davis (2007, p. 454).

Essa fórmula pode ser obtida por meio da diferença entre o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$ e o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do mesmo eixo, da região limitada pelo gráfico de $g(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$. Como as seções transversais têm a forma de arruelas ou anéis (Figura 8), a aplicação dessa fórmula é conhecida por "método das arruelas" ou "método dos anéis circulares" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

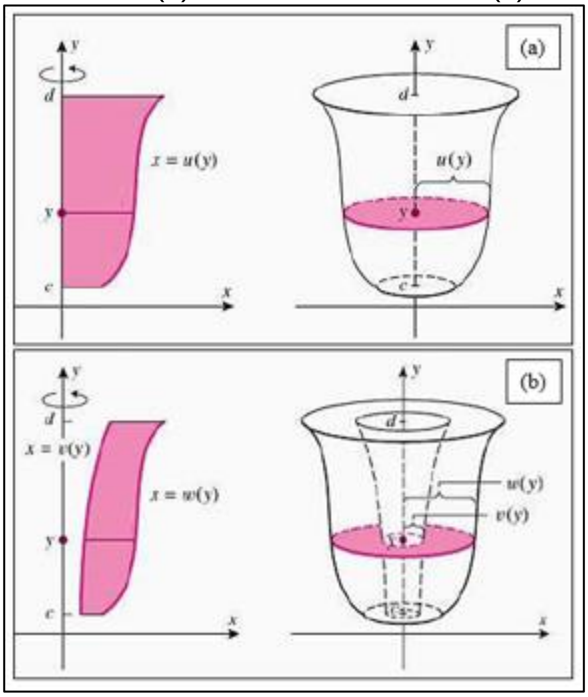
Figura 8 – Seção transversal com formato de anel circular



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007, p. 454).

De acordo com Anton, Bivens e Davis (2007, p. 455) “O método dos discos e das arruelas tem análogos quando as regiões são giradas em torno do eixo y.”. Dessa forma, tem-se: $\int_c^d \pi[u(y)]^2\, dy$ que se refere ao método dos discos (Figura 9a) e $\int_c^d \pi([w(y)]^2 - [v(y)]^2)\, dy$ para o método dos anéis circulares (Figura 9b) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

Figura 9 – Método dos discos (a) e dos anéis circulares (b) com relação ao eixo y



Fonte: Adaptado de Anton, Bivens e Davis (2007, p. 455).

Ressalta-se que é possível calcular o volume de um sólido de revolução a partir de outro método, no qual é utilizado o somatório dos volumes de camadas cilíndricas para se obter a soma de Riemann. Normalmente, esse método é apresentado nos livros didáticos, como em Anton, Bivens e Davis (2007) e em Leithold (1986), após o dos discos e dos anéis circulares. Diante disso, entendeu-se que, da forma com que o conteúdo de volumes por Integral Definida foi abordado nesta pesquisa, haveria a necessidade de: i) identificar conhecimentos prévios referentes a volumes de camadas cilíndricas; e ii) realizar mais uma atividade, na qual o aluno pudesse, com autonomia, conjecturar a fórmula para o cálculo de volumes pelo método das camadas cilíndricas. Assim, o trabalho demandaria mais tempo de implementação, o que poderia afetar o planejamento do professor da turma. Mediante a isso, optou-se por não abordar o referido método nesta pesquisa.

2.4 Revisão Sistematizada

Uma revisão sistematizada tenta incluir um ou mais elementos do processo de revisão sistemática (GRANT; BOOTHT, 2009). A revisão sistemática é um tipo de investigação científica que tem por objetivo, mediante critérios de inclusão e exclusão pré-estabelecidos, reunir, avaliar criticamente e conduzir uma síntese dos resultados de múltiplos estudos primários, utilizando-se de métodos estatísticos ou não (CORDEIRO. *et al.*, 2007; PEREIRA, BACHION, 2006). Nesse tipo de revisão é recomendada a utilização de pelo menos duas bases de dados amplas e específicas em que a pesquisa, a seleção e a avaliação dos trabalhos sejam realizadas por dois pesquisadores de forma independente e caso haja discordância, deve-se consultar um terceiro pesquisador (PEREIRA; BACHION, 2006).

De acordo com Sampaio e Mancini (2007) uma revisão sistemática deve contemplar as seguintes etapas: i) formulação de uma questão norteadora; ii) definição de estratégias, como a escolha das bases de dados e dos termos de busca a serem utilizados; iii) definição dos critérios de inclusão e exclusão; iv) realização de uma análise crítica dos estudos incluídos na revisão; e v) apresentação desses trabalhos, de forma a destacar suas principais características.

Assim, as revisões sistemáticas devem ser abrangentes e os critérios adotados são divulgados para que seja possível que outros pesquisadores consigam repetir o procedimento (GALVÃO; PEREIRA, 2014).

Já as revisões sistematizadas não são tão abrangentes, por isso são utilizadas nos casos em que o autor não consegue recorrer aos recursos necessários para uma revisão sistemática, como dois revisores por exemplo (GRANT; BOOTHT, 2009).

Assim, Grant e Bootht (2009) afirmam que numa revisão sistematizada, o autor poderá pesquisar em um ou dois bancos de dados e posteriormente reunir e analisar sistematicamente os resultados retornados.

Diante disso, em busca de trabalhos relacionados ao tema deste trabalho de conclusão de curso, no dia 17 de julho de 2019 foi realizada uma pesquisa bibliográfica do tipo revisão sistematizada da literatura. Esta pesquisa foi realizada com o intuito de responder à seguinte questão: Quais os resultados apresentados pelas pesquisas acadêmicas, realizadas recentemente no Brasil, sobre o uso de TD no ensino do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida?

As bases utilizadas foram o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Portal de Periódicos da CAPES e foi utilizada a *string* “integral *AND* volume”.

Como o número de trabalhos retornados na pesquisa, apenas com a utilização da *string*, foi muito grande em ambas as bases, houve a necessidade da utilização de filtros. Assim, no que se refere à área de conhecimento/tópico, selecionou-se Matemática; com relação ao ano/data de publicação, optou-se por trabalhos publicados nos últimos 5 anos (trabalhos mais recentes); e, em se tratando dos periódicos, especificamente, apenas aqueles escritos em língua portuguesa. Após isso, restaram 20 trabalhos na primeira base e 36 na segunda.

Foi realizada a leitura dos resumos, bem como uma análise sucinta do conteúdo abordado em cada um desses trabalhos. Utilizando-se dos critérios de exclusão apresentados no quadro 1, restaram três trabalhos que foram considerados relacionados a esta pesquisa e eles estão elencados no quadro 2.

Quadro 1 – Critérios de exclusão utilizados

Não abordar o cálculo de volume de sólidos de revolução.
Não utilizar tecnologia digital.
Não conter descrição e análise da aplicação de atividades.

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 2 – Trabalhos incluídos na revisão

ID	**Título**	**Autor (ano)**	**Tipo**
1T	Cálculo de volume de monumentos a partir de Integrais Definidas para alunos do Ensino Médio com apoio do *software* GeoGebra	Numer (2017)	Dissertação
2T	Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no Ensino Médio	Bueno (2018)	Dissertação
3T	Usando o GeoGebra para o ensino de sólidos de revolução	Pereira *et al.* (2017)	Artigo

Fonte: Elaboração própria.

A dissertação de Francine Mirele Numer (NUMER, 2017) teve como objetivo elaborar e aplicar atividades que envolvem o cálculo de volumes de monumentos com a utilização de Integrais Definidas para alunos do Ensino Médio. A metodologia adotada na pesquisa foi a de estudo de caso.

As atividades desenvolvidas pela autora foram realizadas com alunos do Ensino Médio Técnico Integrado do curso de Eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha. Segundo a autora, os alunos desse curso possuem em sua grade curricular uma introdução ao Cálculo por necessitarem desta base para as disciplinas da área técnica.

Para elaboração dessas atividades, a autora se baseou em resolução de problemas e modelagem Matemática a fim de, segundo ela, favorecer a associação dos conceitos de integral definida ao conteúdo de Geometria Espacial.

A autora utilizou o *software* GeoGebra 3D visando a comparação dos valores dos volumes encontrados com o real. Segundo ela, a utilização de *software* no ensino da Matemática contribui para uma aprendizagem significativa e eficaz.

Na realização das atividades, Numer (2017) fez uma revisão do conteúdo de Integral Definida e trabalhou com os alunos o cálculo de volumes por Integrais a partir das técnicas de fatiamento, discos, arruelas e camadas cilíndricas. Ela também solicitou que os alunos realizassem a construção de maquetes com medidas proporcionais aos monumentos. Com isso, a autora destaca que buscou facilitar a representação da figura em 3D no *software* GeoGebra.

Com seu trabalho, a autora concluiu que foi possível observar a evolução no entendimento dos alunos quanto ao cálculo de volumes a partir de Integrais Definidas. Ela destacou na pesquisa que a maioria dos alunos utilizou o *software* GeoGebra de forma eficiente. Assim, a autora afirma que o GeoGebra é uma ferramenta útil, pois complementa a aprendizagem e facilita o entendimento dos alunos.

A dissertação de Marcos Paulo Rodrigues Bueno (BUENO, 2018) teve como objetivo apresentar uma proposta de abordagem dos conceitos de área de superfícies e volume de sólidos que podem ser obtidos pela rotação de uma curva, ou figura, no Ensino Médio.

Com base nessa proposta, o autor elaborou atividades a serem exploradas com o uso do *software* GeoGebra, relativas ao cálculo de volume e área da superfície de sólidos de revolução pelo teorema de Pappus. A aplicação se deu em uma turma de 3ª série do Ensino Médio de uma escola da cidade de Bauru.

O autor destaca que, em sua pesquisa, ele optou em abordar o cálculo da área da superfície e o volume de sólidos de revolução de modo que fosse possível a compreensão por alunos de Ensino Médio. Todavia, no Ensino Superior, segundo o autor, esse estudo fica mais abrangente e complexo, pois é aprofundado com o uso de recursos do Cálculo Integral.

O autor conclui que sua proposta pode se configurar como uma forma diferenciada de se trabalhar o conteúdo de áreas e volumes no Ensino Médio. Segundo ele, ficou evidente boa receptividade por parte dos alunos em relação à proposta e a participação deles nas atividades indicou a aparente compreensão do conteúdo de forma satisfatória.

Já o artigo de Lucas Rodrigues Pereira, Mario Guimarães Gomes, Nicson Nongelle Gomes Pinheiro, Jaqueline Maria da Silva, Deborah Faragó Jardim e Alexandre Faissal Brito (PEREIRA *et al.*, 2017) teve como objetivo estudar e discutir as contribuições que o uso do *software* GeoGebra pode oferecer para a compreensão de conceitos matemáticos frequentemente usados para o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução.

Esta pesquisa foi desenvolvida baseando-se nos princípios da Engenharia Didática. Os autores destacam que foi aplicada uma intervenção pedagógica desenvolvida em três etapas usando o GeoGebra. Com isso, eles buscaram propiciar aos alunos participantes da pesquisa conhecimento suficiente para trabalhar com a Matemática dinâmica interativa no que se refere aos conceitos da Geometria Espacial, aperfeiçoando sua visão tridimensional, além de prepará-los para a prática docente.

Os autores apontam que após análises e discussões sobre os resultados obtidos, foi possível observar um notável progresso dos estudantes no que se refere ao entendimento dos conceitos fundamentais dos tópicos trabalhados na pesquisa. Além disso, puderam notar significativa melhora no que se refere à visualização espacial dos alunos. Dessa forma, com essa pesquisa, os autores constataram que o GeoGebra constitui ferramenta auxiliadora e eficaz na compreensão do conceito de Cálculo Diferencial e Integral aplicada para o cálculo de área e volume dos sólidos de revolução.

Com base nos três trabalhos, verificou-se que entre os resultados apresentados nas pesquisas analisadas sobre o uso de TD no ensino de cálculo de volumes de sólidos de revolução por integral definida, destacam-se que as TD: i) se constituem como uma forma diferenciada e eficaz de abordar o conteúdo; ii) contribuem para a aprendizagem; iii) proporcionam boa receptividade por parte dos alunos; e iv) auxiliam na visualização espacial.

No quadro 3, apresentam-se as semelhanças e diferenças entre os trabalhos anteriormente descritos e este trabalho de conclusão de curso.

Quadro 3 – Apresentação das semelhanças e diferenças

ID	Semelhanças	Diferenças
1T	Propôs atividades com o uso do GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.	O público-alvo foi uma turma do Ensino Médio, em que o conteúdo de Integrais Definidas havia sido estudado. Foi realizada a construção de maquetes para se trabalhar atividades baseadas em resolução de problemas e modelagem Matemática.
2T	Propôs atividades com o uso do GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução.	Abordou o Teorema de Pappus e teve como público-alvo alunos do Ensino Médio. Além disso, tratou, também, do cálculo de área da superfície lateral.
3T	Propôs atividades com o uso do GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida e a aplicação se deu numa turma de Licenciatura em Matemática.	Utilizou a metodologia de pesquisa engenharia didática e tratou, também, do cálculo de área da superfície lateral.

Fonte: Elaboração própria.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com intuito de propiciar uma melhor compreensão dos caminhos metodológicos adotados nesta pesquisa, evidencia-se, novamente, o objetivo geral deste trabalho: investigar as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra.

Neste capítulo é discorrido acerca da metodologia da pesquisa. Ele está dividido em duas seções, a saber: i) a caracterização da pesquisa, na qual é apresentado o tipo de pesquisa, o público-alvo e os instrumentos de coleta de dados; e ii) o detalhamento da intervenção pedagógica, na qual as etapas de planejamento, implementação e avaliação são descritas.

3.1 Caracterização da pesquisa

A abordagem desta pesquisa é de cunho qualitativo. Esse tipo de pesquisa tem sido muito usado nas desenvolvidas na área de Educação Matemática (BICUDO, 2012; COMETTI, 2018). Segundo Cometti (2018), isso se deve, talvez, ao fato de que a pesquisa qualitativa torna possível uma análise mais profunda, potencializando a investigação realizada no ambiente educacional.

A pesquisa qualitativa busca compreender aspectos da realidade, tornando possível explorar e entender o contexto social e cultural o qual o sujeito está inserido (BICUDO, 2012; CRESWELL, 2010; SILVEIRA, CÓRDOVA, 2009). Para isso, "[...] emprega diferentes concepções filosóficas; estratégias de investigação; e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados." (CRESWELL, 2010, p. 206).

Nesse tipo de abordagem, os dados analisados não são métricos, sendo de natureza descritiva; o desenvolvimento da pesquisa é imprevisível; há maior interesse pelo processo do que a busca por resultados ou geração de produtos e é procurado por resultados mais verídicos possíveis, em que nenhuma hipótese ou teoria é aceita previamente (COMETTI, 2018; SILVEIRA, CÓRDOVA, 2009).

Esta pesquisa qualitativa é do tipo intervenção pedagógica. Sendo assim, é caracterizada por investigações planejadas que almejam a implementação de interferências em busca de produzir melhorias no processo de aprendizagem dos sujeitos que dela participam e a posterior análise dos efeitos dessas interferências (DAMIANI *et al.*, 2013).

Damiani *et al.* (2013) destacam que os dois componentes metodológicos de pesquisas do tipo intervenção pedagógica são o método da intervenção e o método de avaliação da intervenção. O primeiro demanda planejamento, criatividade e diálogo com a teoria e o segundo servirá de base para dar seguimento ao processo de busca de solução para o problema inicialmente detectado, ou para gerar novas investigações.

As intervenções pedagógicas são de potencial importância na área da educação e são regidas pelo paradigma qualitativo (DAMIANI *et al.*, 2013). Assim, não há preocupação com o controle de variáveis externas que poderiam afetar os efeitos da intervenção, ou seja, ela não busca estabelecer relações de causa e efeito, fazer generalizações ou predições exatas a partir dos seus achados, mas sim, descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes (DAMIANI *et al.*, 2013).

Damiani (2012, p. 2) afirma que "[...] as intervenções em Educação, em especial as relacionadas ao processo de ensino/aprendizagem, apresentam potencial para, simultaneamente, propor novas práticas pedagógicas (ou aprimorar as já existentes), produzindo conhecimento teórico nelas baseado."

O público-alvo desta pesquisa foram alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação que estavam cursando a disciplina de Cálculo III, tendo em vista que é na referida disciplina do curso que se estuda o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Os instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa são os questionários inicial e final, a observação no momento da experimentação da sequência didática e as respostas dadas pelos alunos nas atividades.

O questionário é um instrumento de coleta de dados composto por perguntas a serem respondidas por escrito pelo informante, com o objetivo de "[...] levantar opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas." (GERHARDT *et al.*, 2009, p. 69). Como o informante deve responder ao questionário sem a ajuda do pesquisador, é necessário o uso de uma linguagem simples e direta, de modo que seja compreendida com clareza (GERHARDT *et al.*, 2009).

O questionário possibilita atingir um grande número de pessoas mais rapidamente; permite o anonimato dos participantes, dando mais uniformidade na avaliação; apresenta um custo relativamente baixo; permite que os participantes respondam no momento mais favorável e minimiza os riscos de distorções, pela não influência do pesquisador (COMETTI, 2018; GERHARDT *et al.*, 2009). Assim, é um instrumento de coleta muito utilizado no âmbito educacional (COMETTI, 2018).

Todavia, com o questionário não há garantia de que todas as perguntas serão respondidas satisfatoriamente, já que o sujeito pode não entender corretamente o que lhe está sendo perguntado (COMETTI, 2018). Assim, optou-se em considerar as observações feitas pelos pesquisadores no momento da implementação.

A observação leva o pesquisador a fazer uso dos sentidos na busca pela compreensão da realidade (GERHARDT *et al.*, 2009). “Ela consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar. A técnica da observação desempenha importante papel no contexto da descoberta e obriga o investigador a ter um contato mais próximo com o objeto de estudo.” (GERHARDT *et al.*, 2009, p. 74). Segundo Gil (2008), a observação é um elemento fundamental para a pesquisa e possibilita a redução da subjetividade que está presente em todo o processo de investigação social.

Ainda, considerou-se importante analisar as anotações e respostas dadas pelos alunos nas atividades, com o objetivo de buscar compreender o entendimento deles sobre o conteúdo abordado.

3.2 Detalhamento da intervenção pedagógica

Por se tratar de uma intervenção pedagógica, que segundo Damiani *et al*. (2013, p. 62, grifo nosso) “[...] envolve **planejamento** e **implementação** de uma interferência e a **avaliação** de seus efeitos.”, esta pesquisa está dividida nas seguintes etapas: i) planejamento, que se refere ao processo de elaboração do material utilizado na pesquisa tendo como base o referencial teórico adotado; ii) implementação, na qual ocorreu a aplicação dos questionários e a experimentação da sequência didática; e iii) avaliação, na qual é feita a análise dos dados coletados durante a implementação.

3.2.1 Planejamento

Nesta subseção é relatado o planejamento da intervenção. Assim sendo, nela são descritos os seguintes processos: i) seleção, análise e elaboração dos *applets* a serem utilizados na sequência didática; ii) elaboração das atividades, feita em diálogo com o referencial teórico; iii) elaboração dos questionários a serem utilizados na coleta de dados; e iv) execução do teste exploratório, que se deu com o objetivo de identificar a necessidade de se fazer alterações no material elaborado para melhorá-lo.

3.2.1.1 Seleção, análise e elaboração dos *applets*

Com o intuito de criar um ambiente em que os alunos pudessem compreender o cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida de uma forma significativa, superando a aprendizagem marcada pela memorização de fórmulas conforme observado por Pinheiro e Leal Júnior (2016), decidiu-se por utilizar *applets* elaborados no GeoGebra.

Assim, foi realizada uma pesquisa na seção materiais do *site* do GeoGebra a fim de encontrar *applets* que pudessem ser usados ou adaptados para serem utilizados na sequência didática. Essa pesquisa se deu no dia 29 de maio de 2019 por meio do termo de busca “Sólidos de revolução por integral definida”. Com isso, foram retornados 90 *applets*.

No quadro 4 são apresentados, em ordem, os critérios de exclusão utilizados na análise, bem como o número de *applets* desconsiderados a partir de cada critério adotado.

Quadro 4 – Critérios adotados e número de *applets* excluídos

Critérios de exclusão	**Número de *applets* excluídos**
Applets repetidos.	10
Applets que não tratavam do cálculo de volumes de sólidos gerados pela rotação de regiões limitadas por curvas.	50
Problemas funcionais/impossibilidade de manipular o *applet.*	9
Não apresentaram sólidos formados pela rotação em torno dos dois eixos.	19

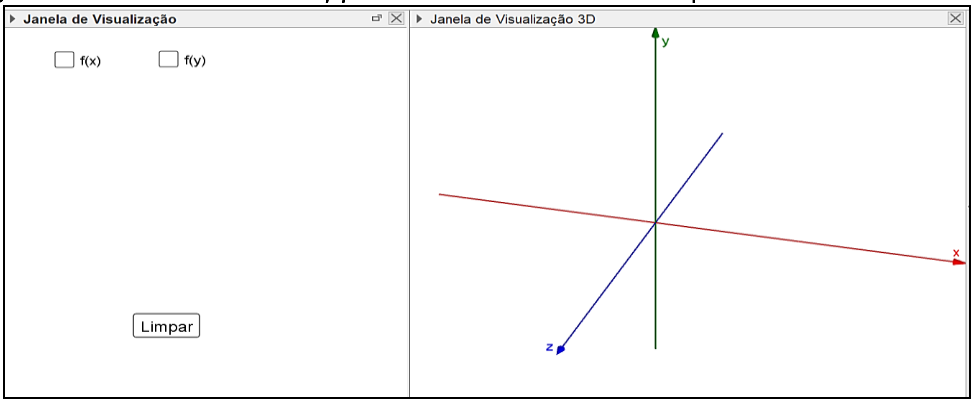
Fonte: Elaboração própria.

Assim, restaram apenas dois *applets* e eles foram analisados mais profundamente. Por meio dessa análise, nenhum deles foi considerado adequado, uma vez que: i) não abordavam o processo de aproximação do volume de sólidos de revolução; ii) não propiciavam a exploração e nem o auxílio à dedução das fórmulas para o cálculo de volumes; e iii) precisavam de várias alterações e adaptações que proporcionassem melhorias para atenderem ao objetivo pretendido.

Por conta disso e se baseando em Moreira, Barcelos e Batista (2010), que incentivam o desenvolvimento de *applets* pelo próprio professor, optou-se por realizar a construção de três *applets* no GeoGebra na versão Clássico 5.0 para serem utilizados na sequência didática.

O primeiro *applet,* denominado “Volume de um sólido pelo método dos discos” (Figura 10), tem o objetivo de prestar assistência ao aluno na compreensão do processo de aproximação do volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região limitada por um dos eixos coordenados e por uma curva. Além disso, ele auxilia na dedução da fórmula para calcular esse volume. Nesse *applet*, é possível tratar da rotação tanto em torno do eixo x quanto em torno do eixo y.

Figura 10 – Tela inicial do *applet* "Volume de um sólido pelo método dos discos"

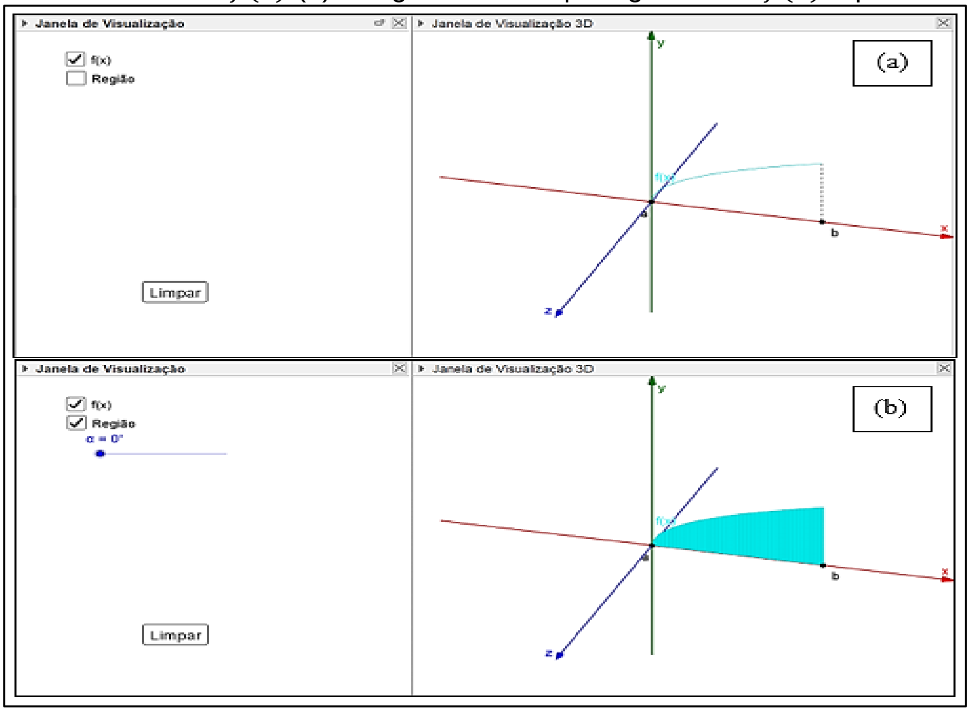


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y78cksma.

Ao marcar a caixa de seleção “$f(x)$” do *applet*, é exibida, na janela de visualização 2D[2], uma nova caixa denominada “Região” e, na 3D, é representado o gráfico de uma função $y = f(x)$ contínua e não negativa em $[a, b]$ (Figura 11a). Ao marcar a caixa “Região”, exibe-se o controle deslizante “α” na janela 2D e, na 3D, a região compreendida entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x (Figura 11b).

[2] Neste texto, janela de visualização 2D se refere à Janela de Visualização do GeoGebra Clássico 5.0.

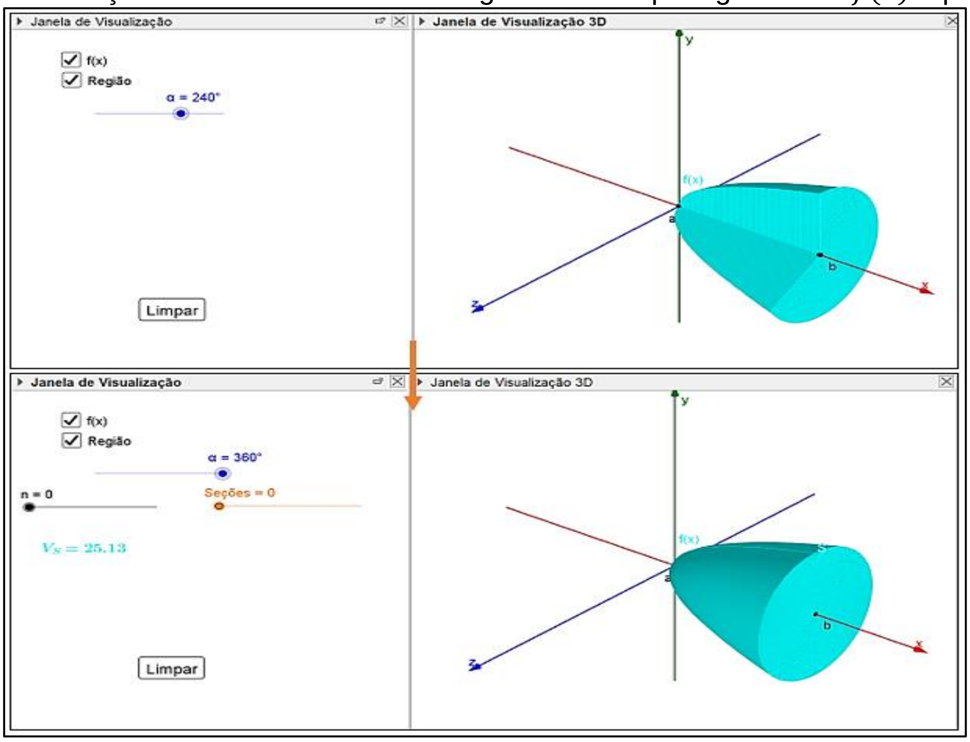
Figura 11 – Gráfico de $f(x)$ (a) e região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x (b)



Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y78cksma.

Ao mover o controle deslizante "α", é possível visualizar a rotação dessa região em torno do eixo x formando um sólido de revolução, o sólido S (Figura 12).

Figura 12 – Rotação em torno do eixo x da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x

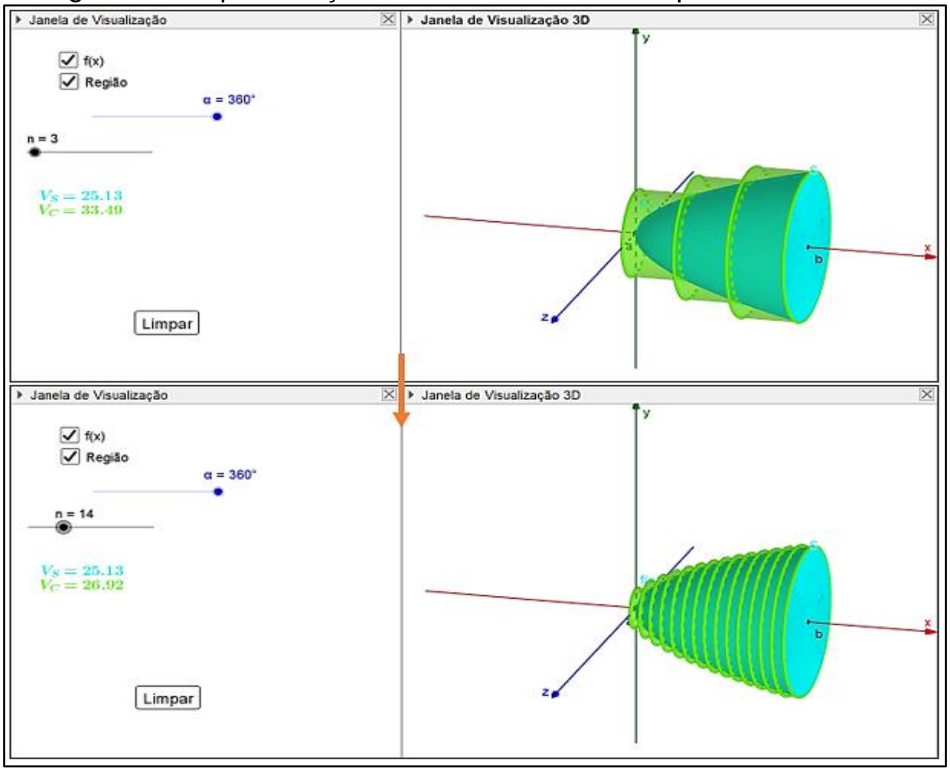


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y78cksma.

Formando-se o sólido S, com “α” igual a 360º, são exibidos, na janela 2D, dois controles deslizantes, o “n” e o “Seções”, e um texto com a medida do volume do sólido S (Vs).

Ao mover “n”, o controle “Seções” é ocultado e são mostrados n cilindros retos sobre o sólido S. Na janela 2D, é exibida a medida da soma dos volumes desses cilindros (Vc). Por meio da movimentação de "n", espera-se que o usuário perceba que conforme seu valor aumenta, mais a medida de Vc fica próxima de Vs. Na figura 13 é possível observar a comparação entre os dois volumes para dois valores de "n".

Figura 13 – Aproximação do volume do sólido S por cilindros retos



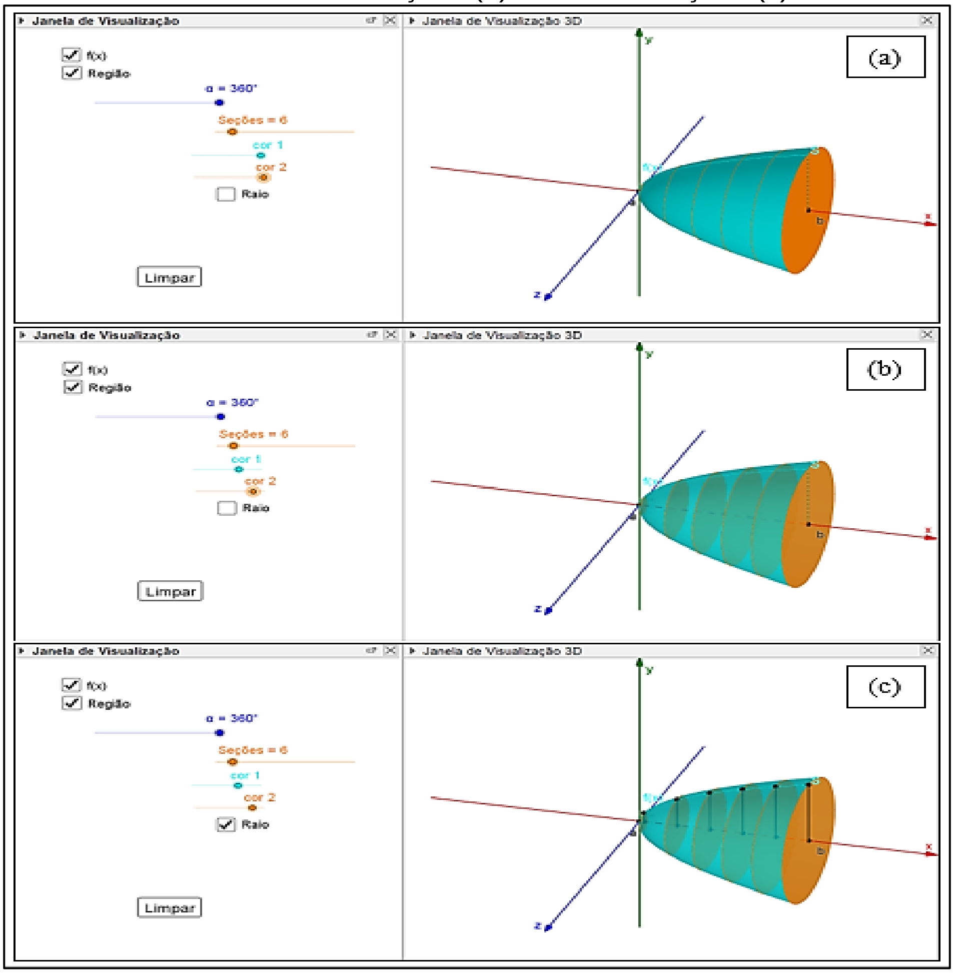
Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y78cksma.

Para voltar a exibir o controle deslizante “Seções” é necessário que o valor de “n” seja igual a zero. Ao mover “Seções”, ocultam-se “n”, Vs e Vc e exibem-se, na janela de visualização 2D, dois novos controles deslizantes, denominados “cor 1” e “cor 2”, e a caixa de seleção “Raio”. Já na janela 3D, são exibidas as seções transversais do sólido S em planos paralelos ao plano yz (Figura 14a).

Ao mover o controle deslizante "cor 1", a transparência da superfície lateral do sólido é alterada e, ao mover o controle deslizante "cor 2", altera-se a transparência das seções transversais (Figura 14b). Ambas alterações têm o objetivo de facilitar a visualização.

Ao marcar a caixa “Raio”, são exibidos os segmentos de raios das seções transversais do Sólido S, de modo a mostrar que eles possuem uma extremidade no eixo x e outra em $f(x)$, ou seja, que a medida do raio das seções transversais é representada por $f(x)$ (Figura 14c).

Figura 14 – Seções em planos paralelos ao yz (a), alteração da transparência da superfície do sólido e das seções (b) e raio das seções (c)

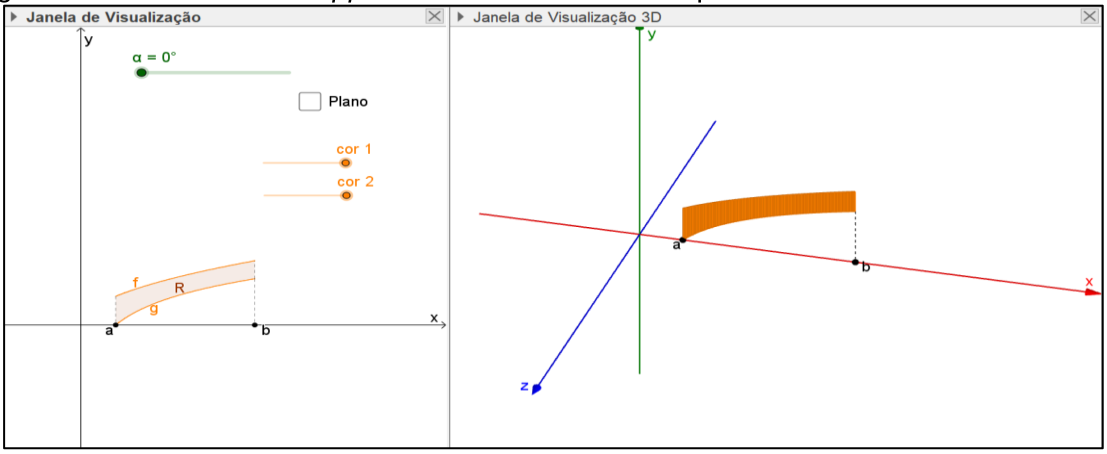


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/y78cksma.

Para analisar a rotação de uma região limitada pelo eixo das ordenadas e pelo gráfico de uma função $x = f(y)$ em torno do eixo y, basta restaurar os dados iniciais do *applet* clicando no botão "Limpar", selecionar a caixa "f(y)" e realizar o processo análogo ao descrito para rotação em torno do eixo x.

O segundo *applet* denominado “Volume de um sólido pelo método dos anéis circulares” (Figura 15) tem o objetivo de auxiliar na dedução da fórmula para calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação, em torno de um dos eixos coordenados, de uma região limitada por duas curvas.

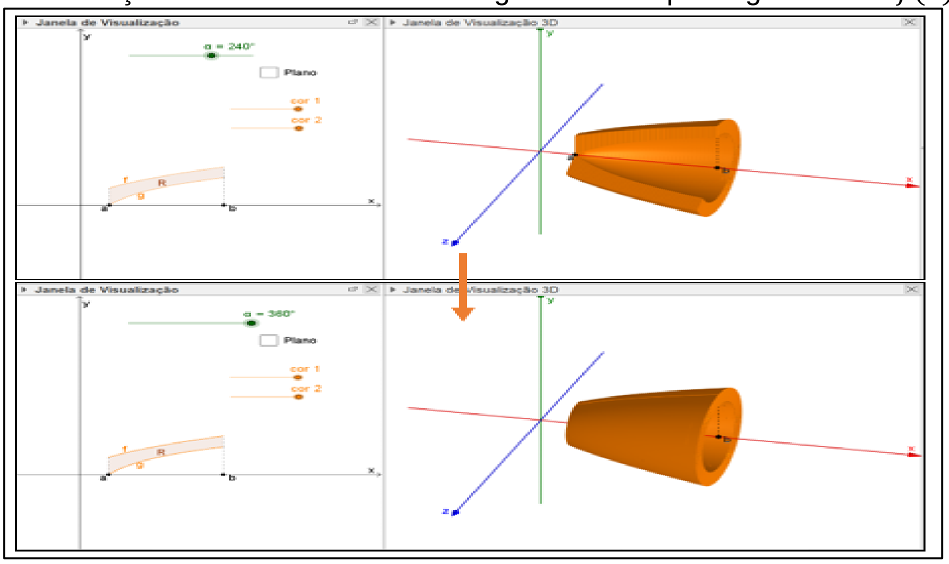
Figura 15 – Tela inicial do *applet* “Volume de um sólido pelo método dos anéis circulares”



Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v3qskanm.

Ao mover o controle deslizante “α” é possível visualizar, na janela 3D, a rotação da região R em torno do eixo x (Figura 16).

Figura 16 – Rotação em torno do eixo x da região limitada pelos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$

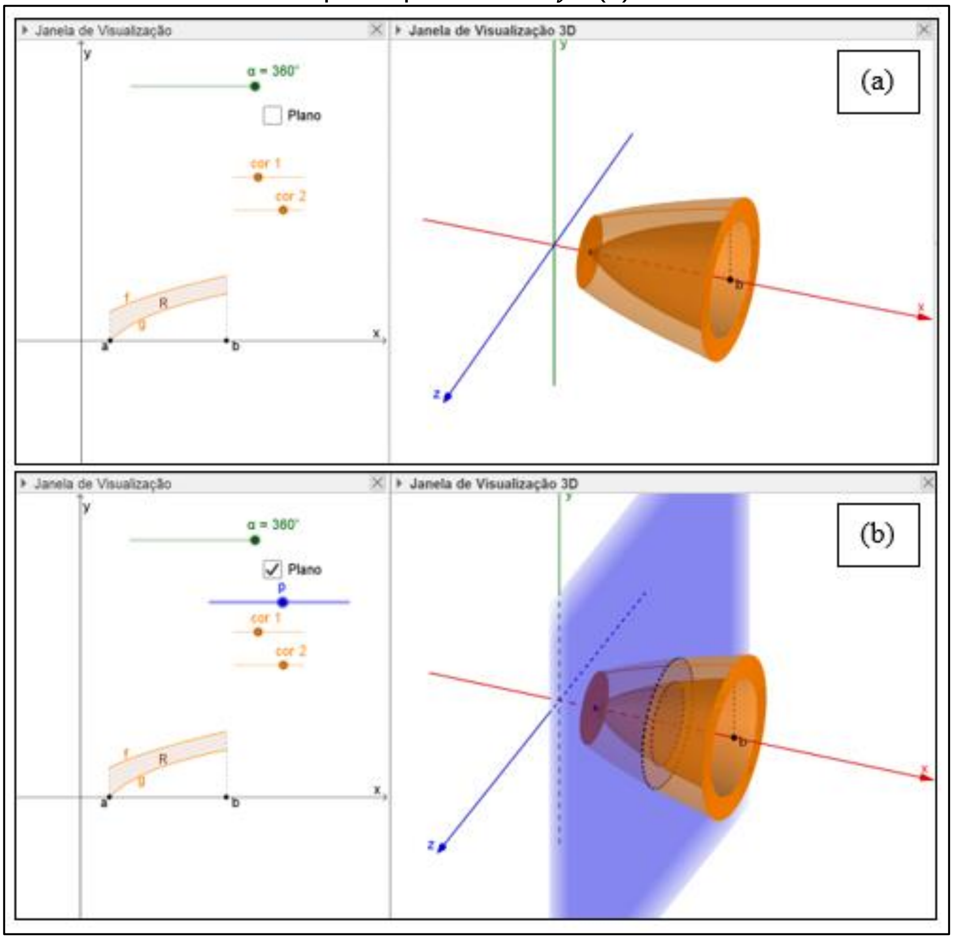


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v3qskanm.

O controle “cor 1” permite alterar a transparência da superfície externa do sólido formado e o controle “cor 2” a transparência da superfície interna (Figura 17a). Com isso, espera-se facilitar a visualização geométrica.

Ao marcar a caixa de seleção “Plano” (Figura 17b), é exibido o controle deslizante “p” na janela 2D. Ao mover esse controle, movimenta-se um plano paralelo ao yz. Com isso, o usuário poderá observar que as seções transversais em planos paralelos a yz, do sólido formado pela rotação completa de R em torno de x, são coroas circulares.

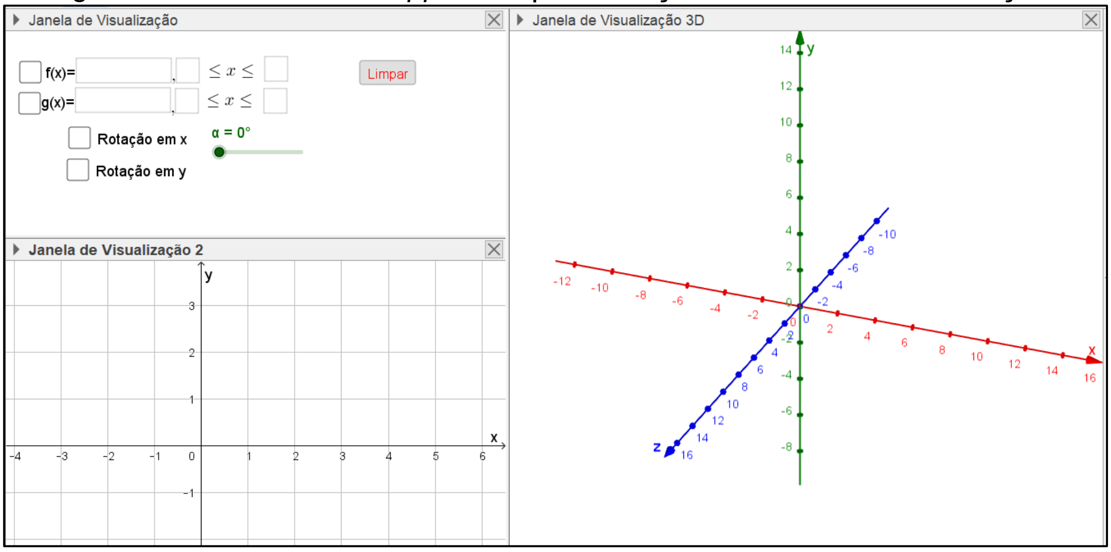
Figura 17 – Alteração da transparência das superfícies externa e interna do sólido (a) e plano paralelo ao yz (b)



Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v3qskanm.

O terceiro *applet* denominado “Representação de sólidos de revolução” (Figura 18) tem o objetivo de possibilitar a representação de sólidos de revolução formados pela rotação, tanto em torno do eixo x quanto do y, de regiões limitadas por uma curva e um eixo coordenado ou de regiões limitadas por duas curvas.

Figura 18 – Tela inicial do *applet* “Representação de sólidos de revolução”



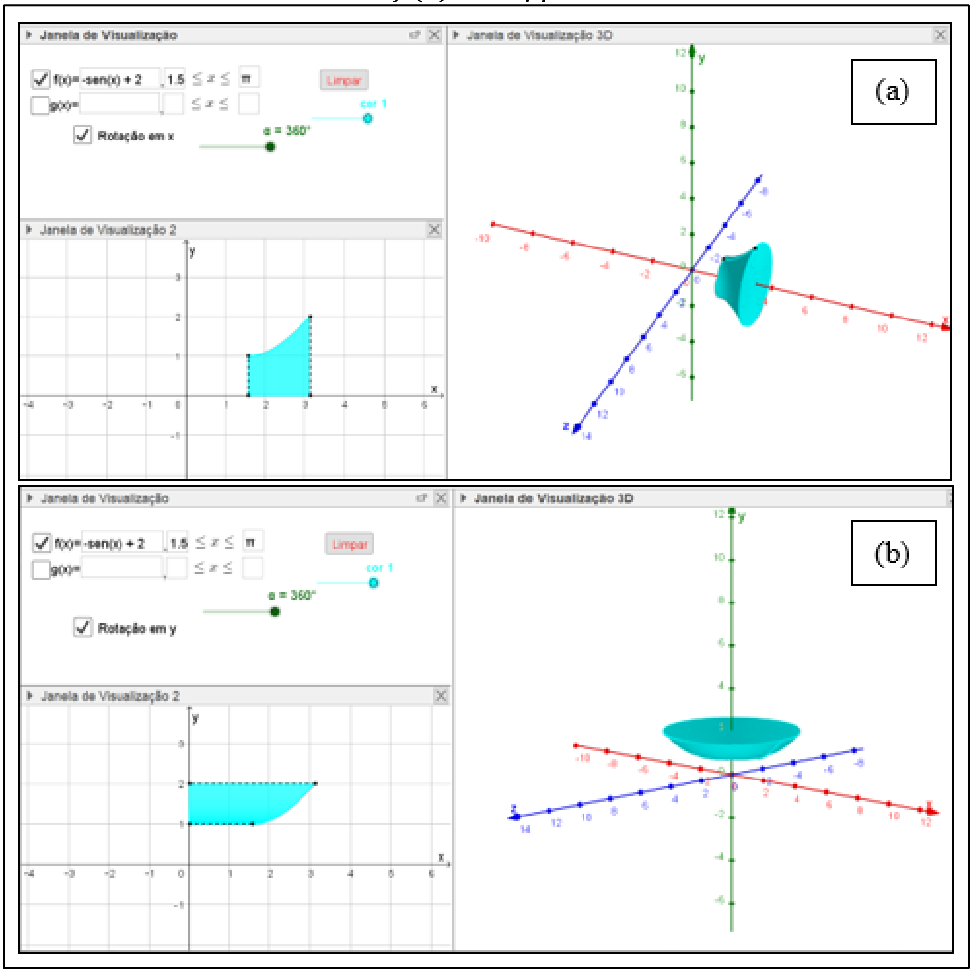
Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/z7awtzgj.

Para representar um sólido formado pela rotação em torno do eixo x de uma região limitada por uma curva e pelo eixo das abscissas no *applet* é necessário marcar somente a caixa de seleção “$f(x)$” e, posteriormente, digitar a função e o intervalo desejado. Com isso, será exibido, tanto na janela de visualização 3D quanto na segunda janela 2D[3], o gráfico da função. Em seguida, marcar a caixa de seleção “Rotação em x”, para representar a região compreendida entre o eixo x e o gráfico exibido e, por fim, mover o controle deslizante “α”. Como exemplo para esse caso, é apresentada na figura 19a a representação do sólido formado pela rotação, em torno do eixo das abscissas, da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = -\operatorname{sen}(x) + 2$ e pelo eixo x, com $x \in [\pi/2, \pi]$.

Já para representar um sólido formado pela rotação de uma região em torno eixo y, basta marcar a caixa de seleção “Rotação em y” ao invés da caixa “Rotação em x” e seguir as mesmas orientações para exibir o sólido formado a partir da rotação em torno do eixo x. Na figura 19b é mostrado um exemplo para esse caso, com a representação do sólido formado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = -\operatorname{sen}(x) + 2$ e pelo eixo y, com $x \in [\pi/2, \pi]$.

[3] Neste texto, segunda janela 2D se refere à Janela de Visualização 2 do GeoGebra Clássico 5.0

Figura 19 – Rotação em torno do eixo x (a) e do eixo y (b) após marcar somente a caixa "$f(x)$" do *applet*

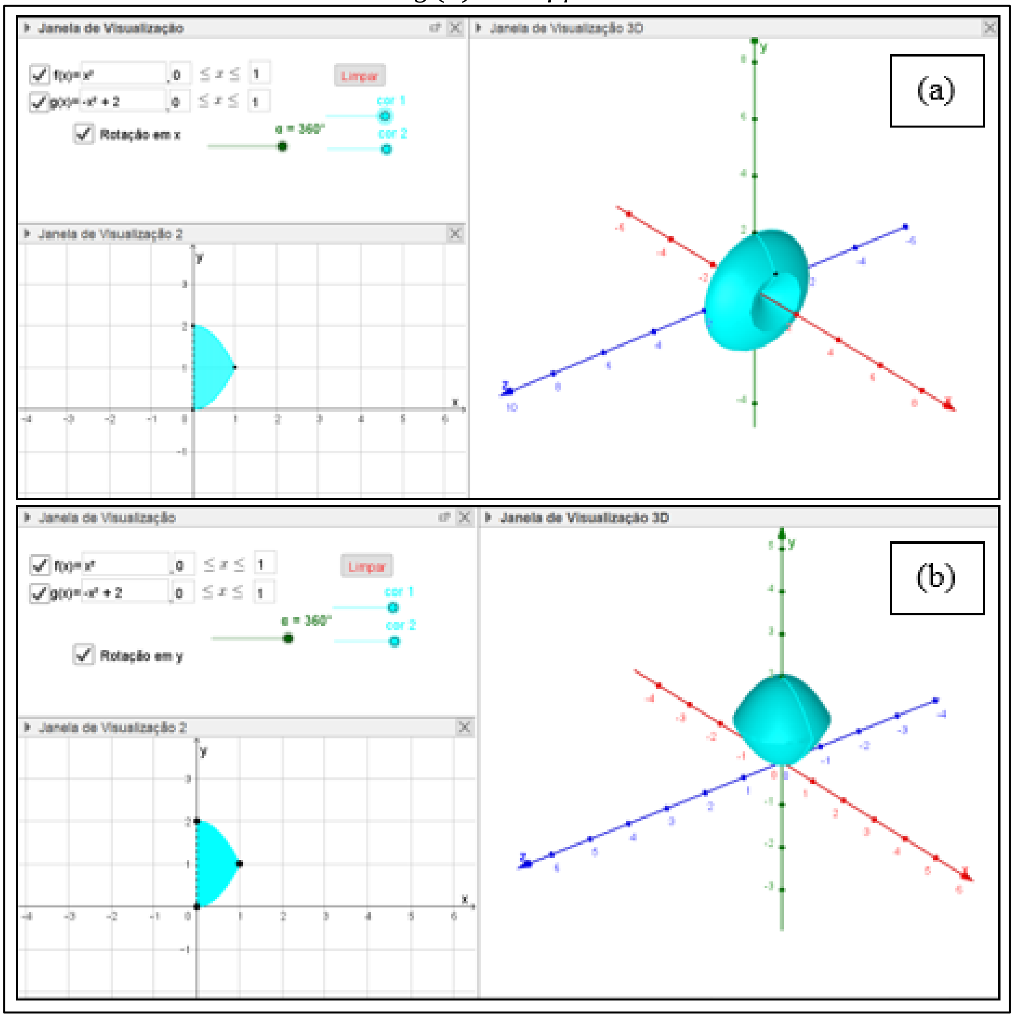


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/z7awtzgj.

Para representar um sólido formado pela rotação em torno do eixo x de uma região limitada por duas curvas no *applet,* é necessário marcar as caixas "$f(x)$" e "$g(x)$" e, posteriormente, digitar as funções e os intervalos desejados. Com isso, serão exibidos, tanto na janela de visualização 3D quanto na segunda janela 2D, os gráficos das funções. Em seguida, é necessário marcar a caixa de seleção "Rotação em x", para exibir a região compreendida entre as duas curvas, e, por fim, mover o controle deslizante "α". Um exemplo para esse caso é apresentado na figura 20a com a representação do sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelos gráficos de $f(x) = x^2$, de $g(x) = -x^2 + 2$ e de $x = 0$ até a interseção das curvas.

Já para representar um sólido formado pela rotação em torno do eixo y de uma região limitada por duas curvas é necessário marcar a caixa "Rotação em y" ao invés de "Rotação em x" e seguir as mesmas orientações para exibir o sólido formado a partir da rotação de uma região em torno do eixo x. Na figura 20b é mostrado um exemplo para esse caso com a representação do sólido formado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pelas mesmas curvas do exemplo anterior.

Figura 20 – Rotação em torno do eixo x (a) e do eixo y (b) após marcar as caixas "$f(x)$" e "$g(x)$" do *applet*

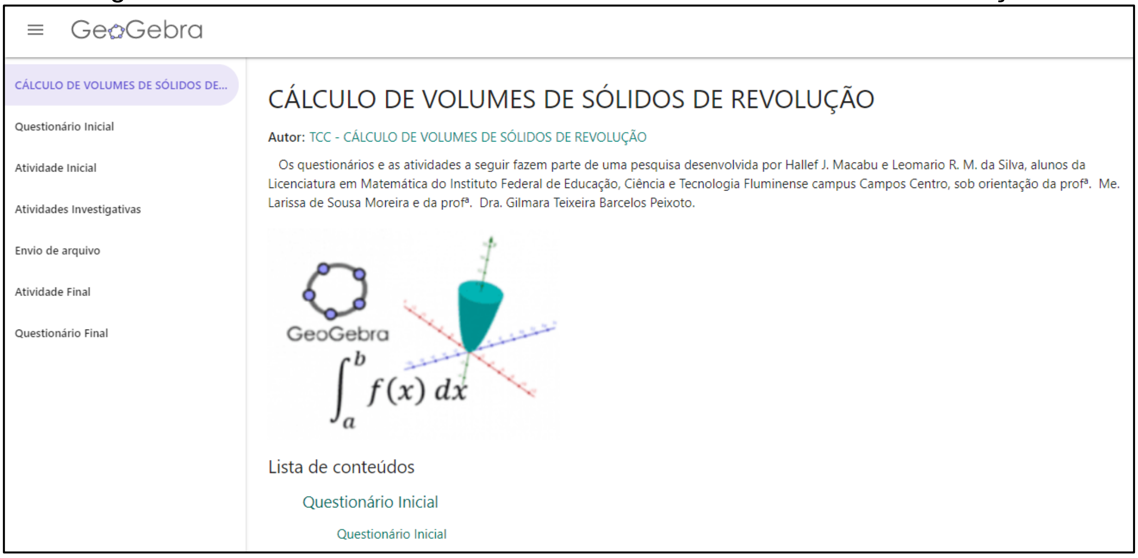


Fonte: Elaboração própria. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/z7awtzgj.

Para disponibilizar e organizar os *applets* e os demais materiais a serem utilizados na implementação, foi elaborado o livro GeoGebra "Cálculo de volumes de sólidos de revolução"[4] (Figura 21). Um livro GeoGebra é "[...] um recurso do GeoGebra que permite organizar de forma hipertextual e disponibilizar na *web* elementos como textos, vídeos, áudios e, em particular, aplicativos desenvolvidos com o GeoGebra, como um livro digital, interativo e com ordenação em capítulos." (AZEVEDO, ESQUINCALHA, LOZANO, 2018, p. 186).

[4] Este livro pode ser acessado por meio do *link*: https://www.GeoGebra.org/m/gvcqdkme.

Figura 21 – Livro GeoGebra “Cálculo de volumes de sólidos de revolução”



Fonte: Elaboração própria.

3.2.1.2 Elaboração da sequência didática

Uma sequência didática é “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” (ZABALA, 1998, p. 18).

Nesse sentido, para criar meios de investigar as contribuições do uso do *software* GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida, foi elaborada uma sequência didática. Ela é composta por três atividades, a saber: i) Atividade Inicial; ii) Atividades Investigativas; e iii) Atividade Final. Nas subseções seguintes é dissertado acerca dos objetivos e características de cada uma delas.

3.2.1.2.1 Atividade Inicial

Ausubel defende que a aprendizagem significativa ocorre a partir da interação de novos conhecimentos com conhecimentos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2012). Assim, a Atividade Inicial tem por objetivo identificar a existência de conhecimentos prévios importantes para se aprender de modo significativo o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Salienta-se que ao introduzir o conteúdo de volumes por Integral Definida, Anton, Bivens e Davis (2007, p. 450, grifo nosso) ressaltam:

> **Lembre** que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana é dividir a região em faixas finas [...] formar uma **soma de Riemann** e passar ao limite para produzir uma **integral para a área**. Sob condições apropriadas, a mesma estratégia pode ser usada para encontrar o volume de um sólido. A idéia é dividir o sólido em fatias finas, aproximar **o volume de cada fatia**, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para o volume.

Assim sendo, na Atividade Inicial estão presentes questões que tratam do cálculo de Integrais Indefinidas e Definidas, cálculo de áreas por Integral Definida e cálculo de volume de cilindro reto. No quadro 5 são elencados os conhecimentos a serem verificados em cada questão dessa atividade.

Quadro 5 – Conhecimentos a serem verificados na Atividade Inicial

Questão	Conhecimentos a serem verificados
1	Cálculo de Integrais Indefinidas.
2	Cálculo de Integrais Definidas.
3	Cálculo de área sob uma curva e entre curvas a partir de representações geométricas.
4	Cálculo de área entre curvas não sendo exposta a representação geométrica.
5	Cálculo do volume de cilindro e o conceito de um sólido de revolução.

Fonte: Elaboração própria.

3.2.1.2.2 Atividades Investigativas

As Atividades Investigativas foram elaboradas baseando-se em autores como Gonçalves (2012); Ponte, Brocardo e Oliveira (2013); Porfírio e Oliveira (1999); Vieira, F. (2012) e Zômpero e Laburú (2011). Desse modo, buscou-se, por meio delas, oportunizar a discussão, a descoberta, a exploração e a elaboração de hipóteses, levando o aluno a construir novos conhecimentos apoiando-se em conhecimentos preexistentes e observando regularidades, permitindo assim, seu envolvimento ativo na construção da aprendizagem.

Nesse sentido, objetivou-se, com as Atividades Investigativas, propiciar a aprendizagem por descoberta, que, do ponto de vista didático, pode ser importante para motivar e facilitar a aprendizagem (MOREIRA, 2012).

Pelo fato de o GeoGebra possuir a potencialidade de interação, exploração, manipulação, simulação e intuição (ASSIS, 2017; BARCELOS et al., 2009; ZANELLA, 2018), entende-se que os *applets* elaborados (descritos na subseção 3.2.1.1) podem contribuir para atingir os objetivos das Atividades Investigativas.

As Atividades Investigativas elaboradas para a sequência didática estão divididas em Atividade 1 e Atividade 2, ambas a serem realizadas a partir da manipulação e exploração dos *applets* “Volume de um sólido pelo método dos discos” e “Volume de um sólido pelo método dos anéis circulares”, respectivamente.

A Atividade 1 tem por objetivo geral conjecturar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, tanto em torno do eixo x quanto do eixo y, de uma região limitada por uma curva e por um eixo coordenado em um determinado intervalo.

A Atividade 2 tem por objetivo geral conjecturar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação em torno do eixo x de uma região limitada por duas curvas em um determinado intervalo. Nessa atividade não é solicitada a representação da fórmula para o caso da rotação em torno do eixo y por ser análoga à ideia utilizada em torno do eixo x.

Os objetivos específicos das duas atividades são descritos no quadro 6

Quadro 6 – Objetivos específicos das Atividades Investigativas

Atividade	Objetivos específicos
Atividade 1	• Compreender o processo de aproximação do volume de um sólido de revolução por meio de cilindros retos; • Conjecturar que quanto maior o número de cilindros, mais a soma dos volumes dos cilindros se aproxima do volume de um sólido de revolução; • Utilizar o conceito de volume de cilindro para expressar o volume aproximado de um sólido de revolução a partir da soma dos volumes de cilindros retos; • Estabelecer relação entre o número de cilindros e a altura deles; • Conjecturar que quanto menor a altura dos cilindros retos, mais próximo é possível ficar do volume de um sólido de revolução; • Expressar o volume de um sólido de revolução, por meio de integral definida, utilizando o conceito de limite; • Observar que as seções transversais em planos paralelos ao yz de um sólido formado a partir da rotação, em torno do eixo das abscissas, de uma região limitada por uma curva e pelo eixo x são círculos; • Observar que a medida dos raios das seções transversais é representada pela função cujo gráfico limita a região rotacionada; • Expressar, por meio de Integral Definida, o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno dos eixos abscissas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função e pelo eixo x em um determinado intervalo; • Expressar, por meio de Integral Definida, o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno dos eixos das ordenadas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função e pelo eixo y em um determinado intervalo.
Atividade 2	• Observar que as seções transversais em planos paralelos ao yz de um sólido formado a partir da rotação, em torno do eixo das abscissas, de uma região limitada por duas curvas são coroas circulares; • Explicitar, utilizando Integral Definida, o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno de um dos eixos coordenados, de uma região limitada por duas curvas; • Realizar a dedução da fórmula a partir, também, da diferença dos volumes de dois sólidos: o formado pela rotação da região limitada pela curva superior e o formado pela rotação da região limitada pela curva inferior.

Fonte: Elaboração própria.

3.2.1.2.3 Atividade Final

Com o objetivo de verificar se os alunos saberiam utilizar as fórmulas conjecturadas nas Atividades Investigativas, elaborou-se a Atividade Final. Nela estão dispostas questões que tratam do cálculo de volumes de sólidos formados a partir da rotação de regiões limitadas por gráficos de determinadas funções.

Como constatado por Pereira *et al*. (2017), o GeoGebra possibilita de forma eficaz, contribuir para a visualização e compreensão de sólidos de revolução. Nesse sentido, a fim de auxiliar na visualização dos sólidos que se deseja calcular o volume, a atividade dispõe de instruções para que o aluno consiga representar os sólidos no *applet* “Representação de sólidos de revolução”. No quadro 7 apresentam-se os objetivos das questões dessa atividade.

Quadro 7 – Objetivos das questões da Atividade Final

Questão	Objetivos
1	Calcular o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das abscissas, de uma região limitada por uma curva e pelo eixo x e, também, o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, de uma região limitada pela mesma curva e pelo eixo y.
2	Calcular o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, de uma região limitada por uma curva e pelo eixo x.
3	Calcular o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das abscissas, de uma região limitada por duas curvas.
4	Calcular o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, pelo método dos discos e dos anéis circulares
5	Utilizando Integral Definida, calcular o volume de uma esfera e deduzir a fórmula utilizada em Geometria Espacial para o cálculo de volume de esfera.

Fonte: Elaboração própria.

3.2.1.3 Elaboração dos questionários

Para realizar a coleta de dados a serem avaliados na pesquisa, foram elaborados dois questionários, o inicial e o final, ambos no Google Forms[5].

Com o Questionário Inicial[6], composto por perguntas abertas e fechadas, objetivou-se traçar o perfil dos participantes da pesquisa, bem como identificar dificuldades referentes a algum conteúdo estudado nas disciplinas de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense. Além disso, buscou-se identificar se foi feito o uso de Tecnologias Digitais, tanto pelo professor quanto pelo participante por iniciativa própria, no estudo de algum conteúdo que necessite de visualização espacial. Ainda, foram feitas perguntas visando à identificação das habilidades necessárias para a manipulação dos *applets* elaborados no GeoGebra para a sequência didática.

Vale salientar que antes de ter acesso às perguntas do Questionário Inicial, os participantes foram devidamente esclarecidos e aceitaram sua participação voluntária na pesquisa por meio de um Termo de Consentimento.

Já o Questionário Final[7], apresenta perguntas abertas que visam à obtenção da opinião dos participantes com relação à sequência didática, bem como pontos positivos e negativos. Por isso, foram realizadas perguntas quanto às Atividades Investigativas e aos *applets* a fim de identificar contribuições para a aprendizagem do conteúdo abordado, além de possíveis dificuldades.

3.2.1.4 Teste exploratório

Com o objetivo de verificar se o material elaborado estava adequado ao público-alvo e ao objetivo da pesquisa, se os enunciados das atividades estavam claros e coerentes, se havia a necessidade de realizar alterações nos questionários e se os *applets* funcionavam corretamente, foi realizado um teste exploratório.

O teste foi dividido em dois encontros de duas horas cada. O primeiro ocorreu no dia 06 de novembro de 2019 com início às 18h30min e término às 20h30min e o

---

[5] O Google Forms, disponível em www.google.com/forms, é uma ferramenta que permite coletar e organizar informações por meio de formulários.
[6] Este questionário pode ser acessado por meio do *link*: https://forms.gle/g5y8gcvPvEHdjro76.
[7] Este questionário pode ser acessado por meio do link: https://forms.gle/2Kc3kr5JxNVzYs1w9.

segundo, no dia 13 de novembro de 2019, se iniciando às 18h e terminando às 20h. Ambos se deram em um laboratório de informática de uma Instituição Federal de Educação.

Para participar do teste exploratório foram convidados cinco alunos do sétimo período e um do oitavo do curso de Licenciatura em Matemática dessa Instituição. Esses alunos foram convidados por já terem estudado o conteúdo abordado na pesquisa e por já estarem no final do curso, fatos esses que favorecem o fornecimento de sugestões com mais propriedade e criticidade. Também foi convidada uma professora de Cálculo dos cursos de Engenharia dessa mesma Instituição Federal, pelo fato de poder contribuir para a pesquisa com sua experiência docente.

A fim de aproveitar o tempo durante os encontros para a realização das atividades, os questionários foram respondidos extraclasse. Vale destacar que para o teste exploratório foi formulado um terceiro questionário, também no Google Forms, denominado Avaliação do Teste Exploratório[8]. Ele foi elaborado com o objetivo de coletar as opiniões e sugestões dos participantes acerca do material produzido para a pesquisa. O *link* para responder ao Questionário Inicial foi enviado por *e-mail* para os participantes antes do primeiro encontro e o Questionário Final e o de Avaliação do Teste Exploratório puderam ser acessados após o segundo encontro no livro GeoGebra feito para o teste exploratório.

Os questionários e as atividades aplicadas no teste exploratório são denominados, neste trabalho, como: Questionário Inicial A (QI-A) (APÊNDICE A), Atividade Inicial A (AI-A) (APÊNDICE B), Atividades Investigativas A (APÊNDICE C), que se dividem em Atividade 1 A (A1-A) e Atividade 2 A (A2-A), Atividade Final A (AF-A) (APÊNDICE D), Questionário Final (QF) (APÊNDICE E) e, por fim, Avaliação do Teste Exploratório (APÊNDICE F).

A aplicação desses questionários e atividades se deu conforme o quadro 8.

---

[8] Este questionário pode ser acessado por meio do link: https://forms.gle/eJqkPJeaFiZbXA1A9.

Quadro 8 – Teste exploratório

Data	Atividade promovida	Duração	Forma que a atividade foi realizada
06 de novembro de 2019	Questionário Inicial A	–	Extraclasse
06 de novembro de 2019	Atividade Inicial A	1 hora e 10 minutos	Presencialmente
06 de novembro de 2019	Atividade 1 A (do item “a” até “n”)	50 minutos	Presencialmente
13 de novembro de 2019	Atividade 1 A (do item “o” até “r”)	10 minutos	Presencialmente
13 de novembro de 2019	Atividade 2 A	20 minutos	Presencialmente
13 de novembro de 2019	Atividade Final A	1 hora e 30 minutos	Presencialmente
De 13 a 15 de novembro de 2019	Questionário Final	–	Extraclasse
De 13 a 15 de novembro de 2019	Avaliação do Teste Exploratório	–	Extraclasse

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados obtidos no teste exploratório e a análise dos dados levantados a partir de sua execução são dissertados no Capítulo 4, seção 4.1 especificamente.

3.2.2 Implementação

Para continuar a investigação das contribuições do uso do *software* GeoGebra no estudo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida, ocorreu a etapa de implementação. Ela se deu na turma de Cálculo III, do semestre letivo de 2019.2, do curso de Licenciatura em Matemática da mesma Instituição que foi realizado o teste exploratório. Foi definida essa turma levando em consideração que é na referida disciplina desse curso - cuja ementa é apresentada no anexo I - que se estuda o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Em razão disso, foi acordado com o professor da disciplina, no início do semestre letivo, que a implementação ocorreria respeitando seu planejamento. Assim sendo, foi solicitada sua permissão para que o tópico de volumes fosse abordado pelos autores desta pesquisa no momento que viesse a ser feito por ele, de modo a promover, com as atividades elaboradas, o primeiro contato dos alunos com o conteúdo tratado nesta pesquisa.

Destaca-se que para a implementação foram realizados três encontros em um laboratório de informática. O primeiro ocorreu no dia 25 de novembro de 2019 e estavam presentes nove licenciandos. O segundo aconteceu no dia 02 de dezembro de 2019 com doze licenciandos, e o terceiro, com oito presentes, se deu no dia 09 de dezembro de 2019. Seis licenciandos participaram de todos os encontros.

Os materiais elaborados, que sofreram alterações após o teste exploratório, são chamados, neste trabalho, de: Questionário Inicial B (QI-B) (APÊNDICE G)**.** Atividade Inicial B (AI-B) (APÊNDICE H), Atividades Investigativas B (APÊNDICE I), que se dividem em Atividade 1 B (A1-B) e Atividade 2 B (A2-B), e Atividade Final B (AF-B) (APÊNDICE J).

Vale aqui comentar que após a aplicação da AI-B as resoluções dos participantes foram sucintamente analisadas e, com isso, foi apontada a necessidade de fazer a correção e análise, em aula, de determinados itens dessa atividade com o objetivo de esclarecer as dúvidas identificadas. Com o intuito de verificar se essa medida possibilitou que os participantes superassem suas dificuldades, foram elaborados os Exercícios Complementares (APÊNDICE K).

Os fatos supramencionados são detalhados no Capítulo 4, seção 4.2, em que é discorrido sobre a implementação e a avaliação dos dados coletados.

No quadro 9 é apresentada a forma como esses questionários foram aplicados e como as atividades foram realizadas nos três encontros da implementação.

Quadro 9 – Implementação

Data	Atividade promovida	Duração
25 de novembro de 2019	Questionário Inicial B	30 minutos
	Atividade Inicial B	1 hora e 10 minutos
02 de dezembro de 2019	Atividade 1 B (do item “a” até “l”)	1 hora e 30 minutos
09 de dezembro de 2019	Atividade 1 B (do item “m” até “p”	10 minutos
	Atividade 2 B	20 minutos
	Atividade Final B	1 hora e 30 minutos
	Questionário Final	20 minutos

Fonte: Elaboração própria.

3.2.3 Avaliação

Na etapa de avaliação é feita a análise, à luz do referencial teórico adotado, dos dados levantados na implementação. Ressalta-se, novamente, que nesta pesquisa os dados foram coletados utilizando-se dos seguintes instrumentos: questionários inicial e final, observação e respostas dadas pelos participantes nas atividades da sequência

Essa etapa da intervenção é apresentada com detalhes no decorrer do Capítulo 4.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são descritos e analisados os resultados obtidos no teste exploratório, de forma a apontar e justificar as alterações efetuadas no material. Além disso, são apresentados e avaliados os dados coletados na implementação, obtidos por meio das observações realizadas e das respostas aos questionários e às atividades.

4.1 Resultados do teste exploratório

Evidencia-se, novamente, que o teste exploratório foi realizado com o objetivo de verificar se o material elaborado estava adequado ao público-alvo e ao objetivo da pesquisa, se os enunciados das atividades estavam claros e coerentes, se havia a necessidade de realizar alterações nos questionários e se os *applets* funcionavam corretamente. Assim, sua execução se deu a fim de melhorar o material elaborado, sendo de grande relevância na etapa de planejamento da intervenção.

Nesta seção são apresentadas e esclarecidas as alterações feitas no material elaborado após o teste exploratório. As percepções, quanto a importância de realização de certas mudanças no material, foram indicadas a partir das: i) sugestões apresentadas pelos participantes por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório; ii) informações recolhidas na observação realizada no decorrer do teste; e iii) análise das respostas dadas pelos participantes às atividades e aos questionários inicial e final.

Ressalta-se que com o objetivo de preservar as identidades dos participantes do teste exploratório, eles foram nomeados nas subseções seguintes como T1, T2, ..., T7.

4.1.1 Análise dos questionários

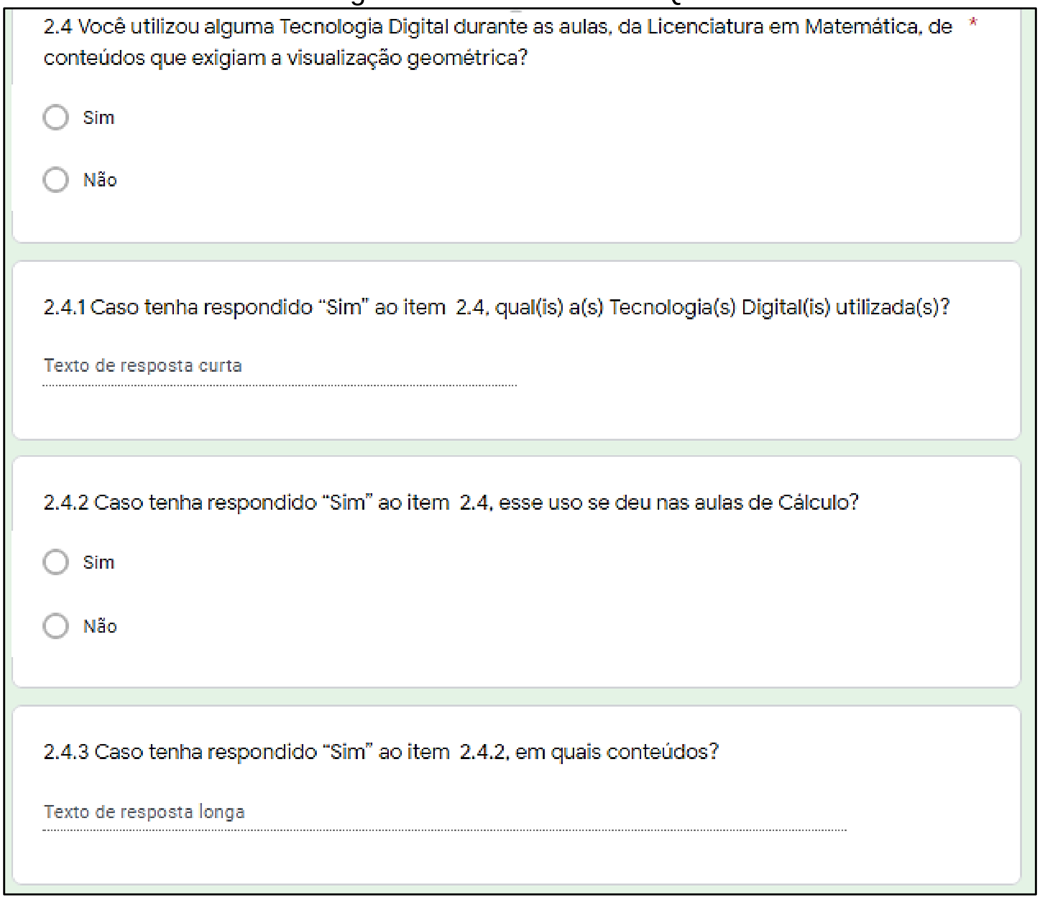
Conforme mencionado no Capítulo 3, os questionários foram respondidos extraclasse pelos participantes do teste exploratório. O *link* para o Questionário Inicial A foi enviado por e-mail antes do primeiro encontro e o Questionário Final pôde ser acessado após o segundo encontro no livro GeoGebra feito para o teste exploratório.

Com o objetivo de identificar a necessidade de alterações nas perguntas dos questionários, foi feita a análise das respostas dos participantes, de modo a verificar se elas foram dadas de acordo com o que havia sido perguntado. Concluiu-se, a partir dessa análise, que as respostas foram satisfatórias e que, portanto, não havia a necessidade de reformular as perguntas.

Para que fossem apresentadas sugestões de alterações nos questionários, os participantes foram perguntados, por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório, se tiveram dificuldade em responder alguma das perguntas dos questionários e solicitados que apresentassem contribuições.

Diante disso, somente o participante T1 apresentou uma sugestão. Ele recomendou que se acrescentasse, no Questionário Inicial A, um item que possibilitasse indicar o conteúdo de Cálculo em que tivesse sido feito o uso de Tecnologia Digital em sua abordagem. Assim sendo, foi acrescido o item 2.4.3 nesse questionário após o teste exploratório (Figura 22). Já com relação ao Questionário Final, nenhuma sugestão de alteração foi feita.

Figura 22 – Item 2.4.3 do QI-B


2.4 Você utilizou alguma Tecnologia Digital durante as aulas, da Licenciatura em Matemática, de conteúdos que exigiam a visualização geométrica? *

Sim

Não

2.4.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.4, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

Texto de resposta curta

2.4.2 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.4, esse uso se deu nas aulas de Cálculo?

Sim

Não

2.4.3 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.4.2, em quais conteúdos?

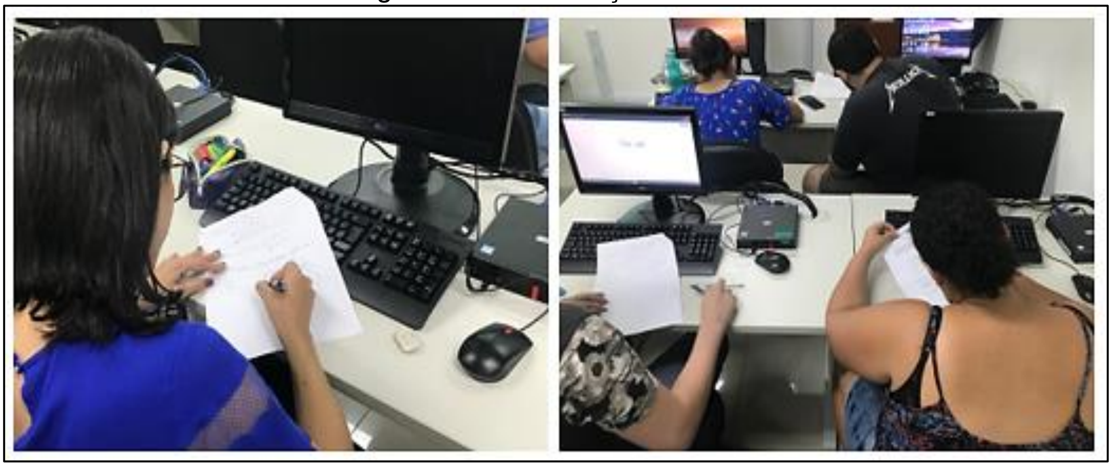
Texto de resposta longa

Fonte: Elaboração própria.

4.1.2 Análise da Atividade Inicial A

A realização da Atividade Inicial A, como já apresentado no Capítulo 3, se deu no início do primeiro encontro do teste exploratório (Figura 23). Nesse momento, foi explicado que essa atividade foi elaborada baseando-se na Teoria da Aprendizagem Significativa e que, por isso, tinha o objetivo de identificar conhecimentos prévios relevantes para se aprender de modo significativo o conteúdo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida. Além disso, foi informado aos participantes que quaisquer sugestões poderiam ser feitas nas folhas das atividades e que, ao final do teste exploratório, seria disponibilizado o questionário de Avaliação do Teste Exploratório, para que pudessem indicar a necessidade de alterações no material elaborado de acordo com suas percepções e dificuldades encontradas.

Figura 23 – Realização da AI-A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante a realização da AI-A, foi possível observar que os participantes estavam com dificuldades na resolução de algumas questões. Inclusive, a maioria relatou, no momento da aplicação, que não recordava certos métodos e regras de integração e que alguns itens estavam muito complexos.

Por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório, nenhum dos participantes afirmou que houve dificuldade na compreensão dos enunciados. Todavia, quando perguntados se as questões da AI-A contribuíram para relembrar conceitos necessários para a realização das Atividades Investigativas e Final, cinco participantes responderam que sim e dois (T1 e T6), que parcialmente. Além disso, T6 informou que achou as questões difíceis e T1 comentou:

> "Tem algumas integrais na atividade inicial que não são necessárias para a resolução das atividades. Sugiro retirar as integrais que necessitam de métodos mais complicados para resolução." (T1)

Diante desses fatos e da necessidade de mais tempo que o previsto para o término dessa atividade no teste exploratório, foram realizadas alterações com o objetivo de melhorá-la para a etapa de implementação.

O número de itens da primeira e da segunda questões foi reduzido. A primeira questão, que trata do cálculo de Integrais Indefinidas, passou de cinco itens (Figura 24a) para dois (Figura 24b), de forma que na AI-B, o item "a" trata do primeiro da AI-A adaptado e o item "b" é o quarto da AI-A.

Figura 24 – Primeira questão da AI-A (a) e da AI-B (b)

(a)

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \left(\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}\right) dx$

b) $\int \left(\frac{e^y}{5}\right) dy$

c) $\int \sqrt{\theta} sen\left(1+\theta^{\frac{3}{2}}\right) d\theta$

d) $\int \sqrt{5-x}\, dx$

e) $\int \frac{1}{5}(5-x^2) dx$

(b)

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \left(\frac{x^5-3}{x^2}\right) dx$

b) $\int \sqrt{5-x}\, dx$

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão, que aborda o cálculo de Integrais Definidas, passou de quatro itens (Figura 25a) para dois (Figura 25b). Os itens que estavam presentes na AI-A foram retirados e dois novos itens foram elaborados para ficar mais de acordo com as demais atividades da sequência didática.

Figura 25 – Segunda questão da AI-A (a) e da AI-B (b)

(a)

2. Determine as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$

b) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

c) $\int_1^e \ln x \, dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg\,\theta\, d\theta$

(b)

2. Determine as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sen(x)\, dx$

b) $\int_1^2 \pi(5-x^2)dx$

Fonte: Elaboração própria.

A terceira questão só sofreu mudanças na formatação, uma vez que houve diminuição da fonte das imagens utilizadas e os itens foram organizados, de forma a otimizar a disposição na página.

A quarta questão, que aborda o cálculo de áreas de regiões limitadas por curvas, não sofreu alterações.

Além das alterações já relatadas, foi adicionada a quinta questão, na qual é tratado o cálculo do volume de cilindros retos. O acréscimo dessa questão se deu pelo fato de que, durante a aplicação do teste exploratório, ter sido considerado um conceito relevante para compreender e responder determinados itens das Atividades Investigativas (Figura 26).

Figura 26 – Quinta questão da AI-B

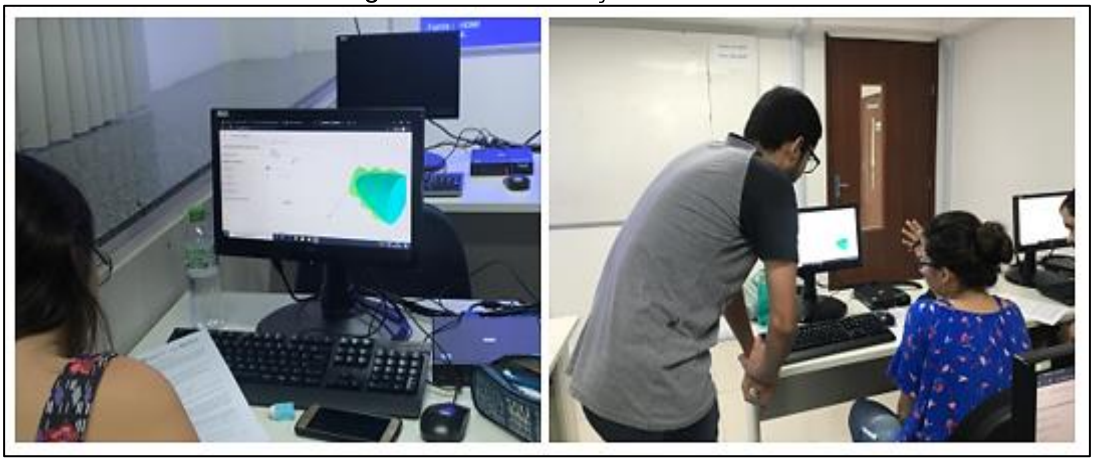
5. Determine o volume de um cilindro de revolução de 10 cm de altura, sendo sua área lateral igual à área da base.

Fonte: Elaboração própria.

4.1.3 Análise das Atividades Investigativas A

A Atividade 1, da Atividade Investigativa A, teve início nos 50 minutos restantes do primeiro encontro (Figura 27). Nesta ocasião, os participantes fizeram até o item “n” da referida atividade.

Figura 27 – Realização da A1-A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante a realização da A1-A pôde-se observar certa dificuldade dos participantes. Isso também se evidenciou na análise das respostas dadas a essa atividade e ao questionário Avaliação do Teste Exploratório, em que eles apresentaram suas percepções ao realizar as Atividades Investigativas A.

Os participantes justificaram, por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório, que os problemas que tiveram com essa atividade se deram: i) por não lembrarem alguns conceitos relacionados ao conteúdo de Integrais; ii) pelo fato de alguns itens não estarem muito claros; e iii) pela necessidade de alteração na ordem entre determinados itens, de modo a facilitar o entendimento.

A partir da análise das respostas dadas pelos participantes, verificou-se que os itens “d” e “e” da A1-A foram respondidos da mesma forma. Inclusive, T4 destacou, em sua folha de atividade, que achou os enunciados desses itens semelhantes. Para evitar essa confusão, decidiu-se reformulá-los com o intuito de deixar mais claro o que se esperava como resposta e juntá-los em um só item (Figura 28a). A partir disso, os itens “d” e “e” da A1-A foram unidos e se tornaram o “d” da A1-B (Figura 28b).

Figura 28 – Itens “d” e “e” da A1-A (a) e item “d” da A1-B (b)

(a)

d. Mova o controle deslizante “n”, para alterar o número de cilindros retos. Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar os sólidos por vistas distintas, e compare a **soma dos volumes dos cilindros** exibidos (V_C) e o **volume do sólido S** (V_S).

____

e. Descreva o que você observou em relação ao volume do sólido S e a soma dos volumes dos cilindros ao variar o valor de “n”.

____

____

(b)

d. Mova o controle deslizante “n” para alterar a quantidade de cilindros retos. Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar os sólidos por vistas distintas, e descreva o que você observou em relação a **soma dos volumes dos cilindros** exibidos (V_C) e o **volume do sólido S** (V_S) ao **aumentar** o valor de “n”.

____

____

Fonte: Elaboração própria.

Quanto ao item “h” da A1-A, verificou-se, a partir das dúvidas que surgiram no momento da aplicação, a necessidade de reformulá-lo com o objetivo de explicar mais detalhadamente o que nele é solicitado.

Além disso, os participantes sinalizaram, após compreenderem melhor o que estava sendo pedido nesse item, a necessidade de trocar a ordem em que os itens “h”, “f” e “g” se encontravam. Eles explicaram que quando foi observada a relação entre a soma dos volumes dos cilindros retos e o volume do sólido de revolução, já era possível responder ao item “h” antes dos itens “f” e “g” da A1-A. Eles justificaram, também, que a forma com que esses itens estavam dispostos contribuiu para a dificuldade de compreensão do item “h”, uma vez que tentaram associar aos itens “f” e “g” sem ser necessário. Diante disso, foi realizada a troca de ordem, de modo que na A1-B o item “h” passou a ser o “e”. As alterações realizadas nesse item são apresentadas na figura 29.

Figura 29 – Item “h” da A1-A (a) e item “e” da A1-B (b)

(a)

f. Descreva a relação entre o número de cilindros e a altura de cada um deles.

____

g. Escreva o que se pode afirmar quanto à medida da altura de cada cilindro e o volume do sólido S.

____

h. Explicite o volume aproximado do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k e área da base $A(x_k)$, em que x_k é a abscissa de um ponto qualquer, com x_k pertencente ao k-ésimo intervalo.

____

____

(b)

e. Explicite o volume **aproximado** do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$.

____

____

f. Descreva a relação entre a quantidade de cilindros e a altura de cada um deles.

____

____

g. Descreva a relação entre o volume do sólido S (V_S) e a soma dos volumes dos cilindros (V_C) ao alterar a medida da altura de cada cilindro.

____

Fonte: Elaboração própria.

Com relação ao item “i” da A1-A, que se refere ao “h” da A1-B, foi identificado que os participantes estavam com dúvidas sobre como respondê-lo. Nesse momento, alguns deles precisaram pesquisar a definição de Integral Definida na internet e outros recorreram aos mediadores para esclarecerem suas dúvidas. Segundo eles, houve dificuldade em recordar a relação entre limite e Integral Definida.

Com o intuito de evitar esse problema na etapa de implementação e levando em consideração, também, que durante a realização da AI-A alguns participantes solicitaram assistência aos mediadores para que pudessem recordar determinadas regras de integração, conforme já comentado, foi elaborado um Resumo Teórico (APÊNDICE L). Nesse resumo foram disponibilizadas algumas regras básicas de integração e apresentada a definição de Integral Definida, de modo a facilitar o acesso a essas informações, caso os participantes da implementação achassem necessário.

Quanto ao item “j” da A1-A, cujo objetivo era de que se observasse que à medida em que as alturas dos cilindros diminuíam, mais próximo eles ficavam de formar discos, a partir da análise das respostas dadas, identificou-se que os participantes o compreenderam de formas distintas. Com isso, algumas respostas apresentadas foram “O formato da região se aproximará do sólido.”; “Tende a formar um ponto.”; “O formato da região gerada é um cilindro.”; “Círculos.”. Nesse sentido, no questionário Avaliação do Teste Exploratório, T3 comentou:

> “O enunciado do item "j" da atividade 1 não ficou claro a respeito do que deveria ser respondido”. (T3)

A fim de resolver o problema encontrado nesse item e considerando-o dispensável para a compreensão dos demais, deliberou-se removê-lo da atividade.

Outra mudança realizada na A1-A se refere ao item “l”, no qual é pedida a representação das medidas dos raios de determinados círculos (Figura 30a). Foi necessário explicar esse item aos participantes, já que muitos não conseguiram compreender o que se esperava como resposta. Por conta disso, considerou-se melhor que fossem informadas as medidas dos raios dos círculos com centros em $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)$ e $(x_5, 0)$ em função de f (Figura 30b) em vez de perguntar.

Figura 30 – Item “l” da A1-A (a) e item “j” da A1-B (b)

l. Selecione a caixa “Raio”. Posicione o controle deslizante “Seções” em 5. Represente as medidas dos raios dos círculos com centros em $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(x_3, 0)$. (a)

____

____

j. Selecione a caixa “Raio”. Posicione o controle deslizante “Seções” em 5. Observe que as medidas dos raios dos círculos com centros em $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)$ e $(x_5, 0)$ são $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ e $f(x_5)$. (b)

Fonte: Elaboração própria.

Ao final da Atividade 1, foi planejado fazer uma discussão para que os participantes pudessem compartilhar suas respostas com os demais, haja vista que em uma investigação matemática esse é o momento em que “Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador.” (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2013, p. 41). Todavia, durante a realização do teste exploratório, percebeu-se a necessidade de interrupções da atividade para discussão acerca das respostas e para se certificar da compreensão de determinados itens. Por conseguinte, a Atividade 1 foi dividida em partes.

Nesse sentido, na A1-B, os itens “a” até o “h” formaram a primeira parte, que trata da compreensão da aproximação do volume de um sólido de revolução por meio de cilindros retos e a utilização de Integral Definida da área da seção transversal de um extremo a outro desse sólido para calcular seu volume. A segunda parte compreende os itens “i” até o “l”. Nessa, espera-se que o aluno expresse o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo das abscissas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, utilizando Integral Definida. Já a terceira parte, que vai do item “m” até o “p”, objetiva que o aluno expresse, por meio de Integral Definida, o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

No segundo encontro do teste exploratório, que foi realizado no dia 13 de novembro de 2019 como já citado no Capítulo 3, as Atividade Investigativas A foram devolvidas aos participantes para que eles finalizassem a A1-A, uma vez que faltava concluir do item “o” ao “r”, e fizessem a A2-A (Figura 31).

Figura 31 – Realização da A2-A

Fonte: Proctocolo de pesquisa.

Nenhuma necessidade de alteração, nos itens da A1-A que faltavam, foi observada ou sugerida pelos participantes.

Com relação à Atividade 2 A, mediante a análise das respostas dadas nessa atividade, identificou-se que a maioria dos participantes respondeu aos itens de modo satisfatório e, além disso, nenhuma sugestão de alteração foi apresentada por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório. Ainda assim, a partir das observações feitas na aplicação, considerou-se relevante a realização de pequenas alterações.

Quanto ao item “b”, que solicita informar o formato das seções transversais (Figura 32a), a maioria dos participantes respondeu de forma correta. Contudo, no decorrer da aplicação, muitos pediram para confirmar o nome da região justificando não terem certeza de que se chamava “coroa circular” ou “anel circular”. Devido a isso, esse item foi alterado de modo a explicitar o nome do formato da região, sendo feita, também, sua divisão em “b” e “c” conforme a figura 32b.

Figura 32 – Item “b” da A2-A (a) e itens “b” e “c” da A2-B (b)

b. Mova o controle deslizante “α” e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x na janela de vizualização 3D. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe o sólido de revolução formado.

Selecione a caixa “Plano” e mova o controle deslizante “p”. Movimente os eixos coordenados da janela 3D e descreva qual é o formato das seções transversais do sólido em planos paralelos ao plano yz.

(a)

b. Mova o controle deslizante “α” e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x na janela de visualização 3D. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe o sólido de revolução formado.

c. Selecione a caixa “Plano” e mova o controle deslizante “p”. Movimente os eixos coordenados da janela 3D e observe que as seções transversais em planos paralelos ao plano yz são **coroas circulares**.

(b)

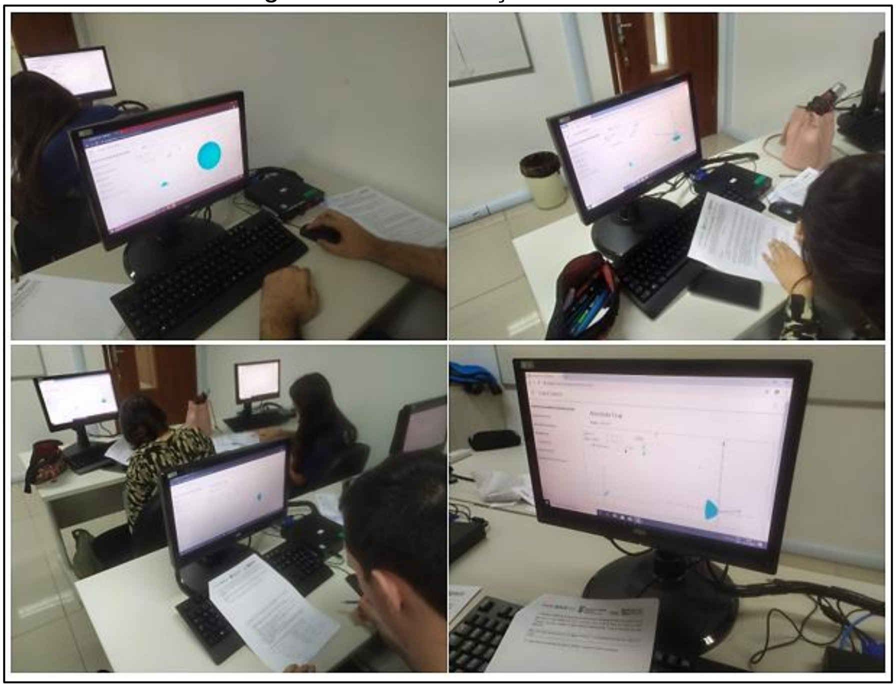
Fonte: Elaboração própria.

Além disso, o item “c” da A2-A foi retirado, por ser considerado, mediante análise após o teste, que se tratava de um item dispensável para a dedução da fórmula.

4.1.4 Análise da Atividade Final A

A Atividade Final A, como já exposto no Capítulo 3, ocorreu no segundo encontro e teve duração de 1 hora e 30 minutos (Figura 33).

Figura 33 – Realização da AF-A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto a essa atividade, todos os participantes destacaram, por meio do questionário Avaliação do Teste Exploratório, que os enunciados estavam claros e que o nível de dificuldade, bem como o número de questões estavam adequados.

Somente o participante T1 comentou, em sua folha de atividade, que a utilização do verbo “visualizar” no imperativo no início das questões de 1 até 4 lhe dava a ideia de realizar tal ação. Entretanto as orientações para representar os sólidos só aparecem depois (Figura 34a). Ou seja, estava sendo pedido para que se visualizasse o sólido, porém não havia sólido para ser visualizado antes de serem executadas as ações necessárias para representá-lo no *applet*.

A partir da análise desse comentário foi constatado que, de fato, o participante havia apresentado uma observação pertinente. Diante disso, todas as questões foram reformuladas de forma a, primeiramente, pedir para que o aluno execute as ações para representar o sólido e, após isso, visualizá-lo (Figura 34b).

Figura 34 – Questões de 1 até 4 da AF-A (a) e da AF-B (b)

(a)

1. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo das abscissas**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{3-x}$, com $x \in [0,3]$. Para isso:

2. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para isso, clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e siga as instruções dos itens anteriores.

3. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$. Para isso:

4. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo y**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x+1}$, pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{2x}$ e $x = 0$. Para isso, clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e siga as instruções dos itens anteriores.

(b)

1. Execute as ações solicitadas nos itens **a**, **b**, **c**, **d** e **e** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo das abscissas**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{3-x}$, com $x \in [0,3]$.

2. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e execute as ações solicitadas nos itens **a**, **b**, **c**, **d** e **e** da questão 1, para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Execute as ações solicitadas nos **itens a, b, c, d, e, f e g** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$.

4. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente. Execute novamente as ações solicitadas nos itens **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** e **g** da questão 3, porém, no item **e** marque a caixa de seleção "Rotação em y", para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo y**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x+1}$, pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{2x}$ **e $x = 0$.**

Fonte: Elaboração própria.

Outras alterações para melhorar os enunciados, tais como substituição por sinônimos, acréscimos ou exclusão de palavras, organização dos itens e formatação das atividades da sequência não foram citadas. Vale destacar, ainda, que não foram realizadas sugestões de alterações nos *applets*, uma vez que todos os participantes afirmaram que eles funcionaram de forma adequada e que os auxiliaram para responder às questões de todas as atividades realizadas.

4.2 Implementação e Avaliação

Nesta seção é feito o relato de como se deu a etapa de implementação e, também, é apresentada a avaliação dos resultados obtidos na pesquisa. Destaca-se que foi realizada a análise das respostas aos questionários e às atividades apenas dos seis participantes que estiveram presentes em todos os encontros. Com o objetivo de preservar suas identidades, eles foram nomeados como K1, K2, ..., K6.

Vale salientar que não se previa, antes da realização dos encontros, a quantidade necessária de aulas para a conclusão das atividades elaboradas. Isso porque, não se sabia, por parte dos participantes, sobre a existência de conhecimentos prévios relevantes para a aprendizagem significativa do conteúdo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida. Assim, só seria possível identificar a necessidade de rever ou apresentar algum conceito após a análise das respostas à Atividade Inicial B. Além disso, quanto às Atividades Investigativas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 25) afirmam que

> Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá terminar. A variedade de percursos, os avanços e os recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação.

Esse fato foi informado ao professor da turma no momento em que foi pedido que ele disponibilizasse suas aulas para a implementação da sequência didática e, com isso, ele concedeu o tempo que fosse necessário aos pesquisadores de acordo com o andamento da turma. Nesse sentido, não foi informado aos participantes o número de encontros que seriam feitos para finalizar todas as atividades, sendo comunicado, apenas, que ocorreriam no horário das aulas de Cálculo III.

4.2.1 Análise do Questionário Inicial B

Como já mencionado no Capítulo 3, o primeiro encontro da etapa de implementação ocorreu no dia 25 de novembro de 2019. No início desse encontro, foi escrito no quadro o *link* para acesso ao livro GeoGebra “Cálculo de volumes de sólidos de revolução”, no qual estavam disponíveis, naquele momento, somente o Questionário Inicial B e os arquivos eletrônicos, em PDF, da Atividade Inicial e do Resumo Teórico. Antes de prosseguirem com as respostas às perguntas do questionário, foi pedido que os participantes lessem atentamente o Termo de Consentimento.

Por meio da análise das respostas dadas ao QI-B, foi constatado que todos participantes tiveram dificuldade em relação a algum conteúdo estudado nas disciplinas de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática. Dois participantes (K3 e K6) responderam ter pouca dificuldade e o restante, dificuldade média. Essa constatação vai ao encontro do que é observado por alguns autores como Anjos e Secafim (2018) e Rodrigues e Neves (2019). Isso porque, eles afirmam haver dificuldade por parte dos alunos na aprendizagem de conteúdos estudados nas disciplinas de CDI.

Ao serem questionados se consideravam que a dificuldade encontrada em Cálculo estava relacionada ao pouco domínio de conceitos algébricos, aritméticos, geométricos e/ou outros, quatro participantes (K1, K2, K3 e K4) marcaram a opção “Algébricos” e os demais (K5 e K6) a opção “Outros”. O participante K5 escreveu possuir pouco domínio dos conceitos relativos ao Cálculo III e K6 declarou que tem pouco domínio em estabelecer relações entre conceitos algébricos e geométricos.

Foi pedido que os participantes escrevessem comentários quanto à dificuldade encontrada por eles, caso achassem necessário. O participante K3 destacou que sua dificuldade estava concentrada em Cálculo III, assim como K5 havia declarado. Ressalta-se que a implementação aqui descrita ocorre no âmbito da referida disciplina. Vale salientar, também, que é na disciplina de Cálculo III que os participantes estudaram o conteúdo de Integrais, cuja compreensão é necessária para a aprendizagem do conteúdo abordado nesta pesquisa. Já K4 informou ter dificuldade em desenvolver questões, não especificando de quais tipos. Esses relatos corroboram com Masola e Allevato (2016), que apontam que os problemas presentes em CDI envolvem dificuldades com conceitos algébricos e, também, deficiência de leitura, de escrita e de diferentes formas de representações matemáticas.

Quanto à reprovação em alguma das disciplinas de Cálculo na Licenciatura em Matemática, somente o participante K4 informou que foi reprovado, especificando ter sido em Cálculo III. Assim sendo, não se tratou do primeiro contato desse participante com o conteúdo abordado nesta pesquisa, uma vez que estava cursando a disciplina novamente. Esse fato pode, também, evidenciar que K4 tenha apresentado dificuldades quanto aos conteúdos estudados em Cálculo III, assim como K3 e K5. Dessa forma, é possível que o problema que ele indicou ter, quanto ao desenvolvimento de questões, esteja relacionado ao cálculo de Integrais.

Ao avaliarem a forma com que os conteúdos de Cálculo vêm sendo trabalhados na Licenciatura em Matemática, quatro participantes (K2, K3, K5 e K6) declararam que é de forma algébrica e geométrica associadas. K1 e K4 julgaram que o trabalho vem sendo feito de forma mais algébrica que geométrica.

Todos os participantes informaram que foi feito o uso de TD durante as aulas, da Licenciatura em Matemática, de conteúdos que exigiram visualização geométrica. Os seis destacaram que foi utilizado o *software* GeoGebra para esse fim.

Quanto ao uso de TD, especificamente nas aulas de Cálculo, todos os participantes citaram que foi feito na abordagem de conteúdos como Integral, Derivada, Limite e soma de Riemann. K2 e K3 ainda informaram a utilização de TD em sala de aula para construir gráficos. Esses dados evidenciam que as disciplinas de CDI na Licenciatura em Matemática cursada pelos participantes vêm sendo desenvolvidas dentro da perspectiva defendida por vários autores da área de Educação Matemática como Backendorf e Basso (2018), Crisostomo e Lopes (2017), Gouveia (2010), Richit (2010) e Vieira, A. (2013). Eles reconhecem o uso de TD na abordagem dos conteúdos de Cálculo como capaz de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Com relação ao uso de alguma TD, de forma espontânea, no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica, somente K5 informou que não o fez. Os que declararam ter utilizado, indicaram que fizeram uso de TD no estudo individual de conteúdos trabalhados em Cálculo. Dentre as tecnologias usadas, todos destacaram o GeoGebra. Além desse *software*, K1 citou também o Desmos e K4, o Mathway.

O fato de a maioria dos participantes apresentarem autonomia para usarem TD para auxiliar no estudo de conteúdos que exigem visualização geométrica pode ser reflexo da utilização dessas tecnologias por parte de seus professores em sala de aula.

Ao serem questionados se o uso de TD é importante para a visualização geométrica, todos responderam de forma positiva. Abaixo estão os comentários feitos pelos participantes.

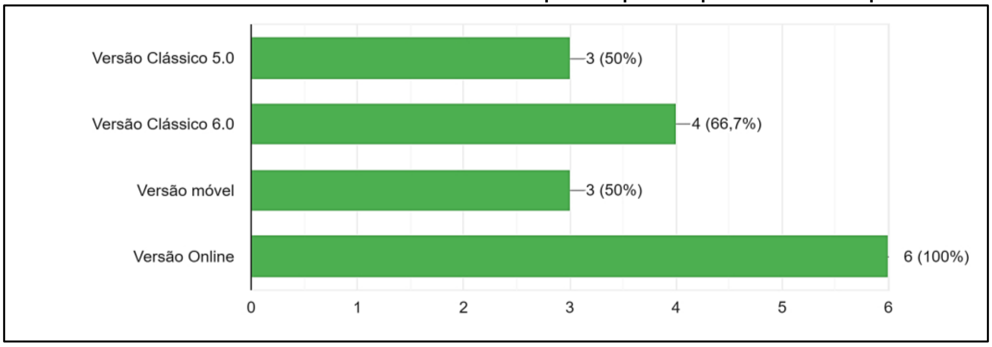
> "Sim, pois com o GeoGebra era possível visualizar, não utilizando apenas formulas." (K1)

> “Sim, pois como a matemática apresenta muitas vezes um carácter abstrato, a visualização da ocorrência de certos fenômenos pode facilitar o seu entendimento.” (K2)
>
> “Sim, é uma forma rápida e prática de conseguir visualizar determinada matéria auxiliando na compreensão do conteúdo.” (K3)
> “Sim, pois facilita a visualização o que nos faz entender com mais clareza a questão.” (K4)
>
> “Sim, pois há conteúdos que só se torna possível a exemplificação com o recurso da tecnologia e é o recurso mais simples para visualização geométrica quando se trata de estudo independente.” (K5)
>
> “Sim, pois alguns gráficos não são tão claros quando construídos manualmente, e os *softwares* tornam a visualização mais clara e ampla.” (K6)

Esses comentários estão em conformidade com algumas características das tecnologias digitas destacadas por Backendorf e Basso (2018) e Notare e Basso (2016) como o fato de: i) facilitarem a construção de conceitos matemáticos; ii) tornarem possível a “concretização” dos objetos, dando a sensação de realismo e de existência material; e iii) permitirem a visualização imediata, otimizando o tempo.

Quanto ao GeoGebra, todos os participantes informaram já terem utilizado. Na figura 35 é possível observar que os seis já conheciam a versão *on-line* desse *software*.

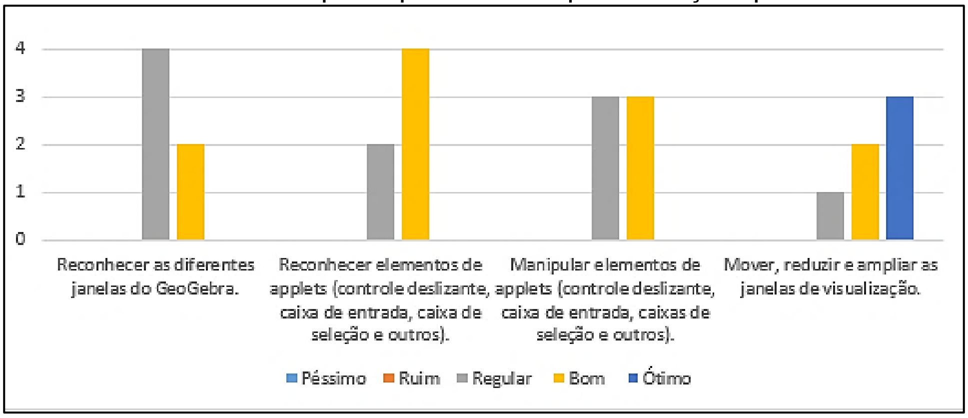
Figura 35 – Versões do GeoGebra utilizadas pelos participantes da implementação



Fonte: Elaboração própria.

No que se refere às habilidades dos participantes com relação ao reconhecimento e manipulação das janelas de visualização e de certos elementos do GeoGebra, como controle deslizante e caixas de seleção e de entrada, a maioria afirmou ser regular ou bom. Três participantes (K3, K4 e K6) se classificaram como ótimos em mover, reduzir e ampliar as janelas de visualização conforme apresentado na figura 36.

Figura 36 – Habilidades dos participantes da implementação quanto ao GeoGebra



Fonte: Elaboração própria.

Esses dados revelaram que os participantes, provavelmente, não apresentariam dificuldades ao usarem os *applets* no GeoGebra *on-line* durante a experimentação da sequência didática. Com isso, entendeu-se que não havia a necessidade de fornecer orientações sobre como utilizá-los.

4.2.2 Análise da Atividade Inicial B

Conforme os participantes terminavam de responder ao Questionário Inicial B, foi sendo entregue a versão impressa do Resumo Teórico.

Foi disponibilizado um tempo para que eles pudessem realizar a leitura. Caso houvesse alguma dúvida, os pesquisadores iriam esclarecê-la e, se fosse sinalizado que os participantes desconhecessem a definição ou alguma regra de integração apresentada, seria realizada a explicação.

Após a realização da leitura juntamente com a turma, foi questionado se alguém estava com alguma dúvida e se todos conseguiram entender claramente a linguagem utilizada. Os participantes informaram que já conheciam a definição e as regras de integração apresentadas e que estavam habituados com os termos usados.

Diante disso, foi entregue a Atividade Inicial B e solicitado que a fizessem sozinhos de acordo com o que sabiam, uma vez que o objetivo dela era de identificar a existência de conhecimentos prévios importantes para o desenvolvimento das demais atividades (Figura 37).

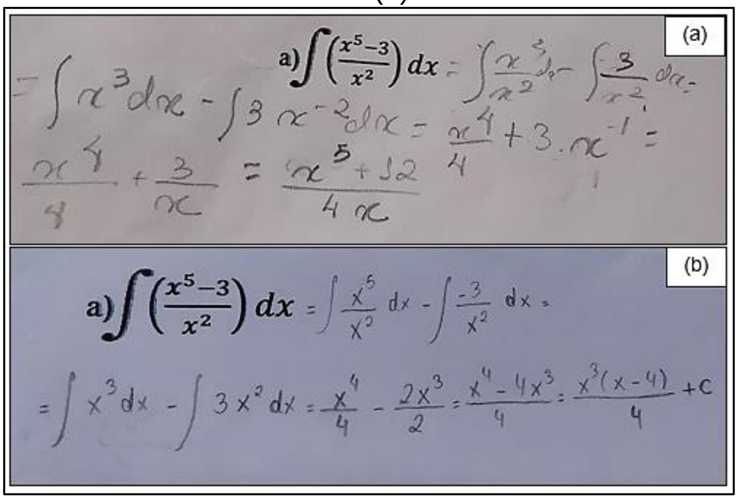
Figura 37 – Realização da AI-B

Fonte: Protocolo de Pesquisa.

A partir da análise das soluções apresentadas, foram identificadas certas dificuldades em determinados itens e questões.

Quanto ao item "a" da primeira questão, os participantes K5 e K6 utilizaram o mesmo raciocínio inicial, que foi separar as parcelas e as Integrais. Enquanto K5 desenvolveu esse item de forma correta, porém incompleta, tendo em vista que ele não somou o resultado encontrado com uma constante real (Figura 38a), o participante K6, ao representar a fração algébrica $\frac{-3}{x^2}$ na forma de produto, equivocadamente escreveu $3x^2$, conforme apresentado na figura 38b.

Figura 38 – Resolução do item "a" da primeira questão da AI-B apresentada por K5 (a) e por K6 (b)

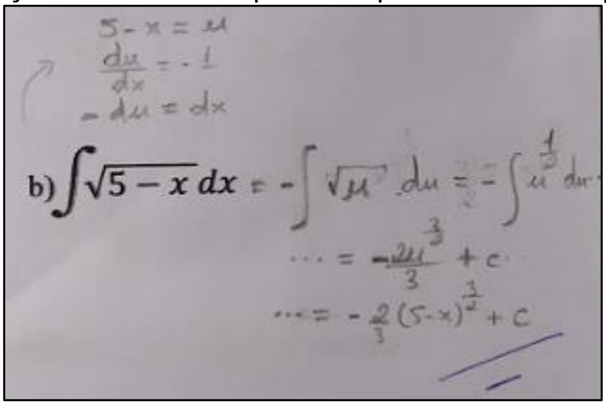


Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante K1 tentou seguir um caminho diferente, que foi realizar a divisão entre o numerador e denominador da fração pelo “método da chave”, porém só determinou o quociente e não deu continuidade à resolução. Os demais participantes não tentaram desenvolver uma solução para esse item, ou seja, deixaram-no em branco.

Já no item “b” da primeira questão, foi obtido um melhor desempenho. Os quatro participantes que o resolveram apresentaram a resposta correta. Eles utilizaram o método da substituição conforme pode ser visto na figura 39, em que é apresentada, a título de exemplo, a resolução de K2. Os participantes K3 e K6 não tentaram desenvolver uma solução para esse item.

Figura 39 – Resolução do item “b” da primeira questão da AI-B apresentada por K2



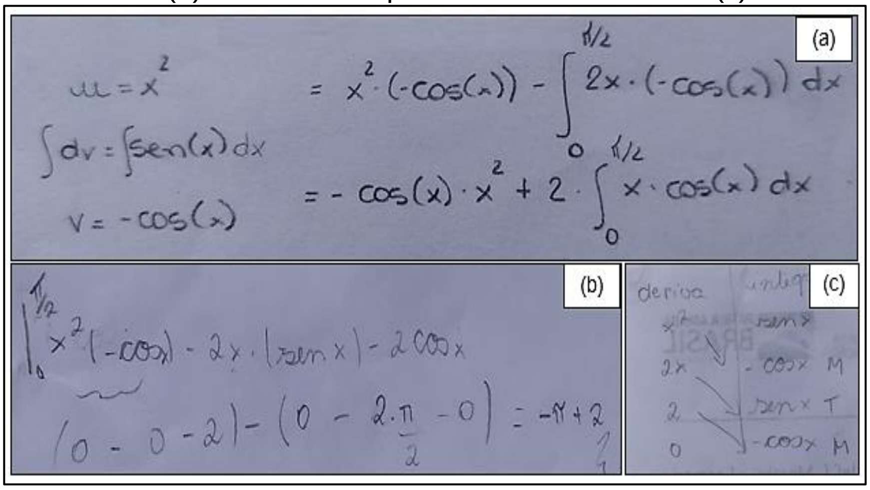
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi possível constatar, ao analisar as respostas da questão 1, que os participantes tiveram mais dificuldade em trabalhar algebricamente com a Integral que tinha em seu integrando uma fração. Verificou-se, ainda, que a maioria deles conseguia aplicar corretamente o método da substituição. Foi importante identificar o conhecimento desse método de resolução, pois na AF-B seria necessária sua aplicação.

No que se refere à segunda questão, a análise do item “a” revelou que a maioria dos participantes não aplicou a integração por partes repetida, que segundo Anton, Bivens e Davis (2007) se faz quando é necessário usar o método de integração por partes mais de uma vez no mesmo problema. Nesse item, quatro participantes iniciaram a resolução usando integração por partes, com isso se depararam com outra integral que também deveria ser resolvida pelo mesmo método, porém não prosseguiram. Na figura 40a é exposta a solução de K3 para exemplificar.

Somente K4, que não estava cursando a disciplina de Cálculo III pela primeira vez, chegou à resposta correta para esse item, resolvendo-o pelo método da integração por partes tabulada conforme apresentado nas figuras 40b e 40c. O participante K6 não apresentou solução para esse item.

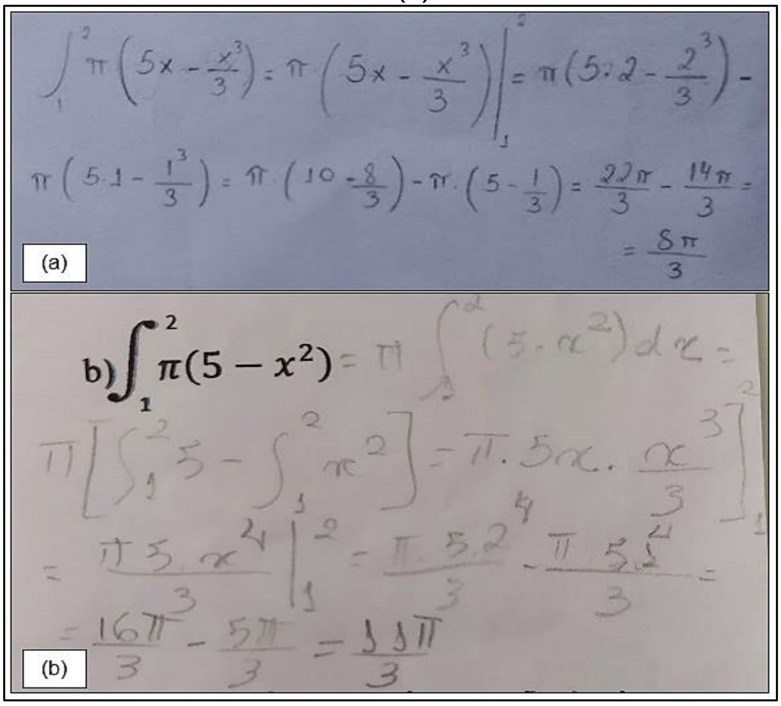
Figura 40 – Resolução do item “a” da segunda questão da AI-B apresentada por K3 (a) e por K4 (b) e tabela feita por K4 no verso da folha (c)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Somente dois participantes, K4 e K6, apresentaram solução correta para o item “b” da questão 2. Como ambos utilizaram o mesmo caminho para a resolução desse item, é mostrada apenas a resolução de K6 na figura 41a. O participante K5 separou as integrais e as calculou corretamente, porém, como pode ser visto na figura 41b, em vez de aplicar a propriedade distributiva, multiplicou todos os termos, levando-o à resposta errada. Os demais participantes não apresentaram solução para esse item.

Figura 41– Resolução do item “b” da segunda questão da AI-B apresentada por K6 (a) e por K5 (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

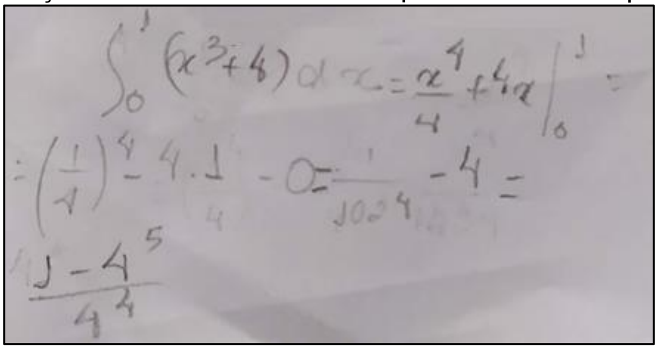
A análise das soluções apresentas pelos participantes na questão 2 foi importante para expor a falta de familiaridade deles com a integração por partes repetida e o desconhecimento do uso do método tabulado para facilitar seu desenvolvimento. Quanto ao item b, foi possivel constatar que dos três participantes que não apresentaram solução, tratou-se do único que não foi desenvolvido por K1 em toda AI-B.

Como as dificuldades referentes a esse item poderiam estar relacionadas à constante π presente no integrando, ele foi um dos escolhidos para ser analisado e corrigido no encontro seguinte. Além disso, foi incluído um item similar na lista de Exercícios Complementares.

Em se tratando da terceira questão, vale ser mencionado que foram apresentadas soluções para todos os itens pelos seis participantes.

Quanto ao item “a”, somente K5 resolveu de forma incorreta. Ele demonstrou compreender o cálculo de área sob uma curva por Integral Definida, mas errou ao considerar $\frac{x}{4}$ a base da potência $\frac{x^4}{4}$ e ao subtrair os termos ao invés de somar (o integrando desse item se trata de uma soma), conforme mostrado na figura 42.

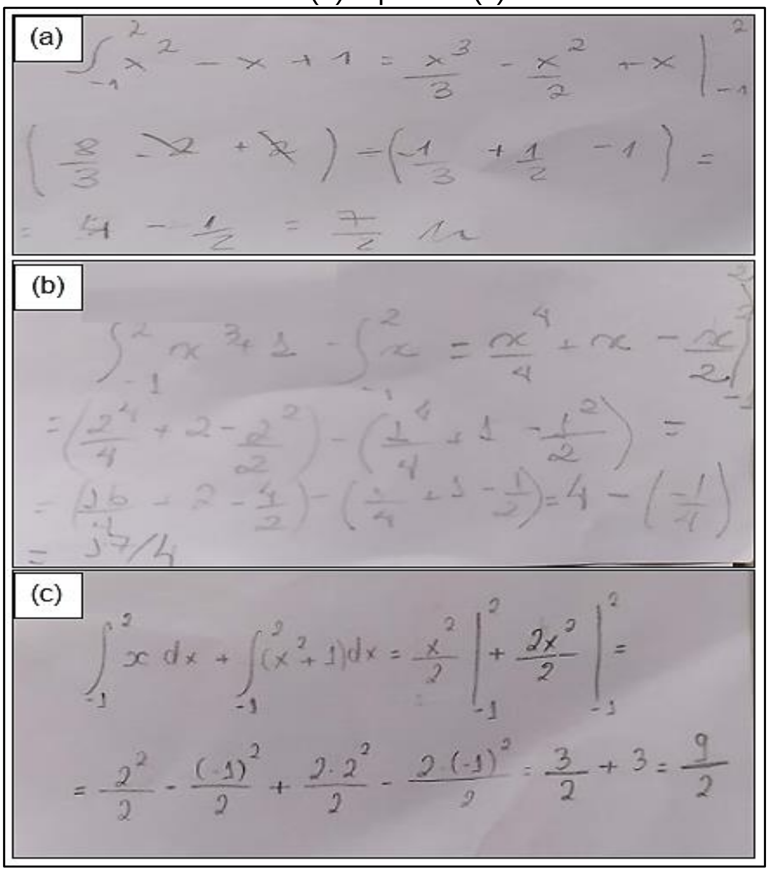
Figura 42 – Resolução do item “a” da terceira questão da AI-B apresentada por K5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com relação ao item “b”, metade dos participantes resolveu de forma correta. Quanto aos que apresentaram solução incorreta: i) K4 errou sinal ao substituir o limite inferior, em que escreveu $\frac{1}{2}$ ao invés de $-\frac{1}{2}$; ii) K5 copiou a lei da função incorretamente, em vez de $x^2 + 1$ copiou $x^3 + 1$; e iii) K6 somou as Integrais ao invés de subtrair. As soluções desses participantes são expostas na figura 43.

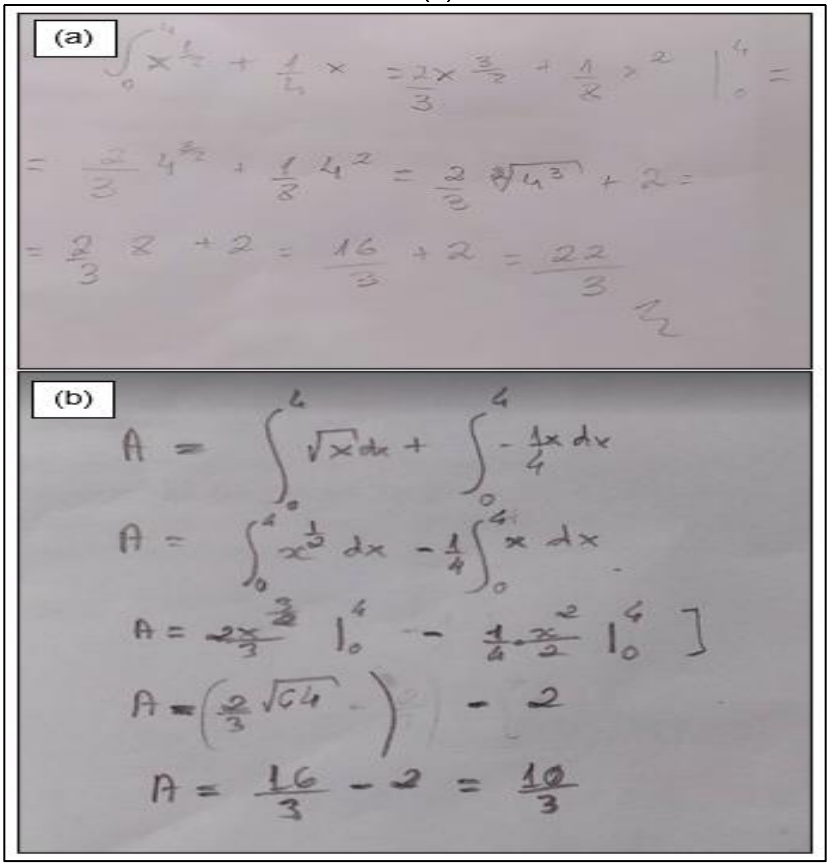
Figura 43 – Resolução do item “b” da terceira questão da AI-B apresentada por K4 (a), por K5 (b) e por K6 (c)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No que se refere ao item “c”, somente K4 resolveu corretamente (Figura 44a). Os demais participantes somaram as Integrais ao invés de subtrair. Com isso, não se atentaram que a integral de $g(x) = -\frac{1}{4}x$ terá valor negativo em $[0,4]$ e que, com isso, a operação de soma deveria ser realizada entre os módulos. Como exemplo do que foi feito pela maioria, a solução de K2 a esse item é mostrada na figura 44b.

Figura 44 – Resolução do item “c” da terceira questão da AI-B apresentada por K4 (a) e por K2 (b)



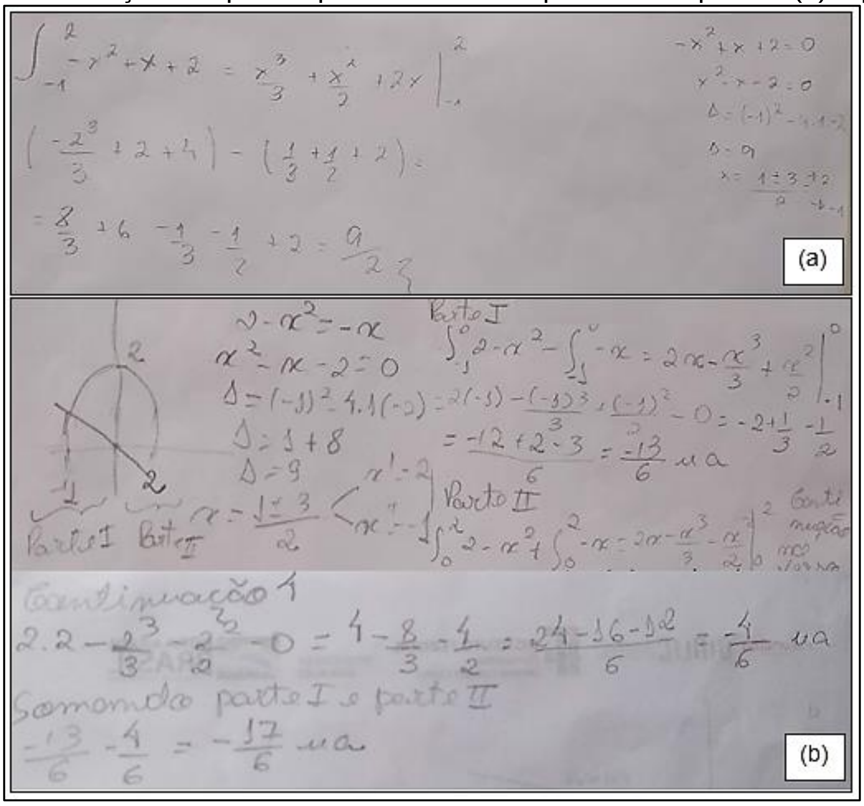
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi possível perceber, a partir das soluções apresentadas na questão 3, que os participantes compreendiam como realizar o cálculo de área sob uma curva utilizando Integral Definida. Porém, apresentaram limitações no cálculo de área entre duas curvas, o que sinaliza que o estudo desse tópico ocorreu de forma mecanizada e, possivelmente, que não foi feita uma abordagem que explorasse aspectos geométricos.

Quanto à quarta questão, somente K4 apresentou solução com a resposta correta (Figura 45a).

Os participantes K1 e K2 iniciaram a questão fazendo um esboço dos gráficos, igualando as funções e determinando os limites de integração, entretanto não deram continuidade à resolução. K5 iniciou da mesma forma, porém foi além, já que ele chegou a representar as Integrais Definidas a fim de determinar a área, porém cometeu erros ao efetuar os cálculos, como apresentado na figura 45b.

Figura 45 – Resolução da quarta questão da AI-B apresentada por K4 (a) e por K5 (b)



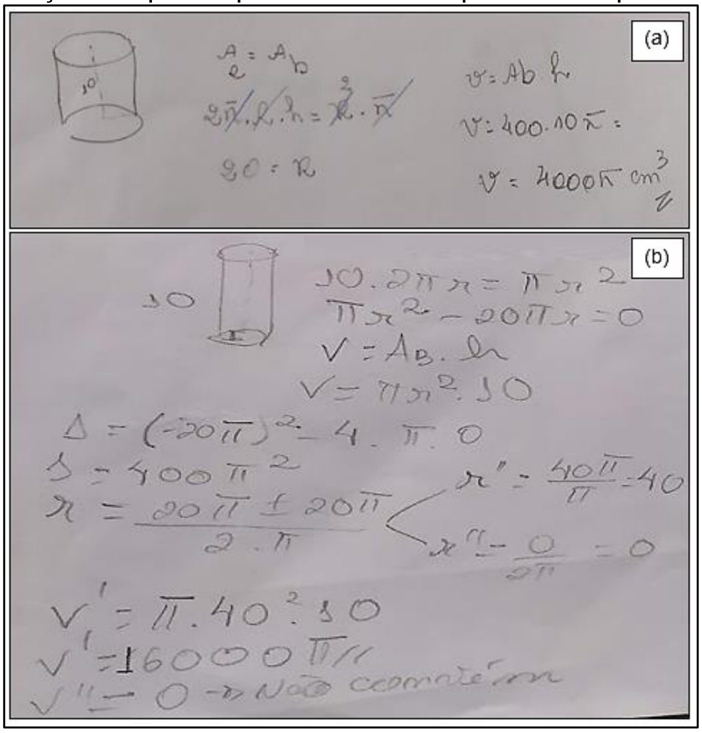
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como pode ser observado, K5 calculou a diferença entre as Integrais Definidas das funções no intervalo $[-1,0]$, mas cometeu erros matemáticos no momento da substituição dos limites de integração. Além disso, fez a soma entre as Integrais Definidas em $[0,2]$, todavia a função $g(x) = -x$ tem valor negativo nesse intervalo. Os participantes K3 e K6 não iniciaram o desenvolvimento de uma solução para essa questão.

Vale ressaltar que no momento da experimentação da sequência didática, os participantes K1, K2, K3 e K4 representaram os gráficos das funções dessa questão no GeoGebra para ajudá-los na visualização. Essa atitude mostra o uso desse *software*, por iniciativa própria, para auxiliar no estudo de conteúdos que exigem visualização geométrica. Tal prática já tinha sido indicada por esses participantes no QI-B. Observa-se, com isso, que os recursos tecnológicos têm influenciado, de forma marcante, os processos educativos, tornando os estudantes da atual sociedade cada vez mais tendenciados a utilizarem as tecnologias digitais disponíveis para auxiliarem no processo de aprendizagem (BORBA, SCUCUGLIA, GADANIDIS, 2014; COMETTI, 2018; PEREIRA *et al.*, 2017).

Em relação à quinta questão, todos os participantes que apresentaram solução realizaram um esboço de um cilindro com o intuito de auxiliar na visualização do sólido cujo volume deveria ser calculado. K1, K2 e K3 concluíram a resolução corretamente e, como exemplo, é apresentada a de K1 na figura 46a. No desenvolvimento da questão, K5 chegou a uma equação de segundo grau com incógnita “r”, porém resolveu incorretamente, como pode ser visto na figura 46b. Os demais participantes não apresentaram solução a esse item.

Figura 46 – Resolução da quinta questão da AI-B apresentada por K1 (a) e por K5 (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

As soluções apresentadas pelos participantes mostraram a importância da representação geométrica, já que todos que apresentaram solução realizaram um esboço do cilindro. Vale destacar, ainda, que a questão 5 se tratou da única questão/item que não foi respondida por K4.

No quadro 10 é exposta a forma com que cada questão/item da Atividade Inicial B foi apresentada pelos participantes e no quadro 11 é retratado, numericamente, o desempenho de cada participante nessa atividade.

Quadro 10 – Resumo das formas de solução da AI-B

Questão/Item	Solução não apresentada	Solução incompleta	Solução incorreta	Solução correta
Questão 1 – item a	K2; K3; K4	K1; K5	K6	-
Questão 1 – item b	K3; K6	-	-	K1; K2; K4; K5
Questão 2 – item a	K6	K1; K2; K3; K5	-	K4
Questão 2 – item b	K1; K2; K3	-	K5	K4; K6
Questão 3 – item a	-	-	K5	K1; K2; K3; K4; K6
Questão 3 – item b	-	-	K4; K5; K6	K1; K2; K3
Questão 3 – item c	-	-	K1; K2; K3; K5; K6	K4
Questão 4	K3; K6	K1; K2	K5	K4
Questão 5	K4; K6	-	K5	K1; K2; K3

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 11 – Desempenho dos participantes na AI-B

Participante	Solução não apresentada	Solução incompleta	Solução incorreta	Solução correta
K1	1	3	1	4
K2	2	2	1	4
K3	4	1	1	3
K4	2	0	1	6
K5	0	2	6	1
K6	4	0	3	2

Fonte: Elaboração própria.

Foi possível constatar, a partir dos dados levantados na análise da AI-B, que K4 foi o participante que apresentou o maior número de soluções corretas. Isso pode estar relacionado ao fato dele ter visto os conteúdos abordados nessa atividade mais de uma vez. Os participantes K3 e K6 deixaram um grande número de questões/itens sem fazer, sendo que K6 teve um número maior de erros nas soluções que foram apresentadas. Destaca-se que K5 desenvolveu solução para todos os itens, mas a maior parte estava incorreta, tendo em vista que ele cometeu um grande número de erros algébricos e aritméticos. Já K1 e K2 tiveram desempenho bem similar nas atividades, com o mesmo número de soluções corretas.

Quanto aos conhecimentos prévios dos participantes, a análise das resoluções que foram apresentadas mostrou, de forma geral, que eles: i) entendiam os procedimentos básicos para calcular Integrais Indefinidas e Definidas; ii) sabiam o método da substituição e o de integração por partes para o cálculo de Integrais; iii) conheciam a relação entre a Integral Definida e o cálculo de áreas sob curvas e entre curvas a partir de representações geométricas; iv) compreendiam que para o cálculo de áreas entre curvas, não sendo expostos os limites de integração, existe a possibilidade de determina-los igualando as leis das funções envolvidas na questão; v) reconheciam os elementos de um cilindro de revolução; e vi) conheciam a fórmula para o cálculo de volume de cilindro.

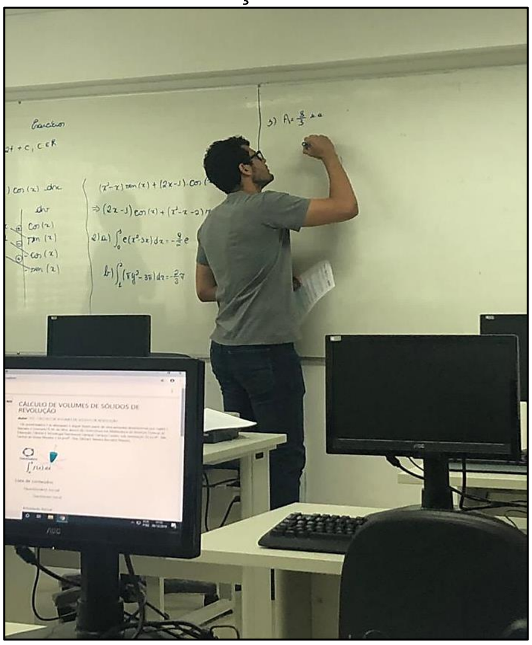
A análise das resoluções dos participantes também mostrou: i) a presença considerável de erros algébricos e aritméticos; ii) provável dificuldade de resolver uma integral que tem uma fração como integrando; iii) falta de conhecimento por parte da maioria sobre o método de integração por partes repetida; e iv) dificuldade quanto ao cálculo de áreas entre curvas nos casos em que, no intervalo tratado, uma curva está abaixo e a outra acima em relação ao eixo considerado na análise.

Diante desse contexto, como já mencionado, foram escolhidos alguns itens da Atividade Inicial, sobretudo aqueles nos quais se identificou algum obstáculo que tenha levado a maioria dos participantes a não apresentarem solução correta, para a correção e análise no início do segundo encontro. Assim sendo, os itens escolhidos foram o “a” da primeira questão, os “a” e “b” da segunda e o “c” da terceira. Como também já foi citado, elaboram-se os Exercícios Complementares, de modo a possibilitar aos participantes uma forma de reverem as dificuldades que tiveram durante o desenvolvimento da Atividade Inicial B e, com isso, se prepararem para as atividades a serem realizadas posteriormente.

A deliberação dessas medidas se deu baseando-se no princípio da consolidação proposto por Ausubel. De acordo com Moreira (2012), a consolidação está relacionada ao domínio de conhecimentos prévios antes da introdução de novos conhecimentos, sendo, pois, uma consequência imediata da teoria. Segundo o autor, é preciso insistir no domínio de conhecimentos prévios antes da apresentação de novos conhecimentos. Assim, no contexto da Aprendizagem Significativa, exercícios, resoluções de situações-problema, clarificações, discriminações, diferenciações, integrações são importantes antes de se introduzir novos conhecimentos (MOREIRA, 2012).

Por conta disso, no início do segundo encontro, que como já relatado ocorreu no dia 02 de dezembro de 2019, foi informado aos participantes que, a partir da correção e análise das resoluções apresentadas à Atividade Inicial B, identificou-se a necessidade de corrigir e discutir alguns itens com eles antes de dar continuidade às atividades planejadas (Figura 47).

Figura 47 – Momento da correção de determinados itens da AI-B



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O primeiro item tratado foi o “a” da primeira questão. Pediu-se que os participantes explicassem como haviam pensado em resolvê-lo. Um participante disse que fez separando as parcelas. Por conta disso, essa forma de solução foi desenvolvida no quadro. Destacou-se que por se tratar de uma fração imprópria, poderia ter sido feita a divisão entre o numerador e denominador, conforme iniciado por um participante, e dado prosseguimento trabalhando com o resto. Assim, a divisão foi calculada no quadro e explicado que a fração $\frac{x^5-3}{x^2}$ seria representada como $x^3 - \frac{3}{x^2}$ (quociente somado à razão entre o resto e divisor), o que já havia se chegado ao separar as parcelas.

O segundo item discutido foi o “a” da segunda questão. No momento foi informado aos participantes que grande parte buscou resolver corretamente utilizando o método da integração por partes. Com isso, esse item foi resolvido no quadro com a participação oral deles de acordo com o que haviam feito. Ao chegar na parte da solução apresentada pela maioria como resposta final, foi destacada a presença de uma segunda Integral que deveria ser resolvida pelo mesmo método. Assim, essa Integral foi calculada e, com isso, a resolução do item foi finalizada.

Ressaltou-se que nos casos em que há a necessidade de integração por partes mais de uma vez, e, que um dos fatores do integrando é um polinômio, é possível utilizar o método tabulado. Diante disso, foi realizada a resolução do item, também, pela integração por partes tabulada, de forma a explicar o método. Ressalta-se que essa explicação foi feita de forma detalhada, a fim de facilitar o entendimento por parte dos participantes, o que demandou um pouco mais de tempo do que o previsto. Ao final da explicação, os participantes comentaram que não conheciam o método de integração por partes repetidas e nem o tabulado. Esses comentários confirmam a hipótese levantada após a análise desse item.

O terceiro item analisado foi o “b”, também da segunda questão. Inicialmente foi perguntado qual deveria ser o procedimento adotado, considerando o π do integrando. Um participante respondeu que poderia ser “tirado da integral”, se referindo, com isso, à propriedade $\int c\, f(x)dx = c \int f(x)dx$. Dessa forma, foi destacado que como o π é uma constante real, poderia ser feito, de fato, o que o participante destacou. Assim, foi iniciada a solução no quadro, movendo essa constante do integrando e representando-a antes do sinal de integração. Nesse momento foi possível observar que os participantes já demonstraram compreender como dar prosseguimento à resolução. Diante disso, o item foi resolvido com a participação oral de todos.

Por fim, o quarto item analisado foi o “c” da terceira questão, que trata do cálculo de áreas entre curvas. Destacou-se que a maioria resolveu esse item fazendo a soma entre as Integrais Definidas de $f(x)$ e $g(x)$ em $[0,4]$ e, com isso, não foi levado em consideração que a Integral Definida de $g(x)$ possui valor negativo no intervalo indicado. Assim sendo, ressaltou-se que eles deveriam ter feito a soma entre os módulos das Integrais Definidas.

Baseando-se em autores como Anton, Bivens e Davis (2007), Flemming e Gonçalves (2006) e Leithold (1986), nesse momento foi informado que, de modo geral, em problemas que envolvem o cálculo de área entre duas curvas, deve ser identificada a curva que representa o contorno superior e, consequentemente, a que representa o contorno inferior da região. A partir disso, é necessário calcular a Integral Definida da diferença entre a função cujo gráfico é o superior e a função cujo gráfico é o inferior no intervalo indicado. Assim, foi realizada a resolução desse item no quadro calculando $\int_0^4 \left[\sqrt{x} - \left(-\frac{x}{4}\right)\right] dx$.

Quanto à quarta questão, foi apenas comentado que seria necessário identificar os limites de integração, igualando as leis das funções e desenvolvendo a equação. Com isso, informou-se que o cálculo da área poderia ser feito de modo semelhante ao item "c" da terceira questão. Por fim, foi informada a resposta final para que os participantes pudessem tentar resolvê-la em outro momento. Da mesma forma, foram feitos apenas breves comentários sobre os demais itens dessa atividade e apresentadas as respostas.

4.2.3 Análise das Atividades Investigativas B

A aplicação da AI-B se deu baseando-se nas orientações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Assim, primeiramente foi feita a introdução da tarefa, com a apresentação oral da proposta aos participantes. Em seguida, realizou-se a investigação, em que se optou por permitir o trabalho aos pares ou em pequenos grupos. Quanto à discussão dos resultados, em que os participantes relatam aos demais o trabalho realizado por eles, ocorreu ao final de cada parte da Atividade 1, como se percebeu ser necessário a partir do teste exploratório e, também, ao final da Atividade 2.

Feita a distribuição das atividades impressas, foi solicitado que os participantes acessassem o *link* que consta na orientação da atividade para serem direcionados ao livro GeoGebra "Cálculo de volumes de sólidos de revolução". Nesse momento, foi informado que havia sido feito o acréscimo de dois *applets* no livro e que esses seriam usados nas Atividades Investigativas conforme indicado nas Atividades 1 e 2.

Explicou-se que por meio das atividades, eles poderiam conjecturar, com base em seus conhecimentos, as fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida e que os *applets* os auxiliariam nesse processo. Informou-se que poderiam realizar essas atividades aos pares ou em grupos com o objetivo de possibilitar o trabalho conjunto na exploração da tarefa, buscando assim, facilitar a aprendizagem significativa ao viabilizar o intercâmbio e a negociação de significados (MOREIRA, 2012). Além disso, os participantes foram orientados que ficassem à vontade para perguntarem, caso surgissem quaisquer dúvidas.

Iniciando-se a investigação da Atividade 1, os participantes se mostraram muito reflexivos e foram necessários cerca de setenta minutos, já considerando o momento de discussão, para a conclusão da primeira parte.

Quanto ao item “d” dessa atividade, todos os participantes responderam de modo satisfatório, ou seja, todos compreenderam que à medida que o número de cilindros aumenta, mais próximo a soma dos volumes dos cilindros fica do volume do sólido de revolução tratado na atividade, o sólido S. Abaixo são transcritas as respostas apresentadas pelos participantes a esse item.

> “À medida que o número de cilindros aumenta, a soma dos volumes dos mesmos tende ao volume do sólido S.” (K1)
>
> “À medida que o número de cilindros aumenta, mais próximo a soma dos volumes dos cilindros fica do volume do sólido.” (K2)
>
> “A soma dos volumes dos cilindros tende ao volume do sólido à medida que aumenta o valor de “n”.” (K3)
>
> “Quanto maior o número de cilindros retos, mais a soma de seus volumes se iguala ao do sólido.” (K4)
>
> “Conforme n tende ao infinito, a soma das áreas dos cilindros se aproxima do volume de S.” (K5)
>
> “Ao aumentar o valor de “n”, o valor de “Vc” diminui e se aproxima cada vez mais do valor de “Vs”.” (K6)

Como é possível ver, os participantes K1 e K3 utilizaram o termo “tende” e K5 escreveu “tende ao infinito”. O uso dessas expressões, comumente presentes no estudo de limites, demonstram que os participantes relacionaram o que observaram no *applet* com conceitos que já eram de conhecimento deles.

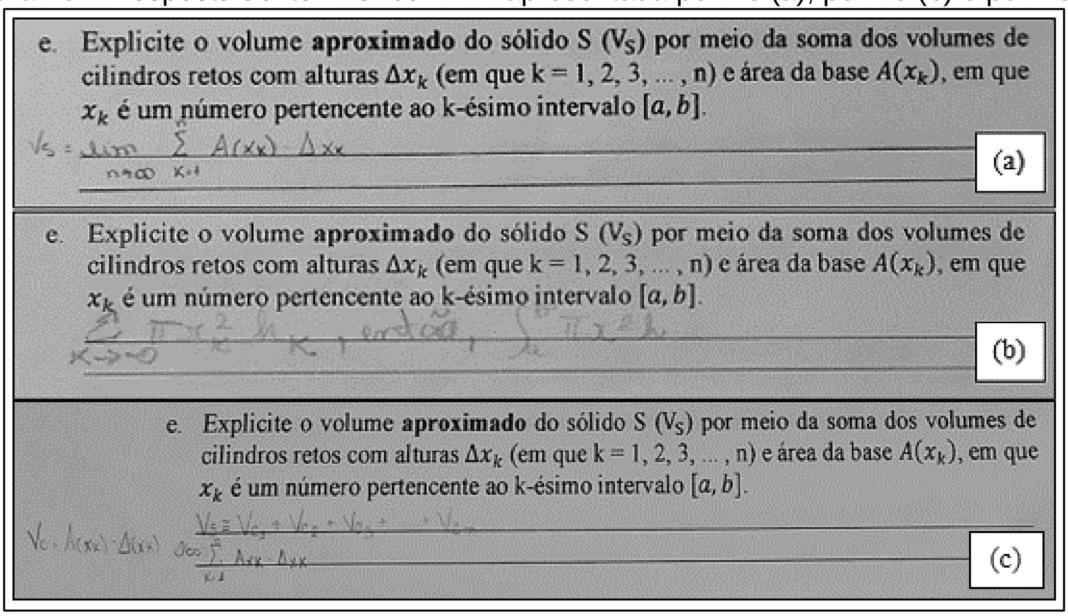
No item “e”, em que é necessário utilizar o conceito de volume de cilindro para expressar o volume aproximado de um sólido de revolução a partir da soma dos volumes de cilindros retos, o participante K1 escreveu:

"Será o somatório do volume dos cilindros." (K1)

Porém, ele não representou o que compreendeu usando notação matemática, conforme o esperado. Os participantes K2, K3 e K4 responderam a esse item utilizando a notação de somatório corretamente. No entanto, K3 foi além na sua resposta, escrevendo o limite para "n" tendendo ao infinito, conforme apresentado na figura 48a. O participante K5 buscou utilizar a notação de somatório, porém não considerou as informações presentes no item para representar a alturas e área da base dos cilindros retos. Na figura 48b é possível observar que esse participante já tentou representar a Integral Definida, demonstrando compreender a existência de sua relação com o somatório, porém não realizou o processo de forma correta.

Nesse item, K6 apresentou a soma de "n" parcelas, em que cada parcela representa o volume de um determinado cilindro reto. Como é possível observar na figura 48c, esse participante escreveu sua resposta na primeira linha, representou a fórmula para o cálculo de volume de um cilindro qualquer no canto esquerdo da página e reescreveu, na forma de observação, sua resposta na segunda linha após a discussão da atividade com os demais participantes. Ressalta-se que a ideia de resposta apresentada por K6 já era esperada para os casos dos participantes que tivessem dificuldade ou que preferissem não utilizar a notação de somatório.

Figura 48 – Resposta ao item "e" da A1-B apresentada por K3 (a), por K5 (b) e por K6 (c)



e. Explicite o volume **aproximado** do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$.

$V_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1} A(x_k) \cdot \Delta x_k$

(a)

e. Explicite o volume **aproximado** do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$.

$\sum_{k\to 0} \pi r_k^2 h_k$, então, $\int \pi x^2 h$

(b)

e. Explicite o volume **aproximado** do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$.

$V_c = h(x_k) \cdot \Delta(x_k)$

$V_s = V_{c_1} + V_{c_2} + V_{c_3} + \dots + V_{c_n}$

$\sum_{k=1}^{n} A x_k \cdot \Delta x_k$

(c)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O item “f”, que busca que o aluno relacione o número de cilindros e a altura de cada um deles, foi respondido de forma satisfatória por todos os participantes. Abaixo são transcritas as respostas apresentadas por eles a esse item.

> “Aumentando a quantidade de cilindros, a altura deles diminui.” (K1)
>
> “Quanto maior a quantidade de cilindros, menor a altura de cada um deles.” (K2)
>
> “Quanto maior a quantidade de cilindros, menor será suas alturas.” (K3)
>
> “Quanto maior a quantidade de cilindros, menor será a altura” (K4)
>
> “Quanto maior a quantidade de cilindros, menor será a altura dos cilindros, logo, a soma dos volumes dos cilindros se aproximará do volume do sólido quando a altura tende a 0.” (K5)
>
> “Quanto maior a quantidade de cilindros, menor será a altura de cada um deles.” (K6)

Destaca-se a resposta de K5, que demonstrou já ter identificado que as alturas tenderão a zero quando se aumenta o número de cilindros retos. Essa constatação é de grande relevância para a dedução das fórmulas desejadas nas Atividades Investigativas.

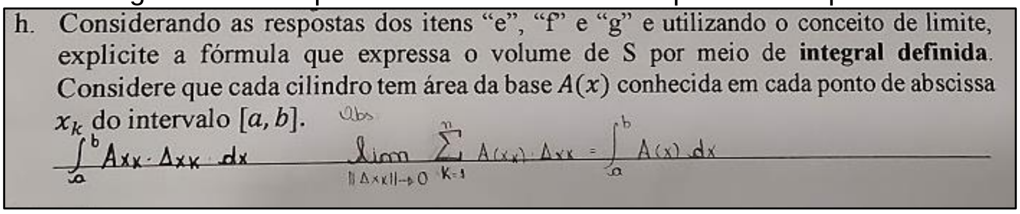
No item “g”, todos os participantes mostraram compreender que quanto menor a altura dos cilindros retos, mais próximo é possível ficar do volume de um sólido de revolução. Abaixo, são transcritas as respostas apresentadas por eles a esse item.

> “Ao diminuir a altura dos cilindros, a soma dos volumes dos cilindros se aproxima do volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de f(x).” (K1)
>
> “Quanto menor a altura de cada cilindro, mais próximo a soma dos volumes dos cilindros ficam do volume do sólido S.” (K2)
>
> “Quanto menor a altura de cada cilindro, mais se aproximará a soma dos volumes dos cilindros ao volume do sólido S” (K3)
>
> “Quando a altura diminui mais os volumes se aproximam.” (K4)
> “h_k é a altura dos cilindros, quando $k \to \infty$, $h_k \to 0$, logo Vs fica cada vez mais próximo de Vc.” (K5)
>
> “A soma dos volumes dos cilindros se aproxima do volume do sólido quando a altura tende a zero.” (K6)

Destacam-se as respostas apresentadas por K5 e K6 a esse item. Eles mostraram ter identificado uma informação muito importante para a compreensão do método de aproximação do volume de um sólido de revolução por meio de cilindros retos, que é a relação entre os volumes desses sólidos quando as alturas dos cilindros tendem a zero. Como já foi comentado, o participante K5 utilizou notação diferente da apresentada nas atividades para a altura dos cilindros, mas, mesmo assim, atingiu ao objetivo do item.

O item “h”, cujo objetivo é de expressar o volume de um sólido de revolução por meio de Integral Definida utilizando o conceito de limite, não foi respondido por K1 e K2. O participante K4 apresentou resposta correta e os demais participantes cometeram erro quanto ao processo de tomar o limite sobre a soma de Riemann por desconsiderarem que “O comprimento de intervalo Δx_k na soma de Riemann torna-se o dx na integral definida.” (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007, p. 443). Na figura 49, é apresentada, a título de exemplo, a resposta de K6 a esse item. No início da linha, é possível observar a resposta dada pelo participante, e, em seguida, a sua resposta reescrita após a discussão da atividade com os demais participantes.

Figura 49 – Resposta ao item “h” da A1-B apresentada por K6


h. Considerando as respostas dos itens “e”, “f” e “g” e utilizando o conceito de limite, explicite a fórmula que expressa o volume de S por meio de **integral definida**. Considere que cada cilindro tem área da base $A(x)$ conhecida em cada ponto de abscissa x_k do intervalo $[a, b]$.

abs

$\int_a^b A x_k \cdot \Delta x_k \; dx$ $\quad \lim_{\|\Delta x_k\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b A(x)\, dx$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

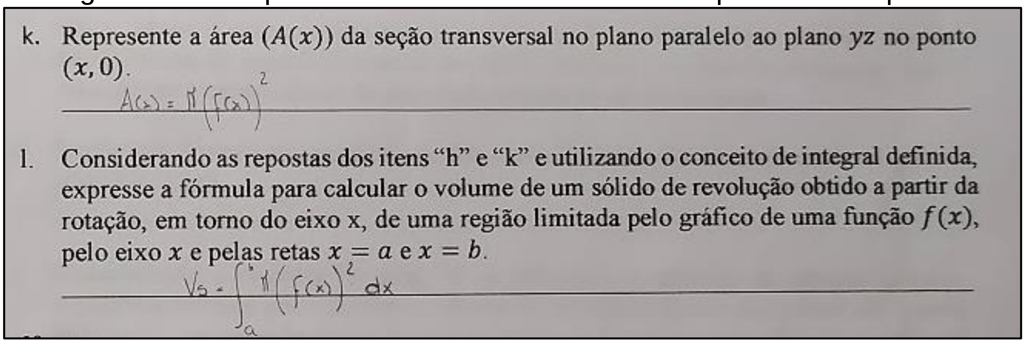
Supõe-se que a dificuldade encontrada pelos participantes tenha se dado pelo fato de a definição de Integral Definida ter sido, possivelmente, aprendida de forma mecânica. Como apresentado por Moreira (2012), a aprendizagem mecânica é praticamente sem significado, puramente memorística e não requer a compreensão. Isso, talvez, justifique o porquê de os participantes terem informado, no primeiro encontro, que conheciam a definição apresentada, mas ao se depararem com uma situação não habitual na qual era exigido o uso desse conhecimento, apresentarem limitações.

Identificado, durante a discussão que os participantes estavam com dificuldades nesse item, foi pedido que eles consultassem o Resumo Teórico. Nesse momento, realizou-se uma análise da definição, relacionando-a ao que haviam observado no *applet,* ou seja, ao volume de um sólido de revolução, de modo a esclarecer e facilitar o entendimento. Após esse momento, observou-se que os participantes conseguiram sanar suas dúvidas e responder corretamente o item.

A segunda parte dessa atividade, que objetiva que o aluno expresse, por meio de Integral Definida, o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno dos eixos abscissas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, ocorreu em cerca de 20 minutos. Não foi observada dificuldade durante sua realização e todos os participantes expressaram corretamente a fórmula para o cálculo do volume de um sólido de revolução considerando a curva que limita a região rotacionada. Assim, é possível afirmar que os objetivos dos itens dessa parte da A1-B foram atingidos.

Para exemplificar, são apresentadas, na figura 50, as respostas apresentadas por K3 aos itens “k” e “l” dessa atividade.

Figura 50 – Respostas aos itens “k” e “l” da A1-B apresentadas por K3



k. Represente a área ($A(x)$) da seção transversal no plano paralelo ao plano yz no ponto $(x, 0)$.

$A(x) = \pi(f(x))^2$

l. Considerando as repostas dos itens “h” e “k” e utilizando o conceito de integral definida, expresse a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

$V_S = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final do segundo encontro, as Atividades Investigativas foram recolhidas. Foi feita, também, a distribuição dos Exercícios Complementares na forma impressa para que os participantes pudessem rever as dificuldades que se depararam na Atividade Inicial antes do próximo encontro.

Foi pedido que eles enviassem fotos das suas soluções por meio da seção “Envio de arquivo”, criada no livro GeoGebra, para que essas pudessem ser analisadas. Embora tenha sido ressaltada a importância desses exercícios, três participantes não enviaram suas soluções. Diante disso, não foi feita uma análise prévia das respostas enviadas.

Não eram conhecidas as possíveis causas que levaram metade dos participantes a não enviarem as soluções dos exercícios. Por isso, no início do terceiro encontro, que ocorreu no dia 09 de dezembro de 2019 como já informado no Capítulo

3, foi perguntado, aos participantes que não efetuaram o envio, se eles haviam feito os exercícios, mas que por algum motivo não conseguiram enviar. Nesse momento, eles informaram que não fizeram por falta de tempo.

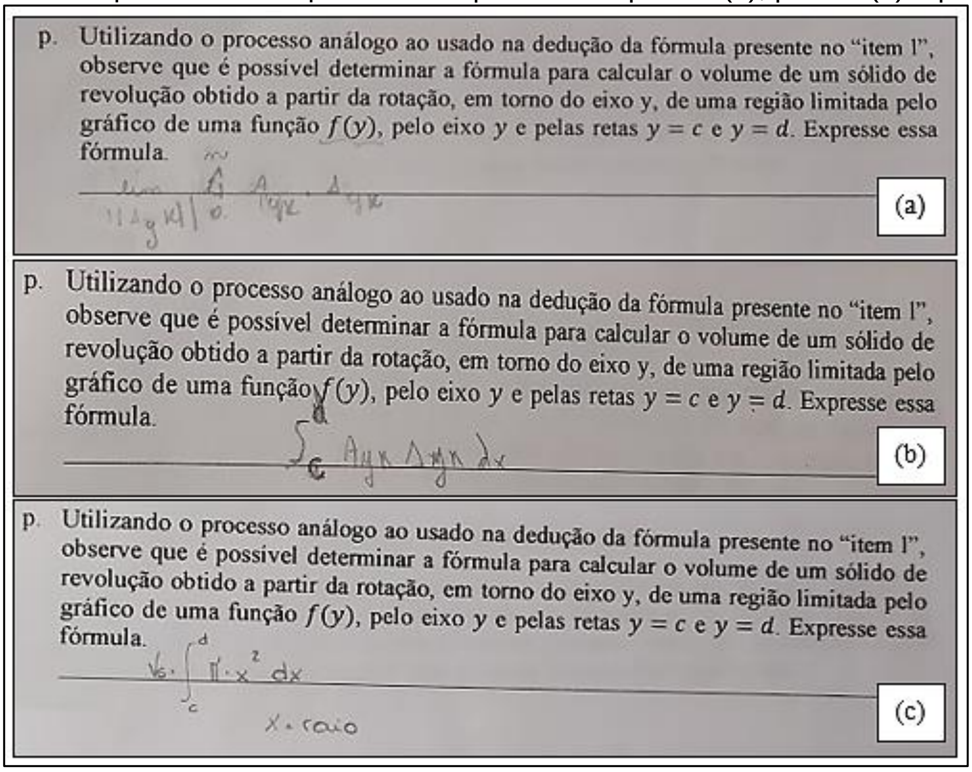
Diante disso, os exercícios foram resolvidos juntamente com os presentes, sendo estimulada a participação de todos. Assim sendo, as soluções foram feitas no quadro a partir do que ia sendo falado por eles.

Pôde-se observar que os que haviam feito conseguiram chegar às respostas corretas e os que não haviam feito, participaram das soluções, de modo a expressarem entendimento satisfatório quanto às resoluções dos exercícios. Após esse momento, as Atividades Investigativas foram devolvidas aos participantes.

A terceira parte dessa atividade, na qual somente no item “p” é necessário o registro de uma resposta, foi feita em, aproximadamente, 10 minutos. Destaca-se, novamente, que essa parte da atividade objetiva que o aluno expresse, por meio de Integral Definida, o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno dos eixos das ordenadas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

Nesse sentido, o participante K1 respondeu a esse item pelo limite do somatório, porém cometeu equívocos de notação e não realizou, conforme solicitado, a representação na forma de Integral Definida (Figura 51a). K2, como ilustrado na figura 51b, desconsiderou que Δy_k na Integral Definida é representado pelo dy e usou, indevidamente, a representação com o dx. Além disso, havia escrito “a” e “b” como limites de integração, sobrepondo-os com “c” e “d”, porém não se sabe se isso foi feito antes ou após a discussão das respostas. Os participantes K3 e K5 consideraram, erroneamente, o raio das seções transversais igual a “x”, como pode ser visto na figura 51c, em que é apresentada a solução de K3. Somente K4 e K6 responderam satisfatoriamente a esse item.

Figura 51 – Resposta ao item “p” da A1-B apresentada por K1 (a), por K2 (b) e por K3 (c)



p. Utilizando o processo análogo ao usado na dedução da fórmula presente no “item l”, observe que é possível determinar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo y, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$. Expresse essa fórmula.

$\lim_{\|\Delta_y k\| \to 0} \sum A_{qx} \cdot \Delta_{qx}$

(a)

p. Utilizando o processo análogo ao usado na dedução da fórmula presente no “item l”, observe que é possível determinar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo y, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$. Expresse essa fórmula.

$\int_c^d Ayx\, \Delta yx\, dx$

(b)

p. Utilizando o processo análogo ao usado na dedução da fórmula presente no “item l”, observe que é possível determinar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo y, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$. Expresse essa fórmula.

$V_s \cdot \int_c^d \pi \cdot x^2\, dx$

x = raio

(c)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

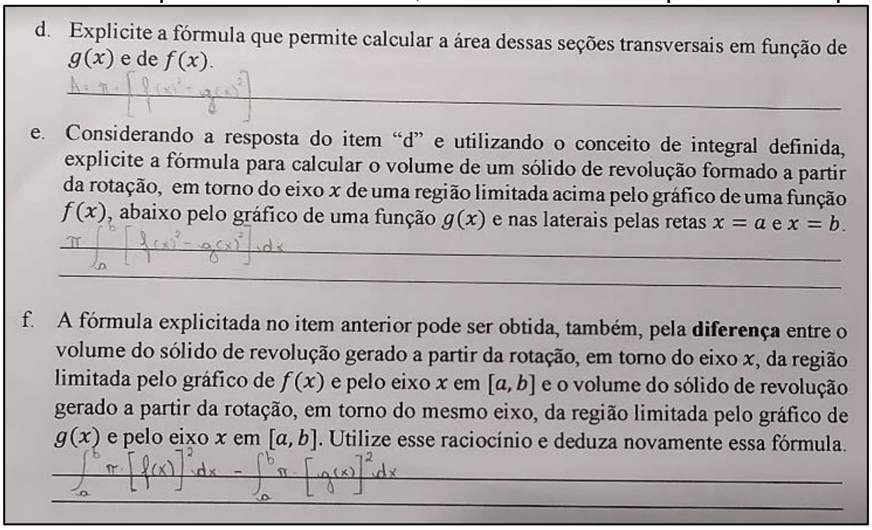
Provavelmente, a dificuldade referente a esse item se justifica pela mudança da variável x para a variável y. Isso porque, até essa parte da atividade, os participantes vinham desenvolvendo a compreensão do volume do sólido de revolução formado pela rotação em torno do eixo x, o que pode ter causado problemas ao terem que pensar na rotação, em torno do eixo das ordenadas, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$ e pelo eixo y.

Quanto à Atividade 2 B (Figura 52), feita em cerca de 20 minutos já considerando o tempo de discussão, todos os participantes atingiram o objetivo de expressarem a fórmula para o cálculo de volumes de sólidos de revolução formados pela rotação de regiões limitadas por duas curvas. No item “d”, todos indicaram corretamente a fórmula da área das seções transversais, com formato de coroas circulares, em função de $f(x)$ e $g(x)$. No item “e” todos participantes demonstraram que entenderam que o volume de um sólido pode ser obtido calculando a Integral da área da seção transversal de um extremo ao outro do sólido. Com relação ao item “f”, todos os participantes representaram corretamente a fórmula solicitada, ou seja, por meio da diferença dos volumes de dois sólidos. Nesse item, ninguém desenvolveu a fórmula, utilizando-se de propriedades matemáticas, para comparar com a representada no item anterior e verificar se estavam corretas. Foram escolhidas, a título de exemplo, as respostas de K6 aos itens da Atividade 2 (Figura 53).

Figura 52 – Realização da A2-B

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 53 – Respostas aos itens “d”, “e” e “f” da A2-B apresentadas por K6



d. Explicite a fórmula que permite calcular a área dessas seções transversais em função de $g(x)$ e de $f(x)$.

$A = \pi \cdot [f(x)^2 - g(x)^2]$

e. Considerando a resposta do item “d” e utilizando o conceito de integral definida, explicite a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução formado a partir da rotação, em torno do eixo x de uma região limitada acima pelo gráfico de uma função $f(x)$, abaixo pelo gráfico de uma função $g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$.

$\pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] \, dx$

f. A fórmula explicitada no item anterior pode ser obtida, também, pela **diferença** entre o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$ e o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do mesmo eixo, da região limitada pelo gráfico de $g(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$. Utilize esse raciocínio e deduza novamente essa fórmula.

$\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \, dx - \int_a^b \pi \cdot [g(x)]^2 \, dx$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

É relevante comentar a notável diferença do tempo necessário para a conclusão da primeira parte da Atividade 1 em comparação com as demais partes dessa atividade e até mesmo com a Atividade 2. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) pode ser normal o tempo inicial da realização de uma investigação matemática ser, de fato, mais extenso. Como foi observado, no início, os participantes se mostraram muito pensativos e solicitaram esclarecimentos com mais frequência e ao final das Atividades Investigativas estavam respondendo aos itens de forma mais natural e mais independente.

Quanto às discussões realizadas, observou-se que, de início, os participantes estavam mais retraídos e com receio de explicitarem suas conclusões, sendo necessário um esforço maior para que participassem e apresentassem o raciocínio utilizado e justificativas. Já ao final, estavam mais participativos, partilhando com mais naturalidade suas conclusões. Isso revela que no decorrer da investigação, os participantes ficaram mais à vontade nos momentos de discussão e puderam desenvolver “[...] a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação.” (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2013, p. 41).

4.2.4 Análise da Atividade Final B

Como já foi mencionado no capítulo anterior, ao final das Atividades Investigativas B foi distribuída a Atividade Final B para que pudesse ser verificado se os alunos saberiam utilizar as fórmulas conjecturadas (Figura 54). Nesse momento, já havia sido disponibilizado, no livro GeoGebra, o *applet* elaborado para ser utilizado nessa atividade, bem como o QF que deveria ser respondido ao término da AF-B.

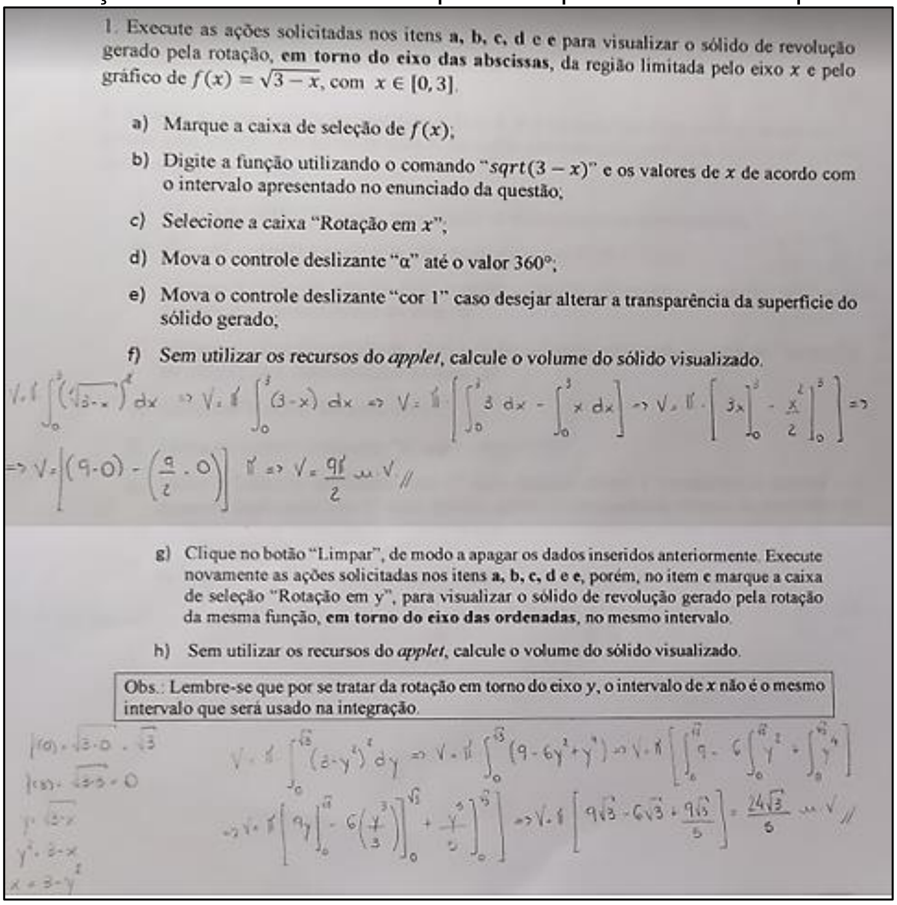
Figura 54 – Realização da AF-B

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No decorrer dessa atividade, observou-se que os participantes estavam muito empenhados em apresentar soluções corretas. Ressalta-se que eles não apresentaram dificuldades, a partir das instruções apresentadas nas questões, em utilizar o *applet* “Representação de sólidos de revolução” para auxiliá-los na visualização espacial.

Na primeira questão dessa atividade foram apresentadas soluções corretas por todos participantes nos dois itens em que eram solicitados cálculos, o “f” e o “h”. É importante ressaltar que a fórmula para resolver o item “h” foi expressa de forma incorreta pela maioria dos participantes (K1, K2, K3 e K5) no item “p” da Atividade 1. Entretanto, após o momento de discussão, os que haviam respondido corretamente esse item, puderam partilhar seus conhecimentos com os demais, propiciando assim, que todos compreendessem e adquirissem aptidão para realizarem de forma correta o cálculo do volume de um sólido de revolução formado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, de uma região limitada por uma curva e pelo eixo y. Como exemplo, na figura 55, são apresentadas as soluções de K3 a essa questão.

Figura 55 – Resoluções dos itens “f” e “h” da primeira questão da AF-B apresentadas por K3



1. Execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d e e** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo das abscissas**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{3-x}$, com $x \in [0,3]$.

a) Marque a caixa de seleção de $f(x)$;

b) Digite a função utilizando o comando “$sqrt(3-x)$” e os valores de x de acordo com o intervalo apresentado no enunciado da questão;

c) Selecione a caixa “Rotação em x”;

d) Mova o controle deslizante “α” até o valor 360°;

e) Mova o controle deslizante “cor 1” caso desejar alterar a transparência da superfície do sólido gerado;

f) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

$$V = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{3-x}\right)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^3 (3-x)\, dx \Rightarrow V = \pi \left[\int_0^3 3\, dx - \int_0^3 x\, dx\right] \Rightarrow V = \pi \cdot \left[\, 3x\Big|_0^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left[(9-0) - \left(\frac{9}{2} - 0\right)\right]\pi \Rightarrow V = \frac{9\pi}{2} \text{ u.v}$$

g) Clique no botão “Limpar”, de modo a apagar os dados inseridos anteriormente. Execute novamente as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d e e**, porém, no item c marque a caixa de seleção “Rotação em y”, para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação da mesma função, **em torno do eixo das ordenadas**, no mesmo intervalo.

h) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Obs.: Lembre-se que por se tratar da rotação em torno do eixo y, o intervalo de x não é o mesmo intervalo que será usado na integração.

$f(0) = \sqrt{3-0} = \sqrt{3}$

$f(3) = \sqrt{3-3} = 0$

$y = \sqrt{3-x}$

$y^2 = 3-x$

$x = 3-y^2$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)^2\, dy \Rightarrow V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (9-6y^2+y^4) \Rightarrow V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} 9 - 6\int_0^{\sqrt{3}} y^2 + \int_0^{\sqrt{3}} y^4\right]$$

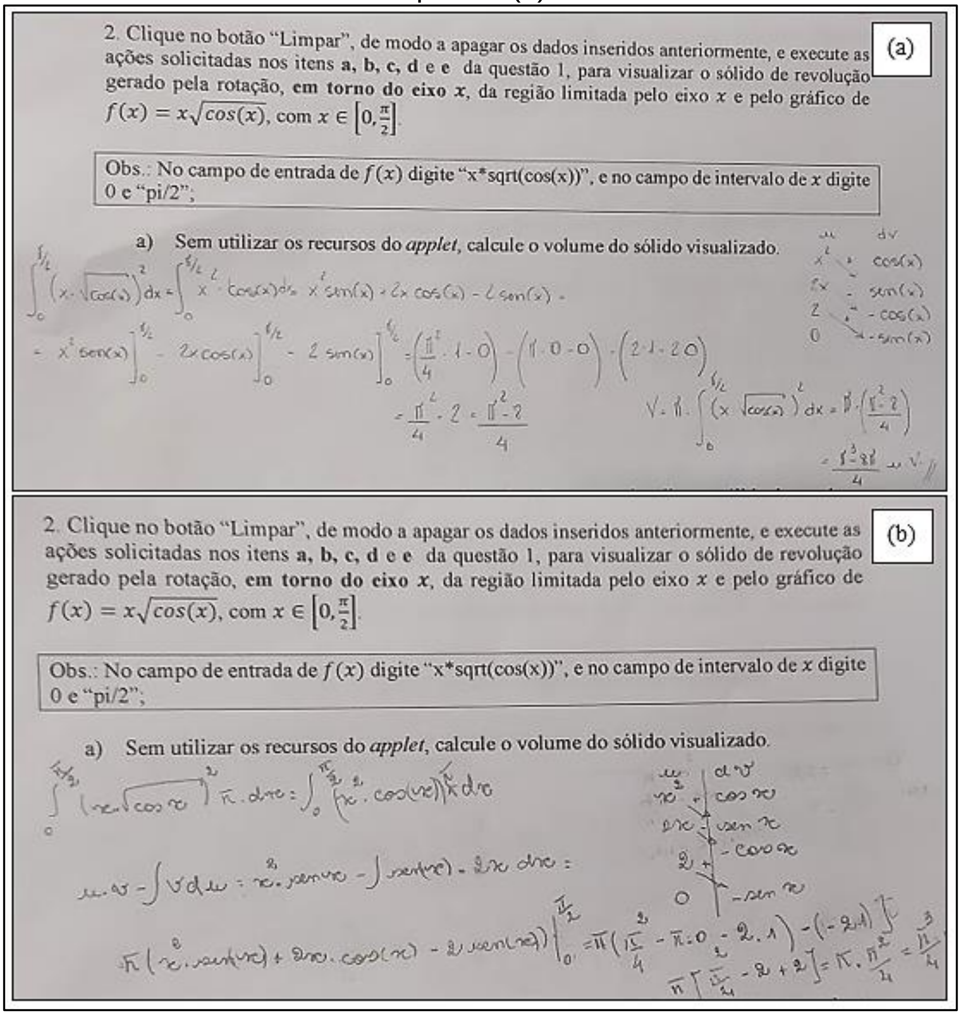
$$\Rightarrow V = \pi \left[\, 9y\Big|_0^{\sqrt{3}} - 6\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{y^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{3}} \right] \Rightarrow V = \pi \left[9\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5}\right] = \frac{24\sqrt{3}}{5} \text{ u.v}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão dessa atividade, todos os participantes calcularam a Integral corretamente utilizando o método de integração por partes tabulado. Na figura 56a é exposta a solução de K3 a essa questão para exemplificar.

Porém, os participantes K1 e K2 cometeram erro ao substituírem o limite de integração inferior para o cálculo da Integral Definida. Ambos não se atentaram que na substituição da variável x em "$2 \cdot x \cdot \cos x$" por 0 resulta em 0. Isso ocorreu, possivelmente, por esquecerem de substituir o fator x desse produto por zero conforme pode ser observado na figura 56b, em que é apresentada a solução de K1 a essa questão.

Figura 56– Resolução do item "a" da segunda questão da AF-B apresentada por K3 (a) e por K1 (b)



(a)

2. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d** e **e** da questão 1, para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo** x, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Obs.: No campo de entrada de $f(x)$ digite "x*sqrt(cos(x))", e no campo de intervalo de x digite 0 e "pi/2";

a) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

(b)

2. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d** e **e** da questão 1, para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo** x, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Obs.: No campo de entrada de $f(x)$ digite "x*sqrt(cos(x))", e no campo de intervalo de x digite 0 e "pi/2";

a) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Mesmo diante do erro cometido por K1 e K2, é válido destacar que um problema identificado na Atividade Inicial – a falta de conhecimento dos participantes, exceto por parte de K4, do método de integração por partes repetida – pôde ser solucionado. Assim, os participantes utilizaram esse conhecimento adquirido para resolver uma questão que aborda o cálculo de volumes de sólidos de revolução.

Quanto à terceira questão, todos os participantes conseguiram resolver corretamente, evidenciando, assim, terem compreendido como calcular o volume de um sólido de revolução formado a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região limitada por duas curvas. Na figura 57 é destacada a solução de K3 a título de exemplo.

Figura 57 – Resolução do item "h" da terceira questão da AF-B apresentada por K3

3. Execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d, e, f e g** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo** x, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$.

$(x^2)^2 (\sqrt{x})^2$

a) Clique no botão "Limpar", para apagar os dados inseridos anteriormente;

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

b) Determine algebricamente os valores de x em que $f(x) = g(x)$;

$x(x^3-1)=0$ $\quad x=0$

c) Marque a caixa de seleção $f(x)$ e digite a função utilizando o comando "x^2" e os valores de x determinados no item "b"

ou $x^3-1=0$

$x^3=1$

d) Marque a caixa de seleção de $g(x)$ e digite a função utilizando o comando "sqrt(x)" e os valores de x determinados no item "b"

$x=\sqrt[3]{1}$

$x=1$

e) Selecione a caixa "Rotação em x";

f) Mova o controle deslizante "α" até o valor 360°;

g) Mova o controle deslizante "cor 1" caso desejar alterar a transparência externa e o controle deslizante "cor 2" caso desejar alterar a transparência interna da superfície do sólido gerado.

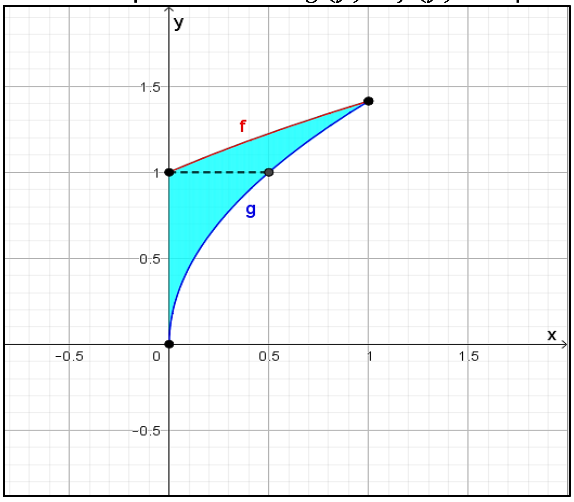
h) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

$$V = -\pi\int_0^1 (x^2)^2 dx + \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx \Rightarrow V = -\pi\cdot\int_0^1 x^4\,dx + \pi\cdot\int_0^1 x\,dx \Rightarrow V = -\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 + \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}\ \text{u.v.}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta questão, todos os participantes observaram que f e g dadas estão em função de x e as escreveram corretamente em função de y, além de identificarem os limites de integração 0 e $\sqrt{2}$. Porém, não compreenderam que, como apresentado na figura 58, a região rotacionada em torno do eixo y é formada por duas partes (divididas pelo segmento tracejado).

Figura 58 – Região formada pelas curvas $g(y)$ e $f(y)$ da quarta questão da AF-B

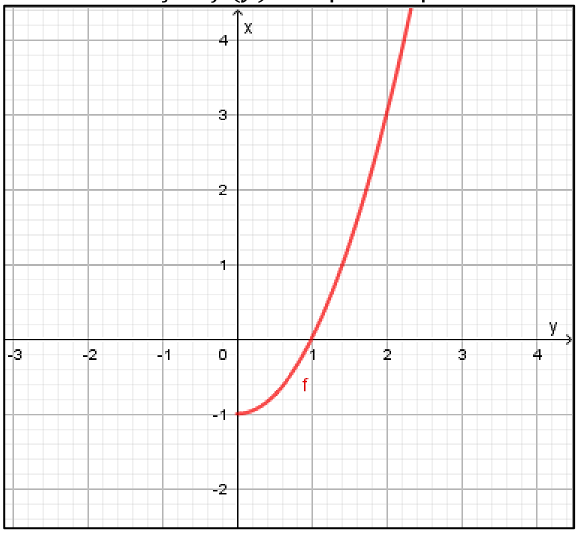


Fonte: Elaboração própria utilizando *software* o GeoGebra.

A parte inferior é limitada pelo eixo y e pelo gráfico de $g(y)$ com $0 \leq y \leq 1$. Já a parte superior, é limitada pelos gráficos de $g(y)$ e $f(y)$ com $1 \leq y \leq \sqrt{2}$. Sendo assim, para calcular o volume do sólido pedido na questão, é necessário somar o volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, da região limitada por $g(y)$ e pelo eixo y de $y = 0$ até $y = 1$ com o volume do sólido formado pela rotação, em torno do mesmo eixo, da região limitada por $g(y)$ e $f(y)$ de $y = 1$ até $y = \sqrt{2}$.

Os participantes chegaram a iniciar um debate sobre a forma correta de resolver essa questão. Eles estavam com dúvidas sobre os limites de integração que deveriam ser usados, uma vez que buscaram resolver essa questão pela diferença de volumes, a partir da fórmula deduzida no item “f” da Atividade 2. Nesse momento, foi verificado que alguns haviam observado que neste caso os limites de integração seriam diferentes, mas não compreenderam o que deveriam fazer. Essa dúvida os levou a utilizar, equivocadamente, os limites de integração 0 e $\sqrt{2}$ em ambas as Integrais da subtração que calcularam. Com isso, não levaram em consideração que a função $f(y)$ é negativa no intervalo de $0 \leq y \leq 1$ (Figura 59).

Figura 59 – Função $f(y)$ da quarta questão da AF-B



Fonte: Elaboração própria utilizando o *software* GeoGebra.

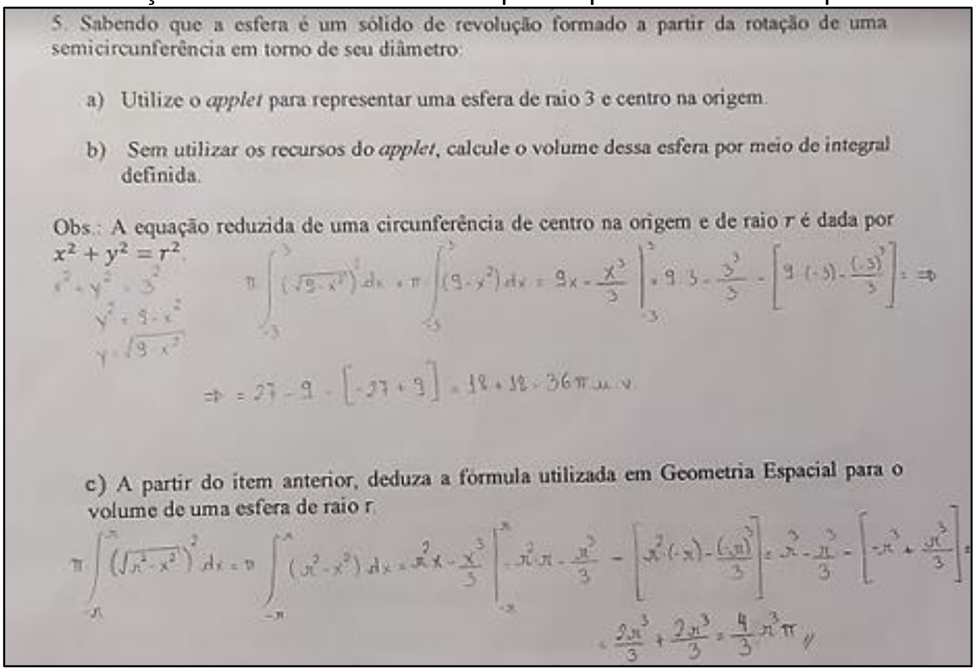
A quinta questão foi feita corretamente por todos os participantes. No item "b" dessa questão, todos conseguiram calcular o volume da esfera conforme solicitado. Nesse momento foi possível observar que a maioria buscou verificar se estavam corretos, ao realizarem os cálculos, também, por meio da fórmula $v = \frac{4}{3}\pi r^3$. Com isso, mostraram o uso de um conhecimento prévio específico e relevante para dar significado a um novo conhecimento – o cálculo do volume de esfera por Integral Definida – o que caracteriza aprendizagem significativa subordinada (MOREIRA, 2012).

Quanto ao item "c", todos conseguiram deduzir a fórmula corretamente. Nesse momento da experimentação, o participante K4 informou que não conhecia a fórmula que deduziu, pois estava cursando a disciplina Geometria II do curso e, com isso, ainda não havia estudado os conteúdos de Geometria Espacial, que inclui o conteúdo de Cilindro. A informação apresentada por K4 talvez esclareça o porquê da questão 5 da Atividade Inicial B se tratar da única questão/item que não foi respondida por ele na referida atividade. Além disso, é possível que o fato de K4 não ter estudado os tópicos de Geometria Espacial tenha influenciado no seu desempenho na aprendizagem do conteúdo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida, conforme indicado no Questionário Inicial. Todavia, na realização das atividades desta pesquisa, esse fato pode não ter tido muita relevância, uma vez que não se tratou da primeira vez que ele viu o conteúdo abordado.

Com relação aos demais participantes, todos estavam cursando a disciplina de Geometria IV e já haviam estudado o conteúdo de Esfera. Com isso, eles puderam deduzir uma fórmula, que já conheciam, a partir de um novo conhecimento, ou seja, conseguiram dar mais sentido àquilo que já sabiam, o que caracteriza a aprendizagem significativa superordenada (MOREIRA, 2012). Nesse momento, um participante falou: “Nossa! Que lindo!” e outro exclamou: “Que perfeição!”.

Na figura 60 são expostas as soluções de K6 a essa questão para exemplificar.

Figura 60 – Resoluções dos itens “b” e “c” da quinta questão da AF-B apresentadas por K6



5. Sabendo que a esfera é um sólido de revolução formado a partir da rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro:

a) Utilize o *applet* para representar uma esfera de raio 3 e centro na origem.

b) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume dessa esfera por meio de integral definida.

Obs.: A equação reduzida de uma circunferência de centro na origem e de raio r é dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 = 3^2$

$y^2 = 9 - x^2$

$y = \sqrt{9 - x^2}$

$\pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = 9x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{3} = 9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left[9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right] = \Rightarrow$

$\Rightarrow = 27 - 9 - \left[-27 + 9\right] = 18 + 18 = 36\pi$ u.v.

c) A partir do item anterior, deduza a fórmula utilizada em Geometria Espacial para o volume de uma esfera de raio r.

$\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} = r^2 r - \frac{r^3}{3} - \left[r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3}\right] = r^3 - \frac{r^3}{3} - \left[-r^3 + \frac{r^3}{3}\right] =$

$= \frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi$ //

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No quadro 12 é apresentado, numericamente, o desempenho dos participantes na AF-B.

Quadro 12 – Desempenho dos participantes na AF-B

Participante	Solução não apresentada	Solução incompleta	Solução incorreta	Solução correta
K1	0	0	2	3
K2	0	0	2	3
K3	0	0	1	4
K4	0	0	1	4
K5	0	0	1	4
K6	0	0	1	4

Fonte: Elaboração própria.

Assim sendo, a análise das soluções apresentadas pelos participantes a essa atividade sinalizou que eles conseguiram utilizar Integral Definida, de forma satisfatória, para calcularem volumes de sólidos de revolução.

4.2.5 Análise do Questionário Final

O QF foi acessado por meio do livro GeoGebra e respondido pelos participantes à medida que terminavam a Atividade Final.

A partir da análise das respostas dadas, identificou-se que somente K4 afirmou não ter tido dificuldade na realização das Atividades Investigativas. Isso, talvez, se justifique pelo fato de já ter tido a oportunidade de conhecer as fórmulas que se desejava chegar, o que pode ter colocado esse participante numa posição diferente dos que estavam tendo o primeiro contato com o conteúdo abordado.

Dos que tiveram dificuldades, dois (K5 e K6) afirmaram que foi pouca dificuldade e os demais, dificuldade média. A justificativa apresentada por todos eles se refere a obstáculos quanto aos conceitos de Integrais. Nesse sentido, o participante K5 destacou:

> “Mais presente no começo da sequência, uma vez que entendido a linha de pensamento, as dificuldades foram diminuindo. Os maiores problemas foram com a manipulação algébrica e a compreensão inicial dos conceitos.” (K5)

Esse comentário de K5 corrobora com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), uma vez que eles afirmam que a fase inicial de uma investigação é de grande importância para a compreensão da atividade, por propiciar o envolvimento e familiarização com a tarefa.

Ao serem questionados se consideram que as Atividades Investigativas contribuíram para a aprendizagem do conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução, todos os participantes responderam de modo positivo e destacaram a importância dos *applets* nesse processo. K2 ainda destacou que pôde adquirir, a partir dessas atividades, um entendimento mais claro sobre o conteúdo de Integrais.

Essas considerações estão em harmonia com Backendorf e Basso (2018), Barcelos *et al.,* (2009) e Souza (2015), visto que esses autores destacam que a utilização de *applets*, devido à possibilidade de interatividade e investigação, pode trazer benefícios para os processos de ensino e aprendizagem, de modo a possibilitar práticas docentes mais coerentes com o perfil dos alunos das sociedades contemporâneas.

Ao serem solicitados, no item 2.3 do questionário, que listassem vantagens e desvantagens com relação ao uso dessas atividades no estudo do conteúdo abordado, nenhum dos participantes citou pontos negativos como pode ser observado abaixo, em que são expostas as respostas apresentadas por eles.

> "[...] as atividades investigativas permitem que o aluno desenvolva certa autonomia nas atividades e possibilita que os mesmos cheguem nas fórmulas fazendo suas próprias conclusões." (K1)
>
> "[...] Permite uma aprendizagem bastante significativa por meio da autoaprendizagem, despertando um maior interesse, tornando possível a visualização das transformações ocorridas, o que facilita o entendimento e a compreensão das representações algébricas." (K2)
>
> "[...] uso do GeoGebra para melhor visualização dos gráficos; conteúdo aplicado partindo do básico para o mais complexo." (K3)
>
> "[...] ir construindo aos poucos até chegar na generalização, facilitando a construção da aprendizagem." (K4)
>
> "A sequência é bastante intuitiva e os momentos nos quais ela não foi tão clara, teve esclarecimento por parte dos licenciandos. O conteúdo proposto foi absorvido." (K5)
>
> "[...] Facilitou a visualização gráfica com o uso do GeoGebra e além disso, ao realizar os cálculos de forma algébrica foi possível estabelecer relações com o que estava sendo representado." (K6)

Esses pontos apresentados pelos participantes demonstram que a forma com que as Atividades Investigativas foram elaboradas e implementadas estão em consonância com aspectos apontados por autores como Barbosa (2017); Ponte, Brocardo e Oliveira (2012) e Zômpero e Laburú (2011). Nesse sentido, a autonomia na dedução das fórmulas, citado por K1, está ligada à própria dinâmica das Atividades Investigativas, que põem o aluno num papel ativo na construção da própria aprendizagem. Já a clareza e a ordenação de ideias, como apresentado pela maioria dos participantes, são de grande importância para a compreensão de uma Atividade Investigativa, de modo que a exploração progrida e que o aluno desenvolva o raciocínio dedutivo para que consiga, ao estabelecer suas próprias conjecturas, alcançar o objetivo da tarefa. Quanto à condução de uma investigação, como K5 relatou nos casos em que houve dificuldades, o professor deve estar preparado para desempenhar seu papel de mediador, garantindo, assim, o andamento do trabalho de investigação.

Quanto aos *applets*, ao serem perguntados se apresentaram alguma dificuldade durante a sua utilização, todos os participantes declararam que não. Esse fato havia sido previsto, uma vez que no Questionário Inicial B ninguém informou ser péssimo ou ruim com relação às habilidades consideradas necessárias para utilizar os *applets* elaborados nesta pesquisa.

Ao serem indagados se consideram que o GeoGebra contribuiu para a visualização de sólidos de revolução, todos os participantes responderam que sim e citaram que o uso dos *applets* nas atividades facilitou a compreensão do conteúdo, por proporcionar a visualização da formação dos sólidos de forma dinâmica. O participante K6, por exemplo, respondeu:

> "Sim, principalmente com o recurso 3D, a opção de rotacionar e seccionar os sólidos contribuiu para o entendimento do conteúdo, até então desconhecido." (K6)

Isso evidencia que os *applets* elaborados foram usados de forma satisfatória pelos participantes para facilitarem a visualização espacial e, com isso, favorecerem a aprendizagem do conteúdo. Esse fato corrobora com Borba, Silva e Gadanidis (2014) que afirmam que por meio de *softwares* como o GeoGebra é possível realizar a exploração de aspectos visuais, produzindo conhecimento com *feedback* visual quase instantâneo. Segundo esses autores, a visualização é protagonista na produção de sentimentos e na aprendizagem matemática, uma vez que

> [...] envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 53).

Foi solicitado que os participantes, também, listassem vantagens e desvantagens referentes à utilização do GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução. Nesse sentido, K5 destacou:

> "Não identifiquei pontos negativos. A sequência foi proveitosa e bem construída, além disso, os licenciandos mostraram domínio sobre o assunto atribuindo credibilidade ao seu trabalho." (K5)

O participante K6 informou que o primeiro *applet* utilizado foi de grande relevância para compreensão do processo de aproximação do volume de um sólido de revolução por meio de cilindros retos e que, a partir disso, a dedução das fórmulas pôde ser feita de modo mais intuitivo.

O comentário de K6 justifica as respostas satisfatórias apresentadas pelos participantes aos itens "d", "f" e "g" da A1-B. Nesses itens, especificamente, pede-se que sejam descritas relações a partir do que é observado no *applet "*Volume de um sólido pelo método dos discos". Diante disso, entende-se que esse *applet* atingiu os objetivos de prestar assistência ao aluno na compreensão do processo de aproximação do volume de um sólido de revolução e de auxiliar na dedução da fórmula para calcular esse volume. Esse fato reitera que o GeoGebra constitui ferramenta auxiliadora e eficaz no entendimento do conceito de Integral aplicado ao cálculo de volume dos sólidos de revolução, conforme apontado por Pereira *et al.* (2017).

Além disso, K1 destacou que os *applets* despertaram o interesse para a realização das atividades. O comentário desse participante corrobora com Sousa (2018). Esse autor afirma que o GeoGebra, como recurso pedagógico, pode contribuir para a motivação dos alunos e, consequentemente, favorecer os processos de ensino e aprendizagem, uma vez que tem o potencial de envolvê-los nas atividades e levá-los a desempenharem um papel investigativo por meio das manipulações dos objetos.

Ao serem questionados se o GeoGebra contribuiu para a realização das atividades, todos responderam de forma positiva. O participante K6 informou que os conteúdos estudados na disciplina de Cálculo III, até então, não estavam claros e que passaram a fazer sentido após a realização das atividades. Além disso, esse participante destacou que as dúvidas que possuía puderam ser esclarecidas a partir da manipulação dos *applets*. As declarações de K6 vão ao encontro das considerações apresentadas por Numer (2017), uma vez que essa autora apontou que, com o uso do GeoGebra, os alunos que participaram de sua pesquisa apresentaram evolução no entendimento do cálculo de volumes a partir de Integrais Definidas.

Como já havia sido sinalizado no QI-B pelos participantes K3 e K5, observa-se, novamente, que os conteúdos estudados em Cálculo III, provavelmente, não estavam sendo bem compreendidos pelos participantes. As dificuldades que eles vinham apresentando nessa disciplina podem justificar os problemas identificados nos itens “h” e “p” da A1-B. Nesses itens, especificamente, é exigido o conceito de Integral Definida – conteúdo estudado em Cálculo III – como conhecimento prévio. Porém, esse conteúdo pode ter sido abordado de forma mecânica.

Por fim, no último item do Questionário Final, os participantes puderam expor, a partir da experiência que tiveram com Atividades Investigativas realizadas com o auxílio de *applets* GeoGebra, se como futuros professores de Matemática utilizariam atividades desse tipo. Quanto a isso, foram dadas respostas positivas por todos os participantes. Esse fato pode ser observado abaixo, em que são expostas as respostas apresentadas por eles.

> “Sim, pois iria despertar o interesse dos alunos, facilitar o entendimento do conteúdo e proporcionar ao aluno autonomia.” (K1)
>
> “Sim, pois assim como facilitou a minha compreensão, certamente facilitaria a dos demais alunos.” (K2)
>
> “Sim, exatamente da forma como foi trabalhada nesta aplicação, utilizando as tecnologias digitais como um suporte para facilitar na compreensão dos alunos.” (K3)
>
> “Sim, pois o aluno consegue entender de modo claro e com bastante autonomia, facilitando assim a construção da aprendizagem.” (K4)
>
> “Sim, pois há coisas que somente com o auxílio da tecnologia são capazes de serem feitas, como a construção de um sólido, por exemplo.” (K5)
>
> “Com certeza. Na minha opinião os recursos digitais podem trazer outras visões e significados para conteúdos que parecem ser muito abstratos ou considerados "inúteis" para os alunos.” (K6)

Assim como foi observado por Bueno (2018), essas respostas mostram uma boa receptividade dos participantes com relação à proposta que foi utilizada nesta pesquisa, uma vez que as Atividades Investigativas com auxílio dos *applets* elaborados no GeoGebra facilitaram a compreensão, por parte deles, do conteúdo abordado.

A partir do que foi observado no decorrer da experimentação da sequência didática e da análise das respostas ao QF e às atividades, verificou-se que, conforme destacado por vários autores como Assis (2017); Barcelos *et al.* (2009); Backendorf e Basso (2018); Carneiro (2013); Cruz (2018); Furtado (2014); Gonçalves (2012); Hohenwarter *et al.* (2008); Rodrigues, G. (2014); Sousa (2018); Souza (2015) e

Zanella (2018), o *software* GeoGebra: i) proporciona precisão nas construções, dinamicidade e estabelecimento de conjecturas; ii) possui potencialidade para investigações e manipulações; iii) tem linguagem de fácil entendimento; iv) é de fácil utilização; e v) possibilita a construção do conhecimento matemático, a visualização, compreensão e clareza dos conteúdos, interatividade e formulação de hipóteses. Por conseguinte, esse *software* possui características capazes de possibilitar a realização de um trabalho que contribua para a aprendizagem significativa do conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Conclui-se que, mediante a avaliação dos dados obtidos por meio das observações realizadas e das respostas aos questionários e às atividades com base no aporte teórico e, também, a experiência dos autores em elaborar o material, foi possível responder à questão de pesquisa. Constatou-se que as Atividades Investigativas, a serem realizadas com os *applets* elaborados no GeoGebra, contribuíram para que os sujeitos participantes da implementação pudessem aprender de modo significativo o conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O GeoGebra é um *software* multiplataforma que tem o potencial de auxiliar na compreensão de conceitos relativos aos conteúdos estudados em CDI nos cursos superiores. Devido à sua interface dinâmica, interatividade e por auxiliar na visualização, esse *software* propicia a realização de explorações visuais de objetos matemáticos e, assim, pode contribuir para um entendimento mais claro do conteúdo estudado. Diante disso, o uso do GeoGebra em um ambiente investigativo pode inovar os processos educacionais e permitir melhorias na aprendizagem do conteúdo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

Nesse contexto, o objetivo geral desta pesquisa, do tipo intervenção pedagógica, foi investigar as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra.

Para alcançar esse objetivo, a intervenção pedagógica foi estruturada em três etapas, conforme orientado por Damiani *et al.* (2013). A primeira se refere ao planejamento, na qual foi realizada a elaboração, com base no referencial teórico adotado, do material utilizado na pesquisa. A segunda diz respeito à implementação, nessa etapa foi feita a aplicação dos questionários e a experimentação da sequência didática. Por fim, a última etapa corresponde à avaliação, em que foi efetuada a análise dos dados levantados na implementação.

Tendo em vista o primeiro objetivo específico (Aprofundar estudos sobre Integrais Definidas em conjunto com o *software* GeoGebra), foi feita uma revisão da literatura. Nos estudos sobre volumes de sólidos de revolução por Integral Definida em livros de Cálculo, verificou-se que, para a aprendizagem significativa desse conteúdo, poderiam ser elaboradas Atividades Investigativas que levassem o aluno a compreender o processo de aproximação de volumes de sólidos de revolução e a deduzir as fórmulas a partir da manipulação de *applets* e da utilização de conhecimentos prévios.

Nesse sentido, a fim de identificar *applets* que pudessem ser usados ou adaptados para atender às referidas especificidades, realizou-se uma pesquisa na seção materiais do *site* do GeoGebra. Entretanto, mediante análise dos a*pplets* retornados na pesquisa, nenhum foi considerado adequado. Diante disso, concluiu-se ser necessário construir os *applets* para serem utilizados nas atividades da sequência didática.

Ressalta-se que como não foi encontrado material de apoio que auxiliasse na elaboração de *applets* no GeoGebra sobre o tema tratado nas referidas atividades, foi preciso que os autores deste trabalho realizassem estudos exploratórios com o intuito de compreenderem os comandos e ferramentas desse *software* e, com isso, conseguirem construir os *applets*.

Para alcançar o segundo objetivo específico (Identificar resultados apresentados por pesquisas nacionais realizadas recentemente sobre o uso de TD no cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida), foi feita uma pesquisa bibliográfica do tipo revisão sistematizada da literatura.

Após a utilização de determinados filtros nas bases de pesquisa utilizadas e de certos critérios de exclusão, restaram três trabalhos que foram analisados. A partir disso, evidenciou-se que o *software* GeoGebra constitui uma forma diferenciada e eficaz no estudo do cálculo de volumes, que seu uso contribui para a visualização espacial e, consequentemente, possibilita a aprendizagem, além de despertar o interesse do aluno.

Com relação ao terceiro objetivo específico (Investigar as contribuições do uso do *software* GeoGebra no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida), elaboraram-se uma sequência didática e questionários durante a fase de planejamento. Nessa etapa, também, foi realizado um teste exploratório a fim de melhorar o material elaborado.

Ainda, em relação a esse objetivo específico, ocorreu a etapa de implementação, em que os questionários foram aplicados e a sequência didática foi experimentada. Essa etapa se deu em três encontros na turma de Cálculo III do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação. Seis licenciandos participaram de todos os encontros e, portanto, somente as respostas aos questionários e às atividades deles que foram analisadas.

Na etapa de avaliação da intervenção, evidenciou-se que o quarto objetivo específico (Contribuir para a visualização espacial no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida por meio do *software* GeoGebra) foi atingido. A análise das respostas da primeira Atividade Investigativa mostrou que os itens, em que são solicitadas respostas a partir do que se pode observar no *applet*, foram respondidos satisfatoriamente por todos. Além disso, no que se refere à atividade final, o bom desempenho dos participantes demonstrou que as fórmulas deduzidas, com auxílio da visualização dinâmica proporcionada pelo GeoGebra, foram compreendidas por eles. Assim sendo, os *applets* elaborados foram usados de forma a facilitarem a visualização espacial e, com isso, favorecerem a aprendizagem do conteúdo.

Quanto ao quinto objetivo específico (Propiciar, por meio da análise dos dados levantados na pesquisa, reflexões pedagógicas sobre a importância do uso de TD e de Atividades Investigativas no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida) as respostas ao Questionário Final sinalizam a satisfação e a boa receptividade dos participantes quanto ao uso de Atividades Investigativas e de TD no estudo do conteúdo abordado. Diante desse fato, eles declararam, a partir da experiência que tiveram, que atividades desse tipo despertam o interesse, facilitam o entendimento do conteúdo, permitem autonomia na construção da aprendizagem e possibilitam dar mais significado e sentido aos conteúdos matemáticos.

A partir da avaliação dos dados levantados e da experiência dos autores na elaboração do material, foi possível responder à questão de pesquisa: Quais as possibilidades e os desafios no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida com auxílio do GeoGebra?

Nesse sentido, por meio desta pesquisa, foi possível verificar que Atividades Investigativas realizadas com auxílio do GeoGebra contribuíram para a abordagem do conteúdo do cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida, promovendo interatividade e participação ativa na construção da aprendizagem a partir de conhecimentos prévios relevantes.

De modo geral, os autores puderam observar que as atividades elaboradas: i) favoreceram a compreensão do conteúdo ii) despertaram o interesse; iii) promoveram entendimento mais claro do conteúdo de Integrais e a compreensão do processo de aproximação de volumes de sólidos de revolução por cilindros retos; iv) viabilizaram a dedução das fórmulas referentes ao conteúdo abordado; e v) promoveram dinamicidade na visualização geométrica.

Salienta-se que durante a implementação, especificamente no início da experimentação da sequência didática, os participantes estavam pensativos e solicitavam esclarecimentos frequentes para darem prosseguimento à investigação.

Tendo em vista que o material elaborado passou por um teste exploratório na fase de planejamento e que os participantes da implementação não apresentaram problemas na compreensão dos enunciados, é possível considerar que esses ocorridos se devem à própria natureza das Atividades Investigativas.

Assim sendo, devido à importância da investigação para a aprendizagem, faz-se necessário que o futuro professor tenha mais oportunidade de lidar com Atividades Investigativas. Esse fato evidencia a importância da pesquisa aqui descrita, uma vez que possibilitou que licenciados vivenciassem uma situação de aprendizagem que envolve o uso de TD e de Atividades Investigativas.

No desenvolvimento da pesquisa, deparou-se com um desafio referente ao processo de elaboração dos *applets*. Isso porque não foi encontrado algum material de instrução que tratasse de construções de sólidos de revolução no GeoGebra e que, assim, pudesse ajudar nesse processo. Esse fato levou os autores desta pesquisa a explorarem profundamente comandos e ferramentas do referido *software*, até então desconhecidos, para que conseguissem realizar as construções.

Com relação à experimentação da sequência didática, defrontou-se com a dificuldade que os participantes estavam apresentando nos conteúdos abordados em Cálculo III. Conteúdos estes que serviriam de conhecimentos prévios para possibilitarem a aprendizagem significativa de volumes por Integral Definida.

Nesse sentido, na AI-B foi sinalizado que os participantes possuíam limitações para calcularem determinadas Integrais e que eles desconheciam o método de integração por partes repetida. Além disso, foi apontada a provável abordagem sem significado, não ocorrendo a exploração de aspectos geométricos do cálculo de áreas por Integrais. Ainda, na A1-B, verificou-se que a definição de Integral Definida tenha sido apresentada, possivelmente, de forma mecânica, já que os participantes apresentaram grandes dificuldades para responderem a determinados itens dessa atividade. Fatos esses levaram à necessidade da elaboração dos Exercícios Complementares, do uso de parte do tempo destinado à Implementação para tratar de assuntos que os participantes já deveriam ter estudado, como o método de integração por partes tabulado e de interrupção das Atividades Investigativas para a realização de uma análise do Resumo Teórico com os participantes, de forma a tentar proporcioná-los os esclarecimentos necessários para que assimilassem a definição presente nesse resumo no contexto de volume de um sólido de revolução.

Esta pesquisa contribuiu para a formação acadêmica dos autores deste trabalho de conclusão de curso, uma vez que possibilitou: i) a vivência com a pesquisa científica; ii) o aprofundamento dos estudos voltados para o CDI e para o GeoGebra; iii) o conhecimento acerca de teorias e tendências da Educação, especificamente da Educação Matemática; e iv) o aprimoramento da escrita e da elaboração de materiais didáticos.

Espera-se que este trabalho leve professores e futuros professores a refletirem sobre a importância de Atividades Investigativas, de TD e de possibilitar uma aprendizagem significativa no estudo de conteúdos de CDI. É esperado, também, que o material elaborado e aqui apresentado, possibilite abordagens que minimizem as dificuldades encontradas pelos licenciandos em Matemática, bem como estudantes de outros cursos superiores que estudam cálculo de volumes de sólidos de revolução por Integral Definida.

A partir das dificuldades identificadas, tanto no teste exploratório quanto na implementação, por parte dos participantes, sugere-se que em trabalhos futuros seja feita a abordagem da introdução do conceito de Integral Definida e do cálculo de áreas, sob e entre curvas, com uso de Atividades Investigativas e do *software* GeoGebra. Sugere-se, também, trabalhos que abordem: o método das camadas cilíndricas para o cálculo de volumes de sólidos de revolução com o uso de Atividades Investigativas e do GeoGebra; resolução de questões contextualizadas envolvendo o cálculo de volumes de objetos do mundo real com o auxílio do GeoGebra 3D em Realidade Aumentada; uso da janela CAS do GeoGebra para o cálculo de Integrais; e discussão sobre o Paradoxo do Pintor e da Trombeta de Gabriel no contexto da Integral Imprópria.

REFERÊNCIAS

ANJOS, C. M.; SECAFIM, M. F. Dificuldades com a aprendizagem de Matemática na Educação Superior. **Coinspiração**, Mato Grosso, v. 1, n. 1, p. 78-91, jan./jun. 2018. Disponível em: http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/16/8. Acesso em: 08 ago. 2019.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ASSIS, L. S. **O uso do *software* GeoGebra no ensino de função polinomial do 1º grau**: uma investigação didática com licenciandos em Matemática. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017. Disponível em: https://repositorio.unifei.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1029/dissertacao_assis_2017.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 ago. 2019.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Tradução: Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000. Disponível em: http://www.uel.br/pos/ecb/pages/arquivos/Ausubel_2000_Aquisicao%20e%20retencao%20de%20conhecimentos.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

AZEVEDO, T.; ESQUINCALHA, A.; LOZANO, A. R. G. GeoGebra Book, smartphones e ladrilhamentos no plano. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 8, n. 1, p. 185-194, jan./abr. 2018. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/5030. Acesso em: 26 maio 2020.

BACKENDORF, V. R.; BASSO, M. V. A. GeoGebra na aprendizagem de conceitos de Matemática avançada. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 1-10, jul. 2018. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86026. Acesso em: 10 abr. 2019.

BARBOSA, J. S. **Explorando o espaço através de atividades investigativas no ensino da Matemática e o uso do GeoGebra**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94832. Acesso em: 19 ago. 2019.

BARCELOS, G. T. *et al. Applets* em ambientes de Geometria Dinâmica: ações para a formação de professores de Matemática. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 7, n. 3, p. 1-11, dez. 2009. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13606/8837. Acesso em: 10 ago. 2019.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 15-26, maio/ago. 2012. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185/840. Acesso em: 15 ago. 2019.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, Buenos Aires, v. 10, n. 2, p. 36-45, dez. 2015. Disponível em: http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7768/6960. Acesso em: 25 maio 2020.

BUENO, M. P. R. **Teorema de Pappus**: conceitos e aplicações no Ensino Médio. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Paulista, São Paulo, 2018. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/180657/bueno_mpr_me_sjrp.pdf?sequence=5&isAllowed=y. Acesso em: 17 jul. 2019.

CARNEIRO, G. S. **Atividades investigativas com o GeoGebra**: contribuições de uma proposta para o ensino de Matemática. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/161645/GABRIELE.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 ago. 2019.

COMETTI, M. A. **Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis**: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/10011/1/DISSERTAÇÃO_DiscutindoEnsinoIntegrais.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

CORDEIRO, A. M. *et al.* Revisão sistemática: uma revisão narrativa. **Revista do Colégio Brasileiro de Cirurgiões**, Rio de Janeiro, v. 34, n. 6, p. 428-431, nov./dez. 2007. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/250989402_Revisao_sistematica_uma_revisao_narrativa. Acesso em: 15 ago. 2019.

CORDEIRO, E. M. **Resolução de problemas e aprendizagem significativa no ensino de Matemática**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14006/1/ResolucaoProblemasAprendizagem.pdf. Acesso em: 15 ago. 2019.

CORREIA, W. M. **Aprendizagem Significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica**: pontos e retas. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em:

https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2446/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O_AprendizagemSignificativaExplorando.pdf. Acesso em: 19 ago. 2019.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto**.** 3. ed. Tradução: Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRISOSTOMO E.; LOPES, R. Funções e suas derivadas: uma pesquisa realizada na perspectiva do pensamento matemático avançado. **Revista Educação Matemática em Foco**, Paraíba, v. 6, n. 2, p. 53-77, jul./dez. 2017. Disponível em: http://revista.uepb.edu.br/index.php/REVEDMAT/article/viewFile/3776/2261. Acesso em: 08 ago. 2019.

CRUZ, A. M. **Potencialidades da utilização do *software* GeoGebra para o desenvolvimento do conteúdo de funções exponenciais através do *smartphone*.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/10074/1/DISSERTAÇÃO_PotencialidadesUtilização*Software*.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

CUNHA, M. F. **Tecnologias Digitais em cursos de Licenciaturas em Matemática de uma universidade pública paulista**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2018. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/180540/cunha_mf_dr_rcla.pdf?sequence=5&isAllowed=y. Acesso em: 10 ago. 2019.

DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação,** Pelotas, n. 45, p. 57-67, mai./ago. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822. Acesso em: 08 jul. 2019.

DAMIANI, M. F. Sobre pesquisas do tipo intervenção pedagógica*. In*: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 16., 2012, Campinas. **Anais** [...]. São Paulo: UNICAMP, 2012. p. 1-9. Disponível em: http:/endipe.pro.br/ebooks-2012/2345b.pdf. Acesso em: 15 ago. 2019.

FERREIRA, S, R, S. *Applets* no GeoGebra*. In*: ENCONTRO DA REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 5., 2011, Salvador. **Anais** [...]. Bahia: UFBA, 2011. p. 1-5. Disponível em: http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/of8.pdf. Acesso em: 10 ago. 2011.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limites, derivação e integração. 6. ed. Florianópolis: Revista e ampliada, 2006.

FRESCKI, F. B.; PIGATTO, P. Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um Curso de Nivelamento. *In*: I SIMBIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. **Anais** [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 910-917. Disponível em: http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo6.pdf. Acesso em: 23 jun. 2019.

FURTADO, A. B. **Avaliação do uso de Tecnologias Digitais no apoio ao processo de modelagem Matemática**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/8501/1/Tese_AvaliacaoUsoTecnologias.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

GALVÃO T. F.; PEREIRA, M. G. Revisões sistemáticas da literatura: passos para sua elaboração. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, Brasília, v. 23, n. 1, p. 183-184, jan./mar. 2014. Disponível em: http://scielo.iec.gov.br/pdf/ess/v23n1/v23n1a18.pdf. Acesso em: 15 ago. 2019.

GEOGEBRA, 2019a. **About GeoGebra**. Disponível em: https://www.GeoGebra.org/about. Acesso em: 11 jul. 2019.

GEOGEBRA, 2019b. **Materials GeoGebra**. Disponível em: https://www.GeoGebra.org/materials. Acesso em: 05 maio 2019.

GERHARDT, T. E. *et al.* Estrutura do projeto de pesquisa. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 16 ago. 2019.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das Derivadas no Cálculo I:** atividades investigativas utilizando o GeoGebra. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012. Disponível em: https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacao_2012/Dissertacao_Daniele_Cristina.pdf. Acesso em: 19 ago. 2019.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra. **Bolema,** Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 417- 432, ago. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a06.pdf. Acesso em: 08 ago. 2019.

GOUVEIA, C. A. A.; MISKULIN, R. V. S. Dimensões dos processos de visualização e de representação de uma atividade exploratório-investigativa em Cálculo Diferencial e Integral: uma análise semiótica por meio de obras artísticas. **Saber Digital**, Valença, v. 5, n. 1, p. 91-107, 2012. Disponível em: http://revistas.faa.edu.br/index.php/SaberDigital/article/view/651/515. Acesso em: 08 ago. 2019.

GOUVEIA, C. C. A. **Processos de visualização e representação de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com um *software* tridimensional.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2010. Disponível em:

https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91085/gouveia_caa_me_rcla.pdf?sequence=1. Acesso em: 16 ago. 2019.

GRANT, M. J.; BOOTHT, A. A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. **Health Information and Libraries Journal**, Salford, v. 26, p. 91-108, jun. 2009. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1471-1842.2009.00848.x. Acesso em: 15 ago. 2019.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing dynamic mathematics oftware to secondary school teachers: The Case of GeoGebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, Waynesville, v. 28, n. 2, p. 135-146, apr. 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/234730242_Introducing_Dynamic_Mathematics_*Software*_to_Secondary_School_Teachers_The_Case_of_GeoGebra. Acesso em: 10 ago. 2019.

HOHENWARTER, M. *et al.,* Teaching and calculus with free dynamic mathematics *software* GeoGebra. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Mexico. **Proceedings** [...]. Monterrey, 2008. p. 1-9. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/1c8c/9f4765c2ad5080b59b08e3b77b036e780a5f.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. Tradução: Antônio Paques *et al.* São Paulo: Harbra, 1986.

LUIZ, F. F. **Confeccionando aplicativos em física**: uma abordagem do GeoGebra acerca das Leis de Newon. 2015. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio Professor José de Souza Herdy, Duque de Caxias, 2015. Disponível em: http://tede.unigranrio.edu.br/bitstream/tede/257/5/Fabio%20Ferreira%20Luiz.pdf. Acesso em: 31 jul. 2020.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Rio Grande do Sul, v. 2, n. 1, p. 64-74, jan./mar. 2016. Disponível em: https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267. Acesso em: 26 mai. 2020.

MENEZES, J. M. S. **Atividades experimentais investigativas no ensino de propriedades coligativas:** possibilidades para aprender significativamente. 2018. Dissertação (Mestrado em Química) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/6408/5/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Jean%20Menezes.pdf. Acesso em: 19 ago. 2019.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do Cálculo na perspectiva da Aprendizagem Significativa.** 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro

Preto, 2010. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2912/1/DISSERTAÇÃO_TecnologiasInformaçãoEstudo.pdf. Acesso em: 06 jul. 2019.

MOREIRA, L. S.; BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. Gerando *applets* no *software* GeoGebra. *In*: SEMANA DE MATEMÁTICA DO IF FLUMINENSE, 3., 2010, Campos dos Goytacazes. **Anais** [...]. Campos dos Goytacazes: IFFluminense, 2010. p. 1-5. Disponível em: http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/sMatematica/article/view/2010/1176. Acesso em: 10 ago. 2019.

MOREIRA, M. A. ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? **Revista Qurriculum**, Santa Cruz de Tenerife, n. 25, p. 29-56, mar. 2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/96956/000900432.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 22 ago. 2019.

MOTA, J. F. **Um Estudo de Planos, Cilindros e Quádricas, explorando Sessões Transversais, na Perspectiva da Habilidade de Visualização, com o *Software* Winplot.** 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_MotaJF_1.pdf. Acesso em: 09 jun. 2019.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. Geometria Dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, p. 1-10, dez. 2016. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/ view/ 70683. Acesso em: 10 abr. 2019.

NUMER, F. M. **Cálculo de volume de monumentos a partir de Integrais Definidas para alunos do Ensino Médio com apoio do *software* GeoGebra.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/14418. Acesso em: 24 jun. 2019.

ORTIZ, J. O. S.; PESSOA, W. D.; DORNELES, A. M. O uso de recursos digitais 3D no ensino de química: as potencialidades do GeoGebra. **Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade**, Jaguarão, v. 4, p. 1-9, fev. 2018. Disponível em: http://periodicos.claec.org/index.php/relacult/article/view/710/379. Acesso em: 31 jul. 2020.

PEREIRA, A. L.; BACHION, M. M. Atualidades em revisão sistemática de literatura, critérios de força e grau de recomendação de evidência. **Revista Gaúcha de Enfermagem**, Porto Alegre, v. 27, n. 4, p. 491-498, dez. 2006. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/RevistaGauchadeEnfermagem/article/view/4633/2548. Acesso em: 15 ago. 2019.

PEREIRA, L. R. *et al.* Usando o GeoGebra para o Ensino de Sólidos de Revolução. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 39, n. 3, p. 676-696, set./dez. 2017. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/25400/pdf. Acesso em: 17 jul. 2019.

PINHEIRO, J. M. L.; LEAL JÚNIOR, L. C. Uma experiência com o Cálculo Integral em um ambiente informatizado de aprendizagem. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p. 1-9. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4758_2263_ID.pdf. Acesso em: 08 ago. 2019.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PORFÍRIO, J., OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. *In*: ABRANTES *et al.* (org.). **Investigações Matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1999. p. 111-118.

RAFAEL, R. C.; ESCHER, M. A. Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida. *In*: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2015, Juiz de Fora. **Anais** […]. Juiz de Fora: UFJF, 2015. p. 1-12. Disponível em: http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/EVASÃO-BAIXO-RENDIMENTO-E-REPROVAÇÕES-EM-CÁLCULO-DIFERENCIAL-E-INTEGRAL-UMA-QUESTÃO-A-SER-DISCUTIDA-2.pdf. Acesso em: 23 jun. 2019.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php. Acesso em: 07 jul. 2019.

RICHIT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das Tecnologias Digitais.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2010. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91111. Acesso em: 09 jun. 2019.

RODRIGUES, G. L**. A formação do professor de Matemática para o uso das Tecnologias Digitais em sala de aula em cursos superiores de tecnologia**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Tuiuti Do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2079818. Acesso em: 10 ago. 2019.

RODRIGUES, L. A.; NEVES, R. S. P. O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 97-111, 2019. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2341/1116. Acesso em: 20 ago. 2019.

RODRIGUES, T. V. **O uso do GeoGebra 3D, versão para *smartphone*, no processo ensino aprendizagem de geometria espacial**. 2019. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal De Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em: http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/5429/1/O%20uso%20do%20GeoGebra%203D%2c%20vers%c3%a3o%20para%20smartphone%2c%20no%20processo%20ensino.pdf. Acesso em: 16 ago. 2019.

RUBI, G. L. Metodologias ativas no ensino de Cálculo: desafios e oportunidades. *In*: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE DOCÊNCIA UNIVERSITÁRIA, 10., 2018, Rio Grande do Sul. **Anais** [...]. Porto Alegre: PUCRS, 2018. p. 1-12. Disponível em: http://editora.pucrs.br/acessolivre/anais/cidu/assets/edicoes/2018/arquivos/232.pdf. Acesso em: 08 ago. 2019.

SANTOS, E. C. *et al.* A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. *In:* CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2012. p. 129-143. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/8434. Acesso em: 10 abr. 2019.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, São Carlos, v. 11, n. 1**,** p. 83-89, jan./fev. 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/rbfis/v11n1/12.pdf. Acesso em: 26 mai. 2020.

SILVEIRA, A. P. R. O GeoGebra como ferramenta de apoio para aprendizagem significativa da Geometria. **Revista do Instituto GeoGebra**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 07-30, 2018. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/34778/24922. Acesso em: 26 mai. 2020.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 31-42. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 16 ago. 2019.

SOUSA, R. P. **O Ensino da Matemática na Educação Básica com o auxílio do *software* GeoGebra**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2018. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/8657. Acesso em: 10 ago. 2019.

SOUZA, P. B. S. **O *software* GeoGebra atrelado ao princípio de Cavalieri como mediador no estudo do cálculo do volume dos sólidos geométricos**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=88383. Acesso em: 10 ago. 2019.

VALADARES, J. A teoria da Aprendizagem Significativa como teoria construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 1, n. 1. p. 36-57, 2011. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID4/v1_n1_a2011.pdf. Acesso em: 19 ago. 2019.

VIEIRA, A. F. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral:** das técnicas ao *humans-with-media.* 2013. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-06062013-102222/pt-br.php. Acesso em: 07 jul. 2019.

VIEIRA, F. A. C. **Ensino por investigação e aprendizagem significativa crítica**: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino. 2012. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102039/vieira_fac_dr_bauru.pdf?sequence=1. Acesso em: 19 ago. 2019.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do GeoGebra**: um estudo com futuros. 2018. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual De Maringá, Maringá, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dissertacoes_teses/tese_ildemar_zanella.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.

ZÔMPERO, A. F.; SAMPAIO, H. R.; VIEIRA, K. M. Investigação da transferência de significados na abordagem da aprendizagem significativa utilizando atividades investigativas. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, Buenos Aires, v. 1, n. 1, p. 40-52, jul. 2016. Disponível em: http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/9215/8246. Acesso em: 19 ago. 2019.

ZÔMPERO, A. F.; LABURÚ, C. E. Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos históricos e diferentes abordagens. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v. 13, n. 3, p. 67-80, set./dez. 2011. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/ensaio/article/view/10323. Acesso em: 24 jun. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL A

Questionário Inicial

Prezado(a) participante,

Nós, Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense campus Campos Centro, estamos realizando uma pesquisa no âmbito do trabalho de conclusão de curso, sob a orientação das professoras Me. Larissa de Sousa Moreira e Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.
Para a referida pesquisa, solicitamos a sua participação para responder questionários e atividades. Esclarecemos que sua participação nesse estudo é voluntária e se decidir não participar ou desistir em algum momento, terá absoluta liberdade de fazê-lo.
Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida em sigilo. Esclarecemos ainda que a pesquisa é de caráter estritamente acadêmico, sem ganhos financeiros para os autores do trabalho.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas por meio dos e-mails hallef_j@hotmail.com ou leomariomaciel@hotmail.com, ou pelas nossas orientadoras, por meio dos e-mails larissasm@iff.edu.br e gilmarab@iff.edu.br.

Desde já agradecemos a sua colaboração.
*Obrigatório

1. Eu aceito participar da pesquisa acima descrita, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido. *

Marcar apenas uma oval.

- ◯ Sim
- ◯ Não

Perfil

2. 1.1 Nome/Apelido: *

____

3. 1.2 Idade: *

____

Curso de Cálculo

4. 2.1 Você teve dificuldade em algum dos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo da Licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. 2.1.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.1, selecione abaixo a opção mais adequada em relação a essa dificuldade:

Marcar apenas uma oval.

- Muita dificuldade
- Dificuldade intermediária
- Pouca dificuldade

6. 2.1.2 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.1, você considera que essa dificuldade estava relacionada com o pouco domínio de que conceitos?

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Algébricos
- [ ] Aritméticos
- [ ] Geométricos

Outro: [ ] ______________________

7. Comente.

____
____
____
____
____

8. 2.2 Você já foi reprovado em alguma das disciplinas de Cálculo na Licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. 2.2.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.2, em qual delas foi reprovado?

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Cálculo I
- [ ] Cálculo II
- [ ] Cálculo III

10. 2.3 Como você avalia a forma com que os conteúdos de Cálculo vêm sendo trabalhados na Licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Puramente algébrica, somente com aplicação de fórmulas. *Pular para a pergunta 11*
- De forma mais algébrica do que geométrica. *Pular para a pergunta 16*
- De forma algébrica e de forma geométrica, associadas. *Pular para a pergunta 16*
- De forma mais geométrica do que algébrica. *Pular para a pergunta 16*
- Puramente geométrica, somente com ênfase em aspectos visuais. *Pular para a pergunta 16*

Curso de Cálculo

11. 2.4 Durante as aulas da Licenciatura em Matemática, foi utilizada alguma Tecnologia Digital no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

12. 2.4.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.4, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

13. 2.5 Na Licenciatura em Matemática, você fez uso de alguma Tecnologia Digital, por iniciativa própria, para auxiliar no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

14. 2.5.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.5, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

15. 2.6 Você considera importante o uso de Tecnologias Digitais para auxiliar na visualização geométrica? Comente. *

____
____
____
____
____

Pular para a pergunta 24

16. 2.4 Durante as aulas da Licenciatura em Matemática, foi utilizada alguma Tecnologia Digital no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

17. 2.4.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.4, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

18. 2.4.2 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.4, nas disciplinas de Cálculo da Licenciatura, especificamente, foi utilizada alguma Tecnologia Digital no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

19. 2.5 Na Licenciatura em Matemática, você fez uso de alguma Tecnologia Digital, por iniciativa própria, para auxiliar no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

20. 2.5.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.5, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

21. 2.5.2 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.5, nas disciplinas de Cálculo da Licenciatura, especificamente, você fez uso de alguma Tecnologia Digital, por iniciativa própria, para auxiliar no estudo de conteúdos que exigiram visualização geométrica?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

22. 2.5.2.1 Caso tenha respondido de modo negativo a questão 2.5.2, assinale a justificativa mais adequada.

Marcar apenas uma oval.

- Não foram estudados conteúdos que exigiram visualização geométrica no Cálculo.
- Não utilizei recursos digitais para auxiliar os estudos de conteúdos que exigiram visualização geométrica no Cálculo, mas utilizei outros recursos.
- Tenho facilidade com a visualização geométrica e não precisei utilizar recursos para o estudo de conteúdos que exigiram essas habilidades no Cálculo.
- Eu tive a necessidade de usar, mas não tenho habilidades suficientes no manuseio de Tecnologias Digitais para utilizar por conta própria.
- Não utilizei Tecnologias Digitais para auxiliar os estudos de Cálculo que exigiram visualização geométrica, mas utilizei em outras disciplinas.
- Outro: _______________________________

23. 2.6 Você considera importante o uso de Tecnologias Digitais para auxiliar na visualização geométrica? Comente. *

Pular para a pergunta 24

Software GeoGebra

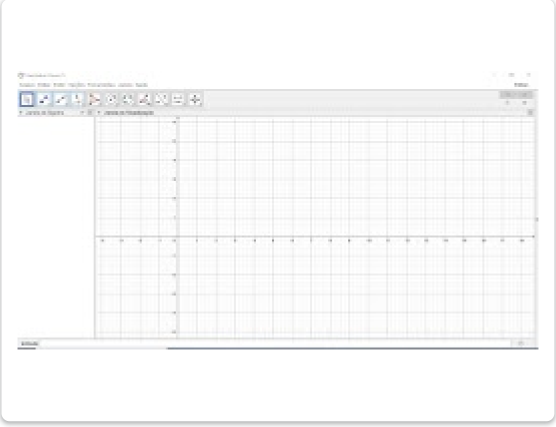
24. 3.1 Você já utilizou o GeoGebra? *

Marcar apenas uma oval.

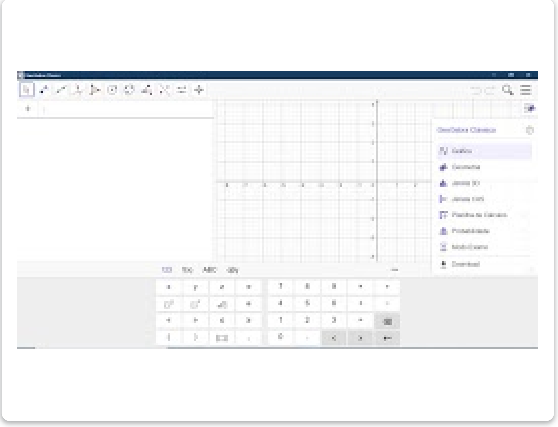
- Sim
- Não

25. 3.1.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 3.1, qual(is) versão(ões) do GeoGebra você já utilizou?

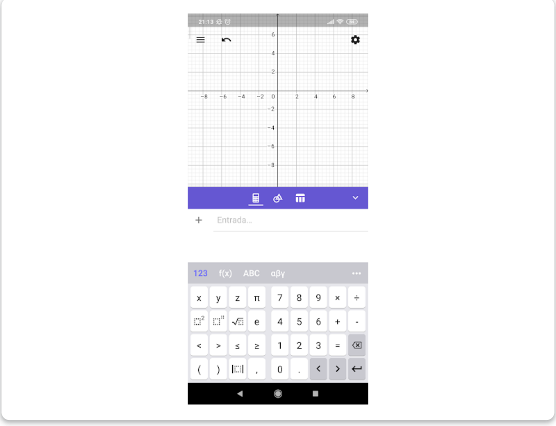
Marque todas que se aplicam.



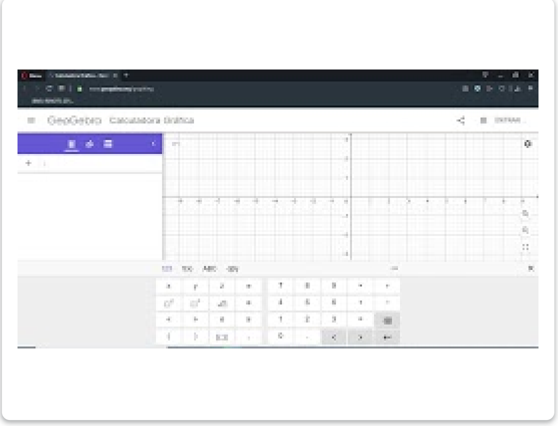
- [ ] Versão Clássico 5.0



- [ ] Versão Clássico 6.0



- [ ] Versão móvel



- [ ] Versão Online

Outro: [ ] ____________

26. 3.1.2 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 3.1, classifique, em uma escala de 1 a 5, sua habilidade em relação ao uso do software GeoGebra, marcando a coluna que julgar mais adequada.

Marcar apenas uma oval por linha.

	1 Péssimo	2 Ruim	3 Regular	4 Bom	5 Ótimo
Reconhecer as diferentes janelas do GeoGebra.	◯	◯	◯	◯	◯
Reconhecer elementos de applets (controle deslizante, caixa de entrada, caixa de seleção e outros).	◯	◯	◯	◯	◯
Manipular elementos de applets (controle deslizante, caixa de entrada, caixas de seleção e outros).	◯	◯	◯	◯	◯
Mover, reduzir e ampliar as janelas de visualização.	◯	◯	◯	◯	◯

APÊNDICE B – ATIVIDADE INICIAL A

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

A atividade a ser realizada é para fim de uma pesquisa educacional promovida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Atividade Inicial

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \left(\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}\right) dx$

b) $\int \left(\frac{e^y}{5}\right) dy$

c) $\int \sqrt{\theta} sen\left(1+\theta^{\frac{3}{2}}\right) d\theta$

d) $\int \sqrt{5-x}\, dx$

e) $\int \frac{1}{5}(5-x^2)dx$

2. Determine as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$

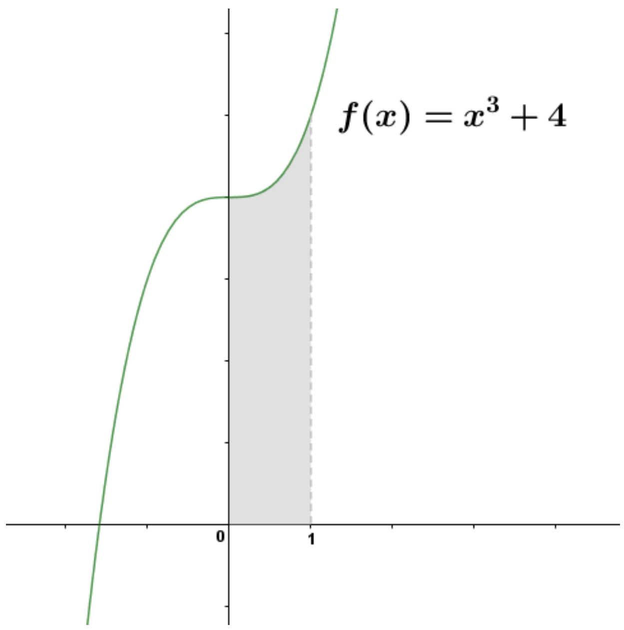
b) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

c) $\int_1^e \ln x\, dx$

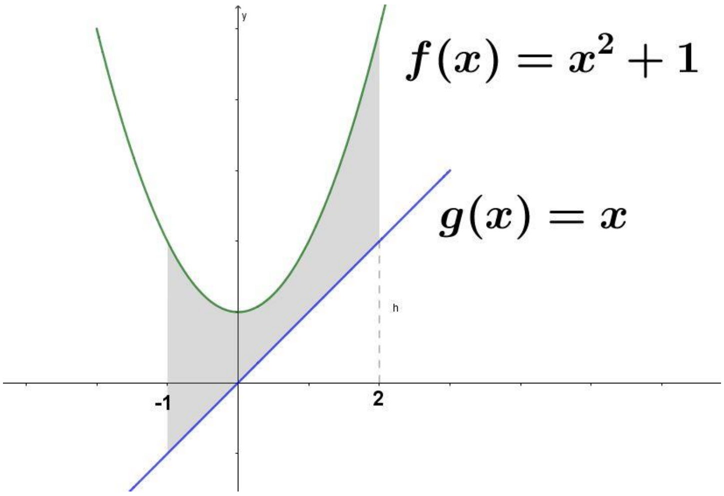
d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg\,\theta\, d\theta$

3. Calcule a área da região sombreada.

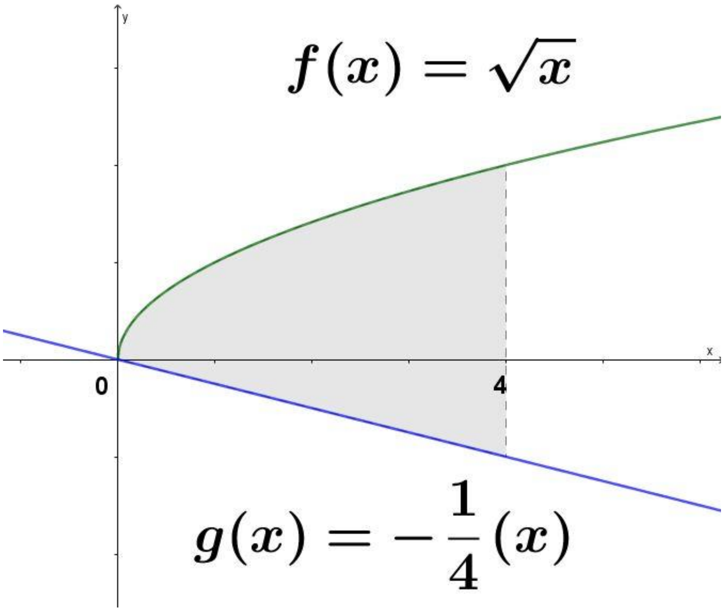
a)



b)



c)



4. Determine a área da região compreendida entre a parábola $f(x) = 2 - x^2$ e a reta $g(x) = -x$.

APÊNDICE C – ATIVIDADES INVESTIGATIVAS A

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

As atividades a serem realizadas são para fins de uma pesquisa educacional promovida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Orientação

As atividades aqui apresentadas devem ser feitas com o auxílio dos *applets* elaborados no GeoGebra e disponibilizados no site https://www.geogebra.org/m/k6gqwjav.

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS SOBRE VOLUMES COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Atividade 1

Clique em Atividades Investigativas e abra o *applet* "Atividade 1".

a. Selecione a caixa "f(x)" e observe a representação gráfica de $f(x)$, que é uma função contínua e não-negativa em $[a, b]$.

b. Selecione a caixa "Região" e observe a região limitada pelo gráfico de $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

c. Mova o controle deslizante "α" e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe por vistas distintas o sólido de revolução (S) formado, que se estende ao longo do eixo x e que é limitado a esquerda e a direita, respectivamente, pelos planos paralelos ao plano yz em $x = a$ e $x = b$. O volume do sólido S (V_S) está representado ao lado esquerdo da tela do *applet*.

d. Mova o controle deslizante "n", para alterar o número de cilindros retos. Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar os sólidos por vistas distintas, e compare a **soma dos volumes dos cilindros** exibidos (V_C) e o **volume do sólido S** (V_S).

____

e. Descreva o que você observou em relação ao volume do sólido S e a soma dos volumes dos cilindros ao variar o valor de "n".

____

____

f. Descreva a relação entre o número de cilindros e a altura de cada um deles.

____

g. Escreva o que se pode afirmar quanto à medida da altura de cada cilindro e o volume do sólido S.

____

h. Explicite o volume aproximado do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k e área da base $A(x_k)$, em que x_k é a abscissa de um ponto qualquer, com x_k pertencente ao k-ésimo intervalo.

___

___

i. Utilizando-se do conceito de limite, explicite a fórmula que expressa o volume de S por meio de integral definida (Considere que cada cilindro tem área da base $A(x)$ conhecida em cada ponto de abscissa x_k do intervalo $[a, b]$).

___

j. Considerando a fórmula expressa no item anterior, o que se pode afirmar quanto ao formato da região gerada quando a altura tende a zero?

___

k. Posicione o controle deslizante "n" em zero e mova o controle deslizante "Seções". Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar o sólido por vistas distintas, e observe que as seções transversais em planos paralelos ao plano yz são círculos.

Obs.: Mova o quanto achar necessário o controle deslizante "cor 1", para alterar a transparência da superfície lateral do sólido formado, e o controle deslizante "cor 2" para alterar a transparência das seções transversais.

l. Selecione a caixa "Raio". Posicione o controle deslizante "Seções" em 5. Represente as medidas dos raios dos círculos com centros em $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(x_3, 0)$.

___

___

m. Represente a área ($A(x)$) da seção tranversal no plano paralelo ao plano yz no ponto $(x, 0)$.

___

n. Utilizando-se do conceito de integral definida, expresse a fórmula que permite calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

___

o. Clique no botão "Limpar". Selecione a caixa "f(y)" e observe a representação gráfica de $f(y)$, que é uma função contínua e não-negativa em $[c, d]$.

p. Selecione a caixa "Região" e observe a região limitada pelo gráfico de $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

q. Mova o controle deslizante "α" e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo y. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe por vistas distintas o sólido de revolução formado (S'), que se estende ao longo do eixo y e que é limitado a esquerda e a direita, respectivamente, pelos planos paralelos ao plano

xz em $y = c$ e $y = d$. O volume do sólido S' ($V_{S'}$) está representado ao lado esquerdo da tela.

r. Utilizando-se do processo análogo ao usado na dedução da fórmula presente no "item n", observe que é possível determinar a fórmula que permite calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo y, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$. Expresse essa fórmula.

____

Atividade 2

Abra o *applet* "Atividade 2".

a. Observe na janela de visualização 2D a região R limitada acima pelo gráfico de $f(x)$, abaixo pelo gráfico de $g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Considere que $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas e não-negativas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

b. Mova o controle deslizante "α" e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x na janela de vizualização 3D. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe o sólido de revolução formado.

Selecione a caixa "Plano" e mova o controle deslizante "p". Movimente os eixos coordenados da janela 3D e descreva qual é o formato das seções transversais do sólido em planos paralelos ao plano yz.

Obs.: Mova o quanto achar necessário o controle deslizante "cor 1", para alterar a transparência da superfície externa do sólido formado, e o controle deslizante "cor 2" para alterar a transparência da superfície interna do sólido formado.

____

c. Explique, com suas palavras, como calcular a área das seções transversais, em planos paralelos ao plano yz, do sólido formado.

____

____

d. Explicite a fórmula que permite calcular a área de uma dessas seções transversais em função de $g(x)$ e de $f(x)$.

____

e. Utilizando-se do conceito de integral definida, explicite a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução formado a partir da rotação, em torno do eixo x de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo gráfico de uma função $g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

____

f. Deduza a fórmula explicitada no item anterior sabendo que o volume do sólido de revolução formado a partir da rotação de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo gráfico de uma função $g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ ($f(x) \geq$

$g(x)\ \forall\ x \in\ [a, b]$), em torno do eixo x, é igual a **diferença entre** o volume do sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$ e o volume do sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do mesmo eixo, de uma região limitada pelo gráfico de $g(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$.

APÊNDICE D – ATIVIDADE FINAL A

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

A atividade a ser realizada é para fim de uma pesquisa educacional promovida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Atividade Final

Orientações

- As questões a seguir deverão ser realizadas com o auxílio do *applet* "Atividade Final".
- Na utilização do *applet*, movimente as janelas de visualização e dê zoom sempre que for necessário.

1. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo das abscissas**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{3-x}$, com $x \in [0, 3]$. Para isso:

a) Marque a caixa de seleção de $f(x)$;
b) Insira a função utilizando o comando "$sqrt(3-x)$" e os valores de x de acordo com o intervalo apresentado no enunciado da questão;
c) Selecione a caixa "Rotação em x";
d) Mova o controle deslizante "α" até o valor 360°;
e) Mova o controle deslizante "cor 1" caso desejar alterar a transparência da superfície do sólido gerado.

1.1. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

1.2. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação da mesma função, **em torno do eixo das ordenadas**, no mesmo intervalo. Para isso, clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e siga as instruções do item anterior, marcando a caixa de seleção "Rotação em y".

1.3. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Obs.: Lembre-se que por se tratar da rotação em torno do eixo y, o intervalo dado em x não é igual ao intervalo de integração. Por isso, é necessário determinar o intervalo de integração em relação ao eixo y e integrar $f(y)$.

2. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para isso, clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e siga as instruções dos itens anteriores.

Obs.: No campo de entrada de $f(x)$ digite "x*cos(x)", e no campo de intervalo de x digite 0 e "pi/2";

2.1. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

3. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$. Para isso:

a) Clique no botão "Limpar", para apagar os dados inseridos anteriormente;
b) Determine algebricamente os valores de x em que ocorrem as interseções entre $f(x)$ e $g(x)$;
c) Marque a caixa de seleção $f(x)$ e insira a função (para isso digite "x^2") e os valores do intervalo determinado nos campos de entrada;
d) Marque a caixa de seleção de $g(x)$ e insira a função (para isso digite "sqrt(x)") e os valores do intervalo determinado nos campos de entrada;
e) Selecione a caixa "Rotação em x";
f) Mova o controle deslizante "α" até o valor 360°;
g) Mova o controle deslizante "cor 1" caso desejar alterar a transparência externa e o controle deslizante "cor 2" caso desejar alterar a transparência interna da superfície do sólido gerado.

3.1. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

4. Visualize o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo y**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x+1}$, pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{2x}$ e $x = 0$. Para isso, clique no botão “Limpar”, de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e siga as instruções dos itens anteriores.

4.1. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Obs.: Lembre-se que por se tratar da rotação em torno do eixo y, o intervalo dado em x não é igual ao intervalo de integração. Por isso, é necessário determinar o intervalo de integração em relação ao eixo y e calcular a integral para $f(y)$ e $g(y)$.

5. Sabendo que a esfera é um sólido de revolução formado a partir da rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro, utilize o *applet* para representar uma esfera de raio 3 e centro na origem.

5.1. Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume dessa esfera por meio de integral definida.

Obs.: A equação reduzida de uma circunferência de centro na origem e de raio r é dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

5.2. A partir do item anterior, deduza a fórmula utilizada em Geometria Espacial para o volume de uma esfera de raio r.

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO FINAL

Questionário Final

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de uma pesquisa educacional, intitulada CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO POR INTEGRAL DEFINIDA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA, promovida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro, sob orientação da Profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da Profª Drª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

*Obrigatório

Perfil

1. 1.1 Nome/Apelido: *

____

Atividades Investigativas

2. 2.1 Você teve alguma dificuldade durante a realização das atividades investigativas? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim
- ( ) Não

3. 2.1.1 Caso tenha respondido “Sim” ao item 2.1, selecione a opção abaixo mais adequada em relação a essa dificuldade.

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Muita dificuldade
- ( ) Dificuldade média
- ( ) Pouca dificuldade

4. 2.1.2 Caso tenha respondido “Sim” ao item 2.1, explicite o(s) fator(es) que pode(m) ter levado a essa dificuldade.

5. 2.2 Você acredita que as atividades investigativas realizadas contribuíram para a aprendizagem do conteúdo de cálculo de volumes de sólidos de revolução? Comente *

6. 2.3 Liste vantagens e desvantagens na utilização dessas atividades investigativas no estudo do cálculo de volumes de sólidos de revolução. *

Applets GeoGebra

7. 3.1 Você teve alguma dificuldade durante a utilização de algum dos applets? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

8. 3.1.1 Caso tenha respondido “Sim” ao item 3.1, qual(is) do(s) applets você teve dificuldade de manipular?

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Applet "Atividade 1"
- [ ] Applet "Atividade 2"
- [ ] Applet "Atividade Final"

9. 3.1.2 Caso tenha respondido “Sim” ao item 3.1, comente qual(is) a(s) dificuldade(s) e dê sugestões.

10. 3.2 Você acredita que o uso do GeoGebra contribuiu para a visualização de sólidos de revolução? Comente. *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

11. 3.3 Liste vantagens e desvantagens na utilização do GeoGebra no estudo de cálculo de volumes de sólido de revolução. *

12. 3.4 Você acredita que o uso do GeoGebra contribuiu para a realização das atividades? Comente. *

13. 3.5 Considerando a sua experiência na participação dessa pesquisa, você utilizaria atividades investigativas com o auxílio de applets GeoGebra na sua futura prática docente? *

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO DO TESTE EXPLORATÓRIO

Avaliação do Teste Exploratório

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de uma pesquisa educacional, intitulada CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO POR INTEGRAL DEFINIDA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA, promovida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro, sob orientação da Profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da Profª Drª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

*Obrigatório

Perfil

1. 1.1 Nome/Apelido *

____

Questionário Inicial

2. 2.1 Você teve dificuldade em responder algumas das perguntas do questionário inicial? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim
- ( ) Não

3. 2.1.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 2.1, explicite o número da pergunta, o que gerou essa dificuldade e dê contribuições.

____
____
____
____
____

Atividade Inicial

4. 3.1 Você teve dificuldade em compreender algum enunciado das questões da atividade inicial? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. 3.1.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo a questão 3.1, explicite o número da pergunta, o que gerou essa dificuldade e dê contribuições.

6. 3.2 Você considera que as questões da atividade inicial contribuíram para relembrar conceitos necessários para a realização das atividades investigativa e final? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Parcialmente
- Não

7. Comente *

Atividades Investigativas

8. 4.1 Responda cada pergunta abaixo de acordo com suas percepções ao realizar as atividades investigativas. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Sim	Parcialmente	Não
Os enunciados estão claros?			
As questões estão em um nível de dificuldade adequado?			
Os applets funcionaram adequadamente?			
Os applets auxiliaram ao responder as questões?			
As questões seguiram uma ordenação que contribuiu para se chegar à fórmula desejada?			

9. 4.1.1 Caso tenha marcado a opção parcialmente ou não em algumas das perguntas do item 4.1, indique a(s) questã(ões) e/ou o(s) applet(s), justifique e dê sugestões.

Atividade Final

10. 5.1 Responda cada pergunta abaixo de acordo com suas percepções ao realizar a atividade final. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Sim	Parcialmente	Não
Os enunciados estão claros?	⬭	⬭	⬭
As questões estão em um nível de dificuldade adequado?	⬭	⬭	⬭
O número de questões está adequado?	⬭	⬭	⬭
O applet auxiliou na resolução das questões?	⬭	⬭	⬭
O applet funcionou adequadamente?	⬭	⬭	⬭

11. 5.1.1 Caso tenha tenha marcado a opção parcialmente ou não em algumas das perguntas do item 5.1, justifique e dê sugestões.

____

____

____

____

____

Questionário Final

12. 6.1 Você teve dificuldade em responder algumas das perguntas do questionário final? *

Marcar apenas uma oval.

- ⬭ Sim
- ⬭ Não

13. 6.1.1 Caso tenha respondido de modo afirmativo à questão 6.1, explicite o que gerou essa dificuldade e dê contribuições.

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO INICIAL B

Questionário Inicial

Prezado(a) participante,

Nós, Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense campus Campos Centro, estamos realizando uma pesquisa no âmbito do trabalho de conclusão de curso, sob a orientação das professoras Me. Larissa de Sousa Moreira e Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.
Para a referida pesquisa, solicitamos a sua participação para responder questionários e atividades. Esclarecemos que sua participação nesse estudo é voluntária e se decidir não participar ou desistir em algum momento, terá absoluta liberdade de fazê-lo.
Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida em sigilo. Esclarecemos ainda que a pesquisa é de caráter estritamente acadêmico, sem ganhos financeiros para os autores do trabalho.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas por meio dos e-mails hallef_j@hotmail.com ou leomariomaciel@hotmail.com, ou pelas nossas orientadoras, por meio dos e-mails larissasm@iff.edu.br e gilmarab@iff.edu.br.

Desde já agradecemos a sua colaboração.
*Obrigatório

1. Eu aceito participar da pesquisa acima descrita, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido. *

Marcar apenas uma oval.

- [ ] Sim
- [ ] Não

Perfil

2. 1.1 Nome/Apelido: *

____

3. 1.2 Idade: *

____

Curso de Cálculo

4. 2.1 Você teve dificuldade em algum dos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo da Licenciatura em Matemática? *

   Marcar apenas uma oval.

   - Sim
   - Não

5. 2.1.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.1, selecione abaixo o nível de dificuldade:

   Marcar apenas uma oval.

   - Muita dificuldade
   - Dificuldade média
   - Pouca dificuldade

6. 2.1.2 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.1, você considera que essa dificuldade estava relacionada com o pouco domínio de que conceitos?

   Marque todas que se aplicam.

   - [ ] Algébricos
   - [ ] Aritméticos
   - [ ] Geométricos

   Outro: [ ] ____________________

7. Comente.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

8. 2.2 Você já foi reprovado em alguma das disciplinas de Cálculo na Licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. 2.2.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.2, em qual delas foi reprovado?

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Cálculo I
- [ ] Cálculo II
- [ ] Cálculo III

10. 2.3 Como você avalia a forma com que os conteúdos de Cálculo vêm sendo trabalhados na Licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Puramente algébrica, somente com aplicação de fórmulas. *Pular para a pergunta 11*
- De forma mais algébrica do que geométrica. *Pular para a pergunta 16*
- De forma algébrica e de forma geométrica, associadas. *Pular para a pergunta 16*
- De forma mais geométrica do que algébrica. *Pular para a pergunta 16*
- Puramente geométrica, somente com ênfase em aspectos visuais. *Pular para a pergunta 16*

Curso de Cálculo

11. 2.4 Você utilizou alguma Tecnologia Digital durante as aulas, da Licenciatura em Matemática, de conteúdos que exigiam a visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

12. 2.4.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.4, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

13. 2.5 Na Licenciatura em Matemática, você utilizou espontaneamente, ou seja, por sua escolha, alguma Tecnologia Digital durante o estudo de conteúdos que exigiam visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

14. 2.5.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.5, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

15. 2.6 Na sua opinião, o uso de Tecnologias Digitais é importante para a visualização geométrica? Comente. *

____
____
____
____
____

Pular para a pergunta 25

16. 2.4 Você utilizou alguma Tecnologia Digital durante as aulas, da Licenciatura em Matemática, de conteúdos que exigiam a visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

17. 2.4.1 Caso tenha respondido “Sim” ao item 2.4, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

18. 2.4.2 Caso tenha respondido “Sim” ao item 2.4, esse uso se deu nas aulas de Cálculo?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

19. 2.4.3 Caso tenha respondido “Sim” ao item 2.4.2, em quais conteúdos?

20. 2.5 Na Licenciatura em Matemática, você utilizou espontaneamente, ou seja, por sua escolha, alguma Tecnologia Digital durante o estudo de conteúdos que exigiam visualização geométrica? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

21. 2.5.1 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.5, qual(is) a(s) Tecnologia(s) Digital(is) utilizada(s)?

____

22. 2.5.2 Caso tenha respondido "Sim" ao item 2.5, esse uso se deu durante o estudo das disciplinas de Cálculo?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

23. 2.5.2.1 Caso tenha respondido "Não" ao item 2.5.2, assinale a justificativa mais adequada.

Marcar apenas uma oval.

- Não foram estudados conteúdos que exigiram visualização geométrica no Cálculo.
- Não utilizei recursos digitais para auxiliar os estudos de conteúdos que exigiram visualização geométrica no Cálculo, mas utilizei outros recursos.
- Tenho facilidade com a visualização geométrica e não precisei utilizar recursos para o estudo de conteúdos que exigiram essas habilidades no Cálculo.
- Eu tive a necessidade de usar, mas não tenho habilidades suficientes no manuseio de Tecnologias Digitais para utilizar por conta própria.
- Não utilizei Tecnologias Digitais para auxiliar os estudos de Cálculo que exigiram visualização geométrica, mas utilizei em outras disciplinas.
- Outro: _______________________________

24. 2.6 Na sua opinião, o uso de Tecnologias Digitais é importante para a visualização geométrica? Comente. *

____

____

____

____

____

Pular para a pergunta 25

Software GeoGebra

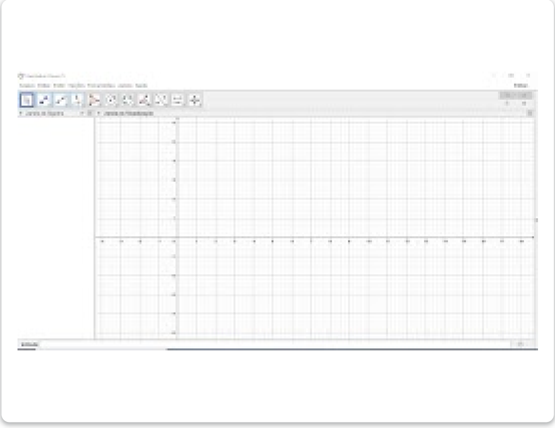
25. 3.1 Você já fez uso do GeoGebra? *

Marcar apenas uma oval.

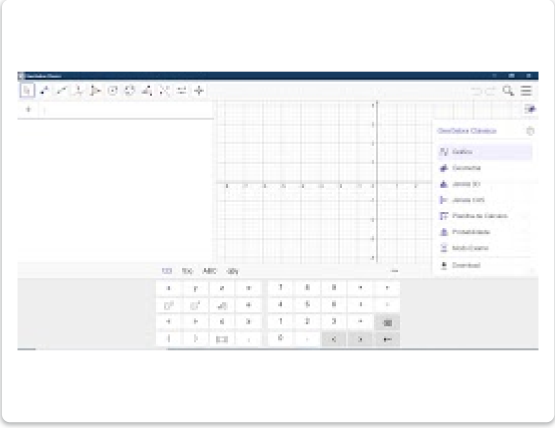
- ( ) Sim
- ( ) Não

26. 3.1.1 Caso tenha respondido “Sim” ao item 3.1, assinale as versões que você já utilizou.

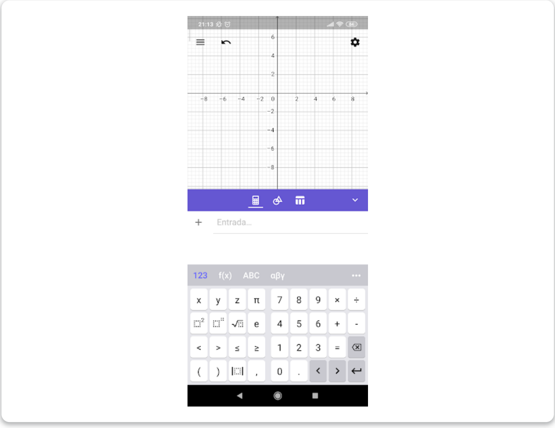
Marque todas que se aplicam.



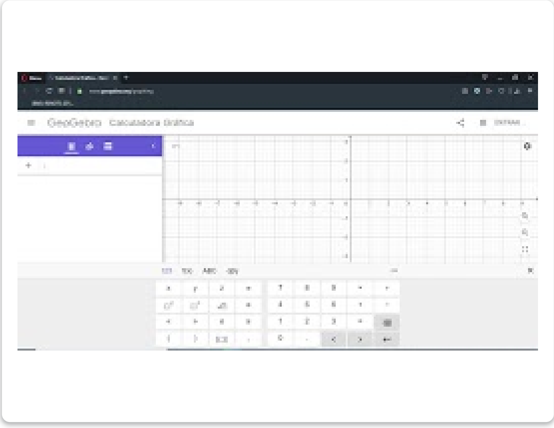
- [ ] Versão Clássico 5.0



- [ ] Versão Clássico 6.0



- [ ] Versão móvel



- [ ] Versão on-line

Outro: [ ] ____________

27. 3.1.2 Caso tenha respondido “Sim” ao item 3.1, classifique a sua habilidade quanto às ações que podem ser realizadas no GeoGebra, assinalando a coluna mais adequada.

Marcar apenas uma oval por linha.

	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Ótimo
Reconhecer as diferentes janelas do GeoGebra.					
Reconhecer elementos de applets (controle deslizante, caixa de entrada, caixa de seleção e outros).					
Manipular elementos de applets (controle deslizante, caixa de entrada, caixas de seleção e outros).					
Mover, reduzir e ampliar as janelas de visualização.					

APÊNDICE H – ATIVIDADE INICIAL B

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

A atividade a seguir faz parte de uma pesquisa desenvolvida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª. Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª. Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Atividade Inicial

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \left(\frac{x^5-3}{x^2}\right) dx$

b) $\int \sqrt{5-x}\, dx$

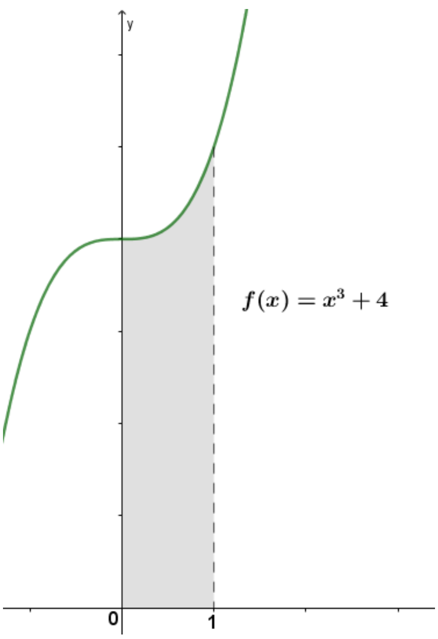
2. Determine as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sen(x)\, dx$

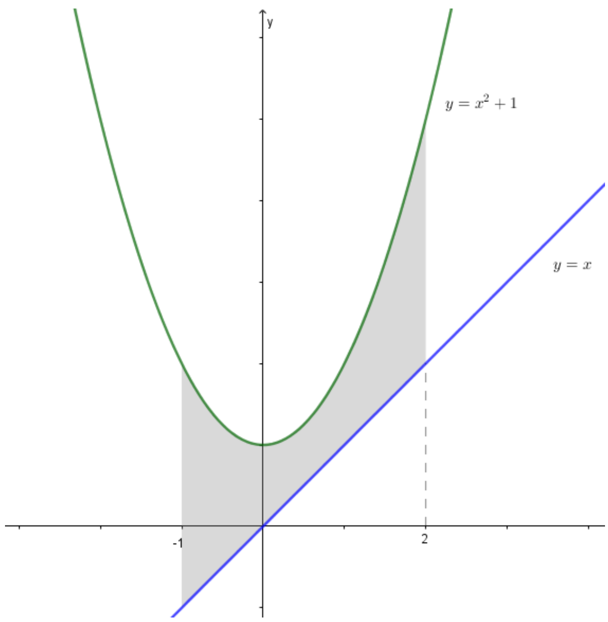
b) $\int_1^2 \pi(5-x^2) dx$

3. Calcule a área da região sombreada.

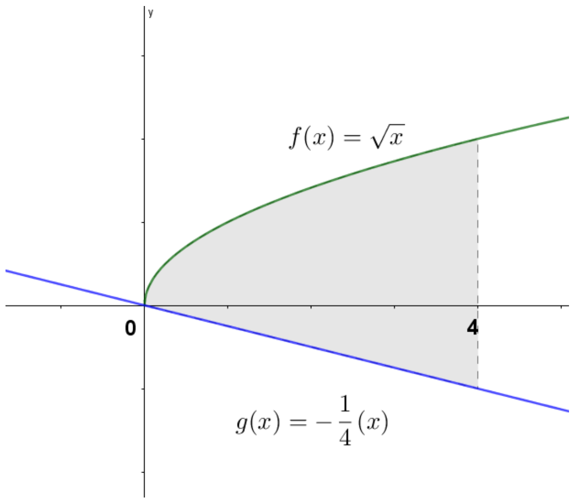
a)



b)



c)



4. Determine a área da região compreendida entre a parábola $f(x) = 2 - x^2$ e a reta $g(x) = -x$.

5. Determine o volume de um cilindro de revolução de 10 cm de altura, sendo sua área lateral igual à área da base.

APÊNDICE I – ATIVIDADES INVESTIGATIVAS B

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

As atividades a seguir fazem parte de uma pesquisa desenvolvida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da prof.ª Me. Larissa de Sousa Moreira e da prof.ª Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Orientação

Estas atividades devem ser realizadas com o auxílio dos *applets* elaborados no GeoGebra e disponibilizados em https://www.geogebra.org/m/gvcqdkme.

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS SOBRE VOLUMES COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Atividade 1

Na seção “Atividades Investigativas”, clique em “Atividade 1”.

1.ª parte

a. Selecione a caixa “f(x)” e observe a representação gráfica de $f(x)$, que é uma função contínua e não negativa em $[a, b]$.

b. Selecione a caixa “Região” e observe a região limitada pelo gráfico de $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

c. Mova o controle deslizante “α” e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe por vistas distintas o sólido de revolução S. O volume do sólido S (V_S) está representado ao lado esquerdo da tela do *applet*.

d. Mova o controle deslizante “n” para alterar a quantidade de cilindros retos. Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar os sólidos por vistas distintas, e descreva o que você observou em relação a **soma dos volumes dos cilindros** exibidos (V_C) e o **volume do sólido S** (V_S) ao **aumentar** o valor de “n”.

____

____

e. Explicite o volume **aproximado** do sólido S (V_S) por meio da soma dos volumes de cilindros retos com alturas Δx_k (em que k = 1, 2, 3, ... , n) e área da base $A(x_k)$, em que x_k é um número pertencente ao k-ésimo intervalo $[a, b]$.

____

____

f. Descreva a relação entre a quantidade de cilindros e a altura de cada um deles.

____

____

g. Descreva a relação entre o volume do sólido S (V_S) e a soma dos volumes dos cilindros (V_C) ao alterar a medida da altura de cada cilindro.

____

h. Considerando as respostas dos itens “e”, “f” e “g” e utilizando o conceito de limite, explicite a fórmula que expressa o volume de S por meio de **integral definida**. Considere que cada cilindro tem área da base $A(x)$ conhecida em cada ponto de abscissa x_k do intervalo $[a, b]$.

____

2ª parte

i. Posicione o controle deslizante “n” em zero e mova o controle deslizante “Seções”. Movimente os eixos coordenados da janela 3D, a fim de observar o sólido por vistas distintas, e observe que as seções transversais em planos paralelos ao plano yz são **círculos**.

j. Selecione a caixa “Raio”. Posicione o controle deslizante “Seções” em 5. Observe que as medidas dos raios dos círculos com centros em $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)$ e $(x_5, 0)$ são $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ e $f(x_5)$.

Obs.: Mova o quanto achar necessário o controle deslizante “cor 1”, para alterar a transparência da superfície lateral do sólido formado, e o controle deslizante “cor 2” para alterar a transparência das seções transversais.

k. Represente a área ($A(x)$) da seção transversal no plano paralelo ao plano yz no ponto $(x, 0)$.

____

l. Considerando as repostas dos itens “h” e “k” e utilizando o conceito de integral definida, expresse a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo x, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

____

3ª parte

m. Clique no botão “Limpar”. Selecione a caixa “f(y)” e observe a representação gráfica de $f(y)$, que é uma função contínua e não negativa em $[c, d]$.

n. Selecione a caixa “Região” e observe a região limitada pelo gráfico de $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

o. Mova o controle deslizante “α” e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo y. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe por vistas distintas o sólido de revolução S’. O volume do sólido S’ ($V_{S'}$) está representado ao lado esquerdo da tela.

p. Utilizando o processo análogo ao usado na dedução da fórmula presente no "item l", observe que é possível determinar a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução obtido a partir da rotação, em torno do eixo y, de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(y)$, pelo eixo y e pelas retas $y = c$ e $y = d$. Expresse essa fórmula.

____

Atividade 2

Abra o *applet* "Atividade 2".

a. Observe na janela de visualização 2D a região R limitada acima pelo gráfico de $f(x)$, abaixo pelo gráfico de $g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Considere que $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas e não negativas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

b. Mova o controle deslizante "α" e observe a rotação completa dessa região em torno do eixo x na janela de visualização 3D. Movimente os eixos coordenados da janela de visualização 3D e observe o sólido de revolução formado.

c. Selecione a caixa "Plano" e mova o controle deslizante "p". Movimente os eixos coordenados da janela 3D e observe que as seções transversais em planos paralelos ao plano yz são **coroas circulares**.

Obs.: Mova o quanto achar necessário o controle deslizante "cor 1", para alterar a transparência da superfície externa do sólido formado, e o controle deslizante "cor 2" para alterar a transparência da superfície interna do sólido formado.

d. Explicite a fórmula que permite calcular a área dessas seções transversais em função de $g(x)$ e de $f(x)$.

____

e. Considerando a resposta do item "d" e utilizando o conceito de integral definida, explicite a fórmula para calcular o volume de um sólido de revolução formado a partir da rotação, em torno do eixo x de uma região limitada acima pelo gráfico de uma função $f(x)$, abaixo pelo gráfico de uma função $g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$.

____

____

f. A fórmula explicitada no item anterior pode ser obtida, também, pela **diferença** entre o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$ e o volume do sólido de revolução gerado a partir da rotação, em torno do mesmo eixo, da região limitada pelo gráfico de $g(x)$ e pelo eixo x em $[a, b]$. Utilize esse raciocínio e deduza novamente essa fórmula.

____

____

____

____

APÊNDICE J – ATIVIDADE FINAL B

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

A atividade a seguir faz parte de uma pesquisa desenvolvida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Atividade Final

Orientações

- As questões a seguir deverão ser realizadas com o auxílio do *applet* "Atividade Final".
- Na utilização do *applet*, movimente as janelas de visualização e dê zoom sempre que for necessário.

1. Execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d** e **e** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo das abscissas**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{3-x}$, com $x \in [0,3]$.

a) Marque a caixa de seleção de $f(x)$;

b) Digite a função utilizando o comando "$sqrt(3-x)$" e os valores de x de acordo com o intervalo apresentado no enunciado da questão;

c) Selecione a caixa "Rotação em x";

d) Mova o controle deslizante "α" até o valor 360°;

e) Mova o controle deslizante "cor 1" caso desejar alterar a transparência da superfície do sólido gerado;

f) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

g) Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente. Execute novamente as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d** e **e**, porém, no item **c** marque a caixa de seleção "Rotação em y", para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação da mesma função, **em torno do eixo das ordenadas**, no mesmo intervalo.

h) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Obs.: Lembre-se que por se tratar da rotação em torno do eixo y, o intervalo de x não é o mesmo intervalo que será usado na integração.

2. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente, e execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d** e **e** da questão 1, para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x) = x\sqrt{cos(x)}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Obs.: No campo de entrada de $f(x)$ digite "x*sqrt(cos(x))", e no campo de intervalo de x digite 0 e "pi/2";

a) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

3. Execute as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d, e, f** e **g** para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo x**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$ e pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Clique no botão "Limpar", para apagar os dados inseridos anteriormente;

b) Determine algebricamente os valores de x em que $f(x) = g(x)$;

c) Marque a caixa de seleção $f(x)$ e digite a função utilizando o comando "x^2" e os valores de x determinados no item "b"

d) Marque a caixa de seleção de $g(x)$ e digite a função utilizando o comando "sqrt(x)" e os valores de x determinados no item "b"

e) Selecione a caixa "Rotação em x";

f) Mova o controle deslizante "α" até o valor 360°;

g) Mova o controle deslizante "cor 1" caso desejar alterar a transparência externa e o controle deslizante "cor 2" caso desejar alterar a transparência interna da superfície do sólido gerado.

h) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

4. Clique no botão "Limpar", de modo a apagar os dados inseridos anteriormente. Execute novamente as ações solicitadas nos itens **a, b, c, d**, **e, f** e **g** da questão 3**,** porém, no item **e** marque a caixa de seleção "Rotação em y", para visualizar o sólido de revolução gerado pela rotação, **em torno do eixo $\boldsymbol{y}$**, da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x+1}$, pelo gráfico de $g(x) = \sqrt{2x}$ e $x = 0$.

a) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume do sólido visualizado.

Obs.: Obs.: Lembre-se que por se tratar da rotação em torno do eixo y, o intervalo de x não é o mesmo intervalo que será usado na integração.

5. Sabendo que a esfera é um sólido de revolução formado a partir da rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro:

a) Utilize o *applet* para representar uma esfera de raio 3 e centro na origem.

b) Sem utilizar os recursos do *applet*, calcule o volume dessa esfera por meio de integral definida.

Obs.: A equação reduzida de uma circunferência de centro na origem e de raio r é dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

c) A partir do item anterior, deduza a fórmula utilizada em Geometria Espacial para o volume de uma esfera de raio r.

APÊNDICE K – EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Nome/Apelido: ____

(Utilize o mesmo do Questionário)

A atividade a seguir faz parte de uma pesquisa desenvolvida por Hallef J. Macabu e Leomario R. M. da Silva, alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação da profª. Me. Larissa de Sousa Moreira e da profª. Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \left(\frac{1-2t^3}{t^3}\right) dt$

b) $\int (x^2 - x)\cos(x)\, dx$

2. Determine as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^3 e(x^2 - 3x)\, dx$

b) $\int_1^2 (\pi y^2 - 3\pi)\, dy$

3. Determine a área da região compreendida entre as parábolas $f(x) = 5 - x^2$ e $g(x) = x^2 + 3$.

APÊNDICE L – RESUMO TEÓRICO

Nome/Apelido: ____

Regras de integração:

1) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

2) $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$

3) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

4) $\int cos(x)dx = sen(x) + c$

5) $\int sen(x)dx = -cos(x) + c$

Integral definida:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que esse intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e seja x_k um número pertencente ao k-ésimo intervalo, para k $= 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right]\Delta x$$

Para generalizar essa definição, de modo a permitir intervalos de comprimentos diferentes, é necessário substituir o comprimento constante Δx pelo variável Δx_k e substituir $n \to +\infty$ por uma expressão que especifique que os comprimentos desses subintervalos tendem a zero. Para isso, é preciso utilizar a expressão $\|\Delta x_k\| \to 0$, assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x_k\|\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right]\Delta x_k$$

A soma que aparece nessa expressão é chamada de soma de Riemann, e a integral definida é, às vezes, denominada integral de Riemann.

Referências:

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. Tradução: Antônio Paques *et al.* São Paulo: Harbra, 1986.

ANEXO I – EMENTA DE CÁLCULO III DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA EM QUE OCORREU A ETAPA DE IMPLEMENTAÇÃO

Cálculo Diferencial e Integral III

Período da Licenciatura: 4º.

Carga Horária Total: 60 h/a

Ementa

Integrais indefinidas. Integrais definidas. Áreas. Volumes. Integrais Impróprias. Equações diferenciais.

Objetivos

1.1- Geral

- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos ou experimentos científicos e tecnológicos.

1.2- Específicos

- Aplicar corretamente as regras de integração.
- Calcular área entre duas curvas.
- Calcular o volume de um sólido de revolução.
- Calcular integrais impróprias.
- Resolver equações diferenciais de variáveis separáveis e lineares de 1ª ordem.

Conteúdo

1.Integrais indefinidas
1.1.Integração por substituição trigonométrica

2. Integrais definidas
2.1.Soma de Riemann
2.2. Área de uma região
2.3.Volume de sólidos de revolução

3.Integrais impróprias

4.Equações diferenciais
4.1. Definição de equação diferencial
4.2. Soluções de uma equação diferencial
4.3. Equações diferenciais de primeira ordem
4.4. Equações diferenciais de variáveis separáveis
4.5. Equações diferenciais lineares de Primeira Ordem

Procedimentos metodológicos

1. Aulas expositivas e dialogadas com recursos diversos (digitais ou não);
2. Discussões em grupo;
3. Atividades em grupos e individuais;
4. Pesquisas;
5. Avaliação formativa[20].

---

[20] Sinônimo da avaliação processual ou contínua refere-se a examinar a aprendizagem ao longo das atividades realizadas (produções, comentários, apresentações, criação, trabalhos em grupos entre outros)

Referências

Básicas

LARSON, Roland E. **Cálculo com aplicações**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1998.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v.1., 3. ed., São Paulo: Editora Harbra, 1994.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**. v.1., São Paulo: McGraw.Hill, 1995.

Complementares

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo.** v.1. Tradução Claus Ivo Doering. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo**. v. 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1994.

FINNEY, Ross L., WEIR, Maqurice D., GIORDANO, Frank R. **Cálculo de George B. Thomas Jr**. v.1 .10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1987.

HENRY, Jr., EDWARDS C et al. **Cálculo com geometria analítica.** v.1, 4. ed. Rio de Janeiro: PHB, 1997.

IEZZI, Gelson e outros. **Fundamentos da Matemática Elementar.** v.8. São Paulo: Atual Editora, 1997.