LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E GEOMÉTRICA

JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO

Campos dos Goytacazes - RJ
Maio - 2021

JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E GEOMÉTRICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes - RJ
Maio - 2021

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

S588t

Simão, João Vitor Pessanha
O Teorema Fundamental do Cálculo sob uma Perspectiva Histórica e Geométrica / João Vitor Pessanha Simão - 2021.
139 f.: il. color.

Orientadora: Carla Antunes Fontes

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.
Referências: f. 116 a 119.

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. História da Matemática. 3. Interpretação Geométrica. I. Fontes, Carla Antunes, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E GEOMÉTRICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 07 de maio de 2021.

Banca avaliadora:

Carla A. R.

Prof ª Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática Aplicada / UFRJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Ana Paula Rangel de Andrade

Prof ª Ana Paula Rangel de Andrade
Doutora em Planejamento Regional e Gestão de Cidades / UCAM
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Tiago Destéffani Admiral

Prof. Tiago Destéffani Admiral
Doutor em Ciências Naturais / UENF
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo constante apoio.

À professora Carla Fontes, por ter orientado este trabalho de maneira ímpar.

Aos professores Ana Paula Rangel e Tiago Desteffani, por aceitarem o convite para a banca avaliadora e pelas contribuições dadas.

Às professoras Carmem Lúcia Azevedo e Juliana Barcellos Ventura, pelas aulas de Cálculo Diferencial e Integral I e Álgebra Linear I, respectivamente, ministradas enquanto eu ainda cursava Engenharia Elétrica. Foram inspiração para a minha mudança de curso e mostraram a profissão que realmente queria exercer.

Aos amigos da faculdade, pelos momentos compartilhados durante os anos de graduação.

"Continuous effort – not strength or intelligence – is the key to unlocking our potential."

Sir Winston Churchill

RESUMO

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem grande importância no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, por estabelecer a relação entre a integração e a diferenciação e por proporcionar um método prático para a computação de integrais definidas. Pesquisas evidenciam dificuldades de compreensão plena do teorema por parte dos alunos, o que aponta para a necessidade de buscas por novas abordagens do tema em sala de aula. Justificado pelos diversos benefícios trazidos pela inserção da História da Matemática em seu processo de ensino e de aprendizagem, o presente trabalho de conclusão de curso buscou resgatar e relatar a história do desenvolvimento do TFC, juntamente com sua interpretação geométrica, a fim de oferecer informações que possam colaborar com um melhor entendimento dos conceitos do teorema. A pesquisa mostrou que a exploração da relação inversa entre os problemas de áreas e tangentes, hoje estabelecida pelo TFC, é justamente o que marca o início formal do Cálculo. Mostrou ainda que o caminho de evolução dos conceitos do Cálculo foi longo, com sucessão e acúmulo de ideias, tendo início na Grécia Antiga e culminando em um método geral e unificado para o uso das técnicas infinitesimais na segunda metade do século XVII, momento considerado como surgimento do Cálculo. Todo esse período de tempo é abordado no trabalho. Ficou evidente também como a geometria foi uma ferramenta importante para a evolução dessa área da Matemática. Após o levantamento do processo histórico, foi realizado um seminário de modo a divulgar o trabalho e as informações nele contidas. Espera-se que a pesquisa possa servir de base para a inclusão de aspectos históricos e geométricos do TFC durante seu ensino e que ajude a esclarecer o processo de descoberta da relação inversa entre integração e diferenciação.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. História da Matemática. Interpretação Geométrica.

ABSTRACT

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) is of great importance to the study of Differential and Integral Calculus, as it establishes the relation between integration and differentiation and gives a practical method to compute definite integrals. Researches show difficulties of full comprehension of the theorem by students, what indicates a need of new approaches for this topic during classes. Justified by the benefits that the use of History of Mathematics can provide to the teaching and learning process, this final paper sought to investigate and tell the historical development of the FTC, as well as its geometric interpretation, in order to provide material that might contribute to a better understanding of the concepts of the theorem. The research showed that the exploration of the inverse relationship of area and tangent problems, expressed nowadays by the FTC, is precisely what marks the formal beginning of Calculus. It also revealed that the evolution path of the Calculus concepts was long, with a succession and accumulation of ideas, beginning during the Ancient Greece and culminating in a general and unified use of the infinitesimal techniques on the second half of the seventeenth century, moment considered as the beginning of Calculus. This entire period is discussed in this work. It was also clear how geometry was an important tool to the evolution of this branch of Mathematics. After the historical research, a seminary was presented so the paper and its information were better known. It is expected that the work can become the basis for the inclusion of historical and geometric aspects of the FTC during its teaching and that it helps revealing the discovery process of the inverse relationship between integrals and derivatives.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus. History of Mathematics. Geometric Interpretation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), área da Matemática que integra a grade curricular de diversos cursos de Ensino Superior (BARBOSA, 2004), enfrenta grandes dificuldades no que diz respeito ao entendimento de seus conceitos por parte dos alunos. Diversos fatores contribuem para esse quadro, como: estudantes com formação deficiente em Matemática; distanciamento entre os conteúdos de Ensino Médio e os assuntos tratados nas disciplinas de CDI; e nível de aprofundamento no Ensino Médio abaixo daquele exigido na universidade (BARBOSA; NETO, 1995).

Como resultado, observa-se um alto índice de reprovações nesta disciplina, o que motiva um número crescente de pesquisas sobre o tema (GRANDE, 2013). Muitas delas buscam sugerir propostas pedagógicas a fim de amenizar o problema, em especial aquelas relacionadas ao uso de recursos digitais, ao ensino por meio da Resolução de Problemas e da Modelagem Matemática (PAGANI; ALLEVATO, 2014). Porém, apesar desse esforço, Cury e Cassol (2004) afirmam notar que, a cada nova turma ingressante no Ensino Superior, mais dificuldades são encontradas pelos alunos.

Esse fator deve ser considerado de grande relevância e não pode ser negligenciado por parte das pesquisas voltadas aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, já que o Cálculo é estudado em diversos cursos e sempre ocupa lugar de destaque nas grades curriculares (GRANDE, 2013). Silva (2011) afirma que as dificuldades com essa área da Matemática são muitas vezes também de caráter histórico-epistemológico, já que uma busca por suas origens nos faz retornar quase vinte e cinco séculos e evidencia um processo longo, árduo e evolutivo, com sucessão de ideias e colaboração entre diferentes gerações. Sob uma visão histórica, podemos considerar que o Cálculo estabeleceu uma verdadeira revolução cultural. Seu início foi a culminação do desenvolvimento de vários novos conceitos que se iniciaram na Grécia Antiga e tiveram maior avanço no século XVII. Segundo Grande (2013), marcou também um certo rompimento temporário com o rigor do método axiomático e dedutivo que caracteriza a Matemática[1], o que propiciou a possibilidade de descoberta de novos resultados.

Vê-se então grande importância na busca por abordagens que possam colaborar com um melhor entendimento dos conceitos do Cálculo por parte dos alunos. Assim, o presente trabalho

---

[1] O rigor estava estabelecido desde a Grécia Antiga. Essa busca pelo encadeamento dos resultados e fundamentação formal e lógica do Cálculo aconteceu depois, no século XIX, com o estabelecimento da Análise Real (GRANDE, 2013).

busca dar bases para a inclusão em sala de aula de novos aspectos ligados a um dos conteúdos do CDI: o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Segundo Mendes (2006), um fato histórico na Matemática é digno de memória se exerceu ou exerce até hoje grande influência, não só dentro da própria ciência mas também com aplicações em outras áreas do saber, sendo de grande valia, em especial, para a sociedade da época de sua descoberta e desenvolvimento. O TFC pode ser considerado como um desses fatos, já que foi por meio da relação por ele estabelecida que os matemáticos da modernidade Isaac Newton e Gottfried Leibniz conseguiram ligar os campos que hoje chamamos de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, proporcionando um método geral e sistemático para a resolução de problemas relacionados a áreas abaixo de curvas. A descoberta teve grande impacto na sociedade da época por dar vida a um novo corpo conceitual da Matemática, o Cálculo, unificando os problemas resolvidos por técnicas infinitesimais, que até então eram abordados de maneira particular, e dando uma nova ferramenta de aplicação da Matemática a diversas outras áreas do conhecimento.

O presente trabalho buscou então resgatar a história do Teorema Fundamental do Cálculo, desde os primórdios das ideias que nele estão presentes. Como afirma Silva (2011), o resgate histórico desvenda obstáculos e intuições que fizeram parte da gênese dos conceitos, como aqueles pertencentes ao CDI, sugerindo que seu uso pode ser muito benéfico e apontando para a necessidade de investigações e estudos sobre a História da Matemática. Muitos outros autores também apontam para a tendência do uso da História da Matemática em sala de aula, devido especialmente a seu caráter motivador e esclarecedor, não só por evidenciar o processo de desenvolvimento de um conceito mas também por, a partir daí, colaborar com um melhor entendimento da ideia que o conceito está exprimindo – o que muitas vezes não acontece com a apresentação mais direta de seu enunciado e de sua demonstração. Esses aspectos também ratificam a importância deste tipo de trabalho.

Na pesquisa histórica, foi possível perceber que justifica-se o momento do início/descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, na segunda metade do século XVII, pela exploração da relação inversa entre os problemas de áreas e de tangentes – o que em essência é justamente o TFC – por Newton e Leibniz. Assim, a história do TFC acaba se confundindo a história do próprio Cálculo. Foi verificado também que o desenvolvimento do TFC (e do Cálculo como um todo) foi, por muito tempo, amplamente apoiado na geometria. Assim, decidiu-se por também investigar uma possível visualização geométrica da relação inversa entre diferenciação e integração, que é estabelecida pelo teorema. Acredita-se que essa visão possa contribuir com uma visão mais intuitiva do TFC antes do rigor do enunciado e da demonstração formal. Ainda, vai ao encontro da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que, juntamente com os benefícios da inserção da História da Matemática em seu ensino, justificam e embasam teoricamente o trabalho. O autor da teoria, Raymond Duval, aponta para a necessidade do conhecimento de mais de um registro de representação para um mesmo ente matemático para que ele seja de fato entendido. Baseado em Duval, então, percebe-se que a visualização geométrica do TFC, enunciado de maneira algébrica, constitui-se em um outro registro de representação, e assim seu conhecimento pode colaborar para uma compreensão mais profunda do teorema.

As investigações acerca da história e da interpretação geométrica do TFC são relatadas neste trabalho, de modo a colaborar com a divulgação desses relevantes aspectos. Assim, em apenas um documento, estão reunidas outras visões para o TFC, o que facilita a elaboração de novas abordagens ao tema em sala de aula. A fim de compartilhar o trabalho e informações nele contidas, também foi incluída a realização de um seminário para alunos, professores e outros interessados, em que foram apresentados os momentos, figuras e conceitos históricos considerados mais relevantes ao desenvolvimento do TFC e também a sua visualização geométrica.

Alunos que entrem em contato com o trabalho podem conhecer melhor esse resultado tão importante do Cálculo; e professores/futuros professores podem usá-las em suas aulas, tendo em mente os benefícios trazidos pela inclusão dos aspectos aqui apresentados no processo de ensino e de aprendizagem. Como afirmado por Mendes (2006), a geração de conhecimento por meio da História da Matemática pressupõe um estudo prévio sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico do tópico a ser trabalhado.

1.1 Motivação e Contextualização

A escolha do Cálculo como tema se deu por conta do grande apreço do autor por essa área da Matemática. Dentre os conteúdos trabalhados na disciplina, a motivação para a escolha do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) surgiu a partir das aulas de Cálculo Diferencial e Integral III, disciplina que contempla, no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro, seu estudo. O TFC é o resultado central e básico do CDI (BRESSOUD, 2011), pois relaciona os processos de derivação e integração e proporciona um método prático para a computação de integrais definidas, unindo assim o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Podemos enunciá-lo da seguinte maneira (STEWART, 2016, p. 353):

$Teorema\ Fundamental\ do\ Cálculo$: $suponha\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ [a,b]$.

1. $Se\ g(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$, $então\ g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$, $onde\ F$ é $qualquer\ primitiva\ de\ f$, $isto$ é, $uma\ função\ tal\ que\ F' = f$

Em disciplinas anteriores, foram vistos os conceitos de Derivada e de Integral e suas respectivas interpretações geométricas, fundamentais para a compreensão das ideias expressas em suas definições. O TFC, porém, acabou sendo apresentado apenas algebricamente, sem conceitos geométricos. Além disso, surpreendeu o fato de a integração e a diferenciação, aparentemente dissociadas, estarem intrinsecamente relacionadas e, mais que isso, serem operadores exatamente inversos. A partir desses fatores, surgiram os questionamentos: como foi percebido que os processos de derivação e integração estavam ligados? Qual é a interpretação geométrica do TFC? Será que os conceitos por ele interligados foram sempre estudados apenas algebricamente?

Para responder aos questionamentos surgidos, é necessário olhar para a parte histórica do TFC. Pode-se dizer que Isaac Barrow, ainda em 1670, percebeu claramente a relação inversa entre determinação de retas tangentes e quadraturas de áreas (GRANDE, 2013), problemas de caráter essencialmente geométrico que deram origem à derivada e à integral. A linguagem usada para enunciar essa relação algebricamente, porém, foi criada apenas em 1823, por Cauchy (BRESSOUD, 2011), e assim o tratamento dado à relação certamente foi apoiado na geometria durante muito tempo. Isso mostra que estudar a história do TFC está associado a identificar e compreender possíveis visões geométricas do teorema.

Do ponto de vista do TFC como contéudo a ser ensinado, os trabalhos em Educação Matemática mostram que ele não é exceção quanto às dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem de Cálculo, evidenciando uma falta de compreensão plena por parte dos estudantes e pouca ênfase dos livros didáticos na relação estabelecida pelo teorema (GRANDE, 2013). Bressoud (2011) ratifica essa situação, afirmando que poucos são os alunos que de fato entendem o TFC e que as dificuldades aparecem principalmente pelo fato de o teorema, como temos atualmente, ser um produto altamente refinado, fruto de séculos de desenvolvimento. A apresentação do teorema em sala de aula não costuma apresentar esse processo, resumindo-se a enunciá-lo e, em seguido, demonstrá-lo. Assim como outros tópicos da Matemática, o TFC acabou sendo afastado de seu rico contexto inicial, e a apresentação apenas do produto final, sem abordar aspectos relacionados ao seu longo processo de evolução, pode colaborar com a compreensão insatisfatória (BRESSOUD, 2011).

1.2 Objetivos

A partir das questões expostas, é possível perceber a importância de trabalhos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de CDI e, mais especificamente, ao seu teorema fundamental. Nesse contexto, o presente trabalho de conclusão de curso buscou investigar e relatar a evolução histórica do Teorema Fundamental do Cálculo ao longo dos séculos e sua possível visualização gráfica. A finalidade é, primeiro, oferecer aos professores/futuros professores base para a inclusão de novos aspectos durante as aulas, de modo a possivelmente minizar as dificuldades dos estudantes com a compreensão do TFC; e, segundo, que alunos de Cálculo Diferencial e Integral que, porventura, tenham contato com o trabalho, possam adquirir maior conhecimento sobre as origens e ideias do TFC a partir de uma perspectiva histórica e geométrica, o que acredita-se ser benéfico para a aprendizagem dos conceitos. Para melhor direcionamento, foi formulada a seguinte questão de pesquisa: **destacando-se os benefícios trazidos ao ensino pela História da Matemática e pela visualização geométrica, como aconteceu o processo de desenvolvimento que levou à percepção da relação inversa estabelecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo?**

Para responder a questão, pensou-se no seguinte objetivo geral: **investigar e relatar o desenvolvimento histórico do Teorema Fundamental do Cálculo, bem como sua interpretação geométrica, tendo em vista os benefícios trazidos por abordagens que contemplem essas visões.**

Para o alcance do objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram elaborados:

- Investigar o desenvolvimento histórico do TFC;
- Relatar as investigações;
- Aprofundar os estudos relacionados à interpretação geométrica do TFC, desde sua origem;
- Relatar a interpretação geométrica;
- Apresentar os estudos em forma de seminário, a fim de divulgar e compartilhar a pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Para embasar a pesquisa e justificar sua importância, foram buscadas correntes teóricas relacionadas com seu tema e seus objetivos. Ainda, foi feita uma busca por outros trabalhos acadêmicos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo de modo a identificar publicações relacionadas e verificar suas metodologias, procedimentos e resultados. Todos esses aspectos são abordados a seguir.

2.1 Aporte Teórico

A relevância da pesquisa se encontra, primeiramente, na importância do uso da História da Matemática para o seu processo de ensino e de aprendizagem. Valdés (2006) afirma que tem crescido o interesse por essa área da Matemática e pelas suas aplicações como ferramenta didática e como campo de investigação, o que a torna cada vez mais incorporada à teoria e à prática do ensino de Matemática. Os benefícios de abordagens que contemplem visões trazidas pela História da Matemática, que são discutidos adiante, fazem com que seu uso em sala de aula possa ser considerado consenso pelos pesquisadores em Educação Matemática (VALDÉS, 2006).

Ainda como embasamento teórico, usa-se também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do pesquisador francês Raymond Duval. Como será mostrado a seguir, a teoria está ligada principalmente aos aspectos geométricos abordados no trabalho, que proporcionam outra visão e outra maneira de se representar conceitos matemáticos que usualmente são abordados de maneira algébrica – nesse caso, o Teorema Fundamental do Cálculo. Segundo Duval (2003), o conhecimento de outras representações para um mesmo objeto é fundamental para a sua plena compreensão.

2.1.1 Uso da História da Matemática em seu Ensino

Quando investigamos o ensino de Matemática, não é raro o aparecimento de teoremas sem nenhum tipo de informação sobre seu desenvolvimento, tornando-os uma espécie de dogma de fé, de verdade absoluta saída da obscuridade e que não tem grande significado (VALDÉS, 2006). Esse tipo de abordagem contribui para os crescentes desinteresse, não compreensão e aversão dos estudantes em relação a essa área do saber, principalmente porque, ao se apresentar apenas o produto final, deixa-se de lado os *porquês* dos tópicos que estão sendo estudados. Muitas vezes não se tem clara e explícita, a partir do conceito já totalmente finalizado e formalizado, a ideia que ele está estabelecendo e exprimindo, em especial para o aluno. Mudar essa imagem que se tem da Matemática como conhecimento pronto e acabado, com procedimentos mecânicos a serem decorados, certamente não é fácil. De acordo com Mendes (2006), uma maneira de ao menos dar início ao processo é a introdução de uma perspectiva histórica no ensino e aprendizagem da Matemática. “Trata-se de buscar na história os porquês matemáticos de modo a utilizá-los na superação dos obstáculos cognitivos surgidos no desenvolvimento da matemática escolar” (MENDES, 2006, p. 90).

Segundo Mendes (2006), muitos são os benefícios trazidos pela apropriada inserção da História da Matemática em sala de aula, como o desenvolvimento do espírito investigativo, da curiosidade científica e de habilidades matemáticas. Além disso, ela permite enxergar a Matemática como ciência verdadeiramente humana, desenvolvida em processos muitas vezes longos e com diversas dificuldades no caminho (VALDÉS, 2006). Apesar disso, a História da Matemática em livros didáticos e aulas ainda costuma se restringir, quando utilizada, à biografia de figuras históricas e acontecimentos que não colaboram diretamente com a construção do conhecimento, o que é muito lamentável do ponto de vista pedagógico (MENDES, 2006). Segundo Valdés (2006), além de impedir o aproveitamento dos benefícios citados, essa dissociação da Matemática e de sua história acaba por afastá-la do caráter cumulativo de seu desenvolvimento – conceitos construídos a partir de uma sucessão de ideias – e instalar assim uma visão mais individualista, que desconsidera o trabalho coletivo de gerações. Retomar essa essa cadeia evolutiva das sucessivas ideias esclarece a motivação e as ideias por trás de um problema (VALDÉS, 2006).

A não inclusão da História da Matemática no ensino da Matemática também colabora para o prevalecimento do total rigor da Matemática, deixando um papel secundário (ou até mesmo nulo) para a intuição, tão importante na descoberta de resultados. Como apontado por Mendes (2006), o extremo rigor matemático, se sozinho, também traz artificialidade, pois leva a Matemática a se esquecer de suas origens históricas. “Vê-se como as questões se podem resolver, mas já não se vê como e porque elas se formularam” (POINCARÉ *apud* MENDES, 2006, p. 96). Não que o rigor não seja de grande importância – na verdade, podemos apontá-lo como uma característica fundamental dessa ciência, aquilo que a torna *exata* – mas a intuição também deve estar presente na discussão dos conceitos, de modo a esclarecer a ideia estabelecida pelo resultado ao qual se deseja chegar e que será depois rigorosamente provado, tornando-o de fato um teorema válido. Como afirmado por Valdés (2006), o processo histórico de construção dos conhecimentos matemáticos mostra o raciocínio empírico-dedutivo como não menos importante que o raciocínio puramente dedutivo. Refazendo o percurso histórico de um determinado conceito, retomamos as ideias iniciais e intuitivas que permitiram a obtenção do resultado e a sua posterior demonstração e fundamentação rigorosa. A falta de esclarecimento do processo anterior ao formalismo "configura-se em um dos obstáculos a serem superados pelos professores e pelos estudantes durante as atividades realizadas em sala de aula" (MENDES, 2006, p. 96).

Temos na História da Matemática uma poderosa ferramenta que, segundo Valdés (2006), é capaz de retomar as origens de conteúdos atualmente ensinados e resgatar o caminho e as circunstâncias de seus respectivos desenvolvimentos, propiciando maior compreensão das ideias estudadas. A partir daí, é possível que os tópicos mudem de aspecto, adquirindo mais sentido dentro da teoria. Essa redescoberta da gênese dos conceitos vistos em sala de aula expõe também todo o processo de evolução de um determinado assunto, permitindo aos alunos conhecerem as motivações e dúvidas que os matemáticos experimentaram (que podem coincidir com suas próprias) e, ainda, mostra como a Matemática fez/faz parte da cultura humana (VALDÉS, 2006).

É importante, ainda, destacar o aspecto motivador do uso da História da Matemática em sala de aula. Segundo Mendes (2006), a inclusão de aspectos históricos de determinado conceito é imprescindível para tornar as aulas mais atraentes para os estudantes, sendo uma abordagem capaz de responder perguntas acerca do processo de construção das informações que agora estão prontas. Aulas mais atraentes colaboram para um maior interesse e, por consequência, maior sucesso dos estudantes.

Claro que, antes de chegar aos discentes, o conhecimento passa pelos docentes, e a investigação histórica de conteúdos a serem trabalhados também traz pontos positivos em relação ao professor. Além dos benefícios apontados anteriormente, que colaboram com o alcance de uma compreensão mais verdadeira por parte dos alunos e, assim, ajudam o professor no cumprimento da essência de sua profissão, também destaca-se o aprofundamento e maior conhecimento da própria pessoa que atua como professor, entendendo que seu papel como aprendiz continuará vivo, pelo menos, enquanto exerce a profissão. Como defendido por Valdés (2006), uma abordagem para a Matemática que faça uso de informações históricas é de grande importância para a ampliação do desenvolvimento conceitual daqueles que a lecionam.

A discussão feita acima não se aplica somente à educação básica, já que o papel pedagógico da História da Matemática é defendido nos demais níveis educacionais (MENDES, 2006), podendo assim também ser abordada nas disciplinas matemáticas universitárias. Valdés (2006) defende que um certo conhecimento da História da Matemática deve ser parte fundamental do corpo de conhecimentos do professor de qualquer nível de ensino. Mais especificamente sobre o Cálculo, pode-se dizer que seu surgimento aconteceu em circunstâncias históricas muito interessantes e peculiares, e que o conhecimento dessa história proporciona uma visão dinâmica da Matemática (VALDÉS, 2006).

> Com respeito a todos os temas básicos do cálculo infinitesimal [...] nunca se suscita a questão: Por que assim precisamente? Ou: Como se chegou a isso? Contudo, todas essas questões foram, em algum período, objetivos de uma intensa busca, respostas a perguntas instigantes... Se voltássemos às origens dessas idéias, elas perderiam essa aparência de morte e de feitos dissecados e voltariam a ter uma vida fresca e pujante. (TOEPLITZ *apud* VALDÉS, 2006).

É possível, então, associar a História da Matemática ao ensino de Cálculo e, mais especificamente, do TFC. Acredita-se que ela pode explicitar o desenvolvimento do teorema, mostrando seus aspectos geométricos, revelando suas origens e possibilitando uma melhor compreensão da relação por ele estabelecida, tanto ao professor quanto ao aluno. De um ponto de vista pedagógico, o estudo de CDI vinculado à sua evolução histórica pode auxiliar um melhor entendimento de seus conceitos (SILVA, 2011), o que tem grande relevância pois, como defendido por Fossa (2006), não queremos que os alunos saibam apenas manipular e usar algoritmos, mas sim que tenham uma compreensão verdadeira dos conceitos que estudam. Por tudo que foi apontado anteriormente, vê-se que a História da Matemática contribui para o alcance desse objetivo.

2.1.2 Registros de Representação Semiótica

Duval (2003) afirma que, para entendermos as dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão da Matemática, não basta focar apenas no campo dos conceitos em si. Bloqueios relacionados aos conteúdos são comuns a outras áreas do saber, donas também de tópicos mais ou menos complexos. Então, antes de analisar as dificuldades dos alunos de maneira mais direta, é necessário um olhar para aspectos cognitivos, ou seja, para os processos que possibilitam a aprendizagem dos objetos matemáticos, já que o ensino de Matemática, segundo o autor, busca, em pricípio, não formar futuros matemáticos nem dar ferramentas que talvez sejam úteis em estudos posteriores, mas sim colaborar para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, visualização e análise do aluno. Ele destaca então que a atividade cognitiva relacionada à construção de conceitos matemáticos se difere daquelas envolvidas em outros domínios do conhecimento por conta de duas características: grande importância das representações internalizadas que vêm a mente quando se aborda um conceito (representações semióticas) e variedade de representações que podem ser utilizadas para um mesmo objeto (DUVAL, 2003).

A primeira é observável por meio da história da Matemática: o desenvolvimento das representações foi essencial para a evolução dessa ciência. Seu registro, isto é, sua externalização, permitiu a manipulação de um determinado objeto matemático dentro daquela representação, sendo essencial para a visualização e percepção dos objetos, tornando-os menos abstratos e mais concretos e palpáveis (DUVAL, 2003). Duval (2003) traz como exemplo o sistema de numeração decimal, afirmando que é essencial para designar de modo mais concreto a ideia de número e possibilitar o acesso a ele. A segunda diz respeito aos diferentes registros de representação que um mesmo objeto matemático possui. Alguns exemplos trazidos por Duval (2003) são: figuras geométricas, sistemas de numeração, escrita algébrica e até mesmo a língua natural. A atividade matemática, então, tem sua especificidade "na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação." (DUVAL, 2003, p. 14).

Duval (2012) destaca ainda que as representações e seus correspondentes registros são os meios responsáveis por tornar os objetos matemáticos acessíveis. Os conceitos dessa área do saber são bastante abstratos, necessitando assim de uma concretização que torne seu uso mais viável. Por isso o uso da palavra "representação": sua mentalização e registro são maneiras de concretizar aquela ideia de modo que sua compreensão e manipulação sejam possíveis. Na verdade, a abstração e a perfeição das definições são muito acentuadas, a ponto de não poderem ser realisticamente registradas com exatidão. Assim, é relevante também apontar que não se pode confundir o objeto matemático idealizado com sua representação, já que ela não é, de fato, o objeto matemático em si, como definido precisamente (DUVAL, 2012). Conhecer essa espécie de paradoxo – o conhecimento matemático requerer representações de conceitos que, na verdade, não podem ser perfeitamente representados – é fundamental, segundo Duval (2012), para entender o processo de aprendizagem matemática.

Dependendo do problema em questão, um registro pode ser mais útil e, assim, mais usado em um dado momento, mas a possibilidade de troca de registros deve sempre existir. Então, "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica" (DUVAL, 2003, p. 15). O autor diz então que, para que os alunos sejam capazes de coordenar esses registros, deve-se entender os diferentes tipos de transformação que um objeto de estudo pode ter dentro da Matemática. Primeiro, ele aponta para o tratamento, que mantém o objeto dentro do mesmo sistema de representação. Um exemplo seria a resolução de uma equação a partir de sua manipulação dentro da representação algébrica. Segundo, esclarece o que chama de conversão, que seria a mudança de sistema, isto é, a percepção de outra forma de representação daquele objeto, como a representação simbólica de um conjunto que, a princípio, estava descrito textualmente a partir de suas características. Esta segunda é a que permitirá o trânsito entre os diferentes registros, o que passa por entender e compreender de modo mais claro e verdadeiro características do conceito que está sendo estudado – embora os alunos, muitas vezes, não reconheçam naturalmente um mesmo objeto a partir de duas representações diferentes.

A partir do que foi exposto acima, verifica-se como a teoria de Duval está relacionada a este trabalho. Como afirmado anteriormente, o Teorema Fundamental do Cálculo foi afastado de seu contexto geométrico inicial, sendo visto atualmente de maneira essencialmente algébrica (BRESSOUD, 2019). Isso dificulta a coordenação e transição entre diferentes registros e, pela teoria, afasta do estudante a plena compreensão do teorema. Tanto pelo resgate histórico quanto pela interpretação geométrica atual do TFC, é possível identificar outras formas de visualização da relação por ele estabelecida.

2.2 Trabalhos Relacionados

Para a revisão trabalhos relacionados, foi feita uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), cujo endereço eletrônico é bdtd.ibict.br. A busca foi realizada no dia 7 de novembro de 2019, sendo usada a expressão “Teorema Fundamental do Cálculo”. Optou-se por pesquisar inicialmente apenas trabalhos que tivessem tais palavras no título, com onze resultados sendo retornados. Em seguida, aplicou-se o filtro “Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática”, de modo a identificar os trabalhos voltados ao processo de ensino e aprendizagem. Restaram, assim, seis resultados.

Para identificação daqueles mais semelhantes a este trabalho e, assim, seleção final, foi estabelecido o seguinte critério de exclusão: trabalhos que não abordavam aspectos relacionados a professores e/ou alunos. Para análise, foram lidos os resumos dos trabalhos encontrados após a aplicação do filtro. Verificou-se que três deles não envolveram docentes e discentes, sendo assim excluídos. Restaram então três trabalhos, que são discutidos a seguir.

2.2.1 Os Registros de Representação Semiótica Mobilizados por Professores no Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo

Trata-se de uma dissertação de 2007 do programa de Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), de autoria de Desiree Picone sob orientação do Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva. O trabalho, fundamentado na teoria dos Registro de Representação Semiótica, buscou identificar quais registros são mobilizados e/ou coordenados por professores durante o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo, verificando se exploram a visualização do teorema por meio da representação gráfica.

Para o alcance do objetivo, dois questionários foram elaborados e respondidos por oito professores de Cálculo da grande São Paulo, sendo quatro de universidades públicas e quatro de instituições particulares. O primeiro, constituído de oito questões, foi feito com o intuito de identificar o perfil dos profissionais. O segundo, composto por nove questões, visava a investigar o enfoque dado ao TFC no que diz respeito à conexão entre derivação e integração e ao seu uso para o cálculo de integrais definidas. Uma entrevista também foi realizada com cada um dos participantes para obtenção de maior detalhamento sobre as respostas dadas.

Por meio da análise dos dados coletados, a autora constatou que nem todos os professores exploram a visualização gráfica do TFC. Além disso, viu que o teorema é trabalhado da mesma maneira nos diferentes cursos em que os participantes lecionam no que diz respeito aos registros de representação. Observou também que alguns dos professores que não coordenam os registros durante o ensino do TFC exploram diferentes representações no estudo de outros conteúdos de Cálculo.

2.2.2 Uma Investigação Sobre a Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo

O trabalho, de autoria de Grácia Anacleto sob orientação do Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva, foi uma dissertação de 2007 referente ao programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP. O objetivo foi investigar os conhecimentos que são mobilizados por alunos que já viram o TFC quanto à inter-relação entre a diferenciação e a integração. Teve como referencial teórico a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros.

Como metodologia, a autora utilizou uma abordagem qualitativa, se preocupando mais com o processo do que com o produto. Para coleta de dados, um questionário de atividades foi elaborado, aplicado a alunos e analisado, visando investigar se os participantes eram capazes de identificar aspectos relacionados à derivação e à integração como operações inversas. A aplicação ocorreu no curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular de São Paulo, com treze duplas de estudantes participando. Todos já haviam estudado o TFC.

Concluiu-se que os alunos conseguem determinar uma primitiva para calcular integrais definidas, cometendo às vezes equívocos algébricos. No entanto, essa capacidade não fica tão evidente quando se trabalha no domínio geométrico, mostrando que os alunos podem dominar apenas parcialmente os conceitos. De modo geral, viu-se que a maioria apresentou dificuldade em solucionar questões pela visualização do gráfico, o que poderia evitar o desenvolvimento de longos algoritmos.

2.2.3 As Ideias Centrais do Teorema Fundamental do Cálculo Mobilizadas por Alunos de Licenciatura em Matemática

Assim como os dois trabalhos anteriores, trata-se de uma dissertação do programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP, realizada por Érika Andersen no ano de 2011, sob orientação do Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva. Apoiada na teoria do Pensamento Matemático Avançado, de Tommy Dreyfus, a pesquisa buscou investigar quais processos mentais intervêm e são combinados por alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo o Teorema Fundamental do Cálculo.

A autora classificou sua pesquisa como qualitativa e, para coleta de dados, elaborou uma sequência de atividades visando introduzir o TFC. Baseou-se em quatro fases da Engenharia Didática: análises preliminares; concepção e análise *a piori*; experimentação; análise *a posteriori* e validação. A aplicação foi feita com quatorze alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da cidade de São Paulo.

Andersen concluiu que os processos mobilizados pelos estudantes foram: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, intuição, definição, descoberta, validação, generalização, síntese e abstração. Tais processos permitiram, segundo ela, que muitos dos participantes conjecturassem que a derivação e a integração são operações inversas. Também destacou que os resultados explicitaram que este tipo de trabalho muito contribui para melhor compreensão dos conceitos envolvidos no TFC.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Visando reunir, compartilhar e divulgar informações consideradas relevantes, a pesquisa é destinada ao aprofundamento nos estudos do Teorema Fundamental do Cálculo, mais especificamente à investigação e ao relato de sua evolução histórica, bem como de sua visualização geométrica, a partir de livros, artigos e outros tipos de trabalhos acadêmicos. Pode ser então considerada uma pesquisa bibliográfica, caracterizada como um levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas (FONSECA, 2002). Contém ainda traços de uma pesquisa exploratória, pois proporciona maior familiaridade com o assunto que está sendo tratado (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

O público-alvo do trabalho é constituído por professores e alunos que, em algum momento, lecionem ou estudem o TFC. Como afirmado por Valdés (2006), uma condição necessária e fundamental para o uso mais constante da História da Matemática em sala de aula é a divulgação, para os professores, de seus conteúdos. Com as informações históricas em mãos, eles podem valorizá-las e adaptá-las às suas necessidades, de modo a usá-las da maneira mais adequada possível e podendo, assim, colocar em prática abordagens capazes de trazer os diversos benefícios discutidos anteriormente (VALDÉS, 2006). Em relação aos alunos, acredita-se que o conhecimento de informações históricas, bem como de outras representações de um mesmo ente matemático, nesse caso do TFC, subsidiam a construção de uma Matemática de conceitos e ideias mais claros e explícitos. Ainda, caso sejam licenciandos em Matemática (ou estudantes de algum outro curso mas pretendam lecionar Matemática), poderão usar as informações como parte de suas futuras aulas.

Diante do exposto, para o alcance dos objetivos específicos e, por consequência, do objetivo geral, o trabalho estrutura-se segundo as seguintes etapas de pesquisa:

1) Realização de estudos sobre o TFC de modo a obter melhor compreensão sobre a relação por ele estabelecida;
2) Pesquisa e leitura de artigos científicos e livros que tratem do desenvolvimento histórico do TFC, com o intuito de reconstruir sua evolução;
3) Relato da reconstrução em texto;
4) Investigação da interpretação geométrica do TFC;
5) Relato da interpretação em texto;
6) Elaboração e realização de uma apresentação em forma de seminário para compartilhar a evolução histórica e interpretação geométrica pesquisadas.

A base das etapas relacionadas a pesquisas e investigações a partir de referências teóricas já publicadas foram livros sobre a História da Matemática no geral e também sobre a História do Cálculo mais especificamente. Quando algum tópico tinha papel mais fundamental na evolução e desenvolvimento do TFC, artigos mais específicos foram pesquisados, lidos e também usados como referência para maior e melhor detalhamento.

O seminário, última etapa do trabalho, foi incluído de modo a compartilhar parte da pesquisa de maneira mais direta com alunos e professores, já que o acesso às informações contidas na pesquisa histórica e na visualização geométrica certamente seria mais restrito sem a apresentação. Além disso, foi importante para explicitar a própria existência da pesquisa, para que assim todos soubessem de seu tema e, depois, quem tivesse interesse, pudesse ler o trabalho e verificar as informações nele contidas de maneira mais detalhada. Sem a apresentação, certamente o trabalho seria menos conhecido e divulgado, correndo maior risco de ser engavetado sem alcançar muitas pessoas.

Devido à riqueza do tema, tanto no sentido da quantidade de informações quanto pela importância deles, o texto do trabalho acabou tomando grandes proporções, tornando inviável a apresentação de toda a investigação realizada aos participantes. A seleção dos conteúdos aconteceu de modo a tornar o seminário diretamente centralizado no surgimento e desenvolvimento dos conceitos que foram ligados pelo TFC e no aparecimento da relação por ele estabelecida, até seu uso para o desenvolvimento de um método geral e unificado para o cálculo de áreas por Newton e Leibniz. A interpretação geométrica também foi apresentada durante o seminário.

4 RESULTADOS

Pela parte do trabalho referente à pesquisa histórica, foi possível perceber que a história do Cálculo possui uma pausa de aproximadamente dois milênios na evolução direta de seus conceitos, entre a Grécia Antiga e o Renascimento. Buscando dar continuidade e fluidez à história e entender o que aconteceu nesse período, optou-se, de qualquer forma, por abordá-lo – até porque, mesmo sem contribuições diretas ao Cálculo, existiram nesse intervalo muitas contribuições à Matemática como um todo e, assim, também às suas subáreas (mesmo que indiretamente).

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento histórico e a interpretação geométrica do TFC investigados durante a pesquisa, seguidos de alguns comentários sobre o seminário apresentado.

4.1 Pesquisa Histórica

As primeiras ideias relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral nos levam de volta aos tempos da Grécia Antiga, em especial pelos trabalhos de Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) e Apolônio de Perga (262-190 a.C.). Usando essencialmente a geometria, ambos investigaram problemas que hoje fazem parte do estudo de Cálculo e que mais tarde foram relacionados pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Iniciemos então esse passeio pela história da Matemática retornando aos primórdios da Matemática Grega.

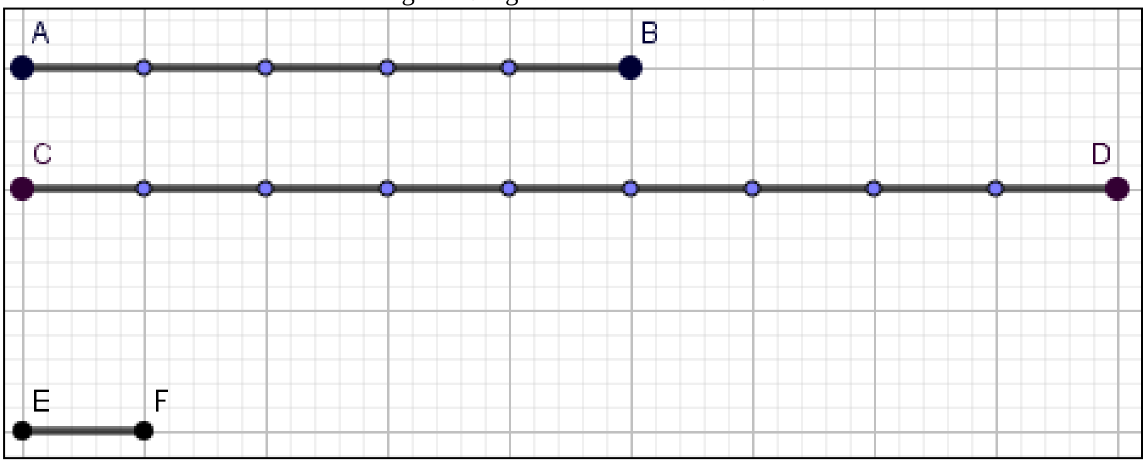
4.1.1 Panorama da Matemática Grega

Até o começo do século VI a.C., a Matemática praticada na Grécia era herdeira direta daquela que se desenvolveu principalmente na Babilônia e no Egito. Trata-se de um conhecimento de natureza predominantemente empírica, cujas conclusões eram obtidas a partir de experimentações e observações (ÁVILA, 2006). Entretanto, em aproximadamente 585 a.C., Tales de Mileto (624-546 a.C.) começou a dar à Matemática o tratamento lógico e dedutivo que conhecemos hoje: primeiros resultados obtidos a partir de algumas noções básicas – consideradas evidentes por si mesmas – conhecidas como *postulados* ou *axiomas*, resultados seguintes apoiados nos primeiros, e assim por diante. Esse é então considerado o início da Matemática grega (BARON, 1985).

Não muito depois de Tales, em cerca de 550 a.C. (BARON, 1985), a famosa Escola Pitagórica dava seus primeiros passos. Pouco se conhece sobre a vida pessoal de seu fundador Pitágoras (580-500 a.C.), mas sabe-se que ele era famoso não só pelas pesquisas matemáticas, como também pelos seus estudos sobre política e religião. Ele e seus seguidores, chamados de pitagóricos, acreditavam que tudo poderia ser explicado por meio dos números inteiros positivos (únicos números da época) ou de razões entre eles[2], tornando esse o grande objeto de estudo da escola (BARON, 1985). Entretanto, uma descoberta dos próprios pitagóricos, ocorrida provavelmente entre 450 e 400 a.C. (ÁVILA, 1984), acabou por gerar uma grande crise de fundamentos[3] na Matemática grega. A origem e solução dessa crise são abordadas a seguir, assim como as consequências para os estudos posteriores.

Quando dois segmentos (ou outras grandezas de mesma espécie) podem ser mensurados a partir de uma mesma unidade de medida, eles são ditos comensuráveis (ÁVILA, 1984). A figura 1 mostra um exemplo:

Figura 1: segmentos comensuráveis.



Fonte: elaboração própria.

Repare que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ podem ser ambos medidos tomando $\overline{EF}$ como unidade. Isso quer dizer que $\overline{AB} = m \cdot \overline{EF}$ e $\overline{CD} = n \cdot \overline{EF}$, em que m e n são números inteiros. Especificamente

[2] Os racionais não eram considerados números pelos pitagóricos, mas apenas relações entre grandezas de mesma espécie expressas pela razão de dois inteiros (ÁVILA, 1984).
[3] Essa foi a primeira crise de fundamentos ocorrida na história da Matemática (ÁVILA, 1985).

no exemplo acima, $m = 5$ e $n = 9$. Essa comensurabilidade também permite chegar a uma razão de inteiros que representa a relação entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = m \cdot \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{AB}}{m} \quad (1)$$

$$\overline{CD} = n \cdot \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{CD}}{n} \quad (2)$$

$$De\ (1)\ e\ (2): \frac{\overline{AB}}{m} = \frac{\overline{CD}}{n} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$$

Até mesmo pelo papel central que os números tinham na escola, os pitagóricos acreditavam que sempre seria possível expressar a relação entre qualquer par de segmentos por meio de uma razão de dois números inteiros (BARON, 1985). Como afirmado por Ávila (1984), intuitivamente essa é uma ideia muito razoável, já que caso o segmento que está sendo usado como unidade não caiba um número inteiro de vezes nos dois que estão sendo comparados, podemos pensar em um outro tão pequeno quanto necessário, o que nos leva a acreditar que há de existir algum que torne os segmentos iniciais comensuráveis.

Acontece que nem todos os pares de segmentos podem ser medidos com uma mesma unidade, como os próprios pitagóricos perceberam (ÁVILA, 1984). Nesse caso, são chamados de incomensuráveis: não existe um terceiro segmento que seja unidade comum dos dois primeiros, impossibilitando uma razão de inteiros que represente a relação entre eles. Tal fato contraria nossa intuição geométrica e acabou representando um entrave para a sequência do desenvolvimento da Matemática grega, momento que ficou conhecido como ***crise dos incomensuráveis*** (ÁVILA, 1984). Os teoremas já conhecidos eram provados tendo por base a comensurabilidade, como o Teorema de Tales e outros mais, e a nova descoberta desfez os alicerces de vários deles (ÁVILA, 1985). Além disso, ainda segundo Ávila (1984), a crise levou os pitagóricos a um grande sentimento de derrota: se os números conhecidos e as razões por eles formadas já não eram suficientes nem mesmo para exprimir relações entre segmentos quaisquer, certamente também não poderiam ser considerados a essência de tudo, como acreditavam os seguidores da escola.

Ao que tudo indica, a incomensurabilidade foi descoberta[4] por meios geométricos, a partir da tentativa de medir o lado e a diagonal de um quadrado qualquer com uma mesma unidade (ÁVILA, 1984). Como sabemos hoje, a razão entre a diagonal de um quadrado e seu

[4] Não se sabe ao certo, mas parece que em cerca de 400 a.C., Hipasus de Metapontum acabou afogado como punição por dizer que descobrira a incomensurabilidade (BARON, 1985). Isso mostra que a aceitação da nova descoberta não foi imediata.

lado sempre tem valor irracional, e a introdução desses números resolveria a crise dos incomensuráveis[5] (ÁVILA, 2006). Porém, os gregos não seguiram esse caminho e conseguiram contornar o problema com a sólida teoria das proporções de Eudoxo (408-355 a.C.), sem precisar introduzir novos números (BARON, 1985).

A definição de Eudoxo para igualdade de razões foi a base de toda sua teoria das proporções, e com ela foi possível trabalhar com as grandezas incomensuráveis apenas com os inteiros positivos (ÁVILA, 2006). De acordo com Ávila (1985), a definição pode ser enunciada da seguinte maneira:

Definição: dados quatro segmentos A, B, C e D, diz-se que A está para B assim como C está para D $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D}\right)$ *se, quaisquer que sejam os números* m *e* n*, então*

$$n \cdot A > m \cdot B \Leftrightarrow n \cdot C > m \cdot D;$$
$$n \cdot A = m \cdot B \Leftrightarrow n \cdot C = m \cdot D;$$
$$n \cdot A < m \cdot B \Leftrightarrow n \cdot C < m \cdot D.$$

No caso de grandezas comensuráveis, como já mostrado, temos a igualdade $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, que equivale a dizer que $n \cdot A = m \cdot B$. Se acontecer de $\frac{C}{D} = \frac{m}{n}$ e, assim, $n \cdot C = m \cdot D$, temos que $\frac{A}{B}$ é de fato igual a $\frac{C}{D}$, caindo no segundo caso da definição. Para grandezas incomensuráveis, $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ nunca serão iguais a uma razão do tipo $\frac{m}{n}$ (com m e n inteiros positivos), e portanto também nunca iguais entre si. Eudoxo, porém, continua definindo a igualdade $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, desde que para quaisquer m e n, o primeiro e o terceiro caso sejam satisfeitos[6]. Ávila (2006) diz que essa definição também era aplicada a outras grandezas de mesma espécie, como áreas e volumes.

Percebe-se que, com os segmentos comensuráveis, a razão sempre tinha um significado numérico. Para lidar com os incomensuráveis, Eudoxo abre mão disso e diz que o importante é conseguir exprimir a igualdade de duas razões de segmentos, mesmo que nenhuma delas possa ser expressa em termos de números conhecidos (ÁVILA, 1985).

A crise dos incomensuráveis e a solução dada por Eudoxo trouxeram grandes mudanças para o desenvolvimento subsequente. A insuficiência do sistema de números usado até então e a nova definição para igualdade de razões, que trabalhava agora com segmentos, áreas,

---

[5] Mais detalhes sobre a crise dos incomensuráveis em ÁVILA (1984).

[6] A definição de Eudoxo para igualdade de razões serviu de inspiração para a construção da teoria dos números reais por Richard Dedekind, no século XIX (ÁVILA, 2006).

volumes, sem que esses tivessem necessariamente medida numérica, acabou distanciando a Matemática grega da ênfase aritmética da escola pitagórica. Esses fatores, aliados à grande preocupação com o rigor lógico introduzido por Tales, encaminharam "toda a Matemática para o lado da Geometria" (ÁVILA, 2006, p. 20). Como afirma Baron (1985), os estudos posteriores tornaram-se inteiramente geometrizados[7]. Essa foi uma consequência natural, já que não é possível atribuir um valor numérico à diagonal de um quadrado quando se tem apenas os inteiros positivos disponíveis, mas pode-se construir, utilizando apenas régua e compasso[8], um quadrado qualquer e sua diagonal.

Os trabalhos realizados pelos gregos após a solução de Eudoxo mostram a grande geometrização da Matemática, sendo a famosa obra *Elementos*, de Euclides[9], a principal delas. A forma de todos os treze livros da obra é inteiramente geométrica, com todas as grandezas sendo expressas por meio de segmentos, planos, regiões limitadas por curvas, etc, e as operações centradas na teoria das proporções (BARON 1985). Ainda segundo Baron (1985), Euclides unificou vários teoremas que estavam isolados e colocou-os sob um sistema dedutivo, amadurecendo de vez a estrutura lógica da Matemática iniciada com Tales. *Elementos* é considerado a corporificação desse método axiomático (ÁVILA, 2006). Daí em diante, qualquer resultado teria que ser demonstrado geometricamente, seguindo o rigor de vez estabelecido.

Essa maturação completa da geometrização e da axiomatização da Matemática grega também é atribuída a Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (262-190 a.C.), contemporâneos de Euclides (BARON, 1985). As obras desses dois matemáticos da Idade Áurea[10] da Matemática grega serão abordadas com mais detalhes a seguir, devido à relação que elas têm com o Cálculo Diferencial e Integral. Apolônio investigou, ainda que de maneira diferente da usada aproximadamente dois milênios depois, o problema de retas tangentes a curvas, estando assim relacionado ao Cálculo Diferencial. Arquimedes trabalhou principalmente problemas de áreas de figuras planas e volumes, o que o aproxima do Cálculo Integral. Este último terá maior destaque já que, além de investigar problemas relacionados ao Cálculo, fez uso de noções similares às que permitiriam o desenvolvimento da integração, tornando a análise de sua obra

[7] Essa geometrização da Matemática foi tão intensa que, segundo Ávila (2006), os matemáticos costumavam ser chamados de geômetras até pouco tempo atrás.
[8] Únicos instrumentos de construção geométrica utilizados pelos gregos (GRANDE, 2013).
[9] Sabe-se que Euclides viveu em cerca de 300 a.C. (ASSIS, 2008).
[10] Período entre 200-300 a.C., chamado assim pelo destaque das obras de Euclides, Arquimedes e Apolônio (BOYER, 1974).

"uma tarefa imprescindível para a compreensão da gênese do Cálculo Integral" (GRANDE, 2013, p. 115).

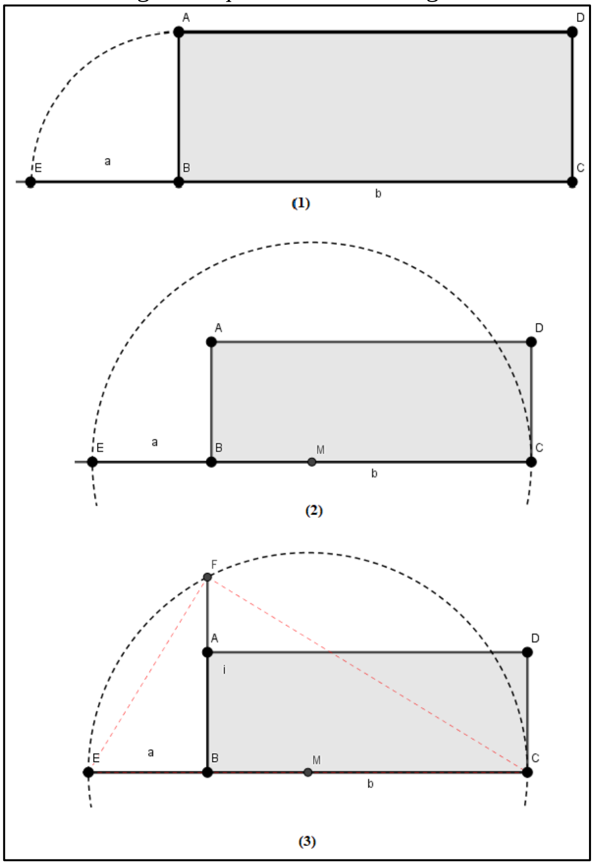
4.1.2 Arquimedes

Pelo desenvolvimento de trabalhos experimentais e teóricos, brilhantismo e influência, Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade (ASSIS, 2008). Suas contribuições e seu raciocínio foram tão impactantes que alguns historiadores o consideram até mesmo o maior de todos os tempos (ÁVILA, 2011). Seu local de nascimento foi a cidade de Siracusa, localizada no sul da península itálica, região que fazia parte da chamada Magna Grécia. É possível que tenha passado parte de sua vida no grande centro de estudos da época, Alexandria, onde pode ter tido contato com outros sábios, dentre eles provavelmente alguns sucessores de Euclides (BOYER, 1974). Dedicou-se intensamente ao estudo de áreas e volumes, tornando-se então um grande mestre desses tópicos (BRESSOUD, 2019).

Alguns dos problemas que mais despertavam interesse em Arquimedes e que foram por ele resolvidos estavam relacionados à quadratura de figuras limitadas por curvas. Como já discutido, após a crise dos incomensuráveis, a Matemática grega "pendia excessivamente para o lado geométrico, em detrimento dos números" (ÁVILA, 2006, p. 211). Áreas quaisquer, então, não eram obtidas por valores numéricos ou fórmulas, mas sim pela comparação com a área de um quadrado conhecido. Como diz Ávila (2006), era necessário conseguir construir, apenas com régua e compasso, um quadrado de área equivalente a da figura em questão, daí o termo *quadratura*.

A quadratura de polígonos já era dominada pelos gregos. Eles sabiam construir um quadrado de área igual a de um retângulo pelo seguinte processo (ÁVILA, 2006): um retângulo qualquer ABCD possui lados de medida a e b. Prolongamos o lado maior e transportamos a medida do lado menor para esse prolongamento, formando $\overline{EC} = \overline{EB} + \overline{BC} = a + b$ (1). Achamos o ponto médio M de $\overline{EC}$ e traçamos a circunferência de raio $\frac{\overline{EC}}{2} = \frac{a+b}{2}$ (2). Em seguida, prolongamos $\overline{AB}$ até que intersecte a circunferência, o que ocorre no ponto F (3). Assim, $\overline{BF}$ é o lado do quadrado que tem área equivalente a do retângulo inicial. A figura 2 ilustra o procedimento.

Figura 2: quadratura do retângulo.

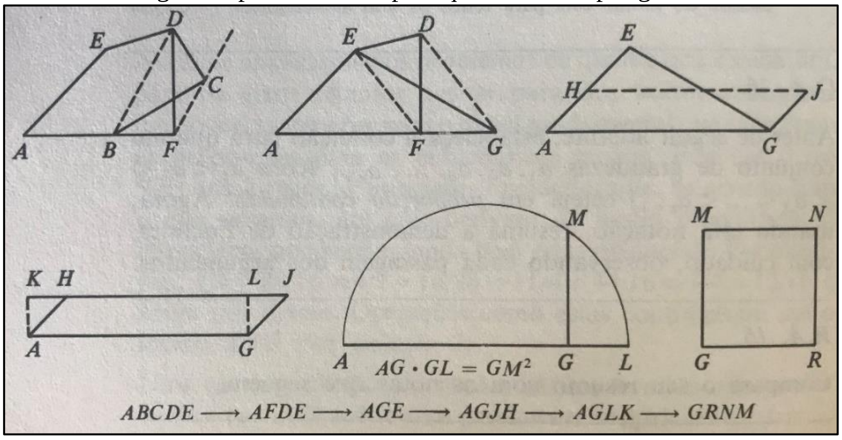


Fonte: elaboração própria.

Como o triângulo EFC formado é retângulo, sendo $\overline{BF}$ sua altura, podemos usar uma de suas relações métricas para verificar que $\overline{BF}^2 = \overline{EB} \cdot \overline{BC} = a \cdot b$. Como $a \cdot b$ é justamente a área do retângulo inicial, fica provada a validade do procedimento.

Como é mostrado na figura 3, no caso de outro polígono qualquer, primeiramente é possível reduzi-lo a um triângulo de mesma área por meio de transformações geométricas. O triângulo então torna-se um paralelogramo, que por sua vez é transformado num retângulo e, por último, pelo procedimento mostrado acima, o retângulo torna-se um quadrado. “Segue-se que para toda figura poligonal plana podemos encontrar um quadrado com mesma área” (BARON, 1985, p. 33).

Figura 3: procedimento para quadratura de polígonos.



Fonte: Baron (1985, p. 32).

Problemas relacionados à quadratura de figuras com fronteiras curvas, porém, continuavam em aberto. Os primeiros resultados encontrados para questões como essas são devidos a Hipócrates de Quio (460-377 a.C.), que obteve sucesso no cálculo de áreas de figuras com formatos lunares[11] (ÁVILA, 2006). Porém, os avanços de Hipócrates não contribuíram para a resolução do principal problema da época, conhecido como quadratura do círculo[12], que recebe mais destaque devido a grande influência que teve para o desenvolvimento daquilo que hoje chamamos de integração (BARON, 1985).

A área do círculo foi encontrada e provada rigorosamente por Arquimedes sem a construção de um quadrado equivalente. De fato, "no século XIX seria demonstrada a impossibilidade de construir, apenas com régua e compasso, um quadrado de área igual a de um círculo dado" (ÁVILA, 2006, p. 212). O resultado de Arquimedes foi na verdade a definição de um triângulo de área equivalente a do círculo, sendo aceito de qualquer maneira pela demonstração formal e pelo uso de uma figura conhecida, mesmo que não fosse um quadrado. Para chegar a esse e outros precisos resultados, Arquimedes utilizava um processo que consistia em duas partes: primeiramente, fazia uso do que chamava de método mecânico, que permitia-lhe descobrir intuitivamente a resposta para o problema; com a provável solução em mãos, ele utilizava o conhecido método da exaustão[13] que, juntamente com uma argumentação por dupla redução ao absurdo, culminava em uma demonstração rigorosa do resultado previamente obtido (ÁVILA, 1986). Cabe ressaltar que o método da exaustão é originalmente atribuído a Eudoxo[14], tendo sido desenvolvido e aperfeiçoado posteriormente por Arquimedes (GRANDE, 2013).

---

[11] Regiões envolvidas por arcos circulares de centros e raios diferentes (BARON, 1985).

[12] A quadratura do círculo é considerada um dos três principais problemas clássicos da Matemática grega, juntamente com a triseção de um ângulo qualquer e a duplicação do cubo (BARON, 1985).

[13] O termo *exaustão* surgiu mais tarde, em 1647, introduzido por Grégoire de Saint-Vincent (BARON, 1985).

[14] Eudoxo usou o método para descobrir que o volume de uma pirâmide ou cone é um terço do produto da área da base pela altura (BRESSOUD, 2019).

Fato interessante sobre as obras de Arquimedes que chegaram até nós é que, primeiramente, apenas trabalhos que continham exclusivamente as demonstrações formais eram conhecidos. Todo o processo estava encadeado rigorosamente por meio dos postulados, definições e teoremas (ÁVILA, 2011). A formalidade matemática e a lógica dedutiva eram tão destacados que levantavam grande curiosidade sobre seus métodos de descoberta – afinal, para demonstrar um resultado matemático, é necessário antes saber ou ter um indício de onde se quer chegar. Nas palavra de Ávila, “os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos de demonstração” (ÁVILA, 2011, p. 97). E sabia-se que Arquimedes utilizava um processo intuitivo de investigação de problemas e obtenção de resultados, pois faz referência a um “método mecânico” de descoberta em seu livro *A Quadratura da Parábola* (ÁVILA, 1986).

Esse método de descoberta, entretanto, permaneceu perdido e desconhecido durante mais de um milênio (BARON, 1985). Apenas em 1899, o filólogo[15] dinamarquês Johan Ludwig Heiberg (1845-1928), que já havia publicado trabalhos com as demonstrações formais de Arquimedes, soube de um manuscrito religioso que se encontrava na antiga Constantinopla e que aparentava, por baixo do texto[16], conter escritas anteriores de natureza matemática. Por algumas linhas a que teve acesso, Heiberg suspeitou que poderia ser alguma obra de Arquimedes (ASSIS, 2008). E realmente era: após análise cuidadosa do documento, viu que tratava-se de quase 200 páginas de obras do matemático grego. Muitas delas já eram conhecidas, mas o mais surpreendente foi que a descoberta continha o texto no qual Arquimedes revela e explica o procedimento que usava para chegar a muitas de suas descobertas. O grande achado de Heiberg foi publicado em 1907, sendo inclusive manchete do *New York Times* (ASSIS, 2008).

O novo livro de Arquimedes ficou conhecido como *O Método*, e foi escrito originalmente para outro estudioso de sua época, Eratóstenes (276-194 a.C.) (BRESSOUD, 2019). No início, continha uma carta em forma de prefácio, parcialmente transcrita a seguir:

Arquimedes a Eratóstenes,

Saudações

(...) Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de

[15] Profissional especializado em leitura, interpretação e restauração de documentos históricos.

[16] Os pergaminhos usados para escrita eram caros. Assim, costumava-se raspar textos iniciais para reaproveitamento (ÁVILA, 2011).

Matemática por meios mecânicos. (...) Certas coisas só se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento. (...) Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram. (ÁVILA, 1986).

Primeiramente, vê-se que de fato Arquimedes considera mais viável demonstrar um resultado depois de já ter investigado o problema. Sobre a última parte da carta:

> Talvez em toda a História da Matemática nenhuma verdade profética como essa jamais foi expressa em palavras. Parece até como se Arquimedes visse, numa visão, os métodos de Galileu, Cavalieri, Pascal, Newton, e muitos outros grandes matemáticos da Renascença e da atualidade. (SMITH, 1909 *apud* ÁVILA, 1986, p. 32).

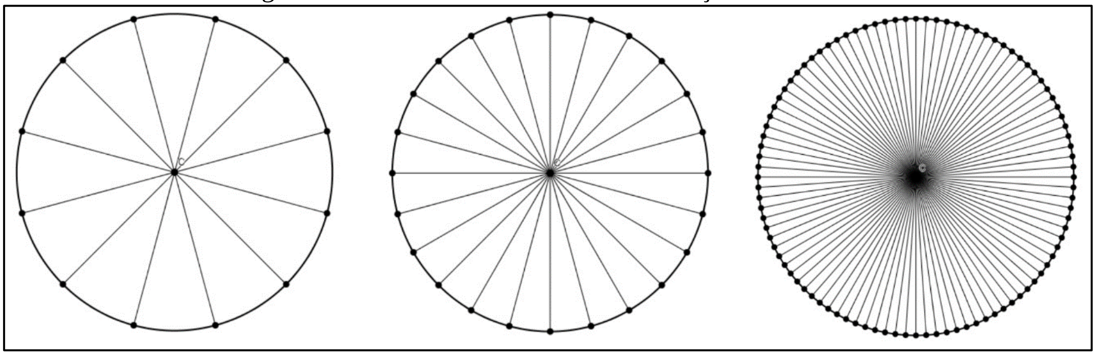
Será possível perceber que as ideias por trás do método mecânico são muito semelhantes à intuição geométrica presente no desenvolvimento da integração, a ponto de vários historiadores dizerem que deve-se a Arquimedes a antecipação (ou até mesmo a invenção) do Cálculo Integral (BARON, 1985). Além disso, Arquimedes destaca que seu método de descoberta não é prova suficiente e que o resultado deve ser demonstrado "pela Geometria", explicitando a grande geometrização da Matemática da época e a importância disso para a elaboração de provas rigorosas e aceitação dos resultados pelos outros estudiosos. A seguir, dois problemas resolvidos por Arquimedes serão detalhados de modo a exemplificar todo processo utilizado pelo grego, desde a investigação pelo método mecânico até a prova formal e rigorosa dada por meio do método da exaustão e da dupla redução ao absurdo.

Área do círculo

Antífon de Atenas (séc. V a.C.) foi o primeiro a perceber, de maneira intuitiva, que a área do círculo equivale à área do triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao seu raio (BRESSOUD, 2019). Arquimedes chegou ao mesmo resultado por meio de procedimentos "mecânicos", ou seja, também intuitivamente, e depois o provou de maneira rigorosa por meio do método da exaustão e de uma dupla redução ao absurdo. Foi o primeiro a de fato demonstrar o resultado, fazendo-o em seu trabalho *Medição do Círculo*[17] (BARON, 1985).

Primeiramente, podemos dividir o círculo em vários setores circulares por meio da divisão de sua circunferência em vários arcos (figura 4):

Figura 4: divisão da circunferência e formação de setores.



Fonte: elaboração própria.

Com um raciocínio intuitivo, percebemos que os setores se tornam mais e mais parecidos com triângulos à medida que aumentamos o número de divisões da circunferência, sendo a soma de suas áreas exatamente a área do círculo. A altura de cada um dos triângulos se aproxima cada vez mais do raio r do círculo. Chamando de $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ as bases de cada triângulo e de S a área que queremos, em notação moderna, temos:

$$S = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \frac{b_3 \cdot r}{2} + \frac{b_4 \cdot r}{2} + \cdots + \frac{b_n \cdot r}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n)$$

Mas repare, pela figura x, que a soma das bases de todos os “triângulos” é justamente o comprimento da circunferência, o que leva ao seguinte resultado:

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

O raciocínio acima era válido para investigações iniciais e descoberta de possíveis resultados, mas não era aceitável como prova pela falta de construções geométricas e pelo uso da ideia de particionar o círculo em infinitos setores cada vez menores. Essas concepções

[17] Ainda neste trabalho, Arquimedes demonstra que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, que hoje representamos por π, é um número entre $3\frac{10}{71} \cong 3{,}1408$ e $3\frac{10}{70} \cong 3{,}1429$ (ASSIS, 2008).

relacionadas ao infinito, já na Grécia Antiga, causavam dúvidas quanto ao rigor e geravam paradoxos[18].

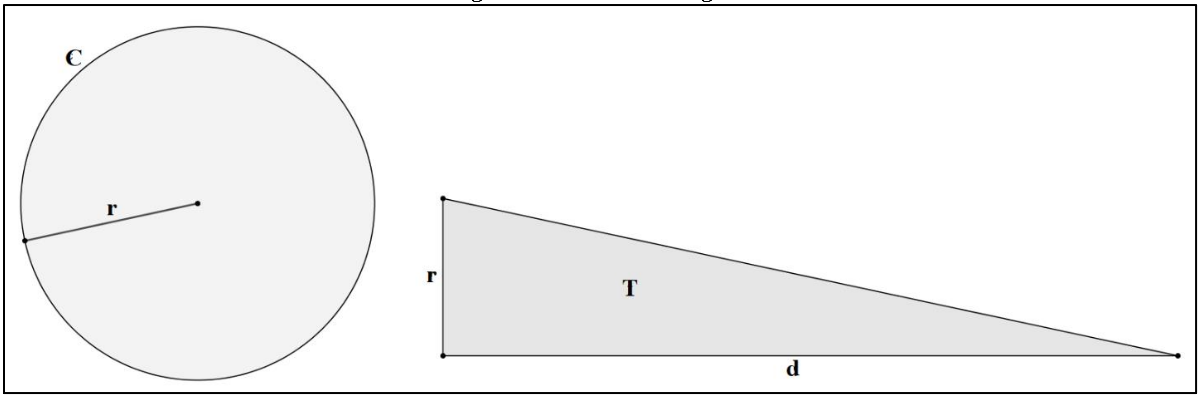
A demonstração rigorosa de Arquimedes, que será refeita a seguir em notação moderna, baseava-se em um teorema[19] do livro X da obra *Elementos* (BRESSOUD, 2019):

Teorema 1: Considerando duas grandezas distintas, se subtrairmos da maior uma quantidade maior que sua metade, e do restante uma quantidade maior que sua metade e assim por diante, obteremos finalmente alguma grandeza que será menor do que a menor grandeza considerada inicialmente.

Provando-se que a área do círculo não pode ser maior nem menor que a área do triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio, prova-se que tais áreas são iguais, processo chamado de dupla redução ao absurdo. É exatamente assim que Arquimedes faz sua demonstração.

Considere um círculo qualquer e um triângulo de altura igual ao raio *r* do círculo e de base d igual ao comprimento $2\pi r$ da circunferência. Chamemos o círculo e sua área de C e o triângulo e sua área de *T*, tendo assim $T = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$. Queremos provar que $C = T$.

Figura 5: círculo e triângulo.



Fonte: elaboração própria.

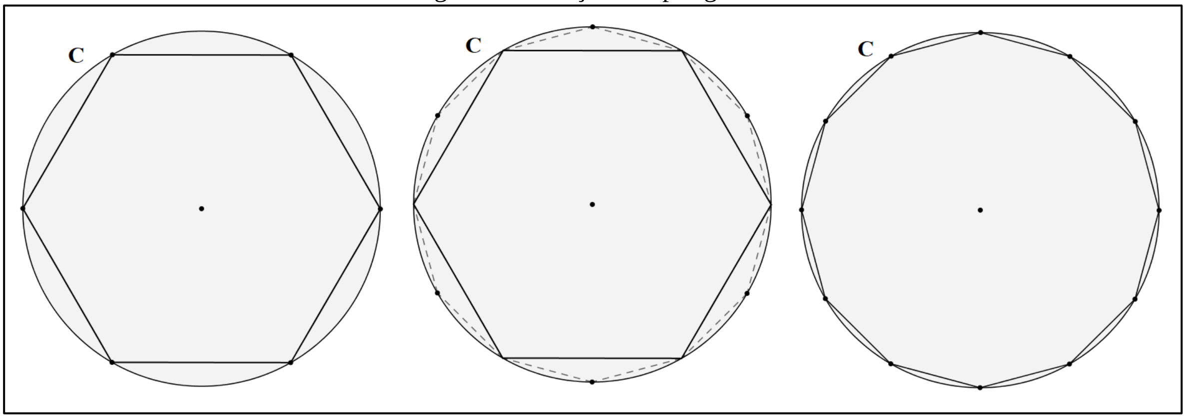
Primeiramente, vamos supor que a área do círculo é maior que a área do triângulo, ou seja, $C > T \Leftrightarrow C - T > 0$. Podemos inscrever um polígono regular no círculo e, continuamente, dobrar sua quantidade de lados a partir da marcação da metade dos arcos determinados pelos pontos de interseção. Como os polígonos obtidos estão sempre inscritos, suas respectivas áreas serão sempre menores que a área do círculo, apesar de aumentarem a

[18] Por exemplo, os paradoxos de Zeno e o problema da seção do cone de Demócrito (460-370 a.C.). Detalhes em BARON (1985) e ÁVILA (1986), respectivamente.

[19] A demonstração do teorema pode ser encontrada em BARON (1985).

cada passo. Chamando de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ a área de cada polígono inscrito, teremos $P_1 < P_2 < \cdots < P_n < C$.

Figura 6: inscrição dos polígonos.



Fonte: elaboração própria.

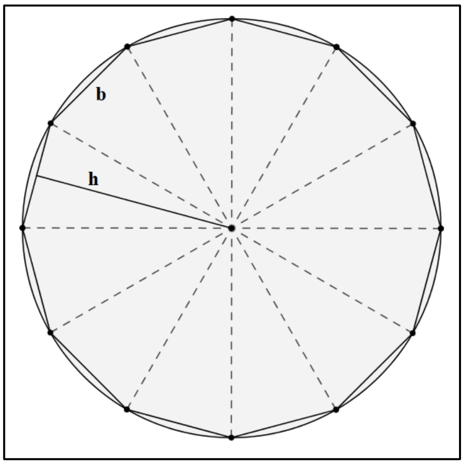
Pelo Teorema 1, após um número finito de passos, a diferença entre a área do círculo e a área do polígono inscrito será menor que a diferença entre a área do círculo e a área do triângulo, ou seja, $C - P_n < C - T$, o que equivale a dizer que $P_n > T$.

Por ser regular, podemos dividir o polígono em diversos triângulos congruentes. Chamando de h a altura dos triângulos e de b suas bases, a área P_n do último polígono inscrito será então:

$$P_n = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} + \cdots + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + b + b + \cdots + b)$$

Figura 7: divisão do polígono inscrito.



Fonte: elaboração própria.

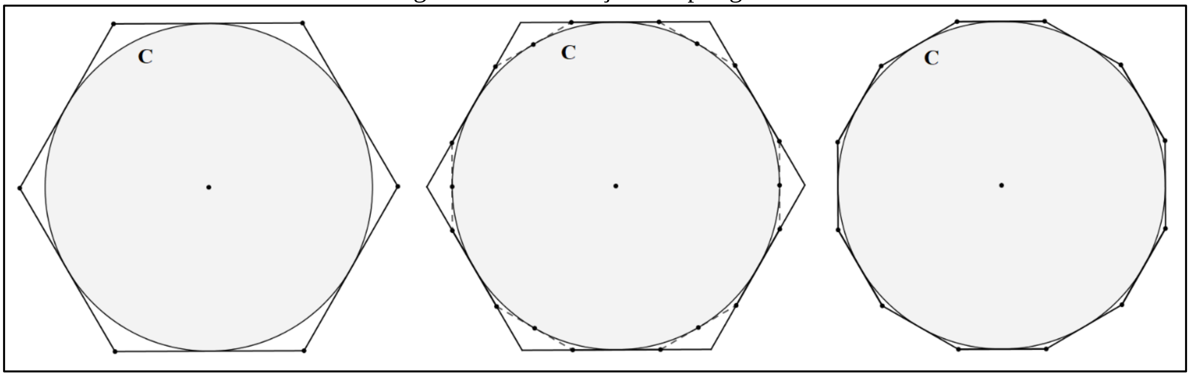
Entretanto, h é sempre menor que r e a soma das bases (perímetro do polígono) é sempre menor que $2\pi r$, sendo que r e $2\pi r$ são, por definição, a altura e a base do triângulo T inicial, respectivamente. Isso faz com que P_n seja sempre menor que T.

$$h < r \wedge (b + b + \cdots + b) < 2\pi r \Rightarrow P_n = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + b + \cdots + b) < T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

Então, supor que a área *C* do círculo é maior que a área *T* do triângulo, sendo $T = \pi r^2$, implica que podemos chegar a um polígono inscrito que terá área maior que $T = \pi r^2$, o que não é possível. Essa hipótese, então, nos levou a uma contradição, sendo assim falsa. A área do círculo não pode ser maior que a área $T = \pi r^2$ do triângulo definido inicialmente.

Agora, vamos partir da hipótese de que a área do círculo é menor que a área do triângulo, ou seja, $C < T \Leftrightarrow T - C > 0$. Podemos circunscrever um polígono regular ao círculo e, continuamente, dobrar sua quantidade de lados a partir da marcação da metade dos arcos determinados pelos pontos de tangência. Como os polígonos estão sempre circunscritos, suas respectivas áreas serão sempre maiores que a área do círculo, apesar de diminuírem a cada passo. Sendo $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ a área de cada polígono circunscrito, teremos $P_1 > P_2 > \cdots > P_n > C$.

Figura 8: circunscrição dos polígonos.



Fonte: elaboração própria.

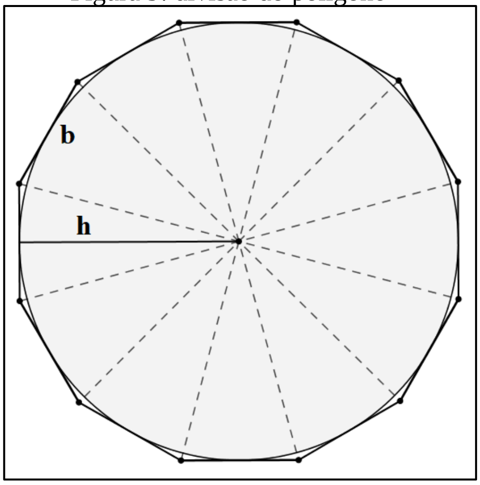
Pelo Teorema 1, após um número finito de passos, a diferença entre a área do polígono circunscrito e a área do círculo será menor que a diferença entre a área do triângulo T e a área do círculo, ou seja, $P_n - C < T - C$, o que equivale a dizer que $T > P_n$.

Por ser regular, podemos dividir o polígono em diversos triângulos congruentes. Chamando de h a altura dos triângulos e de b suas bases, a área P_n do último polígono circunscrito será então:

$$P_n = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} + \cdots + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + b + b + \cdots + b)$$

Figura 9: divisão do polígono



Fonte: elaboração própria.

Entretanto, h é sempre igual a r e a soma das bases (perímetro do polígono) é sempre maior que $2\pi r$, sendo que r e $2\pi r$ são, por definição, a altura e a base do triângulo *T* inicial, respectivamente. Isso faz com que P_n seja sempre maior que *T*.

$$h = r \wedge (b + b + \cdots + b) > 2\pi r \Rightarrow P_n = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + b + \cdots + b) > T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

Então, supor que a área *C* do círculo é menor que a área *T* do triângulo, sendo $T = \pi r^2$, implica que podemos chegar a um polígono circunscrito que terá área menor que $T = \pi r^2$, o que não é possível. Essa hipótese, então, também nos levou a uma contradição e, assim como a anterior, é falsa. A área *C* do círculo não pode ser maior que a área $T = \pi r^2$ do triângulo definido inicialmente. Se *C* não pode ser maior tampouco menor que T, ele deve ser igual a T.

$$\boxed{C = T = \pi r^2}$$

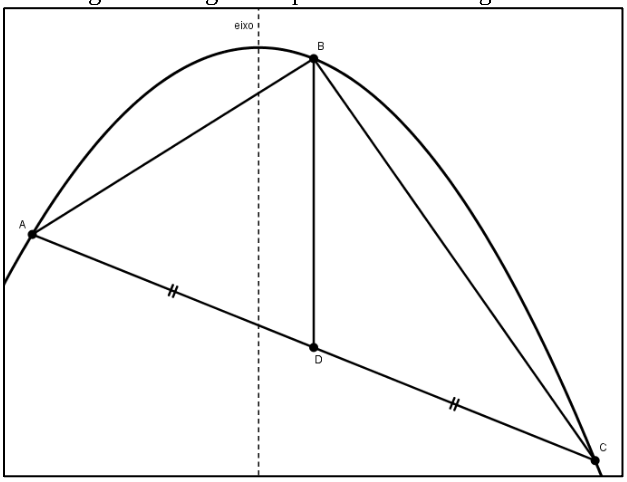
É importante ressaltar que a álgebra ainda não existia, nem mesmo o uso da letra grega π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, que data do século XVIII (ÁVILA, 2006). A demonstração de Arquimedes é toda escrita em formato de texto, e a notação moderna foi aqui usada apenas para explicitar como o raciocínio leva aos mesmos resultados conhecidos atualmente. O que se alcançava à época, então, não era uma fórmula, mas sim a possibilidade de comparar a área do círculo com a área de uma figura conhecida, nesse caso um triângulo. O que Arquimedes provou foi que a área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo com altura igual ao seu raio e base igual ao comprimento de sua circunferência, e isso, sem uso de números ou símbolos atuais, era suficiente devido à grande importância que a Geometria possuía.

Área do segmento de parábola

Utilizando seu método mecânico, Arquimedes descobriu que a área limitada por um arco de parábola e um segmento de reta que une as extremidades de tal arco, região chamada de segmento de parábola (SANTOS, 2014), equivale a quatro terços da área do triângulo inscrito no segmento. Na figura x, A e C, extremidades da base do segmento de parábola, são também dois dos vértices de um triângulo; para que o triângulo seja considerado inscrito no segmento, seu terceiro vértice deverá ser o ponto B: sendo D o ponto médio de $\overline{AC}$, traça-se por ele uma reta paralela ao eixo, e B é a intersecção dessa reta com a parábola (ASSIS; MAGNAGHI, 2014). O ponto B é chamado também de vértice do segmento e, em um caso particular, pode coincidir com o vértice da parábola. Sendo A_s a área do segmento e $A_{\Delta ABC}$ a área do triângulo inscrito, temos:

$$\boxed{A_s = \frac{4}{3} \cdot A_{\Delta ABC}}$$

Figura 10: segmento parabólico e triângulo



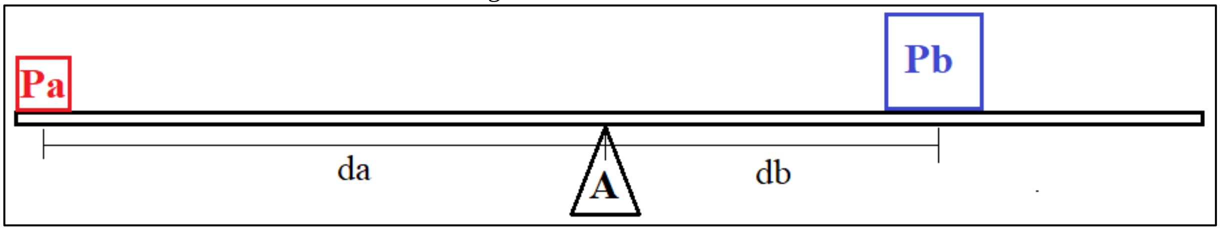
Fonte: elaboração própria.

Para entender o raciocínio usado na descoberta do resultado, precisamos antes conhecer a Lei da Alavanca[20]. Em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio de Planos*, Arquimedes demonstrou que uma alavanca de apoio (fulcro) A permanece em equilíbrio quando, ao colocar-se pesos iguais ou distintos em lados opostos de A, temos como verdadeira a proporção $\frac{P_a}{P_b} = \frac{d_b}{d_a}$[21], em que P_a e P_b são os pesos e d_a e d_b suas respectivas distâncias até A (ASSIS; MAGNAGHI, 2014).

[20] "Obtida pelo próprio Arquimedes em seu livro *Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas*" (ÁVILA, 1986). Demonstração em ASSIS (2008). Nesse contexto está a famosa frase de Arquimedes "dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra".

[21] Com uma simples manipulação, chegamos a $P_a \cdot d_a - P_b \cdot d_b = 0$. O produto da força, nesse caso força peso, pela distância é conhecido como torque, e a expressão anterior nos diz que a soma dos torques é nula. Essa é justamente uma condição para o equilíbrio estático (HALLIDAY, 2016).

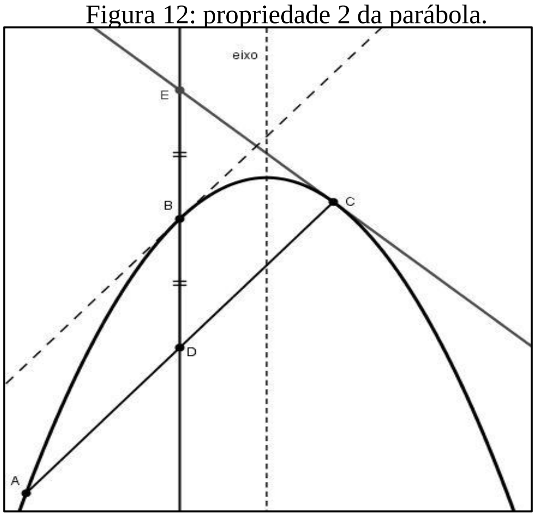
Figura 11: lei da alavanca.



Fonte: elaboração própria.

Precisamos também da seguinte propriedade da parábola, provada por Arquimedes como proposição 2 em sua obra *Quadratura da Parábola* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014):

Figura 12: propriedade 2 da parábola.



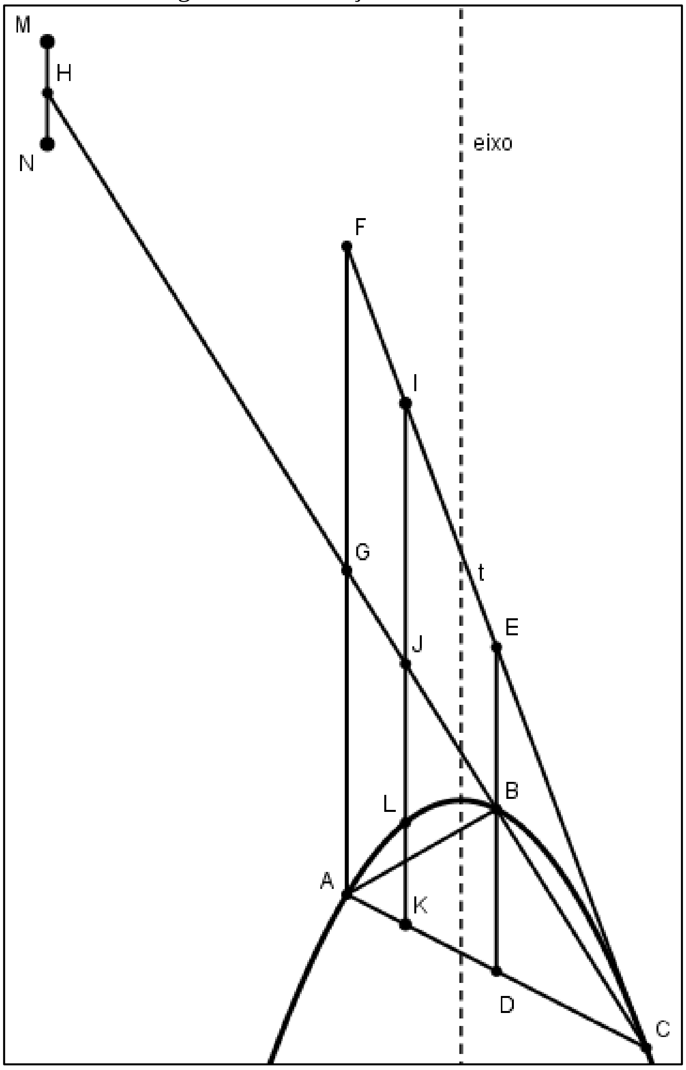
Fonte: elaboração própria.

P2: se, em uma parábola, $\overline{AC}$ *for uma corda pararela à tangente à parábola por B, e se uma reta for traçada por B de forma que seja o eixo ou paralela ao eixo, encontrando* $\overline{AC}$ *em D e a tangente à parábola por C em E, então* $\overline{DB} = \overline{BE}$.

A partir da construção da figura x, traçamos a reta t tangente à parábola por C e prolongamos $\overline{DB}$ de modo que encontre t em E. Traçamos também por A a reta paralela a $\overline{DB}$ e ao eixo que encontra t em F. Prolongamos $\overline{BC}$, que encontra $\overline{AF}$ em G, até o ponto H, de modo que $\overline{CG} = \overline{GH}$. Por um ponto arbitrário L da parábola, traçamos o segmento $\overline{IK}$, paralelo ao eixo, a $\overline{DB}$ e a $\overline{AF}$ e que encontra $\overline{CG}$ em J. Pela proposição 2, $\overline{DB} = \overline{BE}$, e por semelhança de triângulos temos $\overline{IJ} = \overline{JK}$ e $\overline{AG} = \overline{GF}$. Por último, construimos o segmento $\overline{MN}$ com ponto médio em H, de modo que $\overline{MN} = \overline{LK}$. A partir da geometria da figura x formada, Arquimedes provou a seguinte proporção em *O Método* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014):

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GJ}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{MN}}$$

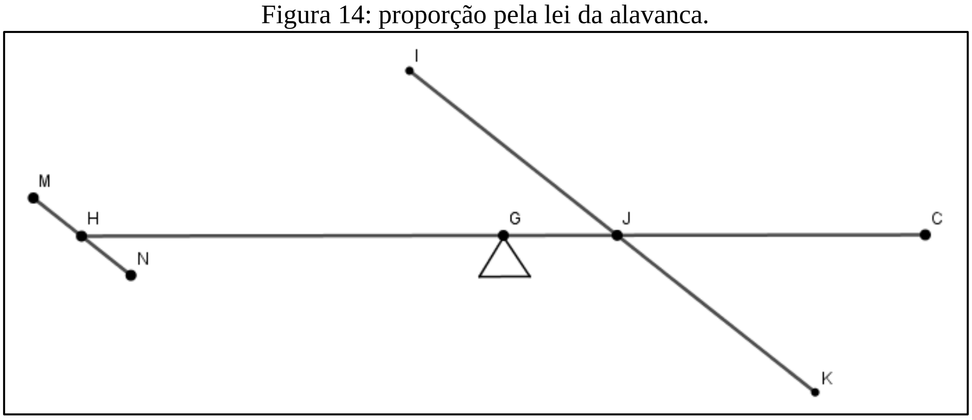
Figura 13: construções necessárias.



Fonte: elaboração própria.

Acontece então que essa proporção pode ser interpretada segundo a lei da alavanca. Considerando $\overline{HC}$ uma alavanca de apoio em G, $\overline{MN}$ a uma distância $\overline{GH}$ de G equilibra $\overline{IK}$ a uma distância $\overline{GJ}$ de G.

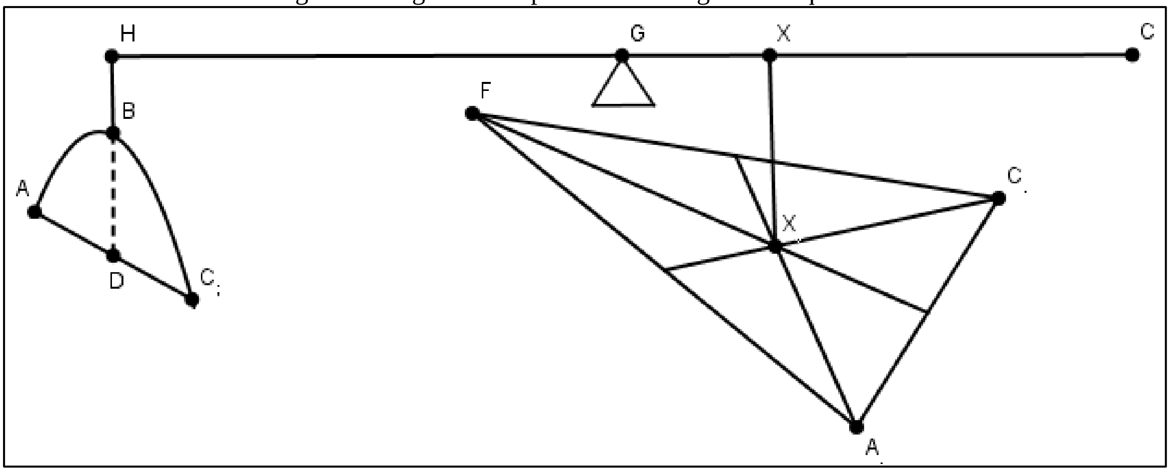
Figura 14: proporção pela lei da alavanca.



Fonte: elaboração própria.

Nas palavras de Ávila (1986), “agora vem a parte heurística do método”: a reunião de todos os infinitos segmentos do tipo LK e IK vão compor, respectivamente, o segmento de parábola e o triângulo AFC. Presume-se então que o segmento de parábola, com seu centro de gravidade em H, equilibrará em o ΔAFC onde ele se encontra. Sendo X o centro de gravidade (baricentro) do ΔAFC[22], temos que $\overline{GX} = \frac{\overline{GC}}{3} = \frac{\overline{GH}}{3} \Leftrightarrow \frac{\overline{GX}}{\overline{GH}} = \frac{1}{3}$.

Figura 15: segmento de parábola e triângulo em equilíbrio.



Fonte: elaboração própria.

Pela lei da alavanca, temos que $\frac{A_S}{A_{\Delta AFC}} = \frac{\overline{GX}}{\overline{GH}} = \frac{1}{3}$. Mas, pela figura x, é possível mostrar que $A_{\Delta AFC} = 4 \cdot A_{\Delta ABC}$ (ASSIS; MAGNAGHI, 2014). Logo:

$$\frac{A_S}{4 \cdot A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{A_S}{A_{\Delta ABC}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow A_S = \frac{4 \cdot A_{\Delta ABC}}{3}$$

Arquimedes enunciou o resultado da seguinte maneira (ASSIS; MAGNAGHI, 2014): “qualquer segmento de uma parábola é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura”. Este foi o primeiro teorema obtido pelo seu método mecânico. A prova rigorosa do teorema, que será mostrada a seguir, já era conhecida na modernidade há tempo, por meio da obra *Quadratura da Parábola*. No entanto, a maneira como Arquimedes descobriu o resultado antes de demonstrá-lo só foi conhecida após a descoberta e publicação de *O Método* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014).

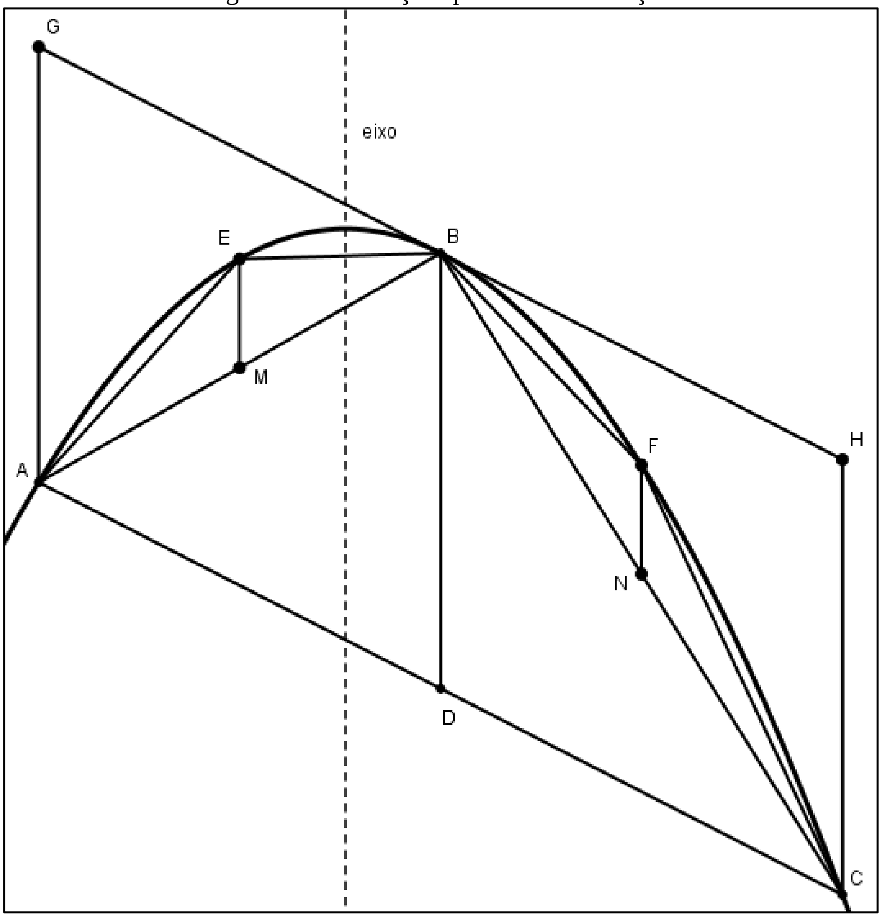
Assim como na prova da área do círculo, o método da exaustão acompanhado de uma dupla redução ao absurdo é usado na demonstração da área do segmento de parábola. Arquimedes também faz novo uso do *Teorema 1*.

---

[22] Arquimedes já havia estudado centros de gravidade de figuras planas (ASSIS; MAGNAGHI, 2014).

Quando consideramos o triângulo inscrito ao segmento de parábola, podemos perceber que ele determina outros dois segmentos, um de base $\overline{AB}$ e outro de base $\overline{BC}$. Pode-se encontrar os pontos médio M e N de cada base e traçar, a partir deles, segmentos paralelos ao eixo que encontram a parábola em E e F, respectivamente. Repare que assim podemos formar dois novos triângulos, *AEB* e *BFC*, e a soma de suas áreas com a área do triângulo inscrito *ABC* está mais próxima da área do segmento de parábola que queremos. Repetimos o mesmo procedimento para os novos quatro segmentos determinados, de bases $\overline{AE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BF}$ e $\overline{FC}$, e estaremos ainda mais próximos da área desejada. A ideia é chegar na área do segmento de parábola inicial pela soma das áreas dos triângulos formados a cada passo.

Figura 16: construções para a demonstração.



Fonte: elaboração própria.

Por propriedade da parábola, a tangente por B é paralela a $\overline{AC}$. Formamos então o paralelogramo AGHC, que nos permite perceber que a área do ΔABC é maior que a metade do segmento de parábola. Assim, pelo teorema 1, a área do segmento que resta após cada passo poderá ser menor que qualquer área dada anteriormente.

Por propriedade da parábola, pode-se provar que as áreas dos triângulos formados a cada passo somam $1/4$ do do total das áreas dos triângulos anteriores (ÁVILA, 1986). Por exemplo, a soma das áreas dos triângulos *AEB* e *BFC* somam $1/4$ da área do triângulo *ABC*. Assim, considerando $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ a soma das áreas dos triângulos formados em cada etapa e S_n a soma total de todas as área dos triângulos, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{4^2} + \cdots + \frac{a_1}{4^{n-1}}$$

Atualmente diríamos que trata-se da soma dos *n* primeiros termos de uma Progressão Geométrica decrescente de primeiro termo a_1 e razão $1/4$. Para calcular essa soma, Arquimedes primeiro percebe que, se adicionarmos $1/3$ do último termo a ele mesmo, teremos como resultado exatamente o penúltimo termo dividido por 3.

$$a_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4 \cdot a_n}{3} = \frac{a_{n-1}}{3}$$

Então, a soma total S_n acrescida de $\frac{a_n}{3}$ pode ser reescrita como a soma até o penúltimo termo acrescida de $\frac{a_{n-1}}{3}$.

$$S_n + \frac{a_n}{3} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3}$$

Podemos repetir o mesmo processo até chegar à soma total em termos da área do ΔABC, aquele que está inscrito e que é representado na soma por a_1.

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = S_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{3} = \cdots = a_1 + \frac{a_1}{3} = \frac{4 \cdot a_1}{3} = \frac{4 \cdot A_{\Delta ABC}}{3} = K$$

A importância dessa soma reside no fato de Arquimedes, por meio da Geometria, conseguir chegar ao mesmo resultado que obteve mecanicamente. Podemos agora aplicar a dupla redução ao absurdo, mantendo em mente que S_n, soma das áreas de todos os triângulos formados dentro do segmento de parábola, é sempre menor que A_s e sempre menor que *K*, já que $K = S_n + \frac{a_n}{3}$. Em outras palavras, temos certeza que $S_n < A_s$ e $S_n < K$, e queremos provar que $A_s = K$, mostrando que não pode ser maior nem menor. Primeiramente, vamos supor que a área do segmento de parábola A_s é maior que *K*.

$i)$ $A_s > K \Leftrightarrow A_s - K > 0$

Pelo teorema 1, após um número finito de passos, podemos ter a diferençar entre A_s e S_n menor que a diferença entre A_s e *K*, ou seja, $A_s - S_n < A_s - K$, o que significa que $S_n > K$. Mas isso é absurdo, pois $K = S_n + \frac{a_n}{3}$. Supor $A_s > K$ implica que podemos chegar a uma soma

S_n das áreas dos triângulos maior que $K = \frac{4 \cdot A_{\Delta ABC}}{3}$, o que é impossível. Portanto, a área do segmento não pode ser maior que K. Suponha agora que a área do segmento de parábola A_s é menor que K.

$ii)\ A_s < K \Leftrightarrow K - A_s > 0$

Pelo teorema 1, após um número finito de passos, podemos ter a diferençar entre K e S_n menor que a diferença entre K e A_s, ou seja, $K - S_n < K - A_s$, o que significa que $S_n > A_s$. Mas isso é absurdo, pois S_n, soma das áreas de todos os triângulos inscritos no segmento, é sempre menor que a área do segmento. Supor $A_s < K$ implica que podemos chegar a uma soma S_n das áreas dos triângulos maior que A_s, o que é impossível. Portanto, a área do segmento não pode ser menor que K. Se A_s não pode ser maior tampouco menor que K, deve ser igual a K.

$$\boxed{A_s = K = \frac{4 \cdot A_{\Delta ABC}}{3}}$$

Pelos dois exemplos, percebemos que o método mecânico de Arquimedes dava um bom indício do resultado, mas não configurava uma prova formal; por outro lado, o método da exaustão acompanhado da dupla demonstração por absurdo continha o rigor necessário, mas necessitava previamente do resultado a ser provado. Podemos então chegar à conclusão de que as duas etapas se complementavam e assim admirar ainda mais os processos utilizados por Arquimedes. Também é possível ver a relação com a integração: o círculo e o segmento de parábola são aproximados pela soma de áreas de figuras conhecidas cada vez menores, sendo então considerados como a união de infinitos elementos.

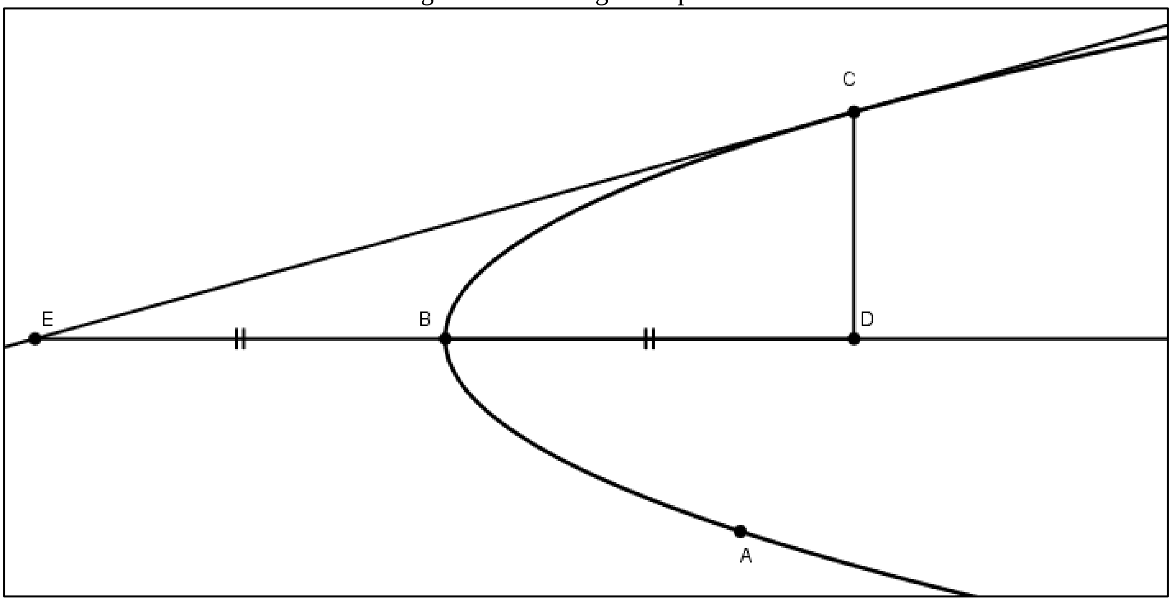
Procedimentos semelhantes ao método mecânico de Arquimedes foram usados por muitos matemáticos do século XVI (ÁVILA, 2011), o que mostra o brilhantismo do grego que, quase dois milênios antes, já tinha aquele tipo de raciocínio. Um exemplo é a justificativa da fórmula do volume da esfera pelo princípio de Cavalieri, geralmente apresentada para alunos de ensino médio. A maior diferença é que os matemáticos da modernidade não tinham tanta preocupação com o rigor, o que certamente contribuiu para um progresso veloz do Cálculo nos séculos XVII e XVIII (ÁVILA, 2011), algo que não aconteceu com Arquimedes. Além disso, Ávila (2006) afirma ainda que, além do rigor extremo, o uso de uma aproximação particular para cada problema também foi um motivo para que o Cálculo não alcançasse maior maturação ainda na Grécia Antiga, já que a noção de integração moderna permite o cálculo de áreas sempre com o uso de retângulos. Havia também outras questões, como a separação entre a geometria e a aritmética e a falta da linguagem algébrica e da geometria analítica. Edwards (1979) acrescenta ainda que os gregos não introduziram explicitamente uma noção de limite e não se aproximaram da percepção da relação inversa entre problemas de áreas e tangentes.

4.1.3 Apolônio de Perga

Na Grécia Antiga, as únicas curvas conhecidas e estudadas eram as seções cônicas, a circunferência e a espiral de Arquimedes (BARON, 1985). Retas tangentes a essas curvas já despertavam interesse dos matemáticos. Euclides, em *Elementos*, define e constrói a reta tangente à circunferência em um ponto qualquer, enquanto Apolônio de Perga (262-190 a.C.), em sua obra *As Cônicas*, foi o responsável por estudar o traçado de tangentes à parábola, elipse e hipérbole e todas as propriedades conhecidas envolvidas no processo (BARON, 1985). Como exemplo, mostraremos o processo para a construção da tangente à parábola.

Considere a parábola ABC. Queremos traçar a reta tangente à parábola por um ponto qualquer C. Primeiramente, traçamos $\overline{CD}$ perpendicular ao eixo da parábola; em seguida, prolongamos o eixo até E, de modo que $\overline{EB} = \overline{BD}$. A reta EC é tangente à parábola em C (GRANDE, 2013).

Figura 17: reta tangente à parábola.



Fonte: elaboração própria.

Repare que o processo é feito por construções geométricas, sem ideias intuitivas que possam ser relacionadas ao Cálculo Diferencial. O exemplo é trazido para mostrar que a questão de retas tangentes, que mais tarde possibilitaria o início da diferenciação, já motivava estudos quase dois milênios antes. Assim, percebemos que os problemas que mais tarde seriam relacionados pelo Teorema Fundamental do Cálculo já eram investigados na Grécia Antiga.

Os trabalhos de Arquimedes certamente foram de grande valia para o desenvolvimento do Cálculo, mas não suficientes. Para um avanço maior, eram necessárias mais ferramentas matemáticas que ainda estavam por vir. Arquimedes abriu caminho para o desenvolvimento de técnicas infinitesimais, mas seu trabalho teve que esperar até o período pós-Renascimento para ser continuado (EDWARDS, 1979). Mesmo no século XVII, com pouca preocupação com o rigor matemático e com a linguagem simbólica e a Geometria Analítica já disponíveis, algumas décadas se passaram até que o método da exaustão desse origem a uma técnica algébrica para o cálculo de áreas e volumes (BRESSOUD, 2019).

4.1.4 Entre antigos e modernos

Com a ascensão do império romano e a conquista dos territórios gregos, a Matemática viu seu desenvolvimento ficar cada vez mais lento. Segundo Boyer (1974, p. 129), "durante toda a sua longa história, a Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática". Os romanos tinham muitos interesses práticos, especialmente para construções, mas não apoiavam estudos teóricos e abstratos (EDWARDS, 1979). O prosseguimento dos trabalhos de Arquimedes não poderia acontecer sem estudiosos que se aprofundassem nos assuntos, deixando a Matemática europeia praticamente estagnada e virtualmente cessando-a no final do século V (BRESSOUD, 2019). Vê-se, nesse período, maior importância em Diofanto (aprox. 200-284), considerado muitas vezes o pai da álgebra, e em Papus (290-350), último grande geômetra grego, ambos de Alexandria (BOYER, 1974).

Após a invasão bárbara e o fim do Império Romano em seu lado ocidental (476), o território da Grécia se tornou parte do Império Bizantino[23]. A religião de tal império era o cristianismo ortodoxo, que via na cultura politeísta greco-romana uma ameaça. Então, em 529, as escolas gregas foram fechadas e seus últimos estudiosos acabaram encontrando asilo em outros locais. Esse ano, portanto, é considerado como o marco do fim da Matemática européia da antiguidade (BOYER, 1974). As atividades não cessaram de vez, pois comentários sobre algumas obras continuaram a ser escritas em grego e guardadas principalmente em Constantinopla, capital do Império Bizantino, mas o desenvolvimento principal da Matemática nos séculos seguintes aconteceu fora da Europa (BOYER, 1974).

[23] Parte oriental do Império Romano. Continuou após a invasão bárbara e durou até a queda de Constantinopla (hoje Istambul) em 1453, após ataques Otomanos.

Já no século VII, os árabes também iniciaram uma onda de conquista de territórios, tomando inclusive o principal centro de trabalhos gregos que sobreviviam, Alexandria (EDWARDS, 1979). O primeiro século de domínio islâmico (aproximadamente entre 650-750) não teve realizações científicas no geral, pois os árabes ainda não tinham entusiasmo para estudos e o interesse por cultura estava virtualmente parado no resto do mundo (BOYER, 1974). Porém, na segunda metade do século VIII houve um despertar no império árabe que, caso não tivesse ocorrido, “muito mais se teria perdido da ciência e da matemática antigas” (BOYER, 1974, p. 166). Estudiosos da Síria e da Mesopotâmia foram chamados a Bagdá, capital árabe, para promover estudos, tornando a cidade a nova Alexandria. Lá, foi criada a Casa da Sabedoria, centro de estudos Matemática, Astronomia, Medicina e Química (BRESSOUD, 2019). Além disso, diversos manuscritos gregos foram obtidos mediante tratados com o Império Bizantino e traduzidos para o árabe. A biblioteca de Bagdá adquiriu também obras de outras regiões, como Índia e Pérsia.

Dentre os matemáticos da Casa da Sabedoria, Mohammed al-Khowarizmi destaca-se por importantes obras sobre aritmética e álgebra. Uma delas, *De Numero Hindorum* (Sobre a arte hindu de calcular), é a responsável por apresentar ao mundo árabe e, posteriormente, ao ocidente, o sistema numérico que usamos (BOYER, 1974). Não à toa o sistema é conhecido como indo-arábico: segundo o próprio al-Khowarizmi, foi criado na Índia, mas popularizado por meio dele, um árabe. Outro trabalho importante foi *Al-jabr wa'l muqabalah*, que deu origem à nossa familiar álgebra[24], ramo da Matemática aprendido pela Europa por meio desse livro (BOYER, 1974). Al-Khowarizmi expõe em suas obras a resolução de diferentes equações usando o que chamava de três espécies de quantidades: números, x e x^2, ou seja, equações polinomiais de primeiro e segundo graus. Cabe salientar que as obras de Al-Khowarizmi eram textuais, o que nesse aspecto representa um certo retrocesso em comparação a Diofanto. Edwards (1979) afirma que, por exemplo, ele traria a equação $x^2 + 10x = 39$ como “um quadrado e dez de sua raiz são iguais a trinta e nove”. Mas seu grande mérito está em voltar a usar números para representar quantidades, o que os gregos não faziam, e em mostrar algoritmos[25] para resolver equações (EDWARDS, 1979). Os textos mostram que os árabes receberam grande influência da Índia pelo sistema de numeração; da Mesopotâmia pelo método de resolução das equações; e da Grécia pela sequência lógica e pelas provas geométricas que apresentavam após a obtenção da solução (BOYER, 1974).

---

[24] Segundo Boyer (1974), o título de pai da álgebra é de mais merecimento de al-Khowarizmi que de Diofanto, já que, em conceitos, *Al-jabr* se aproxima mais da álgebra elementar de hoje.

[25] A palavra algoritmo vem de seu nome (EDWARDS, 1979).

A ciência islâmica começou a ver seu declínio em 1123, com a cessão de estudos relevantes ocorrendo em aproximadamente 1436 (BOYER, 1974). Esse ano, segundo Boyer (1974), marca o fato de que, a partir de então, as principais atividades matemáticas passariam definitivamente do mundo islâmico da Ásia e norte da África para o mundo ocidental da Europa. Por séculos, os árabes preservaram a Matemática grega e a enriqueceram com a adição de elementos de aritmética e álgebra e, felizmente, o começo de seu declínio coincidiu com o despertar da Europa Ocidental (EDWARDS, 1979). No século XII, a ciência da Grécia Antiga e as contribuições islâmicas começaram a chegar aos europeus por meio de traduções[26], principalmente do árabe para o latim, feitas com maior destaque na Espanha, Sicília e Império Bizantino (BOYER, 1974). Também foi no final desse século e início do seguinte que famosas universidades, como Bologna e Cambridge, foram fundadas, indicando que a Europa voltara a trilhar o caminho da ciência.

Nessa época começou a introdução do sistema de numeração indo-arábico, cujo triunfo sobre os números romanos só aconteceu definitivamente no século XVI, mostrando uma transição lenta. Comerciantes ajudaram a difundir o novo sistema, com destaque para o italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio), considerado "o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval" (BOYER, 1974, p. 186). Em seu livro de 1202, *Liber Abaci*, recomenda fortemente o uso dos números indo-arábicos, descrevendo as "nove cifras indianas" e o símbolo 0, e explica de maneira muito completa problemas e métodos algébricos (BOYER, 1974). Nessa obra, Fibonacci apresenta o problema que deu origem à famosa sequência que leva seu nome:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Durante a maior parte do auge árabe (aprox. 750-1436), a Europa, que vivia seu período medieval, via na Matemática não uma atividade científica, mas sim um objeto de discussões filosóficas. Sob grande influência de Aristóteles, ideias relacionadas ao infinito e aos indivisíveis geravam paradoxos e promoviam debates detalhados, mas sem o rigor da estrutura matemática, tomando como referência apenas o mundo físico e a realidade (BARON, 1985). Não acarretou em nenhuma conclusão científica, mas mostrou o interesse dos estudiosos nas dificuldades lógicas do infinito – algo que só seria resolvido no final do século XIX – e ajudou

---

[26] *Elementos* de Euclides foi uma das primeiras obras a receber tradução latina do árabe, feita por Adelard de Barth (1075-1160) em 1142. Ele também foi responsável por outras traduções, inclusive de trabalhos de al-Khowarizmi (BOYER, 1974). Boyer (1974) afirma ainda que o maior tradutor na Espanha foi Gerardo de Cremona (1114-1187), a quem são atribuídas mais de 85 traduções.

no começo da aceitação das técnicas infinitesimais que eram tabu na Grécia Antiga, mas que foram livremente usadas (sem muito rigor matemático) no século XVII (EDWARDS, 1979).

Uma consequência mais imediata, ocorrida no século XIV, dessas discussões acerca de infinitos e infinitésimos foi o crescente estudo dos conceitos de variações contínuas e movimentos, tópicos que ganharam destaque nas universidades, especialmente em *Merton College*, *Oxford University* (BOYER, 1974). Lá, os estudiosos estavam interessados especificamente nas *qualidades*, o que na filosofia Aristotélica seriam variáveis que podem ser quantificadas por sua intensidade (em um ponto de um corpo ou em um instante de tempo) (EDWARDS, 1979). Cada uma dessas qualidades intensivas tinham suas correspondentes quantidades extensivas, que podem ser pensadas como a soma das qualidades em todos os pontos. Por exemplo, a densidade pode ser considerada uma qualidade, enquanto o peso total de um corpo seria sua respectiva quantidade. Analogamente, a velocidade era uma qualidade, considerada a intensidade de um movimento, e sua quantidade seria o movimento total, isto é, a distância percorrida (EDWARDS, 1979). Os pesquisadores de Merton buscavam entender a variação na intensidade de uma qualidade de ponto a ponto em um corpo ou no tempo. O estudo das intensidades e variações de qualidades também ficou conhecido como Latitude de Formas (BABB, 2005). Esses foram os primeiros esforços sérios e cuidadosos para quantificar a ideia de variação, algo que séculos mais tarde seria substituído por afirmações equivalentes no Cálculo Diferencial, com terminologia e simbolismo algébricos mais avançados e adequados (BOYER, 1959).

Eles definiram então movimento uniforme (velocidade constante) como aquele em que distâncias iguais são percorridas em intervalos de tempo iguais. Caso a velocidade variasse, ela teria sua própria taxa de variação, chamada aceleração (BENESTAD, C. *et al*, 2015). Aceleração constante seria aquela em que, em intervalos de tempo iguais, são obtidos incrementos iguais na velocidade (EDWARDS, 1979). Qualquer que fosse o movimento em questão, uma definição de velocidade instantânea era necessária e, ainda sem nenhuma noção de limites, puderam defini-la apenas em termos de um movimento uniforme: a velocidade em um certo instante era dada pela distância que um objeto percorreria caso se movesse uniformemente por um certo tempo com aquela velocidade (EDWARDS, 1979). Aristóteles já havia dito que o movimento acontece em um intervalo, o que levaria a velocidade a ser definida também em um intervalo. Uma interpretação disso é que mesmo para movimentos não-uniformes, a velocidade é constante em intervalos, ainda que muito curtos, fazendo com que qualquer movimento seja na verdade uma série de movimentos uniformes (BENESTAD, C. *et al*, 2015).

O principal produto destes estudos foi o importante Teorema da Velocidade Média de Merton: se temos um movimento em que a velocidade varia uniformemente, ou seja, que possui aceleração constante, a distância percorrida será a mesma de um movimento de mesma duração em que a velocidade é constante e igual à média entre as velocidades inicial e final[27] (BARON, 1985). Em notação atual, sendo *d* a distância percorrida, v_i a velocidade inicial, v_f a velocidade final e *t* tempo de duração do movimento, podemos exprimir o teorema da seguinte maneira:

$$d = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot t$$

Esses estudos da Inglaterra alcançaram a França, chegando a um dos estudiosos desse período que merecem maior destaque: Nicole Oresme (1323-1382). Dentre os trabalhos desse matemático parisiense estão o desenvolvimento e expansão da teoria das proporções, o uso de regras de potenciação equivalente às atuais e as primeiras ideias relacionadas a expoentes irracionais (BOYER, 1974). Entretanto, a sua grande influência pertence ao estudo das qualidades, pois pouco antes de 1361 ele teve uma grande ideia: "por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas?" (BOYER, 1974). Percebe-se uma sugestão do que hoje chamamos de representação gráfica de funções, e essa seria a primeira vez[28] que esse tipo de técnica seria usada para a descrição geométrica de qualidades (BARON, 1985).

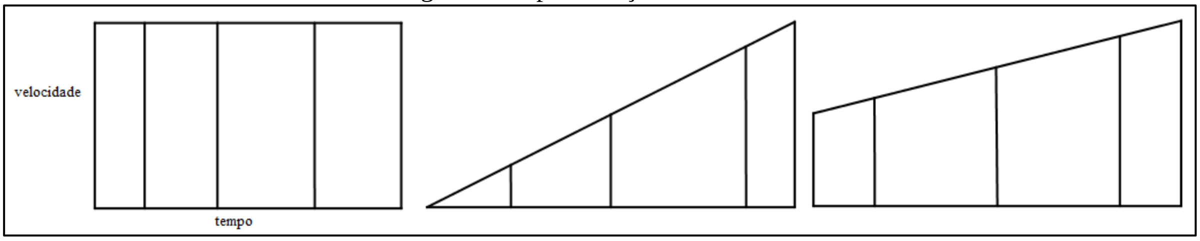
Oresme introduziu então o importante conceito de representação gráfica de intensidade de qualidades. Ele acreditava que tudo que é mensurável pode ser pensado como quantidade contínua, podendo então ser representado por entes geométricos, como retas e superfícies (BARON, 1985). Assim, propôs o seguinte desenho: uma reta horizontal para representar a extensão do tempo, sendo seus pontos instantes, que chamou de longitude; a partir dos pontos, segmentos perpendiculares à reta, que chamou de latitude, representando a velocidade naquele instante (BABB, 2005). Os termos que utilizou, longitude e latitude, são equivalentes às atuais abscissa e ordenada, e a representação é semelhante ao plano cartesiano da geometria analítica (BOYER, 1974). Oresme viu que, no movimento uniforme ou uniformemente acelerado, as extremidades superiores dos segmentos velocidade (latitudes) formariam uma linha reta. No primeiro caso, a figura formada seria um retângulo, pois as velocidades seriam iguais em todos os instantes; no segundo, seria um triângulo retângulo ou um trapézio, a depender se a velocidade inicial considerada era igual a zero ou maior que zero (figura 18).

---

[27] Esse é o caso de um corpo em queda livre, algo que foi descoberto por Galileu (1564-1642) tempos depois (BENESTAD, C. *et al*, 2015).

[28] O uso de coordenadas não era novo, pois já havia acontecido com Apolônio e outros. A aplicação na representação gráfica de uma quantidade variável, porém, era novidade (BOYER, 1974).

Figura 18: representações de Oresme.



Fonte: elaboração própria.

A partir das representações, Oresme concluiu (sem uma prova explícita) que a área das figuras representava a distância total percorrida. Seguindo Aristóteles, certamente pensou na área como sendo formada por infinitos segmentos que representavam a velocidade em um espaço de tempo muito curto (BOYER, 1974). Ele pôde então verificar geometricamente o Teorema da Velocidade Média de Merton College, pois o triângulo retângulo ou o trapézio formados pelo movimento de aceleração constante possuem a mesma área de um retângulo de mesma base e altura igual à velocidade no instante mediano, que é justamente a velocidade obtida pela média entre as velocidades final e inicial. Se a área era a mesma, a distância percorrida também.

Ao encontrar a área, Oresme estava realizando geometricamente uma integração sem mesmo saber (BOYER, 1974), que resulta justamente no teorema de Merton College. Esse resultado pode ser verificado em notação atual: a função velocidade seria do tipo $v(t) = a.t$, já que trata-se de uma reta, em que *v* é a velocidade, *a* é o coeficiente angular e, por se tratar de um movimento, a aceleração, e *t* o tempo. Podemos considerar que o movimento parte do repouso e, no caso do trapézio, marcar seu início a partir de um instante positivo, sendo a velocidade inicial então diferente de zero e o coeficiente linear não nulo também para este caso. Podemos encontrar a área abaixo da curva pela integral, pela fórmula da área do triângulo e a distância percorrida pelo teorema, e ver que os três caminhos levam ao mesmo resultado. Considere o movimento desde o repouso e acontecendo até um instante final t_f qualquer, v_f a velocidade final, *b* a base e *h* a altura do triângulo:

$$\int_0^{t_f} a \cdot t \cdot dt = \frac{a \cdot {t_f}^2}{2} - \frac{a \cdot 0^2}{2} = \frac{a \cdot t_f \cdot t_f}{2} = \frac{v_f \cdot t_f}{2}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{t_f \cdot v_f}{2} = \frac{v_f \cdot t_f}{2}$$

$$d = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot t = \frac{0 + v_f}{2} \cdot t_f = \frac{v_f \cdot t_f}{2}$$

Para o caso da velocidade inicial diferente de zero (trapézio):

$$\int_{t_i}^{t_f} a \cdot t \cdot dt = \frac{a \cdot {t_f}^2}{2} - \frac{a \cdot {t_i}^2}{2} = \frac{a \cdot t_f \cdot t_f}{2} - \frac{a \cdot t_i \cdot t_i}{2} = \frac{v_f \cdot t_f - v_i \cdot t_i}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(v_f + v_i) \cdot (t_f - t_i)}{2} = \frac{v_f t_f - a t_f t_i + a t_i t_f - v_i t_i}{2} = \frac{v_f \cdot t_f - v_i \cdot t_i}{2}$$

$$d = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot t = \frac{\left(v_f + v_i\right) \cdot \left(t_f - t_i\right)}{2} = \frac{v_f t_f - a t_f t_i + a t_i t_f - v_i t_i}{2} = \frac{v_f \cdot t_f - v_i \cdot t_i}{2}$$

É importante atentar ao fato de que Oresme, para entender o movimento, pensava no gráfico que representava sua velocidade, não a distância percorrida. Isso mostra que ele acabava estudando aspectos que hoje pertencem ao Cálculo: começava pelo gráfico da função que representa a taxa de variação da distância, ou seja, sua derivada; e, para estudar a distância percorrida, usava a área abaixo dessa curva, isto é, a integral da função (BOYER, 1974). Segundo Edwards (1979), Oresme introduziu, mesmo que implicitamente, quatro ideias inovadoras em seus estudos sobre latitude de formas:

(1) medida e representação de grandezas físicas por meio de segmentos;
(2) alguma noção de função e relação entre variáveis;
(3) uma representação gráfica dessa função, que pode ser considerada um passo inicial para a geometria analítica;
(4) um processo com conceitos de integração ou soma contínua para calcular a distância pela área abaixo do gráfico velocidade-tempo, mesmo que apenas para os casos de movimento uniforme ou com aceleração constante.

Versões mais maduras de tais ideias tiveram papel fundamental no desenvolvimento pleno do Cálculo no século XVII (EDWARDS, 1979). Alguns dizem até que, historicamente, o Cálculo começou com Oresme e suas descobertas (BENESTAD, C. *et al*, 2015), provavelmente por seu estudo relacionar taxas de variação e somas infinitas, o que seria uma prévia do TFC (mesmo que ele não soubesse disso). Além de suas representações geométricas das qualidades, Oresme também deu contribuições para o estudo de séries infinitas e, embora não tenha alcançado resultados significativos nessa área, foi importante para motivar e encorajar ainda mais a aceitação do uso livre de processos envolvendo infinitos e infinitésimos (EDWARDS, 1979). Cabe destacar também que, em seus trabalhos, Oresme chega a incluir passagens sobre a possibilidade de representações tridimensionais para qualidades que tivessem extensão não apenas em tempo, mas também em espaço (BARON, 1985).

4.1.5 Séculos XV e XVI

Em meados do século XIV, a Europa sofreu com a peste bubônica, pandemia que, segundo estimativas, pode ter matado mais da metade da população do continente. Isso levou a um declínio do desenvolvimento da Matemática após a obra de Oresme e seus contemporâneos, só voltando a evoluir consideravelmente no século seguinte. Levando em conta que França e Inglaterra, além dos impactos da grande peste, estiveram envolvidas na Guerra dos Cem Anos (1337-1453), entende-se que universidades de outros países, em especial italianas e alemãs, tenham a princípio tomado a frente nos estudos matemáticos e fornecido a maior parte dos estudiosos (mas não todos) do início da era pós-medieval (BOYER, 1974).

Já na metade do século XV, a Europa estava se recuperando do choque físico e espiritual causado pela grande peste, fazendo a atividade matemática outra vez aumentar. A recente invenção da impressão (primeiro livro impresso na Europa Ocidental data de 1447) também contribuiu para a retomada, já que agora a difusão de trabalhos era muito maior e mais rápida que em qualquer outro período (BOYER, 1974). A época, na história geral, é marcada pelo fim do período medieval convencionado (queda de Constantinopla em 1453) e o início do Renascimento, associado à maior disponibilidade de obras da cultura grega em diversas áreas do saber. Na Matemática, porém, o tempo do Renascimento consistiu de um rápido avanço no campo da álgebra a partir da continuação e do aprofundamento do que foi desenvolvido no período da Idade Média (na Europa e fora dela), tendo a geometria das obras gregas da antiguidade menos relevância para o início do período. “Poucos homens do século quinze liam grego ou conheciam suficientemente a matemática para tirar proveito das obras dos melhores geômetras gregos” (BOYER, 1974, p. 197).

Como principais matemáticos do século XV, Boyer (1974) destaca o alemão Johann Müller de Konigsberg (1436-1476), mais conhecido como Regiomontanus, e o francês parisiense Nicolas Chuquet, de cuja vida pessoal pouco se sabe (morreu por volta de 1500). O primeiro foi responsável por tornar a trigonometria um assunto independente, pois até então era estudada apenas como requisito para a astronomia. Sua morte súbita atrasou a publicação impressa de seus estudos, mas os manuscritos eram conhecidos pelos mais próximos e certamente influenciaram pesquisas do início do século XVI (BOYER, 1974). Já Chuquet ganha destaque por sua obra de 1484, *Triparty en la science des nombres*, onde faz grande uso de simbolismo algébrico. Por exemplo, a expressão $\sqrt{14 - \sqrt{180}}$ aparece como $R)^2 \,.\, 14 \,.\, \overline{m} \,.\, R)^2 180$. Nela, Chuquet também apresenta uma notação exponencial importante: $5x, 10x^3$ e $9x^{-2}$, por exemplo, apareciam como $.\,5.^1\,, .10.\,^3$ e $.\,9.^{2.m.}$. Ele ainda mostra regras para se trabalhar com incógnitas e trata de resolução de equações, exprimindo pela primeira vez um número negativo isolado quando escreveu $.\,4.^1\, egaulx\ a\ \overline{m}.\,2.^0$, que equivale para nós a $4x = -2$. (BOYER, 1974).

Já mais perto da virada para o século XVI, o italiano Luca Pacioli (1445-1514) é quem recebe mais atenção. Boyer (1974) afirma que, embora o primeiro trabalho de álgebra do Renascimento seja o de Chuquet, o que ganhou mais fama no período foi *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, de Pacioli. Ele não apresenta em sua obra muitos conceitos novos, mas compila vários materiais, em especial de álgebra, mas também de aritmética, geometria euclidiana (muito elementar) e contabilidade (BOYER, 1974). Embora não use a notação exponencial introduzida por Chuquet, há crescente utilização de abreviações, como *p* e *m* para indicar adição e subtração, respectivamente, e *co*, *ce* ou *ae* para a incógnita. Pacioli ainda teve mais trabalhos publicados, sendo um deles a respeito da razão mais tarde chamada de áurea.

Como Boyer (1974) destaca, o Renascimento tem origem na Itália, onde o interesse renovado por cultura e ciência despertou mais cedo. O autor lembra também que o país foi uma das principais rotas usadas para a entrada dos estudos árabes na Europa, incluindo os algorismos e a álgebra. Entretanto, outras regiões não ficaram muito atrás. A Alemanha, por exemplo, teve tantas obras sobre álgebra que o assunto ficou conhecido em diversos outros países como “a arte cóssica”, por causada palavra alemã *coss* usada para representar as incógnitas. Além disso, data de 1489 a mais antiga aparição em livro impresso dos símbolos alemães + e $-$, em trabalho do professor de Leipzig Johannes Widman (BOYER, 1974). De fato, a primeira metade do século XVI viu o surgimento de diversos algebristas alemães, entre eles Adam Riese (1492-1559), Christoph Rudolff (1500-1545), Peter Apian (1495-1552) e Michael Stifel (1487-1567). As obras desses autores trouxeram contribuições importantes, como: influência na substituição de números romanos e contas no ábaco por métodos aritméticos com numerais indo-arábicos; uso de razões decimais; símbolo moderno para raízes; primeira impressão do que mais tarde seria chamado de Triângulo de Pascal; novo tratamento de números negativos, radicais e potências; difusão dos símbolos + e – às custas da notação italiana *p* e *m* (BOYER, 1974). As obras, em especial a *Arithmetica Integra*, de Stifel, constituíam um tratamento bem completo da álgebra que era conhecida até então. Mas, em 1545, novos estudos algébricos apareceram em uma notável publicação, causando tão grande impacto nessa área que o ano pode ser considerado o fim da Idade Média e início da Renascença dentro da Matemática (BOYER, 1974).

Os algebristas até então tinham conseguido resolver pela álgebra, com alguma variedade de métodos e para diferentes casos, apenas equações de, no máximo, segundo grau. Alguns estudiosos julgavam até que equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente (BOYER, 1974). Imagine então a surpresa de todos quando o italiano Girolamo Cardano (1501-1576), no ano citado de 1545, publicou sua obra *Ars Magna*, que apresentava a resolução de equações não só cúbicas como também quárticas (BOYER, 1974). Nela, Cardano faz questão de destacar que, apesar de ter sido o autor, as soluções foram na verdade desenvolvidas por seus compatriotas Niccolo Tartaglia (1500-1557), no caso das cúbicas, e Ludovico Ferrari (1522-1565), das quárticas. Ainda, sabe-se hoje que Scipiano del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, foi o primeiro a descobrir a resolução da cúbicas, mas sem publicá-la. Apenas a apresentou para um aluno e, eventualmente, a notícia chegou a Tartaglia.

A álgebra da época ainda não tratava de plenas generalizações. Consistia na determinação do valor desconhecido em uma equação com coeficientes específicos que, mesmo de uma maneira ainda bastante verbal, ia contando com utilização gradual de símbolos e abreviações (EDWARDS, 1979). Por isso, *Ars Magna* apresenta detalhadamente diversos casos de equações cúbicas, variando conforme os coeficientes dos termos dos vários graus apareciam de um lado ou de outro na equação[29]. A pouca generalização era quando Cardano, por exemplo, dizia "seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20"[30] – o que para nós seria $x^3 + 6x = 20$ – pois, apesar de estar usando um caso específico, Boyer (1974) afirma que ele evidentemente estava pensando em todas do tipo "um cubo e coisa igual a um número", isto é, $x^3 + px = q$. Depois de resolvida, passava para outra "família" de equações cúbicas, como "cubo igual a coisa e número".

Um caso do segundo grupo de equações cúbicas apresentado acima, porém, levava a uma nova dificuldade. O método aplicado para a resolução de equações daquela "família" funcionava exceto para uma específica: $x^3 = 15x + 4$. Por substituição, Cardano sabia que uma solução era $x = 4$. Porém, ao usar o método, ele chegava à expressão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \quad (1)$$

[29] Os coeficientes eram necessariamente positivos (BOYER, 1974).
[30] A frase mostra um pensamento geométrico por trás da resolução, que pode ser considerada um "completamento de cubo" (BOYER, 1974).

Ele já tinha se deparado com raízes quadradas de números negativos antes, e acreditava que elas não existiam. Mas, nesse caso, ficou mais intrigado já que sabia da validade do método e possuía de antemão a resposta da equação. Infelizmente, Cardano não passou dali, mas teve mérito ao pelo menos dar atenção à situação.

Um pouco mais tarde, a mesma expressão levou à origem dos números imaginários por outro italiano, Rafael Bombelli (1526-1573). Números irracionais já eram aceitos, muito por causa da possibilidade de aproximação por racionais, e os negativos também já estavam se tornando plausíveis pela noção de sentido sobre uma reta numérica (BOYER, 1974). Se algum matemático desejasse, porém, poderia negá-los como solução de uma equação dizendo simplesmente que tal equação era insolúvel. O mesmo poderia ser feito para raízes quadradas de números negativos que aparecessem em equações quadráticas. Por exemplo, poderia-se dizer que $x^2 + 1 = 0$ era insolúvel, negando a existência de $\sqrt{-1}$. Mas, com a resolução de cúbicas, a situação mudou, já que se chegava a raízes quadradas de negativos mesmo quando se sabia que existia solução real (BOYER, 1974). Logo, alguma coisa sobre os imaginários deveria ser compreendida.

Ao perceber que os radicandos da expressão (1) diferiam apenas pelo sinal, Bombelli imaginou que eles poderiam se anular mais à frente, deixando apenas um número real; e como a solução $x = 4$ era conhecida, ele supôs que a parte real resultante de cada raiz cúbica deveria ser 2, isto é, $2 + a\sqrt{-1}$ seria o resultado da primeira raiz cúbica e $2 - b\sqrt{-1}$ da segunda. Já que vieram de raízes cúbicas, elevando-se ambos os resultados ao cubo e comparado-os com o radicando inicial, encontra-se $a = b = 1$. Assim, ele chegou ao resultado $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ (BOYER, 1974). O raciocínio de Bombelli não o ajudou a resolver equações de terceiro grau, pois ele precisava já conhecer a solução para supor o resultado da raiz cúbica, e se já tinha o resultado então a equação estava solucionada; mas certamente mostrou o papel importante que os imaginários teriam no futuro e confirmou a validade do método de resolução. A *Álgebra* de Bombelli foi impressa em 1572 (BOYER, 1974).

Sobre as equações quárticas, Cardano destaca que Ferrari inventou o método a seu pedido. Da mesma maneira, casos separados são tratados um após o outro. Em geral, apareciam exemplos com termos de quarto, segundo, e primeiro graus, já que “Cardano sabia eliminar o termo cúbico somando a ou subtraindo das raízes um quarto do coeficiente do termo cúbico” (BOYER, 1974, p. 209). Um grupo de equações do trabalho é: seja quadrado-quadrado e quadrado e número igual a lado, atualmente, por exemplo, $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. O método de resolução consiste em uma troca de incógnitas que leva a uma equação cúbica, que era então resolvida pelos métodos anteriores[31].

Para Boyer (1974), *Ars Magna* foi a maior contribuição à Álgebra desde o completamento de quadrados, ainda com os Babilônios quatro milênios antes. Aquela praticada até sua publicação estava mais ligada ao uso de novas abreviações e simbologias, sem descobertas de tanto impacto. Apesar de não possuírem aplicações práticas, as soluções de equações cúbicas e quárticas foram excitantes e estimularam ainda mais o desenvolvimento de técnicas algébricas em várias direções (EDWARDS, 1979).

O século XVI também viu importantes obras gregas como, *Elementos*, *Cônicas* e *Sobre o Equilíbrio de Planos*, serem traduzidas para o latim e publicadas (BARON, 1985). A Geometria da primeira metade do século era bem elementar, apoiada em propriedades básicas de *Elementos*, mas de meados em diante as traduções foram ganhando difusão mais significativa (BOYER, 1974). Dois tradutores importantes foram os italianos Francesco Maurolico (1494-1575) e Federico Commandino (1509-1575). A tradução de Commandino para *Cônicas*, por exemplo, foi impressa em 1566 (BOYER, 1974). Entretanto, o interesse pela geometria grega durou pouco, pois após suas mortes em 1575 "a geometria marcou passo até que o desenvolvimento da álgebra atingisse um nível que tornasse possível a geometria algébrica" (BOYER, 1974, p. 220). Os estudos estavam quase maduros o suficiente para o rápido desenvolvimento do Cálculo no século XVII, faltando um pouco mais de avanço na álgebra e o desenvolvimento da Geometria Analítica.

"A álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares" (BOYER, 1974, p. 223). Para que ela pudesse se tornar um meio de generalizações plenas, era necessário distinguir os símbolos usados para a incógnita, o valor que se está buscando, e para os coeficientes, que presume-se serem conhecidos já de início. Essa ideia crucial de separar as variáveis e os parâmetros foi introduzida por François Viète (1540-1603) em sua obra *Introduction to the Analytic Art*, de 1591 (EDWARDS, 1979). Ele convencionou o uso de vogais para as variáveis e de consoantes para os parâmetros conhecidos, que se misturavam a outros símbolos já usados e a algumas palavras[32]. Em um problema da obra, por exemplo, Viète escreve $A\,cub + B\,plano\ in\ A\ aequatur\ C\ in\ A\ quad + D\ solido$ para $A^3 + BA = CA^2 + D$, em que A representa o valor desconhecido (EDWARDS, 1979).

[31] Mais detalhes sobre os métodos de resolução em BOYER (1974).

[32] A transição para uma linguagem completamente algébrica aconteceu entre Viète e Descartes (EDWARDS, 1979).

Claro que, comparado com o que usamos atualmente, a linguagem ainda era primitiva, mas a separação entre o conhecido e o desconhecido em equações foi um passo de grande importância para a orientação da Matemática no século seguinte, que passou do estudo de casos particulares para a busca por métodos gerais. Essa mudança de ênfase era necessária para os algoritmos que fazem parte do Cálculo (EDWARDS, 1979). Viète também deu contribuições à geometria, trigonometria e aritmética, incluindo disseminação e defesa do uso de frações decimais em lugar das sexagesimais (BOYER, 1974).

O século XVI contou ainda com uma aproximação entre a Matemática e a arte, muito pelo uso de perspectivas para representação plana de objetos no espaço. A relação é muito visível em obras de Leonardo da Vinci (1452-1519) (BOYER, 1974). Outros estudiosos importantes também viveram nesse período. Por exemplo, na Inglaterra, que ainda não tinha prosperado na Matemática após os estudos de Merton College, Robert Recorde[33] (1510-1558) apresentou o nosso familiar símbolo de igualdade[34] em seu *Whetstone of Witte*, de 1557 (BOYER, 1974). Boyer (1974) destaca também Nicolau Copérnico (1473-1543), que trouxe grandes contribuições para a trigonometria, muito necessária para os estudos de astronomia que o tornaram famoso. Chama a atenção também as primeiras mudanças na estrutura de demonstração de Arquimedes, inicialmente com o belga Simon Stevin (1548-1620) e com o italiano Luca Valério (1552-1618). Os principais trabalhos gregos já estavam disponíveis para a Europa Ocidental pela época das mortes de Maurolico e Commandino (BOYER, 1974), quando Stevin e Valério começaram o processo de substituição da dupla redução ao absurdo pelo uso de passagem direta à noção de limite (BARON, 1985). Outros seguiram o mesmo caminho, como Kepler e Galileu, todos homens práticos que precisavam dos métodos de Arquimedes mas queriam evitar os rigores lógicos. “Em grande partem foram as modificações por isso introduzidas nos antigos métodos infinitesimais que finalmente conduziram ao cálculo” (BOYER, 1974, p. 236). No século XVII, novos problemas e a busca por caminhos para resolvê-los trouxe uma maior preocupação com métodos de descoberta, gerando certo abandono do rigor matemático das demonstrações.

4.1.6 Século XVII

Segundo Edwards (1979), o final do século XVI foi marcado por computações numéricas de resultados, impulsionadas pelo desenvolvimento da astronomia e das navegações.

---

[33] Pode ser considerado o fundador da escola inglesa de Matemática (BOYER, 1974).
[34] Mais de um século se passou até que o sinal triunfasse sobre outras notações (BOYER, 1974).

A busca por métodos mais simples para facilitar contas de multiplicação e divisão, muitas vezes envolvendo muitas casas decimais, levou à criação dos logaritmos pelo escocês John Napier (1550-1617), que os apresenta em seu *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. O trabalho foi publicado em 1614, sendo um dos primeiros de grande relevância do século XVII. O próprio Napier conta que passou vinte anos isolado em um castelo próximo a Edimburgo para criar o sistema, o que coloca a origem de seus estudos sobre o assunto em 1594 (BOYER, 1974). Nesse primeiro trabalho publicado ele apresenta apenas uma introdução e um guia para o uso das tabelas logarítmicas. Já em *Mirifici Logarithmorum Canonis Construction*, publicado postumamente em 1619, mostra o método de construção que usou nas tabelas.

Boyer (1974) afirma que poucas descobertas tornaram-se populares tão rapidamente quanto os logaritmos, o que proporcionou contribuições por parte de outros matemáticos. O inglês Henry Briggs (1561-1630), que chegou a se encontrar e discutir possíveis mudanças nas tabelas com Napier em 1615, foi um deles. Briggs publicou, respectivamente em 1617 e 1624, *Logarithmorum Chilias Prima* e *Arithmetica Logarithmica*, ampliando as tabelas para outras bases. John Speidell (1600-1634) contribuiu com o cálculo de logaritmos naturais de funções trigonométricas em seu *New Logarithmes* de 1619. Sabe-se ainda que, na mesma época dos estudos de Napier, o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) desenvolveu independentemente muitos conceitos semelhantes aos logaritmos, mas só veio a publicá-los em 1620 (BOYER, 1974).

Mais especificamente na área do Cálculo, as obras de Arquimedes já estavam disseminadas e compreendidas pelo final do século XVI, e “a física e a astronomia tinham chegado a um ponto em que havia necessidade crescente de argumentos referentes a coisas infinitamente grandes ou pequenas” (BOYER, 1974, p. 235). A época pedia então o desenvolvimento de métodos mais simples para investigação de áreas e volumes, sem o rigor da dupla redução ao absurdo usada pelo grego (EDWARDS, 1979). Edwards (1979) afirma também que o “horror do infinito” dos gregos segurou um maior avanço de suas técnicas, mas que as discussões sobre medidas contínuas e valores infinitamente grandes ou pequenos durante a Idade Média contribuiu para que os matemáticos do século XVII usassem as técnicas infinitesimais, mesmo que ainda em um campo intuitivo e sem muito fundamento lógico do ponto de vista matemático. Voltemo-nos agora, aproximadamente em ordem cronológica, aos principais estudiosos que fizeram uso de tais técnicas e participaram do rápido avanço de ideias do Cálculo no século XVII.

4.1.7 Johannes Kepler (1571-1630)

O alemão Kepler é mais famoso pelas suas três leis de movimentos planetários[35], a saber (EDWARDS, 1979):

(I) planetas têm uma órbita elíptica com o Sol em um de seus focos;
(II) o segmento que liga um planeta ao sol gera áreas iguais em intervalos de tempo iguais;
(III) o quadrado do período orbital de quaisquer dois planetas é diretamente proporcional ao cubo da metade do eixo maior de suas órbitas.

Além dos estudos sobre astronomia, seus cálculos de volumes para efeitos práticos também necessitavam cada vez mais do uso de infinitos elementos infinitamente pequenos. Em especial, buscando ajudar os comerciantes com medições mais precisas, Kepler usou as técnicas para encontrar volumes de barris de vinho. Seu método consistia em imaginar um certo sólido como sendo composto de um infinito número de partes infinitesimais de formato conveniente para o problema em questão. Por exemplo, considerou que a esfera era composta por infinitas pirâmides de vértice no centro da esfera e altura igual ao seu raio. Considerando $b_1, b_2, \dots, b_n$ as áreas das bases de cada pirâmide, r suas alturas (raio da esfera) e sabendo que a soma das bases de todas as pirâmides é justamente a superfície esférica, tendo medida $4\pi r^2$, ele chegava imediatamente ao volume *V* da esfera:

$$V = \frac{b_1 \cdot r}{3} + \frac{b_2 \cdot r}{3} + \cdots + \frac{b_n \cdot r}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

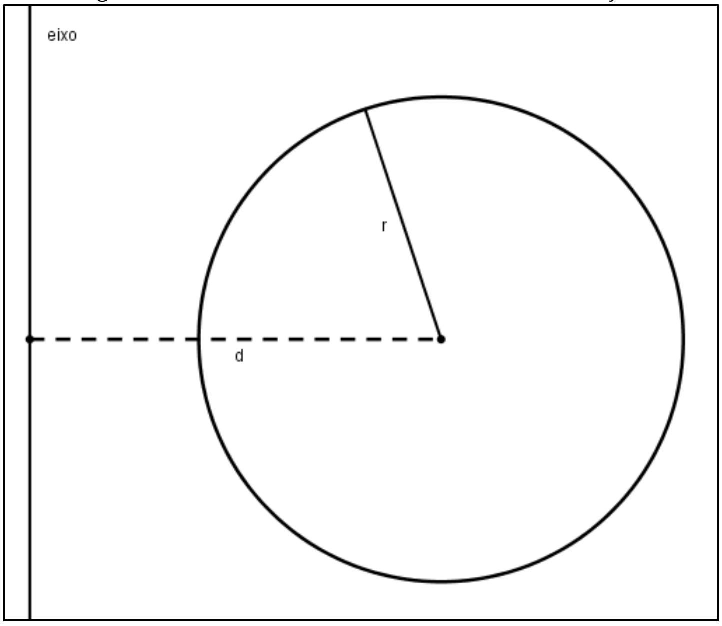
$$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Kepler disse também que o volume *V* de um sólido gerado pela revolução de um círculo de raio *r* ao redor de um eixo a uma certa distância *d* de seu centro (torus) é igual ao produto da área do círculo pela distância percorrida pelo seu centro, isto é, o comprimento da circunferência gerada pelo seu movimento.

$$\boxed{V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d}$$

[35] A terceira delas foi descoberta a partir dos logaritmos de Napier (EDWARDS, 1979).

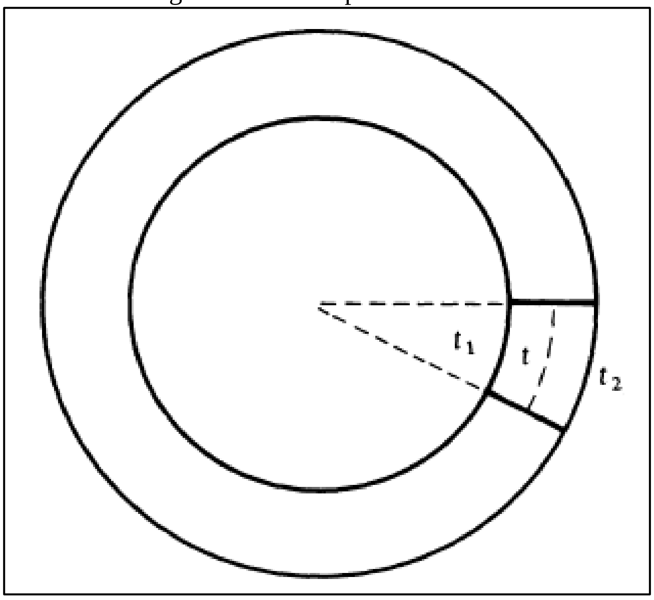
Figura 19: círculo a ser rotacionado e eixo de rotação.



Fonte: elaboração própria.

Kepler chegou a essa fórmula dividindo o sólido formado em infinitas “fatias”, geradas a partir da intersecção do sólido com planos que passam pelo eixo. Cada fatia tem o arco “interior” t_1 menor que o arco “exterior” t_2. Como são infinitas fatias, Kepler as considerou cilindros de altura $t = (t_1 + t_2)/2$.

Figura 20: vista superior do torus.



Fonte: Edwards (1979, p. 103).

Assim, o volume do sólido é a soma dos volumes de todos os cilindros, com suas respectivas alturas totalizando a circunferência determinada pelo movimento do centro do círculo inicial. Sendo $t_a, t_b, \ldots, t_n$ a altura de cada fatia, segue-se imediatamente a fórmula:

$$V = \pi r^2 t_a + \pi r^2 t_b + \cdots + \pi r^2 t_n$$
$$V = \pi r^2 \cdot (t_a + t_b + \cdots + t_n)$$
$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$$

Estes dois últimos resultados foram publicados em seu livro *Stereometria doliorum* de 1615, e as ideias nele contidas foram sistematicamente desenvolvidas por Cavalieri vinte anos mais tarde (BOYER, 1974). Mais de noventa outros cálculos de volumes de sólidos de revolução, exatos ou aproximados, estavam presentes em *Stereometria*. Kepler tinha absoluta certeza de que os resultados poderiam ser demonstrados rigorosamente se necessário, o que o deixava ainda mais à vontade para o uso livre dos infinitésimos (EDWARDS, 1979).

4.1.8 Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

O italiano Galileu Galilei (1564-1642) fez uso dos infinitésimos no desenvolvimento dos princípios da cinemática, seguindo a tendência de abandono das demonstrações de Arquimedes (BARON, 1985). Tais estudos foram publicados em seu *As duas novas ciências*[36], de 1638, onde apresentava uma discussão sobre dinâmica e resistência dos materiais e utilizava representações geométricas de velocidade semelhantes às de Oresme, sendo praticamente certo que conhecia os estudos do francês (BOYER, 1974). Essa e outras obras de Galileu tinham ligação maior com a Física, sendo a Matemática apenas uma ferramenta. Entretanto, ele pretendia em algum momento escrever um tratado mais voltado à Matemática sobre as quantidades infinitamente grandes ou pequenas, mas tal obra nunca foi encontrada e, caso tenha existido, certamente seria mais filosófica que matemática (BOYER, 1974). Foi seu aluno e associado Cavalieri que, encorajado por seu mestre e baseado na *Stereometria* de Kepler, organizou as ideias sobre infinitésimos e as transformou em um conjunto poderoso de técnicas de áreas e volumes, publicando-o em sua *Geometria indivisibilibus continuorum*, de 1635, "um dos livros mais influentes do início do período moderno" (BOYER, 1974).

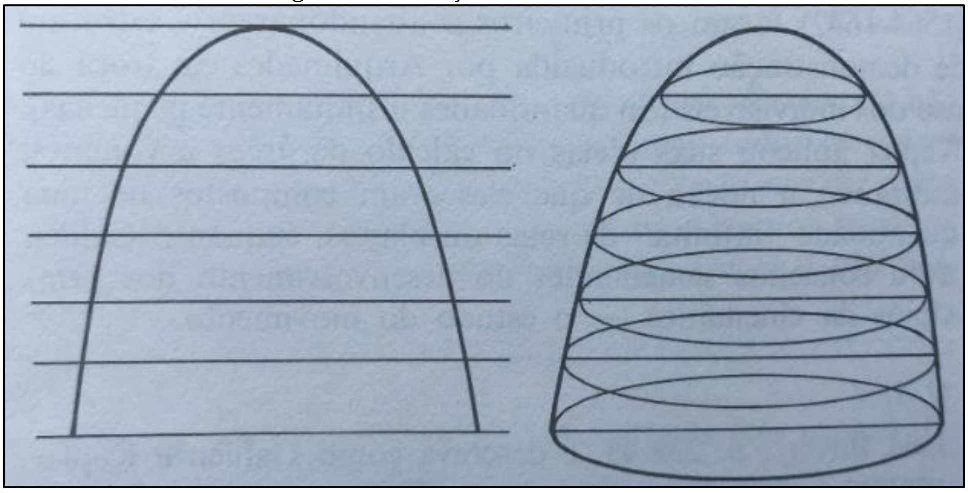
Cavalieri tem como base as mesmas ideias que Kepler, Galileu e Oresme, dizendo que uma área ou volume é formada por elementos infinitamente pequenos[37]. Entretanto, seu pensamento tinha duas diferenças principais (EDWARDS, 1979): primeiro, Kepler estudava área ou volume a partir de uma figura apenas, enquanto Cavalieri fazia uma correspondência

[36] Um resultado importante contido na obra é a análise de um lançamento de projétil em uma componente horizontal uniforme e vertical uniformemente acelerada. Desconsiderando a resistência do ar, ele mostra que o movimento descreve um parábola (BOYER, 1974).

[37] Claro que isso é semelhantes ao pensamento por trás do método mecânico de Arquimedes, ainda desconhecido na época (BOYER, 1974).

entre duas figuras, sendo uma geralmente conhecida de início; segundo, Kepler imaginava uma figura geométrica como sendo formada de infinitas figuras de mesma dimensão, como no exemplo das "fatias" que compõem o torus, enquanto Cavalieri pensava na figura formada por infinitos elementos de uma dimensão a menos. Assim, Cavalieri dizia que uma área é formada por segmentos paralelos e equidistantes, e um volume por seções de planos, também paralelos e equidistantes. Uma reta ou plano (*regula*) move-se paralelamente a si próprio a partir de uma base da figura até a outra. As interseções são os indivisíveis que constituem a figura (BARON, 1985).

Figura 21: formação da área ou volume.



Fonte: Baron (1985, p. 12).

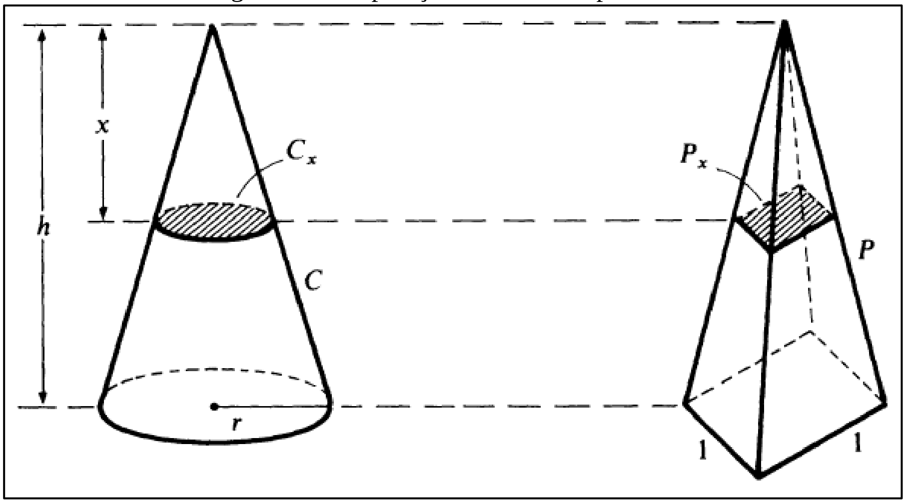
Seu método para áreas e volumes, conhecido como Princípio de Cavalieri, consistia em comparar duas figuras ou sólidos comparando seu indivisíveis, e pode ser enunciado da seguinte maneira (EDWARDS, 1979):

Se duas figuras planas têm alturas iguais, e se interseções geradas por retas paralelas às suas bases e equidistantes delas estão sempre em uma determinada razão, então as área das figuras também estão nessa razão.

Se dois sólidos têm alturas iguais, e se interseções geradas por planos paralelos às suas bases e equidistantes delas estão sempre em uma determinada razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa razão.

Por exemplo, para chegar à fórmula do volume de um cone com altura h e base de raio r, Cavalieri o comparou com uma pirâmide de mesma altura e base quadrada unitária, imaginando um seção transversal em ambos os sólidos a uma distância arbitrária x de seus vértices. Considere C o volume do cone e P o volume da pirâmide, sendo C_x e P_x as áreas de suas respecitavas seções (figura 22).

Figura 22: comparação entre cone e pirâmide.



Fonte: Edwards (1979, p. 105).

Sabemos que a razão entre a área da seção e a área da base, nos dois sólidos, é o quadrado da razão entre x e h:

$$\frac{C_x}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow C_x = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} \quad (1) \qquad\qquad \frac{P_x}{1} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow P_x = \frac{x^2}{h^2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), chega-se a:

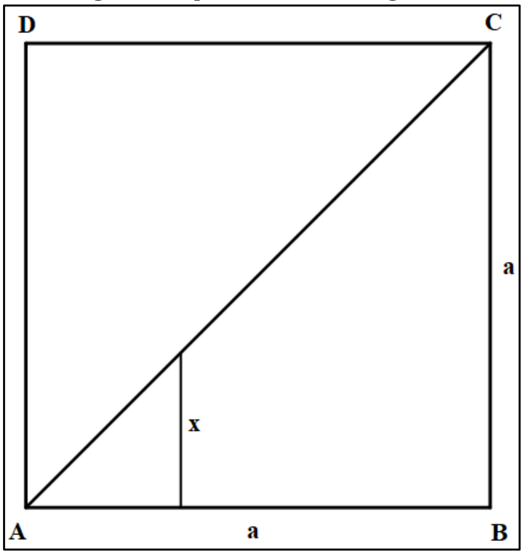
$$C_x = \pi r^2 \cdot P_x \Rightarrow \frac{C_x}{P_x} = \pi r^2$$

Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes estarão na mesma razão que as áreas das seções. Sabendo que o volume da pirâmide é $P = \frac{1 \cdot 1^2 \cdot h}{3} = \frac{h}{3}$, chega-se ao volume do cone:

$$\boxed{\frac{C}{P} = \pi r^2 \Rightarrow C = \pi r^2 \cdot P \Rightarrow \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Usando o pensamento de que uma figura ou sólido é formada por infinitos indivisíveis de uma dimensão menor, Cavalieri também chegou a um teorema semelhante a um resultado bem familiar atualmente. Imagine um quadrado *ABCD* de lado *a*, com sua diagonal *AC* o dividindo em dois triângulos congruentes, ΔABC e ΔADC (figura 23). Pela visualização, sabe-se que todos os segmentos de medida a somados levam a a^2, e que todas as áreas a^2 levam a a^3. Cavalieri buscava descobrir que fração desses resultados era a soma de todos os segmentos do tipo x, ou de todas as áreas x^2, volumes x^3, etc. Primeiro, a soma de todos os segmentos do tipo x da figura formará o ΔABC, cuja área é metade da área do quadrado. Então, podemos escrever em liguagem concisa o que Cavalieri escreveu em terminologia geométrica verbal mais complicada:

Figura 23: quadrado e sua diagonal



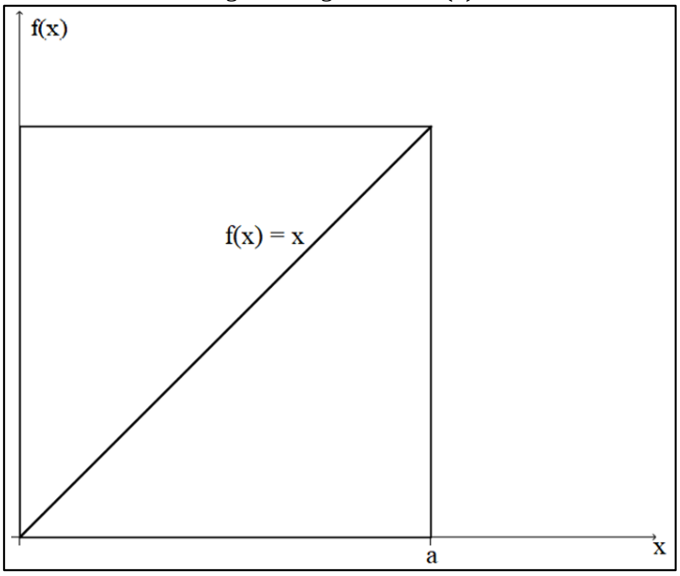
Fonte: elaboração própria.

$$\sum_{A}^{B} x = \Delta ABC$$

$$\sum_{A}^{B} x = \frac{a^2}{2}$$

Repare como esse resultado de Cavalieri, intuitivo e nada rigoroso, é semelhante a uma integral simples. Colocando o vértice A na origem de um plano cartesiano, a diagonal do quadrado representará a função $f(x) = x$, e a área do ΔABC será a integral de $f(x)$ de 0 até a:

Figura 24: gráfico de f(x)=x.

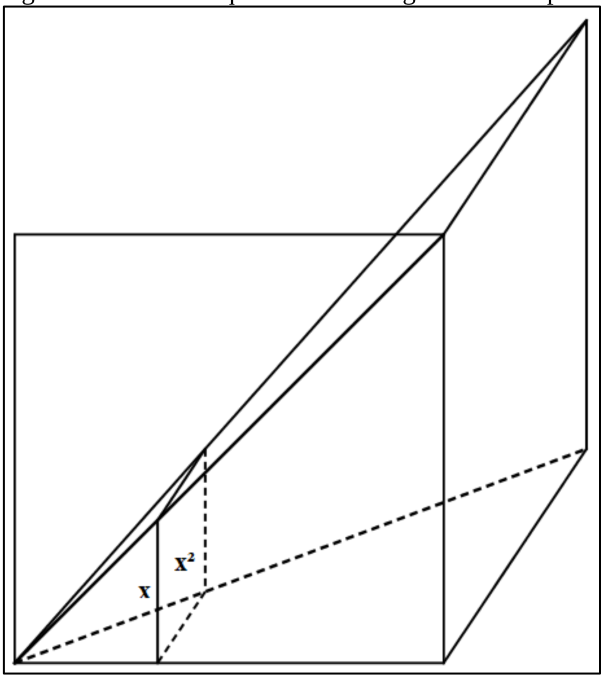


Fonte: elaboração própria.

$$\int_{0}^{a} x \cdot dx = \frac{a^2}{2}$$

Cavalieri achou resultados mais surpreendentes usando o mesmo tipo de raciocínio, que pode ser chamado de soma de potências de segmentos. Imagine agora cada segmento do tipo x sendo elevado ao quadrado. A soma de todas essas "segundas potências" dos segmentos formará uma pirâmide de vértice em A, tendo assim altura $h = a$, e base em $\overline{BC}$ de área $A_b = a^2$ (figura 25). Assim, a soma de todas essas áreas – os quadrados dos segmentos – formará o volume V_p da pirâmide, que equivale a um terço do volume do cubo de lado a.

Figura 25: soma dos quadrados dos segmentos do tipo x.



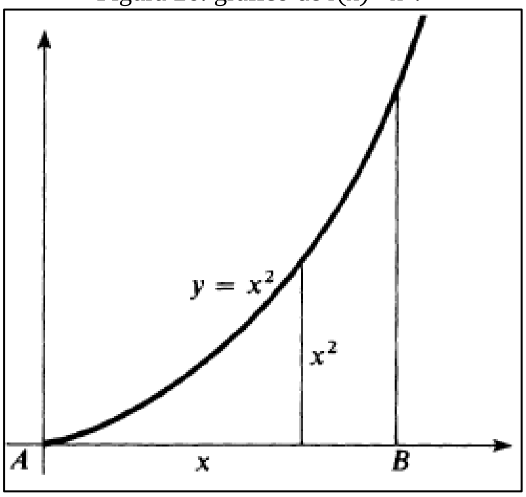
$$\sum_A^B x^2 = V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a$$

$$\sum_A^B x^2 = \frac{a^3}{3}$$

Fonte: elaboração própria.

Mas podemos ver a soma de todos os elementos do tipo x^2 também como a área abaixo da parábola $f(x) = x^2$, e novamente verificamos que o resultado é semelhante a uma integral:

Figura 26: gráfico de f(x)=x².



$$\int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{a^3}{3}$$

Fonte: Edwards (1979, p. 107).

Chegar à soma das terceiras potências de x exigiu de Cavalieri um processo mais complicado já que, pelo seu pensamento, tal soma levaria a um elemento de quatro dimensões, o que não poderia ser representado geometricamente. Baseando-se principalmente em somatórios, ele conseguiu resultados que seguem o padrão dos dois primeiros, como por exemplo:

$$\sum_{A}^{B} x^3 = \frac{a^4}{4}$$

Cavalieri também usou esse tipo de somatório nos dois primeiros resultados mostrados anteriormente. Mas a possibilidade de enxergá-los geometricamente torna seu entendimento mais fácil pela representação. Ele prosseguiu com esse método até a nona potência, inferindo o seguinte teorema:

$$\sum_{A}^{B} x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1} \;\; similiar\ ao\ atual \;\; \int_{0}^{a} x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Embora os resultados sejam corretos, paradoxos foram propostos pelos contemporâneos de Cavalieri a partir de seus métodos e conceitos (BARON, 1985). De qualquer maneira, Edwards (1979) considera essa generalização um grande passo em direção aos métodos algorítmicos do Cálculo. Boyer (1974) afirma que esse foi de longe o teorema mais importante da obra de Cavalieri.

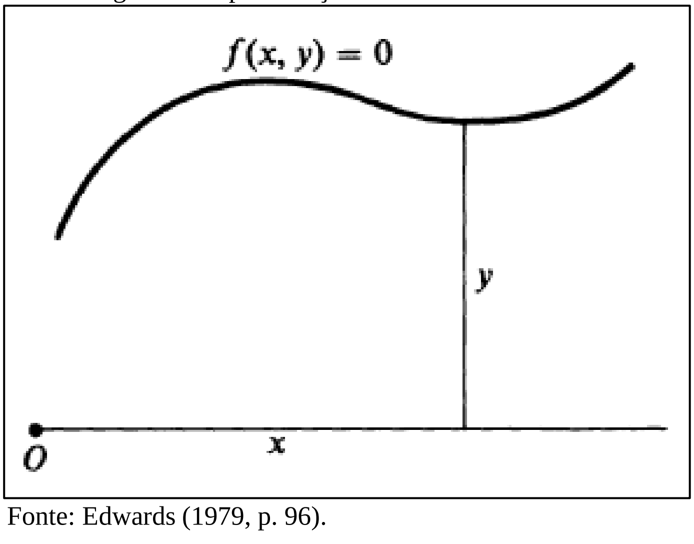
Assim como Cavalieri, Evangelista Torricelli (1608-1647) também era discípulo de Galileu, mas veio a falecer prematuramente. Caso vivesse por mais tempo, a Itália poderia continuar na liderança do desenvolvimento de maiores fundações de técnicas infinitesimais abordadas por Cavalieri (BOYER, 1974). Mas, com a morte de ambos em 1647, o centro matemático europeu acabou sendo apenas a França por um tempo, que tinha em Descartes e Fermat duas das principais figuras do segundo terço do século XVII (BOYER, 1974).

4.1.9 A Geometria Analítica

O principal tratado de René Descartes (1596-1650) foi o *Discurso sobre o método*, de 1637, que na verdade tinha um viés mais filosófico que matemático. Entretanto, em um de seus três apêndices, Descartes apresentava *La Geometrie*, um dos trabalhos que estabeleceram as fundações para a Geometria Analítica, passo final necessário na preparação para um avanço ainda maior das técnicas infinitesimais (EDWARDS, 1979). Um aspecto de grande importância de *La Geometrie* é o uso quase pleno de notação algébrica como a atual, com a pequena exceção de um símbolo diferente para a igualdade. O uso de simbologia vinha crescendo na Renascença, e alcançou maturação com o trabalho de Descartes. Ele padronizou a notação exponencial e iniciou a prática comum de usar letras do começo do alfabeto para parâmetros e do final para variáveis (EDWARDS, 1979). Pode-se dizer que esse é "o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje possa seguir sem encontrar dificuldades com a notação" (BOYER, 1974, p. 247-248). No mesmo ano, Pierre de Fermat (1601-1665) enviou para algumas pessoas próximas seu *Introduction to Plane and Solid Loci*, que também continha bases da Geometria Analítica e era até mais sistemático e parecido com a Geometria Analítica atual que *La Geometrie*. Esse trabalho, entretanto, só foi publicado em 1679, o que explica o porquê de usarmos as expressões Plano Cartesiano e Geometria Cartesiana atualmente (EDWARDS, 1979).

O objetivo de Descartes era transformar um problema geométrico em um problema algébrico, simplificá-lo o máximo possível, e depois voltar à Geometria para resolvê-lo (BOYER, 1974). Ele pensava nos parâmetros e incógnitas não como números, mas como segmentos, inclusive para aqueles do tipo x^2 ou x^3 por exemplo, mantendo a interpretação geométrica mas rompendo com a antiga tradição grega de pensar neles como áreas ou volumes (BOYER, 1974). Fermat seguia a mesma linha de raciocínio, e afirmava que quando temos a uma equação de duas quantidades desconhecidas, nós temos uma espécie de lugar geométrico (EDWARDS, 1979). Uma das quantidades deve ser representada por um segmento sobre um eixo horizontal, e a segunda por outro segmento no final do primeiro e perpendicular a este (figura 27)[38]. O conjunto das extremidades superiores dos segmentos verticais fomarão a curva correspondente àquela equação.

Figura 27: representação de Descartes e Fermat.



Fonte: Edwards (1979, p. 96).

[38] Apesar da semelhança, não há evidências de influência da representação de Oresme (BOYER, 1974).

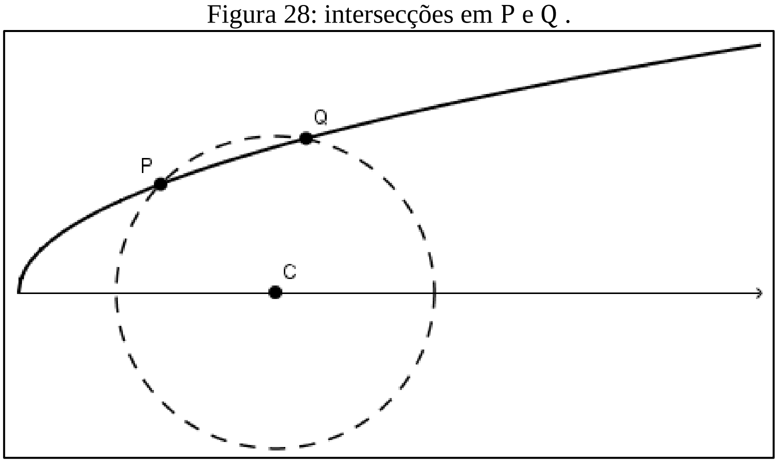
Descartes, como dito, começava por uma curva geométrica e tentava traduzí-la para meios algébricos. Fermat seguia o caminho contrário, partindo em geral de uma equação algébrica e tirando dela propriedades de sua curva correspondente (EDWARDS, 1979). Assim, os trabalhos dos dois se complementavam e davam um novo campo para o uso das técnicas infinitesimais. Os dois, mas em especial Fermat, focaram seus trabalhos nas equações que descreviam as seções cônicas, mas a partir de então qualquer nova curva poderia ser introduzida, bastando apenas uma nova equação. Por último, outro aspecto importante para ambos era o tratamento dos valores desconhecidos como variáveis, algo também indispensável para o Cálculo.

4.1.10 Descartes e seu método de tangentes

O passo inicial da Geometria Analítica não foi o único tópico matemático trabalhado por Descartes. Ele também criou um método para encontrar a reta normal e, com ela, a reta tangente a algumas curvas simples, como polinomiais, em um ponto qualquer. Reta normal é aquela perpendicular à reta tangente no ponto em questão.

Segundo Suzuki (2005), o método pode ser explicado da seguinte maneira: suponha que queremos encontrar a circunferência tangente a uma curva em um certo ponto P. Considere uma cinrcunferência qualquer com centro C no eixo de coordenadas (abscissas, único eixo usado por Descartes) e passando por P. Essa circunferência certamente passará também por outro ponto Q da curva e, nesse caso, ela não será tangente à curva em P (figura 28). Por outro lado, se P for o único ponto de contato, a circunferência obviamente será tangente à curva. O objetivo então é encontrar o ponto C no eixo de modo que circunferência de centro em C e raio $\overline{CP}$ tenha apenas P como ponto comum com a curva.

Figura 28: intersecções em P e Q .



Fonte: elaboração própria.

Se a curva e a circunferência possuírem duas intersecções, como na figura acima, as abscissas dos pontos podem ser encontradas por um sistema de equações formado por suas respectivas expressões algébricas, que terá duas soluções distintas. Então, para que os objetos tenham apenas um ponto em comum e, assim, sejam tangentes, o sistema deve ter duas soluções iguais, isto é, uma raiz dupla correspondente à abscissa do ponto de tangência.

Suzuki (2005) traz um exemplo para mostrar, na prática, a aplicação do raciocínio. Considere a curva $y = \sqrt{x}$ e um de seus pontos $P(a^2, a)$. Considere também uma circunferência de raio r passando por P e com centro $C(h, 0)$. Queremos encontrar h de modo que a circunferência tangencie a curva em P. A equação da circunferência será então:

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0$$

Assim, os pontos de intersecção da curva com a circunferência são as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \ \textit{Por substituição}\text{:} \ \ x^2 + (1-2h)x + h^2 - r^2 = 0$$

Sendo uma equação do segundo grau, a princípio teríamos duas soluções, que representariam as abscissas dos dois pontos de intersecção. Mas queremos que as duas raízes sejam iguais para que a intersecção seja única. Por hipótese, a intersecção que queremos é o ponto P, cuja abscissa a^2 deve ser então a raiz dupla da equação. Para isso, a fatoração da equação deve ser igual a $(x - a^2)^2$ (repare que o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1), e Descartes então impõe essa condição por meio da igualdade:

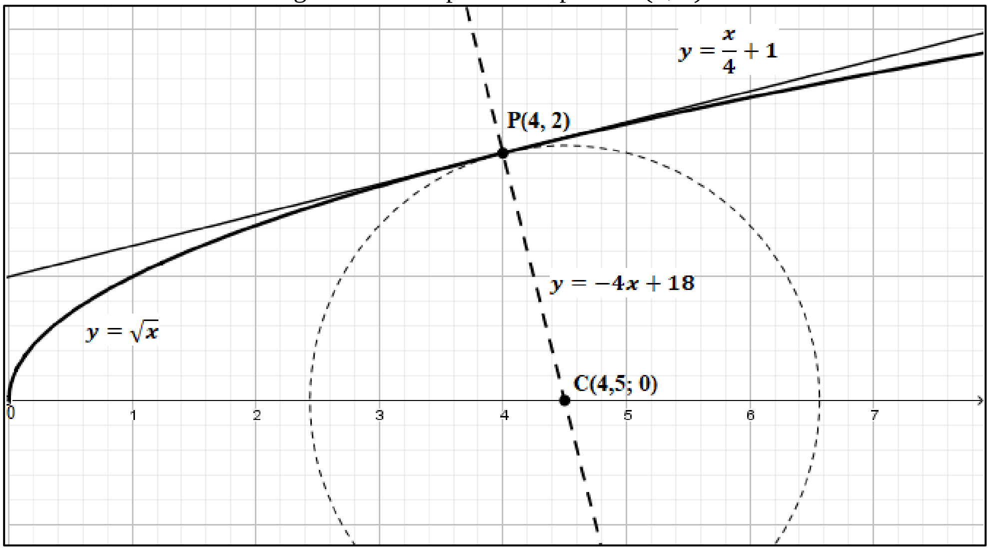
$$x^2 + (1-2h)x + h^2 - r^2 = (x - a^2)^2$$
$$x^2 + (1-2h)x + h^2 - r^2 = x^2 - 2a^2x + a^4$$

Comparando os coeficientes de termos de mesmo grau, temos:

$$1 - 2h = -2a^2 \ \Rightarrow \ h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Assim, a circunferência de centro $C(a^2 + 1/2\,, 0)$ será tangente ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ em um ponto qualquer $P(a^2, a)$. Pela geometria euclidiana, sabe-se que a reta tangente a uma circunferência em um determinado ponto P é perpendicular ao raio que tem P como extremidade. A inclinação da reta suporte desse raio pode ser facilmente encontrada, e nesse caso é igual a $-2a$. A reta tangente à circunferência em P também será tangente à curva e, pela perpendicularidade, sua inclinação será o oposto do inverso, isto é, $1/2a$. Por exemplo, a circunferência centrada no eixo e tangente a $y = \sqrt{x}$ em $P(4, 2)$ tem centro $C(4{,}5; 0)$, a reta normal em P tem como equação $y = -4x + 18$ e a reta tangente à curva em P tem como equação $y = \frac{x}{4} + 1$ (figura 29).

Figura 29: exemplo com o ponto P(4, 2) .



Fonte: elaboração própria.

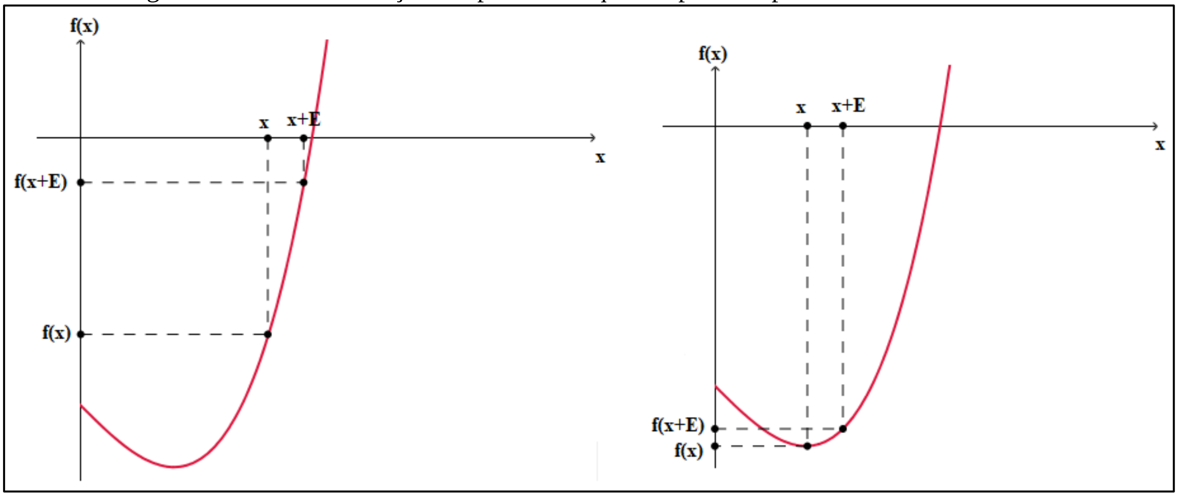
O método é muito eficaz quando chegamos a uma equação quadrática, como no exemplo. Para curvas de funções mais rebuscadas, que geravam equações de grau maior do que dois, o trabalho manual era muito grande, e por isso o método acabou sendo usado apenas para curvas mais simples. Aproximadamente um ano depois de publicar esse método em *La Geometrie*, Descartes conseguiu simplificá-lo, substituindo a equação da circunferência diretamente pela equação da reta tangente. O restante do raciocínio era basicamente o mesmo, com a solução do sistema formado pelas equações da reta e da curva tendo que possuir uma raiz dupla (SUZUKI, 2005).

Fermat também desenvolveu um método para encontrar tangentes a curvas, chegando a ser desafiado por Descartes em alguns problemas do tipo e obtendo sucesso na resolução ao utilizar seu próprio raciocínio (SUZUKI, 2005). Na realidade, como veremos a seguir, o método de Fermat contém aspectos infinitesimais e se aproxima mais do que fazemos hoje. Entretanto, o método de Descartes teve mais influência imediata no desenvolvimento do Cálculo (EDWARDS, 1979).

4.1.11 Fermat e seu método de máximos e mínimos

Além de participar, junto com Descartes, da criação das bases da Geometria Analítica, Fermat criou um engenhoso método que o permitia encontrar pontos em que uma função polinomial do tipo $y = f(x)$ assume valores máximos ou mínimos, e também achar a tangente em algum ponto da curva. Veremos que a essência é a mesma do processo que chamamos hoje de diferenciação. O método consistia em comparar o valor da função em um certo ponto com o seu valor em um ponto vizinho bem próximo. Em geral esses valores diferem bastante mas, de uma maneira intuitiva e visual, se estamos próximo de um máximo ou mínimo da função, essa diferença tende a ser menor, como mostra o exemplo de $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - x - 1$ (figura 30). Fermat, como Descartes, considerava apenas abscissas não-negativas (BOYER, 1974).

Figura 30: valores da função se aproximam quando perto de pontos mínimos/máximos.



Fonte:elaboração própria.

Como na figura anterior, podemos chamar de E o intervalo de uma abscissa à outra, tendo assim x e $x + E$ e suas respectivas ordenadas $f(x)$ e $f(x + E)$. Fermat então igualava esses dois valores da função percebendo que, mesmo não sendo de fato iguais, eram muito próximos quando se trata de máximo ou mínimos, e se tornavam cada vez mais próximos quando imaginamos valores menores para E.

$$f(x + E) \sim f(x)$$
$$f(x + E) - f(x) \sim 0$$

Sendo $f(x)$ um polinômio, todas as parcelas da expansão de $f(x + E) - f(x)$ que não possuem fator E se anularão, e portanto o resultado dessa diferença será divisível por E. Após dividir ambos os membros por E, Fermat fazia $E = 0$ e descartava qualquer parcela restante que possuísse esse fator. Depois, bastava resolver a equação em x para encontrar as abscissas dos pontos máximo ou mínimos.

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} \sim 0$$

Perceba que esse é praticamente o método atual para investigar máximos e mínimos de uma função: o primeiro membro é justamente a derivada de $f(x)$, diferindo apenas por pensarmos no limite quando $E \to 0$, e não o igualando exatamente a 0 como Fermat fazia, e por usarmos h ou Δx para o intervalo. Igualamos a derivada a 0 para achar possíveis abscissas dos máximos ou mínimos da função. O método é conhecido como pseudo-igualdades, pois Fermat partia de uma igualdade aproximada que chegava mais perto de ser verdadeira à medida que pensava-se em intervalos E menores.

Edwards (1979) traz um exemplo de aplicação do método: tendo um segmento de comprimento b, queremos saber como dividi-lo em dois segmentos de comprimento x e $b-x$ de modo que seu produto $x \cdot (b-x) = -x^2 + xb$ seja máximo, isto é, encontrar o retângulo de perímetro $2b$ que tenha área máxima. Primeiro, Fermat calcula a expressão anterior para o valor $x+E$ e, pensando em um valor vizinho bem próximo, o considera aproximadamente igual ao valor para x e escreve sua pseudo-igualdade.

$$-(x+E)^2 + (x+E)b = -x^2 - 2xE - E^2 + bx + bE$$
$$-x^2 - 2xE - E^2 + bx + bE \sim -x^2 + xb$$
$$-2xE - E^2 + bE \sim 0$$

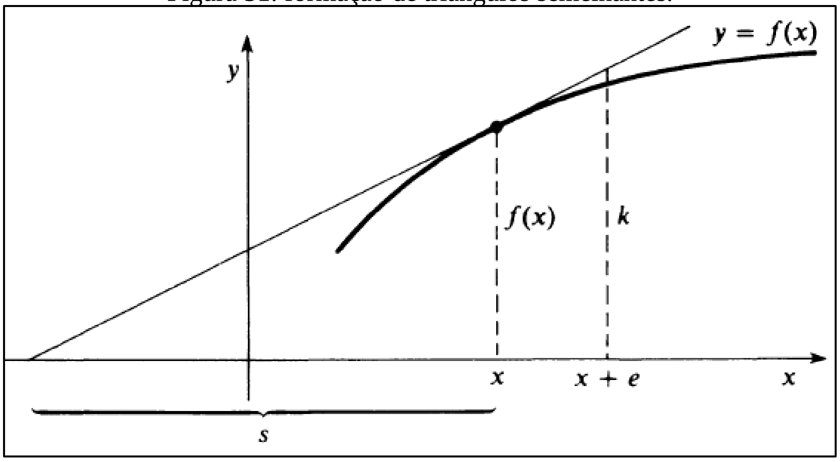
Aqui, Fermat divide tudo por E e depois, fazendo $E = 0$, descarta as parcelas que ainda têm esse fator. Assim, sua pseudo-igualdade se tornava uma igualdade verdadeira.

$$-2x - E + b \sim 0$$
$$2x = b$$
$$x = \frac{b}{2}$$

Vale ressaltar que Fermat não usava a notação algébrica praticamente igual a de hoje como Descartes, pois seguia a álgebra de Viète. Utilizava, por exemplo, A no lugar de x (EDWARDS, 1979).

Outra aplicação para o seu método de valores vizinhos e pseudo-igualdades foi em problemas de retas tangentes a curvas (EDWARDS, 1979). A partir da semelhança de triângulos da figura abaixo, podemos escrever a seguinte proporção e, pensando em um valor bem pequeno para e, fazer $k \sim f(x+e)$.

Figura 31: formação de triângulos semelhantes.



Fonte: Edwards (1979, p. 125).

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}$$

$$\frac{s+e}{s} \sim \frac{f(x+e)}{f(x)}$$

$$s \sim \frac{e \cdot f(x)}{f(x+e) - f(x)}$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, todas as parcelas restantes de $f(x+e) - f(x)$ terão fator e. Logo o segundo membro poderá ser simplificado e, depois, faz-se $e = 0$. Assim, o denomidador corresponderá nada mais nada menos à derivada de $f(x)$. Podemos substituí-lo pela notação atual para simplificar a expressão.

$$s \sim \frac{f(x)}{[f(x+e) - f(x)]/e}$$

$$s = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Como a expressão encontrada nos dá s, poderemos achar a inclinação $f(x)/s$ da reta tangente. Usando $f(x) = x^2$ como exemplo:

$$\frac{s+e}{s} \sim \frac{(x+e)^2}{x^2} \Rightarrow s \sim \frac{e \cdot x^2}{x^2 + 2xe + e^2 - x^2} = \frac{e \cdot x^2}{2xe + e^2} = \frac{x^2}{2x + e}$$

$$e = 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \qquad\qquad f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2}{x/2} = 2x$$

Antes de seus resultados ligados ao Cálculo Diferencial, Fermat também estudou áreas abaixo de curvas do tipo $y = x^m$ e chegou, em algum momento pouco depois de 1629, ao mesmo resultado de Cavalieri. Segundo Boyer (1979), seus resultados nessa questão acabaram sendo mais abrangentes por servirem para qualquer m positivo inteiro, enquanto Cavalieri apenas conjecturou isso a partir de seus resultados individuais para m de 1 a 9, resolvendo caso a caso. Fermat não era matemático profissional e infelizmente não publicou muitos de seus resultados, que ficaram conhecidos em seu país e na Itália principalmente por meio de Marin Mersenne (1588-1648), também francês. Por correspondência ou por publicações próprias, Mersenne costumava levar novas descobertas a diversos países, ajudando na divulgação e desenvolvimento da ciência (BOYER, 1974). A questão de expoentes fracionários e negativos foi primeiramente atacada de maneira mais sistemática por John Wallis (1616-1703) (EDWARDS, 1979). Mais tarde, provavelmente depois de estudar os máximos, mínimos e tangentes, Fermat viu que seu teorema também servia para esses casos (exceto $m = -1$), expandindo ainda mais seus resultados.

O caso $m = -1$ foi resolvido por Gregório de St. Vincent (1584-1667), antes mesmo de Fermat estudar tangentes e áreas, sendo porém publicado somente em 1647. Considerando a hipérbole $y = 1/x$, Gregório mostrou que, marcando abscissas com intervalos que crescem geometricamente, as somas das áreas abaixo da curva entre essas abscissas cresciam aritmeticamente. Isso o permitiu chegar a um resultado equivalente a:

$$\int_a^b x^{-1} dx = \ln b - \ln a$$

Por ter estudado tanto tangentes quanto quadraturas, é improvável que Fermat tenha deixado de perceber a relação inversa desses problemas. Mas, se de fato percebeu, certamente não viu muita importância ou aplicação. Segundo Boyer (1974), a integração de funções do tipo $y = x^m$, as únicas que Fermat considerou, eram bem simples para ele e não exigiam tanto a descoberta do que hoje chamamos de Teorema Fundamental do Cálculo. O resultado talvez lhe tivesse ocorrido caso se aprofundasse mais nessa oposição dos problemas.

Aspectos do Cálculo Infinitesimal foram apenas alguns dos estudos de Fermat, que também se ocupou muito com a aritmética, sendo “o fundador da moderna teoria dos números” (BOYER, 1974, p. 258). Alcançou importantes provas, como a de que nenhum cubo é a soma de dois outros cubos. Deixou ainda para os séculos seguintes a busca pela demonstração de sua afirmação: para n inteiro maior que dois, não existem inteiros positivos x, y e z tais que $x^n + y^n = z^n$. A busca pela solução do problema, que ficou conhecido como o último teorema de Fermat, trouxe diversos avanços para a Matemática. O teorema foi finalmente demonstrado pelo britânico Andrew Wiles em 1994, mais de três séculos e meio depois de ser conjecturado.

4.1.12 Outros contemporâneos notáveis

Vários outros matemáticos desenvolveram trabalhos de destaque no século XVII. O francês Gilles Roberval (1602-1675) foi um deles, e teve em comum com seu amigo Fermat o fato de pouco ter publicado. Roberval foi matemático profissional em uma universidade de 1634 até sua morte em 1675, posição conquistada por meio de concurso de desafios matemáticos que acontecia a cada três anos. Por isso não tornava públicas muitas de suas descobertas, que acabaram conhecidas por outros estudiosos também pelas viagens e correspondências de Mersenne (BOYER, 1974). Roberval fez uso de método semelhante ao de Cavalieri, conseguindo resultados importantes. Ele justificou o uso dos indivisíveis dizendo que, quando afirmamos que uma infinidade de pontos formam uma reta, na verdade estamos pensando em uma infinidade de segmentos muito pequenos, tão pequenos que consideramos um ponto. Usou o mesmo tipo de argumento para planos e sólidos (BARON, 1985).

Roberval estudou principalmente a ciclóide, curva obtida a partir do movimento de um ponto fixo de uma circunferência enquanto esta rola, sem deslizar, sobre um eixo horizontal (BARON, 1985). Ele pôde calcular a área abaixo de um arco da curva, o volume gerado quando esta área gira em torno do eixo base, e também descobriu como traçar a tangente à curva em um ponto qualquer. "Havia uma notável unidade nos interesses matemáticos da época entre 1630 e 1650, em parte atribuível à intercomunicação através de Mersenne" (BOYER, 1974), e os mesmos resultados acabaram sendo obtidos um pouco depois por Torricelli, que chegou a publicá-los. Isso gerou uma certa disputa pela prioridade das descobertas, mas sabe-se que os dois alcançaram seus resultados independentemente (BOYER, 1974).

Torricelli era amigo e discípulo de Cavalieri e Galileu, e pôde conhecer as obras francesas de Fermat, Descartes e Roberval por meio de Mersenne. Logo dominou os novos conhecimentos e expandiu os indivisíveis de Cavalieri em seu *Opera Geometrica*, de 1644, seguindo a linha geométrica por toda a obra. Em um dos problemas que resolveu, pôde esboçar o que certamente foi a primeira curva logarítmica e descobrir áreas e volumes a ela relacionadas (BOYER, 1974). Um de seus resultados preferidos foi a prova de que uma área infinita pode gerar um volume finito. Por vezes, Torricelli também se voltava para o lado da Física (muito por conta da influência de Galileu) e, enquanto estudava lançamento de projéteis e trajetórias parabólicas, transitava entre equações de distância e velocidade em função do tempo, o que o permitiu perceber o caráter inverso dos problemas de quadratura e tangentes. Por isso, Boyer (1974) afirma que ele poderia ter dado maiores contribuições ao Cálculo caso tivesse vivido mais.

Outro francês de destaque foi Blaise Pascal (1623-1662). Seguindo a linha de seu mestre e compatriota Girard Desargues (1591-1661), Pascal a princípio se interessou por estudos relacionados à geometria projetiva, sendo um dos poucos da época a explorar outras áreas além da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal. Também se aprofundou na probabilidade e ligou esse estudo ao triângulo numérico[39] que desde então leva o seu nome. Como afirma Boyer (1974), Pascal variava seus estudos com certa frequência, desenvolvendo também trabalhos sobre hidrostática e até mesmo construindo uma máquina de calcular.

Pascal também obteve progressos mais relacionados ao Cálculo. Um problema de teoria dos números famoso na época era a busca por uma fórmula para a soma de potências dos n primeiros inteiros consecutivos. Pascal chegou a uma fórmula e, a partir dela, pode derivar facilmente a mesma integral básica que outros contemporâneos conseguiram (BOYER, 1974). Ele também chegou a resultados relacionados a ciclóide, curva já bem conhecida de Roberval e Torricelli. Sua principal obra na área do Cálculo foi a intitulada *Tratado sobre as ordenadas de um quarto de círculo*, de 1658, em que Pascal chegou tão próximo ao Teorema Fundamental do Cálculo que Leibniz mais tarde viria a afirmar que obteve inspiração para o desenvolvimento do Cálculo ao ler uma proposição do trabalho[40]. Assim como Torricelli, caso não viesse a falecer prematuramente, ou caso tivesse maior dedicação à Matemática, Pascal poderia ter dado mais contribuições originais (BOYER, 1974). Sua morte, juntamente com a de Fermat, na década de 1660, marca o fim de um período glorioso da Matemática francesa. O último matemático de importância no país nessa época foi Philippe de Lahire (1640-1718), pioneiro no estudo da Geometria Analítica no espaço (BOYER, 1974).

Estudos que hoje fazem parte do Cálculo eram realmente a moda do século XVII, se espalhando por diversos outros países da Europa. Na Holanda, Johann Hudde (1629-1704) deu importante contribuição ao descobrir duas regras familiares atualmente (BOYER, 1974): primeiro, se a é uma raiz dupla de uma função polinomial $f(x)$, então a também é raiz de $f'(x)$; e, se em $x = a$ a função assume um valor máximo ou mínimo, então $f'(a) = 0$. As duas regras representam uma maior generalização para o estudo de tangentes, pelo menos no caso de polinômios, não sendo mais necessário um processo completo para cada caso, além de talvez terem sido os primeiros métodos totalmente algorítmicos que caracterizam o Cálculo (EDWARDS, 1979).

[39] O triângulo já era conhecido há mais de 600 anos (BOYER, 1974).
[40] A proposição é abordada mais adiante, na seção sobre Leibniz.

A onda eventualmente alcançou o Reino Unido – em especial pelos trabalhos de Torricelli (BARON, 1985) – que passou a ter protagonismo no estudo das técnicas infinitesimais e logo forneceria um dos pais do Cálculo. Antes disso, John Wallis publicou em 1655 sua obra *Arithmetica Infinitorum*, onde apresentava suas investigações aritméticas acerca das técnicas de Cavalieri e Torricelli, livre do modelo geométrico (BARON, 1985). A partir da "geometria dos indivisíveis" dos italianos, Wallis desenvolveu uma "aritmética dos indivisíveis" e conseguiu chegar a resultados equivalentes (GUICCIARDINI, 2009). O trabalho foi de grande importância por aproximar indivisíveis de valores numéricos e por influenciar Newton no início dos seus estudos, já que *Arithmetica* foi um de seus pontos de partida (BARON, 1985). Wallis foi o primeiro a utilizar o agora famoso símbolo que representa o infinito, além de ter contribuído na difusão e popularização da Geometria Analítica no Reino Unido (BOYER, 1974).

Wallis também foi responsável pela publicação de uma obra em 1659 que continha a retificação de um arco, feita por William Neil (1637-1670). Sabe-se também que a primeira retificação a ser publicada foi na verdade de Heirich van Heuraet (1633-1660), mas Neil a descobriu antes. Ainda, um pouco depois Fermat também chegou independentemente ao mesmo resultado, "constituindo outro caso notável de simultaneidade de descoberta" (BOYER, 1974, p. 277).

O escocês James Gregory (1638-1675) também deu importantes contribuições ao Cálculo antes de Newton e Leibniz. Depois de visitar a Itália e ter contato com sucessores de Torricelli, Gregory obteve resultados muito significativos em séries de potências e processos infinitos em geral, sem abandonar a geometria (BARON, 1985) mas também seguindo a linha de tratamento aritmético de Wallis e adotando os métodos analíticos de Descartes (BOYER, 1959). Como afirmado por Boyer (1974), pelo fim de 1668, Gregory já conhecia e dominava muitos elementos fundamentais que permitiriam a passagem de todas as técnicas infinitesimais desenvolvidas para os processos gerais e algorítmicos do Cálculo, incluindo a oposição das questões de quadraturas e tangentes. É certo que ele conhecia essa relação inversa, chegando a passar diretamente da quadratura de uma curva à tangente de outra na proposição VI de sua obra *Geometriae pars universalis*, de 1668 (BARON, 1985). Tal proposição é considerada a primeira afirmação clara publicada correspondente ao Teorema Fundamental do Cálculo, mas "se Gregory o considerou como "fundamental" é uma outra questão!" (BARON, 1985, p. 44). *Geometriae* foi a primeira obra a reunir de maneira sistemática todas as operações relacionadas a arcos, tangentes, áreas e volumes conhecidas até então (BARON, 1985).

Essa combinação de métodos aritméticos e analíticos de Fermat, Wallis e Gregory, juntamente com sua inserção na geometria, era a tendência que por fim levaria ao Cálculo de fato. Entretanto, alguns de seus contemporâneos davam ênfase à linguagem geométrica, em especial Isaac Barrow.

4.1.13 Isaac Barrow (1630-1677)

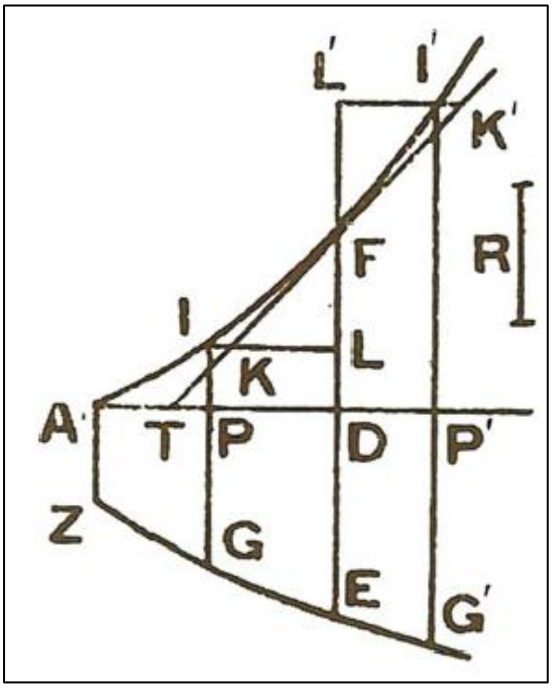
Barrow era um grande seguidor da Matemática praticada na Grécia antiga, dando sempre preferência à geometria para expressar seus resultados e fazendo pouco uso da álgebra que se desenvolveu no século XVII. Usando a visão Euclidiana de que os números não têm sentido se dissociados de quantidades geométricas contínuas, ele afirmava que a aritmética deveria ser incluída na geometria enquanto a álgebra deveria fazer parte do estudo da lógica (BOYER, 1959). Em apenas uma seção de sua principal obra, *Lectiones geometricae*[41] de 1670, ele faz uso de métodos analíticos, em que desenvolve um método de tangentes muito semelhante ao de Fermat[42] – a principal diferença era o uso de duas quantidades pequenas distintas, equivalentes aos modernos Δx e Δy, em vez do E do francês (BOYER, 1974).

Assim como Torricelli, Barrow aplicou conceitos de tempo e movimento ao estudo de curvas e também pôde perceber a relação inversa entre quadraturas e tangentes (EDWARDS, 1979). É verdade que nenhum dos dois conseguiu explorar a relação de modo a torná-la prática para efeitos computacionais e para resolução de problemas de áreas – Barrow teve como obstáculo o fato de expor seus estudos, incluindo inúmeros teoremas sobre quadraturas e tangentes, de uma maneira geométrica e estática, mais próxima dos gregos da antiguidade que das técnicas infinitesimais e analíticas que emergiram no século XVII – mas Barrow foi além do italiano nessa questão. Na proposição 11 da lição X de *Lectiones geometricae*, ele exprime a relação em forma de teorema e apresenta uma demonstração. Tal proposição pode ser considerada uma versão inicial e geométrica do Teorema Fundamental do Cálculo, sendo a primeira[43] prova da relação entre os dois tipos de problema e o reconhecimento mais claro de seu significado até então (BOYER, 1959). Enunciemos a seguir a proposição de Barrow:

---

[41] Segundo Fernández e Rodríguez (2015), *Lectiones Geometricae* foi o primeiro livro de Cálculo a ser escrito.
[42] Aparentemente Barrow não teve contato com a obra de Fermat diretamente, mas pode tê-la conhecido por meio de outros (BOYER, 1974).
[43] Nauenberg (2014) diz que Gregory publicou, em 1668, uma prova geométrica sobre a relação de tangentes e quadraturas similar a de Barrow, mas que o manuscrito do inglês para *Lectiones Geometricae* já estava virtualmente pronto e no processo de publicação antes da obra de Gregory.

Figura 32: desenho original de Barrow.



Fonte: Nauenberg (2014, p. 6).

Seja ZGE uma curva qualquer de eixo AD, com as ordenadas AZ, PG, DE crescendo continuamente a partir da ordenada inicial AZ; seja também AIF uma curva que, se qualquer linha reta EDF for traçada perpendicularmente a AD, cortando as curvas em E e F e AD em D, o retângulo contido por DF e um comprimento dado R é igual ao espaço ADEZ; esteja $\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT}$. *Então a reta TF tocará a curva AIF.* (NAUENBERG, 2014, p. 341, tradução do autor).

Primeiramente, vale explicar que Barrow não considerava coordenadas negativas. O eixo principal *AD*, que seria o equivalente ao atual eixo das abscissas, tem apenas sentido positivo, assim como as ordenadas das duas curvas. Ele estabelece que, a partir de *A*, tanto as ordenadas abaixo do eixo quanto as que estão acima dele tem valores positivos, fazendo isso pela sua necessidade de traçar as duas curvas a partir do mesmo eixo horizontal (FERNÁNDEZ; RODRÍGUEZ, 2015). A curva original *ZGE* determina uma área[44] limitada por ela mesma, pela ordenada inicial *AZ*, pelo eixo *AD*, e por uma outra ordenada qualquer, que no desenho é representada por *DE*. Barrow então define a segunda curva *AIF*: quando *ZGE* "caminha" até uma determinada abscissa, por exemplo *D*, o produto da ordenada correspondente à mesma abscissa em *AIF*, no caso *DF*, pelo comprimento dado *R*, é igual à área "varrida" por *ZGE* até *D*. Em linguagem atual, sendo *ZGE* a curva de uma função $z = f(x)$ e *AIF* a curva de uma função $y = F(x)$, temos:

$$R \cdot y = \int_0^t z \cdot dx$$

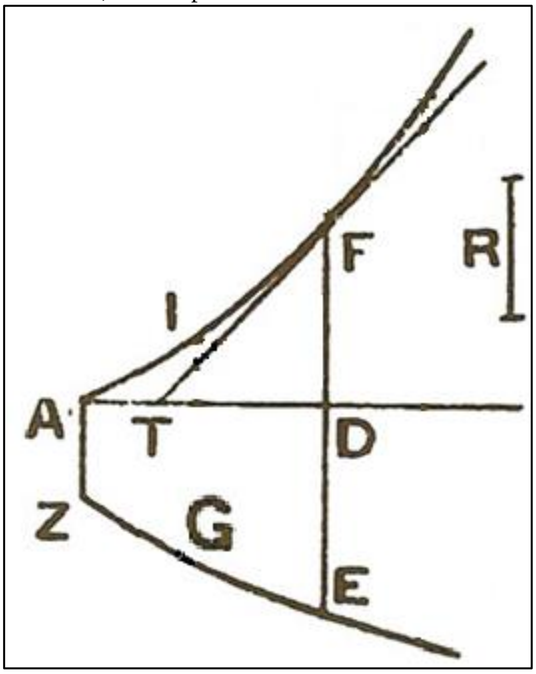
Em outras palavras, a área $ADEZ$ é igual ao produto $R \cdot DF$. Barrow introduz essa constante R pois, seguindo a linha dos gregos, não representa um valor de área por um

[44] Barrow usava a palavra "espaço" para área (NAUENBERG, 2014).

segmento, sendo então necessária outra medida linear para que assim o produto tenha de fato duas dimensões (NAUENBERG, 2014). Mas podemos considerar sua medida unitária, assim a curva AIF será a função área de ZGE, com o valor numérico de cada uma de suas ordenadas sendo exatamente a área de ZGE até a abscissa correspondente, e R servindo realmente apenas para termos uma unidade de medida quadrada. Ainda, ao dizer que “TF tocará a curva AIF”, Barrow está afirmando que TF será tangente a AIF em F.

Alguns pontos e segmentos contidos no desenho não aparecem na proposição, mas estão lá porque são necessários na demonstração. “Pedindo permissão” a Barrow para refazer seu desenho, podemos deixar apenas o que é de fato usado na proposição, de modo a facilitar o entendimento da ideia por ela trazida. Prosseguiremos com a demonstração depois.

Figura 33: curvas, retas e pontos usados no enunciado do teorema.



Fonte: adaptado de NAUENBERG (2014).

A proposição mostra que Barrow sabe que, para traçar uma reta tangente à curva AIF, ele pode usar uma outra curva da qual AIF é a função área, ou seja, sua função derivada, que no caso é ZGE. Querendo traçar a tangente por F, cuja abscissa é D, Barrow usa a ordenada correspondente à mesma abscissa em ZGE, DE, para encontrar o ponto T, definido como aquele em que a seguinte proporção será satisfeita (FERNÁNDEZ; RODRÍGUEZ, 2015):

$$\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT} \iff \frac{DE}{R} = \frac{DF}{DT} \iff DE = \frac{DF}{DT} \cdot R$$

Acontece que DF/DT[45] nada mais é que a taxa de variação da reta tangente à AIF em F, pois equivale a $\Delta y/\Delta x$, e assim também representa a taxa de variação da curva no instante D, equivalente a dy/dx. Ou seja, T deve ser o ponto que torna a inclinação da tangente em F igual à DE, ordenada de ZGE na mesma abscissa de F. Ele reconhece claramente que, sendo AIF a função área de ZGE e, assim, ZGE a função derivada de AIF, ZGE informa o valor da taxa de variação de AIF em cada abscissa. Usando novamente a linguagem atual e adotando a mesma notação definida anteriormente, temos que $DE = z$ e $DF = y$, e a proposição é assim equivalente a (BARON, 1985):

$$R \cdot y = \int_0^t z \cdot dx \;\; \Rightarrow \;\; R \cdot \frac{dy}{dx} = z$$

Em termos atuais, o teorema de Barrow mostra que se integrarmos a função inicial $f(x)$ (curva ZGE) e, depois, derivarmos o resultado $F(x)$ (curva AIF), voltamos a $f(x)$. Isto é, a integração e a derivação são operações opostas, pois uma desfaz a outra. Entende-se então porque a proposição é considerada uma versão preliminar geométrica do TFC: ela diz implicitamente a mesma coisa que a primeira parte do teorema como conhecemos hoje em dia.

Nauenberg (2014) especula como Barrow pode ter chegado até a proporção que determina T, dizendo que o inglês provavelmente usou o argumento, originalmente de Fermat, de que à medida que os pontos I e F se aproximam, ILF se aproxima de um triângulo e cada vez mais se assemelha ao ΔTDF, e então:

$$\frac{DT}{DF} \approx \frac{IL}{FL} \quad (1)$$

Pela figura original (figura 32), $FL = DF - IP$. Pela definição da curva AIF, $DF.R = area(ADEZ)$ e $IP.R = area(APGZ)$, e assim:

$$FL = DF - IP = \frac{area(ADEZ)}{R} - \frac{area(APGZ)}{R} = \frac{area(PDEG)}{R}$$

Mas, à medida que I se aproxima de F, $area(PDEG)$ se aproxima de $PD \cdot DE$, e como $PD = IL$, temos:

[45] O segmento DT é conhecido historicamente como subtangente (FERNÁNDEZ; RODRÍGUEZ, 2015).

$$FL = \frac{area(PDEG)}{R} \approx \frac{PD \cdot DE}{R} = \frac{IL \cdot DE}{R}$$

Substituindo essa aproximação para FL em (1), chegamos a:

$$\frac{DT}{DF} \approx \frac{R}{DE} \Leftrightarrow \frac{DE}{DF} \approx \frac{R}{DT}$$

Quando I está muito próximo de F, essa aproximação se torna uma igualdade e tem-se a proporção estabelecida por Barrow para encontrar o ponto T usando a curva original ZGE.

Barrow então segue com a demonstração a partir da hipótese de que, com o ponto T no eixo satisfazendo a proporção, a reta TF será tangente à curva AIF. Ele divide a prova em duas parte: primeiro, considera os pontos anteriores ao ponto de tangência F, ou seja, aqueles mais próximo de A, e em seguida argumenta para os pontos posteriores a F. Inicialmente, toma-se um ponto qualquer I entre A e F, desenha-se IG paralelo a AZ, cortando o eixo em P, e IL paralelo ao eixo, cortando a tangente em K. Pela semelhança de triângulos e, depois, pela hipótese, temos:

$$\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT} = \frac{DE}{R} \Rightarrow R \cdot LF = LK \cdot DE$$

Como explicado anteriormente, $R \cdot LF = area(PDEG)$, e assim $LK \cdot DE = area(PDEG)$. Como a área $PDEG$ está contida no retângulo $PD \cdot DE$, $area(PDEG) < PD \cdot DE$. Como $PD = IL$, temos $area(PDEG) < IL \cdot DE$ e assim:

$$LK \cdot DE < IL \cdot DE \Rightarrow LK < IL$$

O que Barrow mostrou foi que, como a curva original ZGE é crescente e, assim, AIF é convexa em relação ao eixo, qualquer ponto I entre A e F leva a $LK < IL$, o que significa que até o ponto de tangência a reta TF fica sempre abaixo da curva AIF, sem tocá-la ou cruzá-la em outro local (NAUENBERG, 2014). Fernández e Rodríguez (2015) afirmam que um argumento completamente análogo é feito para os pontos após F usando I', K', L', P' e G', mostrando dessa vez que um ponto qualquer I' levará a $L'K' > I'L'$ e, assim, a TF continuará abaixo AIF após tangenciá-la, novamente sem tocá-la ou cruzá-la. O autor também diz que, para o caso de ZGE decrescente, Barrow indica que a única diferença existente é AIF sendo côncava em relação ao eixo, mas que se chega à mesma conclusão usando um processo semelhante.

Guicciardini (2009) afirma que Barrow apela para quantidades infinitesimais em provas de outros teoremas de sua obra, justificando seu uso por tornarem o processo mais simples e breve e apontando a possibilidade de se usar, caso desejado, o rigor de reduções ao absurdo nos mesmos resultados. No entanto, especificamente sobre a proposição abordada acima, Nauenberg (2014) diz que a demonstração é matematicamente rigorosa e não apela aos infinitésimos, muito utilizados no século XVII mas ainda não bem entendidos e fundamentados do ponto de vista lógico. Fernández e Rodríguez (2015) apontam duas ideias implícitas na proposição de Barrow: primeiro, o fato de a função inicial ZGE ter que ser contínua, algo que Barrow não afirma e que estava além de seu tempo mas que é necessário já que ela possui uma função área, ou seja, é integrável; segundo, a aditividade dessa função área.

Lectiones geometricae, juntamente *Geometriae pars universalis*, acabaram sendo os livros-texto mais usados para cursos de Cálculo na forma geométrica, e muitas de suas proposições poderiam ser traduzidas para a forma algébrica (BARON, 1985). Entretanto, Baron (1985) afirma ser difícil considerar o material como Cálculo de fato, pois não contém nem a notação apropriada nem as regras algorítmicas dessa área da Matemática. Depois de preparar a obra para publicação, Barrow a entregou para revisão a seu aluno e substituto (por sua indicação) no cargo de *Lucasian Professor* de Cambridge, Isaac Newton, e passou a se dedicar somente à Teologia (BOYER, 1974).

Historicamente, Barrow parece ter recebido importância mais significativa na virada para o século XX, quando alguns estudiosos passaram inclusive a considerá-lo um precursor do Cálculo (MAHONEY, 1990). Em particular, o historiador matemático J. M. Child chegou a defender, em 1916, a tese de que Barrow foi o primeiro inventor do Cálculo, afirmando que ele deu a Newton as ideias principais da nova área da Matemática e que Leibniz, ao comprar uma cópia de *Lectiones geometricae* em 1673, confirmou suas próprias intuições iniciais e obteve sugestões para desenvolvê-las (GUICCIARDINI, 2009). Guicciardini (2009) afirma ainda que a proposição 19 da lição XI, que trata de áreas, pode ser interpretada como um como complemento da proposição 11 da lição X discutida anteriormente, e que as afirmações de Child sobre a prioridade de Barrow no Cálculo são baseadas também nesses dois resultados, que seriam para ele uma versão inicial completa do TFC. No entanto, existem muitas críticas a essa visão, que certamente não é adequada.

Segundo Guicciardini (2009), as duas proposições aparecem em lições separadas com papéis independentes, sem receber grande ênfase. Barrow não as relacionou uma com a outra e não as traduziu em um algoritmo para o cálculo de área em termos de antiderivadas, e assim o que em essência se torna parte do Teorema Fundamental do Cálculo acaba não sendo fundamental para Barrow (MAHONEY *apud* GUICCIARDINI, 2009). Mahoney (1990) afirma ainda que pesquisas históricas posteriores sobre outros matemáticos, como Descartes, Fermat, Torricelli e Cavalieri, mostraram que Barrow os usou como fonte e pouco acrecentou aos seus trabalhos. Assim, sua principal importância está mais em coordenar o conhecimento disponível em sua época para ensino e uso posterior que em introduzir novos conceitos (WHITESIDE *apud* NAUENBERG, 2014). Além disso, outras questões afastam Barrow de um papel mais fundamental no desenvolvimento do Cálculo: sua influência nos trabalhos de Newton e Leibniz foi apenas uma pequena parte da grande literatura matemática que eles usaram – e, obviamente, nenhum dos trabalhos consultados tem tamanha grandiosidade quanto as contribuições originais dos dois (GUICCIARDINI, 2009); e ele recusava-se a fazer uso de novos conceitos essenciais ao Cálculo, como métodos analíticos mais dinâmicos e simbologia algébrica (MAHONEY, 1990). Baron (1985) até dá a Barrow crédito pela versão inicial do TFC, mas nega que isso o permitiu "ter o Cálculo" antecipadamente justamente pelo seu modo predominantemente geométrico e estático de expressão.

Por seguir tradições gregas ao abordar novos métodos de quadraturas e tangentes, Mahoney (1990) coloca Barrow em algum lugar da Matemática entre os antigos e os modernos e, apesar de não poder ser considerado de fato um dos criadores do Cálculo, podemos afirmar que Barrow se mostrou um matemático muito competente e conhecedor dos vários trabalhos de sua época. Especificamente sobre o TFC, ele "[...] parece ter reconhecido claramente a relação inversa entre os problemas de tangentes e de quadraturas" (BOYER, 1974, p. 285), mas sua abordagem conservadora e geométrica não o permitiu ir mais longe e fazer da relação uma ferramenta eficaz. Guicciardini (2009) afirma que a obra de Barrow na verdade indica que ele nem mesmo estava em busca de métodos algorítmicos e algébricos. Segundo o autor, o objetivo do inglês aparentemente era mostrar de uma maneira mais geral algo que já havia aparecido em curvas específicas: as relações entre proposições sobre áreas curvilíneas e proposições sobre tangentes. Como técnicas algébricas para lidar com curvas mais complexas ainda estavam por ser desenvolvidas, em particular pelo seu aluno Newton, Barrow tinha na Geometria a linguagem geral apropriada para expressar seus teoremas sobre áreas e tangentes, independente da possibilidade ou não de representação algébrica (GUICCIARDINI, 2009). Isso também ajuda a explicar a crença de Barrow na superioridade da Geometria sobre a Álgebra.

Por último, sabe-se que a presença de Barrow em Cambridge de fato contribuiu para a formação das primeiras ideias matemáticas de Newton. Os dois trocaram ideias durante os anos de formação de Newton e parecem ter sido bem próximos em algum momento (FEINGOLD *apud* GUICCIARDINI, 2009). Guicciardini (2009) afirma que o próprio Newton atribui a

Barrow grande papel como seu mentor. Leibniz também teve contato com o trabalho de Barrow, pois realmente comprou uma cópia da obra do inglês em visita a Londres e apresentou, em 1693, uma prova geométrica para o TFC similar a de *Lectiones geometricae* (NAUENBERG, 2014). Mas tanto Leibniz como Newton seguiram uma linha de raciocínio diferente e foram muito além, desenvolvendo o Cálculo de uma forma analítica que levou a diversas aplicações e, no caso de Leibniz, usando a poderosa notação que é adotada até hoje (NAUENBERG, 2014).

4.1.14 Newton e Leibniz

É de grande importância destacar que considerar Newton e Leibniz os pais do Cálculo não significa dizer que métodos efetivos para os problemas de áreas e tangentes foram descobertos apenas a partir deles (EDWARDS, 1979), tampouco que não houve muitas contribuições anteriores. Como afirmado por Baron (1985), o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal trilhou um caminho longo e irregular. Os trabalhos aqui expostos, entre tantos mais, mostram que problemas relacionados a essa área vinham sendo investigados e resolvidos com algum sucesso desde a Grécia antiga – em especial com Arquimedes – e viram maior avanço no final do século XVI e durante o século XVII, quando a Matemática já estava mais desenvolvida e havia assim a possibilidade de descoberta e criação de novos métodos de resolução. “[...] as descobertas no cálculo estavam se acumulando mesmo antes da obra de Newton” (BOYER, 1974, p. 274).

A partir da mente de grandes matemáticos modernos, como Cavalieri, Descartes, Fermat, Gregory e outros, houve aumento significativo de resultados alcançados. Não à toa, em carta de 1676 Newton escreveu: “se vi além foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes” (SONAR, 2018). Essas soluções que antedatam Newton e Leibniz, no entanto, foram obtidas a partir da aplicação de métodos específicos e individuais para cada uma das questões, com alguma pouca generalização para casos de funções polinomiais. Mas o grande número de trabalhos apontou para a possibilidade do advento de um modelo padrão que, a partir do estabelecimento de uma estrutura e linguagem unificadas e organizadas, pudesse generalizar os procedimentos e evitar passagens intermediárias específicas para cada questão (BARON, 1985). Como afirmado por Edwards (1979), entre essa particularidade para problemas individuais e os métodos para a resolução de uma inteira classe de problemas, hoje talvez nós enxerguemos apenas uma pequena lacuna, mas que acabou ficando aberta pois, por mais brilhantes que fossem, os matemáticos dos quais falamos não viram razão para tentar preenchê-la.

Essa lacuna está ligada à diferença entre a mera descoberta ou percepção de um importante conceito matemático e o reconhecimento de que ele é de fato importante (EDWARDS, 1979). Nesse caso, trata-se da relação inversa entre problemas de áreas e tangentes, hoje integração e diferenciação, estabelecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Tal relação esteve implícita em resultados do começo do século XVII, quando possivelmente foi percebida por alguns matemáticos, e veio a ser de fato reconhecida um pouco mais tarde por outros, como Torricelli e Barrow – este último, como mostrado, chegou a enunciá-la em forma de proposição geométrica. Entretanto, nenhum deles parece ter visto grande importância na relação e assim não puderam perceber que ela traria a base para uma inteira nova área da Matemática. Por exemplo, vimos que Fermat desenvolveu um método semelhante à derivada, o que faz com que alguns autores, como Boyer (1974), achem razoável saudá-lo como descobridor do Cálculo Diferencial. O francês, porém, não criou nenhuma notação específica e nem mesmo deu um nome ao seu resultado, o que mostra que ele não viu naquilo uma ferramenta mais geral e poderosa. Por isso, alguns outros autores como Edwards (1979) dizem ser equivocado dar o crédito dessa área da Matemática a Fermat.

Por outro lado, Newton e Leibniz não apenas perceberam o TFC, mas também viram nele grande significado, explorando-o e usando-o para transformar as técnicas infinitesimais em um poderoso instrumento para cálculos sistemáticos e algorítmicos, criando nomes e notações específicas para cada conceito utilizado e estabelecendo assim um novo campo para o progresso da Matemática e de suas aplicações (EDWARDS, 1979). É por essas contribuições que ambos são adequadamente chamados de pais, descobridores ou até mesmo inventores do Cálculo Diferencial e Integral, "ainda que o cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens" (BARON, 1985, p. 5).

4.1.15 Isaac Newton (1642-1727)

Newton nasceu no Natal de 1642 e desde criança mostrava talento para a ciência. Em 1661 ingressou no Trinity College, na universidade de Cambridge, e não demorou muito para que tivesse contato com as obras de, entre diversos outros autores, Descartes, Kepler, Viète, Fermat e, em especial, com a *Arithmetica Infinitorum* de Wallis, aquela que certamente mais o influenciou (BOYER, 1979). Soma-se isso à motivação provinda da relação com Barrow e, pelo fim de 1664, Newton já possuía profundo conhecimento matemático, inclusive das ferramentas analíticas necessárias para transformar os resultados geométricos de seu professor em poderosos algoritmos, e estava preparado para dar suas próprias contribuições (BOYER, 1959). Ele ficou em isolamento durante boa parte dos anos de 1665 e 1666 devido a uma nova onda da peste bubônica que atingiu a Inglaterra (Grande Peste de Londres), e foi nesse período que ele desenvolveu três de seus mais importantes estudos: a lei da gravitação, a natureza da luz e o Cálculo (EDWARDS, 1979). Em 1669 substituiu Barrow como *Lucasian Professor* em Cambridge, cargo que ocupou até 1696, e veio a falecer em 1727, tendo um velório digno de reis.

Edwards (1979) afirma que na época de Newton ainda não existiam muitos periódicos voltados à Matemática pura. Muitas de suas descobertas nessa área acabaram então não sendo publicadas durante sua vida, e ficaram conhecidas pelos seus contemporâneos por meio de cartas e manuscritos privados. Newton deixou aproximadamente 5000 páginas de material matemático não publicado, o que exigiu, por séculos, grande esforço para organização sistemática (EDWARDS, 1979).

A obra mais influente para Newton foi *Arithmetica Infinitorum*. Nela, Wallis fez uso de somas infinitas para calcular áreas limitadas por curvas, traduzindo esse estudo, até então feito de maneira predominantemente geométrica, para a linguagem aritmética. Entre as curvas estavam algumas descritas por potências de binômios, com resultados generalizados para expoentes inteiros positivos por meio de sua técnica tabular de interpolação e com o auxílio do triângulo de Pascal. Com papel fundamental da notação de Descartes, Wallis tinha também estudado expoentes fracionários de maneira mais profunda (citando, por exemplo, que $\sqrt{8} = 2^{3/2}$ e $1/\sqrt{3} = 3^{-1/2}$), mas suas tabelas e fórmulas de binômios tinham um formato que não permitia a simples substituição de expoentes inteiros por racionais (EDWARDS, 1979). Coube a Newton o papel de expandir a generalização para outros expoentes, usando o trabalho de Wallis como base para a formulação, no inverno de 1664-1665, de seu primeiro estudo matemático relevante (GUICCIARDINI, 2009): o teorema binomial, que permitiu a expansão de potências de binômios em séries infinitas, incluindo aquelas com expoente fracionários e/ou negativos.

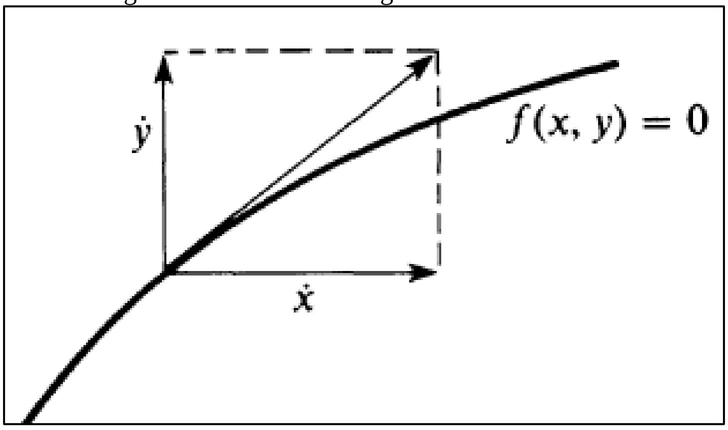
De início, o uso de séries infinitas sofreu muitas críticas e gerou dúvidas sobre qual comportamento teriam quando submetidas às operações algébricas, pois não se sabia se sua manipulação seguiria as mesmas regras de expressões finitas ordinárias. Boyer (1974) diz que, durante o desenvolvimento do teorema binomial, Newton confirmou que elas estavam sujeitas às mesmas leis gerais que a álgebra das quantidades finitas, e que essa descoberta foi mais importante que o próprio teorema. Edwards (1979) afirma que esse estudo de Newton foi o evento central para a "legalização" do uso das séries infinitas, e também destaca que esse é mais um exemplo do processo de descoberta que muitas vezes precede demonstrações formais, já que Newton não deu uma prova rigorosa para o teorema. Uma série passou então a ser de fato considerada como outra forma de representar uma função, continuamente se aproximando dela a cada parcela acrescentada e sendo igual se prolongada infinitamente (BOYER, 1974). Entre os contemporâneos de Newton, os métodos que necessitavam de manipulação e operação com séries infinitas e quantidades infinitamente pequenas passou a ser conhecida como nova análise (GUICCIARDINI, 2009).

As séries tiveram grande importância para o Cálculo, pois os novos métodos de áreas e tangentes poderiam agora ser aplicados à curvas de equações mais complexas, bastando para isso expandi-las e depois, em linguagem atual, diferenciar ou integrar termo a termo (EDWARDS, 1979). Mas ainda em 1665 Newton descobriu uma abordagem ainda mais poderosa para as quadraturas, baseada na relação inversa entre áreas e tangentes (GUICCIARDINI, 2009). Essa abordagem, juntamente com outras ideias desenvolvidas em 1665-1666, foi introduzida e desenvolvida por Newton em seu manuscrito conhecido como “O Tratado Sobre Fluxões de Outubro de 1666” que, embora só publicado muito mais tarde, certamente ficou conhecido entre alguns matemáticos ingleses (EDWARDS, 1979). Nele, Newton mostra suas primeiras ideias relacionadas ao Cálculo.

Segundo Edwards (1979), Newton considera uma curva $f(x, y) = 0$ como a interseção de duas linhas em movimento. Ele então dá ambas as coordenadas em função de um parâmetro, no caso o tempo, usando uma expressão para cada (o que hoje chamamos de parametrização da curva). Assim, x e y são funções do tempo que representam a distância percorrida em linha horizontal e vertical por dois pontos A e B em um mesmo intervalo de tempo, sempre satisfazendo a lei algébrica da curva. Geometricamente, as coordenadas de um ponto específico então representam a localização dos pontos em um determinado instante, com cada um deles tendo uma velocidade instantânea horizontal e vertical, representadas inicialmente por Newton como p e q. Pela lei do paralelogramo para soma de vetores[46], Newton calculava o vetor velocidade, tangente àquele ponto da curva (figura 34). As velocidades p e q, que passaram a ser representados por Newton pelos símbolos $\dot{x}$ e $\dot{y}$ um pouco mais tarde, eram as derivadas de x e y em relação ao tempo, e a razão entre $\dot{y}$ e $\dot{x}$ fornecia a inclinação do vetor velocidade e, assim, da reta tangente.

[46] A lei era bem conhecida para vetores que representavam velocidades constantes, e foi aplicada por Newton às velocidades instantâneas (EDWARDS, 1979).

Figura 34: método das tangentes de Newton.



Fonte: Edwards (1979, p. 192).

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

Newton via duas grandes vantagens em interpretar curvas a partir da ideia de movimento (GUICCIARDINI, 2009): primeiro, as noções de limite necessárias para o cálculo de tangentes e áreas tinham um fundamento mais rigoroso a partir da continuidade do movimento; segundo, contribuía para a aplicação da Matemática como linguagem de descrição dos fenômenos naturais do mundo. O procedimento em si era similar ao publicado por Barrow em 1670, mas Newton pôde usá-lo como algoritmo geral graças ao seu método das séries infinitas em expoentes fracionários (BOYER, 1974). Com o símbolo *o* representando um intervalo de tempo infinitesimal, Boyer (1974) traz como exemplo a curva $y^n = x^m$, e diz que Newton encontraria sua inclinação a partir de $(y + oq)^n = (x + op)^m$, expandindo os membros em séries, dividindo tudo por o e desprezando os termos restantes que ainda tivessem o.

A questões opostas também são abordadas por Newton: encontrar a relação entre x e y tendo de início a expressão que relaciona x e a razão $\dot{y}/\dot{x}$ – o que agora chamamos de antiderivação, com o caso geral $h(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$ sendo uma equação diferencial. Em dois problemas ilustrativos de seu tratado de 1666, Newton discute como o cálculo de áreas pode ser feito em termos da antiderivada. Segundo Edwards (1979), essa é a primeira aparição do Teorema Fundamental do Cálculo de uma maneira direta e explícita. Sendo A a área abaixo da curva $y = f(x)$, temos:

$$\boxed{\frac{dA}{dx} = y}$$

Isso possibilitou uma abordagem algorítmica para o cálculo de áreas abaixo de curvas, que anteriormente vinha sendo feito predominantemente por meio de indivisíveis. A curva era primeiramente considerada como taxa de variação da área, e a área era calculada em seguida pela antiderivação. Juntando essa técnica ao seu método de tangentes, Newton pôde deixar claro pela primeira vez a precisa natureza inversa entre problemas de tangentes e problemas de áreas. A introdução e exploração do TFC, que levou aos métodos algorítmicos gerais e sistemáticos, foi justamente o que constituiu a “descoberta do Cálculo” por Newton (EDWARDS, 1979). “Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral [...]” (BOYER, 1974, p. 292).

Newton prosseguiu com os estudos e compôs em 1669 a obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que também tratava de sua nova análise e apresentava uma exposição mais sistemática do seu Cálculo. A obra foi publicada apenas em 1711 (BOYER, 1974). Nela, já lidando diretamente com funções explícitas de x, Newton deixa de usar p e q e adota apenas o para representar uma variação infinitesimal da variável independente. Boyer (1974) afirma que Newton acha a área z sob a curva $y = ax^{m/n}$ da seguinte maneira:

$$Suponha\ z = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}$$

Acrescentando uma variação infinitesimal o à abscissa x, a área z será aumentada em oy:

$$z + oy = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{(m+n)/n}$$

Nesse momento, Newton usa seu teorema binomial, cancela termos iguais que aparecem nos dois membros, divide tudo por o e descarta termos que ainda o possuem. Assim, ele obtém a expressão $y = ax^{m/n}$. Logo, se a taxa de variação instantânea de z é igual a y, reciprocamente a área abaixo da curva y é igual a z. Repare que ele faz a prova desejada fazendo proveito da oposição entre área e o método de tangentes. Sobre isso, Boyer afirma:

> Parece ser essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos diferenciação, embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita. (BOYER, 1974, p. 291).

Newton continuou a escrever sobre seu Cálculo e em 1671 redigiu sua mais popular obra específica dessa área, *De methodis serierum et fluxionum*. É nesse longo tratado que os métodos sobre tangentes e áreas desenvolvidos anteriormente são sistematizados

(GUICCIARDINI, 2009). Newton define claramente quantidades geradas por movimento (*fluxo*) como *fluentes*, suas velocidades instantâneas como *fluxões*, e acréscimos infinitamente pequenos como *momento do fluente*. A notação usada ainda era confusa, já que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para passaram a ser usados para representação dos *fluxões* apenas na década de 1690. Em alguns problemas, x e y também poderiam ser considerados *fluxões*, e nesses casos seus respectivos fluentes seriam $\acute{x}$ e $\acute{y}$. Aumentando os pontos e linhas de cada representação ele poderia considerar *fluxões* de *fluxões* ou *fluentes* de *fluentes* (BOYER, 1974). Newton ainda escreveu uma outra exposição de seu Cálculo em 1676, intitulada *De quadratura curvarum*, que tem como principal destaque uma aproximação do conceito de limite. Foi publicada apenas em 1704, como apêndice da obra *Opticks* (EDWARDS, 1979). Como dito anteriormente, Newton não se preocupou muito em publicar obras sobre Cálculo, e a primeira exposição impressa contendo seus estudos nessa área apareceu em 1687, no "mais admirado tratado científico de todos os tempos" (BOYER, 1974, p. 292), *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

O Cálculo foi apenas uma das contribuições de Newton para o mundo científico. Entre tantas e tantas outras, podemos citar por exemplo a generalização e esclarecimento das ideias de Galileu sobre movimento, que passaram a ser conhecidas então como leis de movimento de Newton. O inglês também convenceu a todos sobre a veracidade do enunciado de que dois corpos se atraem com força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. A nocão da proporcionalidade entre as massas já era conhecida, mas Newton era o único capaz de entender e manejar a matemática necessária à demonstração. Destacam-se ainda contribuições para a Geometria Analítica e para o Cálculo Numérico (BOYER, 1974).

4.1.16 Gottfried Leibniz (1646-1716)

Nascido em Leipzig, Leibniz estudou, além da Matemática, Direito, Filosofia e Teologia, o que o faz às vezes ser considerado o último sábio universal. Após obter seu doutorado em Filosofia em 1667, entrou para o serviço diplomático da Alemanha e pôde viajar por diversos países, tornando-se um influente representante do governo (BOYER, 1974). Interessou-se pela Matemática ainda como jovem estudante, quando investigou alguma propriedades numéricas simples e chegou até mesmo a publicar, em 1666, um tratado sobre combinações e permutações. Começou seriamente seus estudos um pouco mais tarde, em 1672, quando passou a morar na França por conta de uma missão diplomática. Lá, conheceu o holandês Christiaan Huygens (1629-1695), matemático e cientista importante do século XVII que teve grande papel em sua relação com a Matemática. Viveu em Paris durante os quatro anos seguintes, e foi nesse período de tempo, considerado como auge de suas pesquisas, que desenvolveu as principais ideias de sua versão do Cálculo (EDWARDS, 1979). Seus estudos nessa área ocorreram aproximadamente oito anos após os de Newton, mas em contrapartida sua primeira publicação sobre o Cálculo aconteceu em 1684, antecedendo o inglês. Durante missão política na Inglaterra em 1673, comprou um exemplar de *Lectiones Geometricae* de Barrow e tornou-se membro da *Royal Society*. Dois anos antes de sua morte compôs a obra *Historia et origo calculi differentialis* (História e Origem do Cálculo Diferencial), onde disse que, apesar desse novo tipo de análise matemática ter sido adequadamente popularizado e explicado, era necessário também conhecer suas origens, fontes e motivações originais, visando principalmente promover a arte da descoberta (EDWARDS, 1979).

Edwards (1979) afirma que Leibniz tinha como objetivo de vida criar uma linguagem universal, um sistema de símbolos que universalizasse todas as correntes de pensamento lógico humano. O autor diz também que esse objetivo precede os interesses de Leibniz em Matemática, mas ressalta que um homem que tem esse tipo de busca em sua mente certamente possui a ciência exata correndo em suas veias. E, de fato, foi apenas e justamente na Matemática que Leibniz conseguiu cumprir essa meta. Seu Cálculo Infinitesimal é o perfeito exemplo de uma notação e simbologia em completa sintonia com o assunto ao qual pertence e com os processos e ideias que deseja exprimir. A terminologia empregada pelo alemão contribuiu para o sucesso de sua abordagem ao Cálculo sobre a de Newton durante o século XVIII e é usada até hoje. O triunfo de sua notação pode ser medido pelo fato de a usarmos quando discutimos os métodos de estudiosos que precederam o alemão, incluindo o próprio Newton (EDWARDS, 1979).

Pouco depois de chegar a Paris, Leibniz percebeu um fato interessante sobre sequências numéricas (EDWARDS, 1979): dada uma sequência qualquer e formando-se a sequência das diferenças entre termos consecutivos da sequência dada, a soma das diferenças é igual à diferença entre o primeiro e último termos da sequência original.

$$Seja \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \quad e \quad d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \;\; em\, que \quad d_i = a_i - a_{i-1}; \quad então$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = a_n - a_0$$

Edwards (1979) exemplifica a propriedade dizendo que Leibniz observou que a sequência das diferenças entre quadrados perfeitos é a sequência dos números ímpares, já que $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & \dots & (n-1)^2 & & n^2 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & \dots & & 2n-1 & \end{array}$$

Assim, a soma dos n primeiros números ímpares será n^2:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2 - 0 = n^2$$

Esse resultado sugeriu a Leibniz a possibilidade de obter a soma dos termos de uma série infinita, sendo para isso necessário, primeiro, considerá-la como sequência das diferenças entre termos consecutivos de uma outra sequência e, segundo, saber o primeiro e o último termos dessa sequência. Leibniz mostrou seus resultados sobre somas de diferenças a Huygens, que então o sugeriu tentar encontrar o resultado da soma dos inversos dos números triangulares[47], isto é:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)/2} + \cdots$$

Por conta de seus estudos iniciais sobre números e suas propriedades, bem como sobre análise combinatória, Lebniz tinha familiaridade com números figurados e com o triângulo aritmético de Pascal (EDWARDS, 1979). No triângulo, o *n-ésimo* termo de uma linha é igual à soma dos *n* primeiros termos da linha anterior, o que também significa que o *n-ésimo* termo de uma linha é igual a diferença entre o *n-ésimo* termo da linha seguinte e seu antecessor.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots & & \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \end{array}$$

O triângulo então mostra os números triangulares (terceira linha) como soma de inteiros (segunda linha) e como diferença entre dois números piramidais consecutivos (quarta linha). Edwards (1979) afirma que Leibniz percebeu um caminho para responder perguntas como a que Huygens o fez: partir da sequência do inverso dos inteiros e construir novas sequências a partir de suas diferenças. Assim ele obteve o que chamou de triângulo harmônico.

[47] Este problema apareceu em estudos de probabilidade de Huygens e Hudde (EDWARDS, 1979).

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & &
\end{array}$$

Como os números de cada linha estão em decrescimento (tendem a zero), a possibilidade de somar os termos de uma série infinita vista por Leibniz anteriormente pôde ser interpretada no triângulo harmônico da seguinte maneira: escolhendo uma linha qualquer (exceto a primeira) do triângulo, por definição cada um de seus termos b_n é a diferença entre termos consecutivos a_n e a_{n+1} da linha anterior; logo, se queremos somar os termos da linha escolhida até uma determinada posição n, teremos $a_1 - a_{n+1}$.

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Em particular, como $a_n \to 0$ à medida que $n \to \infty$, a soma dos infinitos termos da linha escolhida será igual a a_1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1$$

Assim, o triângulo harmônico mostra que a soma dos infinitos termos de cada linha, a partir da segunda, é igual ao primeiro termo da linha anterior. Na resolução do problema apresentado por Huygens, Leibniz percebeu que os elementos da segunda linha são a metade do inverso dos números triangulares. Então, sabendo que a soma desses termos era igual a 1 (primeiro termo da linha anterior), bastou multiplicar os dois membros por 2 para chegar à resposta.

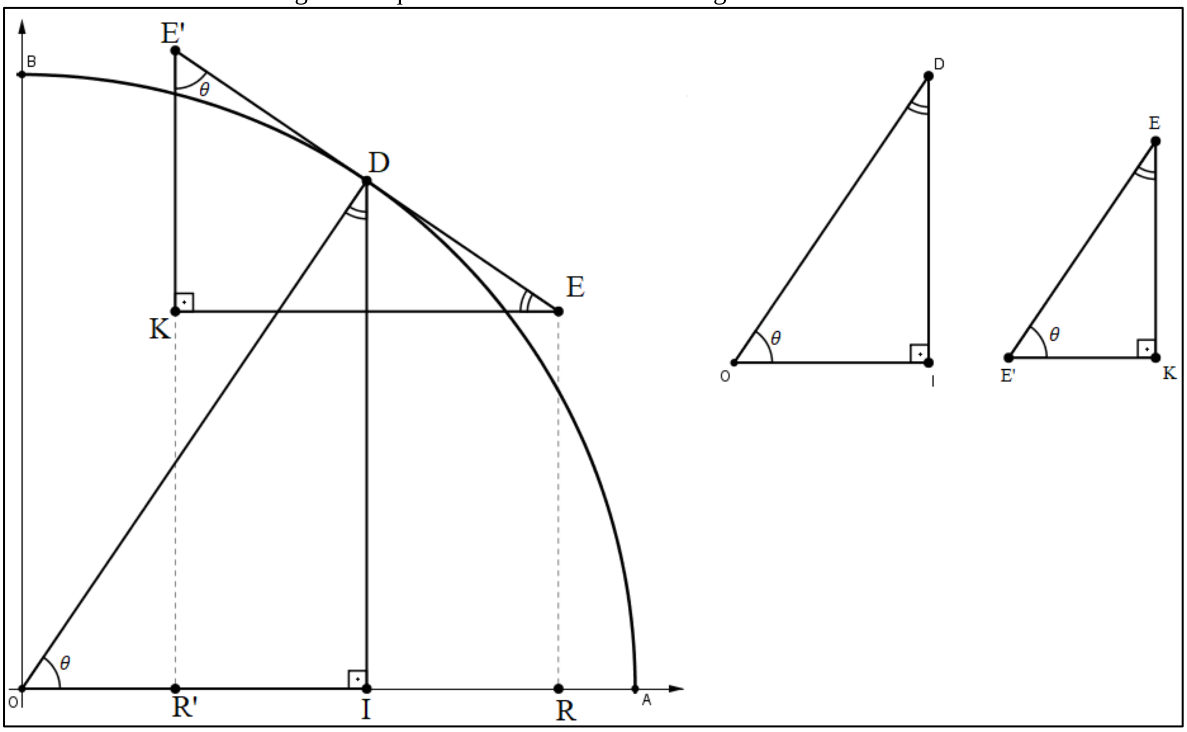
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots = 2$$

Percebe-se que as características e processos de formação do triângulo aritmético de Pascal e do triângulo harmônico possuem um caráter inverso envolvendo somas e subtrações. Edwards (1979) afirma que esse elo entre os dois arranjos de números implantou na mente de

Leibniz a clara concepção da relação de oposição entre as operações de tomar diferenças e somar elementos de uma sequência – e que isso desempenharia um papel dominante e central no seu desenvolvimento do Cálculo.

Foi pouco depois desses estudos acerca de sequências e séries que Leibniz, também por sugestão de Huygens, começou a estudar os trabalhos de seus antecessores e contemporâneos relacionados a áreas e tangentes, em especial o *Tratado sobre as ordenadas de um quarto de círculo* de Pascal. Em *Historia et origo*, Leibniz afirma que uma luz brilhou em sua mente quando entrou em contato com a proposição 1 da obra, em que Pascal conclui que "a soma dos senos (ordenadas) de qualquer arco de um quadrante é igual ao comprimento do eixo horizontal entre os senos extremos multiplicado pelo raio" (EDWARDS, 1979). Abordemos a seguir o procedimento usado por Pascal com base em Sonar (2018): a partir de um quadrante do círculo, traçamos a reta tangente à circunferência em um ponto D qualquer e obtemos os triângulos retângulos semelhantes DOI e $EE'K$, com EE' e EK sendo determinados por uma variação RR' no eixo horizontal (figura 35).

Figura 35: quadrante do círculo e os triângulos semelhantes.



Fonte: elaboração própria a partir de SONAR (2018).

Fazendo $OD = r$, $DI = y$, $EE' = \Delta s$ e $RR' = EK = \Delta x$, usando a semelhança de triângulos (ou o $sen\theta$ nos dois triângulos), temos:

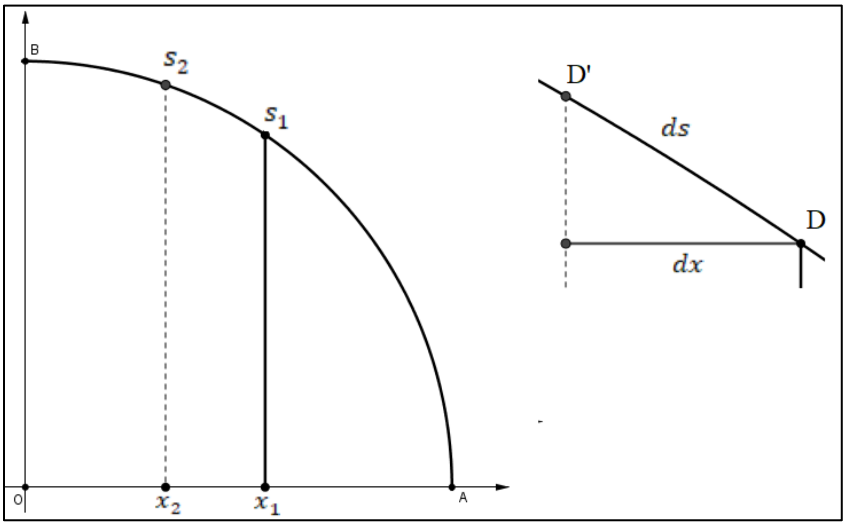
$$\frac{DI}{DO} = \frac{EK}{EE'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{r} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad \Rightarrow \quad y \cdot \Delta s = r \cdot \Delta x$$

A igualdade mostra que o retângulo de medidas y e Δs tem área igual a do retângulo de medidas r e Δx. Sendo o raio r unitário, $y \cdot \Delta s$ tem o valor numérico de Δx. Contando que a reta suporte de EE' seja tangente ao arco (o que é garantindo pela perpendicularidade com o raio) a igualdade continuará válida independentemente do comprimento de Δx e, assim, do seu Δs correspondente, pois os triângulos continuarão semelhantes. Intuitivamente, supõe-se então que, para uma variação infinitesimal no eixo horizontal e o correspondente comprimento de EE', que podemos chamar respectivamente de dx e ds, a igualdade também será verdadeira.

$$y \cdot ds = r \cdot dx \qquad (I)$$

Pascal então usa essa relação para obter o que chama de soma das ordenadas, isto é, a soma $\sum y \cdot \widehat{DD}'$, em que $\widehat{DD}$ é um arco muito pequeno. Assumindo o arco arbitrário $\widehat{s_1 s_2}$ como a soma dos infinitos arcos $\widehat{DD}$ infinitamente pequenos (figura 36), cada um de seus componentes pode ser considerado igual ao segmento infinitesimal ds tangente à curva em D determinado pela mesma variação infinitesimal dx. Assim, teremos:

Figura 36: arco como soma infinita.



$$\sum y \cdot \widehat{DD'} = \sum y \cdot ds$$

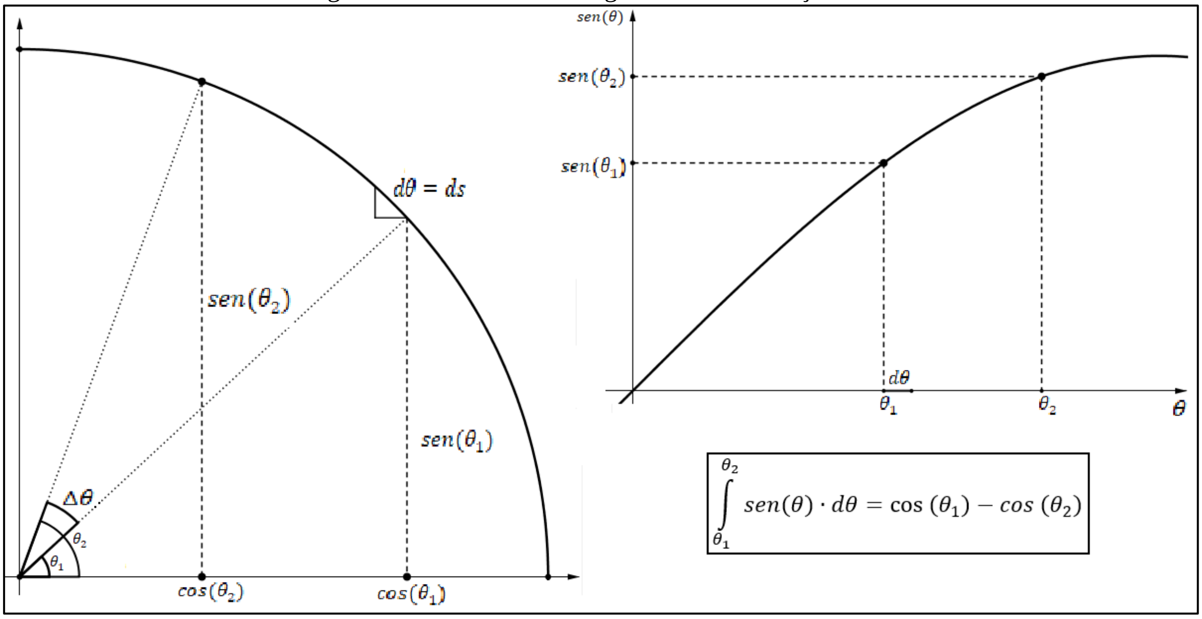
Fonte: elaboração própria.

A soma nesse exemplo arbitrário percorre todo o arco $\widehat{s_1 s_2}$. Usando o sentido matemático positivo, a soma parte de s_1, correspondente à abscissa x_1, e vai até s_2, correspondente à abscissa x_2. Usamos a igualdade (I) para obter o resultado:

$$\sum_{s_1}^{s_2} y \cdot ds = \sum_{x_1}^{x_2} r \cdot dx = r \cdot \Delta x = r \cdot (x_1 - x_2)$$

Para entender a grandeza e importância do resultado, consideremos o raio como unitário. Assim, o ângulo (rad) será exatamente o comprimento do arco que determina, e as abscissas e ordenadas dos pontos sobre a circunferência serão, respectivamente, os cossenos e senos dos ângulos que determinam. Como mostra a figura x a seguir, o comprimento do arco $\widehat{s_1 s_2}$ será a variação $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$, considerada como soma dos infinitos $d\theta = ds$. A desejada soma de todos os $y \cdot ds$ de s_1 a s_2 nada mais é então que a integral de $sen(\theta)$ avaliada de θ_1 até θ_2; sendo o raio unitário, o resultado obtido é apenas $(x_1 - x_2)$, que então é o mesmo que $cos(\theta_1) - cos(\theta_2)$. Pascal obteve a integral definida da função seno (SONAR, 2018).

Figura 37: senos no ciclo trigonométrico e função seno.

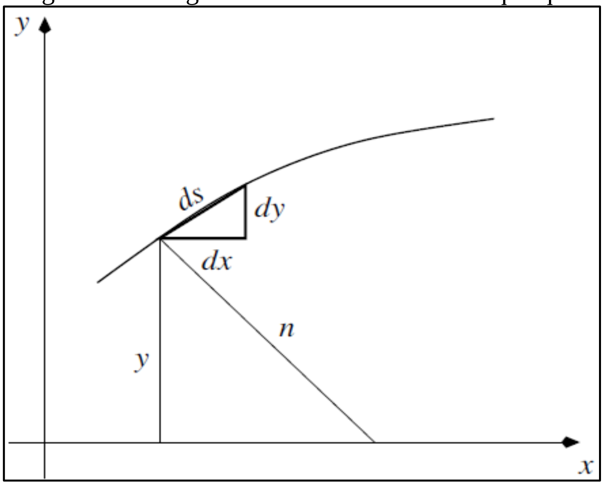


Fonte: elaboração própria.

A luz a que Leibniz se referiu consiste em sua percepção de que o triângulo infinitesimal, chamado por ele de triângulo característico, não era específico do círculo. Ele na verdade pode ser usado de maneira geral, em qualquer curva, com o papel do raio sendo feito pelo segmento normal à curva em determinado ponto[48] (EDWARDS, 1979). Sendo *n* a normal à curva, temos:

[48] Em *Historia et Origo*, Leibniz afirma ter achado estranho que o próprio Pascal não tenha percebido a generalidade do triângulo (SONAR, 2018).

Figura 38: triângulo característico em curva qualquer.



Fonte: Sonar (2018, p. 158).

$$\frac{ds}{dx} = \frac{n}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot ds = n \cdot dx$$

$$\int y \cdot ds = \int n \cdot dx$$

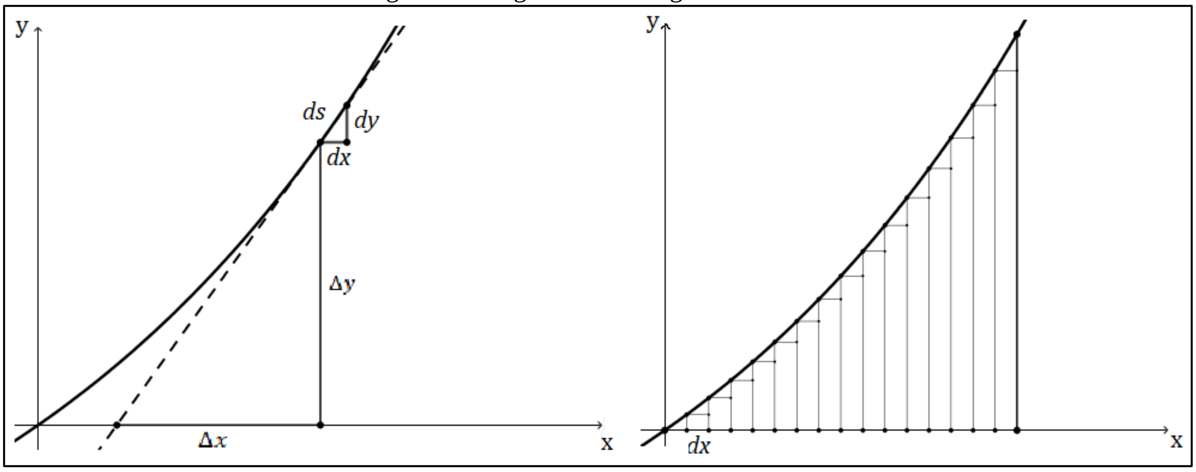
Leibniz a princípio expressou seu resultado geral em forma verbal, pois só criou sua notação dois anos mais tarde em 1675 (SONAR, 2018). Ele afirmou que o momento de uma curva dada em relação ao eixo horizontal é igual à área de uma segunda curva cujas ordenadas são as normais da primeira curva. Nessas investigações de 1673-74, Leibniz não obteve resultados novos, isto é, quadraturas e tangentes que não tivessem sido descobertas por outros e que não fossem já conhecidas (EDWARDS, 1979). Os estudos na verdade têm grande importância pois foi nesse momento que o alemão começou a dar passos em direção à unificação de todos os resultados e técnicas já existentes, saindo de abordagens específicas para uma interpretação mais geral, o que foi possível a partir de seu triângulo característico. Em uma carta escrita duas décadas depois para Guillaume L'Hospital (1661-1704), Leibniz afirma que o uso do triângulo formado pelos elementos das coordenadas e da curva o permitiu chegar a quase todos os teoremas que encontrou em trabalhos de, por exemplo, Barrow e Gregory, em um piscar de olhos (EDWARDS, 1979). Uma aplicação geral do triângulo e da relação obtida, por exemplo, é o cálculo da área da superfície gerada a partir da rotação de uma curva ao redor do eixo x. A multiplicação de $y \cdot ds$ por 2π leva a um elemento infinitesimal dessa área, pois tal elemento equivale a um retângulo de base $2\pi y$ e altura ds. A soma $\int 2\pi y \cdot ds$ fornece a área completa em um intervalo desejado (LAUBENBACHER; PENGELLEY, 1999).

Como afirmado anteriormente, Leibniz tinha o objetivo filosófico de desenvolver uma linguagem simbólica universal que representasse todos os processos racionais e argumentativos, sendo seus estudos matemáticos parte dessa busca maior. Soma-se isso aos estudos sobre sequências, suas somas e diferenças, e também ao triângulo característico, e temos os três principais interesses que permitiram ao alemão criar sua versão do Cálculo (LAUBENBACHER; PENGELLEY, 1999). O triângulo harmônico e a conclusão de que formar sequências de diferenças e somar termos de uma sequência são operações inversas, bem como o contato com trabalhos de Barrow e Pascal, em que versões próprias e específicas do triângulo característico são usados para problemas de tangente e área, respectivamente, levaram Leibniz a fazer uma analogia que o permitiu ligar os dois estudos.

Leibniz reuniu todo esse desenvolvimento em notas manuscritas que escreveu em outubro-novembro de 1675. Dada uma curva descrita em termos de sua abscissa x e ordenada y, ele imagina uma sequência dos infinitos valores que y assume em determinado intervalo, sendo que cada x correspondente determina a ordem da sequência e que a diferença entre ordenadas consecutivos (dy) é infinitesimal e negligenciável se comparada aos próprios valores de y (EDWARDS, 1979). A partir desse momento que passa a usar sistematicamente seus famosos símbolos: $\int$, um s alongado, para somas (integração) e d para diferenciais, isto é, variações infinitesimais (dx, dy, ...), sendo um o oposto do outro, como as sequências mostraram. Prossegue então para a investigação das regras implicadas por sua nova notação, e chega à atual integral por partes. Em 1676 já escreve claramente as regras de diferenciação e integração de potências, e no ano seguinte enuncia e prova as regras do produto e do quociente (EDWARDS, 1979).

Leibniz passou então a usar seu triângulo característico no problema de tangentes: em um determinado ponto de uma curva, a razão entre as variações infinitesimais da ordenada e da abscissa fornece a inclinação da reta tangente à curva naquele ponto, pois a correspondente variação infinitesimal no arco da curva pode ser considerada como a hipotenusa do triângulo, que é semelhante àquele formado pela tangente no ponto e pelas variações correspondentes nos eixos. Passou também a ver uma área como soma de finos retângulos obtidos a partir de variações infinitesimais na abscissa, com os “triângulos” formados entre a curva e cada retângulo podendo ser desprezados por serem infinitamente pequenos se comparados com os retângulos em si (figura 39) (EDWARDS, 1979). A área abaixo de $y = x$ em um certo intervalo $[0, a]$, por exemplo, pode ser expressa por $\int_0^a y \cdot dx$, em que $y \cdot dx$ (ou $x \cdot dx$) é a área infinitesimal de um retângulo; como a área em questão é obviamente um triângulo retângulo isósceles com catetos de medida a, temos que $\int_0^a x \cdot dx = a^2/2$. “Linha retas que continumante crescem a partir de 0, se multiplicadas pelo seu elemento de variação, formam juntas um triângulo”, Leibniz já afirmara em 1673 (EDWARDS, 1979). O mesmo raciocínio pode ser usado para relações do tipo $y = ax$. Essas ideias acabaram por levá-lo à conexão entre áreas e tangentes, para nós atualmente o TFC (LAUBENBACHER; PENGELLEY, 1999). Na verdade, a observação de que a soma de uma sequência de diferenças consecutivas pode ser obtida usando apenas os termos extremos da sequência original, pode ser considerada, em essência, como uma versão discreta do TFC (LAUBENBACHER; PENGELLEY, 1999).

Figura 39: tangente e área segundo Leibniz.



Fonte: elaboração própria.

Em um manuscrito revisado de 1677, o papel do triângulo característico aparece mais claramente (EDWARDS, 1979). Um elemento ds da curva y é uma linha reta infinitesimal que liga dois pontos adjacentes da curva, cujas variações correspondentes nos eixos são dx e dy. Então:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \cdot dx$$

Logo, o comprimento s da curva em determinado intervalo $[a, b]$ será:

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \cdot dx$$

Conclui-se que a retificação da curva y depende da quadratura de outra curva z que satisfaça a relação $z = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$.

Nesse mesmo manuscrito, Leibniz introduz sua versão do TFC (EDWARDS, 1979). Ele afirma que o objetivo é obter a área de uma figura encontrado sua *quadratrix*, isto é, outra curva que tem como ordenadas a área total até a mesma abscissa da primeira (função área). Dada uma curva $z(x)$ que parte da origem (o que comumente Leibniz fazia), deseja-se a área A abaixo dela. Sendo dA um elemento infinitesimal dessa área e, assim, $dA = z \cdot dx$, queremos:

$$A = \int dA = \int z \cdot dx$$

Tendo em mente a analogia com a soma das sucessivas diferenças entre termos de uma sequência, considere a sequência de áreas $z \cdot dx$ de cada um desses retângulos infinitesimais como uma sequência de diferenciais dy de uma outra curva $y(x)$, isto é:

$$dy = z \cdot dx$$[49]

Logo,

$$A = \int z \cdot dx = \int dy = y(x)$$

Assim, $y(x)$ é a função área de $z(x)$, isto é, sua ordenada em determinada abscissa x_1 é igual à área de z partindo de zero até x_1:

$$A = \int_0^{x_1} z \cdot dx = y(x_1)$$

Ao considerar as áreas infinitesimais dos retângulos de z como uma sequência de diferenças de uma outra curva y, Leibniz sabia que a área A desejada, soma de todas as áreas dos retângulos e, então, soma das diferenças, seria dada pela diferença entre o primeiro e último termos da sequência dos valores de y no mesmo intervalo. Como z parte da origem, a área do primeiro retângulo é nula, e assim y também parte da origem; logo, o resultado é apenas $y(x_1)$. Caso a curva não passe pela origem, ou se queira avaliar a área em outro intervalo qualquer $[a, b]$, basta calcular a área compreendida de 0 a b e tirar dela a área compreendida de 0 a a:

$$A = \int_a^b z \cdot dx = y(b) - y(a)$$

Dito isso, como descobrir a função área y necessária? Repare que y é a função que tem como derivada, ou lei de tangência como chamavam na época, a curva z:

$$dy = z \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = z$$

[49] Originalmente, Leibniz escreveu $a \cdot dy = z \cdot dx$, em que a é uma constante certamente incluída por questão de dimensão, ou seja, para que uma área não fosse igualada a um valor unidimensional (EDWARDS, 1979). Podemos então omití-la (ou apenas considerá-la igual a 1) sem perda de entendimentos.

Leibniz concluiu então que um problema de quadratura pode ser reduzido ao problema de encontrar uma curva que tenha como lei de tangência a curva dada, o que chamavam de problema inverso da tangente e que, para nós, seria uma equação diferencial. A princípio, sem as atuais técnicas e regras de integração, a lei da curva y era encontrada por suposições baseadas na experiência com os problemas de tangente (LAUBENBACHER; PENGELLEY, 1999).

A primeira publicação de Leibniz aconteceu em 1684 no periódico alemão *Acta Eruditorum*, sendo relacionado ao seu *calculus differentialis* e sob o nome *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) (BOYER, 1974). Nela, deu ênfase às regras de derivação, máximos e mínimos que obteve em seus manuscritos, bem como definiu dy como uma quantidade tal que, dado um intervalo infinitesimal qualquer dx, dy/dx é igual à inclinação da reta tangete, sendo tangente a linha que conecta dois pontos da curva que estão a uma distância infinitesimal um do outro (EDWARDS, 1979). Dois anos depois, de novo em *Acta Eruditorum*, publicou uma exposição do seu *calculus summatorius*, em que o símbolo $\int$ aparece impresso pela primeira vez (EDWARDS, 1979). Dessa vez, Leibniz deu ênfase à oposição entre diferenciação e integração e mostrou que quadraturas são casos específicos que pertencem ao conjunto dos problemas inversos de tangentes (BOYER, 1974). Após a segunda publicação, Jacques Bernoulli (1654-1705) sugeriu que Leibniz utilizasse o nome *calculus integralis* em vez de *summatorius*, sugestão essa que, pelo nome que usamos hoje em dia, obviamente foi acatada (EDWARDS, 1979). O TFC de Leibniz, escrito por ele no manuscrito de 1677 e discutido anteriormente, apareceu publicado no mesmo periódico em 1693 (EDWARDS, 1979), acompanhado de uma demonstração similar a feita por Barrow.

Os infinitésimos de Leibniz sofreram críticas após as publicações, mas o alemão não se preocupou tanto com discussões sobre o significado (e até mesmo a existência) de quantidade infinitesimais – algo maior que zero, mas menor que qualquer número real. A tradição matemática costuma atribuir a ele a crença na existência de tais quantidades, mas Leibniz não entrou nesse debate e afirmou apenas que, existindo ou não, podem ser usadas para solucionar corretamente e abreviar problemas de maneira geral (EDWARDS, 1979). As explicações foram dadas em um manuscrito não publicado, datado de algum momento após 1700. Edwards (1979) explica que Leibniz considerou seu Cálculo Infinitesimal como uma forma mais rápida e eficiente do método da exaustão dos gregos, com notação mais apropriada e mais útil para a arte da descoberta.

A contribuição mais importante de Leibniz para a Matemática foi sem dúvida o Cálculo, mas ele também explorou outra áreas (além das já mencionadas combinatória e sequências). Por exemplo: generalizou o teorema binomial para o multinomial; contribuiu com aspectos hoje ligados à Álgebra Linear e à Lógica; popularizou, junto com Newton, o sinal de igualdade atual (de Recorde); e fez comentários sobre números complexos (BOYER, 1974).

4.1.17 A disputa e os estudos posteriores

Edwards (1979) aponta algumas diferenças de ênfase que cada gênio deu à sua versão. Primeiramente, Newton tinha como conceito fundamental os fluxões e a taxa de variação instantânea em relação ao tempo, baseado na ideia de continuidade do movimento e enfatizando resultados concretos que pudessem ser generalizados, com pouca preocupação com terminologia. Por outro lado, Leibniz, sempre preocupado com a questão dos símbolos, usou uma notação mais apropriada ao conceito e tornou as duas coisas essencialmente a mesma, partindo de somas discretas para somas contínuas de diferenças infinitesimais e focando em técnicas gerais que pudessem ser aplicadas a problemas específicos.

Newton desenvolveu seus estudos em 1664-1666, mas sua primeira publicação sobre o Cálculo foi apenas em 1687. Anteriormente, tinha apenas mostrado seus manuscritos a colegas na Inglaterra. Os estudos de Leibniz foram posteriores, em 1672-1676, mas suas primeiras publicações antecederam as de Newton, em 1684 e 1686. Isso poderia gerar uma disputa de prioridade pela descoberta da nova análise e pela honraria de descobridor/inventor do Cálculo Infinitesimal, e foi justamente o que aconteceu.

Sonar (2018) afirma que em 1692 Newton tinha a possibilidade de disputa com Leibniz bem clara em sua mente, e no ano de 1695 Wallis disse a ele que na Holanda o Cálculo era considerado uma descoberta do alemão (BOYER, 1974). A partir de então, Leibniz começou a ser atacado por seguidores de Newton, que afirmavam que ele teve contato com ideias do inglês em suas visitas a Londres em 1673 e 1676 e que as usou sem atribuir nenhum crédito (EDWARDS, 1979). Tais acusações aparecem, por exemplo, em um artigo de 1699 do matemático suíço Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753) (BOYER, 1974). Leibniz se defendeu pelo *Acta Eruditorum* em 1704 e fez outros apelos à comunidade científica. A troca de farpas acabou por se transformar em uma acusação formal e pública de plágio contra Leibniz em 1711, e uma comissão julgadora foi formada pela *Royal Society* para resolver a questão. Mas enquanto Leibniz era um mero membro da sociedade, Newton desde 1703 era seu presidente, e certamente sua posição pesou para a decisão final, tomada em 1712, de considerar o acusado culpado (EDWARDS, 1979). Qualquer estudo sério sobre a questão mostra claramente que as respectivas contribuições de cada um foram desenvolvidas de maneira independente, afirma Edwards (1979).

Ironicamente, a vitória na disputa isolou os matemáticos ingleses e terminou por afastá-los do progresso matemático posterior. As grandes aplicações da Matemática a problemas científicos por Newton inspirou muitos avanços no século XVIII, mas estes ocorreram predominantemente pelas mãos de matemáticos da Europa continental que usavam a terminologia e conceituação de Leibniz (EDWARDS, 1979).

> Assim a geração seguinte de matemáticos na Inglaterra pagou um preço pela injustiça praticada pelos seguidores de Newton em relação a Leibniz pois o resultado foi que a matemática inglesa ficou para trás em relação à da Europa continental. [...] apesar do reconhecimento dado ao sucesso matemático na Inglaterra o desenvolvimento matemático lá não acompanhou os passos rápidos dados em outras partes da Europa durante o século dezoito. (BOYER, 1974, p. 303).

O século XVIII foi marcado pela consolidação das grandes descobertas do século anterior e por buscas por aplicações em problemas científicos, ainda com muita intuição e pouco rigor. Por exemplo, Jacques Bernoulli e seu irmão Johann (1667-1748), seguidores imediatos de Leibniz e seus frequentes correspondentes, colaboraram para o desenvolvimento inicial do Cálculo do alemão com livre aceitação dos infinitésimos como entidades matemáticas genuínas (EDWARDS, 1979). Isso colaborou para ainda mais avanços nas técnicas de computação do Cálculo. Além dos irmãos e de outros matemáticos, destaca-se nesse período principalmente o suíço Leonhard Euler (1707-1783). Após a era de Euler, a grande busca dos matemáticos foi pelo estabelecimento de fundamentos formais lógicos para a nova análise, que já estava muito bem estabelecida. Destaque para o alemão Bernhard Riemann (1826-1866) e para o francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Mas essas já são histórias para outro trabalho.

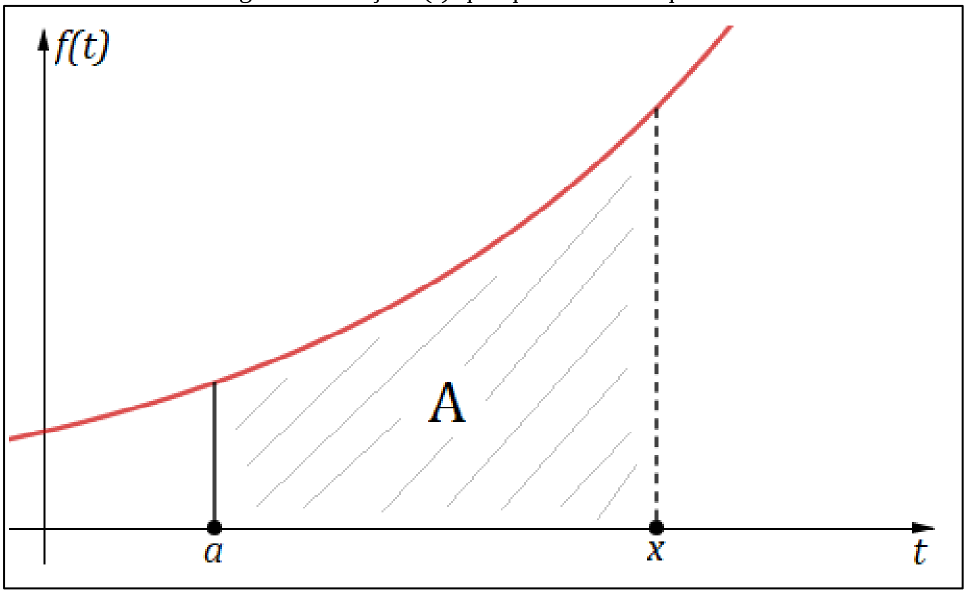
4.2 Interpretação Geométrica

Como a pesquisa histórica mostrou, a visão geométrica de diversos tópicos esteve presente em grande parte do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, em especial após o surgimento da Geometria Analítica. Sem ela, o percurso possivelmente teria mais entraves e a evolução dos conceitos aconteceria de maneira mais lenta.

Mesmo atualmente, é pertinente buscar diferentes interpretações, como a geométrica por exemplo, para um mesmo item matemático. A importância desse outro olhar não reside tanto mais no auxílio que ele traz para a evolução dos conceitos, já que o CDI e suas ferramentas encontram-se hoje bem estabelecidos e desenvolvidos; mas sim na possibilidade de proporcionar maior compreensão do tópico em questão, como defendido por Duval (2003, 2012). Como mostrado anteriormente, sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos diz que o conhecimento de mais de um registro de representação de um mesmo ente, unido à possibilidade de transição entre registros, traz um melhor domínio do conteúdo que está sendo trabalhado. Assim, é apresentada aqui uma interpretação geométrica da relação inversa expressa pelo TFC. Essa diferente visão, além de ir ao encontro da teoria de Duval, fornece uma intuição que pode auxiliar um melhor entendimento da ideia existente no teorema antes do rigor da demonstração.

Primeiramente, considere o gráfico de uma função $f(t)$ qualquer (figura 40). Considere também a área A limitada pelo eixo horizontal, pela curva e pelas retas verticais $t = a$ e $t = x$, sendo a um valor constante fixo e com $x > a$. Variando o valor de x, a posição da reta e o valor da área coberta também irão variar. Assim, a própria área A também pode ser considerada uma função, nesse caso de variável independente x.

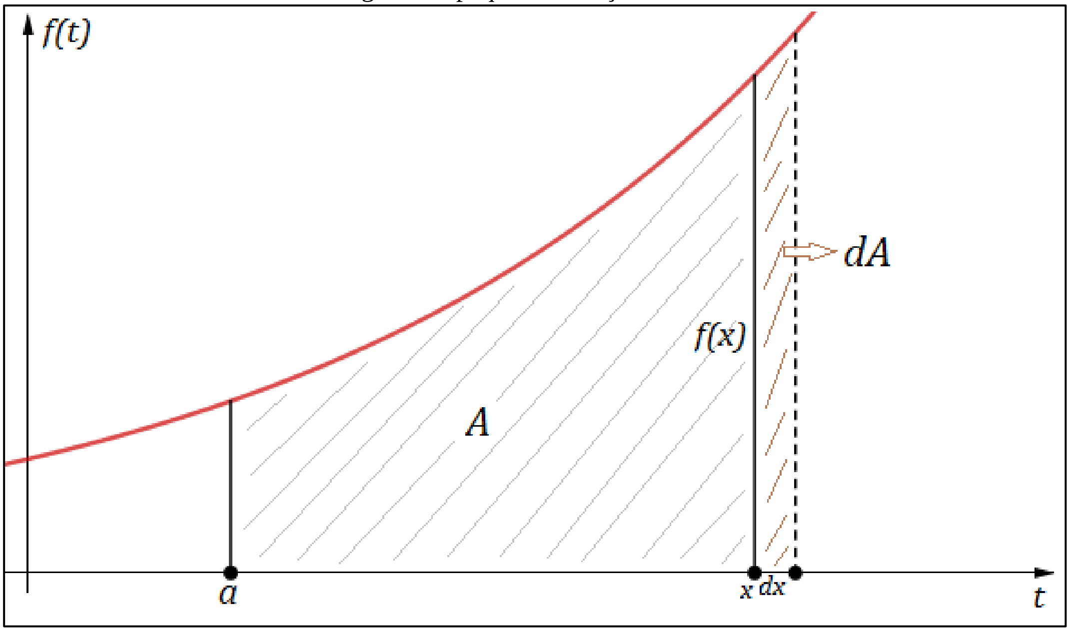
Figura 40: função f(t) qualquere área em questão.



Fonte: elaboração própria.

Digamos agora que deseja-se calcular a variação instantânea dessa área, isto é, saber quanto a área varia quando x tem uma variação mínima, tendente a 0. Podemos convenientemente chamar essa variação de x de dx. Esse pequeno acréscimo em x provoca uma variação dA na área, também tendente a 0. Percebe-se intuitivamente que dA, à medida que x tende a 0, se torna cada vez mais e mais parecida com um retângulo de base dx e altura $f(x)$. Então, a variação instântanea da área é, pela intuição, igual ao retângulo.

Figura 41: pequena variação na área.



Fonte: elaboração própria.

Com uma pequena manipulação na expressão da área do retângulo, chegamos a:

$$dA = f(x) \cdot dx$$
$$\frac{dA}{dx} = f(x)$$

O que a igualdade nos diz é que a taxa de variação instantâneas, ou seja, a derivada da função área em questão é justamente o valor da função f em $t = x$. Acontece que conhecemos bem essa função área: ela é justamente a integral definida de f de a a x. Logo, concluímos intuitivamente que a taxa de variação instantânea da área é a própria curva. Se integramos uma função e depois derivamos o resultado, voltamos à função inicial, e é justamente isso que afirma a primeira parte do TFC. Stewart (2016, p. 348) a enuncia da seguinte maneira:

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$, isto é,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \cdot dt = f(x)$$

Prosseguindo, digamos agora que queira-se calcular de fato a área A abaixo da curva de uma função $f(x)$, limitada pelo eixo horizontal e por um par de retas verticais $x = a$ e $x = b$. Para isso, deve-se resolver a seguinte integral definida:

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Pela intuição que a interpretação geométrica mostrada anteriormente nos deu, sabemos que a derivada do resultado dessa integral será a própria função que está no integrando. Logo, tal resultado deve ser uma *antiderivada* ou *primitiva* de f, isto é, uma função F tal que $F' = f$. Concluímos assim que a função área de f é dada por uma de suas antiderivadas. Então, para calcular a área A, usamos essa antiderivada para encontrar o valor da área coberta até b, isto é, $F(b)$, e subtraímos do resultado o valor da área coberta até a, $F(a)$.

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

A expressão nos diz que podemos calcular A apenas conhecendo uma primitiva de f. Stewart (2016) afirma ser surpreendente que a integral em questão, definida de uma maneira complicada que envolve todos os infinitos valores que $f(x)$ assume no intervalo $[a, b]$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em apenas dois pontos, a e b. Essa é justamente a segunda parte do TFC, que podemos enunciar como segue abaixo (STEWART, 2016, p. 351):

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Além de fornecer uma maneira mais simples de calcular a integral definida, a expressão também nos dá outra informação importante. Como $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b F'(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

> Essa versão afirma que se tomarmos uma função F, primeiro a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez. (STEWART, 2016, p. 353).

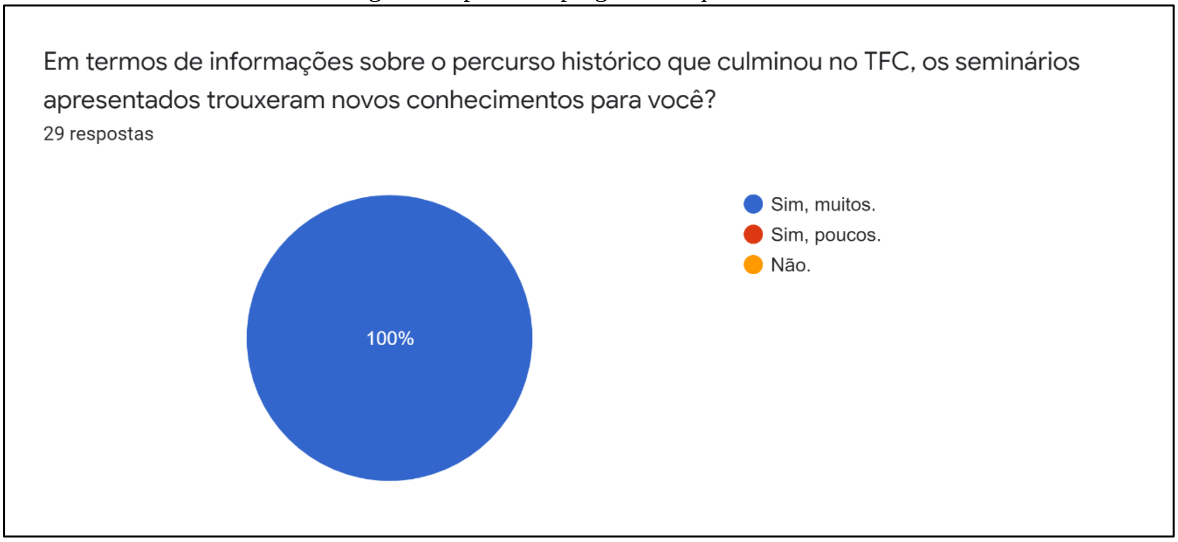
As demonstrações de ambas as partes do TFC podem ser encontradas em Stewart (2016) e também em muitos outros livros de Cálculo Diferencial e Integral. A interpretação aqui abordada não visa, de modo algum, substituir o rigor matemático da prova, mas sim complementá-lo, fornecendo uma outra visão que possivelmente pode contribuir para melhor compreensão da ideia central que o TFC traz.

4.3 Seminário

O seminário aconteceu de maneira remota, pela plataforma *Google Meet*, e foi dividido em dois dias: 30 de março e 1 de abril de 2021, com duração de aproximadamente uma hora e meia cada um. O público foi formado, em sua maioria, por alunos do Instituto Federal Fluminense, mas também houve participação de professores e alunos de outras instituições. O primeiro dia de apresentação contemplou desde os aspectos da Grécia Antiga, passando pelas contribuições árabes, final da Idade Média europeia, Renascimento e modernidade, até os trabalhos de James Gregory no século XVII. A segunda parte teve início ainda na parte história do trabalho, abordando a obra de Isaac Barrow, o momento considerado como início do Cálculo com Newton e Leibniz e suas respectivas ideias e estudos, a disputa ente os dois e o que ficou para a posterioridade; em seguida, foi finalizada com a interpretação geométrica que podemos dar ao TFC atualmente.

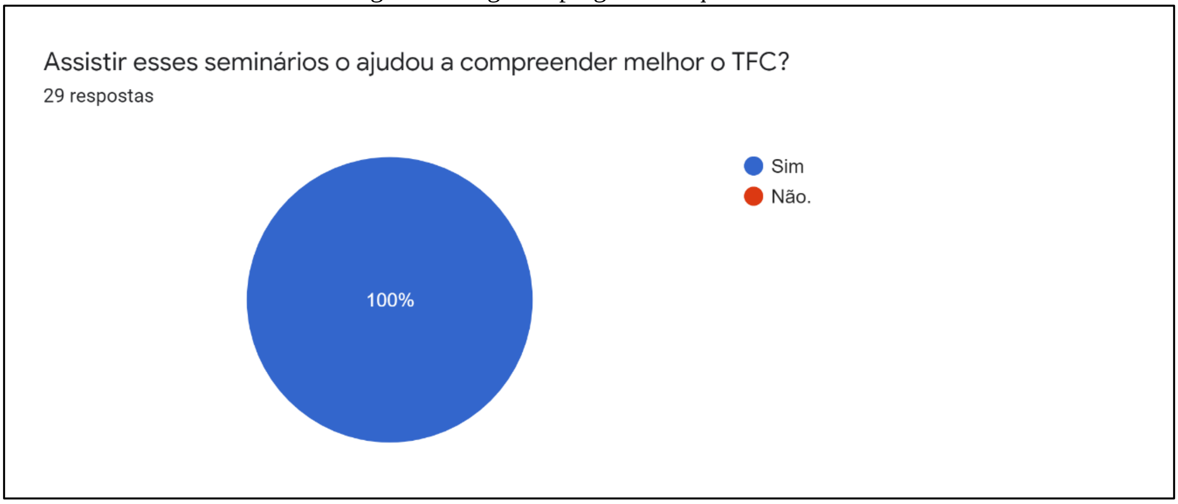
Para obter e trazer ao trabalho um melhor panorama das impressões dos participantes sobre o seminário, foi passado um questionário no segundo dia de apresentação, respondido por vinte e nove dos ouvintes. Abaixo, apresenta-se os resultados estatísticos das respostas dadas, bem como quatro das oito respostas referentes à última pergunta, que foi de escrita aberta. O formulário completo encontra-se no apêndice B.

Figura 42: primeira pergunta do questionário.



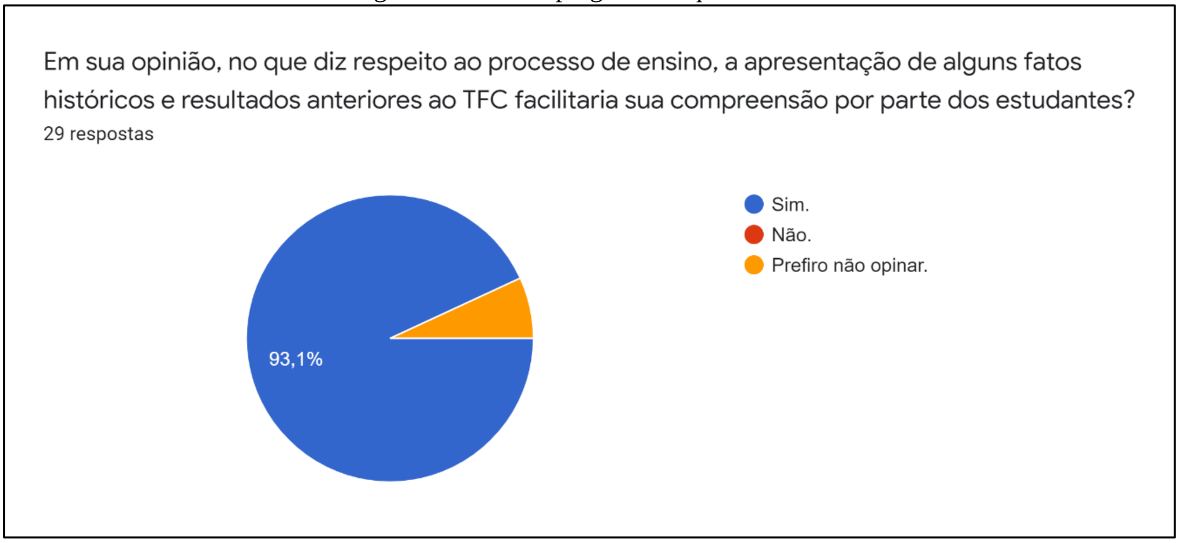
Fonte: protocolo de pesquisa.

Figura 43: segunda pergunta do questionário.



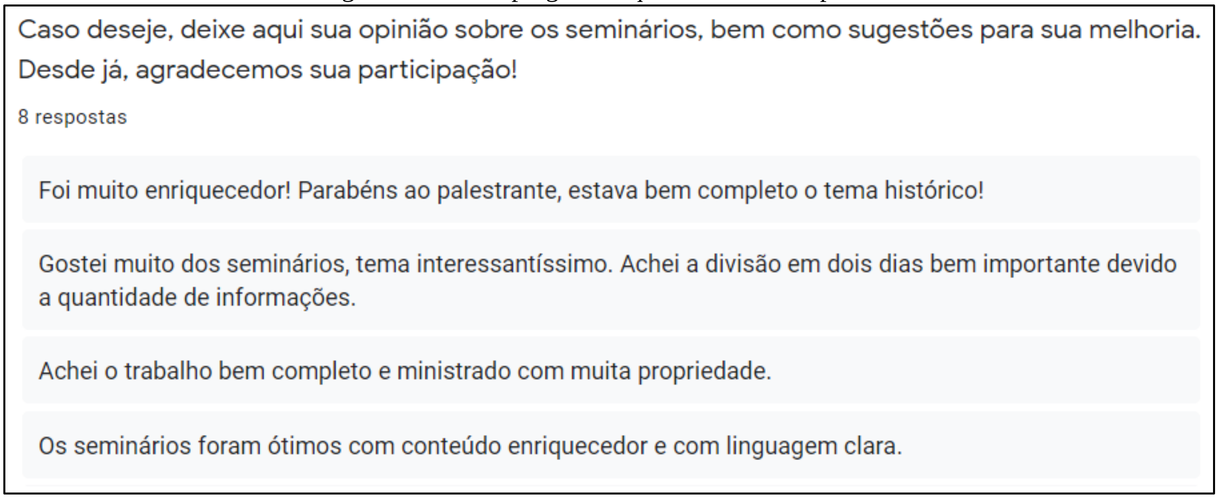
Fonte: protocolo de pesquisa.

Figura 44: terceira pergunta do questionário.



Fonte: protocolo de pesquisa.

Figura 45: última pergunta e quatro de suas respostas.


Caso deseje, deixe aqui sua opinião sobre os seminários, bem como sugestões para sua melhoria. Desde já, agradecemos sua participação!

8 respostas

Foi muito enriquecedor! Parabéns ao palestrante, estava bem completo o tema histórico!

Gostei muito dos seminários, tema interessantíssimo. Achei a divisão em dois dias bem importante devido a quantidade de informações.

Achei o trabalho bem completo e ministrado com muita propriedade.

Os seminários foram ótimos com conteúdo enriquecedor e com linguagem clara.

Fonte: protocolo de pesquisa.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como afirmado por D’Ambrosio (2010), uma percepção sobre a História da Matemática é necessária para qualquer discussão sobre a Matemática e o seu ensino. Ela não implicará automaticamente no domínio e entendimento dos conteúdos, mas irá colaborar com esse propósito e servirá de orientação e motivação para a aprendizagem. Sendo uma ciência que começou seu desenvolvimento há muitos séculos, sempre passando por longos e penosos processos, é difícil engajar os alunos no estudo da Matemática a partir apenas de contextos atuais. Assim, o resgate histórico fornece mais sentido às ideias e aos estudos matemáticos por revelar a realidade e as urgências presentes nas origens e evolução dos conteúdos que, em grande parte, no contexto do ensino, consistem de resultados prontos e sem vida (D’AMBROSIO, 2010).

Seguindo essa visão, acredita-se que o trabalho aqui desenvolvido possa colaborar com o ensino e a aprendizagem do TFC. O aprofundamento de seus conceitos por meio de sua história e de sua interpretação geométrica propicia maior clareza das ideias por ele relacionadas e dão base para a inclusão de novas abordagens em sala de aula. Como afirma Mendes (2006), o uso de aspectos históricos em aulas de Matemática exige primeiro um estudo específico sobre a história de um tópico, tendo sido esse o foco principal desta pesquisa. Entende-se, então, que o trabalho cumpriu seus objetivos específicos e, assim, seu objetivo geral, já que a história do TFC foi estudada, reunida e aqui descrita, juntamente com sua interpretação geométrica, de modo que o trabalho possa servir de fonte para o uso desses aspectos durante as aulas. E ainda, com o seminário que foi realizado, as informações e o próprio trabalho foram compartilhados e puderam ter maior alcance.

A pesquisa histórica mostrou que a exploração da relação inversa entre os problemas de áreas e tangentes por Newton e Leibniz, que possibilitou a unificação das questões resolvidas pelo uso de técnicas infinitesimais, é justamente o que se considera como o início "oficial" ou até mesmo como a descoberta do Cálculo. Sendo assim, a história do TFC é, em essência, a própria história do Cálculo. Por isso, foi necessário buscar as origens das ideias presentes na integração e na derivação, o que nos faz retornar aos tempos da Grécia Antiga.

Ficou claro que Arquimedes, a partir de problemas relacionados a áreas de figuras curvilíneas, usou ideias intuitivas muito próximas àquelas que temos atualmente no Cálculo Integral, conseguindo resolver diversas questões com sucesso. Depois, houve um intervalo grande, que durou aproximadamente até o final do século XVI, para que o Cálculo voltasse a ser desenvolvido mais diretamente – mas a Matemática no geral avançou em outras áreas, contribuindo também para o Cálculo. No século XVII, com crescentes necessidade e interesse em argumentos referentes a quantidades infinitamente pequenas, era comum que os estudiosos se interessassem por problemas tanto de áreas quanto de tangentes, o que possibilitou o início da percepção da relação entre os problemas. Alguns matemáticos importantes, como Torricelli e Fermat, talvez tenham percebido tal relação, enquanto outros, como Gregory e Barrow, certamente a notaram. Este último, como mostrado, chegou a enunciá-la em forma de teorema. Todo esse caminho aponta para um processo de evolução do conceito e mostra como foi necessária uma sucessão de ideias e de estudiosos. Assim, Newton e Leibniz puderam se apoiar em trabalhos anteriores de grande relevância. Mas ambos conseguiram dar um passo maior adiante pois tiveram a genialidade de perceber que aquela relação poderia tornar geral os métodos infinitesimais, que vinham sendo usados de maneira particular para cada problema, e estabelecer a ligação entre as duas áreas que hoje chamamos de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.

A parte histórica mostrou ainda que a geometria teve papel fundamental no desenvolvimento do Cálculo. Seu uso por Cavalieri, Kepler e Barrow, por exemplo, permitiu que esses estudiosos chegassem a resultados que, sem ela, certamente exigiriam processos mais árduos. A própria Geometria Analítica, surgida com Fermat e Descartes no século XVII, ofereceu um inteiro novo campo para a visualização e aplicação das técnicas infinitesimais que estavam avançando rapidamente. Percebe-se então uma parceria e conexão entre as representações algébrica e geométrica. Assim, viu-se importância também em estudar e relatar a interpretação geométrica para o TFC. Sua participação constante na superação das dificuldades encontradas no desenvolvimento do Cálculo sugere que também possa colaborar com um melhor entendimento do TFC atualmente.

Espera-se que as informações presentes no trabalho alcancem docentes e discentes. Em relação ao professor, com as informações em mãos, caberá, caso esteja de acordo com o que foi discutido na seção de aporte teórico e também considere a inserção da História da Matemática no ensino algo benéfico, fazer uma transposição do material buscando usá-lo didaticamente a partir das informações que considerar mais relevantes e adequadas (MENDES, 2006). Essa etapa é tão importante quanto o resgate histórico em si e exige também muitos estudos, já que a ordem lógica e encadeada dos conceitos rigorosos da Matemática não é sempre igual à ordem histórica, e nem a ordem didática coincide necessariamente com alguma das duas (VALDÉS, 2006). Já no caso de estudantes de Cálculo, espera-se que as informações aqui reunidas possam colaborar para um conhecimento mais claro e profundo do TFC, tão importante para o Cálculo – não é *fundamental* sem razão. Ainda, caso sejam futuros professores, o trabalho também se adequará aos aspectos relacionados aos docentes.

Particularmente para o autor, a realização desta pesquisa também foi muito proveitosa e trouxe grande carga de novo conhecimento. Mostrou na prática aquilo que os autores apontam teoricamente: proporcionou maior entendimento não só das origens e do processo de desenvolvimento do TFC, mas também do próprio teorema e dos conceitos que seu enunciado e demonstração buscam exprimir; e ainda elucidou novas ideias para abordagens do futuro trabalho como docente, caso venha a lecionar Cálculo Diferencial e Integral.

Para trabalhos futuros, sugere-se uma adaptação pedagógica da pesquisa para a elaboração de uma sequência didática. "É necessário que os professores universitários adquiram uma postura construtiva de uso da história da matemática em sala de aula" (VALDÉS, 2006, p. 87), tanto como fator de melhor esclarecimento dos conceitos quanto para uso dos alunos, caso futuros professores, em sua própria prática docente. Também seria relevante uma continuação dessa pesquisa, isto é, uma investigação e relato da história do Cálculo após as obras de Newton e Leibniz, desde matemáticos e descobertas imediatamente seguintes até o processo de formalização e fundamentação lógica do Cálculo no século XIX, com o estabelecimento da Análise. Indica-se ainda uma busca pela história do ensino de Cálculo, de modo a revelar os porquês de ele ser abordado em livros e em sala de aula da maneira que é atualmente. Outra sugestão é a realização de pesquisas que contenham o resgate histórico e registros de representação alternativos de outros tópicos da Matemática, inclusive daqueles que são trabalhados na educação básica. Considera-se que os benefícios aqui apontados se estendem a outros níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11280. Acesso em: 07 nov. 2019.

ANDERSEN, E. **As Ideias Centrais do Teorema Fundamenal do Cálculo Mobilizadas por Alunos de Licenciatura em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2011. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10860. Acesso em: 07 nov. 2019.

ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. 1. ed. Montreal: C. Roy Keys, 2008. 245 p. ISBN 978-0-9732911-7-9.

ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O Método Ilustrado de Arquimedes**: utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade. 1. ed. Montreal: C. Roy Keys, 2014. 51 p. ISBN 978-0-9920456-8-5.

ÁVILA, G. **Análise Matemática Para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 260 p. ISBN 978-85-212-0395-7.

ÁVILA, G. Arquimedes, o Rigor e o Método. **Revista Matemática Universitária (RMU)**, Rio de Janeiro, n. 4, p. 27-45, 1986.

ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, Números Irracionais e Ensino de Matemática. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, Rio de Janeiro, n. 7, p. 5-10, 1985.

ÁVILA, G. Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, Rio de Janeiro, n. 5, p. 6-11, 1984.

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2011. 204 p. ISBN 978-85-212-0510-4.

BABB, J. Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme: Using the History of Calculus to Teach Mathematics. **Science and Education**: Contributions from History, Philosophy and Sociology of Science and Mathematics, Winnipeg, v. 14, n. 3-5, p. 443-456, 2005.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontífica Universidade Católica do Paraná (PUC/PR), Curitiba, 2004. Disponível em: http://www.biblioteca.pucpr.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=291. Acesso em: 03 nov. 2019.

BARBOSA, G. O.; NETO, H. B. Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: o caso da Universidade Federal do Ceará. **Temas & Debates**, Blumenau, v. 8, n. 6, p. 63-73, 1995. Disponível em: http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-raciocinio-logico-formal-e-aprendizagem-em-calculo.pdf. Acesso em: 03 nov. 2019.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Tradução: José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. Título original: History of Mathematics: Origins and Development of the Calculus. ISBN 85-230-0172-7.

BENESTAD, C.; PENDHARKAR, H.; STERNBERG N.; TAYLOR, G.; WINDERS, M. **Origin of the Fundamental Theorem of Calculus**. Clark University, 2015. Disponível em: https://math.clarku.edu/~ma121/FTC.pdf.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. Nova York: Dover Publications, 1959. ISBN 486-60509-4.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. Título original: a History of Mathematics.

BRESSOUD, D. M. **Calculus Reordered – A History of the Big Ideas**. Princeton: Princeton University Press, 2019. ISBN 978-0-691-18131-8.

BRESSOUD, D. M. Historical reflections on teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. **American Mathematical Monthly**, v. 118, n. 2, p. 99-115, 2011. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.118.02.099.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 27-36, 2004. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/128/116. Acesso em: 03 nov. 2019.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 19. ed. Campinas: Papirus, 2010. 112 p. ISBN 978-8-530-80410-7.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. ISBN 85-308-0731-6.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

EDWARDS, C. H. **The Historical Developmente of the Calculus**. 1. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1979. ISBN 978-1-4612-6230-5.

FERNÁNDEZ, J. M. L; RODRÍGUEZ, O. H. **A Commentary on Barrow's Proof of the First Fundamental Theorem of Calculus**. 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1143.2808. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280937967_A_COMMENTARY_ON_BARROW'S_PROOF_OF_THE_FIRST_FUNDAMENTAL_THEOREM_OF_CALCULUS.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UECE, 2002. Apostila. Disponível em: http://www.ia.ufrrj.br/ppgea/conteudo/conteudo-2012-1/1SF/Sandra/apostilaMetodologia.pdf. Acesso em: 11 nov. 2019.

FOSSA, J. A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. *In*: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A**

história como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulinas, 2006. ISBN 85-205-0439-6.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: editora da UFRGS, 2009. *E-book* (120 p.). ISBN 978-85-386-0071-8. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 11 nov. 2019.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. *E-book*. ISBN 85-224-3169-8. Disponível em: http://www.urca.br/itec/images/pdfs/modulo%20v%20-%20como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf. Acesso em: 11 nov. 2019.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2013. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10979. Acesso em: 03 nov. 2019.

GUICCIARDINI, N. Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method. *In*: BUCHWALD, J. Z. **Transformations**: Studies in the History of Science and Technology. Cambridge: MIT Press, 2009. ISBN 978-0-262-01317-8.

HALLIDAY, D. **Fundamentos de Física, volume 1**: mecânica. 10. ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016. Título original: Fundamentals of Physics, volume 1, tenth edition. ISBN 978-85-216-3204-7.

MAHONEY, M. S. Barrow's Mathematics: Between Ancients and Moderns. *In*: FEINGOLD, M. **Before Newton**: the Life and Times of Isaac Barrow. Nova York: Cambridge University Press, 1990. ISBN 978-0-521-30694-2.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. *In*: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulinas, 2006. ISBN 85-205-0439-6.

NAUENBERG, M. Barrow, Leibniz and the Geometrical Proof of the Fundamental Theorem of Calculus. **Annals of Science**, Santa Cruz, v. 71, n. 3, p. 335-354, 2014.

LAUBENBACHER, R.; PENGELLEY, D. **Mathematical Expeditions**: Chronicles by the Explorers. New York: Springer-Verlag, 1999. 278 p. ISBN 978-1-4612-0523-4.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166. Acesso em: 03 nov. 2019.

PICONE, D. F. B. **Os Registros de Representação Semiótica Mobilizados por Professores no Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11275. Acesso em: 07 nov. 2019.

SANTOS, J. M. **Quadratura da Parábola**: uma Abordagem Possível para o Ensino de Somas Infinitas. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/7101. Acesso em: 05 nov. 2019.

SONAR, T. **The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz**. Brunsvique: Springer, 2018. ISBN 978-3-319-72563-5.

STEWART, J. **Cálculo**: volume I. 8. ed. Tradução: Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 680 p., 28cm. Título original: Calculus: early transcendentals. ISBN 978-85-221-2583-8.

SUZUKI, J. The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits. **Mathematics Magazine**, Nova York, v. 78, n. 5, p. 339-353, 2005.

VALDÉS, J. E. N. A história como elemento unificador na Educação Matemática. *In*: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulinas, 2006. ISBN 85-205-0439-6.

APÊNDICES

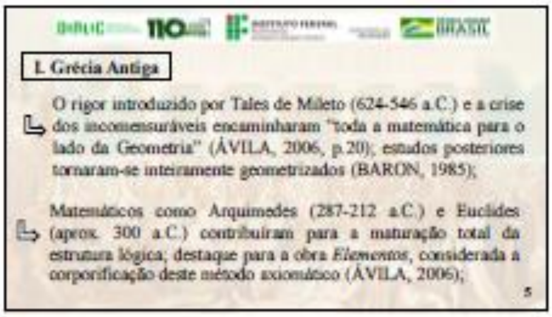
APÊNDICE A – *SLIDES* USADOS NO SEMINÁRIO


História e Interpretação
Geométrica do Teorema
Fundamental do Cálculo
João Vitor Pessanha Simão
Licenciatura em Matemática
7º período


Tópicos
I. Grécia Antiga
II. Arquimedes
III. Auge Árabe
IV. Idade Média
V. Séculos XV e XVI
VI. Século XVII
VII. Isaac Newton
VIII. Gottfried Leibniz
IX. Disputa e posterioridade
X. Interpretação geométrica atual
2


I. Grécia Antiga
Aparecimento das primeiras ideias relacionadas ao Cálculo;
Matemática Grega
Geometrizada
Rigorosa
3


I. Grécia Antiga
Ideia razoável pela nossa intuição geométrica (ÁVILA, 1984);
Diagonal do quadrado mostrou que existem segmentos incomensuráveis (ÁVILA, 1984);
4


I. Grécia Antiga
O rigor introduzido por Tales de Mileto (624-546 a.C.) e a crise dos incomensuráveis encaminharam "toda a matemática para o lado da Geometria" (ÁVILA, 2006, p.20); estudos posteriores tornaram-se inteiramente geometrizados (BARON, 1985);
Matemáticos como Arquimedes (287-212 a.C.) e Euclides (aprox. 300 a.C.) contribuíram para a maturação total da estrutura lógica; destaque para a obra Elementos, considerada a corporificação deste método axiomático (ÁVILA, 2006);
5


II. Arquimedes
6

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- Maior matemático da Antiguidade (ASSIS, 2008), e talvez o maior de todos os tempos (ÁVILA, 2011);
- Contato com Euclides ou sucessores (BOYER, 1974); grande estudioso de áreas e volumes (BRESSOUD, 2019);
- A Matemática "pendia excessivamente para o lado geométrico, em detrimento dos números" (ÁVILA, 2006, p. 211);
- Áreas obtidas pela comparação com a área de um quadrado (*quadratura*) (ÁVILA, 2006);

7

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- Quadratura de polígonos já era dominada pelos gregos;

Figura 3: quadratura de polígonos

Fonte: BARON (1985).

8

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- "[...] para toda figura poligonal plana podemos encontrar um quadrado com mesma área" (BARON, 1985, p. 33);
- Quadraturas de figuras curvilíneas continuavam em aberto; Hipócrates de Quio (460-377 a.C.) obteve avanços (ÁVILA, 2006), mas a quadratura do círculo continuou em aberto;
- Arquimedes foi o primeiro a provar rigorosamente o procedimento para o cálculo da área do círculo;

9

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- Processo usado em vários resultados;
- Encontrou um triângulo de área equivalente, não um quadrado;

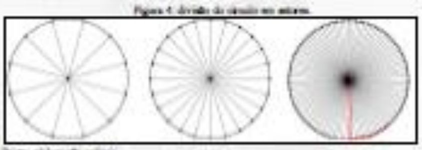
- De fato, "no século XIX seria demonstrada a impossibilidade de construir, apenas com régua e compasso, um quadrado de área igual à de um círculo dado" (ÁVILA, 2006, p. 212);

10

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- A área do círculo: primeiro, a parte intuitiva;

Figura 4: divisão do círculo em setores



Fonte: elaboração própria.

11

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

$A_1 = \frac{b_1 \cdot r}{2}$

$A = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \frac{b_3 \cdot r}{2} + \dots$

$A = \frac{r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$

$A = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r = \pi r^2$

$A_T = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$

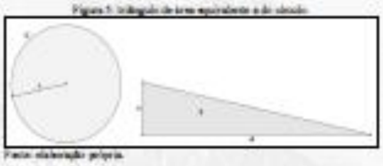
$A_T = \pi r^2$

12

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- A área do círculo: segundo, a demonstração rigorosa;

Figura 5: Triângulo de área equivalente à do círculo



Fonte: elaboração própria

13

II. Arquimedes

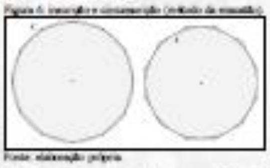
PROVA

i) Supõe-se C > T	i) Supõe-se C < T
ii) Inscrição de polígonos	ii) Circunscrição de polígonos
iii) Chega-se a um absurdo	iii) Chega-se a um absurdo

14

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

Figura 6: Inscrição e circunscrição (método da exaustão)



Fonte: elaboração própria

- Algebrismo ainda não existia; demonstração toda em formato de texto;

15

II. Arquimedes (287-212 a.C.)

- Procedimentos semelhantes ao método mecânico foram usados por matemáticos no séc. XVII (ÁVILA, 2011);
- Método mecânico dava um indício do resultado, mas não era prova rigorosa; método da exaustão + dupla redução ao absurdo tinha o rigor, mas necessitava de uma conjectura prévia;
- Alguns motivos impediram maiores avanços ligados ao Cálculo ainda na Grécia Antiga;

16

Império Romano e fim da Idade Antiga

- Ascensão do Império Romano e conquista dos territórios gregos; desenvolvimento da Matemática mais lento;
- "durante toda a sua longa história, a Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática" (BOYER, 1974, p. 129);
- Papus de Alexandria (290-350): o último grande geômetra grego;

17

Império Romano e fim da Idade Antiga

- Invasão e queda de Roma (476): fim do Império Romano no ocidente e início do período conhecido como Idade Média;
- Grécia passa a integrar a parte oriental do império, que passa a ser chamada de Império Bizantino;
- Conflito de religiões; centros de estudos gregos fechados em 529, marcando o fim da Matemática europeia da antiguidade (BOYER, 1974);

18

III. Auge Árabe

- Atividade matemática na Europa mais ligada a transcrições e comentários; desenvolvimento principal passou a acontecer em outras regiões (BOYER, 1974);
- Onda de conquistas territoriais pelos árabes no século VII, tomando inclusive Alexandria (EDWARDS, 1979);
- Despertar árabe no séc. VIII que, caso não tivesse ocorrido, "muito mais se teria perdido da ciência e da matemática antigas" (BOYER, 1974, p. 166);

19

III. Auge Árabe

- Bagdá, a nova Alexandria, ganha a Casa da Sabedoria (BRESSOUD, 2019); obtenção de manuscritos gregos mediante tratados com o Império Bizantino;

Figura 7: Muhammad Al-Khwarizmi (aprox. 780-850)

Fonte: https://[illegible]

20

III. Auge Árabe

Al-Khwarizmi

De Numero Hindorum | *Al-jabr wa'l muqabalah*

- 1123: início do declínio da ciência árabe; estudos relevantes se encerrando em aproximadamente 1436;
- Principais atividades matemáticas passaram definitivamente do mundo árabe para a Europa ocidental;

21

IV. Final da Idade Média

- Por séculos, os árabes preservaram a Matemática antiga e a enriqueceram com elementos de aritmética e álgebra;
- Felizmente, o começo de seu declínio coincidiu com o despertar da Europa Ocidental (EDWARDS, 1979);
- Séc. XII: obras gregas e árabes começam a chegar aos europeus por meio de traduções; criação de famosas universidades; introdução do sistema de numeração indo-arábico;

22

IV. Final da Idade Média

- Destaque para Leonardo de Pisa (aprox. 1170-1240), "o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval" (BOYER, 1974, p. 186);
- Importantes estudos sobre movimentos e suas variações no séc. XIV, especialmente em Oxford; definições importantes e descoberta do Teorema da Velocidade Média de Merton;
- Esses estudos alcançam a França e chegam à Nicole Oresme (1323-1382);

23

IV. Final da Idade Média

- Acreditava que tudo que é mensurável poderia ser pensado como quantidade contínua (BARON, 1985);

Sua grande ideia: "por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas?" (BOYER, 1974);

Figura 8: Nicole Oresme

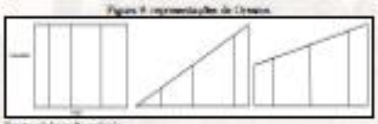
Fonte: https://[illegible]

- Relação com o que hoje chamamos de representação gráfica de funções;

24

IV. Final da Idade Média

Figura 9: representações de Oresme



Fonte: elaboração própria

- Permitiu a verificação geométrica do Teorema da Velocidade Média de Merton;

25

V. Séculos XV e XVI

- Peste bubônica (meados do século XIV) diminuiu o ritmo de desenvolvimento da Matemática após Oresme;
- Guerra dos 100 anos entre França e Inglaterra (1337-1453);
- Universidades alemãs e italianas fornecem a maior parte dos estudiosos do início da era pós-medieval (BOYER, 1974);

26

V. Séculos XV e XVI

- Invenção da impressão, com o primeiro livro impresso em 1447 (BOYER, 1974);
- Rápidos avanços na álgebra; "Poucos homens do século quinze liam grego ou conheciam suficientemente a matemática para tirar proveito das obras dos melhores geômetras gregos" (BOYER, 1974, p. 197);
- Primeira aparição de um número negativo isolado em *Triparty en la science des nombres*, de Nicolas Chuquet (1445-1488);

27

V. Séculos XV e XVI

- 1489: mais antiga aparição impressa dos símbolos + e -, em obra de Johannes Widmann (1462-1498) (BOYER, 1974);
- Obras bem completas, como *Summa de Arithmetica* (1494), de Luca Pacioli (1445-1514), e *Arithmetica Integra* (1544), de Michael Stifel (1487-1559) (BOYER, 1974);
- 1545: *Ars Magna*, de Girolamo Cardano (1501-1576) - marco do fim da Idade Média dentro da Matemática (BOYER, 1974);

28

V. Séculos XV e XVI

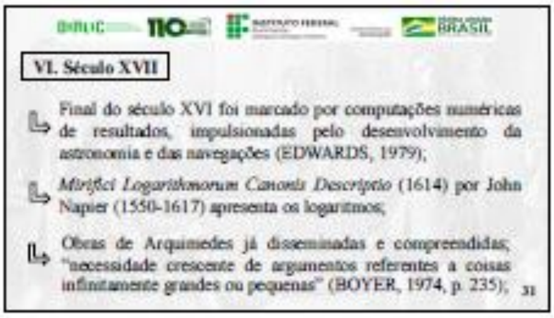
- "A álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares" (BOYER, 1974, p. 223); François Viète (1540-1603) e sua obra *Introduction to the Analytic Art*;
- Grande passo para a transição entre casos particulares e métodos gerais, mudança necessária para os algoritmos do Cálculo (EDWARDS, 1979);

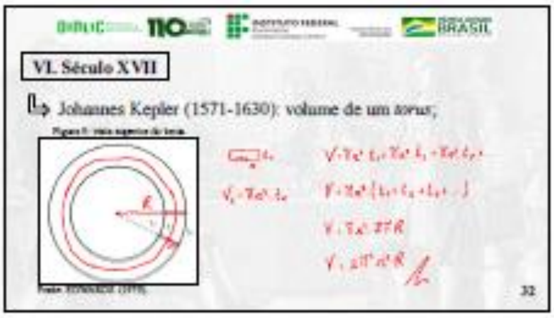
29

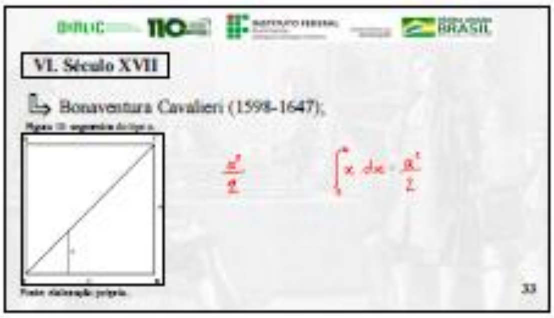
V. Séculos XV e XVI

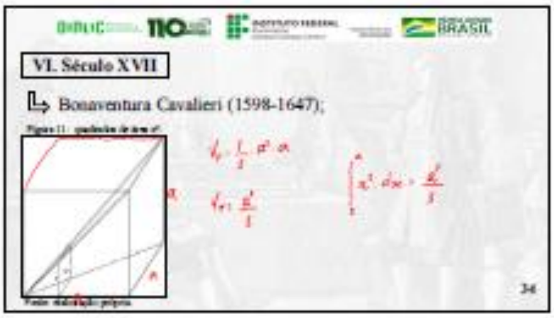
- Símbolo de igualdade com Robert Recorde (1510-1558); contribuições à Trigonometria por Copérnico (1473-1543);
- Início da substituição do rigor das demonstrações gregas pela passagem direta à noção intuitiva de limite, com Simon Stevin (1548-1620) e Luca Valério (1552-1618) (BARON, 1985);
- "Em grande parte, foram as modificações por isso introduzidas nos antigos métodos infinitesimais que finalmente conduziram ao cálculo" (BOYER, 1974, p. 236);

30

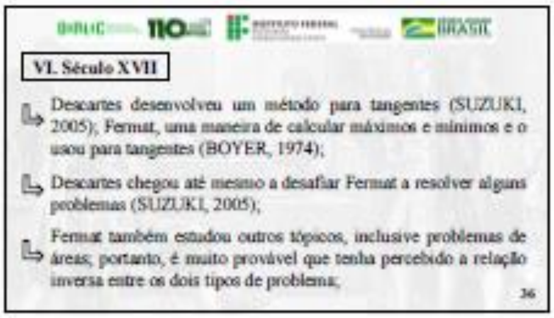

VI. Século XVII
Final do século XVI foi marcado por computações numéricas de resultados, impulsionadas pelo desenvolvimento da astronomia e das navegações (EDWARDS, 1979);
Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614) por John Napier (1550-1617) apresenta os logaritmos;
Obras de Arquimedes já disseminadas e compreendidas; "necessidade crescente de argumentos referentes a coisas infinitamente grandes ou pequenas" (BOYER, 1974, p. 235);
31


VI. Século XVII
Johannes Kepler (1571-1630): volume de um torus;
32


VI. Século XVII
Bonaventura Cavalieri (1598-1647);
33


VI. Século XVII
Bonaventura Cavalieri (1598-1647);
34


VI. Século XVII
Geometria Analítica
René Descartes (1596-1650)
Pierre de Fermat (1601-1665)
La Geometrie, de 1637, e Introduction to Plane and Solid Loci, feito no mesmo ano mas publicado apenas em 1679;
Bases para a Geometria Analítica, passo final para um avanço ainda maior do Cálculo (EDWARDS, 1979);
35


VI. Século XVII
Descartes desenvolveu um método para tangentes (SUZUKI, 2005); Fermat, uma maneira de calcular máximos e mínimos e o usou para tangentes (BOYER, 1974);
Descartes chegou até mesmo a desafiar Fermat a resolver alguns problemas (SUZUKI, 2005);
Fermat também estudou outros tópicos, inclusive problemas de áreas; portanto, é muito provável que tenha percebido a relação inversa entre os dois tipos de problema;
36

VI. Século XVII

Outros matemáticos notáveis:

37

VI. Século XVII

A moda chega ao Reino Unido, em especial pelos trabalhos de Torricelli (BARON, 1985);

John Wallis (1616-1703) publica *Arithmetica Infinitorum* em 1655, chegando a resultados equivalentes aos de Cavalieri e Torricelli por meios aritméticos (GUICCIARDINI, 2009);

A obra teve grande influência em Newton no início de seus estudos (BARON, 1985);

38

VI. Século XVII

Dominava os elementos necessários para a generalização das técnicas infinitesimais desenvolvidas (BOYER, 1974);

Geometriae Pars Universalis, de 1668: passagem direta da quadratura de uma curva à tangente de outra (BARON, 1985);

Primeira afirmação clara publicada correspondente ao TFC; "se Gregory a considerou como "fundamental" é uma outra questão!" (BARON, 1985, p. 44);

39

VI. Século XVII

Isaac Barrow (1630-1677): grande seguidor dos gregos, preferindo sempre a geometria;

Publicou em 1670 sua obra *Lectiones Geometricae*, considerada por Fernández (2015) como o primeiro livro de Cálculo;

40

VI. Século XVII

Como Torricelli e outros, Barrow pôde perceber a relação inversa entre os problemas de quadraturas e tangentes (EDWARDS, 1979);

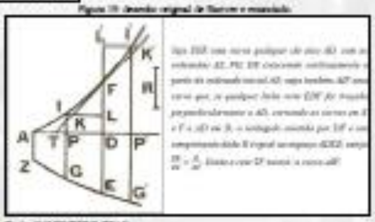
Proposição 11 da lição X de *Lectiones Geometricae*: relação expressa em forma de teorema e demonstrada;

Pode ser considerada uma versão inicial e geométrica do TFC, sendo a primeira prova da relação e o reconhecimento mais claro de seu significado até então (BOYER, 1959);

41

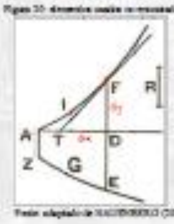
VI. Século XVII

Figura 19: desenho original de Barrow e enunciado.



42

VI. Século XVII



Fonte: adaptado de NAUENBERG (2014).

área (ADEZ) = R · DF

43

VI. Século XVII

Baron (1985) afirma ser difícil considerar o material como Cálculo de fato, pois não contém nem a notação apropriada nem as regras algorítmicas dessa área da Matemática.

Depois de preparar a obra para publicação, Barrow a entregou para revisão a seu aluno e substituto (por sua indicação) no cargo de *Lucasian Professor* de Cambridge, Isaac Newton, e passou a se dedicar somente à Teologia (BOYER, 1974).

44

VI. Século XVII

"O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados." (STEWART, 2016, p. 347);

Baron (1985) dá a Barrow crédito pela versão inicial do TFC, mas nega que isso o permitiu "ter o Cálculo" antecipadamente justamente pelo seu modo predominantemente geométrico e estático de expressão.

45

VI. Século XVII

Barrow não chegou a traduzir seu teorema em um algoritmo para o cálculo de áreas, o que acaba tirando uma parte fundamental do TFC (MAHONEY *apud* GUICCIARDINI, 2009);

Recusava-se a fazer uso de novos conceitos essenciais ao Cálculo, como métodos analíticos mais dinâmicos e simbologia algébrica (MAHONEY, 1990);

Importância maior em coordenar o conhecimento disponível em sua época para ensino e para uso posterior que em introduzir novos conceitos (WHITESIDE *apud* NAUENBERG, 2014);

46

VI. Século XVII

Guicciardini (2009) afirma que o próprio Newton atribui a Barrow grande papel como seu mentor; Leibniz também teve contato com o trabalho de Barrow (NAUENBERG, 2014);

Mas Leibniz e Newton foram muito além, desenvolvendo o Cálculo de uma forma analítica que levou a diversas aplicações (NAUENBERG, 2014);

"[...] o Teorema Fundamental foi descoberto por Barrow e explorado por Newton e Leibniz" (STEWART, 2016, p. 352);

47

O desenvolvimento do Cálculo trilhou um caminho longo e irregular (BARON, 1985);

Lacuna entre particularidade e generalização ficou aberta até Newton: diferença entre a percepção de um importante conceito matemático e o reconhecimento de que ele é de fato importante (EDWARDS, 1979);

Newton e Leibniz não apenas perceberam o TFC, mas também viram nele grande significado. Por isso, ambos são considerados os pais do Cálculo, "ainda que o cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens" (BARON, 1985, p. 5);

48

VII. Isaac Newton

Figura 21: Isaac Newton

Fonte: https://[illegible]

- Isaac Newton (1642-1727) nasceu no Natal de 1642 e ingressou em Cambridge em 1661;
- Logo teve contato com obras de seus contemporâneos, em especial com *Arithmetica Infinitorum*, a que mais o influenciou (BOYER, 1974);

49

VII. Isaac Newton

- Ao final do ano de 1664, Newton já estava preparado para dar suas próprias contribuições (BOYER, 1959);
- Isolamento durante boa parte dos anos de 1665 e 1666, período em que desenvolveu seu Cálculo (EDWARDS, 1979);
- Faleceu em 1727, tendo um velório digno de reis (EDWARDS, 1979);

50

VII. Isaac Newton

- Em 1664-1665, Newton expandiu e generalizou estudos sobre potências de binômios feitos por Wallis, chegando ao seu primeiro resultado relevante: o teorema binomial;
- Evento central para a "legalização" do uso das séries infinitas (EDWARDS, 1979);
- Ainda em 1665, Newton passou a usar uma abordagem ainda melhor para as quadraturas, baseada na relação inversa entre os problemas de áreas e tangentes (GUICCIARDINI, 2009);

51

VII. Isaac Newton

- "O tratado sobre fluxões de outubro de 1666": primeiras ideias relacionadas ao Cálculo;
- Newton considera uma curva $f(x, y) = 0$ como a intersecção de duas linhas em movimento (EDWARDS, 1979);

Figura 22: visão de Newton

Fonte: Edwards (1979)

$x = \frac{dx}{dt}$

$y = \frac{dy}{dt}$

$\frac{y}{x} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$

52

VII. Isaac Newton

- Duas vantagens: continuidade do movimento e aproximação da Matemática com fenômenos naturais (GUICCIARDINI, 2009);
- Questões inversas também são abordadas: encontrar a relação entre x e y tendo de início a relação entre x e $\dot{y}/\dot{x}$.
- Ainda no tratado de 1666, Newton discute como o cálculo de áreas pode ser feito em termos da antiderivada, sendo essa a primeira aparição mais direta do TFC (EDWARDS, 1979);

53

VII. Isaac Newton

- Sendo A a área abaixo da curva $y = f(x)$, temos:

$\frac{dA}{dx} = y$

- Possibilitou uma abordagem algoritmica para o cálculo de áreas: a curva era primeiramente considerada como taxa de variação, e a área era em seguida calculada pela antiderivação;

54

VII. Isaac Newton

- A exploração do TFC, que levou aos métodos algorítmicos gerais e sistemáticos, foi justamente o que constituiu a "descoberta do Cálculo" por Newton (EDWARDS, 1979);
- "Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral [...]" (BOYER, 1974, p. 292).

55

VII. Isaac Newton

- Em 1669, compôs *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*; publicada em 1711 (BOYER, 1974);
- Nela, Boyer (1974) afirma que Newton obtém a área z abaixo da curva $y = ax^{m/n}$ supondo o resultado e derivando-o:

$$\text{Suponha } z = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}$$

56

VII. Isaac Newton

- Newton realiza a prova desejada tirando proveito da relação inversa entre a área e o método das tangentes;

> Parece ser essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos diferenciação, embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área [...]. (BOYER, 1974, p. 291).

57

VII. Isaac Newton

- Em 1671, Newton redigiu mais um tratado: *De methodis serierum et fluxionum*, obra mais popular dessa área, com os métodos envolvendo áreas e tangentes sendo sistematizados (GUICCIARDINI, 2009);
- Newton define quantidades geradas por movimento (*fluxo*) como *fluentes*, suas velocidades instantâneas como *fluxões*, e acréscimos infinitamente pequenos como *momentos dos fluentes*;

58

VII. Isaac Newton

- Escreveu ainda *De quadratura curvarum*, em 1676, publicada em 1704 como apêndice de *Opticks* (EDWARDS, 1979);
- No geral, a primeira exposição impressa de seu Cálculo apareceu em 1687 no "mais admirado tratado científico de todos os tempos" (BOYER, 1974, p. 292), *Philosophiae naturalis principia mathematica*;
- Destacam-se ainda, entre várias e várias outras, contribuições para Geometria Analítica e Cálculo Numérico (BOYER, 1974);

59

VIII. Gottfried Leibniz

- Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig e também estudou Direito, Filosofia e Teologia; Obteve seu doutorado em Filosofia em 1667;
- Entrou para o serviço diplomático da Alemanha e pôde assim conhecer vários países, tornando-se um influente representante do governo (BOYER, 1974);

60

VIII. Gottfried Leibniz

- Começou seriamente seus estudos matemáticos em 1672, quando passou a morar na França; conheceu Christiaan Huygens (1629-1695), que teve papel importante em sua relação com a Matemática;
- Viveu em Paris durante os quatro anos seguintes, período em que desenvolveu as ideias de seu Cálculo (EDWARDS, 1979);
- Primeira publicação sobre Cálculo aconteceu em 1684; Compôs *Historia et origo calculi differentialis* dois anos antes de morrer;

61

VIII. Gottfried Leibniz

- Pouco depois de chegar a Paris, Leibniz percebeu um fato interessante sobre sequências numéricas (EDWARDS, 1979):

$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ $\quad d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$ tal que $d_i = a_i - a_{i-1}$

$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$

62

VIII. Gottfried Leibniz

- O resultado sugeriu a Leibniz a possibilidade de se obter a soma dos termos de uma série infinita;
- Leibniz mostrou seus resultados sobre somas de diferenças a Huygens, que então o sugeriu que tentasse encontrar o resultado da soma dos inversos dos números triangulares;
- Edwards (1979) afirma que esses estudos implantaram em Leibniz a clara concepção da relação inversa entre as operações de tomar diferenças e somar elementos de uma sequência;

63

VIII. Gottfried Leibniz

- Pouco depois dos estudos acerca de sequências, Leibniz estudou trabalhos relacionados a áreas e tangentes, em especial o *Tratado sobre as ordenadas de um quarto de círculo* de Pascal;
- Nele, Pascal conclui que "a soma dos senos (ordenadas) de qualquer arco de um quadrante é igual ao comprimento do eixo horizontal entre os senos extremos multiplicado pelo raio" (EDWARDS, 1979);

64

VIII. Gottfried Leibniz

Figura [illegible]: resultado de Pascal

Fonte: elaboração própria.

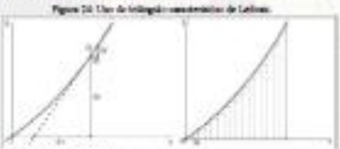
$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \cos\theta_1 - \cos\theta_2$

65

VIII. Gottfried Leibniz

- Em *Historia et origo*, Leibniz afirma que uma luz brilhou em sua mente quando viu o triângulo infinitesimal;

Figura [illegible]: Uso do triângulo característico de Leibniz.



Fonte: elaboração própria.

66

VIII. Gottfried Leibniz

- Leibniz a princípio expressou seu resultado geral em forma verbal, pois só criou sua notação dois anos mais tarde, em 1675 (SONAR, 2018);
- Nesse início, Leibniz não obteve resultados novos, mas começou a dar passos em direção à unificação de todos os resultados e técnicas já existentes (EDWARDS, 1979);
- Em carta escrita duas décadas depois, Leibniz afirma que o triângulo o permitiu chegar rapidamente a teoremas que encontrou em outras obras (EDWARDS, 1979);

67

VIII. Gottfried Leibniz

- O triângulo característico, os estudos sobre sequências e a busca por símbolos universais foram os principais tópicos que permitiram a Leibniz criar sua versão do Cálculo;
- Leibniz reuniu todo esse desenvolvimento em um manuscrito que escreveu no final de 1675; nele, passa a usar seus famosos símbolos $\int$ e d e explica o uso do triângulo característico nos problemas de tangentes e de áreas (EDWARDS, 1979);

68

VIII. Gottfried Leibniz

- Em outro manuscrito, agora de 1677, Leibniz introduz sua versão do TFC (EDWARDS, 1979), afirmando que o objetivo é obter a área abaixo de uma curva usando sua *quadratrix*;

Dada uma curva $z(x)$ que parte da origem, deseja-se a área A limitada por ela e pelos eixos, até um determinado valor de x:

$dA = z \cdot dx$ $\qquad$ $dy = z \cdot dx$

$A = \int dA = \int z\,dx = \int dy = y$

69

VIII. Gottfried Leibniz

$A = \int_0^{x_1} z \cdot dx = y(x_1) - 0$ $\qquad$ $A = \int_a^b z \cdot dx = y(b) - y(a)$

E como descobrir de fato a função y necessária?

$dy = z \cdot dx$

$\frac{dy}{dx} = z$

70

VIII. Gottfried Leibniz

- A princípio, sem as atuais técnicas de integração, a lei da curva y era encontrada por suposições baseadas na experiência com os problemas de tangentes;
- A primeira publicação de Leibniz aconteceu em 1684, no *Acta Eruditorum*, sendo relacionada ao seu *calculus differentialis*; dois anos mais tarde, publicou no mesmo periódico seu *calculus summatorius*;

71

VIII. Gottfried Leibniz

- O alemão ainda contribuiu para outras áreas da Matemática, como a Álgebra Linear e a Lógica, ajudou a popularizar o sinal de igualdade que usamos hoje e ainda fez comentários sobre números complexos (BOYER, 1974);

72

IX. Disputa e posterioridade

- Newton desenvolveu seus estudos em 1664-1666, mas sua primeira publicação foi apenas em 1687; os estudos de Leibniz foram posteriores, em 1672-1676, mas suas publicações aconteceram em 1684 e 1686, antecedendo o inglês;
- Em 1692, Newton já pensava na possibilidade de uma disputa com Leibniz pela prioridade (SONAR, 2018); em 1695, Wallis o disse que na Holanda o Cálculo era considerado uma descoberta de Leibniz (BOYER, 1974);

73

IX. Disputa e posterioridade

- A troca de acusações virou uma acusação formal e pública de plágio em 1711, e uma comissão julgadora foi formada pela *Royal Society* para resolver a questão;
- Em 1712, Leibniz foi considerado culpado (EDWARDS, 1979);

> Assim a geração seguinte de matemáticos na Inglaterra pagou um preço pela injustiça praticada pelos seguidores de Newton em relação a Leibniz pois o resultado foi que a matemática inglesa ficou para trás em relação à da Europa continental. [...] apesar do reconhecimento dado ao sistema matemático na Inglaterra o desenvolvimento matemático lá não acompanhou os passos rápidos dados em outras partes da Europa durante o século dezoito. (BOYER, 1974, p. 303).

74

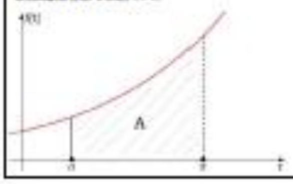
IX. Disputa e posterioridade

- O século XVIII foi marcado pela consolidação das grandes descobertas do século anterior e por buscas por aplicações em problemas científicos, ainda com muita intuição e pouco rigor; destaque para Leonhard Euler (1707-1783);
- Depois, a grande busca foi pelo estabelecimento de fundamentos formais lógicos para o Cálculo, com destaque para Bernhard Riemann (1826-1866) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857); mas essas já são histórias para outro trabalho...

75

X. Interpretação geométrica

Primeiramente, considere o gráfico de uma função $f(t)$ qualquer. Considere também a área A limitada pelo eixo horizontal, pela curva e pelas retas verticais $t=a$ e $t=x$, sendo a um valor constante fixo e com $x>a$.

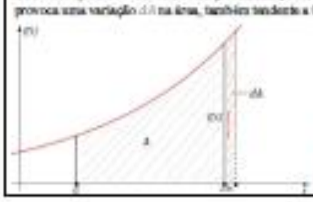


$A(x)$

76

X. Interpretação geométrica

Digamos agora que deseja-se calcular a variação instantânea dessa área, isto é, saber quanto a área varia quando x tem uma variação mínima, tendendo a 0. Esse pequeno acréscimo em x provoca uma variação dA na área, também tendendo a 0.



$dA = f(x)\,dx$

$\frac{dA}{dx} = f(x)$

$\frac{d}{dx}\int^{x} f(t)\,dt = f(x)$

77

X. Interpretação geométrica

Primeira parte do TFC segundo Stewart (2016):

> *Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*
>
> Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por
>
> $$g(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt \qquad a \leq x \leq b$$
>
> é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$, isto é,
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\cdot dt = f(x)$$

78

X. Interpretação geométrica

Prosseguindo, digamos agora que queira-se calcular de fato a área A abaixo da curva de uma função $f(x)$, limitada pelo eixo horizontal e por um par de retas verticais $x = a$ e $x = b$. Para isso, deve-se resolver a seguinte integral definida:

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

$F' = f$

79

X. Interpretação geométrica

Stewart (2016) afirma ser surpreendente que a integral em questão, definida de uma maneira complicada que envolve todos os infinitos valores que $f(x)$ assume no intervalo $[a,b]$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em apenas dois pontos, a e b. Essa é justamente a segunda parte do TFC, que podemos enunciar como segue abaixo (STEWART, 2016):

> *Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2*
>
> Se f for contínua em $[a, b]$, então
>
> $$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$
>
> Onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

80

X. Interpretação geométrica

Além de fornecer uma maneira mais simples de calcular a integral definida, a expressão também nos dá outra informação importante. Como $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^b F'(x).dx = F(b) - F(a).$$

Essa versão afirma que se tomarmos uma função F, primeiro a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b)-F(a)$. Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro faz. (STEWART, 2016, p. 338).

81

ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. 1. ed. Montreal: C. Roy Keys, 2008. 245 p. ISBN 978-0-9732911-7-9.

ÁVILA, G. **Análise Matemática Para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 260 p. ISBN 978-85-212-0395-3.

ÁVILA, G. Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, Rio de Janeiro, n. 5, p. 6-11, 1984.

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2011. 208 p. ISBN 978-85-212-0510-6.

82

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Tradução: José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. Título original: History of Mathematics: Origins and Development of the Calculus. ISBN 85-230-0172-7.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and Its Conceptual Development**. Nova York: Dover Publications, 1959. ISBN 486-60509-4.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. Título original: a History of Mathematics.

BRESSOUD, D. M. **Calculus Reordered**: A History of the Big Ideas. Nova Jersey: Princeton University Press, 2019. 248 p. ISBN 978-0-691-18131-8.

83

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. 1. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1979. ISBN 978-1-4612-6230-5.

FERNÁNDEZ, J. M. L. A Commentary on Barrow's Proof of the First Fundamental Theorem of Calculus. 2015.

GUICCIARDINI, N. Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method. *In*: BUCHWALD, J. Z. **Transformations**: Studies in the History of Science and Technology. Cambridge: MIT Press, 2009. ISBN 978-0-262-01317-8.

MAHONEY, M. S. Barrow's Mathematics: Between Ancients and Moderns. *In*: FEINGOLD, M. **Before Newton**: the Life and Times of Isaac Barrow. Nova York: Cambridge University Press, 1990. ISBN 978-0-521-30694-2.

84


NAUENBERG, M. Barrow, Leibniz and the Geometrical Proof of the Fundamental Theorem of Calculus. Annals of Science, Santa Cruz, v. 71, n. 3, p. 335-354, 2014.
SONAR, T. The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz. Braunschweig: Springer, 2018. ISBN 978-3-319-72563-3.
STEWART, J. Cálculo: volume 1. 8. ed. Tradução: Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 680 p., 28cm. Título original: Calculus: early transcendentals. ISBN 978-85-221-2583-8.
SUZUKI, J. The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits. Mathematics Magazine, New York, v. 78, n. 5, p. 339-353, 2005.
85

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO COMPLETO

Impressões sobre os seminários

Os dados coletados por meio deste questionário serão utilizados exclusivamente para fins de pesquisa. Agradecemos sua participação nos seminários e esperamos que tenham gostado!

*Obrigatório

1. Em termos de informações sobre o percurso histórico que culminou no TFC, os seminários apresentados trouxeram novos conhecimentos para você? *

   Marcar apenas uma oval.

   - ◯ Sim, muitos.
   - ◯ Sim, poucos.
   - ◯ Não.

2. Assistir esses seminários o ajudou a compreender melhor o TFC? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não.

3. Em sua opinião, no que diz respeito ao processo de ensino, a apresentação de alguns fatos históricos e resultados anteriores ao TFC facilitaria sua compreensão por parte dos estudantes? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim.
- Não.
- Prefiro não opinar.

4. Qual foi sua principal motivação para assistir aos seminários? *

Marcar apenas uma oval.

- Obter certificado de horas de atividade.
- Aprender mais sobre o TFC, pois é um assunto no qual tenho dificuldade.
- Aprender mais sobre o TFC, a fim de enriquecer minhas aulas.
- Outro: __________________

5. Caso deseje, deixe aqui sua opinião sobre os seminários, bem como sugestões para sua melhoria. Desde já, agradecemos sua participação!