

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HIURY LIMA DO ROSÁRIO
JOEL COSTA MARTINS
LAISA SUPRANI ROCHA

O JOGO WAR - A BATALHA DA MATEMÁTICA COMO INTRODUÇÃO AO
ENSINO DE PROBABILIDADE

Campos dos Goytacazes/ RJ

Agosto – 2020.2

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HIURY LIMA DO ROSÁRIO
JOEL COSTA MARTINS
LAISA SUPRANI ROCHA

**O JOGO WAR - A BATALHA DA MATEMÁTICA COMO INTRODUÇÃO AO ENSINO
DE PROBABILIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos
Centro, como requisito parcial para conclusão do
Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Ma. Pâmella Alvarenga de Souza
Coorientadora: Ma. Mylane dos Santos Barreto

Campos dos Goytacazes/RJ

Agosto – 2020.2

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

R789j Rosário, Hiury Lima do
O Jogo War - A Batalha da Matemática como Introdução ao Ensino de Probabilidade / Hiury Lima do Rosário, Joel Costa Martins, Laisa Suprani Rocha - 2021.
138 f.: il. color.

Orientadora: Pâmella de Alvarenga Souza
Coorientadora: Mylane dos Santos Barreto

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.
Referências: f. .

1. Probabilidade. 2. Jogos. 3. Investigação Matemática. I. Martins, Joel Costa. II. Rocha, Laisa Suprani. III. Souza, Pâmella de Alvarenga, orient. IV. Título. IV. Barreto, Mylane dos Santos, coorient. V. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
RUA DOUTOR SIQUEIRA, 273, PARQUE DOM BOSCO, CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ, CEP 28030130
Fone: (22) 2726-2903, (22) 2726-2906

ATA N° 29/2021 - CACLMCC/DIRESLCC/DGCCENTRO/REIT/IFFLU

HIURY LIMA DO ROSÁRIO
JOEL COSTA MARTINS
LAISA SUPRANI ROCHA

O JOGO WAR- A BATALHA DA MATEMÁTICA COMO INTRODUÇÃO AO ENSINO DE
PROBABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 03 de agosto de 2021.

Banca Examinadora:

Pâmella de Alvarenga Souza

Prof^a. Pâmella de Alvarenga Souza (Orientadora)
Mestre em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Prof^a. Mylane dos Santos Barreto (Coorientadora)
Mestre em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Prof^a. Ana Paula Rangel de Andrade (Examinadora)
Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade / UCAM / RJ

Prof.^a. Carla Antunes Fontes (Examinadora)
Mestre em Matemática Aplicada / UFRJ / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Documento assinado eletronicamente por:

- Carla Antunes Fontes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 29/08/2021 20:55:06.
- Ana Paula Rangel de Andrade, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 29/08/2021 20:43:31.
- Mylane dos Santos Barreto, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 27/08/2021 19:49:11.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 27/08/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.iff.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 275818
Código de Autenticação: 915beb97bf



AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, a Deus, por nos ter dado saúde, força e perseverança nos momentos em que pensamos em desistir. Ele nos sustentou para podermos prosseguir em nossa caminhada acadêmica até este momento.

Também agradecemos aos nossos pais, por todo amor e carinho dado ao longo da nossa vida, e por nos terem apoiado em todos os aspectos, sonhando o nosso sonho e também não nos deixando desistir dessa jornada.

Não podemos deixar de citar a nossa orientadora, a Prof.^a. Ma. Pâmella Alvarenga de Souza, porque, nesse período juntos, conseguimos aprender mutuamente e nos tornarmos pessoas e profissionais melhores. Também agradecemos à nossa coorientadora Prof.^a. Ma. Mylane dos Santos Barreto, que chegou na parte final da pesquisa, mas trouxe consigo sua vasta experiência e realizou excelentes contribuições.

Ao corpo docente do Instituto Federal Fluminense, que, a cada disciplina ministrada, possibilitou-nos a inserção no mundo matemático e da prática docente. Contribuindo, também, para a nossa formação não só acadêmica, mas, principalmente, cidadã.

Agradecemos à Prof.^a. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade e à Prof.^a. Me. Carla Antunes Fontes por aceitarem o nosso convite para comporem a banca avaliadora.

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

(Braumann)

RESUMO

A Probabilidade é um ramo da Matemática que estuda os fenômenos não determinísticos, ou seja, o acaso é o seu objeto de estudo. Apesar de ter se originado dos estudos dos jogos de azar, não se restringe a isso. Suas aplicações estão em diversas áreas, como biologia, economia e tantas outras, além de ajudar na tomada de decisões. São percebidas, entretanto, resistência e dificuldade no ensino e na aprendizagem desse conteúdo. Por isso é necessário refletir sobre o ensino, visto sua importância e suas aplicações. A partir dessas percepções, desenvolveu-se uma pesquisa de caráter qualitativo, do tipo Intervenção Pedagógica, com o intuito de analisar as contribuições do ensino de Probabilidade por meio do jogo War - A batalha da Matemática e de atividades investigativas. Elaborou-se uma sequência didática, a qual foi submetida a um teste exploratório para melhoria e adequação ao público-alvo. Após a realização das alterações sugeridas pelos participantes do teste exploratório, a sequência foi aplicada numa turma do 7º ano de uma escola privada do município de Campos dos Goytacazes. A coleta de dados da pesquisa se deu por meio das respostas dos alunos às atividades, das gravações e das observações realizadas. Percebeu-se, ao longo da Intervenção Pedagógica, o engajamento dos alunos, ao realizarem as atividades investigativas, no desenvolvimento dos conceitos de Probabilidade. Cabe ressaltar que a metodologia de ensino Investigação Matemática foi importante na contribuição para o conhecimento probabilístico, apresentando o caráter heurístico da Matemática, de modo a tornar o aluno protagonista de sua própria aprendizagem.

Palavras-chave: Probabilidade; Jogo; Investigação Matemática.

ABSTRACT

Probability is a branch of Mathematics that studies non-deterministic phenomena, that is, chance is its object of study. Although it originated from studies of games of chance, it is not restricted to that. Its applications are in several areas, such as biology, economics and many others, besides helping in decision-making. However, resistance and difficulty in teaching and learning this content are perceived. That is why it is necessary to reflect on teaching, given its importance and applications. Based on these perceptions, a qualitative research was developed, of the Pedagogical Intervention type, in order to analyze the contributions of the teaching of Probability through the game War - The Battle of Mathematics and investigative activities. A didactic sequence was elaborated, which was submitted to an exploratory test for improvement and adequacy to the target audience. After making the changes suggested by the participants in the exploratory test, the sequence was applied to a 7th grade class of a private school in the city of Campos dos Goytacazes. The collection of research data took place through the responses of students to the activities, recordings and observations made. It was noticed, throughout the Pedagogical Intervention, the engagement of the students, when carrying out the investigative activities, in the development of the concepts of Probability. It is noteworthy that the Mathematical Investigation teaching methodology was important in contributing to probabilistic knowledge, presenting the heuristic character of Mathematics, in order to make the student protagonist of their own learning.

Keywords: Probability; Game; Mathematical Research.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Jogo original War	38
Figura 2 - War - A batalha da Matemática.....	39
Figura 3 - Recorte das regras do War - A batalha da Matemática	40
Figura 4 - Kit enviado aos alunos participantes	41
Figura 5 - Questionamento feito aos alunos.....	42
Figura 6 - Recorte da 1ª. etapa da atividade investigativa	42
Figura 7 - Recorte da 2ª. etapa da atividade investigativa	43
Figura 8 - Recorte da 3ª. etapa da atividade investigativa	44
Figura 9 - Recorte dos slides para formalização dos conceitos.....	45
Figura 10 - Questão 1 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	46
Figura 11 - Questão 2 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	46
Figura 12 - Questão 3 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	47
Figura 13 - Continuação da questão 3 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	47
Figura 14 - A Probabilidade fora da sala de aula	48
Figura 15 - Respostas dos licenciandos à questão 1 da atividade investigativa	51
Figura 16 - Questão 1 da terceira etapa da atividade investigativa	53
Figura 17 - Respostas dos licenciandos à questão 1.2 da atividade investigativa	53
Figura 18 - Sugestões dos licenciandos relativas à terceira etapa da atividade investigativa.....	54
Figura 19 - Sugestões dos licenciandos relativas à atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	54
Figura 20 - Tabuleiro do jogo antes e após modificação	55

Figura 21 - Questão 4 com acréscimo da imagem	56
Figura 22 - Questão 1 antes e após modificação	56
Figura 23 - Item “b” da questão 5 antes e após modificação	57
Figura 24 - Item “c” da questão 3 antes e após modificação	57
Figura 25 - Apresentação antes e após modificação	58
Figura 26 - Tabuleiro ao final do jogo do grupo 2	60
Figura 27 - Tabuleiro ao final do jogo do grupo 3	61
Figura 28 - Respostas dos alunos F e I, respectivamente, para a questão 1 da 1ª etapa	64
Figura 29 - Resposta do aluno F para a questão 2 da 1ª. etapa	65
Figura 30 - Resposta do aluno G para a questão 2 da 1ª etapa.....	65
Figura 31 - Resposta do aluno F para a questão 3 da 1ª. etapa	66
Figura 32 - Resposta do aluno A para a questão 3 da 1ª. etapa	66
Figura 33 - Questão 4 da primeira etapa da atividade investigativa	67
Figura 34 - Respostas dos alunos G e L, respectivamente, à questão 4 da 1ª etapa	67
Figura 35 - Resposta do aluno B para a questão 1 da 2ª. etapa	68
Figura 36 - Resposta do aluno I para a questão 2 da 2ª. etapa	69
Figura 37 - Resposta dos alunos C e I, respectivamente, para a questão 3 ponto um da 2ª etapa	70
Figura 38 - Respostas dos alunos I e G, respectivamente, para a questão 3.2 da 2ª. Etapa	70
Figura 39 - Respostas dos alunos I e L, respectivamente, para a questão 1.1 da 3ª. Etapa	72

Figura 40 - Respostas dos alunos F e G, respectivamente, para a questão 1.2 da 3ª. etapa	72
Figura 41 - Respostas dos alunos C e A, respectivamente, para a questão 1.3 da 3ª. etapa	73
Figura 42 - Resposta do aluno D para a questão 2 da 3ª etapa	73
Figura 43 - Resposta do aluno L para a questão 3 da 3ª. etapa	74
Figura 44 - Respostas dos alunos C, J, F e D, respectivamente, para a questão 3 da 3ª. etapa	74
Figura 45 - Resposta do aluno E da questão 1 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	76
Figura 46 - Respostas dos alunos F e J, respectivamente, da questão 1 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	77
Figura 47 - Resposta do aluno C da questão 2 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	77
Figura 48 - Resposta do aluno G da questão 2 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	78
Figura 49 - Respostas dos alunos C, G, K, D, A, I e F, respectivamente, no item “a” da questão 3 da atividade <i>Explorando a Probabilidade</i>	79

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Respostas dos licenciandos na 2 ^a . etapa	52
Gráfico 2 - Respostas dos licenciandos na 3 ^a . etapa	53
Gráfico 3 - Respostas da questão 2 na 1 ^a . etapa	65

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação.....	28
Quadro 2 - Filtros 1 dos Trabalhos Relacionados	30
Quadro 3 - Filtros 2 dos Trabalhos Relacionados	30
Quadro 4 – Resumo das características dos trabalhos relacionados.....	34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 REVISÃO DA LITERATURA	19
2.1 O Uso de Jogos no Ensino e aprendizagem de Matemática	19
2.2 Probabilidade	21
2.3 Investigação Matemática	26
2.4 Trabalhos Relacionados	29
2.4.1 Experimentos Probabilísticos: noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II	31
2.4.2 O Ensino da Probabilidade com o uso de Mágicas	31
2.4.3 Ecologia de Aprendizagem sobre Probabilidade com Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental	32
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	35
3.1 Tipo de Pesquisa	35
3.2 Elaboração da sequência didática	37
3.2.1 Primeiro momento	37
3.2.2 Segundo momento	41
3.2.3 Terceiro momento	44
4 RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DE DADOS	49
4.1 Teste Exploratório	49
4.2 Modificações na sequência didática	55
4.3 Experimentação	58
4.3.1 Primeiro encontro	58
4.3.2 Segundo encontro	62
4.3.3 Terceiro encontro	76
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
REFERÊNCIAS	84
APÊNDICES	90
APÊNDICE A – TESTE EXPLORATÓRIO	91
A.1 Regras do jogo War - A batalha da Matemática	92
A.2 Atividade Investigativa	95
A.3 Apresentação dos Conceitos	102
A.4 Explorando a Probabilidade	109

A.5 A Probabilidade fora da sala de aula	112
APÊNDICE B – EXPERIMENTAÇÃO	115
B.1 Atividade Investigativa	116
B.2 Apresentação dos Conceitos	123
B.3 Explorando a Probabilidade	131
B.4 A Probabilidade fora da sala de aula	134
APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO	137
C.1 Questionário Análise do jogo	138

1 INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de Matemática são assuntos muito debatidos, a fim de promover melhorias (VIANNA, 2017), tendo em vista o notável preconceito por parte dos estudantes, que a enxergam como uma disciplina “chata e difícil” (LAINETI, 2019, p.2).

Essa dificuldade em Matemática também está presente no conteúdo de Probabilidade, cujos conceitos são compreendidos com dificuldade pelos alunos, seja pela forma como é ensinado pelos professores ou pela maneira mecânica como os livros apresentam esse tema (DEUS, 2018).

Desse modo, faz-se necessário refletir sobre esse ensino, visto que sua importância foi salientada desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), tendo sido normatizado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades de coleta, organização, representação, interpretação e análise de dados, de modo que sejam capazes de fazerem julgamentos e tomarem decisões apropriadas.

Nessa perspectiva, a BNCC apresenta, também, diversos recursos que podem representar um contexto significativo para a apreensão dos objetos matemáticos. Dentre os diversos recursos e materiais, destacam-se a História da Matemática, os *softwares* de geometria dinâmica e os jogos (BRASIL, 2018).

Os jogos constituem formas interessantes de propor problemas, pois possibilitam a apresentação de modo atrativo e favorecem a criatividade. Além de propiciarem situações-problema que exigem soluções imediatas, são apresentados de modo que induzem ao planejamento das ações, ao exercício da argumentação e à organização do pensamento (BRASIL, 1998).

Foi a partir de um problema envolvendo jogos de azar que Pascal e Fermat desenvolveram alguns estudos sobre a Probabilidade. Para resolverem esses problemas, os estudantes são transformados em tomadores de decisões, baseados em suas chances e no assunto que será abordado. Com isso, esse recurso se torna um excelente aliado do professor no ensino de Probabilidade (BRUNEHILDE; CORDEIRO; OLIVEIRA, 2018).

Gaffuri (2012) afirma que o mundo é probabilístico, e que a Probabilidade também está relacionada aos fenômenos físicos, biológicos, econômicos e sociais. Nas aulas de Matemática, esse estudo tem a finalidade de fazer com que os alunos percebam que podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento por meio de experimentações e simulações (BRASIL, 1998).

Nesse sentido, Marques (2013) ressalta a necessidade de se analisar a Matemática numa perspectiva dinâmica, procurando compreender sua construção e evolução, o que se dá pela investigação, tornando o estudo simples e real. A Investigação é um método diferente de ensinar e aprender Matemática, possibilitando aos estudantes descobrir e formular hipóteses, em que a prática investigativa está associada à ideia de procurar, questionar e querer saber (MACCALI, 2015).

Desse modo, a pesquisa foi motivada pelo interesse do grupo nos conteúdos de Probabilidade e sua aplicabilidade, bem como nas aulas da disciplina Matemática no Currículo da Educação Básica, o qual apresentou diversas metodologias significativas para o ensino de Matemática.

À vista disso, propôs-se esse tema para o trabalho de conclusão de curso, tendo sido formulada a seguinte questão de pesquisa: quais as contribuições do jogo War - A batalha da Matemática como introdução ao ensino de Probabilidade por meio da Investigação Matemática.

Para responder a essa questão, traçou-se o seguinte objetivo geral: analisar as contribuições do jogo War - A batalha da Matemática como introdução ao ensino de Probabilidade por meio da Investigação Matemática. A fim de se alcançar esse objetivo, foram formulados os seguintes objetivos específicos: (i) Aprofundar o estudo sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade; (ii) Verificar como o uso de jogos pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática; (iii) Proporcionar reflexões pedagógicas quanto ao uso de jogos e da Investigação Matemática para a abordagem do conteúdo de Probabilidade.

Desenvolveu-se, então, uma pesquisa qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica, a qual objetiva responder problemas práticos, opondo-se às pesquisas básicas, que visam apenas à ampliação de conhecimentos, sem preocupação com suas possíveis aplicações. (DAMIANI, *et al.*, 2013). Ademais, importa dizer que a pesquisa qualitativa não está preocupada com a quantificação dos dados, e sim com os aspectos subjetivos não mensuráveis. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Para descrever a pesquisa realizada, bem como os resultados obtidos, este trabalho está estruturado em cinco capítulos. O primeiro é esta introdução. Em seguida, são apresentados a revisão da literatura e os procedimentos metodológicos. Posteriormente, evidenciam-se e discutem-se os resultados. Por último, têm-se as considerações finais.

No segundo capítulo, que tem por objetivo embasar teoricamente o trabalho, discorreu-se sobre alguns pontos, a saber: o uso de jogos no ensino e na aprendizagem de Matemática; a Probabilidade, como aspecto histórico; importância e dificuldades do conteúdo; e a Investigação Matemática.

O terceiro capítulo relata os procedimentos metodológicos, abordando-se o tipo de pesquisa, a metodologia e os instrumentos de coleta de dados adotados, assim como o público-alvo e a descrição da sequência didática.

No quarto capítulo, relata-se a experimentação e apresenta-se a análise dos dados. Descrevem-se a aplicação do teste exploratório, as contribuições sugeridas e as alterações. Discorre-se sobre a experimentação na turma regular e a análise de dados coletados.

As considerações finais, enfim, abordam as percepções dos autores quanto à pesquisa e ao seu resultado.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta o referencial teórico que embasa este trabalho. Dessa forma, está dividido em quatro seções: (i) O uso de jogos no ensino e na aprendizagem de Matemática; (ii) Probabilidade, conteúdo escolhido para elaboração da sequência didática, destacando-se os aspectos históricos, a sua importância e a dificuldade no ensino e aprendizagem; (iii) Investigação Matemática, metodologia de ensino adotada nesta pesquisa; e (iv) Trabalhos Relacionados, seção em que são apresentadas pesquisas relacionadas ao estudo de Probabilidade.

2.1 O Uso de jogos no ensino e aprendizagem de Matemática

Os PCN (BRASIL, 1998) descrevem não haver um único ou melhor caminho para o ensino da Matemática. No entanto, é fundamental que o professor conheça as diversas possibilidades para construir sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias e os jogos, que podem fornecer contextos dos problemas.

Em se tratando de atividades lúdicas, estas estão diretamente ligadas às civilizações, nas quais cada cultura possui suas formas de entretenimento. O jogo, uma dessas atividades, virou objeto de discussões para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois o “fazer Matemática” está presente nas situações recreativas (GRANDO, 2000).

Grando (2000) acrescenta que, ao se proporem atividades com jogos, a reação mais comum dos alunos é de alegria e prazer. O interesse pelo material, pelas regras e pelos desafios propostos envolve-os e os estimula à ação. Contudo, é importante que o professor busque, em sua prática docente, cativar este prazer que a atividade lúdica provoca de modo que o jogo seja útil à aprendizagem.

Com isso, considera-se o jogo, em aspectos pedagógicos, um recurso importante para o professor, gerando reflexão, ação e efetivação dos objetivos educacionais. O docente torna-se, assim, um facilitador no ensino e na aprendizagem, atuando como um articulador entre a realidade, o processo de apropriação e construção do conhecimento matemático (FERNANDES, 2014).

Cabral (2006) aponta que o jogo favorece a introdução da linguagem Matemática, inicialmente, de maneira informal, mas permitindo, gradualmente, a formalização por meio de

significações criadas a partir do jogo. Santos (2018) acrescenta que os jogos conseguem tornar aquilo que é mais abstrato e imperceptível em concreto e real.

Ainda nessa temática, os PCN (1998, p. 46) enunciam que “[...] os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.”. Grando (2000) corrobora e acrescenta que o jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas enquanto possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito a partir da estrutura Matemática subjacente pode ser vivenciada pelo aluno no momento lúdico.

Além de colaborarem com o ensino matemático e o ensino em geral, os jogos podem desenvolver, no aluno, a concentração, a curiosidade, a autoconfiança e a consciência de grupo. Também, eles podem ser vistos como agentes cognitivos que vão auxiliar no desenvolvimento da linguagem, já que levam o aluno a tomar decisões e agir, pois será instigado, em alguns momentos, a se posicionar e argumentar criticamente. (CABRAL, 2006).

O ensino e a aprendizagem podem ser facilitados a partir do envolvimento com situações reais, como, por exemplo, o uso de jogos (FERNANDES, 2014). Nesse sentido, Lopes e Souza (2016, p. 1479) apontam que:

Em todos níveis de ensino deverá ser considerada uma abordagem que envolva os trabalhos com jogos, que originaram ideias probabilísticas, o levantamento e a organização de dados essenciais para verificar a variabilidade em cada evento. Além disso, é essencial trabalhar com dados reais, com simulações virtuais e empíricas e, quando possível, explorar as ideias de probabilidade e de estatística em situações próprias do contexto do aluno.

Os PCN (1998) orientam que, no 3º ciclo, isto é, 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, sejam exploradas possibilidades de calcular o incerto. Com noções básicas de Probabilidade, os alunos poderão aprender a determinar as chances de ocorrências de alguns eventos, com moedas, dados, cartas, entre outros, percebendo, assim, a aleatoriedade no cotidiano.

Para Struminski (2016), utilizar os jogos no ensino de Probabilidade é muito positivo, tendo em vista que a origem da Probabilidade está atrelada aos jogos de azar. Segundo Lopes e Souza (2016, p.1479), “[...] é essencial trabalhar com dados reais, com simulações virtuais e empíricas e, quando possível, explorar as ideias de probabilidade e de estatística em situações próprias do contexto do aluno”.

A relação dos jogos com a Matemática é muito antiga. Melo e Reis (2011) afirmam que, desde os tempos mais antigos, as pessoas sempre se admiraram por jogos de azar, dado que, por meio da sorte, poderiam conquistar bens vertiginosamente. Assim a sorte ou azar intrigou os matemáticos, que acreditavam existir uma lógica por trás dos jogos. (MELO, REIS; 2011).

Assim, o jogo, como recurso didático auxiliar, pode proporcionar a construção de conhecimento por parte dos alunos (DEUS, 2018). Pode, também, promover a interação entre o aluno e a Probabilidade de maneira concreta e prazerosa, possibilitando um caminho que vai da ludicidade à abstração de um conceito matemático.

2.2 Probabilidade

A Probabilidade é o ramo da Matemática que estuda os eventos não determinísticos. A noção de acaso está diretamente ligada ao cotidiano do cidadão (GAFURRI, 2012). Assim, como afirmam Teixeira e Morgado (2011), a vida é cercada de incertezas, de modo que grande parte dos pensamentos probabilísticos não se utiliza de números explicitamente, como ocorre com as decisões de levar ou não o guarda-chuva ao sair de casa ou pegar o ônibus lotado ou esperar o próximo.

As primeiras manifestações probabilísticas se deram por meio dos jogos de azar, principalmente nos jogos de dados (VIALI, 2008). Contudo, essas manifestações, muitas das vezes, eram ligadas às ações dos deuses ou a alguma ação sobrenatural. É fato que a relação entre os jogos e a Matemática se deu num processo lento (GAFFURI, 2012).

O primeiro trabalho sobre Probabilidade foi realizado por meio de um poema medieval intitulado *De Vetula*, o qual contém o cálculo da Probabilidade do lançamento de três dados. Tal obra foi bastante divulgada em boa parte da Europa, tornando seu estudo amplamente conhecido (GAFFURI, 2012).

A partir do século XV, os cálculos probabilísticos tiveram início, capitaneados pelos italianos, inicialmente com frei Luca Pacioli ou Paciolo (1445 – 1514), seguido de Gerolamo Cardano (Jêrome Cardan, 1501 – 1576), Niccolo Tartaglia (1499 – 1557) e Galileu Galilei (1564 – 1642). Sobre esse assunto, Gaffuri (2012) relata que Cardano conceituou a Probabilidade, de maneira bem semelhante ao que hoje se chama de Probabilidade Clássica, como a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis.

Ao longo dos séculos, os estudos da Probabilidade foram avançando. No século XVII, tiveram destaque os franceses Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre Fermat (1601 – 1665). Um dos feitos foi a resolução do problema dos pontos, o que consistia na divisão dos pontos de um jogo interrompido antes do seu término (VIALI, 2008). Além disso, inspirou Christian Huygens (1629 – 1695), que resolveu 14 problemas dos jogos de azar e escreveu um livro importante que foi usado até o século XVIII como introdução à Teoria das Probabilidades.

Neste século, os avanços nos estudos da Probabilidade tiveram prosseguimento, com destaque para Jacques Bernoulli (1654 – 1705), Thomas Bayes (1702 – 1761) e Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). O primeiro apresentou uma visão frequentista¹ e provou a lei dos grandes números, que calcula a Probabilidade a partir de uma série de experimentos. Com isso, iniciou o processo de sistematização dessa teoria, deixando de lado os seguros e os jogos de azar. (VIALI, 2008).

A obra fundamental dessa fase, que pode ser chamada de clássica, é de Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), publicada no século XIX, mais especificamente em 1812, e denominada *Théorie Analytique des Probabilités*. O autor reuniu diversas notas de aula, de quando atuava como professor em 1795. Na obra, Laplace discute sobre princípios da teoria e, principalmente, aplicações nos “jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade” (VIALI, 2008, p.150).

Os estudos da Probabilidade continuaram crescendo nos séculos XIX e XX, com Henri Poincaré (1854 – 1912), Émile Borel (1871–1956), John Maynard Keynes (1883 – 1946), e outros. Até chegar a Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987), um dos grandes matemáticos do século XX, que, inspirado por seus antecessores, realizou a axiomatização da Probabilidade, iniciando, assim, a etapa moderna dessa teoria (VIALI, 2008).

Dessa forma, nota-se a importância da Teoria das Probabilidades, ao se observar o grande número de matemáticos que realizaram contribuições para o seu desenvolvimento e pela variedade de aplicações.

Embora os estudos da Probabilidade tenham se iniciado por meio de problemas com jogos, ela não se restringe a isso. Suas aplicações estão na biologia, na economia, no direito, na engenharia, dentre outros campos (DEUS, 2018). Sua relevância se dá naquilo que

¹ A Probabilidade frequentista é a calculada após a realização dos experimentos, baseando-se na observação, em longo prazo, dos resultados aleatórios (BIAJOTI, 2013).

Fernandes (2018, p.51) cita como essencial para o ensino da Matemática: “[...] é preciso se fazer referências à vida real no ensino de matemática, para transformar o indivíduo em um sujeito reflexivo e crítico.”.

A importância da Probabilidade foi mencionada no Conselho Nacional dos professores de Matemática dos Estados Unidos em 1980, juntamente com a estatística e a combinatória, como conteúdos que precisam ser abordados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a atender às demandas sociais que estão incluídas nesses conteúdos (BRASIL, 1998).

Isso foi reafirmado no texto da BNCC (BRASIL, 2018), ao se ressaltar que ideias relacionadas à Probabilidade devem ser abordadas desde o 1º ano do Ensino Fundamental, de modo que, para os primeiros anos, objetiva-se a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Além disso, sugere-se trabalhar relações de aleatoriedade, a fim de que os alunos aprendam que há eventos certos, prováveis, improváveis e a noção do acaso.

Nos anos finais, para além do que é visto nos anos iniciais (BRASIL, 2018), propõe-se um estudo ampliado e aprofundado, por meio de experimentos e simulações, de modo a confrontar os resultados com a Probabilidade Teórica, frequentista. Essa ampliação se dá pelo aprimoramento da capacidade de os alunos enumerarem os elementos do espaço amostral e resolverem problemas de contagem.

Deus (2018) descreve que diversas situações do cotidiano envolvem Probabilidade, por exemplo: quando dois amigos resolvem decidir algo ao lançar uma moeda no cara ou coroa, ao jogar um dado ou girar uma roleta. Ou ainda quando, em uma promoção ou sorteio, deposita-se o maior número possível de cupons ou compra-se o maior número de rifas possível para ter mais chance de ganhar.

Logo é possível perceber a presença e a importância da Probabilidade no desenvolver da vida, seja para a tomada de decisões ou para torcer pela sorte em um jogo ou em um sorteio. Lopes (2008) ainda afirma que, às vezes, a intuição pode falhar e levar a decisões erradas. Lopes (1998) ressalta que a Probabilidade e a Estatística devem ser estudadas por meio de atividades investigativas que, de certa forma, auxiliem os alunos em sua leitura de mundo. Nesse sentido, conclui-se que

[...] não basta ao cidadão entender as porcentagens expostas em índices estatísticos, como o crescimento populacional, taxas de inflação, desemprego... É preciso analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Assim como não é suficiente ao aluno desenvolver a

capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões. (LOPES, 2008, p. 60).

Em um mundo em que as informações são de fácil acesso, evidencia-se o que os PCN (BRASIL, 1998) afirmam sobre a importância de o cidadão tratar informações, aprendendo a lidar com dados estatísticos, raciocinar utilizando pensamentos relativos à Probabilidade e Estatística, orientando o seu ensino desde o Ensino Fundamental. Lopes (2008, p. 71) acrescenta que “[...] a probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza e de mostrar aos estudantes como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais.”. Ainda nesse sentido, Fernandes e Santos Junior (2015) entendem que a Probabilidade precisa ultrapassar o contexto escolar, levando-se em consideração a sua importância social.

Isto posto, é importante realçar a função não só da Matemática, mas do contexto escolar na atuação da sociedade. Lopes (2008, p. 61) destaca que a escola deve cumprir seu papel de educar para a cidadania, tornando o aluno capaz de atuar reflexivamente e criticamente. Acrescenta, ainda, que

[...] o trabalho com estatística e probabilidade torna-se relevante ao possibilitar ao estudante desenvolver a capacidade de coletar, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que é a grande base do desempenho de uma atitude científica.

Além disso, é relevante a integração com outras disciplinas, baseando-se em contextos do cotidiano e da realidade do aluno. Tal ação o possibilitará ampliar a leitura da sua realidade e agir em diferentes contextos (LOPES; SOUZA, 2016).

A esse respeito, a BNCC (BRASIL 2018) trata da integração da Probabilidade e Estatística na abordagem de conceitos, de fatos e de procedimentos presentes na vida cotidiana, nas ciências e nas tecnologias. Também reitera o que os PCN (BRASIL 1998) orientam sobre a necessidade de todos os cidadãos desenvolverem habilidades probabilísticas e estatísticas.

Ademais, destacam que a finalidade dos estudos de Probabilidade no Ensino Fundamental é que o aluno compreenda a natureza aleatória dos acontecimentos e estime o grau de possibilidade acerca deles (BRASIL 1998). As noções de acaso e de incerteza, que fundamentam a Teoria da Probabilidade, manifestam-se intuitivamente e podem ser

exploradas na escola, a partir da realização de experimentos e da observação de eventos pelos alunos (BRASIL, 1998).

Contudo a Matemática, geralmente, tem sido vista como uma matéria difícil e com altos índices de reprovação. Há alunos que, mesmo aprovados, apresentam carência de conhecimentos e não conseguem relacioná-los à realidade (LOPES, 2007). Com a Probabilidade, não é diferente.

De acordo com Silva (2013), as dificuldades no ensino de Probabilidade estão fundamentadas, principalmente, na insegurança ou na dificuldade do professor perante o tema, na falta de material que o auxilie, na objeção e na falta de interesse por parte dos alunos.

O autor argumenta que a insegurança do professor em trabalhar a Probabilidade relaciona-se ao fato de que, desde o Ensino Fundamental à graduação, o seu ensino foi, quase que em sua totalidade, determinístico, o que causa desconforto ao se apresentarem elementos aleatórios aos alunos. Tal afirmação é ratificada por Lopes, Teodoro e Rezende (2012) que apontam a insegurança de alguns professores ao abordarem os conteúdos de Probabilidade.

Outro fator apontado por Silva (2013) é a falta de materiais de apoio para o ensino de Probabilidade. Lainetti (2019) destaca a importância do livro didático para a educação. Todavia, ele precisa ser um dos recursos auxiliares e não o único. Com a defasagem de materiais descrita por Silva (2013), muitas vezes, o educador baseia-se somente nesse recurso.

Ainda que tenham um grande valor no cotidiano das escolas, quando se trata da Probabilidade, os livros didáticos recebem grandes críticas. Lainetti (2019) e Gaffuri (2012) criticam que sua ênfase está na memorização das fórmulas e em inúmeros exercícios que valorizam a mecanização. Dificulta-se, assim, a promoção do pensamento probabilístico, visto que os exercícios não são atrativos e nem estão contextualizados à realidade do discente.

Fraga (2013) corrobora a afirmação e acrescenta que a Probabilidade não é apresentada de maneira encantadora, é passada de forma mecânica, resumindo-se à aplicação de fórmula e de exercícios, gerando desinteresse e dificuldades por parte dos alunos. Também acrescenta que a falta de conhecimento dos professores sobre a teoria é outro fator que contribui para essa dificuldade.

Para mudar o ensino mecanizado, que gera desinteresse e dificuldades, devem se buscar alternativas para o estudo de Probabilidade. Nesse sentido, Silva (2013) e Deus (2018) indicam a necessidade de novas metodologias e citam os jogos como um aliado de grande potencial para o processo de ensino e de aprendizagem.

2.3 Investigação Matemática

Compreende-se a Investigação Matemática como uma prática pedagógica que propõe uma situação em que os alunos são estimulados a formular questões e conjecturas (CONCETINO, 2019). Entende-se como um método diferente de ensinar e aprender Matemática, possibilitando aos estudantes descobrir e formular hipóteses, em que a investigação está associada à ideia de procurar, questionar e querer saber (MACCALI, 2015).

Investigar, em Matemática, assume características muito próprias, sendo uma poderosa metáfora educativa que ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade genuína. Para isso, é fundamental a participação ativa dos alunos, os quais aprendem quando mobilizam o seu recurso cognitivo a fim de atingir um objetivo, sendo este um dos pontos fortes da investigação, porque essa participação ativa durante a atividade favorece o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Os PCN (BRASIL, 1998) tratam da importância de os professores estimularem os alunos a desenvolverem determinadas atitudes, uma delas a investigação. O documento ressalta que um dos papéis da Matemática no Ensino Fundamental é o de estimular o espírito de investigação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCN +) (BRASIL, 2002) apresentam a investigação e a compreensão como uma das competências da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Investigar nada mais é do que elaborar questões e/ou situações que nos interessam, cujas respostas inicialmente não conhecemos, buscando-as da melhor maneira possível, sem perder o rigor e a fundamentação teórica (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016). Investigar é uma capacidade que deve estar presente no trabalho realizado na escola, tanto pelos alunos como pelos professores, sendo de suma importância para todos os cidadãos (PONTE, 2010).

Pode ser considerado como ponto de partida de uma investigação, não apenas um problema matemático, mas também situações que envolvam outras ciências e tecnologia, como da organização social ou da vida diária (PONTE, 2010). A atividade investigativa pode trazer contribuições numa nova visão da disciplina de Matemática, assim como pode proporcionar significações e contextos motivadores de aprendizado aos alunos (BRUM, 2012).

[...] a actividade de investigação permite proporcionar aos alunos uma experiência matemática significativa envolvendo a realização de experiências iniciais com o objectivo de clarificar o foco da investigação, a formulação, o teste e a reformulação de conjecturas, e a procura de argumentos que possam validar as conjecturas que resistiram a sucessivos testes (SANTOS *et al.*, 2002, p. 102).

O professor tem um importante papel na investigação, segundo Ponte *et al.* (2002), é essencial a formulação adequada da proposta, assim como promover esta atividade de forma cuidadosa e estimulante. Cabe também ao professor, durante a atividade investigativa, prestar assistência aos alunos e entender como estão se desenvolvendo. Antes disso, o docente deverá certificar-se de que os alunos compreenderam a atividade proposta e também de como está o ambiente de aprendizagem em sala de aula, considerando vários aspectos como deixar os alunos à vontade para a realização da atividade e o tempo reservado para que ele possa concluí-las, explorando suas ideias e as questões (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

Uma atividade investigativa irá se desenvolver em três momentos: (i) introdução da tarefa, (ii) realização da investigação, e (iii) discussão dos resultados (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016). O primeiro momento, a introdução da tarefa, corresponde à apresentação da proposta à turma. É uma fase curta, porém o restante da atividade depende deste momento e de que os educandos compreendam o que significa investigar. Já na realização da investigação, o professor assumirá a retaguarda, cabendo-lhe procurar entender como o trabalho dos alunos está avançando e prestar apoio quando preciso. Por fim, nas discussões dos resultados, é relatado o trabalho realizado, cabendo ao professor atuar no papel de moderador e garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a realização da Investigação Matemática envolve quatro etapas, que podem surgir simultaneamente e incluir diversas atividades em cada um desses momentos, como demonstra o Quadro 1.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer uma situação problemática; • Explorar a situação problemática; • Formular questões.
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar dados; • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar testes; • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> • Justificar uma conjectura; • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira, 2016, p.21.

No primeiro momento, a exploração e formulação de questões, muitas vezes, demanda tempo maior, visto que nela os alunos irão familiarizar-se com os dados e apropriar-se ainda mais do sentido da tarefa. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) ressaltam que, quando a atividade é realizada em grupos, é possível potencializar o surgimento de várias alternativas para exploração.

No segundo momento, surgem as conjecturas a partir de observações e manipulações diretas dos dados ou por analogia a outras conjecturas. Elas podem ser parcialmente verbalizadas, complementadas com gestos. Recomendam-se, entretanto, os registros, nos quais os alunos são confrontados com a necessidade de exporem suas ideias, estabelecendo concepções comuns quanto às suas realizações (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

O terceiro momento, de testes e reformulações, é relevante neste tipo trabalho, uma vez que estimula os alunos a comunicarem matematicamente suas conjecturas. Contudo, pelo interesse de descrevê-las, os investigadores tendem a generalizar os dados com número reduzido de casos. Nessas situações, o professor deve combater essa forma de pensamento por meio do apoio que é dado aos alunos, como no momento da discussão, estimulando-os a procurarem contraexemplos (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

No último momento da realização da investigação são justificadas as conjecturas e é avaliado o raciocínio ou o seu resultado. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a ideia da

prova Matemática pode ser feita gradativamente e procurar uma justificação aceitável que se baseie em um raciocínio plausível e nos conhecimentos quando se trata de alunos mais novos.

Após os quatro momentos da investigação, tem-se o momento de discussão, no qual os resultados são compartilhados. Os alunos devem ser encorajados a participar com o intuito de construir o conhecimento de forma colaborativa, expondo suas ideias, e dando opiniões em relação aos argumentos e conclusões apresentadas (CARGNIN; GUERRA; LEIVAS, 2016). Para Santos *et al.* (2002), a discussão final é essencial e sem ela a investigação perde uma das suas grandes potencialidades, o debate dos resultados enriquece a própria atividade, ajudando também os alunos a compreenderem o significado de uma Investigação Matemática.

Essa metodologia é relevante no processo de ensino e de aprendizagem. Nela, os alunos são protagonistas na construção do seu conhecimento. As atividades investigativas proporcionam uma abordagem significativa e contextualizada com o conteúdo matemático (CAVALHEIRO, 2017). O papel do professor é fundamental como mediador, em que não simplesmente valida as conjecturas dos estudantes, mas intervém no processo investigativo (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

Diante disso, elaborou-se uma sequência didática como uma introdução à Probabilidade por meio da Investigação Matemática contextualizada com o jogo, na qual os alunos são o centro do processo de ensino e aprendizagem. Assim, são os autores da construção de seus conhecimentos, no momento da elaboração, da verificação e da resolução de questões e conjecturas.

2.4 Trabalhos Relacionados

Realizou-se uma pesquisa no dia 11 de maio de 2020, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, utilizando-se as palavras “Probabilidade” e “Ensino Fundamental”.

Após a aplicação dos filtros expostos no Quadro 2, foram encontrados seis trabalhos. Destes, quatro abordavam Probabilidade. Dos quatro trabalhos restantes, em um predominava o conteúdo de Estatística e outro tinha como foco principal a Probabilidade Geométrica, restando assim os dois trabalhos selecionados que mais se assemelhavam à ideia desta pesquisa.

Quadro 2 - Filtros 1 dos Trabalhos Relacionados

Descritores: Probabilidade e Ensino Fundamental	209 trabalhos
Idioma: Português	201 trabalhos
Área de conhecimento: Ciências exatas e da terra	6 trabalhos
Trabalhos selecionados	2 trabalhos

Fonte: Elaboração própria.

Após a aplicação dos filtros expostos no Quadro 3, foram encontrados quatorze trabalhos relacionados. Nesse caso, os critérios de exclusão foram que quatro desses trabalhos apareceram na pesquisa anterior, cinco não falavam apenas de Probabilidade e outros três não apresentavam sequência didática, assim restaram dois trabalhos, tendo sido escolhido o que tinha semelhança maior em relação ao público-alvo.

Quadro 3 - Filtros 2 dos Trabalhos Relacionados

Descritores: Probabilidade e Ensino Fundamental	209 trabalhos
Idioma: Português	201 trabalhos
Assunto: Probabilidades	14 trabalhos
Trabalhos selecionados	1 trabalho

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, apresentam-se os objetivos, as ideias centrais e os resultados dos trabalhos selecionados.

2.4.1 Experimentos Probabilísticos: noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II

Esta dissertação de Biajoti (2013) aborda os conceitos iniciais da Probabilidade e a aplicação de uma sequência didática direcionada ao 7º ano. O objetivo deste trabalho foi realizar uma atividade investigativa didático-pedagógica que utiliza jogos para identificar a linguagem e as ideias sobre pensamentos probabilísticos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Utilizou-se a metodologia Engenharia Didática.

Para tanto, o autor considerou as dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo desenvolvido nos anos anteriores, preparando uma sequência didática para tentar minimizá-las. A sequência foi desenvolvida em quatro turmas de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo e está dividida em quatro atividades numeradas de um a quatro, necessitando de cinco aulas de 50 minutos para sua aplicação.

Concluiu-se que, a partir das atividades propostas, foi possível despertar o interesse dos alunos e promover uma maior participação na aula. Além disso, verificou-se que uma sequência a qual utiliza jogos com dados e moedas favorece a aprendizagem das noções básicas de Probabilidade. Ademais, as atividades realizadas em duplas trouxeram contribuições positivas, como a participação ativa de ambos, a construção dos conceitos, as discussões e as argumentações sobre as atividades. Biajoti (2013, p. 68) afirma que, se a sequência didática for "[...] adequadamente utilizada, pode contribuir significativamente com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno torna-se ativo na construção do seu próprio conhecimento."

2.4.2 O Ensino da Probabilidade com o uso de Mágicas

A dissertação de Ramos (2015) teve o objetivo de desenvolver conceitos básicos de Probabilidade em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. Para isso, a autora utilizou-se de mágicas matemáticas, que são consideradas como jogos, e a Resolução de Problemas, como a metodologia para despertar interesse dos alunos. A sequência didática desenvolvida por Ramos foi composta por oito momentos e foi dividida em dez encontros com a turma: (i) Aplicação de questionário; (ii) Aula expositiva sobre Probabilidade e Aplicação da Mágica do Jogo da “Velha”; (iii) Mágica do sinal de trânsito; (iv) Mágica da adivinhação do Ás e Mágica do Envelope; (v) Mágica das três cartas e Mágica da Posição dos quatro Ases; (vi) Mágica das sacolinhas com Formas Geométricas; (vii) Exercícios de Probabilidade - Revisão para avaliação; e (viii) Avaliação.

Segundo Ramos (2015, p. 12), "[...] os truques de mágica quando incorporados ao ensino de Probabilidade podem promover a instrução de várias maneiras, uma vez que as mágicas são manifestações visuais." Para mais, afirma que as mágicas são eventos de baixa Probabilidade na visão do espectador e podem ajudar os alunos a melhorarem a intuição e a compreensão dos conceitos de Probabilidade.

Concluiu-se que o uso de atividades diversificadas e as práticas de jogos contribuíram para uma aprendizagem mais significativa e prazerosa para os alunos. Além disso, é essencial para o conhecimento matemático e também para a formação pessoal do discente no que se refere a raciocínio, senso crítico e tomada de decisões. A autora afirma que o uso de jogos proporcionou um melhor aproveitamento na aprendizagem, e os alunos se mostraram motivados para um tema que é conhecido por sua dificuldade.

2.4.3 Ecologia De Aprendizagem sobre Probabilidade com Estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental

A dissertação de Santos (2019) buscou desenvolver e analisar uma sequência de atividades denotada por ele como ecologia de aprendizagem² orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidades para alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental.

Essa ecologia de aprendizagem está contida na teoria de *Design Experiments*³, uma série de atividades para o ensino e a aprendizagem de Probabilidade. A pesquisa foi realizada numa escola pública estadual de Pernambuco com a participação de 10 alunos distribuídos entre o 7º e 8º ano do Ensino Fundamental. O trabalho foi dividido em três ciclos, Aleatoriedade, Espaço Amostral, e Quantificação e Comparação de Probabilidades, e 12 atividades.

Em suas considerações, ele relata que, no ciclo de Aleatoriedade, os alunos traziam bastantes exemplos do seu cotidiano. No ciclo de Espaço Amostral, o autor trabalhou com dados e moedas de modo que proporcionou um momento motivador atraindo atenção e dedicação dos alunos. No último ciclo, Quantificação e Comparação de Probabilidades, por meio da metodologia de ecologia de aprendizagem, os alunos conseguiram compreender as ideias principais da Probabilidade.

Dessa forma, a teoria *Design Experiments*, por meio da ecologia de aprendizagem, trouxe resultados satisfatórios para o Ensino e Aprendizagem de Probabilidade. Além disso, o

² Um sistema complexo, que geralmente utilizam de tarefas com objetivos e contextos projetados, no qual permite ao professor/pesquisador testar hipóteses e conjecturar teorias por meio dos resultados extraídos simultaneamente do projeto (SANTOS, 2019).

³ Metodologia de ensino que faz uso de “Engenharias de ensino”, cujo a aprendizagem ocorre de maneira sistemática em um determinado contexto. E que seu objetivo é desenvolver teorias que auxiliam a aprendizagem (SANTOS, 2019).

trabalho possibilitou que os alunos a relacionassem à sua realidade por meio de uma metodologia diferente.

Os trabalhos citados trouxeram contribuições significativas para esta pesquisa. Os pontos comuns foram que todos os trabalhos abordam a Probabilidade no Ensino Fundamental, além de aplicarem uma sequência didática, em que se buscaram estratégias diferentes do ensino tradicional para abordar o assunto.

Pode-se ressaltar também o uso de jogos adotado por Ramos (2015) e Santos (2019) e de metodologias aplicadas pelos três autores, que colocam o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem. No entanto, estes apresentam algumas diferenças em relação a esta pesquisa, como as metodologias abordadas e o público-alvo (Quadro 4).

Quadro 4 – Resumo das características dos trabalhos relacionados

TÍTULO	AUTOR/ ANO	PROPOSTA	SEMELHANÇA	DIFERENÇA
Experimentos Probabilísticos: noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II	Biajoti (2013)	Realizar uma atividade investigativa didático-pedagógica que utiliza jogos para identificar a linguagem e as ideias sobre pensamentos probabilísticos.	Uso de jogos e experimentação para o 7º ano do Ensino Fundamental.	Uso da metodologia de pesquisa Engenharia Didática.
O Ensino da Probabilidade com o uso de Mágicas	Ramos (2015)	Desenvolver, por meio do uso de mágicas matemáticas e resolução de problemas, conceitos básicos de Probabilidade.	Uso de jogos na sequência didática, e aplicação para o Ensino Fundamental.	Uso da metodologia Resolução de problemas e mágicas matemáticas.
Ecologia De Aprendizagem Sobre Probabilidade Com Estudantes Dos Anos Finais Do Ensino Fundamental	Santos (2019)	Desenvolver e analisar uma sequência de atividades denotada por ele como ecologia de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de Probabilidade	Aplicação da sequência didática para o Ensino Fundamental. Exploração dos princípios aleatórios da Probabilidade no cotidiano.	Uso da metodologia <i>Design Experiments</i> e a ordenação da estruturação dos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e Cálculo de Probabilidade.

Fonte: Elaboração própria.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são descritos os procedimentos metodológicos adotados no desenvolvimento da pesquisa. Porém é relevante retomar o objetivo geral da pesquisa: analisar as contribuições do jogo War - A batalha da Matemática como introdução ao ensino de Probabilidade por meio da Investigação Matemática.

Diante disso, dividiu-se o capítulo em duas seções: na primeira, é abordado o tipo de pesquisa, a metodologia e os instrumentos de coleta de dados adotadas neste trabalho, assim como o público alvo da pesquisa; a segunda seção apresenta a descrição da elaboração da sequência didática e está subdividida em três tópicos, que explicam cada momento da sequência: (i) primeiro momento; (ii) segundo momento e (iii) terceiro momento.

3.1 Tipo de pesquisa

De modo a responder à questão de pesquisa, este trabalho, de cunho qualitativo, desenvolveu-se por meio de uma intervenção pedagógica. Na pesquisa qualitativa, para Gerhardt e Silveira (2009), o pesquisador é, ao mesmo tempo, sujeito e objeto de sua pesquisa. Ademais, não há preocupação com a representação numérica, mas sim com aspectos da realidade que não podem ser quantificados (GERHARDT e SILVEIRA 2009).

Esse tipo de pesquisa tem grande espaço nos estudos das ciências humanas, inicialmente na Antropologia e na Sociologia, depois nas Áreas de Psicologia e Educação (MINAYO, 2001 *apud* GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Por meio da pesquisa qualitativa, os pesquisadores buscam responder o porquê das coisas, demonstrando o que convém ser feito. Como característica da maioria das pesquisas em ciências humanas, não se quantificam os dados, pois estes são não métricos, valendo-se, portanto, de diferentes abordagens (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Para Prodanov e Freitas (2013), o ambiente natural (sala de aula) é fonte direta do pesquisador. Ele mantém contato intenso com o objeto de estudo e o ambiente. Com isso, os dados coletados na pesquisa qualitativa são totalmente descritivos, relatando-se o maior número possível de informações da realidade estudada.

Gerhardt e Silveira (2009) observam que, na pesquisa qualitativa, existe uma influência do pesquisador sobre o objeto e a situação da pesquisa, fato que coincide com a

Intervenção Pedagógica, que tem um caráter mais educacional. No caso da intervenção, o professor-pesquisador identifica a problemática e tem a intenção de descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis sobre seus efeitos, fundamentados nos dados e em teorias pertinentes (DAMIANI *et al.*, 2013).

Esse tipo de pesquisa tem por objetivo “[...] promover avanços, melhorias, nessas práticas, além de pôr à prova tal referencial, contribuindo para o avanço do conhecimento sobre os processos de ensino/aprendizagem neles envolvidos” (DAMIANI, 2012, p.3).

Nesta pesquisa, utilizaram-se os seguintes instrumentos de coletas de dados: (i) observação, (ii) gravação e (iii) registros das respostas dos alunos.

A observação, como já exposto, é uma consequência de uma pesquisa qualitativa, de modo que o pesquisador precisa estar em contato direto com o objeto pesquisado para que possa descrever o maior número possível de dados. Para Prodanov e Freitas (2013, p.103), é uma técnica que “pode ser muito útil para a obtenção de informações. Mais do que perguntar, podemos constatar um comportamento”. Gerhardt e Silveira (2009, p.74) corroboram essa observação ao afirmarem que:

É uma técnica que faz uso dos sentidos para a apreensão de determinados aspectos da realidade. Ela consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar. A técnica da observação desempenha importante papel no contexto da descoberta e obriga o investigador a ter um contato mais próximo com o objeto de estudo.

Com o avanço da tecnologia, foram trazidas contribuições significativas à coleta de dados em função da observação. Aprimorou-se a coleta de dados das pesquisas por meio da videogravação. Como a gravação pode ser revista inúmeras vezes, consegue-se reexaminar, reinterpretar as informações e até observar pontos que não foram descritos antes e que se relacionam ao objeto da pesquisa (BELEI *et al.*, 2008).

A fim de responder à questão de pesquisa, o grupo elaborou uma sequência didática destinada ao 7º ano do Ensino Fundamental, visto que os conceitos de Probabilidade são abordados neste ano. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 311) aponta a habilidade que precisa ser alcançada neste ciclo: “planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências”.

3.2 Elaboração da sequência didática

Sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, conectadas e delimitadas para se ensinar um determinado conteúdo, de maneira estruturada e ajustada pelo professor/pesquisador a fim de alcançar a aprendizagem de seus alunos (PEREIRA, CEDRO; 2015). Além disso, Pereira e Cedro (2015) defendem que formular atividades como sequência didática facilita o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Esta sequência estava planejada para ser aplicada no ensino presencial, porém, com a pandemia da Covid-19, diversas instituições de ensino suspenderam suas atividades presenciais gerando uma grande discussão sobre o prosseguimento das aulas, o uso das tecnologias digitais e o ensino remoto (GUGLIANO; SAINZ, 2021).

Dessa forma, a sequência didática será adaptada para o ensino remoto. Esse modelo permite o uso de plataformas e ferramentas que não sejam estritamente educacionais, apresentando práticas inovadoras, variedade de recursos e estratégias para adoção destes (GARCIA, *et al.*, 2020).

Como uma situação emergencial exige a aplicação de medidas que dão respostas eficazes e rápidas, o ensino remoto não veio para recriar um sistema educacional robusto, mas um escape. Assim, surge a necessidade de adaptar a sequência didática para atender às especificidades do ensino remoto, como a ausência do contato direto com o professor (GUGLIANO; SAINZ, 2021).

A sequência didática está dividida em três momentos: (i) o primeiro momento, consiste na realização do jogo War - A batalha da Matemática; (ii) no segundo momento, será realizada a atividade investigativa; e, (iii) no último, será trabalhada a formalização dos conceitos relacionados ao estudo de Probabilidade e a exploração de atividades envolvendo as relações com o cotidiano.

A seguir estão detalhados os momentos da sequência didática.

3.2.1 Primeiro momento

No primeiro momento, será aplicado o jogo War - A batalha da Matemática, o qual foi criado para esta pesquisa, inspirado no jogo de estratégia WAR (Figura 1), um jogo composto por diversos objetivos.

Figura 1 - Jogo original War



Fonte: www.encurtador.com.br/ikBH4

O War é constituído de um tabuleiro, que pode variar com a versão do jogo, mas as regras e objetivos básicos são os mesmos. Para conquistar os objetivos, são realizados ataques e defesas entre os jogadores, visando à conquista de territórios. Os ataques e defesas são realizados por meio de disputas com dados e com a quantidade de pinos em seus territórios. Sendo assim, vence o jogo o primeiro a alcançar o seu objetivo.

A adaptação, War - A batalha da Matemática (Figura 2), utilizada no trabalho, difere do WAR no tabuleiro, nos pinos e nas regras. O tabuleiro utilizado foi inspirado no mapa do Brasil, estando presentes seus 26 estados, o Distrito Federal e a ilha de Fernando de Noronha, totalizando 28 territórios. Adotaram-se pinos simples e dados convencionais.

Figura 2 - War - A batalha da Matemática



Fontes: Elaboração própria.

As regras do WAR original são mais detalhadas e específicas para o tabuleiro. A fim de simplificar o jogo e favorecer a imparcialidade, as regras foram sintetizadas (Figura 3), estabelecendo-se um único objetivo: fazer o maior número de pontos no tempo estabelecido de partida, quarenta minutos (Apêndice A.1). Cada território equivale a um ponto e cada região dominada por completo equivale a um determinado número de pontos, como descrevem as regras.

Figura 3 - Recorte das regras do jogo War - A batalha da Matemática

War – A batalha da Matemática

Regras

War – a batalha da Matemática consiste em um jogo de estratégia, que mistura muita diversão e matemática.

O objetivo do jogo é único, vence aquele jogador que fizer o maior número de pontos, sendo que cada estado dominado vale um ponto e cada região dominada por completo vale um determinado número de pontos, a região Sul vale 2 pontos, a região Sudeste e Norte valem 3 pontos, a região Centro Oeste vale 4 pontos e o Nordeste vale 6 pontos.

O número mínimo de jogadores são dois integrantes e no máximo quatro.

Ao iniciar cada jogador irá escolher uma cor que representará seus pinos. Após a escolha de cores, é decidido quem irá começar o jogo, para isso, todos os jogadores devem jogar o dado e começará aquele que tirar o maior número. Se houver empate, apenas os jogadores que empataram jogam o dado novamente.

O tabuleiro do jogo é composto por 28 territórios, sendo 26 Estados, Distrito Federal e a ilha Fernando de Noronha. Ainda no início do jogo, os territórios são divididos igualmente entre os jogadores.

A partir da segunda rodada, cada jogador tem direito a um número de pinos para distribuir nos seus estados, sendo que esse número é correspondente a metade da quantidade de estados que cada jogador possui (se a quantidade (n) for par será $\frac{n}{2}$, se for ímpar $\frac{n-1}{2}$) e a distribuição será antes da vez de cada jogador. Porém, apenas na primeira rodada a distribuição é feita por todos ao mesmo tempo, antes do início do jogo.

Os jogadores podem ou não atacar um adversário, tentando conquistar mais territórios

Para atacar o jogador tem que ter no mínimo 2 pinos no território, podendo atacar no máximo 3 territórios que fazem fronteira por rodada, sendo que poderá atacar o mesmo território quantas vezes quiser, desde que seja seguido.

O atacante deverá deixar claro qual território irá atacar e de onde irá atacar. Além de os jogadores terem que deixar claro com quantos dados irão atacar e com quantos dados irão defender.

Ativar

Fonte: Elaboração própria.

Além disso, elaborou-se um kit (Figura 4) para auxiliar o jogo. Este tem por objetivo proporcionar aos alunos uma participação mais ativa, simulando a atividade presencial.

Figura 4 - Kit enviado aos alunos participantes



Fonte: Elaboração própria.

O kit contém uma reprodução em menor escala do mapa, a cartilha de regras, três dados, 26 pinos, um prato plástico descartável e um álcool em gel. O mapa e os pinos devem ser usados para que os alunos acompanhem seus territórios e movimentos. Já os dados são para que eles joguem com o apoio do prato descartável, assim poderiam participar do jogo de maneira ativa, visualizando a jogada durante a partida.

3.2.2. Segundo momento

Ao final do jogo, será levantado o questionamento sobre possíveis relações entre o jogo e a Matemática (Figura 5). A pergunta tem o propósito de criar um conectivo entre o jogo e a atividade investigativa. Essa atividade está dividida em três etapas consecutivas nomeadas por primeira etapa, segunda etapa e terceira etapa (Apêndice A.2).

Figura 5 - Questionamento feito aos alunos.

Você acredita que há uma relação entre o jogo e a Matemática?

Fonte: Elaboração própria.

Para o desenvolvimento da investigação, serão feitas perguntas relacionadas ao jogo. Em cada etapa, percebem-se os quatro momentos baseados na Investigação Matemática, metodologia de ensino adotada neste trabalho: (i) exploração e formulação de questões; (ii) conjecturas; (iii) testes e reformulações e (iv) justificção e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016).

A primeira etapa da atividade investigativa é composta por quatro perguntas (Figura 6). Esta tem por objetivo levar os alunos a reconhecerem uma situação-problema, explorarem e pensarem em questões do jogo. Nessa perspectiva, as perguntas iniciais são mais abertas, não havendo respostas certas ou erradas, e sim conjecturas iniciais.

Figura 6 – Recorte da 1ª etapa da atividade investigativa

1) Você acha que, ao iniciar o jogo todos os jogadores têm a mesma chance de ganhar? *

Justifique.

Texto de resposta longa

2) Durante o jogo é mais vantajoso dominar estados em diversas regiões ou priorizar dominar as regiões? Justifique. *

Texto de resposta longa

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda etapa (Figura 7), as perguntas não são tão abertas, há respostas corretas. São cinco perguntas com intuito de organizar ideias, fazer novas conjecturas e refiná-las.

Figura 7 – Recorte da 2ª etapa da atividade investigativa

1) Jogando um dado contra outro, quem tem mais chance de vencer, o atacante ou o defensor? *
Texto de resposta longa
2) Ao realizar um ataque utilizando dois dados e a defesa um dado, suas chances de vitória aumentam? *
Texto de resposta longa
3) Em um ataque, qual o pior número que você poderia tirar? *
Texto de resposta curta

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, a terceira etapa é composta por oito questões (Figura 8). Diferentemente das etapas anteriores, em que a maioria das questões trata de situações hipotéticas e menos específicas, nesta, as questões também são hipotéticas, porém mais direcionadas. O intuito da etapa final é refinar uma conjectura e avaliar o resultado do raciocínio.

Figura 8 – Recorte da 3ª etapa da atividade investigativa

1) Imaginando um possível ataque adversário a um dos seus territórios e supondo que ele tenha *
tirado 3 no dado. Quais serão os possíveis números que você precisa tirar para vencê-lo?

Texto de resposta longa

1.1) Quais são os possíveis números que podem sair no dado? E quantos números são? *

Texto de resposta curta

1.2) Ao jogar o dado sairá o número que você precisa para ganhar? *

Texto de resposta curta

1.3) A quantidade de números que podem te levar a vencer representa quanto em relação a *
quantidade de números que podem sair no dado?

Texto de resposta longa

1.4) Você acha que existe alguma relação entre a quantidade de números que você precisa para *
vencer e a quantidade de números possíveis que podem sair ao jogar o dado?

Texto de resposta longa

Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar o segundo momento, será rerepresentada a pergunta inicial, se existe uma relação entre o jogo e a Matemática. Com isso, espera-se que os alunos identifiquem uma relação específica.

3.2.3 Terceiro momento

No terceiro momento da sequência didática, serão formalizados os conceitos por meio de uma apresentação (Apêndice A.3) (Figura 9), partindo-se dos conceitos de experimentos aleatórios, de espaço amostral e de eventos. Assim, por meio desses elementos, será definida a Probabilidade de acordo com os estudos de Teixeira e Morgado (2011), no modelo

equiprobabilístico, que a definem como a razão entre os números de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis.

Figura 9 - Recorte dos slides para formalização dos conceitos



Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, apresentam-se alguns exemplos de como calcular a Probabilidade e opções de como representá-la (fração, decimal ou porcentagem). Conforme argumentam Gugliano e Sainz (2021), a apresentação (Figura 9) está repleta de figuras que trazem outra linguagem além da textual, não para decorar o material, mas para torná-lo mais atrativo, pois, no ensino remoto, torna-se essencial cativar os alunos.

A seguir, será proposta a atividade *Explorando a Probabilidade* (Apêndice A.4), cujo objetivo é a aplicação dos conceitos de Probabilidade em outros contextos. Sobre isso, os PCN (BRASIL, 1998), salientam que um conhecimento só é completo se o aluno consegue identificá-lo em outras situações, possibilitando a generalização, por vezes até a descontextualização, para que possam ser aplicados em outra abordagem.

Dessa forma, a atividade será iniciada com a questão 1 (Figura 10), que pergunta sobre a relação entre o jogo e a Probabilidade, e se é possível relacioná-la a outras situações. O objetivo é refletir com os alunos sobre o fato de que a Probabilidade vai além do Jogo War - A batalha da Matemática, que também pode estar em outras situações lúdicas ou no dia a dia.

Figura 10 - Questão 1 da atividade *Explorando a Probabilidade*

1) Depois de tudo que foi visto durante a aula, descreva com suas palavras como o jogo se relaciona com a probabilidade. Você consegue enxergar a probabilidade em mais alguma situação do seu dia a dia, seja em um outro jogo ou em outro momento? *

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão (Figura 11), contextualiza-se uma situação hipotética do jogo War - A batalha da Matemática, semelhante ao que acontece na primeira atividade. A diferença é que se pergunta-se sobre a Probabilidade, conceito que será formalizado após a atividade investigativa. Com este exercício, objetiva-se situar o conteúdo estudado de modo que o aluno explore, na perspectiva probabilística, o modo de raciocinar a questão.

Figura 11 - Questão 2 da atividade *Explorando a Probabilidade*

2) Considerando o jogo War adaptado, em uma partida, João resolveu atacar o estado de Ana, sendo que cada um estava jogando com um dado, como João estava atacando jogou primeiro e saiu o número 4 no dado. Quais os números que Ana tem que tirar para ganhar de João? E qual a probabilidade de sair um desses números? *

Fonte: Elaboração própria.

A questão 3 contextualiza os conteúdos de Probabilidade em outras situações para além do jogo. Ela está dividida em alternativas enumeradas alfabeticamente, a fim de apresentar o mesmo contexto para que o aluno enxergue por prismas diferentes o conteúdo estudado. Além disso, a questão visa a promover o debate entre a previsão e o fato.

O item “a” da questão 3 (Figura 12) é uma questão clássica envolvendo o lançamento de uma moeda e a Probabilidade de sair cara ou coroa. Assim, espera-se que o aluno responda, sem dificuldades, à questão. No item “b” dessa mesma questão, os alunos devem abrir um *link* de *site* para que possam realizar o lançamento de uma moeda virtual, marcando o resultado de cada lançamento.

Figura 12 - Questão 3 da atividade *Explorando a Probabilidade*

3-a) Ao lançar uma moeda, qual a chance de sair cara? E coroa? *

[Adicionar ficheiro](#)

3-b) Entre no link encurtador.com.br/awkNU e jogue a moeda 5 vezes e registre todos os resultados na tabela a seguir. *

	Cara	Coroa
1°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: Elaboração própria.

Já o item “c” (Figura 13) objetiva que o aluno descreva quantas vezes irá tirar cara ou coroa ao final dos cinco lançamentos. Por fim, o item “d” da questão três propõe a discussão do fator não determinístico da Probabilidade, reforçando, com isso, a ideia de que este conteúdo estima a possibilidade de um evento ocorrer.

Figura 13 - Continuação da questão 3 da atividade *Explorando a Atividade*

3-c) Qual o total de caras e o total de coroas que você encontrou na letra b?

A sua resposta _____

3-d) O resultado obtido na letra b foi igual ao da letra a? *

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, será proposta a atividade *A Probabilidade fora da sala de aula* (Apêndice A.5), que é totalmente diferente das anteriores por se tratar de uma Probabilidade sem cálculos (Figura 14). O intuito é discutir a Probabilidade por meio de situações que estejam no cotidiano do público-alvo da pesquisa. A primeira questão é baseada numa situação de atraso para a aula, a segunda é sobre um sorteio numa rede social e a terceira é sobre roletas de jogos. Nas três questões não há resposta certa, são questões para debate com a turma. O

objetivo é levar o aluno a entender que a Probabilidade está presente em seu cotidiano em qualquer tomada de decisão, no entanto, na maioria das vezes, não é percebida e muito menos relacionada ao cálculo.

Figura 14 - A Probabilidade fora da sala de aula

A PROBABILIDADE FORA DA SALA DE AULA

QUESTÃO 1
Na maioria das vezes, temos aquele lugar preferido na sala de aula, seja na primeira carteira da fila, seja no fundo ou encostado na parede. Mas também sabemos que sempre tem aquele colega de classe que gosta de sentar no mesmo lugar que gostamos. Se, um certo dia, você se atrasa e sai um pouco mais tarde de casa, qual a probabilidade de chegar a sala de aula e encontrar o seu lugar vago?

Instagram

QUESTÃO 2
Diariamente vemos postagens sobre sorteios em nossas redes sociais, o Instagram tem ganhando grande destaque nesse segmento. Muitas lojas, pessoas influentes, músicos e conhecidos como *digital influencer* fazem sorteios em suas redes sociais. Para participar precisamos geralmente seguir alguma página, curtir uma foto e marcar alguns amigos. Você já parou pra pensar em qual a sua chance de ser contemplada nesses sorteios?

QUESTÃO 3
Muitas vezes em nosso cotidiano nós deparamos com as roletas para sortear ou decidir alguma coisa. Geralmente, podemos escolher o que queremos ganhar na roleta e assim torcer pelo "prêmio" que queremos. Sabendo que a professora de matemática resolveu dar uma chance para vocês escolherem as questões da prova através da roleta. Nesta roleta tem 20 questões: 10 difíceis, 5 fáceis, 3 médias e 2 muito difícil. Na prova terá 10 questões. Vocês acham uma boa?

Fonte: Elaboração própria.

Devido à extensão da proposta didática, planeja-se a experimentação em três encontros de duas aulas cada. No primeiro encontro, será realizado o jogo War - A batalha da Matemática. No segundo, será trabalhada a atividade investigativa e, por fim, no terceiro encontro, ocorrerá a formalização dos conceitos e a realização das atividades: *Explorando a Probabilidade* e *A Probabilidade fora da sala de aula*.

4. RELATO DE EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, relatam-se duas aplicações da sequência didática. A primeira com licenciandos em Matemática no formato de teste exploratório, com finalidade de verificar se os enunciados estavam claros, se os objetivos da pesquisa seriam contemplados e se estava adequada ao público-alvo. Na segunda, a experimentação da sequência, realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

4.1 Teste exploratório

A realização do teste exploratório teve por objetivo: i) verificar se a sequência didática está de acordo com o objetivo do trabalho e contemplando o público alvo; ii) verificar se os enunciados estão claros; e iii) averiguar se o tempo reservado para a realização do jogo e das atividades é suficiente.

O teste exploratório ficou dividido em três momentos, dois síncronos, que ocorreram nos dias 10 e 13 de maio de 2021, e um momento assíncrono, que foi proposto para os dias compreendidos entre esses dois encontros. Os momentos síncronos foram realizados de forma remota pela plataforma *Google Meet*, tendo o primeiro encontro uma hora de duração para cada grupo de licenciandos participantes e o segundo encontro, duas horas-aula de duração.

A inscrição para o teste exploratório foi divulgada para o curso de Licenciatura de Matemática, objetivando-se selecionar os seis primeiros licenciandos que se inscrevessem e que não houvessem cursado a disciplina de Pensamento Combinatório e Probabilidade, e os seis primeiros que se inscrevessem que já houvessem cursado essa disciplina, totalizando doze alunos participantes.

As inscrições ficaram abertas por cinco dias, do dia 4 de maio até o dia 8 de maio de 2021. Onze licenciandos se inscreveram e destes, cinco já tinham cursado a disciplina e seis ainda não haviam cursado.

Para facilitar a comunicação com os licenciandos participantes, foi criado um grupo de conversa no aplicativo *Whatsapp* antes da realização do primeiro encontro. Neste, em um primeiro momento, foram enviadas as regras, as informações e os vídeos explicativos sobre o jogo, para que pudessem analisar, antes do primeiro encontro, e tirar suas dúvidas em relação ao jogo antes de sua realização.

No primeiro momento síncrono, com a realização do jogo, dividiram-se os licenciandos em três grupos. O primeiro e o terceiro grupo tiveram quatro licenciandos, já o segundo teve dois. Assim, para cada grupo, ficou reservado um determinado horário estipulado, em um intervalo de uma hora.

Os licenciandos foram participativos, se interessaram pelo jogo e interagiram entre si. Nos primeiros minutos, todos os grupos aproveitaram para tirar algumas dúvidas que ainda permaneceram. Observou-se que cada grupo tinha um ritmo de jogo, de acordo com seus participantes. Alguns grupos conseguiram jogar um número maior de rodadas no tempo estipulado, de quarenta e cinco minutos.

Durante a realização do jogo foram feitas algumas sugestões por parte dos participantes, como: alterar as cores dos pinos utilizados, pois o pino laranja e o pino vermelho estavam gerando dificuldades na hora de visualizar pela videochamada, alterar a cor da região nordeste, que estava dificultando visualizar a sigla de cada estado; acrescentar três legendas, uma que identificasse as regiões pelas cores utilizadas no mapa, outra sobre o número de pinos que se obtinha ao dominar uma região durante a partida e a última que descrevesse o número de pontos que cada região dominada valia ao final do jogo.

Além disso, sugeriu-se a modificação de uma das regras, de modo que a comparação dos dados não fosse mais feita um a um, mas sim a confrontação do dado de maior valor com o de maior valor do oponente, independente de quantos fossem jogados. Porém esta sugestão não foi acatada, pois o intuito é levar o aluno a refletir sobre os riscos e suas chances ao usar todos os pinos para atacar ou defender.

Como os licenciandos participantes realizaram diversas sugestões durante o jogo, optou-se por criar e enviar outro formulário com espaço para registrá-las. A única sugestão recebida, diferente das demais, foi a de usar dados com mais de seis faces. Contudo, isso atrapalharia o andamento do jogo, visto que existiam 28 territórios.

No segundo momento, assíncrono, foram enviados, para os participantes, os formulários a serem respondidos e o material para ser avaliado:

- Formulário da atividade investigativa (Apêndice A.2);
- Formulário da atividade *Explorando a Probabilidade* (Apêndice A.4);
- Formulário para realização de sugestões em relação ao jogo War - A batalha da Matemática (Apêndice C.1)
- Slides do momento de formalização do conteúdo (Apêndice A.3);

- Slides da atividade *A Probabilidade fora da sala de aula* (Apêndice A.5).

Dos formulários, apenas os dois primeiros eram de caráter obrigatório. Foi pedido que eles respondessem até o próximo encontro, que ocorreu três dias depois, para a realização da discussão das atividades.

Todos os participantes responderam o formulário da atividade investigativa. A primeira etapa desta atividade não tinha respostas corretas, mas foi possível observar diferentes perspectivas como na primeira questão da atividade, que pergunta se todos os jogadores têm a mesma chance de vitória ao iniciar o jogo (Figura 15).

Figura 15 - Respostas dos licenciandos à questão 1 da atividade investigativa

Não, pois o jogo é distribuído posições aleatórias, mesmo sendo 7 posições pra cada, pode vir a ocorrer de um jogador já começar com a maioria de um território ou com todo ele.
Acho que depende um pouco de como foi a distribuição do território, uma vez que se um jogador tem muitos estados na região Nordeste e ele entende que tem que defender aquela região e conquistá-la por completo, talvez isso confira alguma vantagem a este jogador
Sim, os territórios são distribuídos igualmente, assim como a ordem de começo que é tirada no dado
Sim. Por que todos começam com mesma quantidade de território.
Acho que não, pois quando for distribuída as cartas, se uma pessoa conseguir mais pinos em um território maior ela tem mais chances de vencer se conseguir tomar todo aquele território.
Depende, como cada jogador possui três ataques, e caso o jogador que for sorteado para iniciar o jogo resolva usar estratégias e se a sorte for a seu favor ele possuirá vantagens e maior chance de ganhar do demais.

Fonte: Elaboração própria.

Em relação às sugestões feitas nesta etapa, aconselhou-se acrescentar uma imagem para relacionar ao texto e deixar mais clara a quantidade de ataques permitidos para o jogador. A partir das sugestões, acrescentou-se a imagem na questão quatro da primeira etapa.

Na segunda etapa da atividade investigativa, que continha três perguntas com um total de cinco itens, as questões tinham uma única resposta correta. No Gráfico 1, observa-se o número de acertos em cada questão.

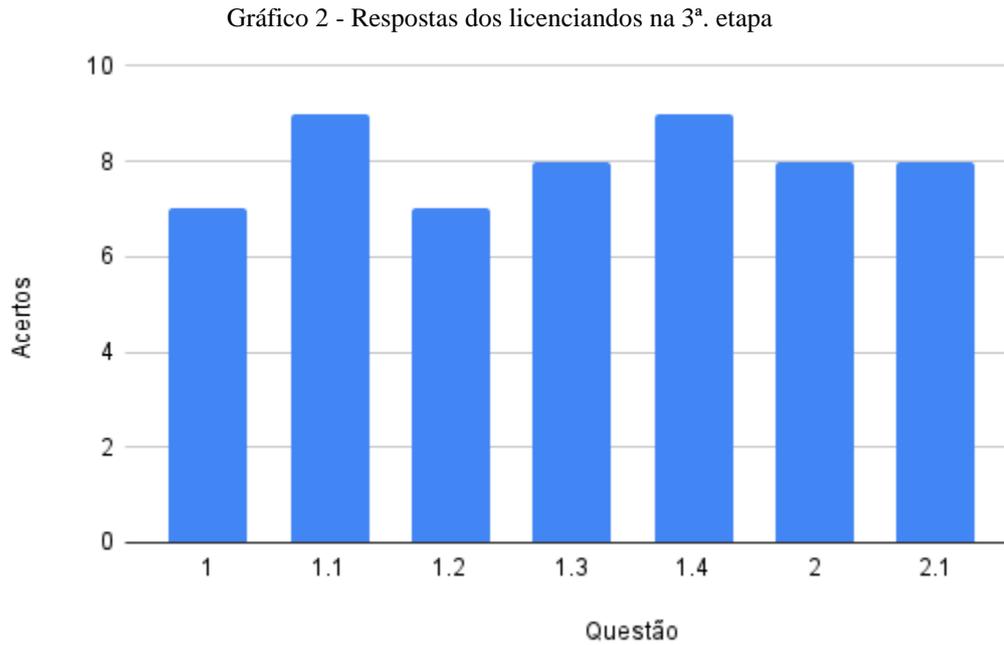


Fonte: Elaboração própria.

Na questão 1, em que se questionou quem tem mais chances de vitória em uma disputa de um dado contra um, apenas um dos licenciandos respondeu que seriam iguais, enquanto os demais identificaram que seria o defensor. Já na questão 2, que perguntava se, ao jogar com dois dados, aumentariam as suas chances de vencer, a maioria dos licenciandos respondeu sim, enquanto dois participantes não conseguiram chegar a essa mesma conclusão, um respondeu que não aumentaria e o segundo disse que não sabia.

Os licenciandos sugeriram a utilização de outro tabuleiro, com o mapa da cidade Campos dos Goytacazes e acrescentar uma nova questão com simulação de uma situação do jogo. Esta última sugestão já estava contemplada na terceira etapa.

Na terceira etapa, com exceção da última pergunta, esperou-se que os licenciandos chegassem a determinadas soluções previstas. No Gráfico 2, é possível observar o número de alunos que chegaram a essas soluções.



Fonte: Elaboração própria.

Percebeu-se que os dois erros da questão 1 se deram pelo fato de o enunciado não estar claro. Isso foi confirmado pelos licenciandos no segundo encontro síncrono.

Figura 16 - Questão 1 da terceira etapa da atividade investigativa

1) Supondo que o seu adversário tirou 3 no dado, para vencê-lo quais os possíveis números você deve tirar? E quantos números são ?

Fonte: Elaboração própria.

Já na questão 1.2, em que foi questionado se, ao lançar o dado, cairia o número que necessário para ganhar, destacaram-se as respostas de dois licenciandos: um respondeu que possivelmente, enquanto o outro aluno não entendeu a pergunta (Figura 17).

Figura 17 - Respostas dos licenciandos à questão 1.2 da atividade investigativa

Possivelmente.

Não entendi essa pergunta

Fonte: Elaboração própria.

Ainda nesta etapa sugeriu-se, novamente, o uso de dados com mais faces, reformular a questão, especificar o número de dados da questão 1.1, rever a necessidade da questão 1.4 e analisar a relação da questão 1 com seus subtópicos (Figura 18).

Figura 18 - Sugestões dos licenciandos relativas à terceira etapa da atividade investigativa

Formular melhor a pergunta 1.
 Na 1.1 colocar: Quais são os possíveis números que podem sair COM UM dado? E quantos números são?
 Na estrutura de formulário acho que tem que deixar mais explícito a relação da pergunta 1.1 com a pergunta 1, assim como todas as outras que se relacionam.
 A pergunta 1.4 acho que está um pouco solta.
 Poderiam liberar o uso de dados de 4 até 20 faces.

Fonte: Elaboração própria.

Em relação à atividade *Explorando a Probabilidade*, oito licenciandos responderam o formulário. Suas sugestões foram: repensar a questão 3, deixando o item “d” mais claro e elaborar uma atividade que envolvesse dados com mais faces, cartas de baralho e jogo com moedas (Figura 19).

Figura 19 - Sugestões dos licenciandos relativas à atividade *Explorando a Probabilidade*

A questão 3.d não ficou clara pra mim.
 Muito interessante, poderiam fazer uma atividade envolvendo cartas de baralho e com outros tipos de dados de 4 à 20 faces ou até juntando em um jogo com moedas, dados e cartas de baralho.
 Acho que a questão três pode ser repensada

Fonte: Elaboração própria.

O terceiro momento do teste exploratório se deu por meio do encontro síncrono, no qual se apresentou todo o material utilizado na proposta didática e como este se relaciona com a proposta deste trabalho. A cada material mostrado, foram discutidas novamente sugestões, modificações a serem feitas e em que contexto aquela atividade ou material se encaixaria.

Em relação ao jogo, foi sugerido, novamente, o uso de dados com maior número de faces, o acréscimo de legendas no mapa e a modificação da cor da região sudeste, o que possibilitaria uma melhor visualização do mapa e das fronteiras entre os estados.

Na atividade investigativa, sugeriram, mais uma vez, que fosse inserida imagem do mapa na primeira etapa da atividade, que na terceira etapa fosse revisada a questão 1 e seus desdobramentos, e, por fim, o uso de frações em uma das questões da terceira etapa.

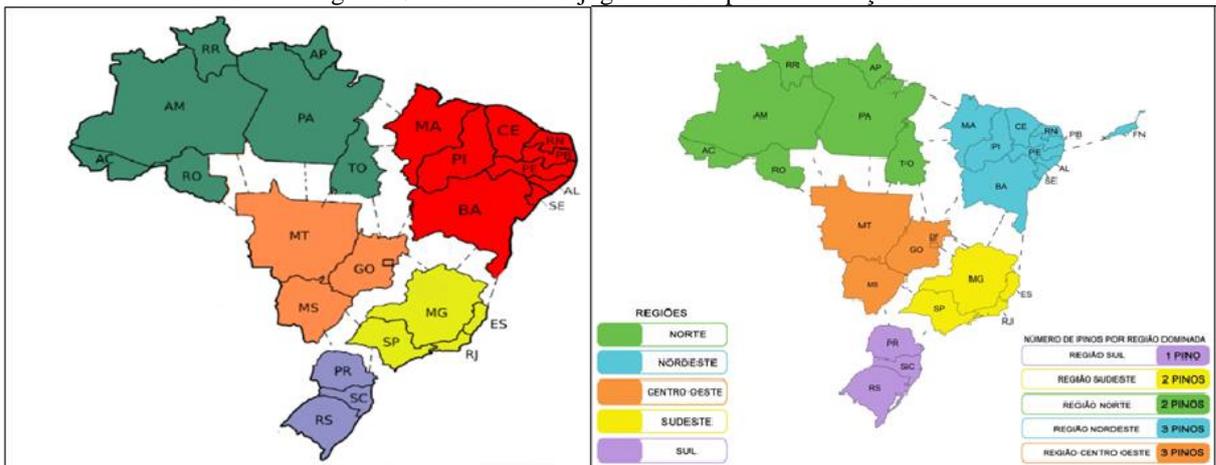
Em relação à atividade *Explorando a Probabilidade*, sugeriu-se que o item “b” da questão 3 fosse alterado para que o jogador lançasse a moeda seis vezes em vez de cinco. Além disso, modificar o item “a” e o item “d” da questão 3. Argumentaram que o item “d”

tem o intuito de fazer uma comparação entre a Probabilidade que eles calcularam no item “a” e a Probabilidade referente às moedas que eles lançaram no item “b”, sendo que o item “a” pede para calcular a Probabilidade ao se lançar a moeda apenas uma vez e que, no item “b”, a moeda é lançada cinco vezes.

4.2 Modificações na sequência didática

Dentre as sugestões relacionadas ao jogo, optou-se por modificar a cor da região nordeste, pois estava dificultando a leitura da sigla dos estados e os tons das cores das outras regiões (Figura 20). Já em relação às legendas do mapa, foram acrescentadas duas, uma que identifica as regiões de acordo com sua cor e outra em relação ao número de pinos que se ganha por cada região dominada durante uma partida.

Figura 20 - Tabuleiro do jogo antes e após modificações



Fonte: Elaboração própria.

Na atividade investigativa, foram feitas apenas três modificações (Apêndice B.1). Na primeira etapa, na questão 4, optou-se por acrescentar uma imagem do tabuleiro para auxiliar o aluno a responder às questões (Figura 21), já que estas simulam uma situação do jogo na qual é necessário situar-se na localização dos estados.

Figura 21 - Questão 4 com o acréscimo da imagem.

4) Supondo que, em uma rodada você possui os estados de Mato Grosso, Goiás, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Espírito Santo e São Paulo. Está na sua vez de jogar e você decide atacar pelo estado de São Paulo, a partir deste você pode atacar os estado de Minas Gerais, Rio de Janeiro, Mato Grosso do Sul e Paraná. Qual destes estados você atacaria a partir de São Paulo? Justifique. *

4) Supondo que, em uma rodada você possui os estados de Mato Grosso, Goiás, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Espírito Santo e São Paulo. Está na sua vez de jogar e você decide atacar pelo estado de São Paulo, a partir deste você pode atacar os estado de Minas Gerais, Rio de Janeiro, Mato Grosso do Sul e Paraná. Qual destes estados você atacaria a partir de São Paulo? Justifique. *

REGIÕES	
■	NORTE
■	NORDESTE
■	CENTRO OESTE
■	SUDESTE
■	SUL

NÚMERO DE PINOS POR REGIÃO DOMINADA	
1 PINO	REGIÃO SUL
2 PINOS	REGIÃO SUDESTE
2 PINOS	REGIÃO NORTE
3 PINOS	REGIÃO NORDESTE
3 PINOS	REGIÃO CENTRO OESTE

Fonte: Elaboração própria.

A partir das sugestões feitas pelos participantes do teste exploratório, evidenciou-se a necessidade de se reescrever a questão 1 da terceira etapa (Figura 22) e excluir a questão 2.1. Pode-se concluir que tanto a questão 2 quanto a questão 2.1 tinham o mesmo objetivo e a mesma resposta esperada, tornando-se, assim, repetitivas. Desse modo, foi excluída a questão 2.1.

Figura 22 - Questão 1 antes e após modificações

1) Supondo que o seu adversário tirou 3 no dado, para vencê-lo quais os possíveis números você deve tirar? E quantos números são? *

1) Imaginando um possível ataque adversário a um dos seus territórios e supondo que ele tenha tirado 3 no dado. Quais serão os possíveis números que você precisa tirar para vence-lo? *

Fonte: Elaboração própria.

Na atividade *Explorando a Probabilidade* (Apêndice B.3), foi modificada apenas a questão 3. O item “b” passou a contar com seis lançamentos do dado em vez de cinco, pois era necessário um número par de experimentos para a comparação entre a Probabilidade do item anterior e os lançamentos deste, para a discussão no item “d” (Figura 23).

Figura 23 - Item “b” da questão 3 antes e após modificação

3-b) Entre no link encurtador.com.br/awKNU e jogue a moeda 5 vezes e registre todos os resultados na tabela a seguir.	Cara	Coroa	3-b) Entre no link encurtador.com.br/awKNU e jogue a moeda 6 vezes e registre todos os resultados na tabela a seguir.	Cara	Coroa
1°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	5°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			6°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: elaboração própria.

O enunciado do item “d” foi reescrito de modo a atender o objetivo da questão, que era levar o aluno a comparar o resultado calculado e o resultado obtido a partir da experimentação (Figura 24).

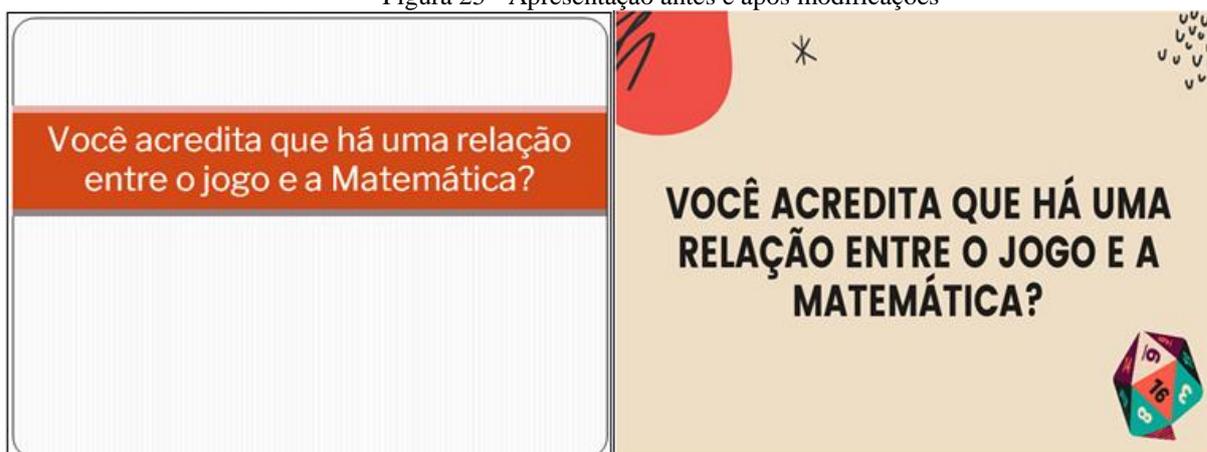
Figura 24 - Item “c” da questão 3 antes e após modificação

3-d) O resultado obtido na letra b foi igual ao da letra a? *
3-d) É possível enxergar uma relação entre a resposta da letra a e o resultado obtido na letra b? * Justifique.

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, foi modificado o *design* do slide do questionamento inicial da atividade investigativa, padronizando-o com o dos formulários, de modo a situar os alunos de que são parte de uma mesma atividade (Figura 25).

Figura 25 - Apresentação antes e após modificações



Fonte: Elaboração própria.

Feitas as alterações a partir das sugestões dadas no teste exploratório, a sequência didática estava pronta para a experimentação com os alunos do Ensino Fundamental.

4.3 Experimentação

A experimentação aconteceu de forma remota em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada do município de Campos dos Goytacazes – RJ. Realizou-se em três dias, 15, 16 e 17 de junho do ano de 2021. Os dois primeiros encontros foram no contraturno das aulas regulares da turma. Já o último encontro foi no horário regular de aula. A turma tinha 38 alunos. No primeiro encontro, estavam presentes 26 alunos, no segundo, 17 alunos e, no último, 32 alunos. Entretanto foram analisadas apenas as respostas dos 12 alunos que participaram de todas as etapas da experimentação.

Para fins de relato, nesta pesquisa, os alunos foram denominados como A, B, C, D, até o aluno L, o que foi mantido ao longo de todo o trabalho. Para compartilhar o material e os *links* necessários para os encontros, a professora regente criou uma sala de aula virtual na plataforma *Google Classroom*.

4.3.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro, realizado no dia 15 de junho do ano de 2021, com duração de uma hora para cada grupo de alunos, contou com a participação de 26 alunos. Destes, apenas 12 alunos participaram de toda a proposta. Inicialmente, os estudantes foram divididos em

oito grupos, com quatro integrantes cada, para a realização do jogo, sendo que três grupos jogavam simultaneamente, cada um com a orientação de um pesquisador. Os próprios alunos organizaram as divisões dos grupos que foram nomeados Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 até Grupo 8. Vale ressaltar que o Grupo 8 não compareceu ao primeiro encontro.

Antes da realização do jogo, foi disponibilizado, na sala de aula virtual, o mapa do jogo, a cartilha de regras e vídeos explicativos sobre a sua funcionalidade. Dos 12 alunos, apenas dois não conseguiram retirar o kit que ficou disponível na portaria da escola, o qual tinha o intuito de auxiliar na participação do aluno no jogo. Percebeu-se, ao longo do primeiro encontro, que os grupos nos quais todos os integrantes retiraram os kits na escola, conseguiram participar das atividades de modo mais ativo e jogaram as partidas no tempo estipulado.

Pode-se observar também que cada grupo tinha um ritmo de jogo e estratégias diferentes. No Grupo 1, os alunos A, B, J e L foram bem participativos e interagiram entre si. Durante a partida, três dos quatro jogadores se atacaram e contra atacaram entre si, esquecendo o aluno B, que acabou ganhando o jogo. Este aluno aproveitou que os outros participantes esqueceram-se dele para dominar mais territórios.

Enquanto isto, o Grupo 2 foi o que jogou de forma mais defensiva, tendo os alunos F e G jogado mais ofensivamente. Isso é perceptível no posicionamento dos pinos no tabuleiro ao final do jogo (Figura 26), já que alguns territórios ficaram com uma quantidade considerável de pinos.

Figura 26 - Tabuleiro ao final do jogo do Grupo 2



Fonte: Elaboração própria.

Na maioria das vezes, os alunos apenas colocavam os pinos nos territórios e passavam a vez. Quando resolviam jogar, atacavam apenas um território. Raramente algum aluno atacava mais de um território em uma mesma rodada. Apenas na última rodada, os dois jogadores aproveitaram todas as chances para atacar. A justificativa deles durante a partida era de que estavam protegendo seus territórios. Observou-se que, quando perdiam algum pino ou território, recuavam mais ainda, com receio de perderem.

O Grupo 3 foi bem participativo. Todos os alunos estavam com o kit. Por ser um grupo ativo, observou-se que os alunos conseguiram aproveitar de forma positiva o tempo estipulado. Como houve empate para o primeiro lugar, optou-se por desempatar jogando o dado. O participante H ficou chateado com o último lugar. O que estava posicionado em segundo doou seus territórios para H, ficando este em segundo lugar, já que isso ocorreu após o desempate da primeira colocação. Ao observar o tabuleiro no final da partida (Figura 27), percebeu-se que um dos jogadores priorizou conquistar territórios sem fronteira, em vez de conquistar a região centro-oeste, o que lhe daria a vitória.

Figura 27 - Tabuleiro ao final do jogo do Grupo 3



Fonte: Elaboração própria.

Todos os alunos do grupo 4 pegaram o kit na escola, e o jogo começou com todos os integrantes. Os alunos foram bastante participativos e competitivos. No lançamento dos dados para ver quem ia começar o jogo, houve empate e foi necessário realizar o segundo lançamento. Do mesmo modo, no final do jogo, houve um empate na disputa do segundo lugar, e também foi feito o lançamento do dado para o desempate. É importante ressaltar que um aluno tinha experiência com o jogo e que, em alguns momentos, tirava a dúvida dos demais.

No Grupo 5, apenas um aluno pegou o kit na escola, e a partida iniciou-se com apenas dois alunos. Sendo assim, foi necessária a participação dos dois licenciandos que estavam acompanhando o grupo. Entretanto, os outros dois jogadores entraram na sala de aula virtual no decorrer da partida, um ficou até o final e o outro saiu no meio. A partida foi interessante, pois, apesar de apenas um aluno ter acesso ao kit, todos foram bem participativos.

No Grupo 6, ao iniciar a partida, todos os alunos estavam presentes e apenas dois tinham o kit. Assim foi necessário que o licenciando jogasse os dados para esses alunos. No decorrer da partida, todos interagiram bem e fizeram movimentos interessantes. Ao final da partida, um jogador conseguiu dominar uma região.

No Grupo 7, três alunos participaram do encontro, e um não pegou o kit . Dessa forma, o licenciando que estava mediando o jogo precisou participar. Os estudantes foram participativos e competitivos. Em alguns momentos, um dos discentes teve problemas na conexão da *internet*, o que atrasou um pouco o andamento do jogo. No final, houve um empate entre dois alunos na disputa do primeiro lugar. Um deles era o aluno com problema na conexão. Assim, ele não conseguiu disputar o desempate.

No primeiro momento da sequência didática, no qual ocorreu o jogo, perceberam-se as características descritas por Grandó (2000), já que a alegria, o prazer, o interesse pelas regras e a motivação foram o ponto central por parte dos alunos e os pesquisadores entrevistaram tirando dúvidas referentes ao jogo.

4.3.2 - Segundo encontro

O segundo encontro foi realizado no dia 16 de junho de 2021, com duração de duas horas-aula. Contou com a presença de 20 alunos, porém 17 responderam a atividade. Entretanto, foram analisadas apenas as respostas dos 12 alunos que participaram de toda proposta de sequência didática.

Neste encontro, ocorreu a aplicação da atividade investigativa (Apêndice B.1), por meio do *Google Forms*, que foi disponibilizada para os alunos no horário do encontro pela sala de aula virtual e no *chat* do *Google Meet*.

A atividade foi iniciada com o questionamento inicial, em que era perguntado se havia uma relação entre o jogo realizado no primeiro encontro e a Matemática. Conforme apontado pelos PCN (BRASIL, 1998) e Grandó (2000), o jogo foi uma maneira interessante de propor o questionamento inicial, pois os alunos ficam motivados. Além disso, constituiu-se em uma ferramenta para permitir que os alunos ficassem concentrados nas atividades que estavam sendo realizadas na sequência didática. Como a aplicação da sequência ocorreu de forma remota, controlar a atenção dos alunos ficou ainda mais complicado do que em uma sala de aula presencial. O desafio realmente foi aproveitar o prazer proporcionado pelo lúdico, para o desenvolvimento da atividade investigativa. Eles, insistentemente, perguntavam quando jogariam novamente.

Assim, iniciou-se o seguinte diálogo com os alunos:

Pesquisador: Você acredita que há uma relação entre o jogo e a Matemática?

Aluno L: Muitos jogos precisam de estratégia ou até usar os dados, como o War ou o que vocês fizeram. O dado tem números. Número entra um pouco na questão da Matemática. Dá pra achar a Matemática em um jogo de tiro, dá pra achar Matemática em quase tudo.

Aluno K: Uma tia e um tio meu são professores de Matemática. O meu tio, ele sempre tem jogos, tipo ele tem muitos jogos de tabuleiro, de estratégia, às vezes eu jogo com ele. Eu estava estudando um "negócio lá" de números negativos, eu joguei com ele e aprendi jogando.

Pesquisador: Aluno F, você está com a mão levantada, pode falar é a sua vez.

Aluno F: Esse jogo, ele envolve bastante a Matemática em fazer pensar na questão de sorte, em pensar se vale a pena conquistar aquele lugar ou não.

Pesquisador: Deixa eu ver quem mais está com a mão levantada, aluno B.

Aluno B: A relação, que eu acho, que tem entre o jogo e a Matemática é o raciocínio que você tem que ter para jogar é a mesma.

Pesquisadores: Hoje iremos investigar exatamente isso.

...

Após o diálogo com os alunos, eles foram orientados em relação à atividade investigativa, sendo solicitado que respondessem uma etapa por vez, e, ao final de cada uma, compartilhassem suas respostas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) alegam que, em todos os momentos, pode haver interação entre os investigadores interessados nas mesmas questões. Os estudantes participaram de forma ativa. Nem todos expuseram as suas respostas e não encontraram dificuldades.

Além do diálogo ao final de cada etapa, houve o registro das respostas dos alunos por meio do formulário respondido durante o encontro. Foi solicitado que eles não alterassem seus registros durante e após o diálogo. Em alguns casos, durante a discussão, os alunos chegaram a uma resposta diferente daquela registrada no formulário.

Na questão 1 da primeira etapa, apenas dois alunos não concordaram que todos os jogadores tinham a mesma chance de ganhar ao iniciar o jogo. O aluno A justificou que nem todos têm a mesma estratégia e o aluno D usou como justificativa que o jogo era de Probabilidade.

Dos alunos que responderam sim, quatro deles justificaram que todos começam com a mesma quantidade de pinos. Outro afirmou que sim, porque todos começam com a mesma quantidade de territórios. Alguns alunos usaram a questão da sorte e da estratégia para justificar, como os alunos F e I (Figura 28).

Figura 28 - Respostas dos alunos F e I, respectivamente, para a questão um da 1ª etapa

Eu acho que sim, mas se você estiver ganhando e fizer uma jogada errada, você pode acabar perdendo, e se tiver sorte também ajuda.

Sim, pois depende muito da estratégia que ela irá usar durante o jogo e também depende muito se ela conseguirá tirar os números certos nos dados.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Além dos registros das respostas (Figura 31), houve a seguinte discussão entre os pesquisadores e alunos:

Aluno G: Pra mim no começo do jogo, eu acho que tem a mesma chance, porque vai ser dividido 7 pinos, eu acho que são 7 pinos, não é?

Pesquisadores: Isso, são 7 para cada.

Aluno G: Então é 7 pinos para cada um. Então no começo, quando está iniciando, eu acho que todo mundo tem a mesma chance, a pessoa tem que usar os pinos como achar melhor e se tiver sorte nos dados vai vencer.

Aluno K: Eu acho que não. Porque no começo, pelo menos foi o que entendi, quem começa tem chance de ganhar e no final quem começou talvez perca, porque às vezes fez uma jogada errada.

Pesquisadores: Aluno J pode falar.

Aluno J: Eu ia falar a mesma coisa que o aluno G, a gente começa com a mesma quantidade de pinos, no começo tem a mesma coisa e a estratégia depende de cada um.

Aluno E: Eu ia falar também o mesmo que o Aluno J e o aluno G, a questão do pino, no começo tem a mesma quantidade de pino e aí é a mesma chance para cada um, alguns podem ter sorte.

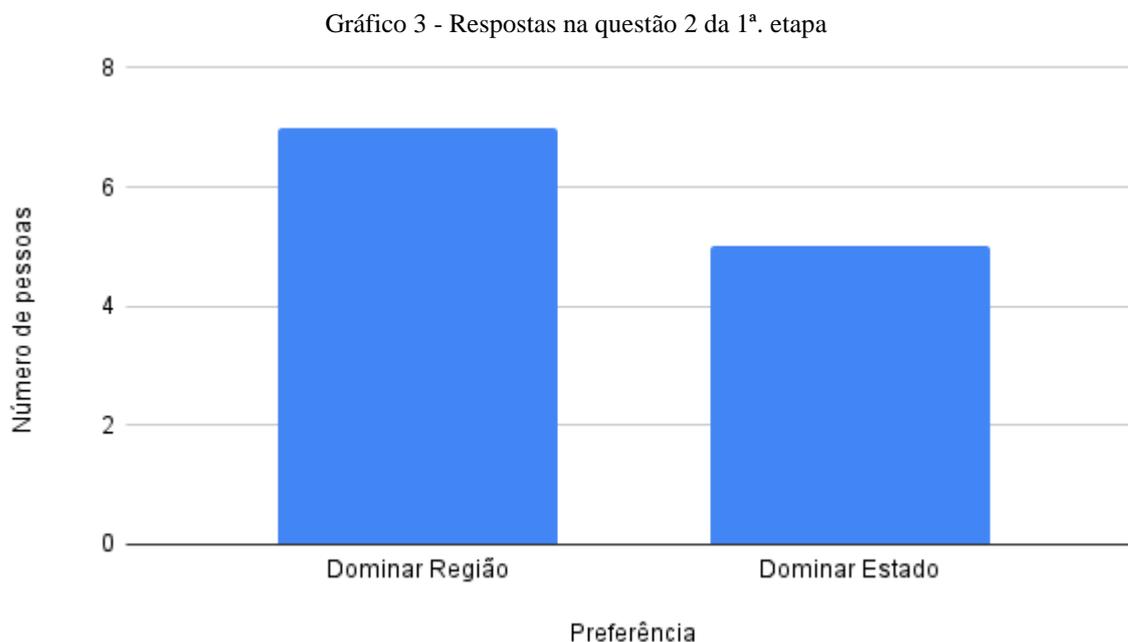
Aluno J: Aí tem a questão da sorte. Aconteceu comigo, eu só ficava tirando um.

Aluno C: Eu só ficava tirando número baixo 1,2 e 3.

Aluno E: Eu também.

...

Na questão 2, os alunos foram indagados se era mais vantajoso dominar as regiões ou os estados. Esta pergunta dividiu opiniões, mas a maioria respondeu ser a região (Gráfico 3).



Fonte: Elaboração própria.

Dos sete alunos que afirmaram ser a região, três deles justificaram que a região era mais vantajosa (Figura 29), já que lhes daria pinos a mais.

Figura 29 - Resposta do aluno F para a questão 2 da 1ª. etapa

É mais vantajoso priorizar dominar regiões, porque além dos pontos por todos estado, cada região tem uma determinada quantia de pinos a mais ao dominar ela por completo.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Já com os alunos que priorizaram os estados, as justificativas foram bastante divergentes entre si, a saber: “dominar estados pode acabar lhe dando mais pinos”; “pode contribuir na hora de conseguir atacar mais pessoas”, ou ainda na questão do risco como aponta o aluno G (Figura 30).

Figura 30 - Resposta do aluno G para a questão 2 da 1ª. etapa

Para mim tem mais vantagem de dominar o estado todo porque tem menos risco de outros participante pegar sua parte .

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A questão 3 perguntava qual região era mais vantajosa de se conquistar. Nessa questão, não era obrigatória uma justificativa. Contudo, muitos alunos justificaram suas

respostas. Algumas foram para o lado mais criativo e estratégico, como a resposta do aluno F (Figura 31).

Figura 31 - Resposta do aluno F para a questão 3 da 1ª. etapa

A região nordeste, porque além de ter mais estados, também tem a ilha de Fernando de Noronha.

Fonte: Protocolo de Pesquisa.

Já para outros, era interessante conquistar alguma região para obter mais pinos na próxima rodada, como afirma o aluno A (Figura 32).

Figura 32 - Resposta do aluno A para a questão 3 da 1ª. etapa

A região centro oeste porque se dominar ela vc ganha mais números de soldados

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Além disso, enquanto a região centro-oeste foi a mais escolhida, pode-se perceber que os alunos acabaram deixando a região norte um pouco de lado, já que nenhum deles optou por conquista-la.

A questão 4 (Figura 33), surge um pouco diferente. Os investigadores precisaram tomar uma decisão com base em uma situação hipotética do jogo e devem justificar sua resposta. Desse modo, surgiram muitas respostas e justificativas diferentes.

Figura 33 - Questão 4 da primeira etapa da atividade investigativa



Fonte: Elaboração própria.

Os alunos priorizaram, em sua maioria, estados da região sudeste, alguns com o intuito de dominar a região e outros apenas com o objetivo de dominar o Rio de Janeiro, como o aluno G e o aluno L (Figura 37). O aluno G, demonstrou a estratégia de manter seus territórios minimizando os possíveis pontos de ataque. Na sua resposta, é possível perceber certa preocupação com o acaso. Enquanto os outros alunos justificaram a questão como se fosse garantida a vitória, este teve a atenção de ressaltar que poderia ou não ganhar.

Figura 34 - Resposta dos alunos G e L, respectivamente, à questão 4 da 1ª etapa

Rio de Janeiro para ter mais proteção .

Minas Gerais pois se eu ganhar iria faltar pouco para dominar a região sudeste

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em alguns momentos na questão quatro, os próprios alunos conduziram a discussão, expondo suas respostas e justificativas, como podemos ver no trecho do diálogo a seguir:

Aluno L: Iria atacar o Rio de Janeiro, porque depois ia dominar a região sudeste para ganhar mais pinos.

Aluno A: Eu ia falar a mesma coisa.

Aluno F: Eu acho que Minas Gerais, não sei porque, mas acho melhor.

Aluno K: Depende muito do seu jogo, se for ofensivo Minas Gerais, porque você vai conseguir atacar o nordeste e o centro-oeste, mas se fosse mais defensivo Rio de Janeiro.

...

No diálogo anterior, os alunos demonstraram estarem atentos a cada tomada de decisão. Não estavam pensando apenas na jogada atual, e sim em possíveis jogadas futuras. Isso fica claro quando o aluno L alegou o interesse em dominar a região sudeste.

A primeira etapa da atividade investigativa tinha o objetivo de iniciar a transição entre o lúdico e o conteúdo matemático. Com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), foram propostas perguntas abertas que conduzissem os alunos na construção de conjecturas.

Com base nos registros e nas discussões analisadas, pode-se observar que os alunos criaram suas conjecturas e começaram a desenvolver o raciocínio probabilístico, por meio da tomada de decisões que eram propostas nas questões 3 e 4, cujas justificativas se basearam nas significações desenvolvidas pelo jogo.

Na segunda etapa da atividade investigativa, a primeira questão perguntava sobre a situação entre ataque e defesa, solicitava saber quem teria mais chances de vitória numa disputa por território. Todos os alunos responderam ser o defensor. Uma das justificativas, a do aluno B, diferenciou-se das demais por ressaltar que o defensor tem a vantagem do empate (Figura 35).

Figura 35 - Resposta do aluno B para a questão 1 da 2ª. etapa

defensor pois os dois tem o mesmo numero nos dados mas o defensor se empatar ganha

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A questão 2 perguntava se, ao atacar com dois dados e a defesa utilizar apenas um, as chances de vitória aumentariam. Apenas dois alunos, A e L, responderam que não, pois justificaram, respectivamente, que só um número maior ganha e que a defesa tem maior possibilidade de conseguir este número. O participante B respondeu que sim e ressaltou que

seria mais arriscado. O intuito da regra, em que cada pino representa um dado, era exatamente levar os alunos a pensarem nos riscos antes de tomarem as decisões de como atacar e defender, assim como no registro do aluno I (Figura 36).

Figura 36 - Resposta do aluno I para a questão 2 da 2ª. etapa

Sim. Mas se em um dado o jogador tirar o número 1 e no outro 2, e o jogador de defesa tirar 5 em um dado só, não adiantaria de muita coisa ter jogado com dois dados.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante o encontro, enquanto se discutiam as respostas dessa questão, pudemos observar que os alunos A e L também expuseram suas justificativas na discussão:

Pesquisadores: Na segunda questão diz: Ao realizar um ataque utilizando dois dados e a defesa um dado, suas chances de vitória aumentam? O que vocês acham?

Aluno K: Com certeza sim.

Aluno C: Eu coloquei que sim, pensando que ele teria uma chance menor de tirar um número ruim, bem baixo, por causa do defensor.

Aluno A: Eu coloquei que não, porque um dado pode tirar um e o outro pode tirar dois.

Aluno L: Eu também coloquei que não, porque depende muito da sorte, nem sempre a sorte vai estar do nosso lado.

Aluno J: Eu coloquei que a Probabilidade de ganhar é maior, porque vai estar dois dados ao invés de um que seria o caso da defesa.

...

Após a justificativa do aluno J, os alunos A e L concordaram que realmente teriam mais chances e todos concordaram que a sorte influencia. Desse modo, os pesquisadores não precisaram intervir.

A questão 3 foi dividida em três itens. A primeira perguntava qual o pior número a ser indicado no lançamento do dado durante um ataque. Houve diferenças entre as respostas registradas no formulário e as levantadas durante as discussões. No primeiro, todos os alunos apontaram o “um” como o pior número. Já no segundo, a maioria da turma concordou que seria o número um, exceto pelo aluno L, então os pesquisadores entrevistaram, realizando alguns questionamentos:

Aluno L: Eu acho que seria um e dois.

Pesquisadores: Entre esses dois números, qual ainda seria o pior? Nós queremos o pior de todos mesmos, o número que você não quer tirar no dado de jeito nenhum.

Aluno L: Aí eu acho que seria o 1 mesmo, não tem jeito, ainda mais no ataque contra a defesa.

...

O diálogo exposto ressalta o papel do professor na investigação, que não é apenas validar as conjecturas dos alunos, mas intervir, a fim de contribuir no processo investigativo (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

Em seguida, para a questão 3.1, que perguntava qual a chance de o pior número sair ao se jogarem os dados, a maioria respondeu que todos os números tinham a mesma chance de sair. Algumas respostas se destacaram neste momento, como as dos alunos C e I (Figura 37).

O aluno C e o aluno I, responderam de forma diferente. Um pensou apenas de forma hipotética, o outro considerou a sua vivência durante o jogo.

Figura 37 - Respostas dos alunos C e I, respectivamente, para a questão 3.1 da 2ª etapa

<p>3.1) Qual a chance desse número cair em relação aos outros?</p> <p>Uma grande chance, até porque eu tirei 1 duas vezes.</p> <p>tenho como tirar esse número em 1 chance de 6</p>

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nesta questão, os alunos foram questionados a respeito dos seus posicionamentos em relação à questão 3.1. A seguir podemos observar o breve diálogo ocorrido:

Aluno J: Eu tinha colocado que a chance do dado sair é um em seis.

Aluno A: Eu também acho isso, porque tem a mesma chance de cair todos os números.

Aluno B: Eu coloquei que é a mesma para todos, tipo, para cair o 6 é a mesma chance de cair o 2.

Pesquisadores: Isso mesmo! Alguém colocou algo diferente? Ou quer comentar a respeito da questão?

Alunos: Não.

...

Ao se analisar este item, destacam-se as respostas dos alunos J e B, em que, antes mesmo de terminar a atividade investigativa encontraram-se registros dos conceitos de Probabilidade e equiprobabilidade, respectivamente.

A pergunta 3.2 conclui todo o raciocínio, pois indaga se a chance de sair o pior número, isto é, o “um” é a mesma de sair o “quatro”. A maioria das respostas contidas no formulário foi que sim, ou seja, os alunos conseguiram encontrar a equiprobabilidade, que era o objetivo da questão, conforme o registro dos alunos I e G (Figura 38).

Figura 38 - Respostas dos alunos I e G, respectivamente, para a questão 3.2 da 2ª. etapa

<p>3.2) A chance desse número cair é a mesma do número 4?</p> <p>Sim, eu ainda acho que a questão do dado é uma questão de sorte.</p> <p>Acho que sim porque o dado tem 6 lados no dado para todos os números.</p>
--

Fonte: Protocolo de pesquisa.

As perguntas da segunda etapa foram formuladas para organizar ideias, fazer novas conjecturas e refiná-las. Com os alunos ambientados ao jogo, encontrou-se progresso na construção dos conceitos a caminho da Probabilidade, mesmo havendo movimentos para frente e para trás (Figura 40), concernentes à própria investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Nesta etapa, foram propostas situações que abrangiam noções de evento (Questão 3) e noções de Probabilidade de forma implícita, envolvendo as chances de um evento ocorrer (Questões 1, 2, 3.1 e 3.2). Sem muitas dificuldades, os alunos responderam a essas questões.

A terceira etapa foi composta por três questões. A primeira é subdividida em cinco itens. Destes, o primeiro propõe ao aluno uma situação hipotética do jogo, em que ele deve responder quais são as chances de vitória da defesa ao sofrer um ataque, em que o atacante tirou 3 ao jogar o dado. Dos 12 alunos, apenas um não respondeu completamente, pois mencionou o “três” e o “quatro”, esquecendo-se do “cinco” e “seis”. Nas discussões, não houve respostas incompletas.

A questão 1.1 pergunta quais são os possíveis números que podem sair no lançamento do dado e qual é o total. Todos os alunos responderam como esperado. Dentre as respostas, temos as dos alunos L e I (Figura 39).

Figura 39 - Respostas dos alunos I e L, respectivamente, para a questão 1.1 da 3ª. etapa

Acho que pode cair qualquer um, e não um número específico.
1,2,3,4,5,6 e tem 6 números

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em sequência, a questão 1.2 perguntava se, ao jogar o dado, sairia um número esperado. Surgiram diversas respostas. Alguns alunos responderam que não, outros alegaram não saber e que nem sempre iria acontecer. Sendo assim, eles trouxeram justificativas para tais respostas, como as destacadas na Figura 40.

Nestas respostas, percebe-se que o aluno G justificou com base em situações que ocorreram no decorrer do jogo, enquanto o aluno F alega que depende da Probabilidade.

Figura 40 - Respostas dos alunos F e G, respectivamente, para a questão 1.2 da terceira etapa

Nem sempre, já que depende da probabilidade de cair o número certo.
Não porque pode sair o numero 1 ou 2 tem que ter sorte para sair acima de 3 para eu ganhar.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A seguir apresenta-se um recorte do diálogo acerca da questão 1.2 durante o encontro:

Pesquisadores: O item 1.2 questiona se ao jogar o dado, sairá o número que você precisa ganhar?

Aluno G: Não, é coisa de sorte, porque tem todos os outros números para sair também.

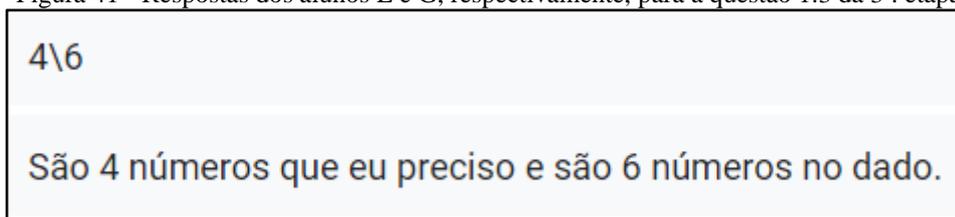
Aluno C: Nessa questão eu coloquei assim: não sei, é provável que sim, porque tem mais possibilidades de vitória.

Aluno J: Depende, porque você pode tirar um número maior ou menor do que você quer.

...

Ao avançar para a 1.3, que retrata a relação entre a quantidade de números que levam a vencer com os números que podem ser selecionados no lançamento do dado, a maioria dos alunos respondeu corretamente. Alguns tiveram um raciocínio correto, mas incompleto. O aluno L (Figura 41) conseguiu identificar a relação, já o Aluno G identificou a quantidade de cada uma das situações, mas não indicou a relação existente entre as duas.

Figura 41 - Respostas dos alunos L e G, respectivamente, para a questão 1.3 da 3ª. etapa



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 1.4, foi questionado aos alunos se existe alguma relação entre a quantidade de números que eram necessários para vencer e a quantidade de números que podia resultar do lançamento do dado. Sete alunos responderam que sim e dois deles, G e J, argumentaram precisarem de quatro números dos seis. Ainda houve aqueles que identificaram não haver relação e os que acreditam que talvez tenha.

Durante a discussão, dois dos alunos apresentaram argumentos diferentes, porém ambos concordavam positivamente com a existência da relação, como se pode observar a seguir.

Aluno G: Eu acho que sim, porque de seis números eu preciso de quatro para ganhar.

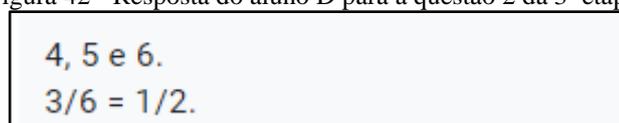
Pesquisadores: Alguém acha que teria alguma outra relação? Ou acha que não há relação nenhuma?

Aluno K: Eu acho que tem, porque, como posso dizer, você pode jogar o dado e pode sair uma quantidade que faça você vencer e você tem que ter sorte.

...

Na questão 2, foi feita uma suposição. Se o oponente tirou quatro no lançamento do dado, quais números deveriam ser registrados nos próximos lançamentos para não perder? Perguntou-se, também, quanto essa quantidade representa no dado. Todos responderam corretamente, porém sete deles responderam apenas a primeira pergunta, se esquecendo da outra. Dos alunos que responderam às duas perguntas, todos usaram a fração para responder à segunda. Um dos alunos, o D, simplificou a fração (Figura 42).

Figura 42 - Resposta do aluno D para a questão 2 da 3ª etapa



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para finalizar a atividade investigativa, foi retomada a pergunta inicial: “Você acredita que há uma relação entre o jogo e a Matemática? Justifique.”. Dos 12 alunos, apenas um respondeu não haver relação alguma com a Matemática, ressaltando o fato de não ser feito nenhum cálculo (Figura 43).

Figura 43 - Resposta do aluno L para a questão 3 da 3ª. etapa

não pois não tem conta nem nada relacionado a matemática

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os alunos que responderam sim, como o aluno A, justificaram que todo jogo tem algo relacionado à Matemática. Enquanto o aluno L disse que não e usou para justificar a questão da presença dos números no jogo. Já outros alunos, como B e J, usaram a explicação da forma de pensar e do raciocínio lógico, respectivamente. Enquanto os alunos C, D, F e J responderam que sim e identificaram a Probabilidade como relação entre o jogo e a Matemática (Figura 44).

Figura 44 - Respostas dos alunos C, J, F e D, respectivamente, para a questão 3 da 3ª. etapa

Sim, pois precisamos das provabilidades.

Sim. Porque ali tem uma probabilidade de sair o número

Sim, pois o jogo trabalha muito com probabilidade.

Sim, pois é um jogo de probabilidade.

Fonte: Elaboração própria.

A respeito dessa questão, pode-se observar que, dentre os alunos que participaram da discussão, alguns enxergaram a Probabilidade presente no jogo, conforme o diálogo a seguir:

Pesquisador: Na questão 3 repetimos a pergunta inicial que fizemos a vocês inicialmente, então depois de todas essas perguntas, de toda investigação, vocês acham que há uma relação entre o jogo e a Matemática?

Aluno G: Sim, a forma de pensar de jogar, sabe?

Aluno B: Eu coloquei que ajuda no raciocínio lógico.

Aluno J: Eu coloquei que sim, porque no jogo você mexe com números e ali tem também uma Probabilidade de acontecer ou não.

...

Por fim, a terceira etapa era composta por oito questões (Figura 11). Diferentemente das etapas anteriores, em que a maioria das questões trata de situações hipotéticas e menos específicas, nesta, as questões também são hipotéticas, porém mais direcionadas.

Esta etapa tinha por objetivo, com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), refinar a conjectura e avaliar os resultados do raciocínio, já que as questões propostas eram relacionadas aos conteúdos de Probabilidade. Essas questões levaram os alunos, de forma implícita, a reconhecerem o espaço amostral do dado e a descreverem o evento. Além disso, os alunos foram questionados se o evento estava certo de ocorrer e também foram levados a calcular as possibilidades de acontecer um resultado favorável.

Pode-se perceber que os alunos responderam às questões sem muitas dificuldades. Ao chegar na última pergunta, que retornava ao início da investigação sobre a relação entre o jogo e a Matemática, a maioria conseguiu enxergar a relação com a Probabilidade. Alguns responderam que não havia relação com a Matemática. Contudo a investigação não deixa de ser positiva, pois, mesmo que nem todos os investigadores tenham conseguido responder ao problema, há descobertas pertinentes (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016). Sendo assim, os pesquisadores se atentaram não só à resposta final dos estudantes, mas a todo o desenvolvimento e toda a justificativa na última etapa.

4.3.3 Terceiro Encontro

O terceiro encontro da experimentação ocorreu no dia 17 de junho de 2021 no horário da aula regular da turma e contou com a participação de 32 alunos. O encontro foi iniciado com a retomada da pergunta realizada no início e no final do encontro anterior, comentando-se a respeito das respostas e discussões feitas sobre ela. A partir destas, foram ressaltadas as questões que falavam sobre Probabilidade e sinalizaram-se alguns eventos que aconteceram durante o jogo, como o lançamento de dados e a tomada de decisão, e alguns exemplos do cotidiano que são de natureza aleatória e que têm ligação com a Probabilidade.

A seguir, houve a formalização de alguns conceitos probabilísticos, como: experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos.

Após a formalização dos conceitos prévios, houve a conceptualização da Probabilidade, que, segundo Teixeira e Morgado (2011), é a razão entre número de casos

favoráveis e número de casos possíveis. Foram resolvidos dois exemplos que estavam relacionados às figuras dos elementos anteriores (Apêndice B.2).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a Justificação e Avaliação fazem parte do último momento da Investigação Matemática, em que os alunos são conduzidos a realizarem pequenas demonstrações. Optou-se, porém, por trabalhar a formalização dos conceitos, em que se culminaram os conhecimentos construídos pela atividade investigativa.

Em toda a formalização dos conceitos, os pesquisadores sempre faziam perguntas sobre a sua compreensão e os alunos não apresentaram dúvidas.

A partir disso, foi realizada a atividade *Explorando a Probabilidade* (Apêndice B.3). Essa atividade foi disponibilizada para os alunos no horário do encontro pela sala de aula virtual e no chat do *Meet*. Os pesquisadores começaram a receber as dúvidas sobre como explicitar os cálculos e anexá-los no formulário. Assim, ficou acordado que os alunos precisariam fotografar os registros e que a Probabilidade poderia ser representada em porcentagem, fração ou decimal.

Enquanto os alunos respondiam o questionário, alguns apresentavam dúvidas. Na medida do possível, os pesquisadores retornavam de modo a intervir, fazendo questionamentos.

Na questão 1, perguntou-se sobre a relação entre o jogo e a Probabilidade, e se é possível detectá-la no cotidiano. Alguns alunos não conseguiram relacionar e outros não especificaram em quais situações encontrava-se a Probabilidade, mas houve respostas interessantes, como a do aluno E (Figura 45).

Figura 45 - Resposta do aluno E para a questão 1 da atividade *Explorando a Probabilidade*

Sim, o jogo War é um jogo de sorte, tem uma certa probabilidade do dado cair no numero que você precisa E no meu dia a dia temos probabilidade em tudo, vou dar um exemplo. Quando estamos comendo tem uma probabilidade de engasgamos com a comida, pode ser pouca mas não impossível.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros alunos enxergam a Probabilidade, na forma em que se deu a origem, por meio de jogos que também usam dados e no cara ou coroa (Figura 46).

Figura 46 – Respostas dos alunos F e J, respectivamente, para a questão 1 da atividade *Explorando a Probabilidade*

No jogo existe a probabilidade ao jogar o dado, pois existe a possibilidade de cair os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Sim, como por exemplo no jogo Banco Imobiliário, onde eu jogo dois dados e nem sempre vai sair o número que eu preciso para andar uma certa quantidade de casas e parar aonde eu quero.

Você jogando o dado tem uma probabilidade que tem para ganhar. É um jogo e cara ou coroa.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Assim as respostas apresentadas mostram a Probabilidade em diferentes situações, no lançamento dos dados, na chance de vencer, entre outras. Em relação ao cotidiano, as respostas dos alunos giram em torno das três apresentadas. Alguns indicaram que a identificavam a todo tempo.

A questão 2 propõe uma situação do jogo War - A batalha da Matemática semelhante à atividade investigativa, com ênfase na resposta em Probabilidade. Assim, a maioria dos alunos respondeu corretamente, descrevendo os passos e a resposta, como o aluno C (Figura 47).

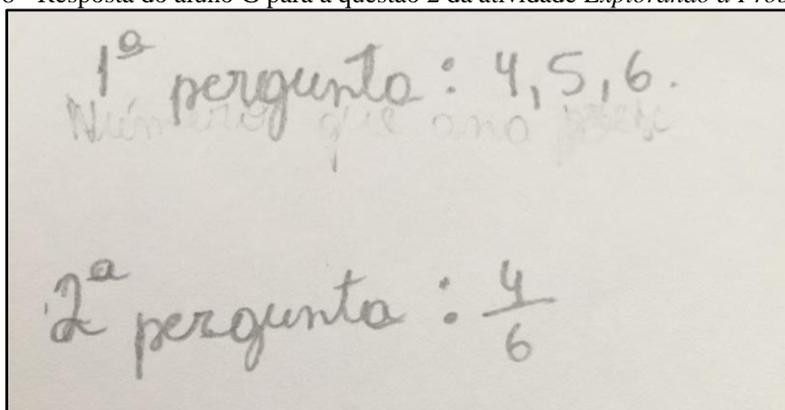
Figura 47 - Resposta do aluno C para a questão 2 da atividade *Explorando a Probabilidade*

Ana tem que tirar 4, 5, 6 a probabilidade é de 50% de chance

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na mesma questão, o aluno G apresentou o raciocínio correto, porém, no momento de colocar a resposta em Probabilidade (Figura 48), cometeu um equívoco. O aluno G observou serem três os resultados favoráveis, mas, ao escrever na forma de fração, colocou quatro sextos.

Figura 48 - Resposta do aluno G para a questão 2 da atividade *Explorando a Probabilidade*



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 2, os alunos, em sua maioria, conseguiram assimilar bem a ideia do jogo e aplicá-la, respondendo o que se pedia. Partiram de uma situação real e expressaram nos registros o pensamento probabilístico.

A questão 3 tinha o objetivo de sair do contexto do jogo para outra situação que envolve a Probabilidade, que é o lançamento de uma moeda. Para trabalhá-la, dividimos em tópicos. O primeiro tópico questionava a Probabilidade de sair cara ou coroa num lançamento. O segundo tópico foi compartilhado em um *link*, pelo qual os alunos lançaram uma moeda virtual por 6 vezes e registraram seus resultados. O terceiro tópico era a sintetização dos resultados e o último tópico tinha por objetivo relacionar a Probabilidade e os resultados obtidos no lançamento.

Nesse momento, além dos registros escritos dos alunos, o grupo abriu a questão para a discussão, pois os resultados foram diferentes. Assim os alunos que obtiveram o mesmo número de cara e de coroas puderam justificar a resposta do primeiro tópico.

Uma situação interessante se deu no momento em que um aluno foi indagado sobre sua resposta. Ele tinha escrito 50% no primeiro tópico, e o resultado dos seus lançamentos foi sempre coroa. Assim, ele mudou sua opinião sobre a relação discutida no último tópico.

Foi possível observar, a partir das respostas à terceira questão, em que se trata a respeito do lançamento de moedas, que os alunos conseguiram compreender que a Probabilidade não traz a certeza dos resultados, mas sim as chances de um evento ocorrer.

Nos registros do formulário, a maioria dos alunos conseguiu ver a relação entre Probabilidade de se obter cara ou coroa e os resultados obtidos nos lançamentos virtuais, conforme a Figura 49

Figura 49 - Respostas dos alunos C, G, K, D, A, I e F, *respectivamente*, para o item “d” da questão 3 da atividade *Explorando a Probabilidade*

Sim, pois o que eu disse na letra a é comprovado na letra b
Sim, pois se eu tentasse novamente seria um outro resultado.
Não
Sim, pois a chance de cair cara e coroa continuou sendo a mesma, apesar de terem caído 4 caras e 2 coroas.
não porque é sorte de cair o numero que vc quer
Não.
Sim, pois poderia cair cara ou coroa aleatoriamente, e foi o que aconteceu, pois não se tinha certeza qual dos dois iria dar.

Fonte: Elaboração própria.

As respostas obtidas na questão 3 corroboram as respostas apresentadas na questão anterior, no sentido de desenvolver o pensamento probabilístico, pois os alunos usaram expressões como: “chances”, “sorte” e “aleatoriamente”, expressões típicas da Probabilidade.

Após todos responderem à Atividade *Explorando a Probabilidade*, foi discutido o item “d” da questão três, o que resultou no seguinte diálogo:

Pesquisadores: Então pessoal, vocês encontraram alguma relação entre o resultado do item “a” com o resultado do item “b” ?

Aluno C: Sim, eu coloquei que sim, pois o que eu disse no item “a” foi comprovado no item “b”, que foi 50% cara e 50% coroa.

Pesquisador: Alguém respondeu de maneira diferente deles, já que tivemos diferentes resultados?

Aluno K: Nesta questão eu tinha colocado 50%, mas quando eu joguei deu 100% coroa.

Aluno H: Mas o negócio não é que vai cair 3 caras e 3 coroas, a Probabilidade de cair que pode ser um ou outro.

Pesquisador: Sim, nós vimos no item “a” que a Probabilidade é de 50% cara e 50% coroa. Isso é uma previsão, não quer dizer que vai acontecer. Mas que pode acontecer como foi o caso do aluno C e de alguns outros alunos.

...

Essa questão foi criada sob a orientação da BNCC (BRASIL, 2018), tendo sido proposto que os alunos calculassem a Probabilidade de se obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda. Em seguida, foi solicitado que os alunos acessassem o *link* de um lançador virtual de moedas, realizassem seis lançamentos, e registrassem suas respostas. A partir disso,

as respostas ao último item dessa questão, que pedia para comparar os resultados entre os itens, foram as mais diversas.

A aleatoriedade dos lançamentos gerou uma discussão muito rica para a pesquisa, conforme mencionado nos registros dos formulários e nos diálogos. Nesse momento, os alunos perceberam que as respostas estavam divergentes. Gradualmente, foram sendo apresentados resultados que evidenciaram a aleatoriedade de se jogar uma moeda repetidas vezes.

Ao finalizar a atividade *Explorando a Probabilidade*, deu-se início à última etapa da sequência didática, a atividade *A Probabilidade fora da sala de aula* (Apêndice B.4). Neste momento, o objetivo era gerar uma discussão com os alunos sobre a Probabilidade no cotidiano, em especial no cotidiano dos alunos. Sendo assim, esta atividade teve início com uma pergunta: partindo-se do fato de que todos têm um lugar preferido na sala de aula e que, às vezes, mais de um aluno gosta do mesmo lugar, qual seria a chance de um aluno chegar atrasado e encontrar o seu lugar preferido vago? Resultou-se no seguinte diálogo:

Aluno C: Uma Probabilidade bem grande, porque se outra pessoa gosta daquele lugar, principalmente se todo mundo gostar daquele lugar também.

Aluno F: Não, na verdade, é bem baixa, já que todo mundo gosta, a Probabilidade de encontrar o lugar vago é baixo.

Aluno C: Ah sim, o lugar vago, então é isso mesmo. Eu pensava que era o lugar ocupado.

Aluno J: Eu também estava falando aqui que a Probabilidade é bem baixa, a não ser que a outra pessoa também chegue atrasado na escola.

...

Em meio à discussão, os alunos relataram que, na sala de aula presencial, os lugares eram marcados. Assim, para não perder o sentido, a questão foi alterada por um dos pesquisadores, durante a aula, que os questionou sobre a Probabilidade de o lugar marcado também ser o lugar preferido. A nova conversa foi curta e a maioria relatou ser mínima se baseando na experiência que tiveram, quando o ensino era presencial.

Daí, uma nova questão foi apresentada aos alunos, na qual foram questionados sobre as chances de serem contemplados em um sorteio no *Instagram*. Os alunos alegaram que as chances de vitória são pequenas. O aluno C, por exemplo, alegou não ter chance de ganhar, pois já participou e nunca ganhou. O aluno E acredita que, quando se participa de sorteios de pessoas muito famosas, é mais difícil de ganhar e relatou, ainda, que viu em uma rede social

que há robôs que comentam mais de dez mil vezes e assim levam as pessoas a ganharem. Por fim, o aluno J, que alegou ter ganhado dois sorteios sendo um virtual e o outro não, disse que, para ganhar o sorteio virtual, marcou muitos amigos e, mesmo assim, não estava muito esperançoso.

A última questão desta etapa iniciou-se com uma contextualização com as roletas de jogos virtuais e de tabuleiros. Perguntou-se se os alunos gostariam de fazer uma prova em que os níveis de cada questão fossem sorteados por meio de uma roleta, sendo dez difíceis, cinco fáceis, três médias e duas muito difíceis. Nesta questão, a turma não gostou muito da ideia, o aluno J alegou que o número de questões difíceis era muito grande e que seria muita sorte pegar todas as fáceis e médias. Nesse momento ocorreu o seguinte diálogo:

Pesquisadores: Vocês acham que é uma boa escolha?

Aluno H: Não.

Aluno C: Eu acho que não.

Aluno J: Não, só se tivesse a sorte de pegar todas fáceis e médias.

Aluno C: É melhor não mesmo.

Pesquisadores: Vocês acham uma boa a professora usar este critério para fazer a prova?

Aluno J: Se tivesse dez fáceis e dez difíceis, aí tudo bem.

Aluno I: Para mim não estaria tudo bem não.

Aluno J: Se tivesse umas dezoito fáceis e duas difíceis, acho que estaria bom.

Aluno H: Aí eu iria, porque por mais que tirasse todas as difíceis, ia ser só duas, aí ia estar mais tranquilo, né?

...

Percebeu-se que a atividade *A Probabilidade fora da sala de aula* foi importante para que os alunos observassem a contextualização da Probabilidade no cotidiano, enriquecendo ainda mais o estudo do tema. Sendo assim, ao finalizar a atividade, pode-se notar que os alunos foram participativos, elogiaram a atividade e ficaram encantados com a Matemática sem contas.

Conclui-se, assim, que a sequência didática proposta foi aprovada pelos alunos desde o momento do jogo até a última atividade, tendo eles uma atuação participativa em todo o processo. As discussões realizadas nos encontros síncronos contribuíram para os estudos da Probabilidade. Os diálogos desenvolvidos colaboraram nas dúvidas uns dos outros e na percepção das aleatoriedades do cotidiano.

Ao se analisarem os dados coletados na sequência didática, observaram-se características descritas no aporte teórico, tais como o uso de jogos e a metodologia de ensino, Investigação Matemática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa propôs introduzir o conteúdo de Probabilidade de forma lúdica por meio da utilização de jogos e de atividades investigativas. A partir disso, levantou-se a seguinte questão de pesquisa: quais as contribuições do jogo War - A batalha da Matemática como introdução ao ensino de Probabilidade por meio da Investigação Matemática.

Para responder à questão de pesquisa, analisaram-se as contribuições do jogo War - A batalha da Matemática para a introdução do conteúdo de Probabilidade por meio da Investigação Matemática. Verificou-se que houve grandes contribuições, visto que o jogo produziu engajamento dos alunos, além de ser um excelente recurso para propor atividades investigativas. Ademais, a metodologia abordada torna o aluno construtor do seu próprio conhecimento, evidenciando o querer saber, o descobrir e o conhecer.

Assim, aprofundaram-se os estudos sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade, percebendo-se, a partir de fatos históricos, o quão relevante é trabalhar com ela desde os anos iniciais. Verificou-se, também, que tal conteúdo é, geralmente, trabalhado de forma mecânica, sem significações e reflexões. Entretanto, para um ensino reflexivo e significativo da Probabilidade, são necessárias metodologias em que o aluno é o centro na construção do conhecimento. Têm-se, assim, os jogos e a Investigação Matemática como aliados promissores para esse objetivo.

Para a realização da pesquisa, elaborou-se uma sequência didática, proposta inicialmente a futuros professores de Matemática, para que pudessem analisá-la e propor melhorias em relação à clareza das questões, ao tempo estabelecido para a realização das etapas e à adequação para o público-alvo escolhido. Após a análise, foram feitas algumas modificações de modo que a sequência estivesse adequada aos objetivos propostos.

Em relação à experimentação com os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, que foi realizada em uma escola da rede privada, pode-se observar que os participantes gostaram da utilização do jogo no ensino de Matemática, uma vez que puderam atuar dinamicamente em todos os momentos da sequência didática. A partir disso, foi possível proporcionar aos

educandos uma forma diferente de aprender e de enxergar a Matemática não determinística, seja por meio da utilização de jogos, de atividades investigativas e em outros contextos, estimulando o pensamento probabilístico. Desse modo, foi possível perceber que os alunos participaram ativamente na construção de seus próprios conhecimentos.

Após a análise dos resultados da pesquisa, notou-se que atividades investigativas são relevantes na construção do conhecimento dos alunos. Sendo assim, a utilização do jogo “War - A batalha da Matemática” foi importante como ponto de partida da atividade, despertando o interesse nos alunos e possibilitando-lhes a participação ativa, por meio de questionamentos de suas próprias experiências e atitudes vivenciadas durante o jogo. É válido ressaltar que os estudantes não encontraram dificuldades ao realizarem a atividade investigativa e as demais propostas, tendo apresentado apenas algumas dúvidas pontuais que fazem parte do processo heurístico.

Percebeu-se que a metodologia de ensino Investigação Matemática favorece a construção significativa do conhecimento, bem como coloca em destaque o papel da Matemática, não como um conhecimento pronto e acabado, mas sim propiciando experimentações, conjecturas, testes e formalizações.

Além disso, a sequência relatada contribuiu de forma significativa para a formação docente dos pesquisadores, visto que foram aprofundados os estudos da Probabilidade, bem como o seu surgimento e sua amplitude. Ressalta-se, também, a utilização da Investigação Matemática e dos jogos, que objetivam a emancipação dos estudantes.

Sugere-se, para pesquisas futuras, explorarem-se a Probabilidade Frequentista e Axiomática, como os jogos e as atividades investigativas, trabalhadas por pares. Para mais, sugere-se abordar noções de Probabilidade em outros anos, incluindo os anos iniciais do Ensino Fundamental, visto que a BNCC recomenda que esse tema esteja presente desde do primeiro ano.

Espera-se que esta pesquisa contribua para a formação dos estudantes como cidadãos críticos e reflexivos, de modo a atuarem ativamente na sociedade. Além de inspirar os professores em formação a refletirem sobre sua prática docente e, assim, buscarem desenvolver diferentes metodologias que tornam o aluno o protagonista do seu aprendizado.

REFERÊNCIAS

- BELEI, Renata Aparecida *et al.* O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa. **Cadernos de Educação**: Faculdade de Educação | UFPel, Pelotas, v. 1, n. 30, p. 187-199, jul. 2008. Semestral. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/1770/1645>. Acesso em: 10 nov. 2020.
- BLAJOTI, Emerson Donizete. **Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II**. 2013. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5932>. Acesso em: 03 dez. 2019
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 03 Dez 2019.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 03 dez 2019.
- BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 17 jul 2021.
- BRUM, Maria Gorete Nascimento. **Atividades Investigativas para o Ensino de Matemática para Alunos de 5ª. Série do Ensino Fundamental**. 2012. 126 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012. Disponível em: <http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/422#preview-link0>. Acesso em: 10 ago. 2021.
- BRUNEHILDE, Carina; CORDEIRO, Nilton José; OLIVEIRA, Francisco Robson. **Jogando com Probabilidade e Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2018. 30 p. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2018/04/Jogando-com-Probabilidade-e-Estatistica.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2021.
- CABRAL, Marcos Aurélio. **A utilização de jogos no ensino de Matemática**. 2006. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática – Habilitação em Licenciatura) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: encurtador.com.br/coLU4. Acesso em: 20 abr. 2020.
- CARGNIN, Rita Maria; GUERRA, Sheila Heydt Réquia; LEIVAS, José Carlos Pinto. Teoria de van Hiele e Investigação Matemática: implicações para o ensino de geometria. **Práxis**, [s. l.], v. 8, n. 15, p. 105-117, jun. 2016. Disponível em: <http://revistas.unifoa.edu.br/index.php/praxis/article/view/660>. Acesso em: 09 ago. 2021.
- CAVALHEIRO, Gabriela Castro Silva. **Resolução de Problemas e Investigação Matemática: um processo de intervenção formativa para licenciandos em matemática**. 2017.

196 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) - Universidade Estadual Paulista, Baurú, 2017. Disponível em:
https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151482/cavalheiro_gcs_dr_bauru.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 09 ago. 2021.

CONCETINO, Jéssica. **Caminhos a Percorrer**: desafios no processo de investigação matemática. 2019. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PPGMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019. Disponível em:
http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4036/1/LD_PPGMAT_M_Concentino%2c%20J%2c%20J%2c%20a9ssica_2019.pdf. Acesso em: 08 ago. 2021.

DAMIANI, Magda Floriana *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Caderno de Educação**, Pelotas, v. 3, n. 45, p.57-67, ago. 2013. Disponível em:
<https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822/3074>. Acesso em: 03 dez. 2019.

DAMIANI, M. F. Sobre Pesquisas do Tipo Intervenção. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 16., 2012, Campinas. **Anais eletrônicos [...]**: UNICAMP, 2012. Disponível em:
http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/2345b.pdf. Acesso em: 01 nov. 2019.

DEUS, Lilian Flaviane de. **Jogos no Ensino de Matemática**: uma proposta para o ensino e aprendizagem de probabilidade. 2018. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2018. Disponível em: encurtador.com.br/akHVM. Acesso em: 07 jul. 2021.

FERNANDES, Flávio Miguel dos Santos. **Resolução de Problemas e educação Matemática crítica**: uma proposta para o ensino de Probabilidade. 2018. 203 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2018. Disponível em:
<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/10761>. Acesso em: 15 fev. 2020.

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes. **Estatística e Probabilidade**: uma proposta para os anos iniciais do Ensino Fundamental. 2014. 194 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica do Paraná, Ponta Grossa, 2014. Disponível em: encurtador.com.br/imGIU. Acesso em: 28 abr. 2020.

FERNANDES, Rubia Juliana Gomes; SANTOS JUNIOR, Guataçara dos. Uma proposta pedagógica para ensinar Probabilidade no Ensino Fundamental. **Práxis**, Curitiba, v. 7, n. 14, p. 87-97, dez. 2015. Semestral. Disponível em:
<http://revistas.unifoa.edu.br/index.php/praxis/article/view/652>. Acesso em: 07 abr. 2020.

FRAGA, Rodrigo Rodrigues. **O Estudo das Loterias**: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio. 2013. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: encurtador.com.br/gPQR7. Acesso em: 29 nov. 2019.

GAFFURI, Stefane Layana. **Ensino e Aprendizagem de Probabilidade Através da Metodologia de Resolução de Problemas**. 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano,

Santa Maria, 2012. Disponível em:

<http://tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/bitstream/UFN-BDTD/388/1/Stefane%20Layana%20Gaffuri.pdf>. Acesso em 29 nov. 2019

GARCIA, Tânia Cristina Meira *et al.* **Ensino Remoto Emergencial**: proposta de design para organização de aulas. Natal: SEDIS/UFRN, 2020. 18 p. Disponível em:

http://sedis.ufrn.br/wp-content/uploads/2020/06/ENSINO-REMOTO-EMERGENCIAL_proposta_de_design_organizacao_aulas-1.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Ufrgs, 2009. 120 p. ISBN 978-85-386-0071-8. Disponível em:

<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2020.

GRANDO, Regina Celia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**.

2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em:

<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251334>. Acesso em: 05 ago. 2021

GUGLIANO, Bruna Ferreira; SAINZ, Ricardo Lemos. Adaptando materiais didáticos do ensino presencial para o ensino remoto. **Revista Educar Mais**, [S.L.], v. 5, n. 3, p. 546-556, 24 abr. 2021. Instituto Federal de Educacao, Ciencia e Tecnologia Sul-Rio-Grandense.

<http://dx.doi.org/10.15536/reducarmais.5.2021.2381>. Disponível em:

<https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/educarmais/article/view/2381>. Acesso em: 15 jun. 2021

LAINETTI, Thiago Silva Freire. **Explorando a Não-Equiprobabilidade de Eventos na Educação Básica**. 2019. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática -

PROFMAT) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: encurtador.com.br/abfIM. Acesso em: 21 jul. 2021.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino**

Fundamental: Uma Análise Curricular. 1998. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998. Disponível em:

<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251036>. Acesso em 29 nov. 2019.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 28, n. 74, p.57-73, abr. 2008. Quadrimestral. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/ccedes/a/gwfKW9py5dMccvmbqyPP8bk/?lang=pt&format=pdf>.

Acesso em: 29 jan. 2020.

LOPES, Celi Espasandin; SOUZA, Leandro de Oliveira. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1465-1489, dez. 2016. Quadrimestral.

Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/31494>. Acesso em: 01 mar. 2020.

LOPES, José Marcos; TEODORO, João Vitor; REZENDE, Josiane de Carvalho. Uma proposta para o estudo de Probabilidade no Ensino Médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 75-93, dez. 2011. Disponível em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646626/13528>. Acesso em: 30 maio 2020.

LOPES, Sílvia Ednaira. **Alunos do Ensino Fundamental e Problemas Escolares: Leitura e Interpretação de Enunciados e Procedimentos de Resolução.** 2007. 278 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2007. Disponível em:

<http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/4377/1/000164524.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2020.

MACCALI, Ludmila. Investigação Matemática: possibilidade para o ensino da álgebra no Ensino Fundamental. *In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 19., 2015, Juiz de Fora. **Anais eletrônicos [...]**. Juiz de Fora: Ufjf, 2015. p. 1-10. Disponível em:

https://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd2_ludmila_maccali.pdf. Acesso em: 10 ago. 2021.

MARQUES, Francisca Eriane Brito. O Ensino de Matemática: a investigação e a reflexão na aula de Matemática. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba. **Anais eletrônicos [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-8. Disponível em:

http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/579_1854_ID.pdf. Acesso em: 17 jul. 2021.

MARTINS, Cristina *et al.* O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. *In: PONTE, João Pedro da et al. (org.). Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.* Coimbra: SPIEM, 2002. p. 59-82. Disponível em:

http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf#page=9. Acesso em: 17 jul. 2021.

MELO, Thiago Branãs; REIS, José Cláudio. Relações Históricas entre jogos de Azar e Probabilidade. *In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 13., 2011, **Anais eletrônicos [...]** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 135-175. Disponível em:

http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/584/93. Acesso em: 28 abril 2020.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; CEDRO, Wellington Lima (org.). **Educação Matemática: Diferentes contextos, Diferentes Abordagens.** Fortaleza: UECE, 2015. Disponível em: encurtador.com.br/koFHM. Acesso em: 10 nov. 2020.

PONTE, João Pedro da. Explorar e Investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s. l.], v. 6, n. 21, p. 13-30, mar. 2010. Disponível em:

https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3043/1/10-Ponte-Union_21.pdf. Acesso em: 10 ago. 2021.

PONTE, João Pedro da *et al.* Introdução. *In: PONTE, João Pedro da et al (org.). Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.* Coimbra: SPIEM, 2002. p. 59-82. Disponível em:

http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf#page=9. Acesso em: 17 jul. 2021.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico**: Métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2013. Editora Novo Hamburgo 2. Ed. Disponível em: encurtador.com.br/ctJL2. Acesso em: 14 fev. 2020.

RAMOS, C. L. **O Ensino Da Probabilidade Com O Uso De Mágicas Fundamentadas Matematicamente**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7580/DissCLR.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 03 Dez. 2019

SANTOS, Adilio Livramento dos. **Futetab**: trabalhando Aritmética e Probabilidade no Ensino Fundamental. 2018. 35 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018. Disponível em: <https://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=livramento>. Acesso em: 05 ago. 2021.

SANTOS, Indaclécio Paulo dos. **Ecologia De Aprendizagem Sobre Probabilidade Com Estudantes Dos Anos Finais Do Ensino Fundamental**. 2019. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019. Disponível em: encurtador.com.br/hlKXSX. Acesso em: 30 maio 2020.

SANTOS, Leonor *et al.* Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE, João Pedro da *et al.* (org.). **Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Coimbra: SPIEM, 2002. p. 83-106. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf#page=9. Acesso em: 17 jul. 2021.

SILVA, Fabrício Menezes Netto da. **Jogos no Processo de Ensino-aprendizagem em Probabilidade**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5943>. Acesso em: 07 abril. 2020.

STRUMINSKY, Luciene Aparecida de Freitas. **Uso de Jogos no Ensino de Matemática: uma proposta didática para o ensino de Probabilidade**. 2016. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas e Naturais) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016. Disponível em: <http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/1507>. Acesso em: 28 abr. 2020.

TEIXEIRA, Ralph Costa; MORGADO, Augusto César. **Introdução à Teoria da Probabilidade**. 2011. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/ralph Teixeira/wp-content/uploads/sites/129/2017/09/probbook.pdf>. Acesso em: 30 maio 2020.

VIALI, Lorí. Algumas Considerações Sobre a Origem da Probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s.i.], v. 8, p. 143-153, out. 2008. Semestral. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177/163>. Acesso em: 28 abr. 2020.

VIANNA, Marcia Porto de Carvalho. **Tratamento das Frações no 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental para o Letramento da Probabilidade e Estatística**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Rio de

Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: encurtador.com.br/gGILX. Acesso em: 17 jul. 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TESTE EXPLORATÓRIO

A.1 - Regras do jogo War A batalha da Matemática

War – A batalha da Matemática

Regras

War – a batalha da Matemática consiste em um jogo de estratégia, que mistura muita diversão e matemática.

O objetivo do jogo é único, vence aquele jogador que fizer o maior número de pontos, sendo que cada estado dominado vale um ponto e cada região dominada por completo vale um determinado número de pontos: a região Sul vale 2 pontos; as regiões Sudeste e Norte valem 3 pontos; a região Centro Oeste vale 4 pontos; e o Nordeste vale 6 pontos.

O número mínimo de jogadores é dois, e o número máximo é quatro.

Ao se iniciar a partida, cada jogador irá escolher uma cor que representará seus pinos. Após a escolha de cores, é decidido quem irá começar o jogo, para isso, todos os jogadores devem jogar o dado e começará aquele que tirar o maior número. Se houver empate, apenas os jogadores que empataram jogam o dado novamente.

O tabuleiro do jogo é composto por 28 territórios, sendo 26 Estados, Distrito Federal e a ilha Fernando de Noronha. Ainda no início do jogo, os territórios são divididos igualmente entre os jogadores.

A partir da segunda rodada, cada jogador tem direito a um número de pinos para distribuir nos seus estados, sendo que esse número é correspondente à metade da quantidade de estados que cada jogador possui (se a quantidade (n) for par será $\frac{n}{2}$, se for ímpar $\frac{n-1}{2}$) e a distribuição será antes da vez de cada jogador. Porém, apenas na primeira rodada, a distribuição é feita por todos ao mesmo tempo antes do início do jogo.

Os jogadores podem ou não atacar um adversário, tentando conquistar mais territórios.

Para atacar, o jogador tem que ter no mínimo 2 pinos no território, podendo atacar no máximo 3 territórios que fazem fronteira por rodada, sendo que poderá atacar o mesmo território quantas vezes quiser, desde que seja seguido.

O atacante deverá deixar claro qual território irá atacar e de onde irá atacar. Além de os jogadores terem que deixar claro com quantos dados irão atacar e com quantos dados irão defender.

Cada dado representa um pino, ou seja, o número de dados escolhidos para atacar ou defender é o número de pinos que você está disposto a arriscar, sendo que quem ataca tem que deixar pelo menos um pino em seu território. O número de máximo de pinos com que se pode atacar ou defender são três.

A dinâmica da batalha funciona da seguinte maneira: Primeiro o atacante lança os dados e em seguida a defesa. A comparação é feita da seguinte maneira, os dados serão comparados

respectivamente do menor para o maior. Por exemplo, em uma batalha onde o atacante ao jogar dois dados tirou os números 6 e 2, e a defesa tirou 5 e 3, então será comparado o maior valor do atacante com o maior valor da defesa (6 e 5) e o de menor valor do atacante com o de menor valor da defesa (2 e 3). Nesta situação, na primeira comparação o defensor perde um pino já que $6 > 5$, e o atacante perde um pino na segunda comparação já que $2 < 3$.

Caso haja empate entre os valores obtido no dado, a defesa vence, pois tem a vantagem do território.

Ao final de cada jogada, o jogador poderá realocar 2 pinos entre os seus estados, desde que, esses estados façam fronteira.

A.2 – Atividade Investigativa

Atividade Investigativa – 1ª. etapa

O Jogo War - A Batalha Matemática como introdução ao ensino de Probabilidade.

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

***Obrigatório**

Email *

Nome: *

1) Você acha que, no início do jogo, todos os jogadores têm a mesma chance de ganhar? Justifique. *

2) Durante o jogo é mais vantajoso dominar estados em diversas regiões ou priorizar dominar as regiões? Justifique. *

3) De todas as regiões, qual você considera mais vantajoso conquistar? *

4) Supondo que, em uma rodada, você possui os estados de Mato Grosso, Goiás, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Espírito Santo e São Paulo. Está na sua vez de jogar e você decide atacar pelo estado de São Paulo, a partir deste você pode atacar os estado de Minas Gerais, Rio de Janeiro, Mato Grosso do Sul e Paraná. Qual destes estados você atacaria a partir de São Paulo? Justifique. *

Espaço para observações relativas à atividade.

1) Jogando um dado contra outro, quem tem mais chance de vencer, o atacante ou o defensor? *

2) Ao realizar um ataque utilizando dois dados e a defesa um dado, suas chances de vitória aumentam? *

3) Em um ataque, qual o pior número que você poderia tirar? *

3.1) Qual a chance desse número cair em relação aos outros? *

3.2) A chance desse número cair é a mesma do número 4? *

Espaço para observações relativas à atividade.

Atividade Investigativa - 3.^a etapa

1) Supondo que o seu adversário tirou 3 no dado, para vencê-lo, quais os possíveis números você deve tirar? E quantos números são ? *

1.1) Quais são os possíveis números que podem sair no dado? E quantos números são? *

1.2) Ao jogar o dado sairá o número que você precisa para ganhar? *

1.3) A quantidade de números que podem te levar a vencer representa quanto em relação a quantidade de números que podem sair no dado? *

1.4) Você acha que existe alguma relação entre a quantidade de números que você precisa para vencer e a quantidade de números possíveis que podem sair ao jogar o dado? *

2) Em um ataque, seu oponente tirou o número 4. Quais são os números que devem cair no dado para que não perca nenhum soldado? Essa quantidade representa quanto do dado? *

2.1) Qual é a chance de você não perder nenhum soldado? Quanto é? *

3) Você acredita que há uma relação entre o jogo e a Matemática? Justifique. *

Espaço para observações relativas a atividade.

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN)

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pela
Google.

Google Formulários

A.3 – Apresentação dos conceitos

Onde encontramos a
Probabilidade?



1

PROBABILIDADE

2

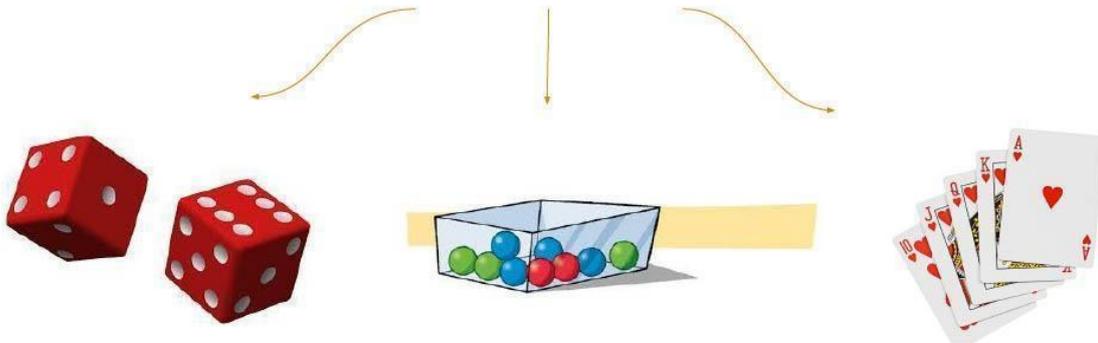
EXPERIMENTO ALEATÓRIO



Chamamos de experimento aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes.

3

EXEMPLOS



4

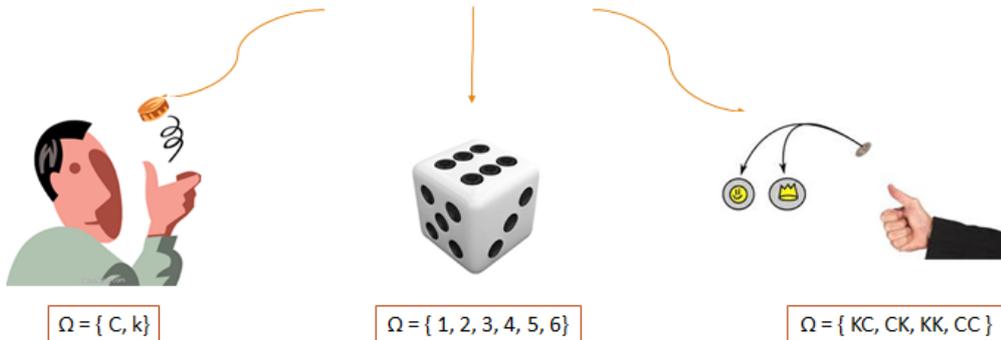
ESPAÇO AMOSTRAL



Chamamos de espaço amostral um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

5

EXEMPLOS



6

EVENTO



Chamamos de evento todo subconjunto do espaço amostral, podendo conter um elemento ou mais.

7

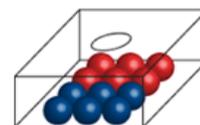
EXEMPLOS



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$



Sair um número menor que 4:
 $B = \{1, 2, 3\}$



Sair uma bola azul:
 $n(C) = 6$

8

Como calcular a probabilidade de um evento?



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{numero de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

número de casos favoráveis (evento) = 3
 número de casos possíveis (espaço amostral) = 6

$$\text{Probabilidade de sair um número ímpar} = \frac{3}{6}$$

10

Como calcular a probabilidade de um evento?



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$

$$\text{Probabilidade de sair um número ímpar} = p(A)$$

$$p(A) = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

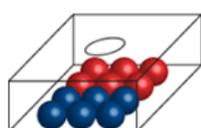
$$p(A) = 50\%$$

11

Como calcular a probabilidade de um evento?



Probabilidade de sair
uma bola azul = $p(B)$



Sair uma bola azul:
 $n(C)=6$

$$p(B) = \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$p(A) = 50\%$$

12

Como calcular a probabilidade de um evento?



Probabilidade de sair
cara duas vezes = $p(A)$



Sair cara duas vezes

$$p(A) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$p(A) = 25\%$$

13

A.4 – Explorando a Probabilidade

Explorando a Probabilidade

***Obrigatório**

1. Email *

1) Depois de tudo que foi visto durante a aula, descreva com suas palavras como o jogo se relaciona com a Probabilidade. Você consegue enxergar a Probabilidade em mais alguma situação do seu dia a dia, seja em um outro jogo ou em outro momento? *

2) Considerando o jogo War - A batalha da Matemática, em uma partida, João resolveu atacar o estado de Ana, sendo que cada um estava jogando com um dado, como João estava atacando jogou primeiro e saiu o número 4 no dado. Quais os números que Ana tem que tirar para ganhar de João? E qual a probabilidade de sair um desses números? *

3-a) Ao lançar uma moeda, qual a chance de sair cara? E coroa? *

3-b) Entre no link encurtador.com.br/awKNU e jogue a moeda 5 vezes e registre todos os resultados na tabela a seguir.

	Cara	Coroa
1°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3-c) Qual o total de caras e o total de coroas que você encontrou na letra b?

3-d) O resultado obtido na letra b foi igual ao obtido na letra a? *

Espaço para observações relativas à atividade.

a. Este conteúdo não foi criado nem
aprovado pela Google.

GoogleFormulários

A.5 – A Probabilidade fora da sala de aula

Explorando a Probabilidade fora da sala de aula



QUESTÃO 1

Na maioria das vezes, temos aquele lugar preferido na sala de aula, seja na primeira carteira da fila, seja no fundão ou encostado na parede. Mas também sabemos que sempre tem aquele colega de classe que gosta de sentar no mesmo lugar que gostamos. Se, um certo dia, você se atrasa e sai um pouco mais tarde de casa, qual a probabilidade de chegar a sala de aula e encontrar o seu lugar vago?

Instagram



QUESTÃO 2

- Diariamente vemos postagens sobre sorteios em nossas redes sociais, o Instagram tem ganhando grande destaque nesse segmento. Muitas lojas, pessoas influentes, músicos e conhecidos como “digital influencers” fazem sorteios em suas redes sociais. Para participar precisamos geralmente seguir alguma página, curtir uma foto e marcar alguns amigos. Você já parou pra pensar em qual a sua chance de ser contemplada nesses sorteios?



QUESTÃO 3

Muitas vezes em nosso cotidiano nós deparamos com as roletas para sortear ou decidir alguma coisa. Geralmente, podemos escolher o que queremos ganhar na roleta e assim torcer pelo "prêmio" que queremos.

Sabendo que a professora de matemática resolveu dar uma chance para vocês escolherem as questões da prova através da roleta. Nesta roleta tem 20 questões: 10 difíceis, 5 fáceis, 3 médias e 2 muito difícil. Na prova terá 10 questões. Vocês acham uma boa?

APÊNDICE B - EXPERIMENTAÇÃO

B.1 – Atividade Investigativa

Atividade Investigativa – 1ª. etapa

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

***Obrigatório**

Email *

Nome: *

1) Você acha que, ao iniciar o jogo todos os jogadores têm a mesma chance de ganhar? Justifique. *

2) Durante o jogo é mais vantajoso dominar estados em diversas regiões ou priorizar dominar as regiões? Justifique. *

3) De todas as regiões, qual você considera mais vantajoso conquistar? *

4) Supondo que, em uma rodada, você possui os estados de Mato Grosso, Goiás, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Espírito Santo e São Paulo. Está na sua vez de jogar e você decide atacar pelo estado de São Paulo, a partir deste você pode atacar os estado de Minas Gerais, Rio de Janeiro, Mato Grosso do Sul e Paraná. Qual destes estados você atacaria a partir de São Paulo? Justifique. *



1) Jogando um dado contra outro, quem tem mais chance de vencer, o atacante ou o defensor? *

2) Ao realizar um ataque utilizando dois dados e a defesa um dado, suas chances de vitória aumentam? *

3) Em um ataque, qual o pior número que você poderia tirar? *

3.1) Qual a chance desse número cair em relação aos outros? *

3.2) A chance desse número cair é a mesma do número 4? *

Atividade Investigativa – 3ª. etapa

1) Imaginando um possível ataque adversário a um dos seus territórios e supondo que ele tenha tirado 3 no dado. Quais serão os possíveis números que você precisa tirar para vencê-lo? *

1.1) Quais são os possíveis números que podem sair no dado? E quantos números são? *

1.2) Ao jogar o dado sairá o número que você precisa para ganhar? *

1.3) A quantidade de números que podem te levar a vencer representa quanto em relação a quantidade de números que podem sair no dado? *

1.4) Você acha que existe alguma relação entre a quantidade de números que você precisa para vencer e a quantidade de números possíveis que podem sair ao se jogar o dado? *

2) Em um ataque, seu oponente tirou o número 4. Quais são os números que devem cair no dado para que não perca nenhum soldado? Essa quantidade representa quanto do dado? *

3) Você acredita que há uma relação entre o jogo e a Matemática? Justifique. *

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN)

B.2 – Apresentando os conceitos

Onde encontramos a
Probabilidade?



1

PROBABILIDADE

2

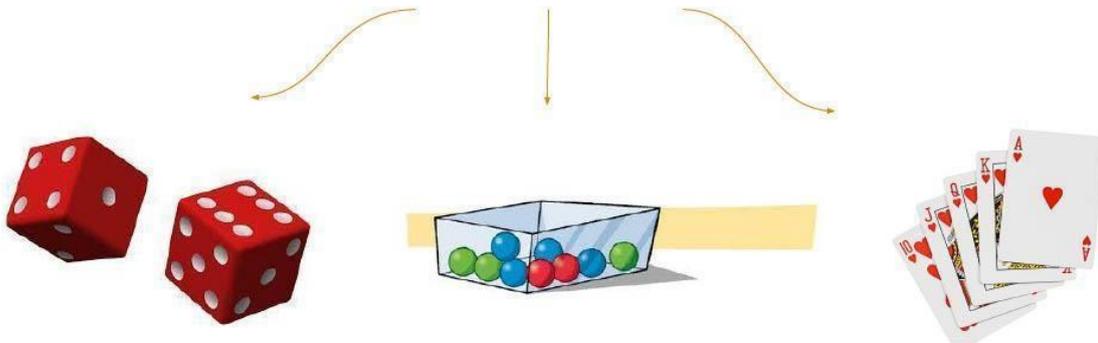
EXPERIMENTO ALEATÓRIO



Chamamos de experimento aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes.

3

EXEMPLOS



4

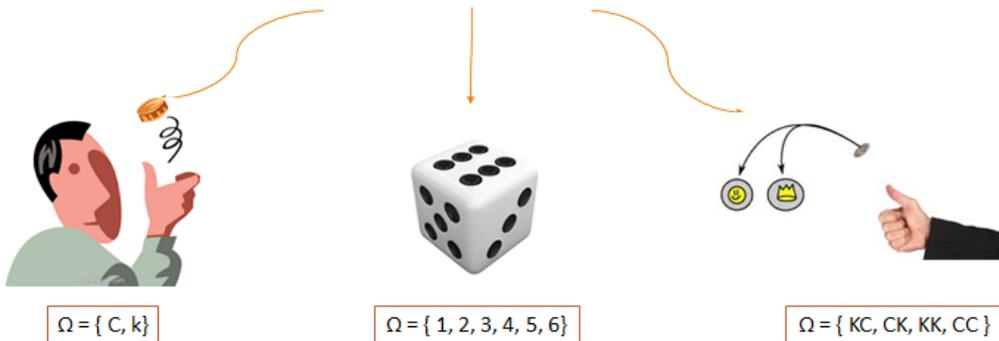
ESPAÇO AMOSTRAL



Chamamos de espaço amostral um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

5

EXEMPLOS



6

EVENTO



Chamamos de evento todo subconjunto do espaço amostral, podendo conter um elemento ou mais.

7

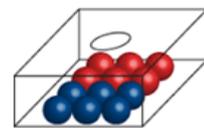
EXEMPLOS



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$



Sair um número menor que 4:
 $B = \{1, 2, 3\}$



Sair uma bola azul:
 $n(C) = 6$

8

Como calcular a probabilidade de um evento?



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{numero de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

número de casos favoráveis (evento) = 3
 número de casos possíveis (espaço amostral) = 6

$$\text{Probabilidade de sair um número ímpar} = \frac{3}{6}$$

10

Como calcular a probabilidade de um evento?



Sair um número ímpar:
 $A = \{1, 3, 5\}$

$$\text{Probabilidade de sair um número ímpar} = p(A)$$

$$p(A) = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

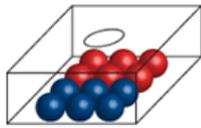
$$p(A) = 50\%$$

11

Como calcular a probabilidade de um evento?



Probabilidade de sair
uma bola azul = $p(B)$



Sair uma bola azul:
 $n(C)=6$

$$p(B) = \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$p(A) = 50\%$$

12

Como calcular a probabilidade de um evento?



Probabilidade de sair
cara duas vezes = $p(A)$



Sair cara duas vezes

$$p(A) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$p(A) = 25\%$$

13

B.3 – Explorando a Probabilidade

Explorando a Probabilidade

***Obrigatório**

Email *

1) Depois de tudo que foi visto durante a aula, descreva, com suas palavras, como o jogo se relaciona com a Probabilidade. Você consegue enxergar a Probabilidade em mais alguma situação do seu dia a dia, seja em outro jogo ou em outro momento? *

2) Considerando o jogo War adaptado, em uma partida, João resolveu atacar o estado de Ana, sendo que cada um estava jogando com um dado, como João estava atacando jogou primeiro e saiu o número 4 no dado. Quais os números que Ana tem que tirar para ganhar de João? E qual a probabilidade de sair um desses números? *

3-a) Ao lançar uma moeda, qual a chance de sair cara? E coroa? *

3-b) Entre no link encurtador.com.br/awKNU e jogue a moeda 6 vezes e registre todos os resultados na tabela a seguir. *

	Cara	Coroa
1°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6°. Lançamento	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3-c) Qual o total de caras e o total de coroas que você encontrou na letra b?

3-d) É possível enxergar uma relação entre a resposta da letra a e o resultado obtido na letra b? Justifique. *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pela
Google.

Google Formulários

B.4 – A Probabilidade fora da sala de aula

Explorando a Probabilidade fora da sala de aula



QUESTÃO 1

Na maioria das vezes, temos aquele lugar preferido na sala de aula, seja na primeira carteira da fila, seja no fundão ou encostado na parede. Mas também sabemos que sempre tem aquele colega de classe que gosta de sentar no mesmo lugar que gostamos. Se, um certo dia, você se atrasa e sai um pouco mais tarde de casa, qual a probabilidade de chegar a sala de aula e encontrar o seu lugar vago?

Instagram



QUESTÃO 2

- Diariamente vemos postagens sobre sorteios em nossas redes sociais, o Instagram tem ganhando grande destaque nesse segmento. Muitas lojas, pessoas influentes, músicos e conhecidos como “digital influentes” fazem sorteios em suas redes sociais. Para participar precisamos geralmente seguir alguma página, curtir uma foto e marcar alguns amigos. Você já parou pra pensar em qual a sua chance de ser contemplada nesses sorteios?



QUESTÃO 3

Muitas vezes em nosso cotidiano nós deparamos com as roletas para sortear ou decidir alguma coisa. Geralmente, podemos escolher o que queremos ganhar na roleta e assim torcer pelo "prêmio" que queremos.

Sabendo que a professora de matemática resolveu dar uma chance para vocês escolherem as questões da prova através da roleta. Nesta roleta tem 20 questões: 10 difíceis, 5 fáceis, 3 médias e 2 muito difícil. Na prova terá 10 questões. Vocês acham uma boa?

APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO

C.1 – Questionário Análise do jogo

24/07/2021

Análise do jogo

Análise do jogo

***Obrigatório**

Nome *

Espaço relativo para observações relativas ao jogo. *

Este conteúdo não foi criado
nem aprovado pela Google.

Google **Formulários**

<https://docs.google.com/forms/d/1qYulA1KXPaXqjOVSVZ4Fy1uGOhD5Q2eyKdneLpRi5II/edit>