MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES
LETHÍCIA EMILY CARDOSO FERNANDES

UMA ANÁLISE ACERCA DA DEFASAGEM EM TÓPICOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Campos dos Goytacazes/RJ

Julho – 2021

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES
LETHÍCIA EMILY CARDOSO FERNANDES

UMA ANÁLISE ACERCA DA DEFASAGEM EM TÓPICOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Destéffani Admiral

Campos dos Goytacazes/RJ

Julho – 2021

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

M543a

Menezes, Alice Pereira Stellet de
Uma análise acerca da defasagem em tópicos da Matemática Elementar na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I / Alice Pereira Stellet de Menezes, Lethícia Emily Cardoso Fernandes - 2021.
158 f.: il. color.

Orientador: Tiago Destéffani Admiral

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.
Referências: f. 136 a 142.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Matemática Elementar. 3. Análise de Erros. 4. Teoria da Aprendizagem Significativa. I. Cardoso Fernandes, Lethícia Emily . II. Admiral, Tiago Destéffani, orient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES
LETHÍCIA EMILY CARDOSO FERNANDES

UMA ANÁLISE ACERCA DA DEFASAGEM EM TÓPICOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 16 de julho de 2021.

Banca Examinadora:

Tiago Destéffani Admiral
____
Tiago Destéffani Admiral
(Doutor em Ciências Naturais/UENF)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Ana Paula Rangel de Andrade
____
Ana Paula Rangel de Andrade
(Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade/UCAM)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

Carla Antunes Fo.
____
Carla Antunes Fontes
(Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus por ter nos permitido chegar até aqui, nos protegendo, dando força, determinação e iluminando nossa trajetória acadêmica.

Agradecemos às nossas famílias pelo apoio dado desde que iniciamos a graduação. Esse suporte é sempre fundamental.

Agradecemos ao professor Tiago, que prontamente aceitou nos orientar, sempre com palavras de tranquilidade. Foi um prazer aprender com você durante as aulas e também no desenvolvimento desta pesquisa.

Agradecemos às professoras Ana Paula e Carla, que tanto contribuíram para a nossa formação acadêmica e profissional, e também aceitaram compor a banca de avaliação deste trabalho.

Agradecemos às professoras Poliana, Schirlane e Paula por toda ajuda durante a coleta de dados. A disponibilidade e o apoio de vocês foram muito importantes para nós, e essenciais para a nossa pesquisa.

Agradecemos uma à outra pelo companheirismo, dedicação e amizade, que tornaram o processo de construção deste trabalho tranquilo e enriquecedor. Sem sombras de dúvidas, é uma parceria estabelecida para a vida pessoal e profissional.

Agradecemos aos amigos da faculdade, que contribuíram para que a rotina fosse mais leve. A companhia, as risadas e as experiências compartilhadas serão guardadas para sempre, com muito carinho por cada uma de nós.

"Os analfabetos do século XXI não são aqueles que não sabem ler ou escrever, mas aqueles que se recusam a aprender, desaprender e reaprender."

(Alvin Toffler)

RESUMO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido tema de diversas pesquisas dentro e fora do Brasil. Diante do alto índice de reprovação, registrado por diversas universidades, é importante entender os fatores que influenciam no processo de ensino e aprendizagem dos alunos nesse componente curricular, buscando maneiras de contornar esta situação anteriormente mencionada. Uma das causas apontadas para indicadores tão baixos é a defasagem em Matemática Elementar ou Básica, trazida por aqueles que ingressam no Ensino Superior. Estudos apontam que, por vezes, as dúvidas mais recorrentes apresentadas pelos alunos não estão relacionadas ao conteúdo específico da disciplina da graduação, mas a conceitos básicos, vistos nos Ensino Fundamental e Ensino Médio. Perante esse cenário, este trabalho teve como objetivo geral analisar de que forma a defasagem em tópicos da Matemática Elementar, abordados na Educação Básica, influencia o desempenho dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro nos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Para isso foi realizada uma pesquisa qualitativa, utilizando a metodologia de Análise de Erros ou Produções Escritas com onze licenciandos. A coleta de dados ocorreu por meio dos seguintes instrumentos: observação, anotações no diário de campo, questionários, entrevistas e respostas às atividades disponibilizadas no decorrer do período de aulas. Utilizou-se a Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, que evidencia a importância de ter conhecimentos prévios fundamentados para associar novos aprendizados à estrutura cognitiva, como fundamentação teórica para as análises dos resultados. O estudo mostrou que os licenciandos possuem obstáculos no entendimento de conceitos matemáticos básicos, como fatoração, simplificação e divisão de polinômios; manipulações algébricas com funções trigonométricas; e manipulações algébricas de expressões contendo raízes quadradas. Espera-se que o trabalho desenvolvido colabore para reflexões a respeito de como tem sido o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I no curso em questão.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Matemática Elementar. Análise de Erros. Teoria da Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

The subject of Differential and Integral Calculus has been the topic of several researches in Brazil and abroad. Given the high failure rate, recorded by several universities, it is important to understand the factors that influence the teaching and learning process of students in this curricular component, seeking ways to get around this previously mentioned situation. One of the causes pointed out for such low indicators is the gap in Elementary or Basic Mathematics, brought by those who enter Higher Education. Studies show that, sometimes, the most recurrent students' doubts are not about the specific content of the undergraduate discipline, but they are about basic concepts, seen in Elementary and High School. Given this scenario, this study aimed to analyze how the gap in Elementary Mathematics topics, addressed in Basic Education, influences the performance of the Licentiate Degree in Mathematics' student at IFFluminense Campos Centro campus in the contents covered in the discipline of Differential and Integral Calculus I. For this a qualitative research was accomplished, using the methodology of Error Analysis or Written Productions with eleven undergraduates. Data collection took place through the following instruments: observation, notes in the field diary, questionnaires, interviews and responses to activities made available during the class period. David Ausubel's Theory of Meaningful Learning was used as a theoretical foundation for the analysis of the results. This theory shows the importance of having grounded prior knowledge to associate new learnings with the cognitive structure. The study showed that undergraduates have obstacles in understanding basic mathematical concepts, such as factoring, simplifying and dividing polynomials; algebraic manipulations with trigonometric functions; and algebraic manipulations of expressions containing square roots. It is expected that the work developed will contribute to reflections on how the performance of students has been in the discipline of Calculus I in this course.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Elementary Mathematics. Error Analysis. Meaningful Learning Theory.

LISTA DE SIGLAS

AMT – *Advanced Mathematics Thinking*

AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem

BDTD – Base Digital Brasileira de Teses e Dissertações

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

FM I – Fundamentos de Matemática Elementar I

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IES – Instituição de Ensino Superior

IFFluminense – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

IFPR – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

IFRJ – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro

IFRN – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

IFSP – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

LEAMAT – Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PPC – Projeto Político Pedagógico do Curso

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

SISU – Sistema de Seleção Unificada

TCC 1 – Trabalho de Conclusão de Curso 1

TCC 2 – Trabalho de Conclusão de Curso 2

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

USP – Universidade de São Paulo

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática desempenha um papel muito importante na vida. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), ela auxilia na resolução de problemas do dia a dia, tem aplicabilidade no mundo do trabalho e pode ser utilizada como ferramenta na construção de conhecimentos de diversas áreas no currículo. Além disso, ela é necessária para a formação humana, pois é essa disciplina que desenvolve o raciocínio lógico, a organização e o tratamento de informações, além de contribuir para a educação financeira, entre outros, como afirma Costa Neto (2017).

O ensino de Matemática pode causar diversas sensações. Contudo, de acordo com os PCN, costuma suscitar duas vertentes opostas: por parte do docente, a de que é uma área valiosa do conhecimento e, por parte do discente, a frustração em relação aos resultados alcançados durante a sua aprendizagem (BRASIL, 1997).

Pelo ângulo dos discentes, Silva e Martinez (2017) entendem que as frustrações e a desmotivação dos alunos frente ao aprendizado de Matemática podem estar relacionadas às deficiências conceituais trazidas por eles de conteúdos do Ensino Fundamental. Na visão das autoras, fica claro que as lacunas com relação à Matemática Básica estão associadas aos problemas evidenciados desde o Ensino Fundamental, perpassando também pelo Ensino Médio. As autoras compreendem Matemática Básica, que é o mesmo que Matemática Elementar, como os conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental até o Ensino Médio (SILVA; MARTINEZ, 2017).

Nesse mesmo ponto de vista, muitas das experiências vivenciadas pelos alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental podem esclarecer o mau rendimento deles em Matemática nos anos seguintes, inclusive os níveis de afetividade com a disciplina, como afirmam Otto, Dionizio e Brandt (2019).

Por meio de uma experiência proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática, foi possível perceber os reflexos da falta de base em Matemática por parte dos alunos. Uma das autoras desta pesquisa teve a oportunidade de elaborar junto com outros licenciandos, em uma disciplina do curso denominada Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT), uma sequência didática envolvendo conceitos e questões da Matemática Elementar. A aplicação ocorreu em uma turma do 3.º ano do Ensino Médio, de uma instituição pública. De modo geral, os alunos apresentaram muitas dificuldades, ou por não saberem como chegar às respostas ou por não conseguirem explicar os algoritmos utilizados. Foi possível observar que eles não tinham o conhecimento básico necessário para formular estratégias na tentativa de chegar à solução dos problemas propostos, o que se agravou pelo fato de estarem no último ano do Ensino Médio. Por esse ângulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000) ressaltam que os alunos não precisam ter várias estratégias e até mesmo sofisticadas, mas sim ter a iniciativa de adaptar os conhecimentos já adquiridos e utilizá-los em diferentes contextos, de maneira adequada (BRASIL, 2000).

A outra experiência que motivou este trabalho está relacionada ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), que é vinculado à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Em agosto de 2018, as autoras desta pesquisa tornaram-se bolsistas do Programa, que é responsável por incentivar a valorização da profissão docente e proporcionar contato do licenciando com a sala de aula de alguma escola pública na qual o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) está baixo, logo nos primeiros períodos da graduação.

Durante alguns meses de atuação com alunos do 6.º ao 9.º anos de uma das escolas que participou do PIBID no edital de 2018, foi possível observar que eles traziam muitas dificuldades no que diz respeito à interpretação de texto, dificultando a compreensão da linguagem materna, que neste caso é a Língua Portuguesa e, consequentemente, a passagem para a linguagem simbólica matemática, na solução dos problemas propostos. Além disso, também apresentavam dificuldades em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, tópicos fundamentais e muito importantes para o desenvolvimento de conteúdos futuros dentro e fora da Matemática.

Os dados obtidos por meio do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) dão embasamento às observações feitas e mencionadas anteriormente. Esse sistema[1] é composto por um conjunto de avaliações externas às escolas da rede pública realizadas desde 1990, com o objetivo de fazer um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem influenciar no desempenho dos alunos. A avaliação é aplicada a cada dois anos em escolas da rede pública e, facultativamente, na rede privada. Com isso, fornece informações sobre a aprendizagem dos alunos avaliados e os níveis de proficiência em Língua Portuguesa, Matemática e Ciências (disciplina acrescentada a partir da edição de 2019). O

[1] As informações foram retiradas do site: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb.

público-alvo são os estudantes do 5.º e 9.º anos do Ensino Fundamental e do 3.º ano do Ensino Médio.

Os resultados apresentados nas avaliações mais recentes do SAEB[2], efetuadas em 2015, 2017 e 2019, foram divulgados pelo site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP, 2020), que é responsável por financiar a formulação de políticas educacionais, contribuindo para o desenvolvimento social e econômico do país. No que diz respeito à Matemática, as últimas médias de todo país nas turmas de 9.º ano foram, respectivamente: 256, 258 e 263. Já nas turmas de 3.º ano, foram, respectivamente: 267, 270 e 277. Tendo como base o maior valor que pode ser obtido, que é 500, nota-se que o nível de aprendizagem dos alunos ainda está muito abaixo do que seria considerado adequado.

Considerando os dados supramencionados, percebe-se que os alunos têm perpassado pelos níveis de ensino apresentando diversas lacunas no que se refere à Matemática Elementar, como afirma Teixeira (2019). Nesse sentido, Alves (2016) evidencia que os primeiros anos escolares são essenciais para a formação estudantil, pois dão embasamento para as demais séries. Isso ocorre em Matemática, principalmente, porque os conceitos e relações serão usados ao longo da vida escolar.

Como ressaltam Anjos e Secafim (2018), é justamente a defasagem desses conteúdos básicos vistos nos anos iniciais que será arrastada até o Ensino Superior. As autoras também apontam que, por vezes, essas dificuldades se tornam fatores determinantes no momento em que os alunos escolhem o curso de graduação, na qual optam por aqueles que têm poucas disciplinas de Matemática na matriz curricular. Além disso, quando o curso é escolhido tendo em vista a área de atuação e neste há a presença de disciplinas da área de Exatas, esse fator poderá influenciar na conclusão do curso em questão. Em concordância, Rafael (2017) também indica que é comum que os alunos cheguem ao Ensino Superior defasados na Matemática ensinada no Ensino Básico.

Sabendo que essa defasagem pode ser evidenciada em diversas disciplinas do Ensino Superior dos cursos de Exatas, optou-se por analisar a de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) I, pela proximidade das autoras com a disciplina e pela observação das dificuldades trazidas pelos colegas quando esta foi cursada durante a graduação. Além disso, há de se levar em consideração o fato de que a disciplina de Cálculo não é importante apenas para os cursos da

---

[2] As informações foram retiradas do site: http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/resultados.

área de Exatas. Rafael (2017) ressalta sua importância graças à vasta aplicação em outras áreas do conhecimento que possui.

Nessa perspectiva, Ferruzzi (2012) indica que as falhas de aprendizagem no ensino de Matemática, na passagem do nível Básico para o nível Superior, têm sido uma das principais causas dos índices de reprovação ou desistência na disciplina de Cálculo I. Além disso, Bueno e Viali (2019) ainda enfatizam que apesar dos professores que lecionam temas como limite, derivada e integral terem um vasto domínio matemático sobre eles, essa base acaba não influenciando de modo direto no sucesso de seus alunos.

Levando em consideração todas as experiências mencionadas e a observação da deficiência apresentada em conteúdos elementares da Matemática ao nível de ensino em que se encontra, fomentou-se a vontade de desenvolver uma pesquisa que tivesse como público-alvo os alunos que ingressam no Ensino Superior, visto que o trabalho abordou o desempenho deles nos conteúdos da disciplina de CDI I.

Diante do exposto, estruturou-se a seguinte questão de pesquisa: "De que forma a defasagem em tópicos da Matemática Elementar, abordados na Educação Básica, influencia o desempenho do aluno da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro nos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I?"

Para responder à pergunta, traçou-se o seguinte objetivo geral: Identificar de que forma a defasagem em tópicos da Matemática Elementar, abordados na Educação Básica, influencia o desempenho do aluno da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro nos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Para que o objetivo geral seja alcançado, foram estipulados os seguintes objetivos específicos:

- Aprofundar os estudos sobre o panorama do ensino e do desempenho dos alunos nas disciplinas de Cálculo I no Brasil;
- Identificar quais são os conteúdos abordados na Educação Básica nos quais os alunos apresentam mais dificuldades;
- Colaborar, por meio da análise dos dados levantados na pesquisa, para reflexões pedagógicas sobre a importância de implementar medidas que possam ajudar a reduzir os índices de reprovação na disciplina de CDI I.

Este trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos, sendo este o primeiro.

O segundo apresenta a revisão da literatura, com o aporte teórico que orienta esta pesquisa. Trata-se de: a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, que embasou a análise dos resultados obtidos; um panorama do ensino e desempenho de Cálculo no Brasil; contribuições de David Tall a respeito do Pensamento Matemático; e trabalhos relacionados que se assemelham com o tema abordado.

Os aspectos metodológicos são descritos no terceiro capítulo, abordando a metodologia de Análise de Erros ou Produções Escritas dos alunos; os instrumentos de coleta de dados, assim como os seus processos de elaboração; e os resultados obtidos para delimitação da abordagem temática.

No quarto capítulo, estão informações a respeito da instituição de ensino onde ocorreu a pesquisa, assim como das disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar I (FM I) e CDI I, que foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

O quinto apresenta a descrição das aplicações e as análises dos resultados obtidos pelos instrumentos de coleta de dados.

No sexto e último capítulo, encontram-se as considerações finais e a resposta à questão de pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, é apresentado o aporte teórico que fundamentou a construção deste trabalho monográfico. Ele está subdividido em três seções: I) A Teoria da Aprendizagem Significativa, com uma discussão sobre como a teoria de Ausubel explica a necessidade de se ter os conhecimentos da Matemática Básica ancorados para que ocorra a aprendizagem dos conhecimentos da disciplina de CDI I; II) Um panorama do ensino e do desempenho na disciplina de Cálculo no Brasil, e o aprendizado de CDI de acordo com teorias elaboradas por David Tall; e III) Trabalhos relacionados, que se assemelham à presente pesquisa com relação à dificuldade que os alunos apresentam na transição do Ensino Básico para o Ensino Superior, sobretudo na disciplina de CDI I.

2.1 Teoria da Aprendizagem Significativa

Como este trabalho busca compreender as influências da defasagem de conteúdos na passagem do nível Básico de ensino para o nível Superior, torna-se coerente relacioná-lo à Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

Segundo Distler (2015), David Paul Ausubel desenvolveu suas teorias pautadas nos aspectos cognitivos, tendo como norte os relatos de Jean Piaget. A autora aponta que: “O trabalho central de sua teoria está na identificação dos fatores que efetivam e facilitam a aprendizagem.” (DISTLER, 2015, p. 195).

A Teoria de Ausubel, como também evidenciado por Distler (2015), tem por objetivo simplificar o aprendizado do indivíduo, retratando a aprendizagem significativa como parte crucial no processo de alcance do conhecimento.

Segundo Moreira (2017), a Teoria de Ausubel afirma que o fator que mais possui influência no processo de ensino e aprendizagem do aluno é o que ele já sabe. Assim, o papel do professor é identificar esses conhecimentos e ensinar os novos tendo estes como base. Moreira (2017) afirma que quando conceitos relevantes estão disponíveis na estrutura cognitiva, novas informações podem ser retidas nela. Dessa forma, esses conceitos fornecem ancoragem para as novas ideias a serem aprendidas (MOREIRA, 2017).

Em outras palavras, os conhecimentos “antigos” funcionam como uma âncora para os novos. Ausubel também define o conceito de *subsunçor*[3]. Segundo Distler (2015), Ausubel

---

[3] A expressão “*subsunçor*” não existe em português. Provém da tentativa de aportuguesar a palavra “*subsumer*”, que é equivalente a facilitador ou subordinador (MOREIRA, 2017).

chama de estrutura cognitiva o “armazenamento de informações” extremamente organizado e hierarquizado do cérebro humano.

Nesta perspectiva, Moreira (2017) salienta que a aprendizagem significativa é o modo pelo qual uma nova informação associa-se com um aspecto especialmente relevante da organização de conhecimento do indivíduo. Dessa forma, o conhecimento dito novo interage com uma disposição específica da estrutura cognitiva do indivíduo, chamada por Ausubel de *subsunçor* ou *conceito subsunçor*. Portanto,

> A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimentos são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo. (MOREIRA, 2017, p. 161).

Assim, o autor também destaca que à medida que a aprendizagem se torna significativa, os *conceitos subsunçores* se tornam cada vez mais capazes de ancorar novas informações, sendo estas armazenadas na estrutura cognitiva do indivíduo (MOREIRA, 2017). No caso dos conteúdos da disciplina de CDI I, por exemplo, os *conceitos subsunçores* são os trazidos do nível Básico. No entanto, se os alunos não tiveram uma aprendizagem significativa destes, quer dizer que a compreensão que fizeram foi apenas de forma mecânica, automática, por meio da memorização, sem significados e sem sentido.

Segundo Moreira (2017), esse tipo de aprendizagem mecânica representa total oposição com relação à aprendizagem significativa. O autor aponta que Ausubel a define como sendo uma aprendizagem que não interage com os conceitos relevantes presentes na estrutura cognitiva, os *subsunçores*. Dessa forma, o conhecimento adquirido fica armazenado de maneira arbitrária, não estabelecendo uma ligação com os conceitos de ancoragem específicos (MOREIRA, 2017).

Entende-se por maneira arbitrária a forma de armazenar ilogicamente as informações. No caso da disciplina de CDI I, se os conteúdos anteriores e requisitos da Matemática foram absorvidos dessa forma, consequentemente, os alunos não terão a ancoragem necessária para aprofundar os conceitos abordados em tal componente curricular.

Moreira (2017) também aponta que, para Ausubel, existem condições para que a aprendizagem significativa ocorra. Uma delas é que o material a ser aprendido esteja associado à estrutura cognitiva do aprendiz. Tendo essa característica, o autor o define como *potencialmente significativo.* Isso implica não só que o material tenha uma sequência lógica, mas também que os conceitos *subsunçores* apropriados estejam disponíveis na estrutura cognitiva do estudante (MOREIRA, 2017).

O autor também ressalta que outra condição para que ocorra de fato a aprendizagem definida por Ausubel, é que o aprendiz tenha disposição para associar de forma fundamentada o material dito *potencialmente significativo* à sua estrutura cognitiva. Ou seja, independentemente do quão *potencialmente significativo* seja o material, caso o indivíduo esteja disposto a apenas memorizá-lo, de forma mecânica, sem atribuir-lhe significado relacionando-o aos conceitos ancorados, seu processo de aprendizagem será também mecânico. No entanto, independentemente do aprendiz estar disposto, caso o material não seja *potencialmente significativo*, o processo de aprendizagem também não será (MOREIRA, 2017).

Existem formas de verificar se a aprendizagem foi de fato significativa. Moreira (2017) ressalta que, para Ausubel, "[...] a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica a posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis." (MOREIRA, 2017, p. 164). O autor também aponta que se deve tomar cuidado com os testes de compreensão utilizados, pois estes devem ser diferentes dos que são originalmente usados para o aprendizado.

Ausubel também propõe a Teoria da Assimilação. Segundo Darroz (2018), nessa teoria, a nova informação considerada potencialmente significativa estabelece relação e assimilação com um conceito subsunçor já existente na estrutura cognitiva. Consequentemente, é gerado um produto interacional, que é um "*subsunçor* com modificações". Dessa forma, a nova informação se torna subordinada aos conceitos subsunçores (DARROZ, 2018).

Por exemplo, para que um aluno compreenda o limite trigonométrico fundamental, conteúdo abordado em CDI I, é necessário que ele já tenha aprendido, isto é, que esteja fixado em sua estrutura cognitiva, as fórmulas, definições e relações vistas no estudo da Trigonometria, que são essenciais nas transformações feitas para encontrar os valores dos limites. Dessa forma, o novo conceito abordado (limite trigonométrico fundamental) será assimilado por meio do conceito mais inclusivo (Trigonometria). E, assim, não somente o conceito de limite será adquirido significativamente pelo aprendiz, como também trará modificações nas definições tratadas na Trigonometria, permitindo, então, torná-las mais inclusivas.

Pode-se classificar a aprendizagem de Cálculo I a partir dos conceitos da Matemática Elementar como sendo *subordinada*. Segundo Moreira (2017), essa é a aprendizagem significativa que ocorre quando um conceito *potencialmente significativo* é obtido a partir da assimilação dos *subsunçores*. Deste modo, ocorre o que Ausubel chama de *reconciliação integrativa* ou *reconciliação integradora*, quando: "[...] novas informações são adquiridas e elementos existentes na estrutura cognitiva podem reorganizar-se e adquirir novos significados." (MOREIRA, 2017, p. 168).

Evidentemente, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel não é explicada apenas pelas definições tratadas neste trabalho. Ela apresenta outros assuntos relativos ao desenvolvimento da aprendizagem de um indivíduo, que não foram trabalhados na presente pesquisa.

Para analisar se, de fato, os alunos tiveram uma aprendizagem significativa dos conteúdos considerados elementares, tornou-se coerente investigar os processos que os conduziram ao erro nas resoluções que envolvem os conteúdos de CDI I. Entretanto, antes que este assunto seja abordado neste texto monográfico, são apresentados no subtópico a seguir: uma síntese do cenário da disciplina de CDI no Brasil, assim como perspectivas a respeito de seu ensino e do desempenho dos estudantes nos cursos de graduação.

2.2 Cálculo Diferencial e Integral: um panorama histórico

Aqui, são apresentadas: uma breve introdução sobre os movimentos que deram origem às preocupações por parte dos pesquisadores com o ensino e a aprendizagem de CDI; dissertações de mestrado e teses de doutorado dos últimos seis anos (2015-2020), de pesquisadores brasileiros, a fim de traçar um panorama de como têm sido o ensino por parte dos professores e o desempenho por parte dos alunos na disciplina de Cálculo nas Instituições de Ensino Superior (IES) do Brasil; e algumas das contribuições do pesquisador David Tall com relação ao presente tema.

2.2.1 Retrospectiva do ensino de Cálculo no Brasil

O Cálculo Diferencial e Integral é um segmento da Análise Matemática muito importante para compreender a Matemática Pura e fenômenos da natureza (MARTINS;

ARAÚJO; OLIVEIRA, 2016). Três são os temas fundamentais do Cálculo: Limites, Derivadas e Integrais. Além disso, existem duas subdivisões primordiais: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Ambos apresentam conceitos e aplicações associados a problemas geométricos do gráfico de uma função do tipo $y = f(x)$ (DÖRR, 2017).

No que diz respeito ao Cálculo Diferencial, o "Problema das Tangentes" está relacionado ao cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em determinado ponto P pertencente ao gráfico. Já no Cálculo Integral, o "Problema do Cálculo de Áreas" se baseia em calcular a área abaixo do gráfico da função $y = f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$ (DÖRR, 2017). A autora também afirma que esses problemas possuem relação com estudos de grandezas que passam por modificações devido à movimentação. "Por exemplo, a posição, a trajetória, a velocidade a aceleração de um corpo em movimento, ou qualquer quantidade que varia em relação à outra pode ser modelada com os instrumentos do Cálculo". (DÖRR, 2017, p. 35).

Portanto, o Cálculo está baseado em conhecimentos e ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas na análise de corpos que estão em movimento (DÖRR, 2017).

Além de ser uma disciplina obrigatória nos cursos de Ciências Exatas, como já mencionado no capítulo introdutório desta monografia, também é de fato muito importante em cursos de outras áreas, conforme afirma Rafael (2017). A autora evidencia que este é o caso, por exemplo, dos cursos de Farmácia, de Enfermagem e de Agronomia. Contudo, apesar de sua grande importância, muitos alunos apresentam resultados insatisfatórios. Isso tem contribuído para os altos índices de reprovação da disciplina, prejudicando o desempenho dos estudantes e atrasando a conclusão do curso de graduação escolhido, como ressalta Luz (2011).

Atualmente, o Cálculo que é estudado foi formalizado por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Todavia, esses conceitos são resultados de um longo processo de criação que perdura até os dias de hoje (DÖRR, 2017). A seguir, é apresentado um breve histórico dessa disciplina no Brasil, incluindo como ela chegou ao país e todas as transformações até então.

De acordo com Lima (2012), a disciplina de CDI passou a ser ensinada no Brasil no ano de 1810, na Academia Real Militar do Rio de Janeiro. O estudo era ofertado pelo *Curso Mathematico* baseado na tradução do livro "*Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*" (Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral), de Sylvestre

François Lacroix (1765-1843). Essa obra foi adotada por décadas como a principal fonte teórica no ensino de Matemática superior no país (LIMA, 2012).

Diante da análise do livro de Lacroix, Lima (2012) constatou que não havia preocupação em expor noções intuitivas dos conceitos ou significados das notações utilizadas. Além disso, os livros daquela época eram produzidos somente para mostrar uma síntese dos assuntos matemáticos tratados, não enunciando qualquer ponto de vista didático, diferentemente do que se encontra nos livros atuais (LIMA, 2012).

Em 1893, foi criada a Escola Politécnica de São Paulo sob os moldes estabelecidos pela *École Polytechnique* de Paris. O livro referência para o ensino de Cálculo nessa instituição era o "*Premiers Élements du Calcul Infinitesimal*" (Primeiros Elementos do Cálculo Infinitesimal), de Hippolyte Sonnet (1802-1879). Essa obra utiliza os conceitos de Leibniz e Newton, enfatizando os infinitésimos e a noção intuitiva de limite. O rigor presente foi considerado pertinente ao curso naquela época, que era voltado para a formação de engenheiros. No que diz respeito à derivada, três métodos diferentes eram apresentados, baseados nas concepções de: Newton, Leibniz e Lagrange (LIMA, 2012).

Tanto na Academia Real Militar do Rio de Janeiro quanto na Escola Politécnica de São Paulo, o objetivo era formar profissionais da área militar e engenheiros, mas os conteúdos de Cálculo não eram apresentados envolvendo situações práticas. A ênfase estava nas regras de derivação e integração. Essa maneira de ensino foi uma das principais características do processo de ensino de CDI no Brasil no século XIX e início do século XX (LIMA, 2012).

Posteriormente, em 1934, foi criada a Universidade de São Paulo (USP), a primeira universidade do país, e que oferecia o primeiro curso de graduação em Matemática do Brasil na sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. A intenção era que essa instituição seguisse os modelos das mais renomadas universidades da Europa. Para isso, pesquisadores estrangeiros foram contratados, dentre eles, o italiano Luigi Fantappiè (LIMA, 2013).

Fantappiè apresentou o modelo seguido pelos cursos de Matemática na Itália e em outros países europeus. Lá, não havia uma disciplina nomeada como "Cálculo Diferencial e Integral" e os conceitos fundamentais relacionados a essa área eram trabalhados na disciplina de Análise Matemática, que desde o começo fora ministrada com alto nível de rigor simbólico-formal (LIMA, 2013).

Após a introdução da disciplina de Análise no curso de Matemática da USP, essa nova perspectiva acabou influenciando fortemente as outras IES no país, que deixaram de ofertar cursos nomeados como “Cálculo” e também introduziram disciplinas de Análise. Ou então, ainda as que optaram por manter a nomenclatura do curso, transformaram a abordagem dada aos conteúdos. Um exemplo disso é que os cursos das escolas militares e politécnicas apresentavam um caráter mais prático, que dava ênfase às definições e deduções que poderiam ser usadas no desenvolvimento da disciplina. Depois desse acontecimento, o objetivo passou a ser: fornecer uma base sólida de conceitos e elementos matemáticos estudados (LIMA, 2013).

Outras instituições foram criadas, como a Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal (1935) e a Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil (1939). A partir daí, surgiram os principais centros brasileiros de pesquisa da Matemática, ocasionando uma mudança no panorama do ensino dessa disciplina no país (OLIVEIRA, 2004).

Na década de 1950, o curso de Matemática da USP era conduzido pelos cursos magistrais, compostos pela combinação entre práticas orais e escritas, produção e transmissão do saber. Já naquela época, a reprovação na disciplina de Análise era elevada e havia uma ideia de que curso bom é aquele que reprova, ainda muito presente entre os professores nos dias de hoje (OLIVEIRA; RAAD, 2012). Os conteúdos vistos em tal componente curricular exigiam uma maturidade matemática que os alunos ainda não tinham naquele primeiro contato com o Cálculo. Logo, não conseguiam compreender, totalmente, as teorias envolvidas naquela construção. O interesse pela disciplina só era demonstrado quando as ideias de diferenciação e integração eram apresentadas, pois permitia manipulação dos conceitos estudados. Diante disso, um redirecionamento surgiu a respeito da maneira como a disciplina de Análise era trabalhada (LIMA, 2013).

Segundo o autor,

> O foco da disciplina deveria continuar sendo a teoria que, no entanto, poderia ser trabalhada de forma mais acessível aos alunos ingressantes na universidade, deixando para um momento posterior do curso alguns refinamentos. Por outro lado, as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais que, até então não tinham qualquer espaço no curso inicial de Análise Matemática, deveriam sim ser incorporadas à disciplina, não como sua parte central, mas como ferramentas que possibilitassem ao estudante manipular aqueles conteúdos que haviam estudado, o que também é importante em um primeiro contato com os mesmos. (LIMA, 2013, p. 6).

Começou, então, a busca por um ensino mais próximo do Cálculo do que da Análise. A percepção do aluno começou a ganhar espaço, principalmente a geométrica, porque a abstração ficou um pouco reduzida. Quanto ao rigor, passou a ser mais moderado, adequando-se ao público-alvo da disciplina (LIMA, 2013).

Em 1960, ainda na USP, o ensino sofreu algumas modificações. O curso passou a adotar livros americanos que apresentavam uma abordagem diferente da escola europeia, com ênfase na manipulação algébrica de limites, derivadas e integrais (OLIVEIRA; RAAD, 2012). Nesse período, também aconteceu a introdução da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no currículo do curso. O modelo utilizado pelos Estados Unidos passou a ser adotado, pois lá o ensino de Cálculo e Análise acontecia da seguinte maneira: os conceitos do Cálculo eram trabalhados de maneira mais intuitiva, com moderado nível de rigor e maior destaque aos significados do que aos fundamentos; posteriormente, esses conteúdos eram revistos em Análise (ou Cálculo Avançado), com uma tendência mais crítica e voltada aos fundamentos (LIMA, 2013).

Mais uma vez, essa mudança refletiu no ensino de Cálculo nas outras instituições brasileiras. Lima (2013) destaca que as universidades começaram uma busca por níveis de rigor e formalismo que fossem mais convenientes no trabalho em uma disciplina que é destinada aos alunos ingressantes, abordando os conceitos de maneira mais adequada à maturidade matemática dos universitários que estavam iniciando seus estudos (LIMA, 2013).

Todas essas mudanças geraram novas posturas, tanto dos alunos, que se tornaram mais participativos e questionadores, quanto dos professores, que precisaram buscar alternativas didáticas. Diante disso, foram implantados roteiros de estudos e trabalhos em grupo. Também houve a adoção do livro "*Cálculo: um curso universitário*", que apresentava uma abordagem em espiral. Dessa forma, haveria um contato com o mesmo conceito diversas vezes, só que com maiores níveis de detalhamento e formalismo (LIMA, 2013).

Apesar das modificações citadas anteriormente, o rendimento dos alunos na disciplina de Cálculo continuava abaixo do que era esperado. Ainda havia certo estranhamento com a linguagem simbólico-formal usada para apresentar os conceitos estudados. Assim, para alguns docentes, o curso passou a ser menos rigoroso do que deveria. O grupo que defendia essa ideia decidiu adotar o manual de Spivak[4], com uma abordagem mais analítica dos conteúdos vistos na disciplina (LIMA, 2013). Embora o livro tivesse uma abordagem mais detalhada e

[4] Este manual possuía um foco maior nos fundamentos dos principais resultados da Análise, enquanto os procedimentos algorítmicos não recebiam tanta atenção. Além disso, Spivak também destaca que "definições provisórias" (mais simples e intuitivas) possuem limitações, mas são importantes para serem incorporadas às definições matemáticas formais. Com isso, é necessário haver uma relação entre intuição e rigor nos processos de ensino e de aprendizagem (SILVA; LIMA, 2015).

cuidadosa a respeito dos conteúdos de Cálculo, a maneira como ele foi utilizado em sala de aula acabou influenciando no processo de ensino e aprendizagem, visto que o alto nível de rigor e formalismo não era algo presente no dia a dia dos estudantes (SILVA; LIMA, 2015).

Nessa mesma perspectiva de alterações na disciplina de CDI, segundo Rafael (2017), teve início na década de 1980 um movimento chamado "*Calculus Reform*" (Reforma do Cálculo), que tinha a intenção de mudar a forma como a disciplina era ensinada. Segundo Luz (2011), esse movimento foi iniciado nos Estados Unidos com a intenção de pautar o ensino de Cálculo em três vias: a numérica, a geométrica e a analítica, permitindo, portanto, outras formas de interpretação além da abstração. Por esse motivo, todas as atividades eram baseadas nessa "regra de três", incentivando a interação de várias representações matemáticas ao mesmo tempo (LUZ, 2011). A autora também afirma que uma das principais características desse movimento é a tecnologia, reiterando que o seu uso, neste caso, estava pautado em determinados programas computacionais e calculadoras gráficas, que eram utilizados tanto para o aprendizado quanto para resoluções de problemas (LUZ, 2011).

Cariello, Carvalho e Ribeiro Junior (2010) salientam que essa reforma mostra que havia uma preocupação mundial com o mau desempenho dos alunos em Cálculo, evidenciando que a busca pela melhoria do seu ensino não era uma preocupação apenas do Brasil. Segundo Rezende (2003), é possível notar os reflexos desse movimento nos livros didáticos de Cálculo escritos posteriormente a ele, por terem abordado os conteúdos baseando-se nas três vias mencionadas. É importante destacar que, por meio desses livros, essa nova forma de ensinar Cálculo passou a ser introduzida nas universidades brasileiras.

Mais tarde, a escrita e a oralidade também foram vias incluídas como essenciais para o ensino de CDI, como afirma Rafael (2017). Segundo Luz (2011), a ampliação do ensino que era pautado em três vias, se deu por meio do movimento "*Trends in Calculus Reform*" (Tendências na Reforma do Cálculo), que teve início em 1998. Ou seja, o ensino e a resolução de problemas passaram a ser baseados em cinco vias, pois a escrita e a oralidade foram consideradas tão importantes quanto as três vias mencionadas inicialmente, sendo chamado de "regra dos cinco" (LUZ, 2011).

De acordo com a autora, a partir das concepções dessa regra, os alunos precisam explorar os conceitos de Cálculo por meio de uma relação de qualidade estabelecida entre diferentes representações e atividades. Para ela, é necessário que essas atividades sejam realizadas em laboratórios que promovam a experimentação e a elaboração de conjecturas que façam com que os alunos usem todas as ferramentas que estiverem a seu alcance, como: lápis e papel, calculadoras normais ou gráfica, computadores, além de suas próprias experiências prévias com conceitos matemáticos e métodos que possam ajudá-los a resolver problemas que antes não haviam conseguido.

É interessante destacar que, segundo Luz (2011), como descrito anteriormente, além de todos os recursos que os alunos devem utilizar, eles precisam também usar de suas experiências anteriores com conceitos matemáticos e técnicas, com o objetivo de tentarem solucionar os problemas de Cálculo. Esse fator evidencia a importância de se ter uma base consolidada nos conteúdos de Matemática Elementar vistos no Ensino Básico.

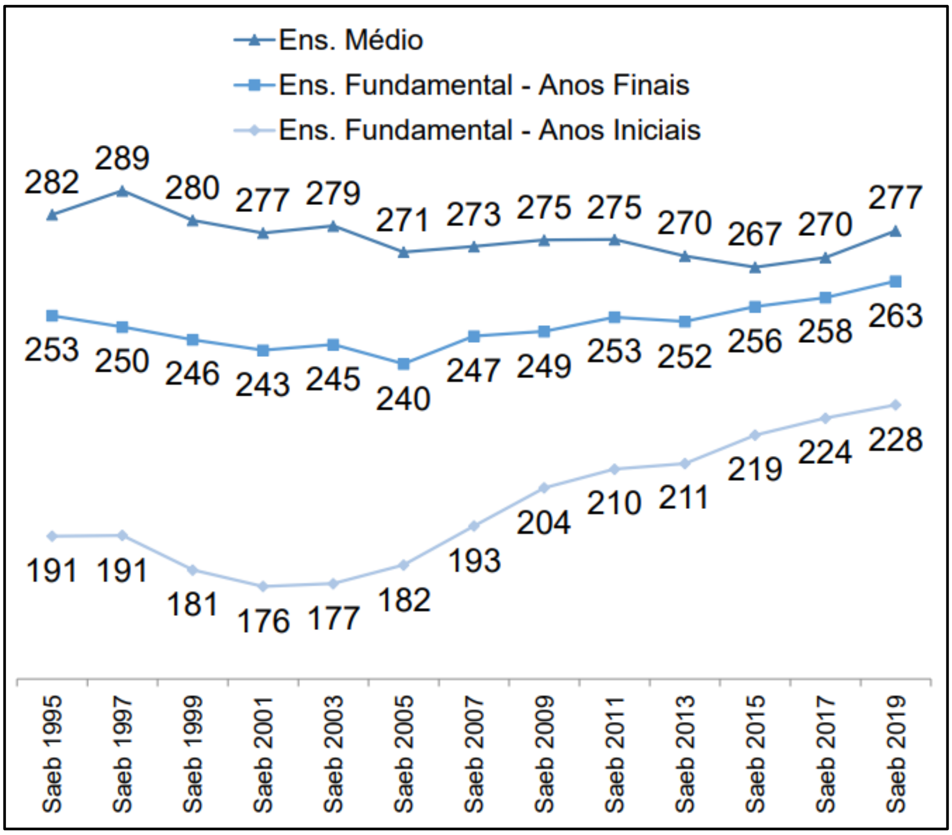
Em suma, muitas mudanças aconteceram ao longo dos anos no que diz respeito ao ensino de Cálculo no Brasil. Contudo, não houve um cuidado em debater sobre os seus objetivos específicos e a sua função nos diversos cursos de graduação em que a disciplina está presente (LIMA, 2013).

Muitos autores têm pesquisado sobre essa temática. Essas pesquisas têm sido realizadas em diversos cursos de licenciatura, bacharelado e tecnólogo, que apresentam a disciplina de CDI em suas matrizes curriculares. Abaixo, serão apresentados alguns trabalhos que retratam o tema abordado a fim de traçar um breve panorama de como o ensino de CDI têm ocorrido no Brasil.

2.2.2 Perspectivas atuais sobre o ensino de Cálculo

As dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática podem ser comprovadas pelos resultados obtidos em avaliações como o SAEB (Figura 1), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e tantos outros exames de vestibulares (TEIXEIRA, 2019).

Figura 1 – Proficiências médias dos estudantes do Brasil em Matemática no SAEB entre os anos de 1995 e 2019



Fonte: INEP (2020, p. 24).

Os dados dispostos na Figura 1 evidenciam as médias entre as Unidades de Federação do Brasil de estudantes dos 5.° e 9.° anos do Ensino Fundamental e da 3.ª série do Ensino Médio, nas avaliações do SAEB realizadas entre 1995 e 2019. A proficiência do SAEB[5] varia de 0 a 500 e é dividida em dez níveis. Os resultados finais são divulgados em uma escala, na qual em cada nível estão dispostas as competências e habilidades que os alunos precisam ter aprimorado até aquele ano de escolaridade. A escala é cumulativa, o que implica no fato de que quanto mais o aluno avança ao longo da escala, mais habilidades ele possui. Sendo assim, é esperado que os alunos do 5.° ano recebam notas menores que os do 9.° e, da mesma forma, que os alunos do 9.° ano recebam notas menores que os da 3.ª série do Ensino Médio.

É possível perceber que, apesar de certo avanço nos resultados do Ensino Fundamental, as médias obtidas ainda não são tão satisfatórias se comparadas à nota máxima, que é de 500 pontos. Já com relação ao desempenho observado no Ensino Médio, é notória uma oscilação das médias. Essas informações apontam para a necessidade de buscar maneiras

[5] Informações retiradas do site: https://bit.ly/37ItMm0.

de proporcionar aos alunos o desenvolvimento que os prepare para a vida acadêmica e profissional, como afirma Teixeira (2019).

Diante disso, é importante analisar como ocorre a construção de conhecimentos matemáticos no Ensino Superior, com o intuito de buscar métodos eficazes de ensino e entender como os alunos se dedicam às disciplinas (SANTOS, 2014).

Masola e Allevato (2016) alegam que é comum escutar que os alunos têm chegado despreparados ao Ensino Superior e que os professores relatam os obstáculos gerados pela falta de conhecimento dos conteúdos matemáticos. Essas dificuldades acabam refletindo em diversas disciplinas do curso em que estão inseridos, influenciando na formação acadêmica dos estudantes.

De acordo com Oliveira e Raad (2012), existem muitas pesquisas, em várias partes do mundo, voltadas para a aprendizagem do Cálculo. Esses estudos apresentam as diversas dificuldades enfrentadas nesse componente curricular, seja de origem didática ou epistemológica, que estão sempre vinculadas aos altos índices de reprovação. Esses mesmos autores falam também de uma ideia solidificada, transmitida pela própria cultura acadêmica, de que tal disciplina é como um obstáculo a ser superado (OLIVEIRA; RAAD, 2012).

Para Silva (2011), entender a epistemologia histórica presente no desenvolvimento de conceitos do Cálculo é importante para que haja uma compreensão maior de todos os desafios envolvidos por trás do processo de ensino e aprendizagem nessa disciplina. Além disso, a associação à evolução histórica pode tornar o ensino mais eficiente.

Rosa, Alvarenga e Santos (2018) apontam que o aluno inicia a graduação com expectativas a respeito de aprendizagem. Ao não conseguir um desempenho considerado satisfatório, acaba perdendo a motivação. Nesse sentido, Rosa, Alvarenga e Santos afirmam que compreender como ocorre o desempenho dos alunos no Cálculo 1 é muito importante, por ser uma disciplina que costuma gerar bastante dificuldade. Como os índices de reprovação são constantes, o estudante pode ser levado a desistir do curso, “[...] pois, ao ser reprovado várias vezes, ele tem a sensação de que é incapaz de aprender os conteúdos, e, então, desiste do curso”. (ROSA; ALVARENGA; SANTOS, 2018, p. 4).

Uma das dificuldades encontradas no ensino de Matemática, com ênfase na disciplina de Cálculo I, é o rigor matemático ainda não tão pertencente à realidade de um estudante que acaba de ingressar na graduação. Os conceitos são ministrados com muito formalismo, ignorando os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da vida acadêmica. Isso não significa uma defesa a não formalização da Matemática no Ensino Superior, mas a importância de haver um contexto de ensino do conteúdo, evitando somente a exposição de enunciados e modelos prontos (COSTA NETO, 2017).

Santos (2014) diz que o ensino de Cálculo não pode ser baseado somente em demonstrações de técnicas e algoritmos para resolver exercícios. Os estudos devem ser conduzidos de forma a percorrer outras áreas do conhecimento, ou seja, gerar interdisciplinaridade e trazer significado ao aprendizado. O autor afirma que: “[...] o professor ao desenvolver um conteúdo com os estudantes necessita construir o conhecimento matemático com os alunos de forma a prepará-los para a utilização de procedimentos, técnicas e criticidade do mesmo.” (SANTOS, 2014, p. 67). Em concordância, Teixeira (2019) complementa que o estudo pode se tornar cansativo quando há diversas listas de exercícios cujo único foco é repetir métodos e técnicas.

Para Martins, Araújo e Oliveira (2016), os professores que lecionam as disciplinas de Cálculo precisam conciliar suas aulas com os objetivos do seu público-alvo, ou seja, adequar suas metodologias de forma a atender as exigências de cada curso. Por exemplo, alunos de Física estudam o Cálculo e suas aplicações em Mecânica, Eletromagnetismo, Termodinâmica. Já na graduação em Matemática, o Cálculo é mais aprofundado que nos outros cursos, e precisa dialogar com a Topologia e a Análise Real.

Rafael (2017) evidencia que, para alguns pesquisadores do Brasil, a baixa qualidade da Educação Básica é a principal responsável pelos dados alarmantes do desempenho dos estudantes na disciplina. A respeito disso, Teixeira (2019) diz que há uma preocupação nas dificuldades encontradas por alunos e professores em relação aos conceitos e propriedades algébricas. Em muitos casos, a Matemática Elementar aprendida não é satisfatória para o que se pretende estudar em Cálculo I. Santos (2014) complementa que, partindo dessas ideias, a aprendizagem na disciplina de Cálculo vai depender de conteúdos que são aprendidos anteriormente, como Álgebra e Aritmética, e que são de grande ajuda ao graduando em seus estudos acadêmicos.

Lima (2013) afirma que é muito importante que os professores das disciplinas de Cálculo retomem alguns conteúdos vistos nos segmentos escolares anteriores que serão fundamentais para o desenvolvimento dos estudos acadêmicos, porém, com outras perspectivas.

Além disso, é importante que haja uma preocupação com a aplicação do conteúdo estudado, visto que foi por meio da necessidade de solucionar situações que as ideias do Cálculo foram desenvolvidas. Tais aplicações não devem estar presentes, obrigatoriamente, na realidade do aluno. Podem simplesmente representar a sua importância dentro da própria Matemática (LIMA, 2013).

Também cabe destacar aqui os livros didáticos que são utilizados em sala de aula. Alguns apresentam o conteúdo com demasiado rigor e abstração, além de demonstrações que omitem informações e são justificadas com o uso de expressões do tipo: “é claro que”, “é óbvio que”, “apenas com simples cálculos podemos concluir que”. Falas como essas acabam gerando obstáculos no aprendizado dos alunos, que não conseguem se adaptar a formalidades e demonstrações repletas de rigidez (DIOGO, 2015). A linguagem apresentada nos livros não condiz com o público destinado, que é composto por estudantes no início do processo de ensino e aprendizagem nessa área. Pelo contrário, Diogo (2015) afirma que é uma leitura que “[...] não convida ao diálogo nem à descoberta, mas que se impõe com atributo de mistério e de uma eternidade a toda prova, primando pelo rigor [...].” (p. 25).

Mathias (2014) afirma que existem lacunas estruturais nas universidades por não definirem o que é importante na formação dos alunos. Isto é, ser aprovado ou reprovado na disciplina de Cálculo depende do seu desempenho em atividades recorrentes, na repetição de algoritmos. Aparentemente, os alunos mostram um conhecimento acerca de procedimentos algébricos, mas não é garantia de que os conceitos fundamentais do Cálculo são compreendidos. O autor complementa que os alunos:

> [...] poderão calcular o valor de um limite, sem conhecerem tal conceito; poderão derivar, sem compreenderem o que é derivada, ou ainda integrar, sem compreenderem o que é integral. Isso mostra que as provas tradicionalmente aplicadas nos cursos de cálculo das universidades são, em muitos casos, incapazes de promover uma experiência de avaliação adequada junto aos alunos e coerente aos propósitos centrais da disciplina. Alunos podem ser reprovados entendendo os conceitos do Cálculo, mas falhando nos procedimentos algébricos e alunos podem ser aprovados sabendo apenas os procedimentos algébricos, em vez dos conceitos do Cálculo. (MATHIAS, 2014, p. 3-4).

Diante do exposto, destaca-se a importância de pesquisas a respeito de como tem sido o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo e quais medidas podem ser tomadas para superar os obstáculos existentes na disciplina.

2.2.3 Pesquisas sobre o desempenho dos alunos em Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral é muito útil quando usado para solucionar problemas de diversos campos de estudos, como na Engenharia, Medicina, Astronomia, entre outros. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos abordando o fracasso do seu ensino, seja em universidades públicas ou privadas (TEIXEIRA, 2019).

Nas IES, os altos índices de retenção e evasão têm sido um agravante. Com isso, pesquisadores têm buscado entender os motivos que ocasionam essas situações, visto que o abandono de um curso pode gerar prejuízos acadêmicos, financeiros e sociais (DEIMLING; SILVA, 2019).

Existe certo temor, por parte dos alunos, a respeito do Cálculo. Isso acontece porque, apesar dos conteúdos abordados serem relacionados à Matemática Básica e às ideias do Cálculo em si, é considerado muito difícil ser aprovado na disciplina. Com isso, é criado um "código" dentro da sala de aula: tanto os professores quanto os estudantes demonstram naturalidade e consideram os altos índices de reprovação como algo normal (OLIVEIRA; RAAD, 2012).

Buscando entender como tem sido o desempenho nas disciplinas de CDI, a seguir, encontram-se algumas dissertações e teses que abordam essa temática, principalmente em Cálculo I.

Costa Neto (2017) coletou dados da disciplina de Cálculo I presente nos Cursos de Matemática dos três *campi* da Universidade de Brasília e comparou as suas realidades, assim como de avaliações em larga escala, como o SAEB e o ENEM. O autor analisou essas informações com o intuito de buscar possíveis razões para a falta de conhecimentos prévios para desenvolver a disciplina de Cálculo. De acordo com ele, os resultados do SAEB apontaram que os alunos concluem o terceiro ano do Ensino Médio sem total compreensão de conceitos matemáticos básicos, que são fundamentais no Cálculo. A partir disso, concluiu que, como muitas ferramentas matemáticas aprendidas no Ensino Fundamental são essenciais para o Ensino Médio, há também uma defasagem oriunda do segmento anterior.

O autor também fez análises de questões de provas anteriores de Cálculo I, e o resultado mostrou que os alunos saem do Ensino Médio sem ter uma compreensão satisfatória de conteúdos matemáticos elementares, que serão utilizados para a compreensão do Cálculo posteriormente (COSTA NETO, 2017). Além disso, afirma que:

> O curso de Matemática tem como uma das suas razões de existir formar professores de Matemática, logo precisa se primar pela qualidade, tão deficitária, no que tange ao ensino da disciplina na Educação Básica do país. Cálculo 1, disciplina base de quase todo o curso de Matemática, precisa ser bem compreendida, mas, sem os requisitos necessários, os alunos tenderão a encontrar dificuldades para desenvolver a disciplina. (COSTA NETO, 2017, p. 55).

Diante disso, Costa Neto (2017) concluiu a presença de três fatores em sua pesquisa: I) Os estudantes ingressam no curso de Matemática sem os conceitos prévios necessários para frequentar a disciplina de CDI; II) As provas apresentam questões com altos índices de “acertos ao acaso” ou muito fáceis e muito difíceis, o que acaba não cumprindo com o seu papel pedagógico; e III) Como consequência do segundo fator, aquilo que o professor considera como mediano, acaba refletindo como difícil ou extremamente difícil para os alunos, com base no que os testes apontam.

Teixeira (2019) afirma que o ensino de Matemática tem passado por vários desafios na busca por uma aprendizagem efetiva. Um fato que justifica isso é o estranho desconforto apresentado pelos alunos ao passar de um segmento de ensino para o outro, seja do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, ou do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Em seu ponto de vista, a autora afirma que, para melhorar o desempenho na disciplina de CDI, o aluno precisa compreender de forma adequada: os conceitos e propriedades do conjunto dos números reais e das principais funções elementares, assim como seus comportamentos gráficos, e manipular expressões algébricas. Contudo, o que se encontra na graduação é um despreparo para continuar com os estudos, possivelmente como consequência de dificuldades não sanadas na Educação Básica. Ademais, a falta de interação e participação durante as aulas também dificulta o processo. Apenas resolver uma grande quantidade de listas de exercícios, com o objetivo de aplicar e repetir técnicas e métodos, pode gerar exaustão e desmotivação. Logo, é necessário que docentes e discentes mudem suas condutas e se tornem ativos durante a aula (TEIXEIRA, 2019).

Assim sendo, a autora criou uma proposta para a disciplina de Pré-Cálculo, com alunos do primeiro período de cursos de Licenciatura em Matemática. O objetivo era identificar as dificuldades dos alunos, por meio de um teste e intervir com uma metodologia alternativa que contribuísse para uma aprendizagem mais efetiva (TEIXEIRA, 2019).

Após a aplicação do teste de sondagem, ficou evidente para Teixeira (2019) que a falta de conhecimentos a respeito de operações aritméticas e algébricas era um fator que poderia comprometer os estudos dos discentes no Ensino Superior. Além disso, por ter utilizado recursos computacionais em sua pesquisa, a autora apontou o quanto as tecnologias podem facilitar o ensino, no sentido de representar construções algébricas e geométricas. Também destacou o caráter motivador presente, pois os alunos sentiam-se estimulados a construir conhecimentos (TEIXEIRA, 2019).

Souza (2019) desenvolveu uma pesquisa com estudantes dos cursos de Licenciaturas Integradas em Matemática e Física, em Biologia e Química, e professores em formação continuada do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste do Pará. O autor aplicou um teste de Cálculo e apresentou os resultados obtidos, seguidos de análise. Além disso, propôs uma discussão, entre quatro professores que lecionam disciplinas de Matemática na instituição, a respeito do uso da análise de erros no ensino de Cálculo como uma possibilidade de contribuição na aprendizagem.

O teste contou com três itens que abordavam conteúdos estudados no Ensino Básico e em disciplinas de semestres anteriores dos cursos em questão. O autor agrupou os erros conforme as classificações a seguir: I) Tipo A: erros cometidos por falta de conhecimentos específicos de Cálculo; II) Tipo B: erros cometidos por falta de conhecimentos matemáticos básicos; e III) Tipo C: erros cometidos por distração (SOUZA, 2019).

Após o teste, Souza (2019) aplicou um questionário aos alunos a respeito do nível de dificuldade apresentado nas questões. A maior parte dos que responderam afirmou que teve dificuldades por não conhecer o conteúdo apresentado. A respeito do Cálculo, os participantes afirmaram que estudaram a maioria dos conteúdos, mas não os aprenderam. Essas informações refletem de forma direta os índices de desempenho dos alunos nas disciplinas de Cálculo nos semestres anteriores. Os professores também foram questionados sobre qual característica poderia ser atribuída aos tipos de erros apresentados pelos alunos. Todos eles citaram uma má formação no Ensino Básico (SOUZA, 2019). O autor destacou que:

> Os erros do tipo C ocorrem, a meu ver, principalmente pelo fato de o aluno não está habituado a resolver problemas com complexidade algébrica que o Cálculo exige. Considerando que as manipulações são constantes a partir do 7° ano do Ensino Fundamental, e tornam-se ainda mais freqüentes [sic] no Ensino Médio, a meu ver, os erros do tipo B se devem a aprovação quase automática dos discentes sem esses tenham reais condições de serem aprovados. O que faz com que os discentes deixem de buscar realmente entender o significado da linguagem algébrica na modelagem e resolução de problemas. Vejo a ocorrência dos erros do tipo A como uma conseqüência [sic] direta dos erros do tipo B, em outras palavras, vejo que alguns dedicam

> tanto esforço mental no processo de manipulação algébrica que não sobra "espaço" para o significado geométrico dos principais elementos do Cálculo. (SOUZA, 2019, p. 71).

Souza (2019) concluiu que as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo ainda partem da não assimilação de conteúdos da Matemática Básica. Também relatou a importância do Cálculo para as Ciências Naturais e a Matemática, apesar do fracasso presente em seu ensino nas universidades. Como os índices de aprovação nesse componente curricular continuam baixos, algo precisa ser feito para que esses problemas sejam abordados (SOUZA, 2019).

As pesquisas desenvolvidas por Costa Neto (2017), Teixeira (2019) e Souza (2019) evidenciam que, de fato, o desempenho dos alunos em CDI não tem sido satisfatório. Parte desse problema, como indicado pelos autores, está relacionada à falta de base em conceitos considerados requisitos para o ensino da disciplina, ou seja, os conteúdos da Matemática Elementar que são abordados no Ensino Básico. Tendo esse fato em vista, o subtópico 2.2.4 elucida, por sua vez, como o Pensamento Matemático se desenvolve, em qual perspectiva o ensino de Cálculo tem ocorrido e como ele deve ocorrer, tendo como base as concepções elaboradas pelo pesquisador David Tall.

2.2.4 Desenvolvimento do Pensamento Matemático na perspectiva de David Tall: Contribuições para o Ensino e a Aprendizagem de CDI

Com a finalidade de traçar um panorama mais amplo sobre de que forma tem ocorrido o ensino e o aprendizado de CDI, especialmente no Brasil, é importante citar o pesquisador David Tall.

Tall é inglês e professor da Universidade de Warwick, no Reino Unido, onde realiza pesquisas sobre os problemas da Educação Matemática no Ensino Superior e suas especificidades (ALMEIDA, 2013). As preocupações de Tall em seus trabalhos se inclinam no fato da disciplina de Matemática ser vista como algo admirável por alguns estudantes e como fonte de ansiedade por outros (BUENO; VIALI, 2019).

Ferreira e Piermatei Filho (2013) destacam que quando um conceito é exposto a um aluno, ele pode elaborar ideias e criar imagens mentais que poderão ser aproveitadas em inúmeras situações e em diferentes momentos acadêmicos. É válido ressaltar que cada indivíduo constrói sua própria imagem mental do conceito que lhe foi apresentado (FERREIRA; PIERMATEI FILHO, 2013).

Tall e Vinner, citados por André (2008), ainda apontam que não necessariamente esses conceitos estão definidos formalmente em sua estrutura mental, mas que o indivíduo aprende a reconhecê-los e a utilizá-los em situações apropriadas.

Nesse sentido, Tall e Vinner elaboraram as definições de "*imagem de conceito*" e "*definição de conceito*". Segundo Flores (2018), pode-se compreender a *imagem de conceito* como sendo os "processos cognitivos que associam a imagem às propriedades de um objeto matemático e aos processos envolvidos na sua manipulação" (FLORES, 2018, p. 35). André (2008) afirma que o termo "*imagem de conceito*" é utilizado pelos autores para representar a estrutura cognitiva total que está relacionada com o conceito e que retrata uma representação que está armazenada na mente do indivíduo.

Flores (2018) destaca que a consolidação de uma *imagem de conceito* ocorre durante o contato com os objetos e as experiências que são desenvolvidas a partir deles. Contudo, o autor reitera que, para Vinner, essa consolidação pode ser mudada conforme novos estímulos são dados, e a prática pedagógica que deve ser utilizada é aquela com mais de uma representação de um mesmo conceito.

Considerando o que foi dito anteriormente, pode-se compreender de forma sintetizada, que a *imagem de conceito* é individual e sofre modificações à medida que novas informações são agregadas à estrutura cognitiva de cada um. André (2008) evidencia que na estrutura mental de um indivíduo, a *imagem de conceito*

> Pode ser, não só, uma representação visual, no caso do conceito ter uma representação visual, mas também uma coleção de expressões ou experiências. A representação visual, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas com o nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. (ANDRÉ, 2008, p. 10).

Assim, sabendo como ocorre a solidificação de uma *imagem de conceito,* é possível compreender a construção de uma *definição de conceito.* Flores (2018) afirma que quando um estudante consegue expor sua *imagem de conceito* utilizando palavras, significa que ele formalizou a sua *definição de conceito*, que não necessariamente é a mesma sentença que é reconhecida como certa pela comunidade científica, já que depende diretamente das experiências e relações de cada indivíduo.

Levando em conta que a *definição de conceito* depende intrinsecamente das *imagens de conceito,* André (2008) ressalta que decorar uma definição não assegura a compreensão do conceito, já que "[...] a aquisição e entendimento de um conceito estão diretamente ligados à riqueza de imagens de conceito relacionadas com a idéia a ser assimilada." (ANDRÉ, 2008, p. 11). Ou seja, conforme André (2008) salienta, quando as *imagens de conceito* não foram constituídas de forma satisfatória, com toda a "riqueza" que podem fornecer, isso pode significar uma deficiência com relação à formalização das d*efinições de conceito.* Dessa forma, se uma definição foi apenas decorada, mecanizada, não é possível assegurar a compreensão do conceito em questão.

De acordo com André (2008), quando as *imagens de conceito* são bem construídas e o conceito em si é considerado pelo estudante como fácil de aprender, ele se torna uma "âncora" para novos conceitos que virão. Esse processo é denominado por David Tall como *raiz cognitiva* e pode ser entendido

> [...] como sendo um tipo especial de unidade cognitiva que se relaciona com o conhecimento familiar ao estudante que está começando um novo desenvolvimento conceitual, permitindo a conexão entre seus conhecimentos iniciais e aqueles a serem desenvolvidos. (ANDRÉ, 2008, p. 7).

Considerando o fato de que um conceito anterior servirá como âncora para um novo, assim como externado por Ausubel em sua Teoria da Aprendizagem Significativa e exibida no tópico 2.1 desta pesquisa, é de fato importante destacar que "a formação de imagens de conceito ricas é fundamental para o entendimento de determinado conceito em matemática." (ANDRÉ, 2008, p. 17).

Segundo Ferreira e Piermatei Filho (2013), Tall aponta que muitos pesquisadores têm procurado compreender os fenômenos que ocorrem no ensino e na aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, sobretudo em Cálculo Diferencial e Integral. Os autores destacam que esse grupo de pesquisadores era chamado de "*Advanced Mathematics Thinking*" (AMT) e que, a partir de então, preocuparam-se em investigar o campo da psicologia cognitiva, no intuito de ressaltar as principais características do conhecimento do Ensino Superior, ou seja, do Pensamento Matemático Avançado. Desde 1970, David Tall é um desses pesquisadores, conforme afirma Almeida (2013).

Segundo Rafael (2017), de modo geral, Tall relaciona as dificuldades em Matemática e em Cálculo como sendo um problema realmente de ordem cognitiva. Bueno e Viali (2019) enfatizam isso ao afirmarem que na obra "*How humans learn to think mathematically: exploring the Three Worlds of Mathematics*" (Como os humanos aprendem a pensar matematicamente: explorando os Três Mundos da Matemática), Tall buscou traçar como se dá o Pensamento Matemático desde os conceitos iniciais aprendidos por uma criança, até as margens da pesquisa em Matemática desenvolvida por um estudante de nível Superior. Desse trabalho, resultou sua teoria cognitiva, denominada por Tall como: "Três Mundos da Matemática", na qual ele explica como ocorre o ensino e a aprendizagem da disciplina (BUENO; VIALI, 2019).

Em sua obra, Tall evidenciou que o Pensamento Matemático é mais complexo do que se pensa, pois ele não representa uma simples adição de novos conceitos a uma estrutura fixa de conhecimentos, mas sim um processo de reestruturação contínuo de ligações mentais, que evolui, para construir com o tempo, conexões cada vez mais sofisticadas (BUENO; VIALI, 2019). O que também está de acordo com a teoria de Ausubel, que afirma que a *reconciliação integradora* altera a estrutura cognitiva do indivíduo, ao alocar um novo conhecimento nela.

Bueno e Viali (2019) salientam que existem três formas de conhecimento pelas quais se desenvolve o Pensamento Matemático e compreendem a teoria formulada por David Tall. Ao explicar cada uma delas, os autores destacam que:

> A primeira envolve o estudo de objetos e suas propriedades, que levam à criação de conceitos mentais descritos em linguagem materna. A segunda se desenvolve através do estudo da aritmética, levando à álgebra e culminando com formulação e resolução de problemas utilizando o simbolismo algébrico. A terceira forma nasce através do estudo formal da matemática pura e é catalisada através do estudo acadêmico avançado nas universidades. Essas questões levam a três maneiras nas quais o pensamento matemático é desenvolvido, dando origem então à teoria dos Três Mundos da Matemática. (BUENO; VIALI, 2019, p. 43).

Um dos meios de perceber como ocorre a primeira forma do conhecimento, já que nela estão relacionados os objetos e suas propriedades, é analisar o estudo da Geometria. Por exemplo, uma criança usando seus sentidos e sua linguagem materna, começa a reconhecer as propriedades dos objetos. Posteriormente, essas propriedades se tornarão definições, até que atinjam estágio de uma teoria formal, como são os casos das geometrias: euclidiana, diferencial, não euclidianas, entre outras (BUENO; VIALI, 2019).

Os autores também apontam que, para a segunda forma, o aprendizado da Aritmética é um bom exemplo, pois, nesse caso, não se enfatiza mais as propriedades dos objetos, mas sim as operações que podem ser realizadas sobre eles, como: contar, adicionar, subtrair, agrupar, multiplicar e dividir. Essas operações acabam ganhando símbolos que facilitam suas realizações rotineiramente e representam a transição da linguagem materna para a linguagem matemática (BUENO; VIALI, 2019).

Bueno e Viali (2019) afirmam que, para exemplificar a terceira forma, a Álgebra pode ser utilizada, já que ela surge da generalização das operações da Aritmética. Desse mesmo modo, funções podem ser visualizadas por meio de gráficos e estruturas algébricas, elaboradas em sistemas axiomáticos como: corpos, anéis e grupos.

As três formas de conhecimento matemático apresentadas anteriormente levam à teoria dos Três Mundos da Matemática, elaborada por Tall, como reiteram Bueno e Viali (2019). Tendo isso em vista, David Tall divide sua teoria em três mundos: Conceitual Corporificado; Operacional Simbólico, também chamado por autores como Almeida e Palharini (2012) de Simbólico Proceitual; e Formal Axiomático (BUENO; VIALI, 2019). Sousa, Tortola e Almeida (2013), destacam que os três mundos estão diretamente ligados às experiências dos indivíduos com a Matemática e que, apesar de serem distintos, eles se relacionam.

O primeiro Mundo, o Conceitual Corporificado, constitui-se a partir das assimilações e ações do mundo real e, a partir de então, se desenvolve até a concepção de imagens mentais cada vez mais elaboradas. Tall, citado por Bueno e Viali (2019), mostra que as concepções que não são do mundo real, são armazenadas em um mundo mental, de forma que se pareçam com uma linha impecavelmente reta. Segundo Almeida e Palharini (2012), este mundo está fundamentado na percepção e na ação, e abrange os objetos corporificados.

No ponto de vista de Lima (2007), no que tange a teoria dos Três Mundos da Matemática, corporificação significa experimentos que relacionam descrição, observação, ação e reflexão sobre objetos físicos. Contudo, não se refere a apenas manipulações físicas, mas também mentais, porque um indivíduo pode analisar e conjecturar propriedades de um determinado objeto em seu pensamento (LIMA, 2007).

O Mundo Operacional Simbólico, por sua vez, abrange os símbolos que são utilizados na Aritmética, na Álgebra e no Cálculo. O conhecimento, nesse caso, se inicia com ações que vão se desenvolver até que se tornem processos matemáticos que, posteriormente, poderão vir a ser mudados por novos conceitos (BUENO; VIALI, 2019). Porém, os autores apontam que enquanto alguns dos estudantes encontram-se no nível dos processos, outros conseguem significar os símbolos como operações que podem ser utilizadas tanto com objetos, como em cálculos e em manipulações algébricas.

Lima (2007) afirma que

> Quando se lida com os símbolos que habitam esse mundo, é preciso que se façam cálculos com números e/ou manipulação simbólica para que se "mostre" algo que é verdade. O mundo simbólico é composto por símbolos que representam as ações e as percepções que estão presentes no mundo corporificado. Com eles, representamos também os significados que foram dados aos conceitos matemáticos pela corporificação [...]. Os símbolos têm uma poderosa capacidade de comprimir conceitos pensáveis, englobando uma diversidade de situações que não são sempre possíveis de se representar por meio de corporificações. [...] faz-se necessário que os conceitos pensáveis sejam comprimidos de forma a poderem ser reutilizados com facilidade quando for preciso. (LIMA, 2007, p. 76).

Segundo Bueno e Viali (2019), o terceiro mundo, o Formal Axiomático, sustenta a construção de conhecimento a partir de axiomas que originam teoremas e corolários, nos quais as propriedades são deduzidas por meio de demonstrações matemáticas feitas com mais rigor. De modo geral, de acordo com Almeida e Palharini (2012), este mundo presume um movimento com inclinação para o formalismo na utilização dos conceitos. Segundo Flores (2018):

> O uso de símbolos, como, por exemplo, $\sum$ para identificar o somatório, encontra-se no mundo simbólico. É algo mais amplo do que uma operação, pois abarca também o processo e o conceito. Já as notações formais enquadraram-se no mundo axiomático. (FLORES, 2018, p. 59).

Isto é, apesar do uso dos símbolos representar algo mais amplo que o uso das operações, as notações formais são ainda mais amplas e pertencem ao terceiro Mundo.

Quanto ao Ensino Básico, Lima (2007) destaca que as práticas pedagógicas utilizadas em Matemática pouco exploram o Mundo Corporificado, fazendo predominar muito mais práticas centralizadas no Mundo Simbólico. A autora ainda afirma que o sistema axiomático geralmente não é abordado nesse nível de ensino. Dessa forma, os alunos só passam a conhecê-lo nas disciplinas de nível Superior.

Nessa perspectiva, Lima (2007) também indica que as habilidades de demonstrar, abstrair e deduzir, estão diretamente associadas ao Mundo Formal Axiomático. Desse modo, as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação a essas habilidades estão relacionadas ao não uso delas, pois na maioria das vezes, eles acabam reproduzindo padrões que muito atrapalham a construção do Pensamento Matemático, conforme menciona Flores (2018).

Além disso, Flores (2018) aponta que a construção do Pensamento Matemático envolve uma trajetória sem regimento entre os Três Mundos. A ausência dessa trajetória pode inserir a ideia de que, por exemplo, a Álgebra se constitui em pura abstração e completamente disjunta da realidade, já que a realidade é dada pelo Mundo Conceitual Corporificado, e o simbolismo da Álgebra, pelo Mundo Operacional Simbólico.

Os três mundos, que explicam o conhecimento matemático e que foram apresentados anteriormente, demonstram de que forma o Pensamento Matemático se desenvolve nos indivíduos. De acordo com Carmo e Igliori (2017), no ponto de vista de Tall, o Pensamento Matemático pode ser dividido em dois: Elementar e Avançado. O primeiro tem por característica a manipulação dos objetos matemáticos, e o segundo define os objetos matemáticos a partir das sentenças dos conceitos matemáticos.

Carmo e Igliori (2017) afirmam que na concepção de Tall, o Pensamento Matemático Avançado compreende o uso de estruturas cognitivas formadas por uma grande diversidade de atividades matemáticas realizadas no Pensamento Elementar, que auxiliam no progresso de novas ideias e que embasam e ampliam o gradativo sistema de teoremas demonstrados. Dessa forma, o progresso cognitivo do Pensamento Elementar para o Avançado ocorre a partir

> [...] das “percepções de” e “ações sobre” objetos em um mundo exterior, construído por meio de dois desenvolvimentos paralelos: um do visual-espacial para o formal-dedutivo; e outro de sucessivas encapsulações do processo para o conceito usando a manipulação simbólica. Esses dois desenvolvimentos inspiram o pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e em provas sistemáticas. (CARMO; IGLIORI, 2017, p. 3).

Os autores mostram que, para Tall, muitas das atividades que estão presentes no Avançado também aparecem no Elementar. Porém, a dedução e a definição formal são dois aspectos que os diferenciam (CARMO; IGLIORI, 2017). É interessante destacar que, no ponto de vista de Tall, a transição entre os dois tipos de pensamentos inclui a passagem do descrever para o definir, e do convencer para o provar de forma lógica, a partir das definições. David Tall, citado por Carmo e Igliori (2017), ainda afirma que essa passagem representa a transição da lógica da Matemática Elementar para a consequência da Matemática Avançada, com sustentação na abstração que o estudante necessita desenvolver por meio de deduções e definições formais.

É importante pontuar que, para Tall, o Pensamento Matemático Avançado só ocorre no Ensino Superior (CARMO; IGLIORI, 2017). Segundo Rafael (2017), para o autor, a passagem do Pensamento Elementar para o Pensamento Avançado não é sempre descomplicada para um estudante, ainda mais no início da faculdade.

As análises de outros trabalhos feitas por Carmo e Igliori (2017), em sua pesquisa, estão de acordo com a concepção de Tall, pois revelaram que “a transição entre Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado têm ocasionado dificuldades de aprendizagem para muitos estudantes de Educação Básica e Ensino Superior” (CARMO; IGLIORI, 2017, p. 110). Essa conjuntura evidencia que, de fato, a passagem entre os níveis de Ensino Básico e Superior tem se configurado um processo difícil para os alunos.

De acordo com Bueno e Viali (2019), para Tall, não obstante a Matemática Universitária ser uma ampliação da Matemática Escolar, no que diz respeito às técnicas de métodos numéricos e algébricos, essa exige “[...] uma evolução, a partir da reconstrução de ideias antigas, para ingressar gradualmente na complexidade de métodos mais formais, que possibilitam a construção de novas teorias.” (BUENO; VIALI, 2019, p. 42).

Os autores ainda apontam que, ao analisar a Teoria dos Três Mundos da Matemática elaborada por Tall, existem elementos que de fato podem contribuir no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem dos conceitos de Cálculo. Segundo Bueno e Viali (2019), para Tall, cada aluno traça sua trajetória na Teoria formulada por ele, já que o progresso cognitivo é totalmente individual e baseado em experiências anteriores de cada um, sendo elas escolares ou não, que podem auxiliar ou não na construção de um novo conceito.

Conforme os autores afirmam, essas experiências são chamadas por David Tall de “já-encontrados”. Por exemplo, um estudante que aprendeu o teorema de Pitágoras, não terá muitas dificuldades para calcular o módulo de um vetor (FLORES, 2018).

Para Bueno e Viali (2019), esse termo empregado por Tall retrata como novos contextos são interpretados a partir de experiências anteriores, mas não diz respeito apenas às experiências propriamente ditas, mas também às particularidades deixadas por elas, que podem afetar o Pensamento. Quando um novo aprendizado interfere nos conhecimentos “já-encontrados”, essa nova experiência modificada que surge é chamada de “a-encontrar” (LIMA, 2007).

Bueno e Viali (2019), baseados em Tall e Healy, ainda afirmam que a interferência de um “já-encontrado” pode ser positiva ou negativa. Será positiva quando “[...] esse opera em um novo contexto de tal forma que permite que métodos já vistos sejam utilizados de forma prazerosa na construção de generalizações de técnicas anteriormente estabelecidas.” (BUENO; VIALI, 2019, p. 47). E, de acordo com os autores, será negativa quando um “já-encontrado” causar confusão e impossibilitar uma generalização.

Os autores também ressaltam que quando os alunos se deparam com um "já-encontrado" negativo, algumas situações podem ocorrer:

> [...] um estudante confiante pode sentir-se frustrado por tal obstáculo e, então, utilizar essa frustração como incentivo para trabalhar para encontrar alternativas cognitivas capazes resolver essa questão. De outra forma, um indivíduo que não tenha tal confiança pode sentir-se alienado, sofrendo com uma ansiedade cada vez maior, à medida que interage com novos contextos que trazem, sucessivamente, aspectos problemáticos. Nesse cenário, esse sofrimento pode fazer com que cresça sua vontade de evitar esse desconforto simplesmente aprendendo o que fazer, para, ao menos, ter o prazer de ser aprovado nos testes aos quais for submetido. (BUENO; VIALI, 2019, p. 47).

Há, então, um problema quando os novos conceitos dependem de "já-encontrados" negativos, pois, para muitos alunos, a solução para essa circunstância acaba sendo o aprendizado de padrões, sem que haja a significação do conceito em questão, com o objetivo de pelo menos ser aprovado na disciplina.

O que se agrava pelo fato de, segundo Tall, apresentado por Bueno e Viali (2019), os currículos basearem-se nos "já-encontrados" positivos, ou seja, nas experiências anteriores que permitem que métodos já aprendidos sejam utilizados em novas situações de forma prazerosa. São essas experiências que são vistas como fundamentais para a construção futura de novos conhecimentos. Porém, Tall ainda salienta que nessas novas situações, muitos problemas surgem para os alunos, levando em conta que os "já-encontrados" considerados positivos pelos autores do currículo, podem ser os "já-encontrados" negativos dos estudantes.

Por essa perspectiva, Rafael (2017) ainda destaca que, na concepção de Tall, uma parcela de alunos que chega ao Ensino Superior ainda não possui a competência da abstração desenvolvida suficientemente para aperfeiçoar conteúdos associados às operações mais formais. Isso exemplifica o que acontece com muitos deles na passagem do Ensino Básico para o Ensino Superior, na disciplina de Cálculo, por exemplo, e evidencia ainda mais como a passagem do pensamento Elementar para o Avançado não tem sido um processo tranquilo e simples para os discentes.

Segundo Flores (2018), existe uma divisão no ensino de Cálculo entre Geometria e Álgebra, que pode ser observada pelas distintas abordagens dadas por Newton e por Leibniz. Para Tall, geralmente no ensino da disciplina, os professores exploram muito mais a esfera algébrica, afastando-se da geométrica. De acordo com o autor, esse processo assemelha-se mais com as abordagens de Leibniz (FLORES, 2018).

Conforme Flores (2018) afirma, Tall critica o ensino de CDI apenas pela perspectiva algébrica, pois, para ele, há uma

> [...] sobreposição de procedimentos e algoritmos em relação à capacidade dedutiva, relacionada à análise de gráficos, por exemplo. Essa tendência leva ao estabelecimento de obstáculos na conexão entre os aspectos analítico e gráfico, muito em função das práticas pedagógicas tenderem a privilegiar o primeiro. (FLORES, 2018, p. 35).

Ou seja, os procedimentos algébricos ganham muito mais espaço no ensino de Cálculo em detrimento das possibilidades que a Geometria pode fornecer, o que gera obstáculos que podem impedir ligações entre os pontos de vista gráfico e analítico. Além disso, Flores (2018) também aponta que Tall destaca que as dificuldades que os alunos enfrentam ao transitar entre esses dois pontos de vista em Cálculo, também acontecem pela excessiva prática pedagógica de privilegiar o formalismo.

Segundo Flores (2018), Tall ainda sugere que o ensino de CDI deve associar diferentes representações. Para o autor, os aspectos visuais fornecem muitos benefícios na estruturação do Pensamento Matemático, já que "a visualização pode levar à interpretação a partir de representações mentais de conceitos" (FLORES, 2018, p. 35).

Nesse ponto de vista, André (2008) também aponta que apresentar um conceito pelo ponto de vista formal não é o melhor caminho. Para a autora, o professor deve considerar outros meios e condições a fim de oportunizar uma situação adequada para o novo conhecimento que vai ser adquirido.

Em concordância, Flores (2018) também evidencia que:

> Esses conceitos nos levam a refletir sobre as concepções relacionadas ao ensino de Matemática e a considerar que a abordagem formal parece não ser o melhor ponto de partida para a aprendizagem. Assim, faz-se necessário o contato anterior com a imagem de conceito, ou seja, a imagem modela a definição. (FLORES, 2018, p. 36).

Assim como André (2008), Flores (2018) também aponta, como mencionado acima, que para iniciar um novo conceito, deve-se abrir mão da perspectiva formal. Os dois autores destacam que ela não é a melhor forma de se iniciar o processo de ensino e de aprendizagem em Matemática. Inclusive, é válido destacar que diversas pesquisas têm evidenciado que os alunos chegam ao Ensino Superior sem maturidade para compreender algumas definições por meio da formalização (ANDRÉ, 2008). Como afirmado por Tall, tem-se o exemplo do caso da compreensão da definição formal de derivada a partir do conceito de limite.

Nesse sentido, André (2008), salienta que em muitos casos, na tentativa de simplificar o conteúdo e afastá-lo do ponto de vista formal, os docentes dão preferência ao ensino de procedimentos puramente algébricos, que apesar de serem úteis para resolver alguns dos problemas, desvinculam-se da compreensão do conceito em si, e isso pode transformar o aprendizado mecânico.

Conforme Flores (2018) reitera, para Tall, no intuito de configurar práticas pedagógicas que contribuam para a passagem entre os Três Mundos da Matemática, é importante e necessário compreender os caminhos que os alunos seguem.

Analisando todas as definições e concepções dos diferentes autores que foram expostas anteriormente, é notório que uma das causas das dificuldades e consequente reprovação em Matemática, destacando aqui a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, está relacionada ao aspecto cognitivo de cada indivíduo. David Tall ainda evidencia, como destacado acima, que quando os alunos precisam usar experiências que foram vivenciadas anteriormente para aprimorar novos conhecimentos, muitas das vezes encontram dificuldades, como é o caso que acontece entre a Matemática Elementar e a disciplina de Cálculo. Ademais, o fato do ensino da disciplina ser pautado basicamente no formalismo e na Álgebra, afastando-se das possibilidades que o ponto de vista geométrico proporciona, dificulta a circulação dos alunos entre os Três Mundos da Matemática, os quais explicam como se constrói o Pensamento Matemático.

Evidentemente, apenas uma parte das concepções elaboradas por Tall foram expostas nesta monografia. Suas pesquisas envolvem outros conceitos que não foram aqui abordados devido à busca por suas contribuições com relação à importância das experiências anteriores dos alunos para a aprendizagem de CDI.

É importante salientar que, embora a análise dos dados obtidos nesta pesquisa esteja baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, o aporte teórico descrito acima sobre David Tall foi norteador com relação ao estado da arte do ensino e da aprendizagem de Cálculo. Além disso, visto que as concepções dos dois autores têm diversos pontos comuns, os resultados desta pesquisa foram analisados à luz das semelhanças entre elas.

2.3 Trabalhos relacionados

Neste tópico, encontram-se três pesquisas que envolvem a aprendizagem no estudo da disciplina de Cálculo no Ensino Superior.

No dia 10 de fevereiro de 2020, foi realizada uma pesquisa avançada na Base Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), utilizando os seguintes termos como descritores de busca, e em todos os campos: Ensino Superior; E Cálculo Diferencial e Integral; E Dificuldades; E Matemática. Foram retornados, ao todo, dezessete trabalhos, dos quais, utilizando como filtro o ano de publicação entre os anos de 2015 e 2020, resultaram em nove.

Dos nove resultados obtidos, três foram selecionados, tendo em vista que se aproximam da presente pesquisa por analisarem as produções feitas pelos alunos em CDI I, pela associação cognitivista ao ensino e aprendizagem da disciplina em questão, e por buscarem evidenciar as dificuldades dos alunos nos conteúdos de Matemática que deveriam ter sido aprendidos no Ensino Básico e não em conteúdos específicos do Cálculo.

O primeiro trabalho selecionado foi a tese de doutorado intitulada “Análise de aprendizagens em Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira”, escrita por Raquel Carneiro Dörr e orientada pelo Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz, em 2017, na Faculdade de Educação da Universidade de Brasília.

A pesquisa foi exploratória, de cunho qualitativo e investigativo, e teve como objetivo analisar produções escritas de alunos em atividades propostas da disciplina de CDI. Tendo em vista que a aprendizagem de novos conceitos em Cálculo depende das experiências prévias dos alunos nos conteúdos de Matemática, buscou-se identificar elementos que pudessem indicar dificuldades de ordem conceitual ou nos procedimentos algébricos evidenciados pelo processo de aprendizagem da disciplina.

A investigação se deu por meio da análise de atividades práticas que abordavam: operações com os números reais, funções, equações, limites, derivadas e integrais. Essas atividades foram propostas a grupos de estudos de alunos, de uma universidade pública brasileira, que apresentavam alguma dificuldade com relação à compreensão dos conteúdos abordados em CDI.

As análises das produções matemáticas escritas dos alunos foram efetuadas explicitando os conteúdos do nível Básico em que os alunos apresentavam dificuldades no momento das resoluções das atividades. Elas evidenciaram que as dificuldades com a disciplina são anteriores a ela. Os alunos apresentaram deficiências em conteúdos do Ensino Fundamental, que acabaram se constituindo como obstáculos ao aprendizado de Cálculo. A autora também destacou que o insucesso nas avaliações escritas leva à reprovação no curso e, consequentemente, à evasão do Ensino Superior.

Esse estudo se aproxima desta pesquisa por ser de caráter qualitativo e por buscar analisar as produções feitas pelos alunos na tentativa de identificar os conteúdos prévios à disciplina de CDI, que são estudados no nível Básico, nos quais eles possuíam dificuldades. Diferencia-se, entretanto, por ter analisado dois grupos de estudos: o primeiro composto por estudantes de Matemática e, o segundo, por alunos que, em sua maioria, já reprovaram em CDI pelo menos uma vez.

O segundo trabalho selecionado foi a dissertação de mestrado intitulada "Dificuldades de aprendizagem em Cálculo e a relação com o raciocínio lógico formal - Uma análise no Ensino Superior", escrita por Marlene Lucia Holz Donel e orientada pela Prof.ª Dr.ª Eliane Giachetto Saravali e pela Prof.ª Dr.ª Shiderlene Vieira de Almeida, em 2015, na Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista.

A pesquisa recebeu uma abordagem quantitativa e qualitativa, caracterizando-se como um estudo de caso. A autora apresentou como objetivo: analisar as relações existentes entre o desenvolvimento cognitivo e as dificuldades apresentadas durante a aprendizagem na disciplina de CDI, tendo como público-alvo os acadêmicos de uma universidade pública federal do Paraná.

O trabalho foi embasado na teoria construtivista de Piaget, e sua aplicação aconteceu em três etapas, sendo elas: I) Análise do rendimento acadêmico em CDI dos alunos que estavam ingressando nos cursos de Engenharia entre os anos de 2011 e 2013; II) Avaliação do domínio de conteúdos matemáticos por parte dos acadêmicos que ingressaram em Engenharia no segundo semestre de 2013; e III) Avaliação do conteúdo matemático, do nível de desenvolvimento cognitivo, por meio de provas operatórias piagetianas, e do rendimento acadêmico na disciplina de CDI. Todas as aplicações foram direcionadas aos graduandos em Engenharia de Alimentos, por ser apontado como o curso com maior índice de reprovações e evasão na disciplina de CDI, no primeiro semestre de 2014.

Na primeira etapa, evidenciou-se que havia uma média geral de 55,7% de reprovação na referida disciplina. Na segunda, foi utilizado um instrumento elaborado por professores especialistas na área da Matemática, com o intuito de verificar quais eram os domínios dos conteúdos matemáticos apreendidos em níveis de ensino anteriores, que seriam necessários para o entendimento dos conteúdos a serem abordados na disciplina de CDI. Notou-se que 85% dos acadêmicos participantes não demonstraram conhecimentos de conceitos e noções básicas necessárias para ter um bom desempenho na disciplina. Na terceira e última etapa, os resultados obtidos afirmaram a falta de domínio de noções básicas da Matemática e um rendimento acadêmico que correspondeu a 75% de reprovação na disciplina de CDI. Além disso, nenhum aluno alcançou o nível pleno de desenvolvimento formal na avaliação do nível de desenvolvimento cognitivo.

Concluiu-se que há a necessidade de se considerar, durante o processo de ensino e aprendizagem, os aspectos cognitivos e a implantação de medidas educativas que promovam um aprendizado mais efetivo. Os resultados apontam para mudanças no sistema de ensino, especialmente da Matemática.

O que aproxima essa pesquisa do presente trabalho é o fato de ter caráter qualitativo. Além disso, a autora avaliou os conteúdos matemáticos nos quais os acadêmicos tinham domínio e que seriam necessários para o desenvolvimento dos tópicos a serem abordados em CDI. Contudo, a autora faz uso da pesquisa exploratória, por meio de um estudo de caso, para obter informações, e da teoria cognitivista de Piaget como aporte teórico, que se difere da teoria cognitivista de Ausubel, apresentada no tópico 2.1.

O terceiro trabalho selecionado foi a dissertação de mestrado intitulada “Indicadores de permanência na Educação Superior: o caso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I”, escrita por Kelly Amorim Gomes e orientada pela Prof.ª Dr.ª Vera Lucia Felicetti, em 2015, no Centro Universitário La Salle.

A pesquisa possui cunho quantitativo e qualitativo, sendo caracterizada por um estudo de caso com aspecto exploratório descritivo, e tendo como público-alvo os alunos que ingressaram nos cursos de Engenharia de uma instituição comunitária de Educação Superior do Rio Grande do Sul, no primeiro semestre de 2013. O objetivo geral foi identificar as influências presentes na realidade dos alunos que ingressaram nos cursos de Engenharia em 2013, capazes de indicar sucesso ou não na disciplina de CDI I. O trabalho foi embasado em autores que pesquisam a respeito de fatos relacionados aos índices de evasão e permanência na Educação Superior.

Na análise final, a autora destaca algumas características que influenciaram nas possibilidades de sucesso na disciplina de CDI I, no contexto de sua pesquisa, como: ser do sexo feminino; ter cursado o Ensino Médio em escola privada na modalidade regular ou no Ensino Técnico; e ingressar na universidade por meio do ENEM. Além disso, os resultados mostraram que ter um bom rendimento em conteúdos matemáticos do Ensino Médio e na disciplina de Matemática Elementar no Ensino Superior pode contribuir de maneira positiva para os acadêmicos que cursam CDI I.

A autora concluiu dizendo que o fato de participar do programa de monitoria oferecido pela instituição e o auxílio financeiro para custear os estudos podem auxiliar no sucesso dos graduandos. A satisfação com o curso e o comprometimento com os estudos também são aspectos que devem ser levados em consideração.

As semelhanças apresentadas por essa pesquisa com o presente trabalho, são: abordagem de cunho qualitativo, caracterizada por meio de uma pesquisa exploratória. A pesquisa se diferencia, primeiramente, pelo público-alvo, tendo em vista que ela foi realizada com alunos da engenharia; e por analisar as influências da realidade dos alunos que afetam o sucesso ou o insucesso deles na disciplina de CDI I.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos que nortearam a pesquisa. Ele está subdividido em quatro seções que abordam: a caracterização da pesquisa, a metodologia de Análise de Erros e Produções Escritas, alguns resultados que foram responsáveis pela delimitação do tema deste trabalho e a elaboração dos materiais utilizados para coleta de dados.

3.1 Caracterização da pesquisa

Diante da questão de pesquisa elaborada, optou-se por realizar um trabalho de caráter qualitativo, desenvolvido por meio de uma pesquisa exploratória, por intermédio da observação sistemática/não-participante.

Segundo Silveira e Córdova (2009), a pesquisa de abordagem qualitativa não dá relevância aos dados numéricos, sendo mais importante a compreensão do grupo social, a busca pelo porquê das coisas e a preocupação com os dados da realidade que não podem ser simplesmente quantificados. Além disso, de acordo Minayo *et al.* (2002), ela trabalha com questões individuais. É um espaço vasto de significados, crenças e valores, que fazem parte das relações e dos processos que não são concebidos em uma manipulação numérica (MINAYO *et al.*, 2002).

Como a presente pesquisa buscou analisar o contexto específico da disciplina de CDI I, a fim de explorar e evidenciar o desempenho dos alunos nos conteúdos abordados nela e levantar hipóteses sobre, possui características de uma pesquisa exploratória. De acordo com Gil (2007), essa abordagem "tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses" (GIL, 2007, p. 41). O autor também diz que boa parte desse tipo de pesquisa envolve: I) Levantamento bibliográfico; II) Entrevistas com pessoas que já vivenciaram o problema de forma prática; e III) Investigação de outros exemplos que estimulem o entendimento do problema pesquisado.

A investigação do desempenho dos licenciandos em questão se deu por meio da observação não-participante. Gerhardt *et al.* (2009) afirmam que, nesse tipo de observação, o pesquisador não se mistura no grupo analisado, nem participa do fato que é observado, atuando apenas como ouvinte. Segundo os autores, essa forma de observar é usada em pesquisas que precisam de uma discriminação detalhada e específica do fenômeno estudado. Na concepção deles, para a coleta de dados acontecer, pressupõe-se que o pesquisador conheça as informações que são essenciais para alcançar os objetivos propostos. Sendo assim, para realização da observação sistemática, é necessário antes elaborar um plano que vai nortear a sua realização (GERHARDT *et al.* 2009).

Os instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa foram: I) Questionário de sondagem aplicado aos professores; II) Questionário de sondagem aplicado aos alunos; III) Observação acompanhada do diário de campo, que permitiu o registro de informações e reflexões ao longo do momento de observação; IV) Respostas dos licenciandos às atividades avaliativas da disciplina de CDI I; e V) Entrevistas estruturadas, que possuíram roteiros e perguntas previamente designados.

Para Doxsey e De Riz (2003, p. 25) as pesquisas exploratórias "buscam uma aproximação com o fenômeno, pelo levantamento de informações que poderão levar o pesquisador a conhecer mais a seu respeito".

Nesse sentido, o questionário foi utilizado como um dos meios para o levantamento de informações sobre o público-alvo. Segundo Gerhardt *et al.* (2009), esse instrumento é constituído por perguntas ordenadas que devem ser respondidas por escrito pelo público que participa da pesquisa. A linguagem utilizada deve ser simples e objetiva, para que as perguntas sejam entendidas com clareza (GERHARDT *et al.*, 2009).

A respeito do diário de campo citado anteriormente, Gerhardt *et al.* (2009) destacam que ele é um instrumento em que as observações dos fatos são anotadas, como fenômenos sociais, experiências individuais, reflexões e comentários, além de ajudar a criar o hábito de registrar e observar com mais atenção, descrevendo com mais detalhes e gerando reflexões sobre as experiências vivenciadas.

A entrevista estruturada também foi utilizada como um dos meios para a obtenção de dados. De acordo com Gerhardt *et al.* (2009), nesse tipo de entrevista, o entrevistador não tem autonomia e deve seguir um roteiro determinado previamente. As autoras apontam que uma das vantagens é que os dados podem ser analisados qualitativamente, além de possibilitarem a obtenção de informações com elevado nível de profundidade.

O público-alvo foi composto pelos alunos do 2.º período da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro. A justificativa dessa escolha encontra-se no tópico 3.3.

A pesquisa foi desenvolvida nas seguintes etapas: Revisão bibliográfica; elaboração do questionário; teste exploratório do questionário elaborado; aplicação do questionário e acompanhamento da turma de CDI I, no ano letivo de 2020.1; e análise das respostas dos alunos às atividades avaliativas da disciplina, para verificar se os objetivos foram alcançados.

3.2 Análise de Erros ou Análise de Produções Escritas

Durante a correção de uma atividade avaliativa, seja ela um teste, uma prova ou um trabalho, o professor tem a tendência de assinalar os erros apresentados pelo aluno e aceitar os acertos como algo já previsto. Porém, algumas questões precisam ser levantadas: os acertos realmente têm relação com o conhecimento? Os erros mostram apenas aquilo que o aluno não sabe? (CURY, 2019).

De maneira generalizada, o erro é algo abominado. No contexto escolar, há duas pessoas que merecem atenção: o aluno, que teme não conseguir responder corretamente, e o professor, que por diversas vezes apresenta questões que envolvem as dificuldades que o aluno tenta esconder, na tentativa de fazê-lo "cair em armadilhas" (CURY, 2019).

Nesse sentido, Pinto (2000) estabeleceu a *pedagogia da resposta*, que seria a visão do erro como um sintoma de fracasso e mau desempenho, por parte do aluno, e do acerto como a comprovação do seu sucesso. Na tentativa de tornar a Matemática "mais humana", a autora sugeriu a *pedagogia do problema*, que apresentaria o erro como um elemento natural do processo de ensino e aprendizagem, sendo um referencial para investigações (PINTO, 2000). Entretanto, a concepção do que é incorreto está relacionada com a forma que o professor concebe o processo de construção do conhecimento e com a sua forma de avaliar. Ao ser aceito como um sinal de fracasso, o erro está presente em uma cultura de avaliação escolar que se preocupa com a nota que gera aprovação e não com a aprendizagem em si. Aqui, torna-se explícito como as avaliações são seletivas e classificatórias (PINTO, 2000).

Pinto (2000) afirma que, no início do século XX, o conhecimento matemático fornecido pelas escolas elementares era limitado ao trabalho agrícola, industrial ou doméstico. Nos dias atuais, com uma sociedade mais complexa, cobra-se uma nova postura escolar que prepare seus alunos de forma condizente aos avanços tecnológicos em um mundo globalizado e competitivo. Nessas condições, a Matemática é vista como uma necessidade. Contudo, é uma das ciências menos acessíveis a um grande número de cidadãos, tornando-se "[...] um importante filtro seletivo do sistema educativo" (PINTO, 2000, p. 17). Diante disso, tal disciplina não pode preservar a postura daquela que mais apresenta reprovações (PINTO, 2000).

Na concepção de uma Matemática que apenas transmite conceitos estabelecidos, repletos de rigor e exatidão, o erro deve ser eliminado, porque é a representação de falha, contradição, incerteza, e muitos outros atributos que uma ciência exata não pode apresentar em seu produto final (PINTO, 2000). Em contrapartida, é interessante analisar que na trajetória da construção de toda Ciência, há uma busca para solucionar as questões sociais. Na Matemática, isso não é diferente. Ela tem se desenvolvido na busca humana por resolver problemas. Nesse caminho, o matemático refaz colocações e conclusões, examina novas situações, desenvolve ferramentas úteis para a humanidade. Antes de estar presente com toda sua exatidão, a Matemática é um resultado de esforços e raciocínios, hipóteses e imprecisões. Erros e acertos fazem parte da sua construção como Ciência. Pinto (2000, p. 68) corrobora com essa ideia ao dizer que "[...] não há conhecimento matemático que não tenha passado por erros antes de sua consolidação".

Ao não permitir que o aluno erre, a escola contribui para a *cultura do acerto*. Nessa visão, o erro é sempre indesejado e há punição para aquele que o apresente. Por esse motivo, Pinto (2000, p. 22) afirma que "[...] analisar os erros a partir da perspectiva docente pode ser um valioso objeto de análise, uma vez que a sala de aula vem sendo apontada como um precioso objeto de análise para o campo da didática".

Ao abordar, então, a temática do erro no cotidiano escolar, três pontos devem ser destacados: o ensino de Matemática (saber específico), a formação continuada dos professores (saber presente na experiência do professor) e o processo de avaliação da aprendizagem (saber didático). Essa tríade mostra a importância e urgência de pesquisas educacionais que abordem esse assunto (PINTO, 2000).

A Análise de Erros ou Análise de Produções Escritas, na visão de Cury (2019), é um assunto importante na Educação Matemática. Esse tema vem sendo abordado sob diferentes perspectivas, que acabam sofrendo influências das teorias predominantes da época. A preocupação inicial estava centrada nos erros que eram cometidos nas séries primárias, na Aritmética escolar (CURY, 2004).

Nos Estados Unidos, no começo do século XX, as pesquisas eram baseadas no comportamentalismo. Já na Alemanha, os estudos giravam em torno das ideias da Psicologia Experimental, da Gestalt e da Psicanálise. Na Rússia, os trabalhos eram influenciados pelos ideais marxistas que estavam causando mudanças na forma de organização das escolas e nos procedimentos de pesquisas. Com isso, é possível notar as ideias distintas desenvolvidas a respeito da análise de erros, justificando até mesmo os obstáculos para torná-la uma tendência estabelecida (CURY, 2019).

Outra vertente, criada na França, foi a de Gaston Bachelard (1884-1962), que desenvolveu a Teoria dos Obstáculos Epistemológicos. Segundo ele, existem três tipos de obstáculos que podem estar presentes no ensino: I) *Ontogenéticos*, que se relacionam com as limitações do desenvolvimento cognitivo; II) *Didáticos*, ligados ao processo de ensino; e III) *Epistemológicos*, que estão presentes na natureza do conhecimento (CURY, 2004).

Igliori (2008) afirma que o obstáculo epistemológico é intrínseco ao conhecimento e pode ser encontrado na própria história de determinado conceito. Dessa forma, é possível pesquisar sobre eles embasando-se na análise histórica ou em dificuldades insistentes apresentadas pelos alunos. A autora ainda afirma que, para Bachelard,

> [...] é em termos de obstáculos que se assenta o conhecimento científico. Que é no ato mesmo de conhecer que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, as perturbações e as lentidões, nas quais se mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento [...]. Um obstáculo epistemológico incrusta-se no conhecimento não questionado. (IGLIORI, 2008, p. 124).

Se, de acordo com Bachelard, o conhecimento é feito de correção de conceitos incorretos, toda ciência abriga erros em sua origem. A Matemática não teve um caminho diferente. Nesse sentido, a Teoria dos Obstáculos Epistemológicos tem sido usada para embasar a importância do rompimento de paradigmas das práticas tradicionais, que caracterizam a Matemática como uma disciplina para “pessoas especiais” (PINTO, 2000).

Além disso, Cury (2019) também afirma que essa ideia de obstáculo associada ao erro levanta uma questão importante: o obstáculo também é um tipo de conhecimento, que pode ter sido construído pelo aluno e relacionado com outros conceitos. Naquele contexto, especificamente, tinha certo sucesso. E, na tentativa de adaptá-lo para ser usado em outras situações, esse conhecimento anterior passa a não ter mais aquele êxito de antes. Ainda assim, o estudante resiste em deixá-lo de lado e por isso é tão difícil superá-lo (CURY, 2019). Nesse caso, “[...] o aluno (e o professor, por suposto) terá de trabalhar da mesma forma que o faz quando da construção de um novo conhecimento, com o agravante de que o ‘falso’ saber (aquele que funcionava bem no contexto anterior) estará, ainda, por trás da nova construção.” (CURY, 2019, p. 35).

Na década de 80, diversos artigos foram publicados na Europa e nos Estados Unidos. Muitas pesquisas que discutiam o erro e novas perspectivas a seu respeito foram divulgadas.

Na Conferência Interamericana de Educação Matemática, que aconteceu em 1985 na cidade de Guadalajara, entendeu-se que a Análise de Erros seria uma abordagem em ascensão nas próximas décadas (CURY, 2004).

No Brasil, não há registros de trabalhos sobre o erro antes da década de 1980. Cury (2019) acredita que existe a possibilidade de a temática ter sido abordada em publicações de outras áreas ou em periódicos que tiveram pouca divulgação. As primeiras pesquisas encontradas abordavam questões de provas e percentuais de erros, acertos e ausência de resolução, como ainda acontece nos dias atuais.

A expressão “*Análise de Produções Escritas*” não se limita a categorizar as respostas como certas ou erradas, mas interroga o desenvolvimento traçado para produzi-las. Nesse sentido, Cury (2019) afirma que:

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. [...] ao considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores. No entanto, ao procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, o trabalho pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento. (CURY, 2019, p. 65).

É importante entender que a análise aqui descrita não é somente uma técnica que leva em consideração fórmulas e procedimentos. Para Cury (2006), os erros cometidos e os conceitos por trás da sua causa devem fazer parte dos saberes do professor. Como cada aluno apresenta uma atitude diante de questões apresentadas, essa investigação requer um profundo conhecimento matemático em relação ao erro e do que será desenvolvido a partir dele. Quando um aluno erra, é demonstrado que seu conhecimento está incompleto. Então, surge a oportunidade de o professor auxiliá-lo a conquistar o conhecimento que está em falta ou descobrir por que cometeu determinado erro (PINTO, 2000). Bortoli (2011) também afirma que se o professor não tem domínio dos conteúdos matemáticos, pode ensinar algo incorretamente, gerando um obstáculo na aprendizagem da Matemática.

De acordo com Bortoli (2011), uma das causas que influenciam na aprendizagem de Matemática é o erro que os alunos cometem, mas que não são resgatados por eles ou pelo professor. Ao ser perguntado o que de fato foi aprendido, se as respostas são coerentes e se fazem sentido para o problema em questão, o discente tem a possibilidade de desenvolver as competências e habilidades consideradas importantes para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática (BORTOLI, 2011).

Oliveira e Palis (2011) destacam que analisar trabalhos de alunos causa reflexões, por parte do docente, sobre questões matemáticas e pedagógicas, e ainda gera sensibilidade diante das dificuldades dos alunos. Assim, ao envolver resoluções distintas (certas ou erradas) em uma atividade, cria-se possibilidade para vários pontos de vista.

> Uma aprendizagem para o êxito considera o erro como um elemento essencial para a construção do sujeito, favorece um "educar-se" para aceitar-se (a si e aos outros), em suas diferenças físicas, emotivas e intelectuais. Ao ser visto de modo construtivo pelo professor, o erro colabora para a boa auto-estima do aluno. Porém, para que ele "acerte mais", é preciso que tenha oportunidade de "errar mais", sem ser punido. (PINTO, 2000, p. 62-63).

Ramos e Curi (2014) afirmam que é necessário o desenvolvimento de estratégias didáticas que ajudem na superação das dificuldades, de forma que os erros possam ser corrigidos. Assim, o professor deve analisar pormenorizadamente a produção de seus alunos, a fim de fazer do erro um recurso didático e "[...] usar o lado construtivo e criativo desses enganos com o objetivo de minimizar as dificuldades." (RAMOS; CURI, 2014, p. 2).

Encarar o erro usando uma nova abordagem é uma tarefa difícil, mas necessária. Essa interpretação precisa estar presente nos cursos de formação de professores. Ao discutir resoluções e investigar o erro, os licenciandos certamente estarão aptos a gerar reflexões sobre o processo de construção do conhecimento e as possíveis metodologias que usarão ao assumirem suas práticas em sala de aula (CURY, 2019). Além disso, é importante que seja promovido contato com referenciais teóricos que falem sobre maneiras de se avaliar. Por vezes, os erros são relacionados aos processos de avaliação, dando a ideia de que é possível e suficiente pontuar o que o aluno produz apenas pelos acertos e erros (CURY, 2006).

Com isso, Oliveira e Palis (2011, p. 343) questionam: "[...] Mas o que há de novo com esta tarefa de analisar trabalhos de alunos?". Analisar as produções dos alunos é algo frequente na profissão, mas que os professores geralmente fazem sozinhos, apenas para atribuir alguma nota. Assim, as autoras defendem que, ao analisar a produção dos alunos em grupo, existem amplas características que podem ser exploradas com o intuito de contribuir para a formação inicial (OLIVEIRA; PALIS, 2011).

Bortoli (2011) afirma que as dificuldades para resolver questões de Matemática Elementar são percebidas em todos os níveis de ensino, o que alimenta um círculo vicioso, visto que elas não costumam ser abordadas e trabalhadas pelos alunos e seus professores durante as aulas. Isso pode gerar reprovação e desistência, já que os alunos são “promovidos” por suas notas nas avaliações individuais na maioria das aulas de Matemática (BORTOLI, 2011).

Cury (2019) diz que para saber como proceder com esse tipo de metodologia em sala de aula, é importante conhecer trabalhos já realizados, pois “[...] toda investigação vai se construindo aos poucos, com o apoio de investigadores que já trilharam os caminhos da pesquisa em temas correlatos.” (CURY, 2019, p. 51).

Diante disso, a respeito de pesquisas que usaram a metodologia de Análise de Erros e foram aplicadas no Ensino Superior, na disciplina de CDI I, é válido destacar Cury e Cassol (2004), Casavotto (2010), Bortoli (2011) e Cury (2019). Todos esses autores, em seus trabalhos, questionam quais são as causas dos erros cometidos pelos alunos nessa disciplina e de que forma poderiam auxiliá-los na superação dessas dificuldades.

Cury e Cassol (2004) desenvolveram uma pesquisa durante o ano de 2003, em um curso de Engenharia Química. A Análise de Erro se fez presente na verificação de respostas às avaliações. Das provas aplicadas em cada semestre, foram selecionadas as questões com maior índice de erros. Posteriormente, eles foram classificados pela forma de resolução e analisados.

Das dificuldades percebidas pelas autoras, foram destacadas: não conhecimento de gráficos de funções; erros em operações e propriedades, produtos notáveis e fatoração; falta do argumento das funções trigonométricas; e uso errado dos métodos de integração.

Casavotto (2010) também desenvolveu sua pesquisa com alunos do curso de Engenharia. Ele analisou uma atividade de sondagem e avaliações realizadas por duas turmas durante um semestre. Para realizar as provas, os alunos tinham permissão para produzir um material de consulta em uma folha de ofício, podendo ser preenchida em frente e verso, e contendo os conceitos que fossem considerados como relevantes. Esse material também foi analisado. Além disso, o autor também aplicou questionários aos alunos, professores e monitores.

A atividade de sondagem continha 18 exercícios. Ao todo, Casavotto (2010) analisou 1692 questões. As erradas totalizaram 893, as quais foram distribuídas da seguinte maneira: 52% havia erro de conteúdo do Ensino Fundamental; 40% apresentava erro de conteúdo do

Ensino Médio; e 8% compreendia erro de interpretação. Com relação às avaliações, a maior parte dos erros estava relacionada a conteúdos dos ensinos Fundamental e Médio.

Bortoli (2011), primeiramente, aplicou um "projeto-piloto" a 52 alunos da 2.ª série do Ensino Médio. Foram aplicados exercícios contidos em vestibulares, que abordavam conteúdos matemáticos geralmente aprendidos no Ensino Fundamental e nas primeiras séries do Ensino Médio. Posteriormente, o autor desenvolveu um novo teste a ser aplicado a 31 alunos divididos entre os cursos de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia Agronômica, Química e Sistemas de Informação. Mais uma vez, os conteúdos presentes nas questões eram alguns dos que são estudados no Ensino Básico.

Em suas análises, Bortoli (2011) resumiu os resultados presentes em sua pesquisa a erros por: mau uso dos dados fornecidos, má interpretação da linguagem, não verificação das respostas e erros técnicos, que incluem manipulação algébrica e algoritmos usados incorretamente. Notou-se que os alunos têm muita dificuldade para trabalhar com a Álgebra, principalmente no que diz respeito à "[...] simplificação e a fatorações algébricas, no desenvolvimento de produtos notáveis, na redução de termos semelhantes, na divisão de polinômios, na resolução de sistema de equações de 1º grau." (BORTOLI, 2011, p. 81).

Cury (2019) relatou uma investigação realizada com 368 calouros de nove IES do Brasil. O projeto foi desenvolvido em cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia, Arquitetura e Ciência da Computação, sendo as turmas formadas por alunos de Cálculo I, Álgebra Linear, Geometria Analítica e Fundamentos de Matemática.

Foram elaboradas 12 questões que envolvessem conteúdos da Educação Básica e que se relacionassem com as dificuldades presentes no ensino de Cálculo. Destas, Cury (2019) selecionou apenas duas para fazer a análise dos erros. A primeira questão envolvia cálculo de porcentagem, enquanto a segunda, a procura pelo conjunto-solução da equação $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2x+9}=\frac{2}{2x^2+19x+45}$. Apesar do alto índice de acertos da primeira, alguns alunos erraram por não saber operar com porcentagem ou por equívocos em operações básicas. Já na segunda, aconteceu o contrário: foi a questão com maior quantidade de erros ou respostas em branco. Muitos tentaram encontrar as raízes do polinômio de 2.º grau ou não souberam operar com as frações.

Com isso, Cury (2019) destacou como a dificuldade em manipular números racionais é um problema que acaba refletindo em outros conteúdos, afinal, "[...] se o estudante não sabe somar frações numéricas, também não vai saber somar frações algébricas, e as dúvidas e erros vão ser frequentes” (CURY, 2019, p. 57).

Para Cury e Cassol (2004), a análise dos erros cometidos pelos alunos mostra o quanto não há domínio em conteúdos do Ensino Básico. Esse fato, juntamente com a dificuldade em abstrair e generalizar, acaba fazendo com que muitos sejam reprovados ou decidam abandonar cursos na área de Ciências Exatas. Com isso, as autoras destacam o quanto a transição para o Ensino Superior tem trazido complicações tanto para os alunos quanto para os professores, devido às lacunas em conceitos matemáticos apresentadas pelos estudantes (CURY; CASSOL, 2004).

De forma geral, os autores anteriormente mencionados concordam que, diante de tantos problemas presentes na disciplina de Cálculo I, é extremamente importante que haja uma reflexão sobre como têm sido as abordagens em sala de aula. Mudanças metodológicas podem e devem ser consideradas, porque a situação atual mostra que não dá para manter a mesma abordagem de sempre (CASAVOTTO, 2010). É importante encontrar uma maneira de fazer com que os alunos se sintam desafiados, por meio de atividades que os motivem e despertem o interesse pela disciplina (CURY; CASSOL, 2004).

É interessante destacar que esses mesmos autores agruparam os erros por semelhanças de resoluções, ou seja, aquelas que apresentavam um raciocínio parecido eram separadas em um grupo; as corretas, em outro; e as que não apresentavam nenhum padrão de resolução, foram separadas em outro grupo específico.

Portanto, destaca-se a importância da Análise de Erros ou Produções Escritas durante o processo de ensino e aprendizagem, pois permite ao professor e aos alunos a possibilidade de compreender de perto como ocorre a apreensão do saber (CURY, 2007). Dessa forma, as dificuldades nos conteúdos são expostas, facilitando a compreensão e a elaboração de estratégias que possam ajudar a saná-las (CAVASOTTO, 2010).

Tendo como base a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e utilizando a Análise de Erros ou Produções Escritas, foram analisadas as respostas dos alunos às atividades avaliativas propostas pela professora da disciplina de CDI I. Esta etapa teve como finalidade identificar os níveis de compreensão deles com relação aos conteúdos considerados requisitos, da Matemática Elementar, para o referido componente curricular, com o intuito de reconhecer o que de fato os alunos compreenderam com relação aos conceitos previstos na ementa de CDI I. Essa análise é feita no capítulo 5.

3.3 Resultados da delimitação do tema da pesquisa

Como a Matemática Elementar é um campo vasto de tópicos, tornou-se necessário selecionar conteúdos que fizessem parte dessa área e pudessem atender a intenção do trabalho. Para isso, duas ações foram norteadoras: a análise das ementas dos cursos de nível Superior do IFFluminense *campus* Campos Centro que apresentam CDI I na grade curricular e a aplicação de um questionário de sondagem para professores que lecionaram ou lecionam essa disciplina nos cursos analisados.

Inicialmente, as ementas analisadas pelas autoras desta pesquisa pertenciam aos seguintes cursos: Arquitetura e Urbanismo, Engenharia de Computação, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Licenciatura em Ciências da Natureza, Licenciatura em Matemática, Tecnólogo em Manutenção Industrial e Tecnólogo em Sistemas de Informação e Tecnólogo em Telecomunicações. Dessa forma, após a análise, foi possível listar os conteúdos da Matemática Elementar considerados requisitos para a disciplina de CDI I, com base nos conceitos nela explorados.

Nesse sentido, um questionário de sondagem (Apêndice A) foi elaborado com intuito de verificar a hipótese de que os estudantes chegam ao Ensino Superior defasados nos tópicos que foram selecionados. Além disso, também teve a finalidade de analisar se os docentes percebem que os alunos apresentam dificuldades durante as aulas e nas avaliações, como mencionado anteriormente, em assuntos da Matemática Elementar.

O questionário foi estruturado utilizando a escala Likert de cinco pontos, e composto por habilidades, consideradas por meio de pesquisas na literatura e análise das ementas dos cursos já citados, como necessárias para que o aluno tenha um bom desempenho na disciplina, sendo elas: I) Determinar domínio de funções; II) Divisão de polinômios; III) Fatoração de polinômios; IV) Propriedades de potenciação e radiciação; V) Propriedades de logaritmo; VI) Gráfico de funções; VII) Operações com frações algébricas; VIII) Continuidade e descontinuidade de funções; e IX) Relacionar identidades trigonométricas.

Sendo o público deste questionário os professores da instituição analisada que atuam ou já atuaram nas disciplinas de CDI I, em qualquer um dos cursos de graduação mencionados anteriormente, estes deveriam avaliar cada habilidade selecionada de acordo com as suas percepções sobre o aprendizado dos alunos numa escala de 1 a 5, legendadas da seguinte forma: 1) Nenhuma dificuldade; 2) Dificuldade pontual; 3) Dificuldade moderada; 4) Dificuldade alta; e 5) Extrema dificuldade. Além disso, os participantes também poderiam sugerir algum conteúdo que não estivesse entre os apresentados, com o intuito de contribuir para a pesquisa.

A escala Likert foi desenvolvida pelo professor Rensis Likert e, de acordo com Günther (2003), é usada em levantamento de opiniões e avaliações. O respondente deve avaliar um fenômeno numa escala que, comumente, contém cinco alternativas. McClelland (1976) também considera que tal método é mais fácil para analisar e descrever, pois corresponde a definir uma escala de concordância para uma única afirmação.

Diante disso, é importante destacar que vinte e três professores foram procurados para responder o questionário, dos quais, dezessete participaram. Os dados coletados foram dispostos no Quadro 1, dividido por meio das habilidades e das avaliações recebidas, na qual cada coluna representa um professor.

Quadro 1 – Análise das habilidades definidas

Determinar domínio de funções	5	2	3	3	4	4	3	3	2	3	3	4	3	3	1	3	3
Divisão de polinômios	5	4	4	3	3	5	3	3	4	4	5	3	4	3	2	3	3
Fatoração de polinômios	5	4	3	3	3	5	3	3	4	4	5	4	4	4	2	3	4
Propriedades de potenciação e radiciação	5	3	3	4	2	3	2	3	3	4	2	3	3	3	2	3	3
Propriedades de logaritmo	5	4	4	4	3	5	3	5	4	5	4	2	3	3	3	5	3
Gráfico de funções	5	4	4	4	3	5	2	4	3	3	3	5	2	3	3	4	4
Operações com frações algébricas	5	2	4	3	3	4	5	3	4	4	2	5	4	3	3	3	3
Continuidade e descontinuidade de funções	5	4	5	4	4	5	4	3	2	3	4	4	4	-	4	4	4
Relacionar identidades trigonométricas	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	3	5	-	5	3	5

Fonte: Elaboração própria.

Com isso, foi possível perceber que, de acordo com a observação dos professores participantes, os graduandos apresentam mais obstáculos nos seguintes tópicos: relacionar identidades trigonométricas, propriedades de logaritmo, gráficos de funções e divisão e fatoração de polinômios. Por conseguinte, é válido destacar que os alunos que ingressam no Ensino Superior em cursos da área de Ciências Exatas precisam estar fortemente embasados nos conhecimentos matemáticos, para estudar disciplinas como CDI I (BORTOLI, 2011).

Após a aplicação do questionário de sondagem aos professores, foi decidido que o público-alvo desta pesquisa seria composto pelos alunos do 2.º período da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal supramencionado. Essa decisão se deu pelo fato de que esses graduandos, quando formados, atuarão nas salas de aula. Então, destaca-se a importância de analisar como têm ocorrido os processos de ensino e aprendizagem durante a formação de professores. Além disso, um dos objetivos específicos deste trabalho é propor algumas reflexões pedagógicas, ao final da pesquisa, a respeito de medidas que possam contribuir para melhorias no curso em questão. Por fim, a disciplina de CDI I, nessa graduação específica, é ministrada no 2.° período, o que justifica a escolha por essa turma.

Pelos resultados obtidos na aplicação em questão, também foi definido que os tópicos mais indicados pelos professores seriam analisados durante o acompanhamento da turma de CDI I, levando em consideração a presença ou ausência desses conhecimentos nas produções escritas dos alunos e nas observações das aulas.

Observa-se, então, a relevância deste trabalho ao propor a retomada de conceitos elementares em turmas futuras, na tentativa de alcançar um melhor desempenho dos alunos em CDI I.

3.4 Elaboração das atividades

Para a referida pesquisa, optou-se por utilizar os seguintes instrumentos para coleta de dados: questionário de sondagem, atividades avaliativas realizadas durante as aulas de CDI e entrevistas estruturadas com a professora e o monitor da disciplina, como mencionado no tópico 3.1.

Para os alunos que desejassem participar da pesquisa, foi elaborado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B), que autoriza o uso das informações fornecidas por eles apenas para fins de coleta de dados, sem suas identificações, conforme a Resolução 196/96[6] que regulamenta pesquisas que são realizadas com os seres humanos. A seguir, foram descritas as elaborações de cada uma das atividades, assim como os seus objetivos.

3.4.1 Elaboração do questionário

O questionário (Apêndice C) visou obter informações a respeito do público-alvo, de forma que fosse possível conhecer e caracterizar o perfil dos alunos da turma. Ele continha trinta e quatro perguntas e foi dividido em quatro partes, e cada uma possuía um objetivo específico:

I) A primeira seção foi intitulada como “Identificação”. Aqui, o objetivo era captar informações mais gerais do público-alvo, como nome, idade, sexo, cidade em que reside, período em que estava matriculado no curso em questão, entre outras. Dessa forma, seria possível identificar cada um dos participantes da pesquisa.

---

[6] A informação foi retirada do site: https://bit.ly/3vSAG1N.

II) A segunda seção foi intitulada como “Vida Acadêmica”. Nessa, o objetivo era conhecer um pouco mais da atual trajetória na graduação escolhida. Para isso, havia perguntas a respeito da frequência e dos hábitos de estudos, reprovação e rendimento na disciplina de FM I (que é requisito para a disciplina de CDI I).

III) A terceira seção foi intitulada como “Relação com a Matemática”. Aqui, o objetivo era identificar como é a relação do aluno com a própria Matemática, por meio de perguntas a respeito das aulas no Ensino Básico, frustrações que possam ter surgido durante a sua aprendizagem e dificuldades em conteúdos matemáticos básicos.

IV) A quarta e última seção foi intitulada como “Relação com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I”. Nessa, o objetivo era descobrir se aquele seria o primeiro contato com o componente curricular em questão ou se já haviam reprovado na disciplina no curso de Licenciatura em Matemática ou iniciado ou cursado a disciplina em outro curso de graduação; além disso, essa seção também tinha a intenção de colher a visão dos alunos a respeito da relação entre a Matemática Básica e os conteúdos vistos em CDI I.

3.4.2 Elaboração dos roteiros para as entrevistas

Com o objetivo de captar as percepções da professora de CDI I e do monitor dessa mesma disciplina, foram criados dois roteiros de entrevistas.

Para a entrevista com o monitor, foram elaboradas sete perguntas, descritas no Apêndice D, cujas finalidades foram relatadas a seguir.

I) As três primeiras perguntas tinham como objetivo saber quantos alunos frequentavam a monitoria, se eram sempre os mesmos e com que frequência essa busca ocorria (regularmente ou às vésperas de atividades avaliativas).

II) As perguntas quatro e cinco estavam relacionadas aos tipos de dúvidas apresentadas pelos alunos e se eram conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior.

III) Na sexta pergunta, era pedido para identificar, se possível, assuntos específicos ou recorrentes dentre as dúvidas apresentadas.

IV) Na sétima e última pergunta, a intenção era identificar os erros mais frequentes cometidos pelos alunos durante as aulas na monitoria, e se estavam relacionados a conteúdos da Matemática Básica ou eram específicos da disciplina de CDI I.

Já para a entrevista com a professora, também foram elaboradas sete perguntas que se encontram no Apêndice E, cujos objetivos foram descritos a seguir.

I) As duas primeiras perguntas tinham como objetivo saber se era a primeira vez que a disciplina era lecionada pela docente e, na visão dela, quais são os possíveis motivos para a reprovação na disciplina de CDI I.

II) A terceira pergunta estava relacionada aos tipos de dúvidas apresentadas pelos alunos e se eram conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior.

III) A pergunta quatro tinha relação com o trabalho efetuado pelo monitor.

IV) A quinta pergunta era sobre o desempenho da turma na disciplina lecionada.

V) As duas últimas perguntas tinham a intenção de identificar a visão sobre o erro, apresentada pela docente, e quais foram os erros mais frequentes e cometidos pelos alunos, além de apontar se estavam relacionados a conteúdos da Matemática Básica ou eram específicos da disciplina de CDI I.

4 CARACTERIZAÇÃO DO CURSO

O curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro foi fundado em 2001[7] como uma opção para a formação de professores de Matemática em uma instituição pública, na modalidade presencial e no período matutino. Tendo sido reconhecido pela Portaria SESu n.º 733, de 6 de outubro de 2006, publicada em 10 de outubro de 2006, a proposta desta graduação é estabelecer um conhecimento curricular que proporcione aos professores em formação a associação de saberes a partir dos conceitos matemáticos vistos, mediante procedimentos didático-metodológicos. Além disso, esta graduação é definida por um modelo pedagógico maleável, admitindo a flexibilização das matrículas do segundo período em diante, o que significa que os alunos podem escolher as disciplinas que preferirem de acordo com as que ficam disponíveis em seus planos de estudo.

Inicialmente, era oferecido no turno matutino com duração de sete semestres letivos, ou seja, três anos e meio. A partir do segundo semestre letivo de 2016, passou a ser ofertado também no turno noturno e a ter duração de oito semestres letivos, totalizando quatro anos. O acesso a esta graduação se dá por concurso vestibular, transferência externa ou pelo Sistema de Seleção Unificada (SISU). Atualmente, são oferecidas quarenta vagas no primeiro semestre, no turno da manhã, e quarenta vagas no segundo semestre, no período da noite. É válido destacar que as disciplinas de cada período são ofertadas apenas uma vez por semestre, intercalando entre os turnos matutino e noturno.

Como o intuito deste trabalho foi analisar o desempenho dos alunos em Cálculo, as investigações dos dados foram restritas à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada no 2.º período, e à disciplina intitulada Fundamentos da Matemática I, que no curso em questão, é requisito para a de CDI I e ofertada no 1.º período. A seguir, são expostas as ementas de ambas e, posteriormente, no subtópico 4.2, os dados que refletem o quantitativo de: aprovações; reprovações por falta e no componente curricular analisado; alunos que trancaram o curso; e que excluíram a disciplina (cancelamento).

4.1 Análise das ementas das disciplinas do curso de licenciatura do IFFluminense *campus* Campos Centro

De acordo com o Projeto Político Pedagógico do Curso (PPC), a ementa da disciplina de FM I prevê os seguintes conteúdos: Funções, Função constante, Função afim, Função

---

[7] Informações retiradas do PPC do curso e do site da Diretoria das Licenciaturas (DIRLIC) do IFFluminense *campus* Campos Centro: https://bit.ly/3m6SSAi.

quadrática, Funções definidas por várias sentenças e Função modular. Para a disciplina de CDI I, estão organizados os conceitos de: Limites - propriedades e continuidade, e Derivadas - definição, regras de derivação e aplicações.

A fim de se obter um comparativo com relação aos conteúdos previstos para esses dois componentes curriculares e analisar os que são considerados como requisitos para Cálculo Diferencial e Integral I em outras instituições, são feitas análises de ementas de disciplinas semelhantes a estas em outros cursos de Licenciatura em Matemática de alguns Institutos Federais.

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná *campus* Capanema (IFPR)[8], a disciplina que se assemelha com a de CDI I do IFFluminense *campus* Campos Centro é intitulada "Cálculo Diferencial", ofertada no 3.º período do curso. Sua ementa prevê o estudo dos seguintes conteúdos: Limites, Continuidade, Derivação de funções reais de uma variável, Teoremas de Rolle e do valor médio, Técnicas de construção de gráficos, Diferenciais e Teoremas fundamentais.

Para que o graduando possa cursar este componente curricular, é necessário já ter cursado as disciplinas requisitos, denominadas "Matemática Elementar" e "Fundamentos de Matemática", ambas ofertadas no 1.º período. A ementa da primeira prevê: Conjuntos, Conjuntos numéricos, Frações e operações, Potenciação, Radiciação, Razão e proporção, Grandezas direta e inversamente proporcionais, Regra de três simples e composta, Equações do 1.º e 2.º graus, Produtos notáveis, Fatoração, Expressões algébricas e Trigonometria. Já a segunda disciplina tem como conteúdos programáticos: Intervalos, Conceitos e propriedades fundamentais de funções (Polinomial do 1.º e Polinomial do 2.º grau, Modular, Logarítmica e Exponencial) e Representação gráfica. Essa última é a disciplina que contém parte dos conteúdos vistos no componente curricular "Fundamentos de Matemática I", do IFFluminense *campus* Campos Centro.

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo *campus* Campos do Jordão (IFSP)[9], a disciplina que se assemelha com a de CDI I do IFFluminense *campus* Campos Centro é intitulada "Cálculo Diferencial e Integral I", ofertada no 3.º período do curso. Sua ementa prevê o estudo dos seguintes conteúdos: Funções reais de uma variável, Limites, Continuidade e Derivadas.

---

[8] Informações retiradas do site da Reitoria do IFPR: https://bit.ly/31Bft0e.
[9] Informações retiradas do site do IFSP: https://bit.ly/35vxMoO.

Para que o graduando possa cursar este componente curricular, é necessário já ter cursado as disciplinas requisitos, denominadas “Fundamentos de Matemática Elementar I” e “Fundamentos de Geometria Analítica”, ofertadas no 1.º período, e “Fundamentos de Matemática Elementar II”, ofertada no 2.º período. A ementa da primeira prevê: Noções de lógica, Teoria dos conjuntos, Conjuntos numéricos, Relações e Funções. A segunda tem como conteúdos programáticos: Coordenadas cartesianas no plano, Estudo da reta, Circunferências e Cônicas. Por último, a terceira apresenta os seguintes conteúdos previstos na ementa: Trigonometria, Funções trigonométricas, Números complexos, Polinômios e Equações polinomiais. A primeira é a disciplina que contém parte dos conteúdos vistos no componente curricular “Fundamentos de Matemática I”, do IFFluminense *campus* Campos Centro.

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará *campus* Fortaleza (IFCE)[10], a disciplina que se assemelha com a de CDI I do IFFluminense *campus* Campos Centro é intitulada “Cálculo I”, ofertada no 2.° período do curso. Sua ementa prevê o estudo dos seguintes conteúdos: Funções reais de uma variável real, Limites, Continuidade e Derivadas. Para que o estudante possa cursar esse componente curricular, é necessário já ter cursado a disciplina que é requisito, denominada “Matemática Elementar I”, ofertada no 1.º período. Ela tem como conteúdos programáticos: Conjuntos, Números reais e Funções. Essa é a disciplina que contém parte dos conteúdos vistos no componente curricular “Fundamentos de Matemática I”, do IFFluminense *campus* Campos Centro.

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN)[11], a disciplina que se assemelha com a de CDI I do IFFluminense *campus* Campos Centro é intitulada “Cálculo de uma Variável A”, ofertada no 3.° período. Sua ementa prevê o estudo dos seguintes conteúdos: Limite e continuidade de funções, Teorema do valor intermediário, Derivadas e Teorema do valor médio. Para que o estudante possa cursar este componente curricular, é necessário já ter cursado as disciplinas requisitos, denominadas “Matemática Básica I”, ofertada no 1.º período, e “Matemática Básica II”, ofertada no 2.º período. A ementa da primeira prevê: Estudo das funções e Representação gráfica. Já a segunda tem como conteúdos programáticos: Trigonometria, Números complexos, Polinômios e Equações polinomiais. A primeira é a disciplina que

[10] Informações retiradas do site do IFCE: https://bit.ly/37xuIeo.
[11] Informações retiradas do site do IFRN: https://bit.ly/2TkpJVU.

contém parte dos conteúdos vistos no componente curricular “Fundamentos de Matemática I”, do IFFluminense *campus* Campos Centro.

No curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro *campus* Volta Redonda (IFRJ)[12], a disciplina que se assemelha com a de CDI I do IFFluminense *campus* Campos Centro é intitulada “Cálculo 1”, ofertada no 2.º período do curso. Sua ementa prevê o estudo dos seguintes conteúdos: Derivadas, Problemas de otimização, Integral definida, Integral indefinida e Integral imprópria. Para que o estudante possa cursar este componente curricular, é necessário já ter cursado a disciplina requisito denominada “Pré-Cálculo”, ofertada no 1.º período, cuja ementa prevê: Estudo das funções, Inequações, Limites e Continuidade de funções. Essa é a disciplina que contém parte dos conteúdos vistos no componente curricular “Fundamentos de Matemática I”, do IFFluminense *campus* Campos Centro.

Com base nessas informações, é possível perceber que os cursos de Licenciatura em Matemática são abordados de maneiras diferentes nas Instituições Federais, seja pelas ementas ou até mesmo pelo período em que determinadas disciplinas são ofertadas. Também é válido destacar que algumas das instituições analisadas ofertam a disciplina de “Matemática Elementar” ou “Matemática Básica”, que abordam conteúdos vistos no segundo segmento escolar e que são fundamentais para o entendimento dos conceitos de Cálculo.

4.2 Análise de dados das disciplinas do curso de licenciatura do IFFluminense *campus* Campos Centro

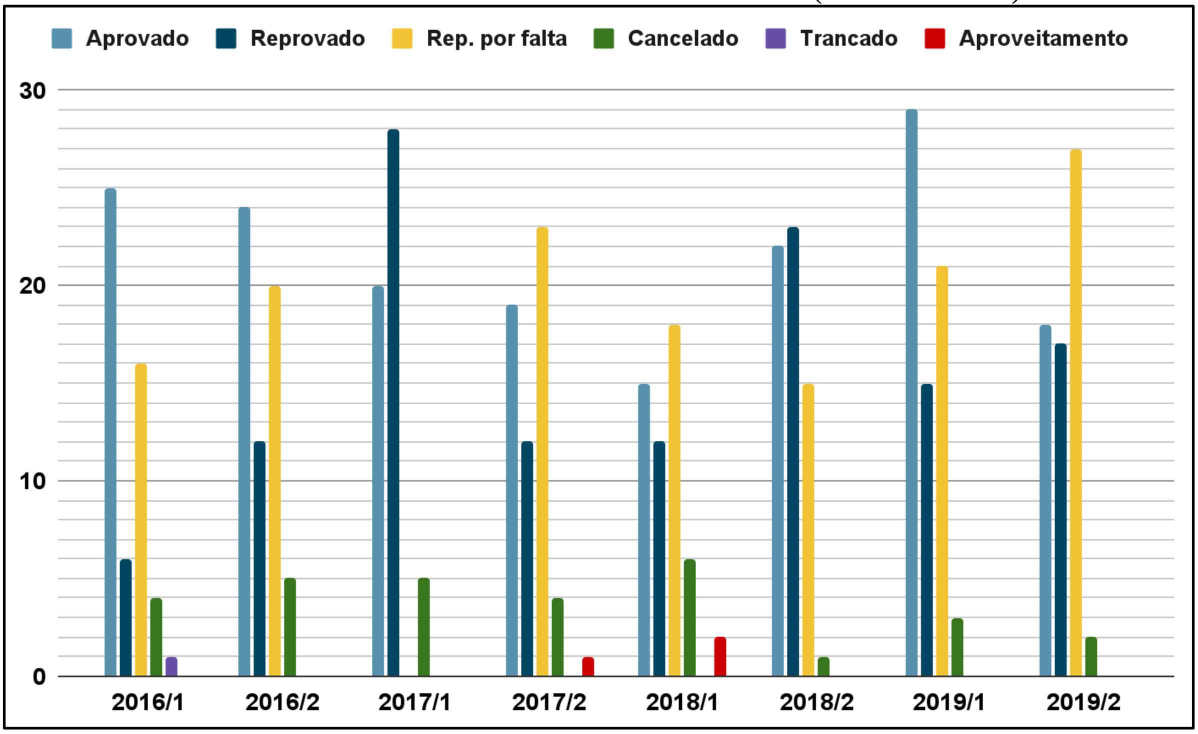
Levando em consideração o fato de que o curso de Licenciatura em Matemática, em análise, passou a ser ministrado em dois turnos a partir do segundo semestre de 2016, foram analisados os dados das turmas de FM I e CDI I desde então, a fim de se obter um panorama geral de tais disciplinas.

Nos gráficos a seguir, estão dispostos os índices de aprovação, reprovação, reprovação por falta, cancelamento, aproveitamento da disciplina e trancamento do curso das turmas de 2016.1 a 2019.2, no componente curricular de Fundamentos de Matemática I, e, das turmas de 2016.2 a 2019.2 na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I. Além disso, também se encontram os períodos em que os licenciandos estavam matriculados quando cursaram esses componentes curriculares.

[12] Informações retiradas do site do IFRJ: https://bit.ly/35R7w8b.

No Gráfico 1, estão destacados os dados citados anteriormente referentes às turmas de FM I compreendidas entre o primeiro semestre de 2016 e o segundo semestre de 2019.

Gráfico 1 – Turmas de Fundamentos de Matemática I (2016.2 a 2019.2)



Fonte: Elaboração própria.

Tendo em vista que o intuito foi observar como ocorreu o desempenho geral das turmas, foram analisados abaixo apenas os índices de aprovação e de reprovação nas disciplinas, sem considerar as reprovações por falta.

Em 2016.1, 53 licenciandos se matricularam em FM I. Destes, 49 eram do 1.° período e quatro do 3.° período. Tendo em vista a quantia total, 25 alunos foram aprovados e 6 foram reprovados na disciplina, todos do 1.º período.

No semestre de 2016.2, havia um total de 61 alunos matriculados em Fundamentos I. Destes, 57 alunos eram do 1.º período e 4 eram do 2.º período. Dos 61 citados, apenas 24 alunos foram aprovados. Ao todo, foram reprovados 12 alunos, dos quais 10 eram do primeiro período e 2 do segundo período.

Na turma de 2017.1, 53 licenciandos estavam matriculados na disciplina, dos quais 46 eram do 1.º período, 6 eram do 2.º período e 1 do 3.º período. Do total de 53, apenas 20 alunos foram aprovados e 28 alunos foram reprovados, dos quais 26 eram do primeiro período, 1 do segundo período e 1 do terceiro período.

Em 2017.2, 59 alunos estavam matriculados na disciplina de FM I, sendo que a turma era composta por 49 licenciandos do primeiro período, 3 do segundo período, 1 do terceiro período, um do quarto período, 1 do sexto período e 4 considerados pelo sistema Q-acadêmico como "sem período". Dos 59, apenas 19 alunos foram aprovados e 12 foram reprovados na disciplina, dos quais 9 eram do 1.° período, 1 do 2.° período e 2 "sem período".

No primeiro semestre de 2018, havia um total de 53 licenciandos matriculados, sendo que 48 alunos eram do 1.° período, 4 do 2.º período e 1 do 6.º período. Da quantia total, apenas 15 alunos foram aprovados e 12 reprovados, dos quais 11 alunos eram do 1.° período e 1 era do 2.º período.

Na turma de FM I de 2018.2, havia um total de 61 alunos, dos quais 54 eram do 1.° período, 3 do 2.º período, 1 do 4.º período e 3 do 6.º período. Dos 61, 22 alunos foram aprovados e 23 alunos foram reprovados. Dos 23, 19 licenciandos eram do primeiro período, 1 do segundo período, 1 do quarto período e 2 do sexto período.

Na turma de 2019.1, havia um total de 68 alunos matriculados na disciplina. Sendo que 51 licenciandos estavam matriculados no 1.º período, 11 no 2.º período, 4 no 3.º período, 1 aluno no 6.º período e 1 aluno no 7.º período. Desse quantitativo, 29 alunos foram aprovados e 15 alunos foram reprovados na disciplina. Dos 15 reprovados, 12 eram do primeiro período e 3 do terceiro período.

Em 2019.2, 67 licenciandos estavam matriculados na disciplina de Fundamentos I. Desse total, 53 alunos eram do 1.º período, 5 do 2.º período matutino, 4 do 3.º período, 2 do 4.º período, 1 do 6.º período, 1 aluno do 7.º período e 1 aluno considerado pelo sistema Q-acadêmico como sendo do "2.º período noturno", que provavelmente estava no terceiro período e cursava mais disciplinas da grade do segundo. Dos 67 licenciandos, 18 alunos foram aprovados e 17 foram reprovados na disciplina. Dos reprovados, 13 eram do primeiro período, 2 do segundo período matutino, 1 do terceiro período e 1 do sexto período.

Percebe-se que, com o passar dos semestres, a quantidade de alunos não aprovados (reprovados na disciplina ou por falta, trancamento do curso, cancelamento ou aproveitamento da disciplina) em FM I se mostra expressiva, quando comparada ao número de alunos aprovados em cada turma. Inclusive, é importante destacar a presença de alunos de períodos mais avançados, como o sexto e o sétimo, nesse componente curricular que é ofertado no 1.º período do curso. Outro ponto interessante de se analisar é o fato de que, em todos os semestres, alguns dos licenciandos já repetentes foram reprovados novamente.

Além disso, todas as turmas acima analisadas foram iniciadas com um grande quantitativo de alunos matriculados e, ao final de cada semestre, menos da metade dos alunos foram aprovados: em 2016.1, de 53 licenciandos, 25 foram aprovados; em 2016.2, de 61 alunos matriculados, apenas 24 foram aprovados; em 2017.1, de 53 licenciandos, só 20 foram aprovados; em 2017.2, de 59 alunos, 19 foram aprovados; em 2018.1 de 53 graduandos, só 15 conseguiram nota satisfatória na disciplina; em 2018.2, de 61 matriculados, apenas 22 foram aprovados; em 2019.1, 68 licenciandos estavam matriculados na disciplina e apenas 29 foram aprovados; e em 2019.2, de 67 alunos, só 18 foram aprovados.

No Quadro 2, a seguir, foram dispostos os percentuais de reprovação na disciplina de FM I de cada uma das turmas analisadas e a média entre os percentuais de todas elas.

Quadro 2 - Percentual de reprovação na disciplina das turmas de FM I

Turma	**Percentual de reprovação na disciplina**
2016.1	11,32%
2016.2	19,67%
2017.1	52,83%
2017.2	20,34%
2018.1	22,64%
2018.2	37,70%
2019.1	22,05%
2019.2	25,37%
Média total das turmas	26,49%

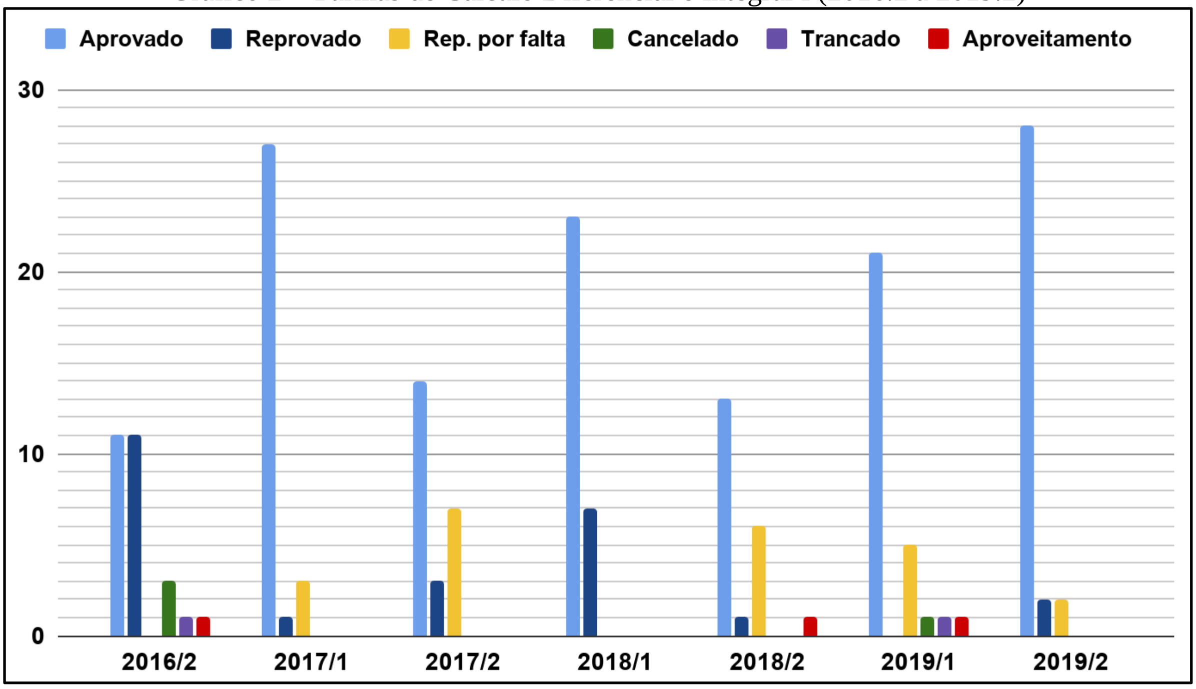
Fonte: Elaboração própria.

Pelo quadro disposto, percebe-se que o percentual de reprovação na disciplina de FM I oscilou entre 11,32% e 52,83%. A princípio, os números não causam estranhamento, porém, há de se levar em conta o quantitativo de alunos que foram reprovados por falta, que cancelaram a disciplina, que pediram aproveitamento ou trancaram o curso, pois isso afetou diretamente a quantidade de alunos aprovados ao final de cada semestre. Levando esses fatos em consideração, os números dispostos anteriormente se mostram realmente alarmantes, pois, tendo em vista o fato de que, teoricamente, os alunos já tiveram contato no Ensino Fundamental e no Ensino Médio com os conteúdos que são lecionados na disciplina de Fundamentos I, os índices de reprovação não deveriam ser tão altos como têm sido. Esses números evidenciam a dificuldade que os licenciandos têm tido com a transição do Ensino Básico para o Ensino Superior, o que corrobora com o fato de que eles têm, realmente, trazido uma base pouco consolidada e pouco estruturada na Matemática Elementar, conforme as análises feitas por Ferruzzi (2012), Costa Neto (2017), Rafael (2017), Anjos e Secafim (2018), Souza (2019) e Teixeira (2019) em suas pesquisas.

Deve-se levar em consideração também o fato da disciplina de Fundamentos I ser requisito para a de Cálculo I, pois isso revela que antes mesmo de aplicar os conhecimentos matemáticos previstos para o Ensino Básico nos conteúdos de CDI I, os alunos já apresentam dificuldades no aprendizado do conceito de cada um deles.

A seguir, são destacados, no Gráfico 2, os dados referentes às turmas de Cálculo Diferencial e Integral I de 2016.2 a 2019.2.

Gráfico 2 – Turmas de Cálculo Diferencial e Integral I (2016.2 a 2019.2)



Fonte: Elaboração própria.

No semestre de 2016.2, 27 alunos, todos do 2.º período, estavam matriculados no componente curricular CDI I. Dos 27, 11 foram aprovados e 11 foram reprovados na disciplina.

No primeiro semestre de 2017, 31 alunos se matricularam em Cálculo I. Desse total, 29 eram do 2.° período, 1 do 3.° período e 1 do 5.° período. Dos 31 matriculados, 27 foram aprovados e apenas 1 aluno do segundo período foi reprovado na disciplina.

Na turma de 2017.2, havia um total de 24 licenciandos matriculados em CDI I. Destes, 20 eram do segundo período, 2 eram do terceiro período, 1 era do quarto período e 1 era do quinto período. Apenas 14 licenciandos foram aprovados e 3 foram reprovados na disciplina. É interessante destacar que, do quantitativo de alunos reprovados, 2 eram do 2.° período e o outro, do 4.° período.

Em de 2018.1, 30 graduandos realizaram a matrícula na disciplina. Dos 30, 22 eram do 2.º período, 1 era do 3.º período, 2 era do 4.º período, 1 era do 6.º, 2 do 7.º período e 2 considerados do 1.º período, provavelmente pela quantidade de componentes curriculares cursados desse período, visto que Cálculo é uma disciplina ofertada no 2.º período. Ao final do semestre, 23 alunos foram aprovados e 7 foram reprovados, sendo que 5 eram do segundo período, 1 do quarto período e 1 do sétimo período.

Na turma de 2018.2, 21 alunos estavam matriculados em Cálculo I. Dos 21, 16 eram do 2.º período, 2 eram do 4.º período e 3 do 6.º período. Destes, 13 foram aprovados e 1 aluno do 6.º período foi reprovado na disciplina.

Em 2019.1, havia um total de 29 licenciandos matriculados em CDI I. Dessa quantia, 18 eram do segundo período, 1 do terceiro período, 1 do quarto período e 1 do sexto período. Dos 29, 21 alunos foram aprovados e nenhum foi reprovado na disciplina.

No segundo semestre de 2019, 32 alunos se matricularam no componente curricular de Cálculo 1. Dos 32, 28 eram do 2.° período e 4 do 3.° período. Ao final do semestre, 28 alunos foram aprovados e 2 reprovados na disciplina, dos quais um era do 2.° período e um do 3.° período.

Analisando os dados acima descritos e o Gráfico 2, é possível perceber que o quantitativo de alunos reprovados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I não é tão alto quando comparado ao número total de alunos de cada turma. Contudo, é importante salientar que, como a disciplina de Fundamentos I é requisito para a de CDI I no curso de Licenciatura em Matemática em questão, e os índices de reprovação nela são bem altos, ocorre uma espécie de “filtro” com relação ao quantitativo de licenciandos, pois muitos alunos ficam retidos e, consequentemente, não podem cursar a disciplina de Cálculo I. E, mesmo os que conseguem se matricular na disciplina de Cálculo I, ainda apresentam dificuldades com relação a conteúdos matemáticos básicos. Essas defasagens foram evidenciadas nos resultados obtidos e descritos no capítulo 5 desta pesquisa.

Além disso, também pôde ser constatado que das sete turmas analisadas, havia alunos de períodos mais avançado em quatro delas, que não alcançaram nota satisfatória na disciplina: em 2017.2, 1 do 4.º período foi reprovado; em 2018.1, 1 do 4.º período e 1 do 7.º período foram reprovados; em 2018.2, 1 do 6.º período foi reprovado; e em 2019.2, 1 do 3.° período foi reprovado.

Mesmo levando em conta o fato de que esses alunos podem ter tido contato com o componente curricular pela primeira vez nesses casos, já que a grade do curso é flexível a partir do 2.° período, há de se considerar que eles apresentaram dificuldades nos conteúdos lecionados em CDI I. Consequentemente, esses dados revelam que essas dificuldades podem estar relacionadas à defasagem de conteúdos prévios, pois o período em que esses licenciandos estavam revela que eles já deveriam ter certa bagagem de aprendizado da Educação Básica e do curso de Licenciatura.

Outro fator importante notado é que, como esses licenciandos foram reprovados, eles podem ser classificados como repetentes, pois, em algum momento, tiveram que cursar a disciplina novamente.

De modo geral, os dois gráficos trazem um panorama de como tem sido o desempenho dos alunos nas duas disciplinas analisadas. As conclusões descritas revelam a importância da intenção desta pesquisa, que é apontar de que forma a falta de base nos conceitos prévios atinge os aprendizados dos alunos do 2.° período, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

4.3 Contexto de coleta de dados

Os alunos selecionados para compor o público-alvo deste trabalho estavam matriculados no 2.° período do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro, no primeiro semestre de 2020. Como já dito anteriormente, esse período foi escolhido por ser nele que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é ofertada.

Em março de 2020, uma pandemia foi instaurada e todo o mundo acabou vivenciando as consequências ocasionadas por ela. Isso também impactou diretamente a presente pesquisa. A princípio, foi planejado que as aulas seriam acompanhadas de forma presencial, assim como a aplicação das atividades responsáveis pela coleta de dados desta pesquisa. Entretanto, diante do momento pandêmico vivenciado, as aulas aconteceram apenas de forma remota pela plataforma *Google Meet*, e os materiais, listas de exercícios, gravações das aulas (quando ocorriam), livros, vídeos utilizados pelos professores e atividades avaliativas foram disponibilizados para os alunos, no caso da disciplina de CDI I, por meio da plataforma *Google Classroom*, intitulada como Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Devido à grandeza da instituição analisada, na qual centenas de alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior estudam, foi indispensável que a direção do instituto realizasse um levantamento com relação aos estudantes, com o objetivo de compreender qual quantitativo tinha acesso à internet em casa, bem como à dispositivos eletrônicos tais como: *smartphone*, *tablet*, computador, *notebook*, entre outros, que pudessem ser utilizados para acessar os materiais e assistir às aulas *on-line*. Esse processo demorou certo tempo, para que os alunos que não tinham acesso fossem contemplados com *tablets* e *chips* com acesso à internet, a fim de viabilizar a participação deles nas aulas remotas.

Como neste cenário de pandemia todas as atividades da instituição do público-alvo passaram a ocorrer apenas de forma *on-line*, foi necessário adaptar todos os materiais de coleta de dados elaborados para que as aplicações pudessem se adequar à nova realidade. Assim, o questionário foi reestruturado como formulário *on-line* e as entrevistas foram realizadas por meio de vídeo chamadas.

O primeiro semestre letivo de 2020 foi, inicialmente, particionado em quatro fases. Essa decisão foi tomada por conta de algumas disciplinas, como as de estágio, por exemplo, exigirem práticas presenciais. Levando isso em consideração, foi decidido por cada coordenação de curso quais componentes curriculares seriam ofertados e em quais fases isso aconteceria. Dessa forma, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I só foi ofertada na fase 3, que teve início no dia 8 de fevereiro de 2021 e fim no dia 14 de maio de 2021.

Tendo em vista que o segundo objetivo específico desta monografia é apontar alguns dos conteúdos abordados na Educação Básica nos quais os alunos apresentam mais dificuldades, também foram disponibilizadas pela professora as respostas dos alunos às atividades avaliativas da disciplina, para que fosse possível identificar, por meio da metodologia de Análise de Erros, quais processos utilizados por eles os conduziram ao erro nas questões propostas. Os resultados obtidos, bem como as suas devidas análises, estão contidos no próximo capítulo.

5 RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, são apontadas e analisadas as informações obtidas por meio dos instrumentos de coleta de dados. Primeiramente, foram evidenciadas as informações adquiridas no teste exploratório com relação ao questionário elaborado. Em seguida, foram descritos os dados obtidos com: a aplicação do questionário aos alunos do 2.° período; as observações das aulas remotas de Cálculo I e da sala de aula da turma no *Google Classroom*; as análises das atividades avaliativas e exercícios da disciplina de Cálculo I; e, as informações obtidas por meio das entrevistas realizadas com a professora e com o monitor de CDI I.

A participação do público-alvo ocorreu em dois momentos, sendo um deles relacionado às respostas obtidas por meio de um questionário de sondagem e o outro à participação durante as aulas de CDI I ministradas durante o período. Para isso, os alunos que desejassem participar deveriam assinar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), autorizando o uso das informações fornecidas apenas para fins de coleta para o trabalho monográfico. A participação da professora que lecionou a disciplina e do monitor de CDI I, nesta pesquisa, ocorreu por meio das entrevistas realizadas com eles.

É importante destacar que, apesar do TCLE mencionar os testes diagnósticos inicial e final, devido a dificuldade de aplicação e ausência das respostas do público-alvo, não foi possível usar esses instrumentos de coleta de dados. Portanto, além do questionário de sondagem e das entrevistas, as informações aqui analisadas são referentes às atividades avaliativas realizadas durante as aulas de Cálculo.

5.1 Teste exploratório

Levando em consideração o fato das atividades terem que ser aplicadas de forma *on-line*, devido ao cenário de pandemia, o questionário foi reestruturado em formato de formulário elaborado no *Google Forms*. Posteriormente, entre os dias 2 e 7 de fevereiro de 2021, ele foi disponibilizado para análises de seus itens. Fizeram parte do teste exploratório os alunos que estavam matriculados na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 (TCC 2) e a professora que lecionou a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 1 (TCC 1), no semestre de 2019.2, período em que esta pesquisa foi iniciada. A turma era composta por 16 licenciandos, dos quais 11 deram retorno sobre os itens e modificações que poderiam ser realizadas na atividade elaborada.

No que concerne ao TCLE, foi proposto por duas pessoas que fosse retirada a imagem que continha o parágrafo a ser reescrito pelos licenciandos, que tinha a finalidade de consentir a participação e o uso dos dados levantados na pesquisa, com a assinatura deles (Figura 2). Ao invés disso, foi sugerida uma mudança para a questão de múltipla escolha, com as alternativas: "estou de acordo" e "não estou de acordo". A sugestão dada foi baseada na possibilidade da imagem causar confusões quanto ao que deveria ser feito.

Figura 2 – Informações presentes no teste exploratório do TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) licenciando(a): Nós somos Alice e Lethícia, alunas do curso de Licenciatura em Matemática no IFFluminense campus Campos Centro. Estamos realizando uma pesquisa sob orientação do Professor Dr. Tiago Destéffani Admiral, cujo objetivo é analisar a defasagem em alguns tópicos da Matemática Elementar apresentada por alunos que estão matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I). Posteriormente, pretendemos abordar de que forma isso influencia na aprendizagem dos conteúdos específicos de CDI I. Para a referida pesquisa, solicitamos a sua participação. Esta envolverá responder a um questionário e dois testes diagnósticos (um no início da sua participação e outro no encerramento da disciplina). O questionário visa obter informações a respeito do público-alvo. O teste diagnóstico inicial objetiva, por meio de questões, captar os seus conhecimentos a respeito de alguns conceitos elementares da Matemática; e, o teste final tem por função levantar dados sobre o seu desenvolvimento na disciplina de CDI I durante todo o período, fazendo uma correspondência com as respostas obtidas no primeiro teste. Para isso, novas questões serão abordadas. Esclarecemos que sua participação nesse estudo é voluntária, portanto, terá absoluta liberdade de fazê-la ou não. Aos que decidirem participar, pedimos a compreensão e o apoio até o final do trabalho. Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo(a). Você não terá nenhum gasto nem ganho financeiro por participar da pesquisa. Com sua participação, você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico no tema abordado. Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas por nós, por meio dos e-mails: alice.stellet@gmail.com, lethiciacardosof@gmail.com e tdesteffani@gmail.com. Desde já, agradecemos pela sua colaboração na participação desta pesquisa.

Eu, ____,

consinto em participar da pesquisa acima descrita, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura: ____

Campos dos Goytacazes, _____ de ____________________ de 2021.

Sua resposta

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela do formulário.

No que diz respeito ao questionário elaborado para ser respondido pelos alunos, serão descritas abaixo as sugestões feitas pelo público que participou do teste exploratório.

Com relação à pergunta sobre o "sexo", três pessoas sugeriram que fosse acrescentada uma terceira opção, como: "prefiro não dizer" ou "outro", para que, caso algum aluno do público-alvo escolhido não se sentisse confortável para responder ou não se encaixasse nas opções descritas, tivesse a possibilidade de marcar aquela alternativa.

Outra sugestão dada foi a respeito do significado de "Matemática Básica" (Figura 3). Na percepção do licenciando que fez essa sugestão, seria necessário destacar que a palavra "Básica" vem do fato dos conteúdos serem considerados como base para o desenvolvimento do aprendizado dos conceitos vistos na disciplina de CDI I e não por serem considerados "fáceis", como induz a palavra.

Figura 3 – Pergunta sobre dificuldade em Matemática Básica

23. Você sente que possui alguma dificuldade em relação à Matemática Básica? (Compreende-se por Matemática Básica aquela que é ensinada nos Ensinos Fundamentais e no Ensino Médio). *

○ Sim

○ Não

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela do formulário.

Uma licenciada indicou que seria interessante acrescentar a opção "metade em escola particular e metade em escola pública" nas perguntas sobre ter cursado o Ensino Fundamental e o Ensino Médio em escolas da rede privada ou da rede pública (Figura 4).

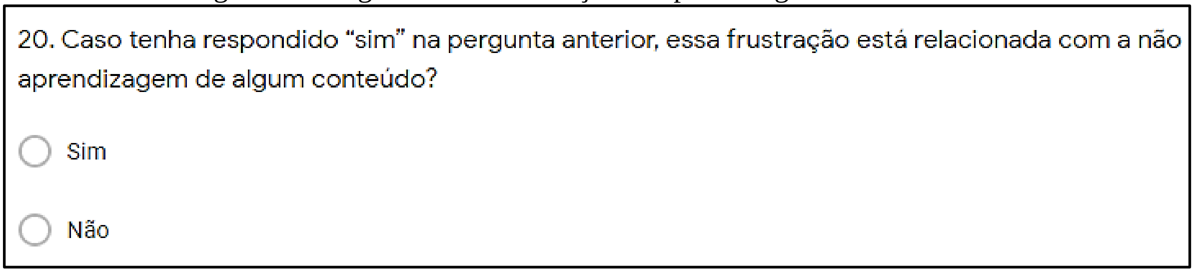
Figura 4 – Pergunta sobre local em que cursou o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

6. Você cursou o Ensino Fundamental...: *	7. Você cursou o Ensino Médio...: *
○ Todo em escola particular	○ Todo em escola particular
○ Todo em escola pública	○ Todo em escola pública
○ A maior parte em escola particular	○ A maior parte em escola particular
○ A maior parte em escola pública	○ A maior parte em escola pública

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela do formulário.

Com relação à pergunta 20 (Figura 5), que faz referência a possíveis frustrações relacionadas à aprendizagem de Matemática, uma licencianda propôs uma modificação com relação à resposta. Inicialmente, havia apenas as opções de "sim" ou "não", e ela sugeriu que fosse modificado para uma resposta aberta, na qual os alunos pudessem comentar os motivos dessa frustração.

Figura 5 – Pergunta sobre frustração na aprendizagem de Matemática


20. Caso tenha respondido "sim" na pergunta anterior, essa frustração está relacionada com a não aprendizagem de algum conteúdo?

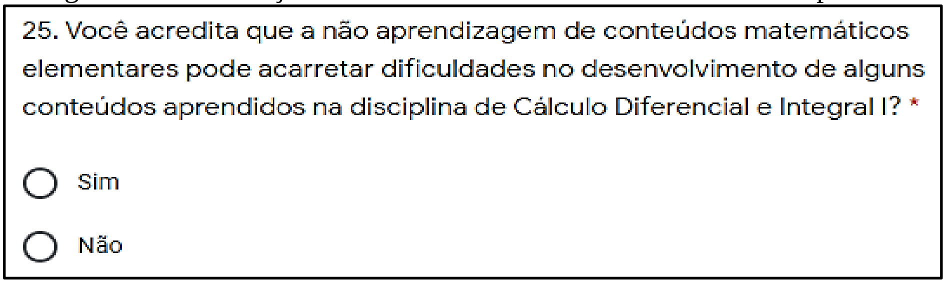
Sim

Não

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela do formulário.

Três sugestões estavam relacionadas à última pergunta do questionário (Figura 6). Uma delas foi com relação à reformulação do que estava sendo pedido, com intuito de tornar a pergunta mais clara. Também foi sugerido que o termo "conteúdos matemáticos elementares" fosse trocado por "conteúdos da Matemática Básica", com base no fato de o segundo termo ter sido usado no decorrer das perguntas do questionário e o primeiro, não. Inicialmente, a pergunta tinha as opções "sim" ou "não" como resposta. Por isso, também foi sugerida uma terceira observação, que estava relacionada ao acréscimo da opção de o aluno explicar, caso respondesse que não, o motivo pelo qual acredita que a defasagem nos conteúdos de Matemática Básica não afeta o aprendizado dos conteúdos de CDI I.

Figura 6 – Pergunta sobre a relação da Matemática Básica com os conteúdos aprendidos em CDI I


25. Você acredita que a não aprendizagem de conteúdos matemáticos elementares pode acarretar dificuldades no desenvolvimento de alguns conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I? *

Sim

Não

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela do formulário.

Tendo em vista as sugestões citadas anteriormente, serão descritas, a seguir, as que foram acatadas pelas autoras desta pesquisa.

Com relação ao TCLE, foi decidido que as opções de "estou de acordo" e "não estou de acordo" seriam acrescentadas. Porém, a imagem que solicitava a assinatura e a escrita do parágrafo não foi retirada como foi sugerido, pois foi entendido que era importante ter o consentimento de cada participante assinado por escrito. Assim, o formulário foi estruturado da seguinte forma: caso o aluno optasse por não participar da pesquisa, ele já seria diretamente direcionado para a última página do questionário, finalizando-o. E, caso optasse por participar, ele daria prosseguimento para a próxima seção e teria que enviar uma foto da sua assinatura para prosseguir.

A sugestão com relação à pergunta sobre o sexo dos participantes também foi acatada. Na resposta, foi acrescentada a opção "prefiro não dizer".

A observação feita sobre acrescentar a opção "metade em escola particular e metade em escola pública" nas perguntas sobre ter cursado o Ensino Fundamental e o Ensino Médio em escolas da rede privada ou da rede pública, também foi considerada, pelas autoras, como relevante. Assim, além das opções de respostas que a pergunta já tinha, essa também foi inserida.

A respeito da sugestão feita para modificação da pergunta com relação às frustrações, foi decidido que a opção de resposta seria modificada para a forma aberta. Assim, os alunos poderiam escrever as causas relacionadas às suas frustrações, como foi sugerido.

E, com relação às três observações feitas sobre a última pergunta do questionário, o termo "conteúdos matemáticos elementares" foi trocado por "conteúdos matemáticos básicos" e, foram retiradas as opções "sim" ou "não" das respostas. Dessa forma, a pergunta tornou-se aberta, a fim de que os alunos comentassem suas opiniões tanto a respeito do sim, quanto a respeito do não.

5.2 Aplicação do questionário

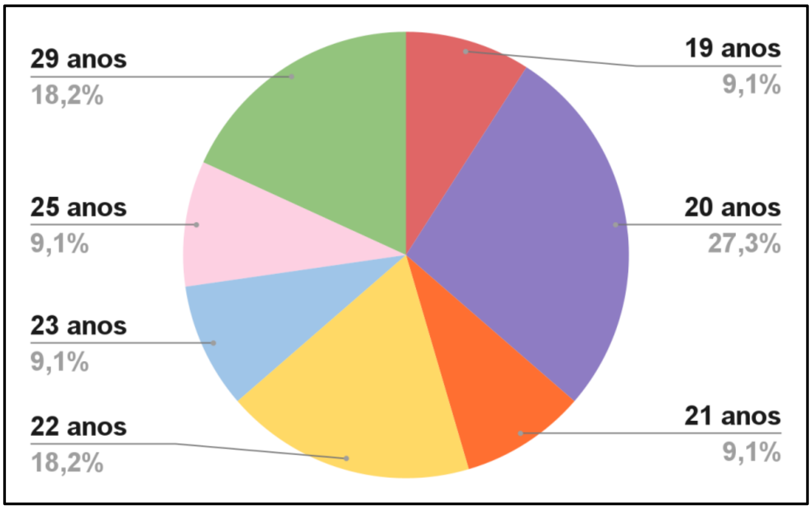
A aplicação do questionário de sondagem ao público-alvo desta pesquisa aconteceu entre os dias 22 de fevereiro e 20 de março de 2021, por meio de um formulário *on-line*[13], elaborado na plataforma *Google Forms*. A turma era composta por quinze alunos e, destes, onze aceitaram participar por meio do preenchimento da autorização de uso de dados no TCLE. Diante disso, os licenciandos participantes estão identificados no texto por L_1, L_2, L_3,

[13] O formulário pode ser acessado em: https://forms.gle/QmMzgc3o1mnL3UAk9.

L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10} e L_{11}. Como já mencionado anteriormente, o questionário possuía trinta e quatro perguntas que estavam divididas em quatro seções.

A primeira seção, intitulada “Identificação”, possuía perguntas mais gerais a respeito dos alunos. Sobre as idades, foi possível destacar que os participantes se enquadravam na faixa etária de 19 a 29 anos, conforme mostra o Gráfico 3 abaixo.

Gráfico 3 – Idades dos licenciandos

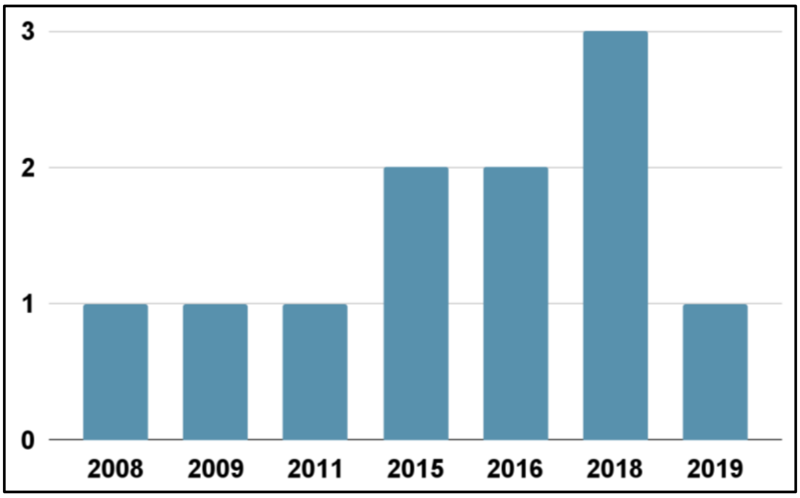


Fonte: Elaboração própria.

O público-alvo foi composto por sete participantes do sexo feminino e quatro do sexo masculino. Além disso, nove deles residem na cidade em que fazem o curso de Licenciatura e outros dois em cidades vizinhas. De todos os alunos, apenas um estava matriculado no 5.º período, enquanto os outros estavam no 2.º período.

A respeito do local em que cursaram o Ensino Fundamental, quatro responderam que foi em uma escola particular e sete em uma escola pública. Já o Ensino Médio foi cursado em escola particular por dois alunos e em escola pública por nove alunos. Quando foi perguntado pelo ano de conclusão do Ensino Médio, foram encontradas as respostas registradas no Gráfico 4 abaixo.

Gráfico 4 – Ano de conclusão do Ensino Médio



Fonte: Elaboração própria.

Quatro dos licenciandos afirmaram possuir emprego, sendo que três trabalham nos turnos manhã e/ou tarde e um à noite.

A segunda seção, intitulada “Vida Acadêmica”, possuía perguntas que estavam relacionadas à atual trajetória na graduação escolhida.

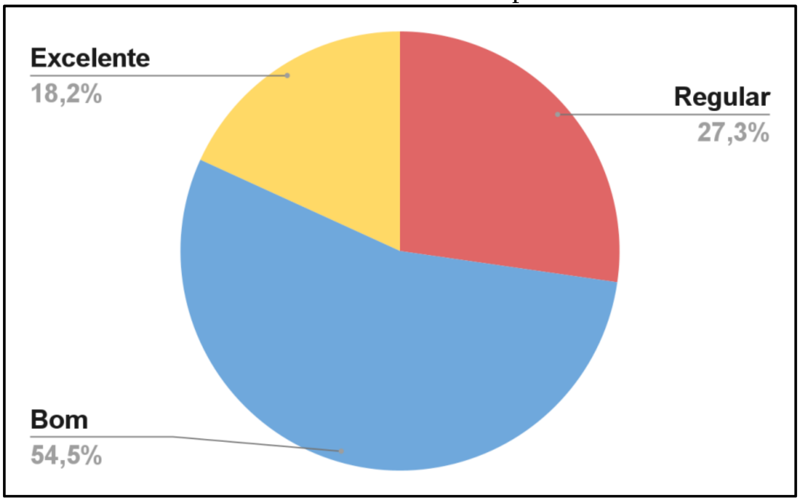
Apenas uma aluna fez curso preparatório antes de ingressar na graduação.

Cinco estudantes já haviam cursado alguma graduação anteriormente: L_4 cursou Bacharel em Administração; L_7 cursou Engenharia de Controle e Automação; L_8 cursou Engenharia de Produção e também já havia iniciado o curso de Matemática em outra instituição no ano de 2019; L_9 cursou 4 períodos de Engenharia de Controle e Automação; e L_{11} iniciou o curso de Licenciatura em Matemática em outra instituição. Não foi possível identificar se L_4, L_7 e L_8 também cursaram apenas alguns períodos ou concluíram as graduações mencionadas.

Todos os respondentes do questionário informaram gostar da graduação que estão cursando. Desses, apenas um afirmou ainda não ter escolhido a profissão que deseja exercer. Os que responderam já terem escolhido, quando foi perguntado se essa decisão tem a ver com o presente curso, apenas uma aluna respondeu que não.

Seis licenciandos afirmaram que já foram reprovados em alguma disciplina do curso. Já quando foi perguntado sobre o rendimento acadêmico na disciplina de FM I, que é requisito para a disciplina de CDI I, foram obtidas as respostas registradas no Gráfico 5 a seguir.

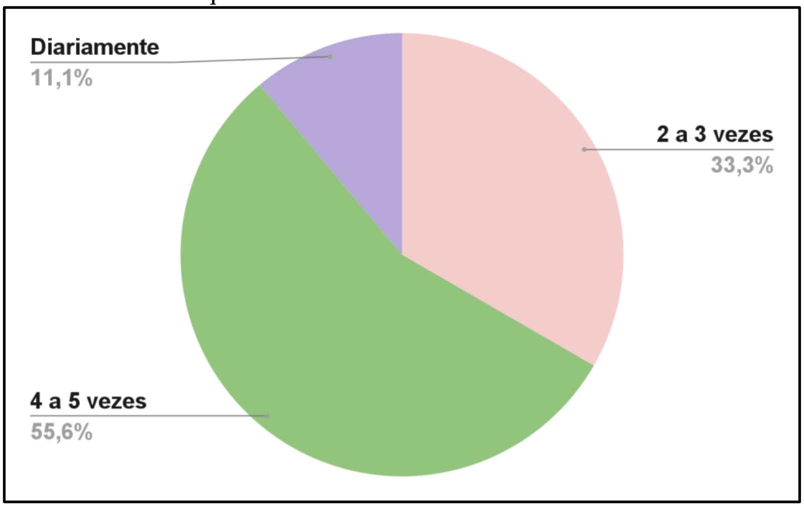
Gráfico 5 – Rendimento na disciplina de FM I



Fonte: Elaboração própria.

Sobre os hábitos de estudos fora do horário de aula, nove licenciandos responderam que possuem. No Gráfico 6, a seguir, é possível verificar as frequências indicadas por eles.

Gráfico 6 – Frequência de hábitos de estudos fora da sala de aula



Fonte: Elaboração própria.

Os licenciandos também foram perguntados a respeito de estratégias utilizadas para os estudos. Dez deles afirmaram possuir e indicaram quais são. As respostas foram registradas no Gráfico 7.

Gráfico 7 – Estratégias de estudos

Fonte: Elaboração própria.

A terceira seção, intitulada “Relação com a Matemática”, possuía perguntas que possibilitassem estabelecer uma relação do licenciando com a disciplina de Matemática.

Todos os participantes disseram que sempre gostaram de Matemática. Além disso, quando foi perguntada a frequência com que as aulas dessa disciplina eram interessantes durante a vida escolar, as respostas obtidas foram: dois indicaram às vezes, dois indicaram muitas vezes e sete indicaram sempre.

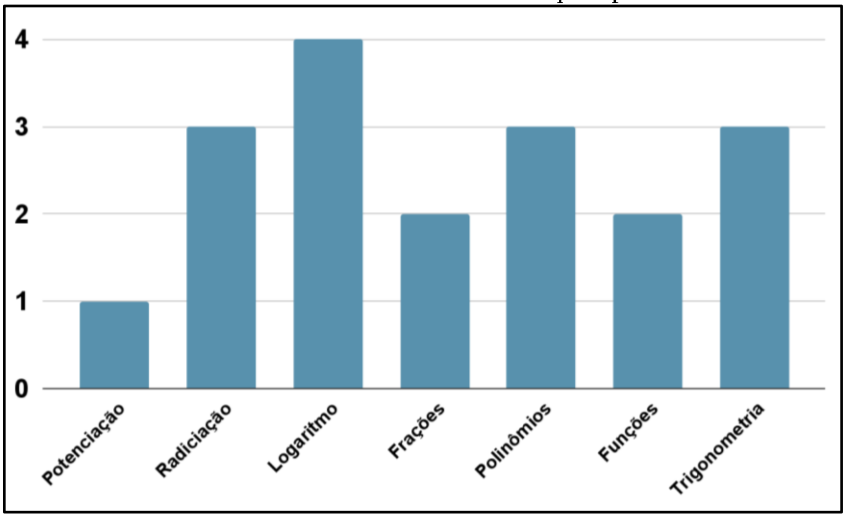
A respeito de possuir alguma frustração devido aos resultados alcançados durante a aprendizagem em Matemática, quatro responderam que tiveram, mas apenas três justificaram suas respostas. L_3 disse que o desapontamento estava relacionado a não aprendizagem de conteúdos durante o Ensino Fundamental. L_9 afirmou que não houve aprofundamento da maioria dos conceitos apresentados no Ensino Médio. Por último, L_8 constatou:

> *Em todo o meu Ensino Fundamental e Médio, nunca tive o hábito de estudar em casa. Eu sempre fui mais de prestar atenção nas aulas. E isso nunca foi o suficiente. Na época, eu não entendia isso. E com a falta dos estudos extras, eu não conseguia ter notas muito boas, mas também nunca fiquei de recuperação.*

Todos os licenciandos disseram que percebem aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento e que também veem relação entre a Matemática que é vista no Ensino Básico e a que é vista no Ensino Superior.

Quando foi perguntado se o participante sente que possui alguma dificuldade em conteúdos da Matemática Básica, seis responderam que sim, como pode ser visto no Gráfico 8.

Gráfico 8 – Conteúdos da Matemática Básica em que apresentam dificuldades



Fonte: Elaboração própria.

A quarta seção, intitulada “Relação com a Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I”, possuía perguntas que possibilitassem estabelecer uma relação do licenciando com a disciplina em questão.

Seis responderam que estavam cursando esse componente curricular pela primeira vez. Os cinco que afirmaram já ter tido contato com a disciplina, foram os mesmos que responderam a respeito de já ter cursado outra graduação anteriormente (L_4, L_7, L_8, L_9 e L_{11}). Ainda sobre essa pergunta, L_{11} afirmou que chegou a cursar Cálculo IV na instituição que estudou anteriormente, e que gosta de ler sobre Análise e Topologia, que são áreas que requerem certa familiaridade com o Cálculo Diferencial e Integral.

A última pergunta do questionário era: “Você acredita que a não aprendizagem de conteúdos matemáticos básicos pode acarretar dificuldades no desenvolvimento de conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I? Comente a sua resposta.”. No Quadro 3, encontram-se as respostas apresentadas.

Quadro 3 – Respostas dos alunos à pergunta sobre a relação entre a Matemática Básica e a disciplina de CDI I

Alunos	Respostas
L_1	"*Sim, estou tendo um pouco de dificuldade por não ter nenhuma base de estudo. Deveria ter uma prévia no ensino fundamental sobre.*"
L_2	"*Sim. Todos os conhecimentos de matemática são acumulativos, é preciso ter domínio sobre todas as matérias possíveis.*"
L_3	"*Com certeza. Pois para que se entenda as explicações dos professores é necessário o mínimo de base matemática, e se ela não existe, não será possível a compreensão devida.*"
L_4	"*Sim, acredito que a não aprendizagem dos conteúdos básicos pode e acarreta dificuldades no desenvolvimento de conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Muitos alunos nunca tiveram contato com o conteúdo base desta disciplina em seu ensino fundamental e médio e quando inseridos no ensino superior, se sentem parcialmente ou totalmente perdidos, dado o fato de que a disciplina é organizada e elaborada partindo do pressuposto que o aluno já conhece o conceito base do conteúdo.*"
L_5	"*Sim, o básico faz parte de todo ensino aprofundado da matemática, sem ele não é possível avançar o aprendizado.*"
L_6	"*Não dominar a base de um conteúdo prejudica bastante o progresso no aprendizado dele.*"
L_7	"*Uma boa base matemática é fundamental para a disciplina de Cálculo. Para o desenrolar desta disciplina, é necessária a aplicação de várias manipulações algébricas que dependem exclusivamente dos conteúdos aprendidos durante o ensino básico.*"
L_8	"*Sim, ter os conhecimentos básicos da matemática bem entendidos fazem toda a diferença.*"
L_9	"*Sim. Com a não aprendizagem de conteúdos básicos, se torna mais difícil realizar conexões cognitivas para aprender e aplicar o cálculo diferencial e integral.*"
L_{10}	"*Sim, pois vejo conteúdos como aritmética, potenciação e radiciação presentes nessa disciplina.*"
L_{11}	"*Sim. Eu acredito que seja difícil visualizar questões relacionadas ao comportamento de determinadas funções.*"

Fonte: Elaboração própria.

Diante das informações obtidas, é possível concluir, de forma geral, que a turma é composta por mulheres e homens entre as idades de 19 e 29 anos. Boa parte do grupo possui hábitos de estudos, reforçando a importância de recorrer a outros materiais, fora do horário de aula, que possam auxiliar no entendimento dos conceitos aprendidos. Sobre a disciplina de FM I, a maioria afirmou ter tido um bom rendimento. A respeito do período em que estavam matriculados quando cursaram CDI I, apenas um estava no 5.° e os demais no 2.° período, no qual a disciplina é ofertada. Com relação à Matemática Básica, todos os conteúdos dispostos foram selecionados em algum momento, sendo “Logaritmo” o de maior incidência, seguido por “Polinômios”, “Radiciação” e “Trigonometria” com a mesma quantidade de seleções. Além disso, alguns dos licenciandos já haviam tido contato com a disciplina de CDI I anteriormente, podendo apresentar ou não certa familiaridade com os conteúdos que são abordados nesse componente curricular. E, por fim, todos reconheceram que ter um bom entendimento dos conteúdos matemáticos elementares é fundamental para o desenvolvimento do aluno em Cálculo I e nos demais componentes curriculares presentes na graduação, corroborando com as ideias apresentadas nesta pesquisa.

5.3 Acompanhamento da turma de CDI I de 2020.1

Como descrito no tópico 4.2, a disciplina de CDI I só foi ofertada na fase 3. As aulas aconteciam todas às quartas-feiras, no turno noturno, das 19 horas e 10 minutos às 20 horas e 50 minutos, como teriam ocorrido caso a disciplina tivesse sido lecionada presencialmente.

Dessa forma, em todas as semanas, as aulas foram acompanhadas juntamente com um diário de campo. Como mencionado no capítulo de Procedimentos Metodológicos, este diário funcionou como um “registro”, a fim de que fossem anotadas todas as interações entre os alunos e a professora, que estivessem relacionadas aos conteúdos de CDI I e a dúvidas de conteúdos da Matemática Básica que eles pudessem manifestar.

A professora da disciplina também realizou o cadastro de aluno das duas autoras deste trabalho, com intuito de viabilizar o acesso à sala de aula do componente curricular na plataforma *Google Classroom.* Assim, foi possível acessar as atividades disponibilizadas por ela, slides, possíveis questionamentos descritos pelos alunos no AVA, entre outros, com a finalidade de levantar os dados necessários para esta pesquisa.

Na primeira semana de aula, a professora da disciplina de CDI I disponibilizou um fórum no AVA intitulado “Vamos nos conhecer”, com o objetivo de gerar interação entre os alunos e ela. Foi sugerido por ela um roteiro de apresentação, no qual os alunos deveriam se apresentar, dizer de que cidade eram, suas preferências com relação ao estudo de Matemática, suas experiências com aulas remotas e suas expectativas com relação ao componente curricular CDI I.

São destacados abaixo alguns dos relatos feitos pelos licenciandos que foram considerados relevantes, tendo em vista o objetivo geral desta pesquisa, e que indicam a necessidade de pesquisas com temas semelhantes ao deste trabalho.

Em sua apresentação, L_2 escreveu:

> [...] *Dentro da matemática gosto de qualquer matéria que me faça fazer conta com um lápis e papel, mas se for pra destacar mais, gosto de funções (fundamentos da matemática), conheci construções geométricas e gostei bastante também.* [...] *Ainda não conheço as matérias a serem estudas em Cálculo, no momento só tivemos uma aula. Pareceu ser uma matéria mais complexa, mas estou aberto a aprender e a aproveitar dessa matéria, e dos ensinamentos que virão através desta.*

Por sua vez, L_9 escreveu:

> *Eu já cursei Cálculo quando fiz Engenharia (fiz até o quarto período), mas confesso que tive muita dificuldade devido a minha defasagem de conteúdos do Ensino Médio, mesmo sendo aprovados nas disciplinas de cálculo sinto que aprendi muito pouco de tudo que foi proposto. Por esse motivo quero repetir todas as disciplinas de cálculo da licenciatura para realmente aprender e também aprender a abordagem para ensinar os temas aprendidos que é o objetivo do curso como um todo.*

L_{11} destacou seu interesse pela disciplina:

> [...] *Eu espero que o curso de Cálculo acentue minha familiaridade com conceitos elementares da análise matemática, no caso o limite, a derivada e a integral, e principalmente, seja útil para que eu possa ampliar minha visão sobre o universo das funções de uma variável real. E, por fim, que eu adquira formação ainda mais sólida com os elementos da matemática explorada no ensino básico.*

A partir das falas de L_9 e L_{11}, é possível perceber a reafirmação da relevância de ter os conteúdos de Matemática Básica bem ancorados, para que sejam utilizados adequadamente na disciplina de Cálculo I. Enquanto, na visão de L_2, apesar de não saber ainda naquele momento o que seria abordado na disciplina, destacou a sua complexidade e importância, por se relacionar posteriormente com outros conteúdos.

A observação da turma ocorreu durante toda a fase 3, do dia 10 de fevereiro ao dia 29 de abril de 2021. Foi possível notar que a turma era bem quieta, pois poucos alunos interagiam com a professora durante as aulas, e esses poucos eram geralmente os mesmos licenciandos: L_7, L_8, L_{10} e L_{11}.

Na primeira aula observada, a professora citou que o erro é, também, uma oportunidade de aprendizado, o que condiz com a teoria que embasa a metodologia desta pesquisa.

No segundo encontro, a professora estava explicando o $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ e L_{10} afirmou que o limite não foi "alcançado". Aparentemente, ele pensou que o valor do limite seria dado pelas imagens dos valores de x que se aproximavam de 1. Parece que ele não conseguiu compreender que dá para conseguir uma aproximação melhor para o limite à medida que valores cada vez mais próximos do 1 fossem selecionados, ou seja, o valor do limite dependia diretamente do intervalo utilizado para x.

Em outro encontro, a professora questionou aos alunos o que havia de incoerente na simplificação da Equação 1:

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = x + 3 \qquad (1)$$

L_8 respondeu que não seria possível fatorar o numerador e simplificar com o denominador devido à ausência da palavra "limite". Mas, na realidade, a simplificação não poderia ser feita sem antes garantir que o binômio $(x-2)$ fosse diferente de zero. Pela fala da licencianda, é possível notar a ausência de conhecimento com relação à restrição imposta pelo denominador da fração.

Nessa mesma aula, L_{10} relatou para a professora que ele não havia conseguido calcular o limite apresentado na Expressão I:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} \qquad (I)$$

Ele disse:

> *Professora, tentei resolver usando soma e produto e não consegui*.

Vale ressaltar que a determinação de raízes de equações polinomiais do segundo grau por soma e produto é um conteúdo previsto para o Ensino Básico e é visto na disciplina de FM I, que é requisito para a de CDI I. Contudo, L_{10} não sabia ou não se recordou que, para determinar as raízes por soma e produto, é necessário que o coeficiente do termo x^2 seja igual a um, seguindo a equação do tipo: $x^2 - Sx + P = 0$, em que S é a soma e P é o produto das raízes. E, além disso, esse método não é o mais apropriado para ser utilizado quando as funções possuem raízes fracionárias, irracionais ou que nem possuem raízes reais (SILVA, 2016). De fato, imaginar dois números que somados ou multiplicados resultam em uma fração, por exemplo, não é uma tarefa muito fácil de fazer, caso haja dificuldades com relação às operações de soma e multiplicação entre frações.

Na quarta aula observada, foi possível notar que os alunos estavam com dificuldades em calcular limites que envolviam divisão de polinômios e a manipulação de raízes quadradas. Algumas dessas dúvidas serão evidenciadas no tópico 5.4, por meio das respostas das atividades analisadas.

Na aula seguinte, L_{10} expôs que também estava com dificuldades em resolver limites semelhantes ao $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x-4}{(x-2)^2}$. Esse tipo de limite pode ser resolvido por meio da análise dos limites laterais da Equação 2, quando *x* se aproxima de 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-4}{(x-2)^2} \tag{2}$$

Nessa situação, também é importante destacar que os estudos de sinais de funções polinomiais do primeiro e do segundo graus estão previstos para o Ensino Médio, e fazem parte da ementa da disciplina de Fundamentos I.

Tanto o assunto de Polinômios quanto as propriedades de Radicais, que puderam ser destacados por meio das observações das dúvidas apresentadas pelos alunos durante as aulas, estão previstos para o currículo do Ensino Básico (BRASIL, 2018). Já no curso de Licenciatura em Matemática em questão, os alunos têm contato com o estudo de Polinômios e seus conceitos somente no 4.° período, na disciplina de Fundamentos da Matemática IV. É interessante reforçar que, de fato, alguns dos licenciandos informaram, por meio do questionário aplicado para eles, que dos conteúdos de Matemática Básica descritos, esses dois são alguns dos que possuem realmente mais dificuldades.

Na sétima aula observada, a professora de CDI I comentou que alguns alunos haviam escrito: “$cos(x) \cdot cos(x) = cos(x^2)$” em uma das atividades avaliativas da disciplina. Ela salientou que a expressão escrita estava errada e que o correto seria escrever $cos(x) \cdot cos(x) = cos^2(x)$ ou $cos(x) \cdot cos(x) = (cos(x))^2$, pois o termo todo deveria ser elevado ao quadrado, e não apenas o argumento da função.

O erro cometido revela a dificuldade que os alunos têm de fazer manipulações algébricas com identidades trigonométricas, que inclusive foi o tema mais votado pelos professores no questionário de sondagem aplicado e descrito no tópico 3.3 deste trabalho. Além disso, foi também um dos temas mais votados pelos licenciandos com relação ao nível de dificuldade em tópicos da Matemática Básica, no questionário aplicado para eles. Ademais, se o aluno não consegue distinguir bem a diferença entre $cos^2(x)$e $cos(x^2)$, é bem provável que ele também apresente dificuldades para expressar uma função composta $f(g(x))$, nos casos em que $f(x)$ é uma função trigonométrica, pois o erro na escrita pode indicar que ele não compreende bem o que é o argumento da função. É válido ressaltar que na Licenciatura analisada, os conceitos de Trigonometria só são vistos no 3.° período, na disciplina de Fundamentos da Matemática III.

Na nona aula observada, a professora salientou que muitos alunos esqueciam-se de utilizar parênteses para separar os termos negativos, o que os fazia errar sinal e, consequentemente, o valor final das questões propostas. Depois disso, os licenciandos manifestaram mais dúvidas a respeito de conteúdos de CDI I. Em um dos exemplos apresentados durante a aula pela professora, foi pedida a derivada da função $j(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$. L_8 disse que a derivada de $e^{2,4}$ não seria zero. Ela não percebeu que e é uma constante, pois é um número e não uma variável e, consequentemente, se esqueceu de que a derivada de uma função constante é igual à zero. Há também a possibilidade de que se a função tivesse outro valor no lugar de $e^{2,4}$, como 2^2 ou algo semelhante, L_8 possivelmente reconheceria que a derivada é zero, por identificar esse valor como constante.

Nessa mesma aula, a professora da disciplina apresentou o gráfico das funções $sen(x)$, $sen(x^2)$ e $sen^2(x)$, para que ficasse ainda mais evidente que essas funções não são iguais e que elas se comportam, geometricamente, de formas diferentes, se referindo ao erro cometido pelos alunos com relação ao valor de $cos(x) \cdot cos(x)$. Ter retomado o erro cometido, mesmo que a partir de um exemplo semelhante, foi extremante importante, pois, na percepção de Ramos (2015),

> [...] o erro pode indicar tanto para o aluno quanto para o professor que existem falhas em algo que foi ensinado. Se o erro for visto por ambos de forma positiva, o relacionamento entre eles proporcionará diálogo e interação, sendo possível estabelecer uma comunicação por meio da qual o professor orientará e guiará a aprendizagem do aluno de acordo com o desejado. (RAMOS, 2015, p. 137).

Nesse sentido, é muito importante que o professor retome os equívocos cometidos por seus alunos, a fim de proporcionar interação e guiar suas aprendizagens da melhor forma possível, resgatando as falhas que eles demonstram ter.

Percebe-se que muitas das dúvidas apresentadas pelos licenciandos com relação à Matemática Básica, durante as aulas observadas, já havia sido pontuadas anteriormente: ou por eles mesmos, por meio das respostas do questionário aplicado na turma, ou pelos professores que responderam ao questionário de sondagem, que propiciou a delimitação do tema desta pesquisa. Outro fator importante a ser destacado é que a maioria das dificuldades apresentadas está relacionada a conteúdos previstos para o Ensino Básico. Além disso, alguns desses conceitos são vistos também em FM I, que é requisito para CDI I.

Pelas observações das aulas, foi possível identificar a presença de dificuldades por parte dos alunos com relação aos seguintes tópicos da Matemática Elementar: simplificação e divisão de polinômios; soma e produto das raízes de uma função polinomial do segundo grau; manipulações algébricas com raízes quadradas e com funções trigonométricas; argumento de uma função trigonométrica; "regra de sinais"; e confusão entre constante e variável.

É válido ressaltar que há a possibilidade de alguns dos licenciados não terem tido contato com alguns desses temas durante os Ensinos Fundamental II e Médio, devido à heterogeneidade das turmas de nível Básico do Brasil com relação ao ensino de Matemática. Pelo questionário aplicado ao público-alvo, descrito no tópico 5.2, foi possível constatar que dos 11 alunos respondentes, 4 cursaram o Ensino Fundamental em escola particular e 7 em escola pública. Com relação ao Ensino Médio, 9 cursaram em escola pública e 2 em escola particular. Ou seja, não é possível traçar um panorama a respeito dos conteúdos vistos e estudados no Ensino Básico por cada um deles. Por esse motivo, pode-se considerar a fala de Vieira e Zaidan (2016), ao destacarem que turmas heterogêneas são constituídas por alunos que possuem conhecimentos desiguais, na qual estejam estudantes: que apresentam grandes dificuldades de aprendizagens e que apresentam aprendizagem satisfatória com relação a conceitos matemáticos previstos para a fase em que estão.

Já com relação aos conteúdos vistos durante o curso de Licenciatura de Matemática da instituição em questão, considerando que os licenciandos podem ter tido contato ou não com esses conceitos anteriormente, é importante salientar o fato de que muitos deles, que são necessários para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo, só são vistos e estudados com mais profundidade em períodos posteriores, como é o caso do estudo de Trigonometria, que ocorre no 3.° período, e de Polinômios, que só acontece no 4.° período.

Autores como Dionizio e Brandt (2011) apontam que, frequentemente, as dificuldades que os alunos apresentam em Trigonometria, estão associadas aos conceitos trigonométricos básicos. Ou seja, estão relacionadas à base que eles deveriam ter adquirido durante o Ensino

Básico e que, por vários fatores, não adquiriram. Com relação ao estudo de Polinômios, Portes e Alves (2014) evidenciam que desde o 8.° ano do Ensino Fundamental II, é notória a dificuldade apresentada pelos alunos com esse conceito e com operações que o envolve.

Dessa forma, em alguns casos, ou os alunos nunca tiveram contato com os *subsunçores* (conteúdos básicos da Matemática) antes de cursarem Cálculo I ou o contato que tiveram foi bem superficial, não sendo suficiente para que houvesse a ancoragem desses assuntos que propiciam a Aprendizagem Significativa dos conceitos de CDI I. Além disso, as dúvidas apontadas se direcionam também para as concepções de David Tall, evidenciadas no subtópico 2.2.4, sobre as *imagens* e *definições de conceitos*, que são totalmente individuais e adquiridas de acordo com as experiências vivenciadas por cada aluno, na concepção de Tall chamadas de "já-encontrados". Essas vivências classificam a transição de cada um deles entre os Três Mundos da Matemática e, consequentemente, a passagem do Pensamento Matemático Elementar do nível Básico para o Avançado, do nível Superior.

Levando isso em consideração, são destacadas no tópico abaixo respostas dos licenciandos que aceitaram participar da pesquisa às atividades da disciplina do componente curricular analisado e observado. Elas também evidenciam suas dificuldades nos conteúdos da Matemática Elementar e apontam a necessidade de uma reavaliação da base que os alunos têm trazido em Matemática, a fim de viabilizar a redução de suas defasagens e uma melhor compreensão dos conceitos e propriedades de limite e derivada, que são apresentados na disciplina de CDI I do curso de Licenciatura em questão.

5.4 Análises das atividades avaliativas da disciplina de CDI I

Neste tópico, são apresentadas e analisadas, à luz da metodologia de Análise de Erros ou Produções Escritas, algumas respostas dos licenciandos às atividades avaliativas de CDI I, que corroboram com as observações feitas pelas autoras desta pesquisa até então.

Na turma observada, foram disponibilizadas, ao todo, onze tarefas, das quais: oito foram divididas entre atividades avaliativas, trabalhos e listas; uma foi prova de segunda chamada; uma foi prova de recuperação; e uma foi fórum de apresentação. Entre as descritas, nove compuseram a nota do componente curricular CDI I.

Como o objetivo desta pesquisa não é apontar o rendimento dos alunos com relação às notas finais, mas sim as influências causadas pela defasagem em alguns conteúdos básicos da Matemática no desenvolvimento dos conceitos de Cálculo I, e diante da grande quantidade de questões disponíveis, apenas alguns exercícios foram selecionados para a análise de erros.

Das onze tarefas à disposição, quatro foram escolhidas e denominadas, neste texto, como: Atividade 1, Atividade 2, Atividade 3 e Atividade 4.

A Atividade 1 foi disponibilizada no AVA no dia 18 de março de 2021 e possuía dez questões, sendo algumas de múltipla escolha e outras discursivas. Dela, foram selecionadas cinco que obtiveram respostas consideradas interessantes, tendo em vista a questão de pesquisa desta monografia. Tais questões são analisadas a seguir.

A primeira questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 7):

Figura 7 – Enunciado da primeira questão da Atividade 1

1. (Efomm 2019) Determine o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right).$$

a) 1.
b) $+\infty$.
c) $-\infty$.
d) 0,5.
e) zero.

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Nesta questão, ao fazer a substituição direta, percebe-se que o limite resulta em uma indeterminação. Portanto, era esperado que o aluno demonstrasse conhecimento sobre fatoração de polinômios para resolver o problema proposto e encontrar a resposta correta, que é a letra (d).

Ao analisar as respostas de todos os alunos que aceitaram participar desta pesquisa, a respeito dessa questão, o que chamou a atenção foi o fato de L_3 ter indicado essa indeterminação, simplesmente, como igual a 0, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 – Resposta de L_3 obtida na primeira questão da Atividade 1

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right) \Rightarrow \left(\frac{(1)-1}{(1)^2-1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}.(x+1)} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)}$$

$$\frac{1}{(1)+1} = \frac{1}{2} \,//$$ (letra d)

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Como foi descrito no tópico 3.2, na Análise de Produções Escritas, o objetivo não é verificar se a resposta está certa ou errada, mas perceber como o aluno demonstra ter entendido determinado conceito. Isso fica mais evidente nos registros escritos e pode destacar alguma dificuldade presente no processo de aprendizagem (CURY, 2019).

Nesse caso, especificamente, o resultado final não está errado, mas o fato de ter sido escrito que $\frac{0}{0} = 0$ pode indicar uma compreensão equivocada, por parte de L_3, a respeito da divisão de 0 por 0. E, mesmo que isso tenha acontecido por falta de atenção ou pelo fato da aluna acreditar que "não era um detalhe importante", caso não seja corrigido e mostrado o porquê disso ser um problema, é possível que haja uma reprodução errada do conceito futuramente, seja em outras disciplinas da graduação ou, até mesmo, no exercício da docência.

Sobre isso, Lima (1991) diz que, pela definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ quer dizer que $a = b \cdot c$. Nesse sentido, suponha que um número qualquer x é igual a $\frac{0}{0}$. Isso significaria que $0 = x \cdot 0$, o que é válido para qualquer valor de x. É por esse motivo que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada (LIMA, 1991).

Bortoli (2011) afirma que os professores de Matemática precisam dominar os conceitos para que não os ensinem incorretamente aos seus alunos. Caso contrário, podem acabar gerando um obstáculo no processo de ensino e aprendizagem. "Se professores de Matemática demonstram ter dificuldades com conteúdos específicos, é, por um lado, compreensível que seus alunos cometam erros em suas resoluções." (BORTOLI, 2011, p. 18).

A segunda questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 9):

Figura 9 – Enunciado da quarta questão da Atividade 1

4. (Efomm 2016) O valor de $\lim_{t \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$ é:

a) 1
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 2

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

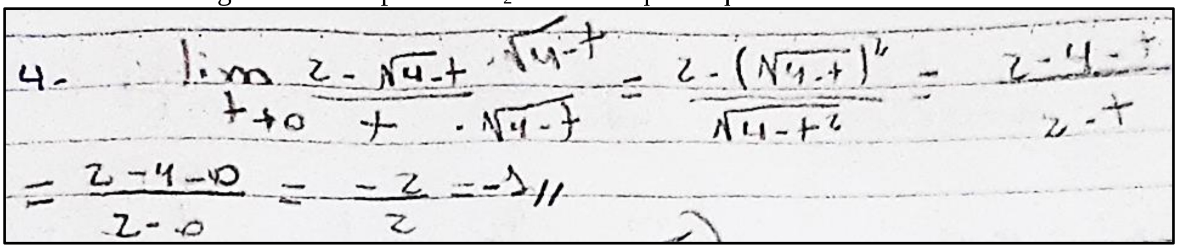
Nessa questão, a substituição direta gera uma indeterminação. Com isso, era esperado que o aluno fizesse a multiplicação, tanto do numerador quanto do denominador, por $2+\sqrt{4-t}$, que é o número "conjugado"[14] de $2-\sqrt{4+t}$, como feito na Expressão II:

$$\frac{2-\sqrt{4-t}}{t}\cdot\frac{2+\sqrt{4-t}}{2+\sqrt{4-t}} \tag{II}$$

Isso é possível, pois, se o numerador e o denominador dessa fração a ser multiplicada são iguais, a fração é igual a 1, e isso não altera a fração inicial, apenas gera outra que seja equivalente. Dessa forma, seria gerado um produto da soma pela diferença entre dois números no numerador, enquanto no denominador haveria a multiplicação entre t e $2+\sqrt{4-t}$. Após algumas operações e simplificações, restaria, ao final, a fração $\frac{1}{2+\sqrt{4-t}}$, que não possui restrições com relação a t tendendo a 0, podendo haver, novamente, a substituição direta. Por fim, encontraria a letra (b) como resposta correta.

Dos 11 alunos participantes da pesquisa, 9 mostraram raciocínio lógico-matemático correto. São apresentadas e analisadas, a seguir, as respostas de L_2 (Figura 10) e L_6 (Figura 11), que apresentaram equívocos em seus processos de resoluções.

Figura 10 – Resposta de L_2 obtida na quarta questão da Atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Pode-se perceber que, ao tentar resolver o problema da indeterminação matemática, L_2 multiplicou tanto o numerador quanto o denominador da fração por $\sqrt{4-t}$. Com relação à multiplicação, o licenciando estava parcialmente correto. Contudo, ele não escolheu um número que pudesse auxiliar na solução da questão, visto que, ao final, ainda haveria um impedimento para realização do cálculo do limite. Esse foi o primeiro equívoco identificado. Além disso, ele não fez a multiplicação da raiz pelos dois termos que compunham o numerador, apenas pelo termo semelhante, que também era $\sqrt{4-t}$, o que justifica ter

[14] Termo utilizado por Iezzi, Murakami e Machado (2013) no contexto do Cálculo. É válido destacar que esse termo é usado no campo dos números complexos e é definido como: chama-se conjugado do complexo z=x+yi o complexo z=x-yi (IEZZI, 2013, p. 12).

encontrado apenas $2 - (\sqrt{4-t})^2$. Já no denominador, ocorreu uma multiplicação do *t* que estava no denominador pelo *t* que se encontrava dentro da raiz, como se, nesse caso, mais uma vez, a multiplicação só fosse possível de acontecer entre termos que se assemelham. Por fim, o aluno fez a substituição direta e encontrou como resposta o valor -1, que nem está em uma das alternativas disponíveis na questão.

É válido destacar que, mesmo que ele fizesse as multiplicações de forma correta, encontraria uma impossibilidade no final devido ao termo que escolheu para multiplicar o numerador e o denominador.

Os equívocos cometidos por L_2 mostram que ele tem dificuldades de manipular algebricamente expressões que envolvem radicais. Nesse caso, pela Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, o licenciando provavelmente não tem ancorado em sua estrutura cognitiva os conceitos e as propriedades que auxiliam no desenvolvimento de: produtos entre radicais, entre radicais e números reais e, até mesmo, o cálculo de produtos notáveis, destacando aqui, o produto da soma pela diferença. Pela falta de ancoragem desses conteúdos, que podem ser considerados como *subsunçores* para os conceitos estudados em CDI I, o aluno apresentou dificuldades no desenvolvimento do cálculo desse tipo de limite, pois não teve a percepção necessária do que seria fundamental para "eliminar" a indeterminação que impedia a resolução da questão proposta.

Como existem muitas semelhanças entre as teorias de Ausubel e de Tall, que já foram apresentadas nesta monografia, pode-se, também, associar os erros cometidos por L_2 ao fato das *imagens* e *definições de conceitos* serem constituídas individualmente, por meio das experiências vivenciadas por cada um. Desse modo, se L_2 não teve um contato satisfatório com os conceitos citados anteriormente, a fim de que fosse possível dar-lhes significação, então ele não pôde construir *imagens de conceito* ricas, afetando diretamente a formalização da sua *definição de conceito*. Consequentemente, isso torna a memorização do processo muito mais fácil para ele, o que pode ter gerado mecanização dos métodos de resolução, sem que houvesse significação desses conteúdos que permitiriam a conexão com os cálculos de limites apresentados na disciplina de CDI I. Isto é, sem que houvesse a *raiz cognitiva* na percepção de David Tall e a Aprendizagem Significativa na concepção de David Ausubel.

Além disso, nesse mesmo ponto de vista, o equívoco de L_2 pode ser relacionado ao termo "já-encontrado" definido por Tall, que se refere às experiências anteriores de cada indivíduo, sendo elas escolares ou não. Nesse caso, mesmo o conteúdo de radicais sendo considerado como um “já-encontrado positivo” para a disciplina de CDI I, pois é necessário para o desenvolvimento de alguns tipos de limites, para L_2, ele é um “já-encontrado negativo”, pelo fato ter gerado confusão e impossibilitado o processo correto de resolução da questão.

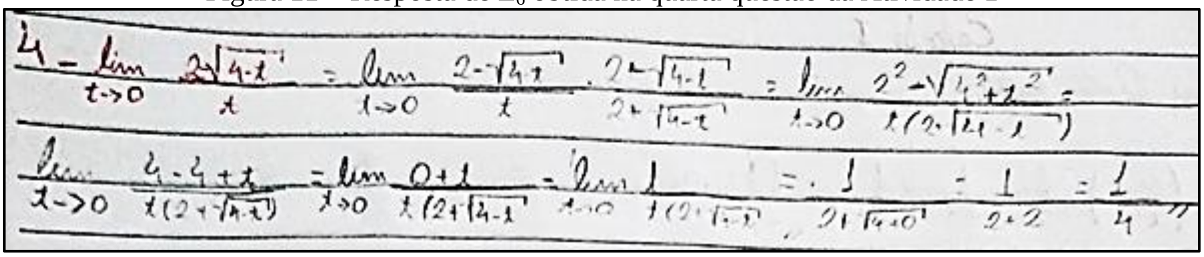
Tendo em vista a produção escrita de L_2, pode-se retomar o que Cury (2006) afirma quando um aluno comete um erro. Na percepção da autora, ao cometer um equívoco, o aluno demonstra que seu conhecimento está incompleto. Segundo Pinto (2000), é nesse momento que o professor tem a oportunidade de retomar o erro cometido a fim de auxiliar seu aluno a identificar o que está em “falta” ou descobrir os motivos que o levaram ao equívoco cometido. Sendo assim, é de essencial importância que o docente resgate as produções realizadas pelos seus alunos, com a finalidade de pontuar detalhes que, na maioria das vezes, são deixados de lado. Para Ramos (2015),

> Deve-se compreender que o erro não é uma meta a ser perseguida, mas também não é um resultado que deve ser ignorado, sem antes analisar o processo utilizado na resolução da questão, pois após a constatação do erro, devemos buscar a eliminação de sua reincidência. (RAMOS, 2015, p. 136).

No caso de L_2, caso ele não tenha oportunidade de rever e analisar os motivos que o conduziram aos erros cometidos, certamente, ele continuará com lacunas nesse conteúdo, podendo afetar seu aprendizado em outros conteúdos ou, até mesmo, causar dificuldades para lecioná-lo, quando for o caso.

Na Figura 11 exibida abaixo, está disposta a solução de L_6 para a mesma questão.

Figura 11 – Resposta de L_6 obtida na quarta questão da Atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Nessa resposta, apesar do resultado final estar correto, há um erro presente no processo da resolução que foi analisado a seguir.

Primeiramente, L_6 multiplicou tanto o numerador quanto o denominador da fração por $2 + \sqrt{4 - t}$. Na igualdade seguinte, pelo produto da soma pela diferença entre dois números, foi escrito o primeiro termo elevado ao quadrado e, ao invés de fazer o mesmo para o segundo termo, L_6 elevou ao quadrado os termos internos à raiz, ficando $2^2 + \sqrt{4^2 + t^2}$. Aparentemente, ela pensou que o fato do expoente dos termos ser igual ao índice da raiz é motivo suficiente para dizer que o resultado de $\sqrt{4^2 + t^2}$ é igual à soma de dentro da raiz, mas sem os termos elevados ao quadrado, visto que, logo em seguida, esses termos foram "retirados de dentro da raiz". Entretanto, isso não é verdade.

Existem três propriedades que envolvem potenciação e radiciação (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013) que são muito válidas para a análise desse erro:

I) Se $a \in R, b \in R$ e $n \in N$, então: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$.

II) Se $a \in R_+$ e $n \in N^*$, então: $\sqrt[n]{a^n} = a$.

III) Se $a \in R_+, b \in R_+$ e $n \in N^*$, então: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Diante disso, é possível afirmar que para $a \in R_+, b \in R_+$ e $n \in N^*$, existe a Equação 3:

$$\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^n} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^n} = a \cdot b \tag{3}$$

Contudo, o mesmo não pode ser alegado quando a raiz tem a base do radicando sendo soma, como $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, já que $a^n + b^n$ não pode ser escrito como $(a + b)^n$. Consequentemente, também não é válido que $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ é igual a $\sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n}$ ou igual a $a + b$. Logo, faz-se necessário efetuar a adição para depois calcular a raiz do valor obtido. Exemplos numéricos podem e devem ser apresentados, para que fique claro quando essas particularidades são válidas ou não.

Dependendo da forma que propriedades como essas são apresentadas para os alunos, se eles não construírem um conhecimento efetivo a respeito delas, é possível que falsas generalizações surjam. E, de fato, a igualdade $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ é encontrada com certa frequência nos registros dos alunos (CURY, 2004).

Assude (1992) diz que a raiz quadrada é um dos primeiros conceitos matemáticos que apresenta mais complexidade em seu desenvolvimento durante a formação matemática. Isso pode acontecer pelas próprias dificuldades encontradas durante o seu processo histórico ou pelas manipulações complicadas, com expressões que nem sempre são claras. Além disso, sobre essa raiz, a autora também afirma que ela possui propriedades não tão comuns quanto às outras presentes na Aritmética. Por exemplo, sabe-se que $a(b + c) = ab + ac$ e $a^{b+c} = a^b \cdot$

a^c, mas não existe uma fórmula simples como essas que permita desenvolver $\sqrt{a+b}$ (ASSUDE, 1992).

Cury (2019) afirma que esses erros acontecem devido a algum conhecimento prévio que foi generalizado de forma inadequada ou não aplicado em uma nova situação. Se ao resolver algumas questões, o aluno acertava a raiz quadrada de um produto, é como se ele não conseguisse se desprender daquela estrutura para outra que, talvez, não sinta tanta segurança, como a raiz quadrada da soma. A autora conclui que:

> [...] Podemos supor que o aluno não tenha desenvolvido suficientemente as habilidades que lhe permitiriam transformar a raiz quadrada em uma potência de expoente $^1/_2$ e então, talvez, lembrar as propriedades válidas e as que não podem ser generalizadas. (CURY, 2019, p. 35).

Apesar do erro cometido logo no início da resolução, coincidentemente, a resposta encontrada por L_6 foi a correta.

O equívoco cometido por ela evidencia as dificuldades que possui com relação às operações feitas com raízes quadradas. Como citado anteriormente, aparentemente, L_6 considerou a existência de uma generalização que, na verdade, não existe. Sendo assim, pela teoria de Ausubel, não é possível que ocorra a *reconciliação integrativa*, que indica o acréscimo de novas informações à estrutura cognitiva dos indivíduos a partir das anteriores. São justamente essas informações que possibilitam a reorganização mental de conceitos já existentes, dando a eles novos significados. No caso de L_6, mesmo tendo acertado a questão, a ausência de domínio que ela apresentou para efetuar operações com radicais, pode gerar dificuldades na compreensão do cálculo de limites desse tipo, impedindo que ocorra uma nova significação do conceito já visto, do ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral.

O processo efetuado por ela também reflete certas dificuldades que podem atrapalhar a transição entre os Três Mundos da Matemática definidos por David Tall, especificamente, do Operacional Simbólico para o Formal Axiomático. É no primeiro que ocorrem as generalizações matemáticas que poderão ser modificadas por novos conceitos vistos posteriormente. Logo, se houve falha na construção do conceito anterior, L_6 poderá ter dificuldades na construção formal do cálculo de limites que dependem dele. Assim, possivelmente a formalização, que é dada pelo mundo Formal Axiomático, não será plenamente desenvolvida por ela.

Os equívocos de L_2 e L_6 indicam certa falta de base trazida do Ensino Básico com relação ao conceito de radicais, o que, consequentemente, ocasionou os erros no processo de resolução da questão proposta.

A terceira questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 12):

Figura 12 – Enunciado da quinta questão da Atividade 1

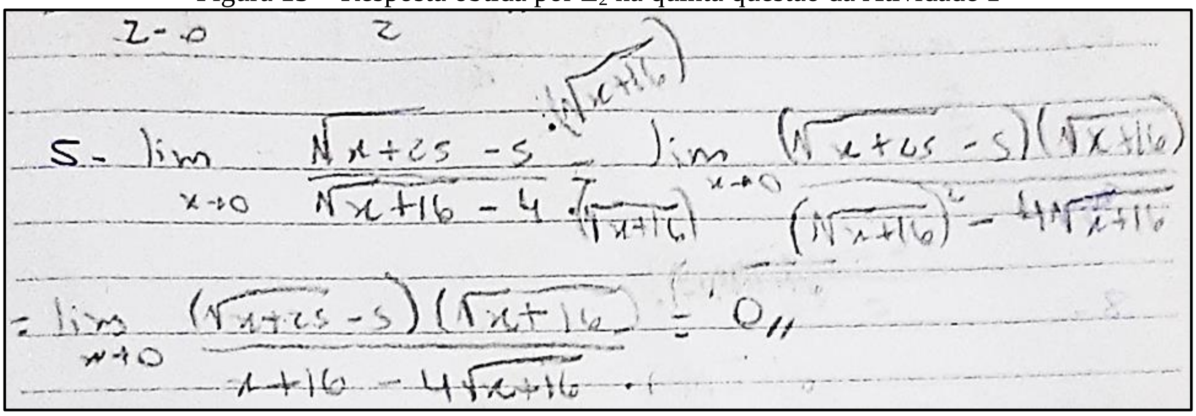
5. (Uespi) Qual o valor do limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{\sqrt{x+16}-4}$?

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Ao realizar a substituição direta, é possível perceber que o resultado gera uma indeterminação. Desse modo, era esperado que o aluno fizesse a multiplicação, tanto do numerador quanto do denominador, por $\sqrt{x+25}+5$ e por $\sqrt{x+16}+4$, que são os números "conjugados" de $\sqrt{x+25}-5$ e de $\sqrt{x+16}-4$, respectivamente. Consequentemente, seriam gerados produtos da soma pela diferença entre dois números, tanto no numerador quanto no denominador. Após algumas simplificações, restaria, ao final, a fração $\frac{\sqrt{x+16}+4}{\sqrt{x+25}+5}$, que não possui restrições quanto a $x \to 0$. Novamente, com a substituição direta, a fração $\frac{4}{5}$ seria encontrada como solução.

De todas as respostas obtidas, foi analisada, a seguir, a solução de L_2 (Figura 13), por ter sido considerada relevante, tendo em vista o objetivo desta pesquisa.

Figura 13 – Resposta obtida por L_2 na quinta questão da Atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Com o intuito de resolver o problema da indeterminação, L_2 multiplicou o numerador e o denominador da fração por $\sqrt{x+16}$, mas essa escolha acabou não alterando o resultado final. É possível perceber que, na penúltima igualdade, a fração presente é a Expressão III:

$$\frac{(\sqrt{x+25}-5)(\sqrt{x+16})}{x+16-4\sqrt{x+16}} \qquad \text{(III)}$$

Ao fazer a substituição direta do x por 0, a fração que resulta continua sendo $\frac{0}{0}$, apesar de L_2 ter sinalizado apenas como 0.

Assim como na quarta questão da Atividade 1 analisada anteriormente, a escolha feita por L_2 de multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número não foi incorreta. Entretanto, o que atrapalhou a sua resolução foi a escolha do termo a ser multiplicado. Ainda que ele tenha feito as multiplicações de forma correta, ao final, continuou apresentando uma indeterminação, não conseguindo solucionar o problema proposto.

Nesse caso, o equívoco cometido pelo licenciando não está associado a um ou mais erros de cálculos matemáticos feitos por ele, mas sim à ausência da percepção do que seria necessário a ser feito a fim de eliminar a indeterminação inicial, o que o impediu que ele alcançasse a resposta correta da questão. Essa falta de percepção pode ser associada a compreensões que muitas vezes só são adquiridas no Ensino Superior, nesse caso, por meio do Pensamento Avançado, como definido por David Tall e citado no subtópico 2.2.4 desta monografia.

Segundo Flores (2018), o contato dos alunos com a abstração e dedução de padrões só ocorre no nível Superior. Sendo assim, a falta de habilidades nesse sentido pode estar associada ao não uso delas. Dessa forma, os alunos acabam reproduzindo padrões que, ao invés de ajudar, atrapalham a construção do Pensamento Matemático. Isso pôde ser visto nas duas soluções de L_2 apresentadas anteriormente, na quarta e na quinta questão da Atividade 1. Em ambas, ele tentou multiplicar os numeradores e os denominadores por dois números que não o ajudaram no processo de resolução, indicando sua falta de clareza com relação ao que deveria ser feito e a construção de um padrão equivocado em sua estrutura cognitiva: de que se deve multiplicar numerador e denominador apenas por um dos radicais que aparece na fração.

De fato, foi sinalizado, por meio do questionário aplicado para eles, que o conteúdo de radicais é um dos que os alunos mais possuem dificuldades. Desse modo, já era de se esperar que dúvidas relacionadas a esse tema fossem surgir.

As atividades analisadas anteriormente revelam que alguns licenciandos têm encontrado dificuldades na passagem do nível Básico para o nível Superior, sobretudo por conta da defasagem em conteúdos que são essenciais para a construção dos que são vistos nos cursos de graduação, nesse caso, especificamente em manipulações com raízes quadradas.

É interessante pontuar que no questionário aplicado aos professores, que tinha o objetivo de delimitar o tema desta pesquisa, dos dezessete que responderam, cerca de quatro deles apontaram que consideravam que os alunos apresentam "dificuldade pontual", dez apontaram "dificuldade moderada", dois apontaram "dificuldade alta" e um apontou "extrema dificuldade", com relação às propriedades relacionadas à radiciação. Realmente, como observado pelos professores, os registros de L_2 e L_6 nas questões analisadas anteriormente da Atividade 1 mostram que eles possuem dificuldades que, certamente, afetaram seus aprendizados nos conceitos de CDI I, nesse caso em específico, no cálculo de limites com raízes quadradas.

A quarta questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 14):

Figura 14 – Enunciado da oitava questão da Atividade 1

8. (Uel) Considere a função real com domínio IR - {2}, dada por $f(x) = \frac{1}{x-2}$. É verdade que

a) se x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para zero.
b) se x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para $-\infty$.
c) para qualquer valor de x, $f(x)$ é um número negativo.
d) se x é um número muito próximo de 2, $f(x)$ é um número muito próximo de 1/2.
e) $f(2) = 0$.

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

A resposta certa dessa questão é a letra (a). Para solucioná-la, era esperado que o aluno soubesse que, quanto maior é o valor de *x*, maior é o denominador. Com isso, a fração resulta em um número cada vez menor, tendendo a 0.

Destaca-se, a seguir, a resposta de L_6 que, apesar de estar correta, precisa ser brevemente analisada (Figura 15).

Figura 15 – Resposta obtida por L_6 na oitava questão da Atividade 1

$$8- \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \; :x}{x-2 \; :x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Nessa resposta, o que surpreendeu foi o fato de L_6 ter usado o símbolo de infinito como se fosse um número. Borges (2015) afirma os símbolos são utilizados na Matemática para torná-la mais clara e precisa, com o intuito de evitar ambiguidades e contradições. Contudo, o autor evidencia que para boa parte dos alunos, essas simbologias modernas são complicadas de se entender.

Em sua dissertação, Borges (2015) constatou que os alunos que fizeram parte do seu público-alvo tinham a percepção de que o infinito era simplesmente um número ou algo muito grande. Pela produção escrita de L_6, pode-se observar que, para ela, o infinito se enquadra nessa mesma perspectiva. A fim de resgatar as lacunas com relação ao infinito, Borges (2015) aponta que é importante que sejam levados exemplos simples que ajudarão os alunos a esclarecer os conceitos equivocados. Nesse caso, seria necessário expandir a ideia do que é o infinito por meio de situações que façam os alunos pensarem.

Nesse ponto de vista, Lima (2007) evidencia que, quando se lida com símbolos, "é preciso que se façam cálculos com números e/ou manipulação simbólica para que se 'mostre' algo que é verdade." (LIMA, 2007, p. 76). Assim, ao pensar nas alternativas (a) e (b) da questão proposta, seria necessário que a aluna usasse números cada vez maiores, associando ao "mais infinito", para que pudesse perceber o comportamento da função para esses valores.

A escrita da licencianda representa que ela possui lacunas com relação à representação e ao conceito de infinito. Portanto, é necessário que ela retome esse conteúdo em algum momento, mesmo tendo alcançado a resposta correta da questão, com intuito de analisar e afastar falsas compreensões que ela pode ter feito durante sua vida estudantil. Além disso, a noção de infinito é considerada básica para desenvolvimento de conceitos de Cálculo, tais como:

> [...] comprimento de curvas, área, volume, bem como na elaboração de outros conceitos como limite, derivada e integral, que constituem a base do cálculo em diversos cursos nas universidades brasileiras e estrangeiras. (PEREIRA, 2015, p. 8).

A quinta questão da Atividade 1 escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 16):

Figura 16 – Enunciado da décima questão da Atividade 1

10. Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 5}{x^3 - 1}$.

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

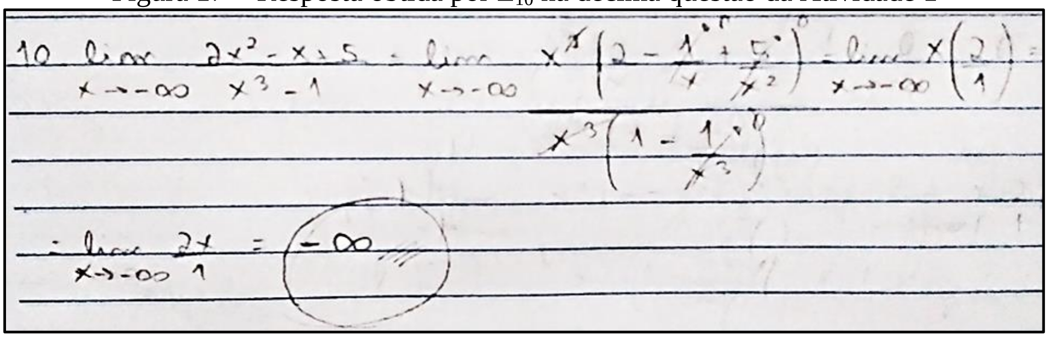
Para solucionar essa questão, o aluno poderia colocar em evidência, no numerador e no denominador, as respectivas incógnitas de maior grau. No caso do numerador, o termo seria o x^2, enquanto no denominador, o x^3. Dessa forma, o limite seria representado da seguinte forma (Expressão IV):

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} \qquad \text{(IV)}$$

Nesse momento, uma observação poderia ser feita: como na questão o valor de *x* está tendendo ao menos infinito, ou seja, a números cada vez menores e mais distantes do 0, os termos dentro dos parênteses que possuem o *x* no denominador, automaticamente, tendem a 0. Além disso, temos uma divisão de x^2 por x^3, que resulta em $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Após essas simplificações, o limite a ser calculado é: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$. Usando a mesma análise feita para as frações que estavam dentro dos parênteses, após colocar o fator comum em evidência, o resultado final desse cálculo é 0.

A seguir, na Figura 17, encontra-se a resposta de L_{10}.

Figura 17 – Resposta obtida por L_{10} na décima questão da Atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Para resolver a questão, L_{10} colocou em evidência, no numerador e no denominador, as potências de maior grau. Na primeira situação, foi o x^2, enquanto na segunda, o x^3. Após isso, ao analisar os termos que ficaram dentro dos parênteses, ele percebeu que, como *x* tendia a números cada vez menores, alguns elementos tendiam a 0, restando apenas $\frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{2}{1}$. Ao efetuar a divisão de x^2 por x^3, o licenciando encontrou x e não $\frac{1}{x}$, o que justifica o resultado $2x$ e não $\frac{2}{x}$. Por fim, ele encontrou que a solução da questão era $-\infty$.

Nessa resolução, foi possível perceber que houve um equívoco para efetuar a divisão de potências de mesma base. Aparentemente, é como se o aluno tivesse efetuado a divisão de x^3 por x^2 e não o contrário, como realmente era o caso da questão, o que pode indicar um erro por falta de atenção.

Sabe-se que, no caso da adição e da multiplicação, a ordem com que os fatores são dispostos para a operação não altera o resultado final. Entretanto, o mesmo não ocorre com as operações de subtração e divisão, visto que a propriedade comutativa não é válida para tais operações numéricas.

Pela produção escrita de L_{10}, é possível perceber certa dificuldade com relação ao domínio das propriedades de potenciação, sobretudo na de divisão. Borges e Oliveira (2013) apontam que, na cabeça do aluno,

> [...] os discursos podem apresentar-se fragmentados, incertos, por exemplo, diante de uma divisão de potências de mesma base é comum o aluno ficar na dúvida quanto ao que fazer com os expoentes. Ele pode não saber se subtrai ou se divide os expoentes, ocorrendo o mesmo nos casos de multiplicação de potências de mesma base, o aluno não está certo quanto à multiplicação ou à soma dos expoentes. (BORGES; OLIVEIRA, 2013, p. 2591).

Os autores afirmam que essas dúvidas podem estar associadas ao frequente uso de falas fragmentadas como: “[...] ‘mantém a base e soma... não... multiplica…’ ou ‘mantém a base e subtrai ... não... divide…’ nas operações com potências [...]” (BORGES; OLIVEIRA, 2013, p. 2591). Dessa forma, é necessário que os professores de Matemática tomem cuidado com a reprodução de discursos que são usados na tentativa de simplificar uma propriedade ou conceito matemático, porque em muitos casos, eles acabam causando incertezas quanto ao que realmente deve ser feito.

Do ponto de vista da metodologia da Análise de Erros ou Produções Escritas, o equívoco cometido por L_{10} mostra que seria importante ele rever seu processo de resolução, a fim de analisar se o seu erro foi resultado de uma lacuna trazida por ele do Ensino Básico ou se foi falta de atenção no momento em que estava resolvendo a questão de limite proposta.

A Atividade 2 foi disponibilizada no AVA no dia 26 de março de 2021 e possuía cinco questões discursivas. Dela, foram escolhidas duas questões que obtiveram respostas interessantes tendo em vista a questão de pesquisa desta monografia. Essas respostas foram analisadas a seguir.

A primeira questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 18):

Figura 18 – Enunciado da primeira questão da Atividade 2

1. Dois estudantes estão discutindo o limite de $\sqrt{x}$ quando x tende a 0. Um deles afirma que o limite é 0 e o outro, que esse limite não existe.
Com base no que foi estudado sobre Limites, responda os questionamentos abaixo.
a) É possível os dois estudantes estarem corretos? Por quê?

b) Caso sua resposta para o item a) tenha sido "Não", qual estudante está correto? Justifique.

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Para resolver essa questão, era esperado que o aluno tivesse conhecimento de que a função $f(x) = \sqrt{x}$ possui uma restrição em seu domínio, visto que *x* precisa ser um número maior ou igual a zero para que a sua raiz quadrada seja definida no conjunto dos números reais. Desta forma, ao analisar os limites laterais, com o *x* tendendo a zero, o aluno deveria perceber que, pela esquerda, o limite não existe. Já pela direita, o limite é igual ao próprio zero. Entretanto, para que o limite dessa função seja definido nesse ponto, os limites laterais deveriam ter o mesmo valor, o que não acontece. Logo, o limite não existe.

Um fator que também poderia ajudar a solucionar essa questão seria o conhecimento do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Ainda que os alunos não se recordem da restrição do domínio, pela representação geométrica já seria possível perceber que não existe função para valores de *x* que são negativos. Dessa forma, talvez houvesse mais clareza para perceber que os limites laterais são diferentes, o que implica na não existência do limite.

A seguir, no Quadro 4, encontram-se as respostas fornecidas, na letra (a), por todos os alunos que aceitaram participar desta pesquisa. É válido destacar que, dos 11 licenciandos, apenas 2 apresentaram raciocínio correto em toda a questão.

Quadro 4 – Respostas dos alunos na letra (a) da primeira questão da Atividade 2

Alunos	**Respostas - letra (a)**
L_1	*Não, porque* $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$*, então apenas um deles está correto.*
L_2	*Não, pois o* $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ *existe.*
L_3	*Não.*
L_4	*Não é possível que os dois estudantes estejam corretos, pois o* $\lim_{x\to 0}\sqrt{0}$ *é igual a "0". Sendo assim apenas um deles pode estar correto.*
L_5	*Sim, os dois estão certos. Porque ao analisar os limites laterais, tendo* $x \to 0^-$ *o limite não existe e* $x \to 0^+$ *o limite tem valor zero.*
L_6	*Não, pois não o limite não existe.*
L_7	*Apenas um estudante está correto. Devemos considerar o limite dentro do domínio da função, que no caso de* $\sqrt{x}$ *esta definida em* $x \geq 0$*, ou seja só vai existir o limite a direita, pela definição do domínio.*
L_8	*Não, pois o limite não tem como ser zero, uma vez que o expoente da raiz é um número par, logo* $x > 0$.
L_9	*Não. Porque se um limite não existe logo esse limite não pode ser calculado para ser encontrado um valor "L" como está notado na definição formal* $\left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$.
L_{10}	*Com a restrição em que* $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ *terá um limite, pois quanto menor o valor de x, mais próximo* $\sqrt{x}$ *fica de 0, logo, não é possível que os dois estudantes estarem corretos.*
L_{11}	*Não fez a atividade.*

Fonte: Elaboração própria.

Após a leitura, as respostas de L_5, L_7, L_8 e L_{10} são analisadas a seguir.

L_5 percebeu que os limites laterais não são iguais, já que tendendo a zero pela direita e pela esquerda, os resultados não são os mesmos. Apenas L_7 e L_{10} citaram a restrição existente para os valores do domínio dessa função. Ambos destacaram o fato de *x* ter que assumir um valor maior ou igual à zero para que fosse possível definir sua raiz quadrada. Contudo, nenhum dos três licenciandos percebeu que essa já seria a justificativa válida para dizer que o limite da função, quando *x* tende a 0, não existe.

A resposta de L_8 é ainda mais intrigante: apesar de estar certa em dizer que o limite não existe, aparentemente, ela confundiu o fato das raízes de índices pares não admitirem respostas no conjunto dos números reais quando *x* é um número negativo, com quando *x* é um número não positivo (o que incluiria o zero).

É interessante perceber que todos os alunos que responderam que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, fizeram isso com muita convicção de sua resposta. Apesar da raiz quadrada de 0 realmente ser igual a 0, os licenciandos podem ter esquecido ou não sabiam que calcular um limite envolve analisar o que acontece nas proximidades de determinado valor, que neste caso é o 0, e as restrições de domínio são muito importantes nessas situações.

Flores (2018) afirma que o conceito de limites exige o pensamento em valores muito grandes, muito pequenos ou que se aproximam de um valor sem alcançá-lo, o que, na concepção do autor, não é uma tarefa fácil, principalmente para um aluno ingressante ao Superior. Nesse sentido, em concordância com o que já foi dito acima, Lima (2007) aponta que a perspectiva gráfica seria essencial para gerar associação entre os símbolos e os conceitos envolvidos.

Mais uma vez, analisando as produções escritas dos licenciandos, é possível perceber lacunas por parte deles com relação aos conceitos que envolvem raízes quadradas. Nesse caso, as dúvidas evidenciadas por meio de suas respostas apontam para a restrição imposta pelo domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$. Ou seja, além das lacunas observadas com relação ao conceito de radicais, L_1, L_2, L_4 e L_8 também apresentaram dificuldades com relação ao conceito de domínio de uma função, e, no caso de L_8, confusão com relação ao cálculo de raízes de índices pares, para quando o radicando é zero.

Oliveira (2007) aponta que o entendimento do conceito de função é um requisito essencial para a compreensão dos conceitos que são vistos em Cálculo Diferencial e Integral e que, no geral, os alunos apresentam dificuldades com relação à construção do gráfico, determinação de domínio, mudança da perspectiva algébrica para a geométrica, entre outras. Vale ressaltar sobre os conceitos listados, a determinação do domínio de uma função, pois no caso do cálculo de alguns limites, é fundamental que os alunos tenham uma base consolidada com relação às restrições que são impostas pelo domínio das funções.

Araújo (2019) destaca que as defasagens encontradas no ensino de radiciação não estão só associadas à forma como o professor apresenta esse conteúdo, mas também à motivação e ao interesse do aluno com relação a ele. Nessa perspectiva, Moreira (2017) afirma que, para Ausubel, por mais que um conceito seja *potencialmente significativo*, isto é, por mais que ele possa ser “agregado” à estrutura cognitiva por meio de *subsunçores*, é necessário que o indivíduo esteja disposto a fundamentar adequadamente os conceitos vistos, pois, do contrário, se ele estiver propenso a apenas memorizar, não haverá significação do novo conceito por meio dos *subsunçores*.

Dessa forma, pela dificuldade que os alunos podem manifestar com relação à determinação do domínio de uma função e pela desmotivação que pode ser gerada pelo próprio conteúdo de radicais, associadas à falta de hábitos de estudo, a alternativa mais “fácil” para o aluno é a de apenas memorizar o método de resolução visto, visando à aprovação na fase em que se está. Contudo, quando surge a necessidade de resgatar esses conceitos para dar-lhes novos significados, eles não estão “disponíveis” na estrutura cognitiva, porque foram meramente memorizados.

Pelo ângulo da Teoria da Aprendizagem Significativa, L_1, L_2, L_4 e L_8 apresentam certa falta de ancoragem nos conceitos mencionados anteriormente. Por esse motivo, suas produções escritas demonstraram falta de compreensão no cálculo do limite proposto. Tendo isso em vista, é válido destacar que, apesar dos conteúdos listados serem previstos para o Ensino Básico e alguns até serem abordados em FM I, é notório que os alunos apresentam lacunas que, se não forem retomadas, serão arrastadas durante a graduação.

Ainda sobre a primeira questão, a seguir, no Quadro 5, encontram-se as respostas fornecidas na letra (b), pelos 11 participantes desta pesquisa.

Quadro 5 – Respostas dos alunos na letra (b) da primeira questão da Atividade 2

Alunos	**Respostas - letra (b)**
L_1	*O estudante que afirma que* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$*, usando a propriedade da raiz temos:* $$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x)}$$ *Substituindo x = 0.* $$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(0)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$$ *Então* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$
L_2	*O estudante que afirmar que o limite é zero.* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$
L_3	*O estudante correto é aquele que afirmou que o* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$*. Pois qualquer número multiplicado por 0 é o próprio 0. Sendo assim, o* 0^n*sempre será 0. Dessa forma é possível concluir que a raiz quadrada de 0 também será 0.*
L_4	*O estudante correto é aquele que afirma que o* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$*, pois usando a propriedade da raiz temos que:* $$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x)}$$ *Substituindo x por "0"* $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(0)} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{0}$*;* *logo, o* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0.$
L_5	*Não respondeu.*
L_6	*O estudante que diz que o limite não existe está correto, pois como raiz de um número negativo não existe, não teria valor possível quando x tende a zero pela esquerda, o que faz com que o limite não exista.*
L_7	*O estudante correto é o que afirma que* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0.$
L_8	*O estudante que respondeu que o limite de* $\sqrt{x}$*, quando x tende a zero, não existe. O limite não existe, pois quando x tende a zero o limite* $\sqrt{x}$ *daria zero, mas esse resultado não é válido para esse limite, uma vez que o expoente é* $n = 2$ *e 2 é par, então* $x > 0$.
L_9	*O estudante que falou que o limite não existe está correto.* *Verificando os limites laterais.* $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ / $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x} \nexists$ *em* $\mathbb{R}$.
L_{10}	*O estudante que disse que o limite de* $\sqrt{x}$ *é 0, ou seja,* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ *para* $x \to 0^+$*(x tende a 0 pela direita), pois para* $x \to 0^-$*não é possível pois* $x < 0$ *não pertence aos reais, logo não existe nos reais.*
L_{11}	*Não fez a atividade.*

Fonte: Elaboração própria.

É válido destacar as respostas de L_3, L_6, L_8 e L_{10}.

L_3 respondeu que todo número multiplicado por 0 é igual ao próprio 0, o que está correto. Entretanto, logo em seguida, ela escreveu que 0^n sempre será 0. Essa afirmação precisa de certa atenção e cuidado, pois ao escrever que "sempre será igual à zero", isso indica que é o caso, até mesmo, de quando $n = 0$. Nessa situação, 0^0, o resultado não assume um valor específico.

De acordo com Lima (1991), 0^0 pode ser definido como uma expressão matemática sem significado e, mais ainda, como uma expressão indeterminada. O autor mostra essa indeterminação utilizando conceitos de Limites e apresenta um exemplo que reforça essa afirmação:

> [...] como $0^y = 0$ para todo $y \neq 0$, seria natural pôr $0^0 = 0$; por outro lado, como $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$, seria também natural pôr $0^0 = 1$. Logo, o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada. (LIMA, 1991, p. 155-156).

Com relação ao registro de L_6, apesar de ela ter afirmado corretamente que o limite não existe, seu escrito chama a atenção pelo seguinte ponto: ela ter destacado uma generalização que não é verdade. Ao afirmar que "*raiz de um número negativo não existe*", ela dá a entender que não existirá raiz de nenhum índice de um número negativo, o que é falso, pois só existe restrição quanto ao radicando ser negativo quando a raiz possui índice par. Também é válido enfatizar que essa restrição acontece devido ao conjunto em que se está trabalhando que, nesse caso, é o conjunto dos números reais. Se a situação se tratasse de um estudo no campo dos números complexos, certamente seria possível calcular a raiz enésima de qualquer número, inclusive os negativos.

Já a resposta de L_8 reforça o que ela já tinha escrito na letra (a). Mais uma vez, foi reafirmado que o limite de tal função não existe, mas pelo motivo errado. Não é verdade que se o índice de uma raiz é par, x não possa assumir o valor 0. Por meio dessa resposta, fica ainda mais claro que houve uma confusão com relação aos valores que x poderia ou não assumir, levando em consideração ser o radicando de uma raiz quadrada.

É interessante perceber que, em sua resposta, L_{10} forneceu todas as informações necessárias para afirmar que o limite não existe quando x tende a 0 e, ainda assim, ele afirmou o oposto.

Além das observações feitas a partir das análises realizadas, foi possível perceber que boa parte dos licenciandos apresentou dúvidas com relação à condição necessária para que um limite exista. A dificuldade neste tópico revela uma provável complexidade na compreensão do teorema da unicidade do limite. Segundo Iezzi, Murakami e Machado (2013, p. 24), “[...] esse teorema afirma que uma função não pode se aproximar de dois números diferentes quando *x* se aproxima de a. [...] ele nos garante que se o limite de uma função existe, então ele é único.”

É válido ressaltar que esse teorema é provado a partir da definição formal de limite. Sendo assim, muitos alunos podem ter encontrado dificuldades para compreendê-lo, tendo em vista o nível de abstração que ele exige e o fato de que muitos deles chegam à disciplina de CDI I sem essa competência desenvolvida para aperfeiçoar os conteúdos que dependem dela, como afirma Tall (RAFAEL, 2017). Nessa perspectiva, Cury e Cassol (2004) destacam que, por meio das análises de erros dos alunos, é possível perceber que a ausência de domínio em conteúdos básicos, agregada às dificuldades de abstrair e generalizar, resultam em reprovação e desistência do curso escolhido. Nesse contexto, as análises realizadas evidenciam exatamente as afirmações de Rafael (2017) e Cury e Cassol (2004).

Na segunda questão da Atividade 2 escolhida para análise, era necessário utilizar os conhecimentos sobre continuidade de uma função para responder às perguntas propostas. Especificamente na letra (e), o enunciado era (Figura 19):

Figura 19 – Enunciado da letra (e) da segunda questão da Atividade 2

e) Explique por que a função abaixo é descontínua no número dado a.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$$

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Para solucionar essa questão, era esperado que o aluno recordasse dos critérios necessários para garantir que uma função seja definida como contínua:

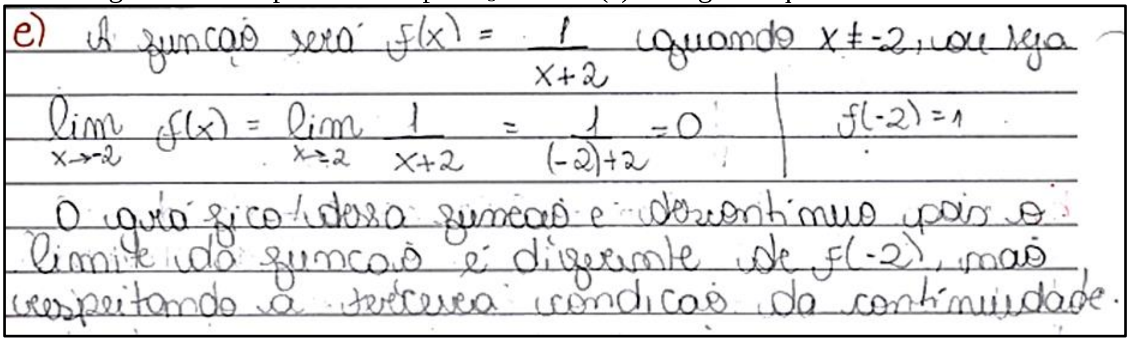
> Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é contínua em a, se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. [...] Da definição decorre que, se f é contínua em a, então as três condições deverão estar satisfeitas:
> 1.º) existe $f(a)$
> 2.º) existe $\lim_{x \to a} f(x)$

> 3.º) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013, p. 115).

Pela definição apresentada acima, pode-se afirmar que a função dada no enunciado é descontínua, pois $\lim_{x \to a} f(-2) \neq f(-2)$.

A seguir, encontra-se destacada a resposta de L_3 à essa questão (Figura 20).

Figura 20 – Resposta obtida por L_3 na letra (e) da segunda questão da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Nesse caso, novamente, o que chamou a atenção foi o fato de L_3 fazer a substituição direta do *x* pelo -2, encontrar uma impossibilidade, e representar isso apenas como igual a 0. Como já foi exposto anteriormente, esse tipo de pensamento pode gerar um entendimento equivocado a respeito de divisão de um número qualquer, diferente de zero, por zero. E, consequentemente, esse pensamento pode gerar dificuldades na abordagem de novos conteúdos, em outras disciplinas, ou até mesmo durante o exercício da profissão em sala de aula.

Mais uma vez, pela definição de divisão trazida por Lima (1991), é possível abordar a situação em que um valor qualquer é dividido por 0: supondo que um número y é igual a $\frac{1}{0}$, é possível afirmar que $1 = y \cdot 0$. Nenhum número y é tal que torne essa igualdade verdadeira. Portanto, essa divisão é considerada impossível, e isso é válido para qualquer $\frac{a}{0}$, sendo a um número diferente de 0 (LIMA, 1991).

Como destacado por Ramos (2015) e muito enfatizado nesta pesquisa, o erro tem que ser visto como algum conhecimento construído pelo aluno, ainda que de forma incorreta. Quando o professor analisa os mecanismos utilizados para solucionar os problemas matemáticos, ele consegue perceber as dúvidas e dificuldades presentes no raciocínio, e pode ajudar a superar esses obstáculos. Quando esse processo é visto como algo positivo pelos dois lados da relação professor-aluno, é possível firmar uma comunicação baseada na orientação de uma aprendizagem que produza uma melhor compreensão dos conteúdos em Matemática. O erro é “[...] uma fonte de informação. [...] ele indica a existência de problemas que devem ser tratados.” (RAMOS, 2015, p. 138).

Levando em consideração todas as questões até aqui analisadas, que envolviam o cálculo de limites, é importante destacar a percepção de Holanda, Cunha e Silva (2015), ao afirmarem que a realização correta de um cálculo de limite não garante a aprendizagem do significado dele. Para mostrar essa garantia, seria necessário mapear individualmente cada *imagem* e *definição de conceito* de cada um dos licenciandos, o que não estava previsto nem no objetivo geral, nem nos específicos desta pesquisa. Sendo assim, as análises realizadas até então visaram evidenciar os equívocos cometidos pelos alunos que estivessem relacionados ao déficit em alguns conteúdos de Matemática Elementar, que são advindos do Ensino Básico e que influenciaram, de alguma forma, o desenvolvimento dos conteúdos de CDI I por parte deles.

A Atividade 3 foi disponibilizada no AVA no dia 5 de maio de 2021 e possuía quatro questões discursivas. Dela, foram escolhidas duas questões que obtiveram respostas interessantes que foram analisadas a seguir, tendo em vista a questão de pesquisa desta monografia.

A primeira questão escolhida para análise era composta por quatro itens e seu enunciado era (Figura 21):

Figura 21 – Enunciado da primeira questão da Atividade 3

1. Em cada item, faça o que se pede:

a) Use a regra do quociente para deduzir a fórmula para a derivada de $f(x) = x^{-n}$, onde n é um número inteiro positivo.

b) Derive a função $f(x) = x^{-10}$.

c) Escreva uma equação para a reta tangente à curva $y = x^{-10}$ em $x = 1$.

d) Escreva as derivadas de segunda ordem e terceira ordem da função $f(x) = x^{-10}$.

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Especificamente, na letra (a), o aluno deveria usar a regra do quociente para deduzir a fórmula de derivação da função $f(x) = x^{-n}$, sendo n é um número inteiro positivo.

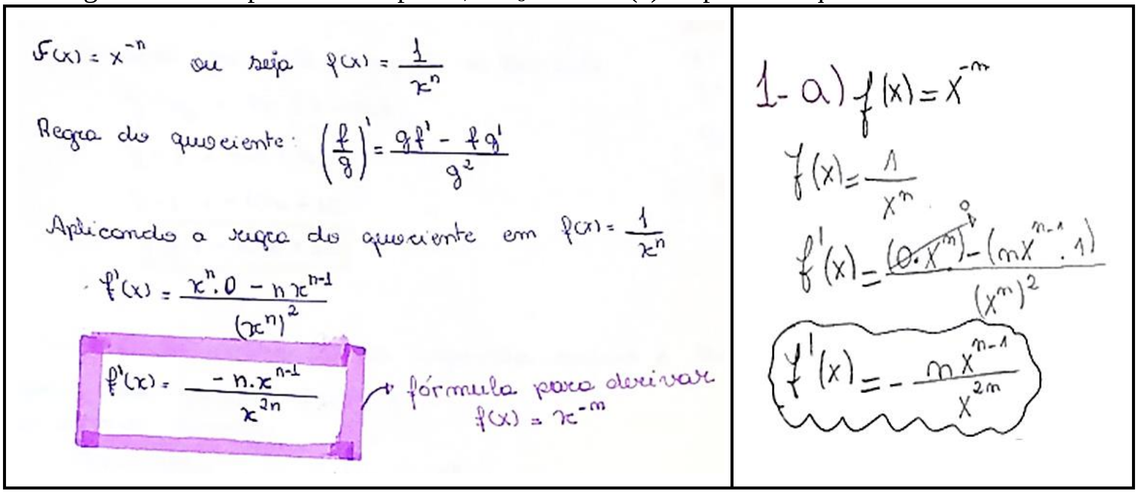
A regra do quociente considera duas funções f e g, e é descrita na Equação 4:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' + fg'}{g^2} \tag{4}$$

Sabendo que $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, bastaria substituir f e g, na regra, por 1, x^n e suas respectivas derivadas. Por fim, a resposta final deveria ser que a derivada da função $f(x) = x^{-n}$ é igual a $f'(x) = -nx^{\,-n-1}$.

A seguir, são apresentadas as respostas de L_7 e L_8 (Figura 22).

Figura 22 – Resposta obtida por L_7 e L_8 na letra (e) da primeira questão da Atividade 3



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

As duas licenciandas tiveram um raciocínio semelhante, apesar de L_7 ter detalhado mais as etapas da sua resolução. Ambas chegaram ao mesmo resultado, só que a fração não está em sua forma mais simplificada possível. É possível que não soubessem como simplificar diante de tantas letras envolvidas.

Como, ao final, surge uma divisão entre potências de mesma base, elas deveriam ter repetido a base, que nesse caso é a incógnita x, e diminuído os expoentes na ordem em que aparecem. Nesse caso, ficaria $n - 1 - 2n$, que é igual a $-n - 1$. Logo, chegariam à regra de derivação, que é $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

As dificuldades em conteúdos algébricos como fatoração, simplificação, produtos notáveis e equações também foram evidenciados nos trabalhos de Casavotto (2010), Bortoli

(2011), Dörr (2017) e Cury (2019), mostrando o quanto a compreensão desses conceitos é importante para o desenvolvimento da disciplina de CDI I.

Essas dificuldades podem se tornar empecilhos no entendimento de temas abordados na disciplina de Cálculo, como nos assuntos de Limites, Derivadas e, posteriormente, Integrais. Consequentemente, ainda que seja constatado que os alunos têm habilidades ao manipular e executar técnicas de derivação, por meio de construções lógicas, os procedimentos são falhos e resultam em erros (DÖRR, 2017).

Os registros de L_7 e L_8 não apresentaram erros cometidos durante o processo de resolução da questão. Porém, indicaram a falta de percepção com relação ao uso da propriedade de divisão entre potências de mesma base, que poderia ter sido aplicada para simplificar ainda mais a expressão encontrada.

A segunda questão da Atividade 3 escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 23):

Figura 23 – Enunciado da terceira questão da Atividade 3

3. Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}$

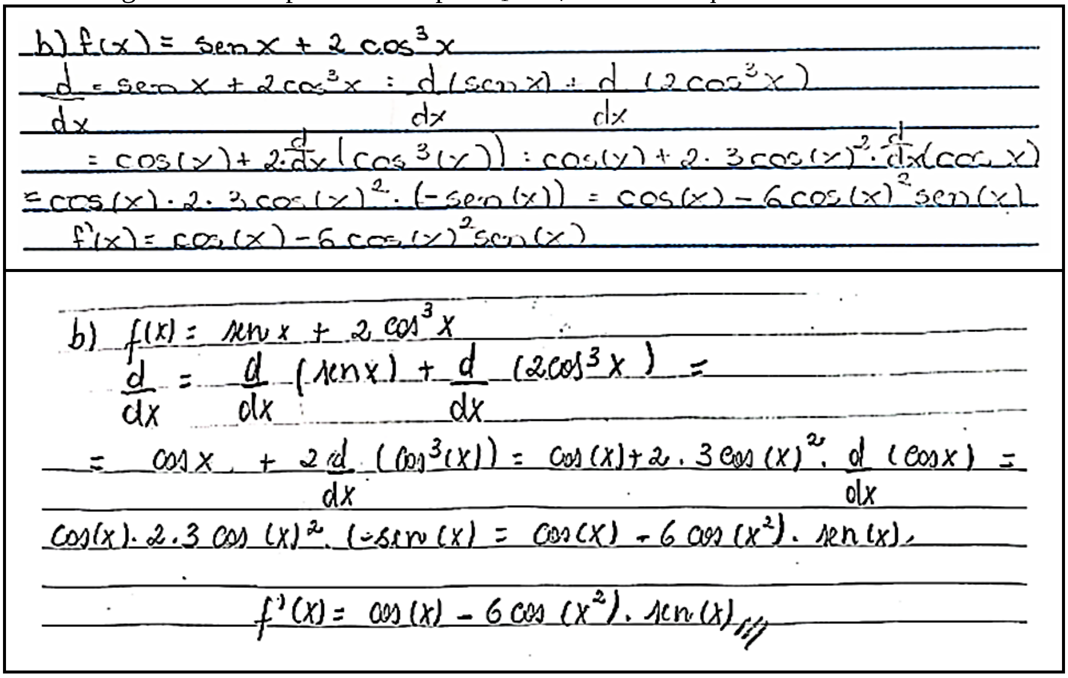
b) $f(x) = sen\ x + 2\ cos^3 x$

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

A letra (b), especificamente, solicitava a derivada de uma função trigonométrica. Para resolvê-la e encontrar a resposta correta, o aluno poderia encontrar as derivadas dos dois termos de forma separada e, depois, unir os resultados. A derivada de $sen(x)$ é igual a $cos(x)$. Para calcular a derivada de $2cos^3(x)$, seria necessário usar a regra da cadeia, que resultaria em $-6sen(x)cos^2(x)$. Logo, a derivada da função $f(x) = sen(x) + 2cos^3(x)$ é igual a $f'(x) = cos(x) - 6sen(x)cos^2(x)$.

A Figura 24 exibe as respostas fornecidas por L_1 e L_4 na letra (b) dessa questão.

Figura 24 – Resposta obtida por L_1 e L_4 na terceira questão da Atividade 3



b) $f(x) = sen\,x + 2\cos^3 x$

$\frac{d}{dx} = sen\,x + 2\cos^3 x : \frac{d}{dx}(sen\,x) + \frac{d}{dx}(2\cos^3 x)$

$= \cos(x) + 2\cdot\frac{d}{dx}(\cos^3(x)) : \cos(x) + 2\cdot 3\cos(x)^2 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$

$= \cos(x)\cdot 2\cdot 3\cos(x)^2\cdot(-sen(x)) = \cos(x) - 6\cos(x)^2 sen(x)$

$f'(x) = \cos(x) - 6\cos(x)^2 sen(x)$

b) $f(x) = sen\,x + 2\cos^3 x$

$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}(sen\,x) + \frac{d}{dx}(2\cos^3 x) =$

$= \cos x + 2\frac{d}{dx}(\cos^3(x)) = \cos(x) + 2.3\cos(x)^2.\frac{d}{dx}(\cos x) =$

$\cos(x).2.3\cos(x)^2.(-sen(x) = \cos(x) - 6\cos(x^2).sen(x).$

$f'(x) = \cos(x) - 6\cos(x^2).sen(x)$

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

L_1 e L_4 apresentaram resoluções muito parecidas e que precisam ser analisadas. Ao realizarem a derivada de $2cos^3x$, o que chama a atenção é que L_1 indicou que a resposta era $-6cos(x)^2sen(x)$, enquanto L_4 escreveu $-6cos(x^2)\cdot sen(x)$. Nos dois casos, o expoente 2 foi posicionado no lugar errado, visto que ele estava relacionado ao cosseno e não ao argumento x.

Ao avaliar os resultados de sua pesquisa, Feijó (2018) apontou que os alunos participantes apresentaram dúvidas que permeiam todos os ramos da Trigonometria, estando presentes desde as definições até as manipulações e generalizações.

Em uma experiência com alunos de Cálculo Diferencial e Integral A, Cury (2004) relata que um dos erros apresentados estava relacionado à derivada da função $y = cos^nu$. Uma das respostas à questão foi $y' = sen^n + u$, com ausência do argumento para o seno. Para a autora, além desse tipo de erro ser frequente, é muito grave, porque demonstra que os alunos podem não compreender o significado do argumento (CURY, 2004).

Em muitas escolas, as funções trigonométricas não são apresentadas no Ensino Médio e, diante dos exames vestibulares que existem atualmente, questões que envolvem esse tipo de função podem ser, simplesmente, "chutadas", conforme afirma Cury (2004). Ao ingressar no Ensino Superior, o aluno além de não possuir conhecimentos requisitos desses conceitos, ainda pode se sentir constrangido de dizer que não sabe o que significa seno e cosseno do arco. E, quando se depara com esse assunto durante a explicação de regras de derivação, ele simplesmente manipula "[...] como se fossem as letras com as quais ele tem certa familiaridade, desde a Álgebra do ensino fundamental." (CURY, 2004, p. 120).

Pelas produções escritas de L_1 e L_4, pode-se perceber que o equívoco por elas cometido não está associado a dificuldades de aplicação das regras de derivação, conteúdo de CDI I, mas sim ao conteúdo de Trigonometria, que é previsto para segmentos escolares anteriores. Sendo assim, é válido pontuar que o erro encontrado na resposta final, foi resultado da falta de ancoragem em conceitos previstos para o Ensino Básico.

Como já descrito, em muitos casos, os alunos não têm contato com o conceito de funções trigonométricas no Ensino Médio e, portanto, não possuem esse conhecimento ancorado para, a partir dele, adquirir e fundamentar novos conceitos. Além disso, apesar de existir uma disciplina que é requisito para a de CDI I no curso em questão, os conceitos que permeiam a Trigonometria só são abordados no 3.° período. Sendo assim, uma reavaliação da base desses alunos é essencial, tendo em vista que eles precisam não só desse, como de outros conteúdos já citados, para desenvolver adequadamente uma base nos conceitos de Cálculo I.

É válido ressaltar, mais uma vez, que o tema de identidades trigonométricas foi apontado, pelos professores que responderam ao questionário de sondagem, como o que os alunos possuem mais dificuldades. Além disso, os alunos também sinalizaram que têm dúvidas com relação a esse tópico por meio do questionário aplicado para eles. Levando isso em consideração, pode-se pontuar que os registros analisados evidenciam que, de fato, os alunos apresentam dificuldades e que é importante que eles tenham a possibilidade de retomar o tema em questão, visando identificar suas lacunas.

A Atividade 4 foi disponibilizada no AVA no dia 28 de abril de 2021 e possuía dez questões discursivas. Dela, foi escolhida e analisada a seguir uma questão que obteve respostas interessantes, tendo em vista a questão de pesquisa desta monografia.

A quarta questão escolhida para análise tinha o seguinte enunciado (Figura 25):

Figura 25 – Enunciado da quarta questão da Atividade 4

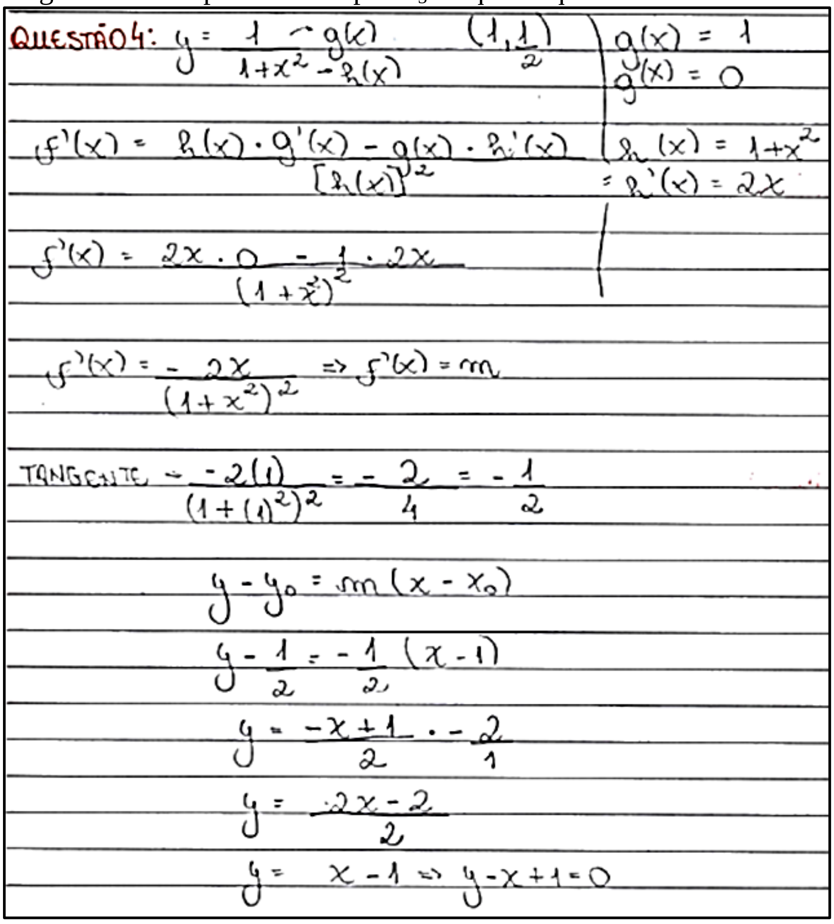
4. (Fuvest – SP) Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$?

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Para solucionar a questão, era esperado que o aluno calculasse a derivada da função $y = \frac{1}{1+x^2}$ e, em seguida, substituísse x, na expressão encontrada, pela abscissa do ponto fornecido no enunciado, com o objetivo de encontrar o coeficiente angular da reta tangente desejada. Em seguida, ele poderia usar a equação fundamental da reta, descrita como $y - y_0 = m\,(x - x_0)$. O par ordenado (x_0, y_0) é formado pelas coordenadas do ponto dado na questão, no qual se deseja descobrir a reta que é tangente à função. Feito isso, encontraria a resposta correta, que é $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

A seguir, são analisadas as respostas de L_3 (Figura 26) e L_5 (Figura 27).

Figura 26 – Resposta obtida por L_3 na quarta questão da Atividade 4



QUESTÃO 4: $y = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{g(x)}{h(x)}$ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$g(x) = 1$

$g'(x) = 0$

$h(x) = 1 + x^2$

$h'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

$f'(x) = \frac{2x \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = m$

TANGENTE $\rightarrow \frac{-2(1)}{(1+(1)^2)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,(x - 1)$

$y = \frac{-x+1}{2} \cdot -\frac{2}{1}$

$y = \frac{2x - 2}{2}$

$y = x - 1 \Rightarrow y - x + 1 = 0$

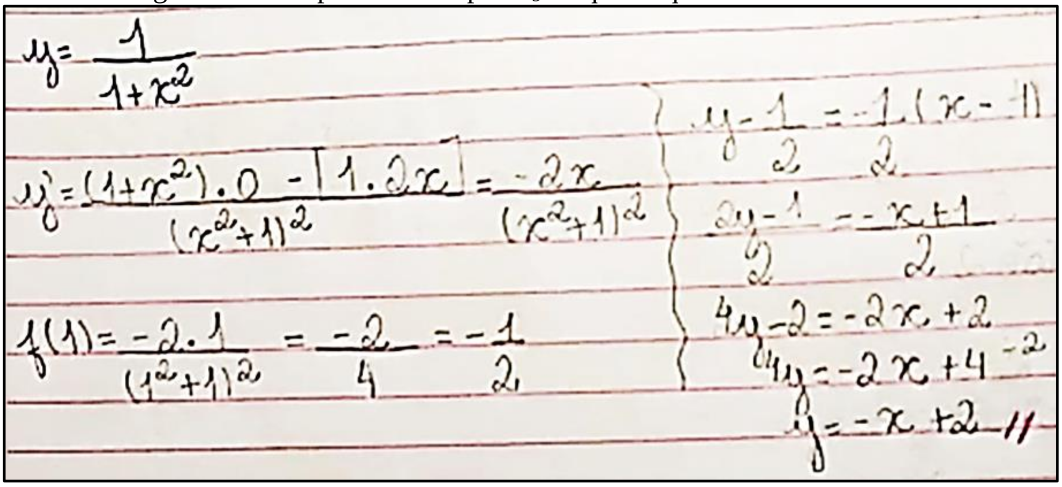
Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

L_3 iniciou a sua resolução calculando a derivada da função proposta, utilizando a regra do quociente. Após isso, substituiu o ponto dado no enunciado, para encontrar o coeficiente angular da reta tangente à função, nomeado por m, descobrindo que o seu valor é $-\frac{1}{2}$. Até então, todas as etapas foram executadas com raciocínio matemático correto.

Para descobrir a reta tangente, ela usou a equação fundamental da reta. Após a substituição, ocorreu um erro na manipulação. Ao escrever $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$, para conseguir isolar o y e encontrar a equação desejada, bastava adicionar $+\frac{1}{2}$ em ambos os lados. Porém, a aluna multiplicou o termo que estava no segundo membro pelo inverso da fração $-\frac{1}{2}$. Aparentemente, ela confundiu com o procedimento de divisão entre frações, que é resumido por multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda. Consequentemente, ela acabou encontrando a equação errada para o problema proposto.

A Figura 27 apresenta a resposta de L_5 à mesma questão. Como os dois erros podem ser analisados sob uma mesma ótica, as devidas observações são feitas posteriormente.

Figura 27 – Resposta obtida por L_5 na quarta questão da Atividade 4



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da avaliação.

Assim como L_3, L_5 também calculou a derivada da função dada, substituiu o x pelo valor da abscissa do ponto fornecido no enunciado e usou a equação fundamental da reta para chegar ao resultado final. Contudo, ocorreu um erro de simplificação.

Após determinar um denominador comum para todos os termos, parece que a aluna usou a “multiplicação dos meios pelos extremos” para eliminar os denominadores das frações. Porém, ela já poderia ter trabalhado só com numeradores, visto que os denominadores dos dois membros da igualdade já eram iguais. Para finalizar, ela dividiu todos os termos da equação por 2, provavelmente desejando isolar a incógnita y e encontrar a reta tangente desejada. Entretanto, ela se esqueceu do coeficiente 2 acompanhando o y, visto que a divisão de $4y$ por 2 é igual a $2y$. Com isso, encontrou uma resposta errada para o problema proposto.

Os conteúdos estudados na Álgebra requerem um nível de abstração que causa uma ruptura em conceitos que já são conhecidos. Isso acontece tanto no nível Básico quanto no Superior. Neste último, os alunos já possuem “macetes” que, por vezes, não permitem que reflitam a respeito do que estão fazendo. Um dos esquemas mais usados está relacionado a “trocar de lado”, “mudar de sinal”. Quando não há uma real compreensão do que essa “regra” quer dizer, é possível que essa mudança de sinal não faça sentido algum para aquele que a está utilizando. Consequentemente, os estudantes acabam “[...] cometendo erros que nos parecem absurdos e que comprometem todo o aprendizado de conteúdos de Cálculo, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, etc.” (CURY; KONZEN, s.d.).

Complementando a fala das autoras, Lima (2007) expõe as *mal-rules*, que são as regras consideradas indevidas. Uma forma de encontrar essas manipulações é quando símbolos algébricos são movimentados, como se pudessem ser apanhados e depositados do outro lado. Essa troca de lugar é acompanhada pelo procedimento de troca de sinal do termo “que ‘passa para o outro lado, subtraindo (ou somando)’ ou ‘passa para o outro lado, debaixo do termo que está lá’, isto é, dividindo.” (LIMA, 2007, p. 48). Parece até que esses elementos que são realocados possuem um lugar específico na equação. Todos esses passos podem causar confusão e, consequentemente, gerar erros no processo de resolução. Ao mesmo tempo, quando essas “regras” são usadas de forma correta, pode ser que o aluno tenha êxito na questão, ainda que não entenda o que está efetuando (LIMA, 2007).

O erro cometido por L_3 pode ter relação com esse *mal-rule* mencionado. Por vezes, a regra do “troca de lado” e “muda de sinal” pode causar dúvidas, principalmente se o aluno não tem compreensão da estrutura de uma equação e do que cada símbolo ali significa. Sobre isso, Lima (2007) afirma que essa parte simbólica tem um papel muito importante para a existência de uma equação. O sinal de igual, por exemplo, precisa representar uma igualdade entre os membros. Essa ideia mostra que tudo que for realizado de um lado, necessariamente, também precisa ser executado no outro.

Na resposta de L_3, em que havia $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$, com esse entendimento de que a equação funciona como uma espécie de “balança”, ela perceberia que para isolar o *y*, deveria somar $\frac{1}{2}$ em ambos os membros da equação e não multiplicar pelo inverso desta fração. É provável, também, que ela tenha pensado que para eliminar o termo $-\frac{1}{2}$, deveria “passar para o outro lado dividindo”. E quando o assunto é frações, existe outra *mal-rule* que diz que para realizar uma divisão entre frações, é necessário “repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda”. Essa ideia justificaria o fato de L_3 ter escrito $y = -\frac{1}{2}(x-1) \cdot -\frac{2}{1}$, visto que $-\frac{2}{1}$ é o inverso de $-\frac{1}{2}$.

Com relação ao equívoco cometido por L_5, é possível que tenha sido uma falta de atenção com relação ao termo que acompanhava o *y*. Lima (2007) cita que o erro de escrita pode ser considerado um *escorregão*, que é quando o aluno tem a intenção correta de fazer uso de determinado procedimento, mas acaba fazendo isso de maneira incorreta. Por exemplo, ao resolver a equação $10x = 25$, o aluno pode escrever $x = \frac{25}{18}$, como se ele tivesse enxergado o 8 no lugar do 0. Ou então, resolver $2x = 5 \cdot 6$ como sendo $x = 18$. Nesse caso, pode ter sido algum erro aritmético (LIMA, 2007).

De maneira geral, pode-se perceber que os erros aqui descritos e analisados estão relacionados, em sua maioria, à deficiência em conteúdos da Matemática Elementar. Assim, foi possível identificar, por meio das observações realizadas e descritas no tópico 5.3, e das respostas às atividades avaliativas de CDI I, que os alunos apresentam dificuldades ou falta de compreensão dos seguintes tópicos: divisão de 0 por 0; manipulações algébricas de expressões contendo raízes quadradas; propriedades de radiciação; significado de “infinito”; divisão de potências de mesma base; restrição de domínio de uma função; divisão de um número qualquer por 0; simplificação de frações algébricas; função trigonométrica; e manipulação de equações do 1.º grau.

Alguns dos temas destacados foram apontados em várias fases desta pesquisa: na revisão da literatura, no questionário de sondagem aplicado aos professores e no questionário de sondagem aplicado aos alunos. Isso mostra o quanto é importante que a base matemática dos alunos que ingressam no Ensino Superior seja avaliada, não para atribuir notas, mas para entender um pouco da visão e do conhecimento que cada um possui. Essa atitude pode servir para amenizar os efeitos que defasagens na Matemática Elementar têm potencial de causar no desenvolvimento de disciplinas presentes na graduação, no contexto dessa pesquisa, na de CDI I.

É importante destacar que a Análise de Erros, assim como uma abordagem de pesquisa, é também uma metodologia de ensino. O professor pode fazer uso dela quando notar dificuldades apresentadas pelos alunos que podem ser usadas em sala de aula para auxiliar no entendimento dos conteúdos (CURY, 2019). A discussão sobre o erro não se dá de forma simples e fácil, mas é papel daquele que leciona propiciar

> [...] aos futuros docentes de Matemática a oportunidade de olharem seus próprios erros, para, com base em uma discussão sobre eles, retomarem os conteúdos nos quais apresentam dificuldades que, se não superadas, somente servirão para alimentar novas ocorrências de erros por parte de seus futuros alunos. (CURY, 2019, p. 92).

Não existe uma receita ou fórmula mágica que ensina como lidar com tantos erros e problemas descobertos, tantas defasagens presentes no entendimento dos conteúdos básicos. Contudo, Cury (2004, p. 135) afirma que "[...] podemos realizar experiências, tentativas de auxiliar os alunos a superarem seus próprios problemas". Cometer erros pode ajudar a reorganizar seu próprio conhecimento. Para isso, os professores precisam propor atividades que questionem as "certezas" (CURY, 2019).

Além disso, as concepções de David Tall e David Ausubel podem trazer grandes contribuições com relação à identificação da base que os alunos possuem a respeito da Matemática Elementar. Os dois autores apontam a principal influência que a falta de ancoragem nos conceitos matemáticos básicos pode causar: a não agregação de novos conteúdos na estrutura cognitiva do indivíduo. Para Ausubel, quando não existem *subsunçores* capazes de propiciar o aprendizado de novos conteúdos e dar significado a eles, não ocorre a Aprendizagem Significativa. Já para Tall, a mesma situação envolve os "já encontrados negativos", que são incapazes de gerar a raiz cognitiva. Na disciplina analisada, foi possível perceber a ausência ou dificuldade na formalização de muitos *subsunçores*/"já-encontrados", que seriam essenciais no desenvolvimento da compreensão de boa parte dos conceitos/cálculos de CDI I.

Pelas análises realizadas, pode-se pontuar que os alunos apresentaram várias lacunas em Matemática Básica que certamente influenciaram seus aprendizados em CDI I e que poderão ser ainda mais evidenciadas quando cursarem CDI II, pelo fato de ter Cálculo I como requisito. Essas lacunas também poderão "aparecer", novamente, quando os licenciandos precisarem lecionar esses conteúdos.

5.5 Análises das entrevistas

No dia 29 de abril de 2021, foi realizada a entrevista estruturada com o monitor da disciplina de CDI I, por meio de uma chamada de vídeo na plataforma *Google Meet*. Conforme foi descrito no subtópico 3.4.2 desta pesquisa, o roteiro de perguntas foi composto por sete questionamentos.

Após a explicação do objetivo da reunião, iniciou-se o momento de perguntas. É importante destacar que não houve gravação das falas, mas todas as respostas e observações foram devidamente registradas.

Primeiramente, o monitor relatou que ficou acordado com a professora da disciplina que ele disponibilizaria oito horas semanais para auxiliar os alunos, sendo seis horas para encontros síncronos e duas horas para atendimentos assíncronos, por meio do *WhatsApp*. Além disso, três foram os dias da semana escolhidos para esse suporte: terça, quarta e quinta.

Em seguida, com relação à primeira pergunta, que era sobre a procura pela monitoria, ele respondeu que, por semana, costumavam aparecer quatro alunos distribuídos nesses três dias disponíveis. Além disso, normalmente, eles não apareciam na quarta-feira, que era o dia da aula da disciplina, mas estavam mais presentes na terça.

Sobre a segunda pergunta, que abordava a frequência dos alunos na monitoria, foi respondido que, de forma geral, isso acontecia de maneira variada. Nem sempre eram as mesmas pessoas a procurar. Contudo, ele conseguiu observar com maior assiduidade a presença de uma das licenciandas da turma.

No que diz respeito à terceira pergunta, que estava relacionada com a regularidade em que aconteciam as buscas pelo auxílio do monitor, ele afirmou que isso ocorria de modo mais aleatório. Sendo atividade avaliativa ou não, a professora da disciplina sempre disponibilizava listas, e os alunos costumavam aparecer para esclarecer suas dúvidas e tentar resolver as questões propostas.

A quarta pergunta foi acerca dos tipos de dúvidas apresentadas de forma frequente pelos alunos que participavam da monitoria. Dentre as quatro opções de respostas, o monitor respondeu que eram sobre resoluções de exercícios apresentados pela professora, independente do fato de valer nota ou não.

A quinta pergunta também estava relacionada às dúvidas apresentadas, mas com o intuito de saber se estavam mais associadas com conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior. O monitor respondeu que, com certeza, a maioria era referente a conteúdos de Matemática do Ensino Básico. Com relação aos conteúdos novos, vistos na disciplina de CDI I, os questionamentos se davam mais pelos conceitos em si do que nas resoluções de questões. Por vezes, enquanto ele resolvia algum exercício, acabava esclarecendo algumas das dúvidas que surgiam.

Quando foi perguntado se ele conseguia destacar algum assunto específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos, bem como se identificava algum erro frequente cometido por eles, ele respondeu que sim. Destacou, principalmente, as manipulações em limites, quando as respostas chegavam a uma indeterminação ou impossibilidade. Os licenciandos também apresentavam dificuldades em fatoração de polinômios, radiciação, fatoração de uma função do segundo grau por meio das suas raízes e “regra de sinais”, quando aparecia o sinal de menos seguido por algum termo ou fração.

Silva e Martinez (2017), em suas experiências com alunos do Ensino Médio, relatam que é possível notar que as dificuldades mais frequentes não estão relacionadas aos conteúdos que estão sendo apresentados no momento, mas àqueles que são abordados nas séries anteriores. Por vezes, os alunos se sentem desmotivados com a Matemática, porque as defasagens conceituais decorrentes do Ensino Fundamental os impedem de acompanhar a explicação de temas novos.

> As lacunas conceituais na Matemática podem se manifestar de diversas formas como, a falta de raciocínio lógico matemático, o que implica inicialmente na dificuldade em resolver problemas que contemplam as operações básicas e posteriormente se estendendo para conceitos que envolvem maior nível de abstração e generalização de algoritmos. (SILVA; MARTINEZ, 2017, p. 3).

Com isso, é fundamental que os conceitos que, por algum motivo, não foram aprendidos anteriormente possam ser resgatados e revisados. (SILVA; MARTINEZ, 2017).

No Ensino Superior, não é diferente. Existe uma necessidade de revisitar assuntos que não foram assimilados anteriormente ou, até mesmo, propiciar um primeiro contato, já que esse encontro pode não ter acontecido no nível Básico de ensino.

Rezende (2003) comenta que há uma ausência de preparação para o ensino de Cálculo. Ele afirma que muitos problemas “clássicos” não são apresentados ou, quando isso é feito, é de maneira superficial por professores da Educação Básica. Como exemplo disso, destaca-se o estudo de funções crescentes, mas não o quanto elas crescem. Outras situações em que o “ritual” toma conta é na apresentação da área do círculo e na forma como dízimas periódicas são “transformadas” em frações.

A disciplina de Cálculo, historicamente, aborda áreas como Geometria e Aritmética, e tem grande influência no desenvolvimento da Matemática. Contudo, no Ensino Superior, resta-lhe o papel “desprezível”, como se não tivesse nenhum tipo de relação com as outras disciplinas presentes na grade curricular do curso de graduação em questão. Muitos professores, inclusive, afirmam que não precisavam ter estudado Cálculo durante a formação, visto que não ensinariam nenhum dos conceitos ali aprendidos durantes as aulas na escola básica (REZENDE, 2003). Sobre isso, o autor ainda afirma que o Cálculo está presente em diversas situações do "mundo real": problemas de cálculo de juros ou de crescimento populacional, velocidades ou taxas de variação de grandezas, interpretações gráficas e problemas de otimização. Essas habilidades são quesitos importantes para exercício da cidadania.

O monitor entrevistado também destacou que, às vezes, não é só uma falha da Educação Básica, mas existem coisas que o aluno só percebe depois de certo amadurecimento acadêmico. Como exemplo, ele disse:

> *Quando tem um limite tendendo a um valor e a resposta dá $\frac{0}{0}$, significa que esse valor é a raiz dos dois polinômios. Então, com certeza, quando fatorar, esses polinômios terão fatores iguais. Essa dúvida é de Matemática Básica, que é sobre fatoração, mas é uma coisa que você talvez não pense no Ensino Médio, mesmo que já tenha estudado polinômios. E aí, só no Ensino Superior que o aluno vai perceber ou o professor vai passar. É uma dúvida natural. Ele só aprenderia em Cálculo mesmo.* (Monitor).

Normalmente, o aluno costuma repetir algoritmos padronizados que podem não contribuir com a construção do pensamento matemático. Nesse caso citado pelo monitor, por mais que o aluno saiba o que significa um número ser raiz do polinômio, ele pode não perceber essa influência em uma resposta que gere indeterminação. Isso tem relação com o fato de generalizações e abstrações estarem situadas no Mundo Formal Axiomático, como definido por Tall, e se essa área foi pouco ou nunca explorada anteriormente, a falta de compreensão se faz presente durante o desenvolvimento de conteúdos matemáticos (LIMA, 2007).

As falas do monitor corroboram com diversas ideias já comentadas no decorrer deste texto monográfico. Ainda que os alunos buscassem, frequentemente, o auxílio oferecido na monitoria, as dúvidas mais recorrentes não eram de conteúdos especificamente do Cálculo, mas sim dos que são, teoricamente, abordados no Ensino Básico.

Cury e Cassol (2004) ressaltam o quanto é importante que o ensino de Cálculo seja repensado nas universidades, seja mudando metodologias ou utilizando recursos variados. Além disso, disponibilizar horários de atendimento individual também pode ajudar a desenvolver atividades que sejam mais focadas em disciplinas matemáticas iniciais. Esse atendimento pode ser feito por monitores, bolsistas de Iniciação Científica e, até mesmo, alunos de mestrado (CURY; CASSOL, 2004). Com isso, percebe-se o papel importante que a monitoria tem em auxiliar os graduandos.

No dia 18 de maio de 2021, foi realizada a entrevista com a professora da disciplina de CDI I, que neste texto é identificada como, por meio de uma chamada de vídeo na plataforma *Google Meet*. Como foi descrito no subtópico 3.4.2 desta pesquisa, o roteiro foi composto por sete perguntas.

Primeiramente, foi explicado o objetivo da entrevista. Em seguida, iniciou-se o momento de perguntas. É importante destacar que, novamente, não houve gravação das falas. Entretanto, todas as respostas e observações foram devidamente registradas.

Logo no começo, foi perguntado se essa era a primeira vez que a professora lecionava a disciplina de CDI I. Ela respondeu que não, que foi a segunda vez, e destacou que ambas as oportunidades foram no curso de Licenciatura em Matemática.

A segunda pergunta estava relacionada às principais causas de reprovação nessa disciplina. Dentre as opções disponíveis, e com base na sua visão, ela destacou que as maiores influências para esse fato são: dificuldades em assuntos de Matemática da Educação Básica e falta do hábito de estudar.

Sobre isso, Cury e Cassol (2004) apresentam como hipótese o fato de que os alunos não têm o costume de pesquisar em livros e materiais, ficando sempre à espera que o conteúdo lhe seja apresentado. Dessa forma, os exemplos resolvidos em aula são, para eles, suficientes e as dúvidas e os questionamentos que surgem quando estudam sozinhos não são discutidas e analisadas. Isso se soma à outra realidade: assim que recebe de volta suas atividades com correções e comentários, não consegue compreender os erros cometidos nem refletir acerca de sua própria construção do conhecimento (CURY; CASSOL, 2004). As autoras sugerem, então, que haja uma mudança na metodologia utilizada, com o intuito de "[...] desafiar os estudantes, propondo atividades motivadoras, que lhes despertem o interesse pelo estudo, pela realização das tarefas propostas, pelo monitoramento de sua própria cognição." (CURY; CASSOL, 2004, p. 34).

Não é fácil mudar certos tipos de comportamentos que já são considerados hábitos na sala de aula, então tanto o aluno quanto o professor têm dificuldades em assumir outras funções. Geralmente, acredita-se que o estudante aprende quando recebe os conteúdos e mostra o entendimento do que foi explicado ao resolver exercícios e atividades avaliativas. Da mesma forma, o aluno não assume um compromisso de se empenhar para construir o seu próprio conhecimento e acha que “recebê-lo pronto” significa ter aprendido (CURY; CASSOL, 2004).

Com relação à terceira pergunta, que era sobre as dúvidas apresentadas pelos alunos e se eram referentes a conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior, a professora respondeu que são mais do Ensino Básico. Também complementou dizendo que, como os alunos não tinham costume de perguntar durante as aulas ou por e-mail, as dúvidas foram mais observadas pelas respostas nas atividades. Poucos foram os que entraram em contato com ela para esclarecer alguma dificuldade. Destacou, por fim, que não esperava uma turma tão quieta como essa, o que também acabou sendo reforçado pelo ensino remoto. Na turma de Cálculo II, a dinâmica foi completamente diferente e os alunos perguntavam muito. Com isso, ela costumava agendar plantões de dúvidas com eles, o que não aconteceu com a turma de Cálculo I.

Na quarta pergunta, o assunto era sobre o apoio oferecido pelo monitor e se ela considerava suficiente para esclarecer as dúvidas pendentes. A entrevistada disse que nessa turma, especificamente, que era pequena, e com 8h de atendimento do monitor, ela acreditava que sim. A respeito do desempenho dessa turma em CDI I, ela pontuou como “bom”.

A sexta pergunta abordava a concepção da professora com relação aos erros cometidos pelos alunos. Sobre isso, ela afirmou que tem feito algumas leituras recentemente e pensa que os erros podem ser, sim, uma oportunidade de aprendizagem. A professora declarou também que, no ensino presencial, muitas vezes o professor não volta com o *feedback* para os alunos, e no ensino remoto isso ficou mais evidente. Ao justificar a nota, o professor precisa indicar o que está errado e o porquê. Quando ele coloca o *feedback*, o aluno pode refletir, já que está com a prova e as observações feitas pelo docente. Dessa forma, é possível entender melhor o motivo do erro.

> *Às vezes, ao indicar o que está errado, o professor acaba rasurando a resposta do aluno. O feedback no ensino remoto não é completo, porque não dava pra escrever todos os detalhes. Então, era uma oportunidade de reconhecer o erro e ajudar na aprendizagem.* (Professora).

Ela completou dizendo que, ao mesmo tempo, esses retornos dão muito trabalho e, em uma turma muito grande, fica difícil colocar todas essas informações. Ela também disse que queria ter separado um tempo na aula para conversar com todos da turma sobre os erros por eles cometidos. Como não foi possível, na primeira aula da disciplina de Cálculo II, ela vai apresentar essas situações encontradas em Cálculo I e discutir a respeito.

Sobre essa temática, Bortoli (2011) considera que quando o aluno se questiona a respeito do que aprendeu, se as suas respostas têm alguma lógica e os resultados obtidos fazem sentido ao problema abordado, ele tem a possibilidade de conquistar habilidades que são importantes para melhorar sua aprendizagem de conteúdos em Matemática. O autor também afirma que analisar as respostas dadas em atividades avaliativas pode proporcionar uma revisão dos conteúdos em que os estudantes apresentam maiores dificuldades.

Diante disso, destaca-se a importância de se trabalhar os erros cometidos pelos alunos. Caso contrário, isso poderá fomentar um círculo vicioso capaz de gerar reprovações e desistências, principalmente porque na maioria das aulas de Matemática, o sucesso do estudante é associado às suas notas e desempenhos em avaliações individuais (BORTOLI, 2011).

A sétima e última pergunta era sobre os erros mais frequentes apresentados e se estavam relacionados à Matemática Básica ou aos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I. A professora respondeu que foram erros relacionados a conteúdos da Matemática Básica e falta de atenção.

> *Erros fáceis de serem corrigidos, porque o aluno logo compreendia onde havia errado.* (Professora).

Além disso, destacou os seguintes conteúdos de Matemática Básica: operações com frações (o mais frequente de todos), operações com radicais, fatoração, potenciação, funções trigonométricas. Especificamente da disciplina de CDI I, citou erros em cálculos de derivadas, com ênfase em dificuldades nas regras de derivação, principalmente a regra da cadeia.

Cury (2019) acredita que em disciplinas como a de Cálculo, especificamente, o entendimento dos conceitos é a parte mais fundamental. Contudo, também é verdade que sem a técnica, o aluno acaba não tendo ferramentas o suficiente para manipular esses conceitos. E, aparentemente, a capacidade de lidar com essas regras para cálculos de limites, derivadas e integrais vem sendo prejudicada pela ausência de habilidades em operações e propriedades básicas (CURY, 2019).

Ao final, a entrevistada observou o fato de a turma ter sido pequena e destacou que os alunos, geralmente, são “pré-selecionados” pela disciplina de FM I, requisito de CDI I.

> *Os alunos que cursaram agora já não têm tantas dificuldades quanto os que ficaram retidos em Fundamentos I. Especialmente, essa turma foi bem atípica, porque as turmas de Cálculo costumam ser maiores.* (Professora).

A professora também achou relevante registrar que alguns alunos que estavam na turma já haviam cursado esse componente curricular antes, em outros cursos de graduação.

É importante analisar as respostas dadas nas entrevistas, porque são de pessoas que estiveram em contato direto com os alunos durante o período de aulas. Além disso, é válido destacar como muitas das falas e observações, feitas tanto pelo monitor quanto pela professora, evidenciam as dúvidas e os erros apresentados em assuntos que já foram discutidos no tópico 5.4.

No capítulo 3 desta pesquisa, encontra-se um teste de sondagem proposto a alguns professores que já lecionaram a disciplina de Cálculo I. Os participantes também indicaram conteúdos como fatoração de polinômios e funções trigonométricas dentre aqueles que os alunos mais apresentam dificuldades, reforçando a importância deles no aprendizado dos conceitos de CDI.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática Elementar é fundamental durante o processo de formação, e apesar desse termo ser usado para designar a Matemática vista no Ensino Básico, isso não significa que os conteúdos previstos sejam de simples compreensão, mas sim, que eles funcionam como uma base (âncora) para os que poderão vir a ser estudados posteriormente.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral está presente em muitas graduações e vem sendo alvo de pesquisadores que desejam entender o porquê de ela ter altos índices de reprovação. Uma das abordagens defende a ideia de que a defasagem em conteúdos matemáticos elementares pode influenciar na compreensão dos temas específicos abordados nessa disciplina, pois antes de saber lidar com as deduções e generalizações, o aluno precisa estar munido das habilidades que envolvem propriedades e operações básicas.

A Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, e a Teoria dos Três Mundos Matemáticos, de David Tall, apresentam algumas semelhanças, como o fato de abordarem a maneira que conceitos previamente fundamentados, os *subsunçores* ou "já-encontrados", são importantes para agregar novos conhecimentos à estrutura cognitiva, e de que forma isso acontece.

A metodologia de Análise de Erros ou Produções Escritas tem como objetivo explorar os registros dos alunos para compreender como certo conhecimento acaba se tornando um obstáculo para superar dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem.

As temáticas mencionadas anteriormente foram responsáveis por delinear todas as etapas deste trabalho, desde o planejamento à execução e análises finais.

Com relação aos objetivos específicos estipulados, o primeiro foi desenvolvido durante toda esta pesquisa, principalmente no capítulo 2. Por meio dos trabalhos utilizados no referencial teórico, notou-se que a disciplina de CDI é muito importante, não só para a área de Exatas, como também de outros campos, como Farmácia e Agronomia, por exemplo.

Pelo panorama traçado com relação ao ensino de CDI I, foi possível perceber que, com o passar do tempo, diversas modificações foram efetuadas na disciplina, que resultaram nas abordagens metodológicas que são realizadas nela hoje em dia. Inicialmente, seu ensino era pautado apenas na Álgebra, privilegiando o formalismo e a abstração. Contudo, à medida que o mau desempenho dos alunos que a cursavam foi sendo evidenciado e analisado por diversos pesquisadores, surgiu a preocupação de reavaliar seus métodos de ensino, buscando reduzir os altos índices de reprovação da disciplina. Dessa forma, outras perspectivas foram adicionadas aos seus conceitos, como a geométrica e a analítica.

Com relação ao panorama construído sobre o desempenho dos alunos que cursam a disciplina de CDI I no Brasil, pontua-se que muitos deles têm passado por diversas dificuldades na transição do Ensino Básico para o Ensino Superior. Sobretudo, essas dificuldades geralmente estão associadas à baixa qualidade da Educação Básica no Brasil e, consequentemente, às dúvidas de Matemática Elementar que perpassam os níveis de ensino, e ao nível de rigor que seus conceitos exigem, conforme relatado pelos autores utilizados no referencial teórico desta pesquisa.

Levando isso em consideração, pode-se afirmar que os resultados encontrados neste trabalho monográfico, por meio da coleta de dados, corroboram com as principais causas citadas anteriormente, que refletem o baixo desempenho dos alunos em CDI I.

Fazendo um comparativo entre os dados obtidos por meio do questionário de sondagem aplicado aos professores que já lecionaram ou lecionam a disciplina de CDI I, do questionário aplicado aos alunos do público-alvo, das observações realizadas durante as aulas do componente curricular CDI I, das análises das produções escritas dos alunos e das entrevistas realizadas com o monitor e a professora, foi possível destacar os tópicos da Matemática Básica mais recorrentes em que os graduandos apresentaram mais dificuldades: fatoração, simplificação e divisão de polinômios; manipulações algébricas com funções trigonométricas; manipulações algébricas de expressões contendo raízes quadradas; propriedades de radiciação; propriedades de potenciação; propriedades de logaritmo; frações; e “regra de sinais”.

A maioria dos tópicos selecionados para compor a delimitação do tema desta pesquisa surgiu em algum momento durante as aplicações realizadas. Isso evidencia a importância deles e as possíveis influências que uma falta de base neles pode gerar nos conceitos de CDI I. Tais tópicos estão de acordo com a percepção dos professores que participaram do questionário de sondagem, incluindo o de manipulações com raízes quadradas, que apesar de não ter sido um dos mais selecionados por eles, foi indicado por alguns. Os conteúdos descritos respondem ao segundo objetivo específico desta pesquisa, que visava apontar alguns dos conceitos da Matemática Básica em que os alunos apresentam mais dúvidas.

De modo geral, é válido ressaltar a importância de considerar todos os temas já citados, pois, mesmo que não tenham sido considerados no início da pesquisa, se mostram importantes quando são associados ao fato de terem sido observados no contexto do componente curricular Cálculo Diferencial e Integral I.

Pela análise dos dados da disciplina de Fundamentos de Matemática I, foi possível perceber que a transição feita do Ensino Básico para o Ensino Superior encontra-se prejudicada. O alto índice de retenção na disciplina pode estar associado ao fato de que muitos conhecimentos básicos não são dominados pelos alunos. Consequentemente, essa defasagem acaba refletindo na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Ainda que os percentuais de reprovação não sejam tão altos quanto de sua disciplina requisito (FM I), é notório que um erro na compreensão de conceitos elementares prejudica o entendimento de assuntos específicos do Cálculo, como foi o caso, apresentado nesta pesquisa, do cálculo de limites envolvendo radicais e funções trigonométricas. Essa percepção se encontra de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, que foi usada como referencial teórico nesta pesquisa.

Diante do exposto, pode-se afirmar que o objetivo geral desta pesquisa, que é: identificar de que forma a defasagem em tópicos da Matemática Elementar, abordados na Educação Básica, influencia o desempenho do aluno da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro nos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, foi cumprido.

Tendo em vista as observações e resultados obtidos nas análises descritas no decorrer desta pesquisa, destaca-se que trabalhar com a metodologia de Análise de Erros e Produções Escritas mostrou o quanto é necessário que os docentes estejam aptos a buscar maneiras de remediar as dificuldades e propiciar momentos de aprendizagem e descoberta por meio do erro. Quando os alunos têm a possibilidade de rever suas “certezas” e questionar as resoluções fornecidas em uma atividade, por exemplo, eles se tornam participantes ativos na construção dos conhecimentos que serão associados à sua estrutura cognitiva.

No caso de um curso de licenciatura, se essas dificuldades não são discutidas e superadas, é provável que existam ocorrências desses mesmos erros durante o exercício da docência, inclusive por parte dos futuros alunos. Diante disso, pesquisas que abordem erros de aprendizagem precisam estar presentes nos cursos de formação de professores de Matemática, visto que, ao analisar as maneiras como os alunos resolvem questões, há também uma reflexão sobre possíveis metodologias que podem ser usadas no exercício futuro da docência. Professores que veem o erro apenas com uma visão negativa, ignoram o fato de ele ser uma fonte de saberes que precisam de atenção, pois mesmo que incorreto, indica que o aluno possui algum conhecimento sobre o tema abordado.

Acredita-se que o trabalho desenvolvido possa gerar reflexões a respeito de como tem sido o ensino da disciplina de Cálculo I no curso em questão. Os trabalhos apresentados no capítulo 2 mostram que, mesmo diante de tantas mudanças ocorridas desde o desenvolvimento dos primeiros conceitos do Cálculo até os dias atuais, as práticas em sala de aula ainda privilegiam as técnicas no lugar do entendimento do conceito. De fato, essas técnicas são ferramentas importantes para lidar com as regras no cálculo de limites e derivadas, por exemplo. Contudo, considera-se mais importante a compreensão dos conceitos e como eles são importantes no processo de construção da própria Matemática.

No caso da Licenciatura em Matemática do IFFluminense *campus* Campos Centro, pode ser interessante elaborar uma disciplina optativa ou algum projeto de extensão voltado para a revisão de conceitos matemáticos que são aprendidos (ou deveriam ser) no Ensino Básico. Por mais que as disciplinas de Fundamentos de Matemática I, II, III e IV, previstas na ementa do curso, em partes, desenvolvam alguns dos tópicos apontados, existem conceitos mais elementares como operações numéricas e polinômios que, como mostrados por esta pesquisa, precisam de uma atenção especial por parte dos professores. E ainda existe o fato de que esses componentes curriculares estão distribuídos em quatro períodos. Como a disciplina de CDI I é ofertada no 2.º período, muitos conceitos que são considerados importantes para o estudo de limites e derivadas, ainda nem foram abordados durante as aulas. Se o aluno não teve contato com essas ideias enquanto estava nos ensinos Fundamental ou Médio, o processo de ensino e aprendizagem fica ainda mais conturbado. Não que isso retire a sua responsabilidade em se dedicar aos estudos e realizar pesquisas para além do que é oferecido em sala de aula, mas, talvez, o tempo não seja suficiente para “correr atrás do prejuízo” e ainda associar aos novos conteúdos que estão sendo inseridos em sua jornada acadêmica.

Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação do teste diagnóstico (Apêndice F) elaborado e que, infelizmente, não pôde fazer parte dos instrumentos de coleta de dados desta pesquisa. É importante que ele seja aplicado no início da disciplina de Cálculo I, devido ao seu objetivo de analisar quais são os conhecimentos básicos que os alunos possuem ao começar a cursar tal componente curricular. Além disso, também fica como sugestão um estudo mais aprofundado a respeito de como os obstáculos epistemológicos, inerentes à disciplina de Cálculo, podem influenciar o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina que está presente em diversos cursos de nível Superior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. Os “Mundos da Matemática” em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 907-934, ago. 2012. Disponível em: https://bit.ly/3upkapR. Acesso em: 11 ago. 2020.

ALMEIDA, M. V. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de David Tall**. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://bit.ly/31w9zMW. Acesso em: 6 jun. 2020.

ALVES, L. L. A importância da Matemática nos anos iniciais. *In*: **Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul XXII**, Curitiba, p. 1-10, jul. 2016. Disponível em: http://bit.ly/2LdFzxR. Acesso em: 2 dez. 2019.

ANDRÉ, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio**. 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: https://bit.ly/3ofzemi. Acesso em: 10 ago. 2020.

ANJOS, C. M.; SECAFIM, M. F. Dificuldades com a aprendizagem de Matemática na Educação Superior. **Colnspiração**: Revista de professores que ensinam Matemática, Mato Grosso, v. 1, n. 1, p. 1-14, jan./jun. 2018. Disponível em: http://bit.ly/2OKlOQE. Acesso em: 25 nov. 2019.

ARAÚJO, S. A. **Ensino de radiciação com o uso do GeoGebra**. 2019. 184 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3xCBxFa. Acesso em: 21 jun. 2021.

ASSUDE, T. Análise da transposição didática: um exemplo com a raiz quadrada. **Bolema**, Rio Claro, v. 7, n. 8, 1992. Disponível em: https://bit.ly/3wV6swt. Acesso em: 15 jun. 2021.

BORGES, B. A. **O infinito na matemática**. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://bit.ly/3gJfqaG. Acesso em: 20 jun. 2021.

BORGES, W. A.; OLIVEIRA, M. H. P. Vozes de alunos na resolução de potenciação com expoente negativo. *In*: VII CIBEM, 2013, Montevideo. **Actas do** [...]. Montevideo, 2013, p. 2590-2697. Disponível em: https://bit.ly/3d8DNw8. Acesso em: 20 jun. 2021.

BORTOLI, M. F. **Análise de erros em Matemática**: um estudo com alunos de Ensino Superior. 2011. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011. Disponível em: http://bit.ly/2uITc2O. Acesso em: 29 jan. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://bit.ly/2OannXp. Acesso em: 10 ago. 2021.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Matemática. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://bit.ly/3qke88Y. Acesso em: 22 jun. 2021.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: Um Estado do Conhecimento. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 25, n. 2, p. 39-55, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3inG72u. Acesso em: 6 de jun. 2020.

CARIELLO D.; CARVALHO, T. M. M.; RIBEIRO JUNIOR, P. C. E. Aplicações de Cálculo Diferencial às ciências naturais e humanas: exercícios de reflexão e curiosidades. *In*: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. **Anais** [...]. Salvador, 2010, p. 1-10. Disponível em: https://bit.ly/3iqhiTI. Acesso em: 1 jun. 2020.

CARMO, P. F.; IGLIORI, S. B. C. Noções de pensamento matemático avançado utilizados em pesquisas na área de educação matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 109-120, 2017. Disponível: https://bit.ly/3iorPyt. Acesso em: 6 jun. 2020.

CASAVOTTO, M. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo**: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://bit.ly/38QYF6E. Acesso em: 29 jan. 2020.

COSTA NETO, A. D. **O ensino e a aprendizagem de Cálculo 1 na universidade**: entender e intervir. 2017. 141 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://bit.ly/2DEtwsV. Acesso em: 2 jun. 2020.

CURY, H. N. Análise de erros e formação de professores: sugestões para ensino e pesquisa em cursos de Licenciatura em Matemática. **Contexto e Educação**, Editora Unijuí, n. 76, p. 95-113, jul./dez. 2006. Disponível em: https://bit.ly/3db8qB1. Acesso em: 23 jan. 2020.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. 1. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, jan./jun. 2004. Disponível em: https://bit.ly/3f5RA8f. Acesso em: 5 abr. 2021.

CURY, H. KONZEN, B. **Classificação e análise de erros em álgebra**. Disponível em: https://bit.ly/3gSBrUA. Acesso em: 21 jun. 2021.

DARROZ, L. M. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 25, n. 2, p. 577-580, maio/ago. 2018. Disponível em: http://bit.ly/2viQQYP. Acesso em: 23 jan. 2020.

DEIMLING, N. N. M.; SILVA, D. C. Evasão nos cursos de formação de professores: o caso de um curso de Licenciatura em Química. **Atos de Pesquisa em Educação**, Blumenau, v. 14,

n. 2, p. 815-840, out./nov. 2019. Disponível em: https://bit.ly/2DsDrC4. Acesso em: 2 jun. 2020.

DIOGO, M. G. V. S. **Uma abordagem didático-pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I na formação de professores de Matemática**. 2015. 257 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015. Disponível em: https://bit.ly/3gIMXiH. Acesso em: 5 ago. 2020.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análises das dificuldades apresentadas pelos alunos no Ensino Médio em trigonometria. *In*: **Congresso Nacional de Educação X**, Curitiba, 2011, p. 4408-4421. Disponível em: https://bit.ly/3itHUGH. Acesso em: 8 jun. 2021.

DISTLER, R. R. Contribuições de David Ausubel para a intervenção psicopedagógica. **Revista Psicopedagogia**, São Paulo, p. 191-199, 2015. Disponível em: http://bit.ly/39m9QnZ. Acesso em: 29 jan. 2020.

DONEL, M. L. H. **Dificuldades de aprendizagem em Cálculo e a relação com o raciocínio lógico formal**: uma análise no Ensino Superior. 2015. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Marília, 2015. Disponível em: https://bit.ly/2PQWFE1. Acesso em: 10 fev. 2020.

DÖRR, R. C. **Análise de aprendizagens em Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017. 273 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: http://bit.ly/38jJN0K. Acesso em: 10 fev. 2020.

DOXSEY, J. R.; DE RIZ, J. Metodologia da pesquisa científica. **ESAB - Escola Superior Aberta do Brasil**, 2002-2003. Disponível em: http://bit.ly/39kywgs. Acesso em: 29 jan. 2020.

FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://bit.ly/2TXW5JS. Acesso em: 23 jun. 2021.

FERREIRA, J. C.; PIERMATEI FILHO, O. Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: imagem de conceito e definição de conceito. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática XI, 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba, 2013, p. 1-15. Disponível em: https://bit.ly/3rWgpXp. Acesso em: 10 ago. 2020.

FERRUZZI, E. C. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos superiores de Tecnologia**. 2013. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em: http://bit.ly/2YbLnxl. Acesso em: 12 nov. 2019.

FLORES, J. B. **Monitoria de Cálculo e processo de aprendizagem**: perspectiva à luz da sociointeratividade e da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Tese (Doutorado em Educação em Ciência e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Disponível em: https://bit.ly/3mqOptI. Acesso em: 30 out. 2020.

GERHARDT, T. E. Estrutura do projeto de pesquisa. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. cap. 2, p. 65-87. Disponível em: http://bit.ly/2qYqiKL. Acesso em: 28 out. 2019.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007. Disponível em: http://bit.ly/36nPsAO. Acesso em: 15 jan. 2020.

GOMES, K. A. **Indicadores de permanência na Educação Superior**: o caso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. 2015. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Universitário La Salle, Canoas, 2015. Disponível em: http://bit.ly/38hNeF6. Acesso em: 10 fev. 2020.

GÜNTHER, H. **Como elaborar um questionário** (Série: Planejamento de Pesquisa nas Ciências Sociais). Brasília: Laboratório de Psicologia Ambiental, 2003. Disponível em: http://bit.ly/2RHj0UQ. Acesso em: 15. jan. 2020.

HOLANDA, D. S.; CUNHA, K. S.; SILVA, J. M. **Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função de uma variável real**. 2015. Disponível em: https://bit.ly/3qm1S80. Acesso em: 23 jun. 2021.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 6**: complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 2**: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar, 8**: limite, derivadas, noções de integral. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Relatório SAEB [**Recurso eletrônico**]. Brasília, 2020. Disponível em: https://bit.ly/3sd1AkJ. Acesso em: 20 mai. 2021.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. 1991. Disponível em: https://bit.ly/3j4Z5OU. Acesso em: 22 jun. 2021.

LIMA, G. L. **A disciplina de cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo**: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994. 2012. 631 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://bit.ly/2zLee3W. Acesso em: 1 jun. 2020.

LIMA, G. L. O ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática XI, 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba, 2013, p. 1-15. Disponível em: https://bit.ly/2XMGqvM. Acesso em: 7 jun. 2020.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no Ensino Médio**: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://bit.ly/2Y81Y5T. Acesso em:

5 ago. 2020.

LUZ, V. M. **Introdução ao Cálculo**: uma proposta associando pesquisa e intervenção. 2011. 161 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: https://bit.ly/2SpV90j. Acesso em: 1 jun. 2020.

MARTINS, E. S.; ARAÚJO, D. J. G.; OLIVEIRA, R. F. Ensino e aprendizagem de Cálculo I em cursos de Licenciatura: limites e possibilidades. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 18-32, 2016. Disponível em: https://bit.ly/3gPrYNy. Acesso em: 6 jun. 2020.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, p. 64-74, jan./mar. 2016. Disponível em: https://bit.ly/30Huf5l. Acesso em: 6 ago. 2020.

MATHIAS, C. E. M. Ourobóros: o fracasso das disciplinas de Matemática Básica e Pré-Cálculo nas universidades brasileiras. **Jornal Dá Licença**, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2DLmJ0u. Acesso em: 6 ago. 2020.

McCLELLAND, J. A. G. Técnica de questionário para pesquisa. Revista Brasileira de Física, São Paulo. *In*: III Simpósio Nacional de Ensino de Física, 1973, São Paulo. **Atas do** [...], n. 1, jul. 1976. Disponível em: http://bit.ly/38AtlsB. Acesso em: 15 jan. 2020.

MINAYO *et al.* **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. Disponível em: http://bit.ly/2unerqN. Acesso em: 16 jan. 2020.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: E.P.U., 2017.

OLIVEIRA, A. S. V. **O ensino do cálculo diferencial e integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904**: uma análise documental. 2004. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004. Disponível em: https://bit.ly/2zUvALB. Acesso em: 2 jun. 2020.

OLIVEIRA, A. T.; PALIS, G. D. L. R. O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de Matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 14, n. 3, p. 335-359, nov. 2011. Disponível em: https://bit.ly/3isRN7m. Acesso em: 25 mai. 2021.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades na construção de gráficos de funções**. 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. Disponível em: https://bit.ly/3zO7CMl. Acesso em: 23 jun. 2021.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim GEPEM**, n. 61, p. 125-137, jul./dez. 2012. Disponível em: https://bit.ly/2DTD2bl. Acesso em: 7 jun. 2020.

OTTO, M. C.; DIONIZIO, F. A. Q.; BRANDT, C. F. O papel das crenças e emoções no desenvolvimento da afetividade em relação à Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Tangram - Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 2, n. 2, p. 3-24, 2019. Disponível em: http://bit.ly/2RkjvFi. Acesso em: 17 jan. 2020.

PEREIRA, L. M. C. **A noção de infinito na educação básica**: reflexões e proposta. 2015. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2015. Disponível em: https://bit.ly/35M7S0e. Acesso em: 20 jun. 2021.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino de matemática elementar. 2. ed. Campinas: Papirus, 2000.

PORTES, D. S.; ALVES, G. M. O estudo das operações de polinômios com material concreto. *In*: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. [**Recurso eletrônico**]. Paraná, v. 1, 2014. Disponível em: https://bit.ly/34Z1QsK. Acesso em: 8 jun. 2021.

RAFAEL, R. C. **Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação. 2017. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017. Disponível em: https://bit.ly/2XR7tFy. Acesso em: 2 dez. 2019.

RAMOS, M. L. P. D. A importância da análise didática dos erros matemáticos como estratégia de revelação das dificuldades dos alunos. **Revemat**, Florianópolis, v.10, n. 1, p. 132-149, 2015. Disponível em: https://bit.ly/3zGeBqf. Acesso em 20 jun. 2021.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. O uso do erro como estratégia didática: uma nova perspectiva na reconstrução do conhecimento. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 84-102, 2014. Disponível em: http://bit.ly/3aM9cS5. Acesso em: 27 jan. 2020.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível: https://bit.ly/2Xs5E2S. Acesso em: 1 jun. 2020.

ROSA, C. M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. Desempenho acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, Campinas, v. 5, p. 1-16, 2018. Disponível em: https://bit.ly/3v9e7Gy. Acesso em: 2 jun. 2020.

SANTOS, G. M. T. **O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I**. 2014. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Universitário La Salle, Canoas, 2014. Disponível em: https://bit.ly/3gM0PZm. Acesso em: 2 jun. 2020.

SILVA, B. A. da. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011. Disponível em: https://bit.ly/3iquA2i. Acesso em: 6 ago. 2020.

SILVA, B. A.; LIMA, G. L. Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 43, p. 88-11, 2015. Disponível em: https://bit.ly/3ytagpt. Acesso em: 5 ago. 2021.

SILVA, R. S.; MARTINEZ, M. L. S. Dificuldades na Matemática Básica: o processo de ensino-aprendizagem para a vida. *In*: **Congresso Nacional de Educação XIII**, p. 11839-11850. 2017. Disponível em: http://bit.ly/39n76qs. Acesso em: 10 fev. 2020.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. cap. 2, p. 31-42. Disponível em: http://bit.ly/2qYqiKL. Acesso em: 28 out. 2019.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Os Três Mundos da Matemática a atividades de modelagem matemática nos anos iniciais. *In:* CIBEM VII, 2013, Montevideo. **Actas do** [...]. Montevideo, 2013. Disponível em: https://bit.ly/3vdF6kA. Acesso em: 8 ago. 2020.

SOUZA, J. P. de. **Análise de erros em Cálculo**: metodologia de investigação aplicada com alunos da UFOPA. 2019. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019. Disponível em: https://bit.ly/31F3zBu. Acesso em: 5 jun. 2020.

TEIXEIRA, S. C. **Possibilidades para melhorar o desempenho dos acadêmicos na disciplina de Cálculo**. 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019. Disponível em: http://bit.ly/2OGPw9i. Acesso em: 2 dez. 2019.

VIEIRA, G. A.; ZAIDAN, S. Estratégias de ensino em Matemática para turmas heterogêneas. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 3, 2016. Disponível em: https://bit.ly/3itk6CF. Acesso em: 8 jun. 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário de sondagem aplicado aos professores

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de uma pesquisa educacional, que tem como tema a defasagem em Matemática Básica oriunda dos alunos que ingressam em cursos de Ensino Superior e como isso influencia nas disciplinas de Cálculo. A pesquisa é promovida por Alice Pereira Stellet de Menezes e Lethícia Emily Cardoso Fernandes, alunas do curso de Licenciatura em Matemática do IF Fluminense *campus* Campos Centro, sob orientação do professor Tiago Destéffani Admiral. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Sua colaboração é indispensável para este trabalho. Desde já, agradecemos pela participação!

QUESTIONÁRIO

Nome: ____

Professor(a) do(s) curso(s): ____

Disciplina(s) em que leciona: ____

Abaixo, encontram-se alguns temas da Matemática Básica considerados (pelas alunas autoras desta pesquisa) pré-requisitos para que o aluno se matricule nas disciplinas de Cálculo em seu curso de graduação. Em seguida, estão listados cinco parâmetros que representam o grau de dificuldade que os alunos apresentam em tais habilidades, sendo: **1** – nenhuma dificuldade, **2** – dificuldade pontual, **3** – dificuldade moderada, **4** – dificuldade alta e **5** – extrema dificuldade.

De acordo com a sua percepção, analise os temas dispostos e marque o parâmetro que representa o grau de dificuldade que os alunos costumam apresentar no desenvolvimento destes conteúdos.

Habilidades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Determinar Domínio de Funções					
Divisão de Polinômios					
Fatoração de Polinômios					
Propriedades de Potenciação e Radiciação					
Propriedades de Logaritmo					
Gráfico de Funções					
Operações com Frações Algébricas					
Continuidade e Descontinuidade de Funções					
Relacionar Identidades Trigonométricas					

Existe outro tema, não destacado, que você considera de grande relevância para esta pesquisa? Se sim, qual? Além disso, qual parâmetro você estabeleceria para esse conteúdo?

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

*

Prezado(a) licenciando(a):

Nós somos Alice e Lethícia, alunas do curso de Licenciatura em Matemática no IFFluminense *campus* Campos Centro. Estamos realizando uma pesquisa sob orientação do Professor Dr. Tiago Destéffani Admiral, cujo objetivo é analisar a defasagem em alguns tópicos da Matemática Elementar apresentada por alunos que estão matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I). Posteriormente, pretendemos abordar de que forma isso influencia na aprendizagem dos conteúdos específicos de CDI I.

Para a referida pesquisa, solicitamos a sua participação. Esta envolverá responder a um questionário e dois testes diagnósticos (um no início da sua participação e outro no encerramento da disciplina). O questionário visa obter informações a respeito do público-alvo. O teste diagnóstico inicial objetiva, por meio de questões, captar os seus conhecimentos a respeito de alguns conceitos elementares da Matemática; e, o teste final tem por função levantar dados sobre o seu desenvolvimento na disciplina de CDI I durante todo o período, fazendo uma correspondência com as respostas obtidas no primeiro teste. Para isso, novas questões serão abordadas.

Esclarecemos que sua participação nesse estudo é *voluntária*, portanto, terá absoluta liberdade de fazê-la ou não. Aos que decidirem participar, pedimos a compreensão e o apoio até o final do trabalho. Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo(a). Você não terá nenhum gasto nem ganho financeiro por participar da pesquisa. Com sua participação, você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico no tema abordado.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas por nós, por meio dos e-mails: **alice.stellet@gmail.com**, **lethiciacardosof@gmail.com** e **tdesteffani@gmail.com**.

Desde já, agradecemos pela sua colaboração na participação desta pesquisa.

○ Estou de acordo.

○ Não estou de acordo.

APÊNDICE C – Questionário de sondagem aplicado aos alunos

Questionário

Este questionário é um dos componentes de uma pesquisa educacional promovida por Alice Pereira Stellet de Menezes e Lethícia Emily Cardoso Fernandes, alunas do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense campus Campos Centro, sob orientação do professor Tiago Destéffani Admiral. Os resultados obtidos serão utilizados apenas para fins acadêmicos, sendo realçado que as respostas representam apenas a sua opinião individual. Não existem respostas certas ou erradas. Por isso, solicitamos que responda de forma espontânea e sincera a todas as questões. Agradecemos pela sua colaboração.

1) IDENTIFICAÇÃO

1. Nome completo: *

Sua resposta

2. Idade (somente números): *

Sua resposta

3. Sexo: *

- ◯ Feminino
- ◯ Masculino
- ◯ Prefiro não dizer

4. Cidade em que reside: *

Sua resposta

5. Período acadêmico matriculado (somente números): *

Sua resposta

6. Você cursou o Ensino Fundamental...: *

- ◯ Todo em escola particular
- ◯ Todo em escola pública
- ◯ A maior parte em escola particular
- ◯ A maior parte em escola pública
- ◯ Metade em escola pública e metade em escola particular

7. Você cursou o Ensino Médio...: *

- ◯ Todo em escola particular
- ◯ Todo em escola pública
- ◯ A maior parte em escola particular
- ◯ A maior parte em escola pública
- ◯ Metade em escola pública e metade em escola particular

8. Ano de conclusão do Ensino Médio (somente números): *

Sua resposta

9. Possui emprego? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

9.1. Caso tenha respondido "sim" na pergunta anterior, qual é o turno em que trabalha?

Sua resposta

2) VIDA ACADÊMICA

10. Antes de entrar nesta graduação, você fez algum curso preparatório (pré-vestibular, entre outros)? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

11. Esta é a sua primeira graduação? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

11.1. Caso tenha respondido "não" na pergunta anterior, qual foi a outra graduação cursada?

Sua resposta

12. Você gosta da graduação que está cursando? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

12.1. Caso tenha respondido "não" na pergunta anterior, comente sobre.

Sua resposta

13. Você já escolheu a profissão que deseja exercer? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

13.1. Caso tenha respondido "sim" na pergunta anterior, está relacionada à graduação atual?

- ◯ Sim
- ◯ Não

14. No presente curso, já foi reprovado em uma ou mais disciplinas? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

15. Como você descreve o seu rendimento acadêmico na disciplina de Fundamentos de Matemática I? *

- ◯ Ruim
- ◯ Regular
- ◯ Bom
- ◯ Excelente

16. Fora do horário de aula, você possui hábitos de estudo? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

16.1. Caso tenha respondido “sim” na pergunta anterior, com que frequência?

- ◯ 1 vez por semana
- ◯ 2 a 3 vezes por semana
- ◯ 4 a 5 vezes por semana
- ◯ Diariamente

17. Você possui alguma estratégia de estudo? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

17.1. Caso tenha respondido “sim” na pergunta anterior, assinale abaixo a(s) que mais representa(m) o que você realiza:

- ☐ Leitura de livros didáticos
- ☐ Resolução de exercícios
- ☐ Uso de vídeo-aulas
- ☐ Elaboração de resumos
- ☐ Estudos em grupo
- ☐ Outro: ____________________

3) RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA

18. Pela escolha da graduação, subentende-se que você gosta de Matemática. Você sempre gostou dessa disciplina? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

19. As aulas de Matemática eram interessantes durante a sua vida escolar? *

- ◯ Nunca
- ◯ Raramente
- ◯ Às vezes
- ◯ Muitas vezes
- ◯ Sempre

20. Você já teve alguma frustração em relação aos resultados alcançados durante a sua aprendizagem em Matemática? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

20.1. Caso tenha respondido “sim” na pergunta anterior, essa frustração está relacionada com a não aprendizagem de algum conteúdo e/ou com a nota obtida? Comente sobre.

Sua resposta

21. Você percebe aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

22. Você consegue perceber alguma relação entre a Matemática estudada no Ensino Básico e a que é estudada no Ensino Superior? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

23. Você sente que possui alguma dificuldade em relação à Matemática Básica? (Compreende-se por "Matemática Básica" os conteúdos que são estudados nos Ensinos Fundamentais e no Ensino Médio, e servem de base para os conteúdos que serão vistos no Ensino Superior). *

- ○ Sim
- ○ Não

23.1. Caso tenha respondido “sim” na pergunta anterior, indique a(s) alternativa(s) abaixo que apresenta(m) o(s) conteúdo(s) no(s) qual(is) você sinta mais dificuldade:

- ☐ Potenciação
- ☐ Radiciação
- ☐ Logaritmo
- ☐ Frações algébricas
- ☐ Polinômios
- ☐ Funções
- ☐ Trigonometria
- ☐ Outro: ____________________

4) RELAÇÃO COM A DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

24. É a primeira vez que tem contato com a disciplina? *

- ○ Sim
- ○ Não

24.1. Caso tenha respondido “não” na pergunta anterior, explique de que forma teve contato com a disciplina anteriormente.

Sua resposta

25. Você acredita que a não aprendizagem de conteúdos matemáticos básicos pode acarretar dificuldades no desenvolvimento de conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I? Comente a sua resposta. *

Sua resposta

APÊNDICE D – Roteiro para entrevista com o monitor de CDI I

1. Em média, quantos alunos consultam a monitoria?

2. Você consegue identificar se são sempre os mesmos alunos que frequentam ou há uma frequência variada?

3. As consultas são regulares ou se intensificam às vésperas de atividades avaliativas?

4. Com relação aos tipos de dúvidas apresentadas, quais são mais frequentes:
(a) dúvidas com relação aos exercícios
(b) resolução de questões de atividades avaliativas
(c) resolução de exercícios propostos pela professora
(d) resolução de exercícios de livros

5. As dúvidas apresentadas pelos alunos estão mais relacionadas com conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior?

6. Você consegue destacar algum assunto específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos?

7. Você identificou algum erro frequente cometido pelos alunos? Estavam relacionados à Matemática Básica ou aos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I?

APÊNDICE E – Roteiro para entrevista com a professora de CDI I

1. Essa é a primeira vez que você leciona a disciplina de CDI I?

2. Para você, qual(is) é(são) a(s) principal(is) causa(s) de reprovações?
(a) falta do hábito de estudar
(b) excesso de faltas
(c) dificuldades em assuntos específicos do Cálculo
(d) dificuldades em assuntos de Matemática da Educação Básica

3. As dúvidas apresentadas pelos alunos estão mais relacionadas com conteúdos do Ensino Básico ou do Ensino Superior?

4. Você acredita que o apoio oferecido pelo monitor é suficiente para esclarecer as dúvidas pendentes?

5. Na sua visão, como foi o desempenho dessa turma em CDI I?

6. Qual é a sua concepção com relação aos erros cometidos pelos alunos?

7. Você identificou algum erro frequente cometido pelos alunos? Estavam relacionados à Matemática Básica ou aos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I?

APÊNDICE F – Teste diagnóstico

Esta atividade é um dos componentes de uma pesquisa acadêmica promovida por Alice Pereira Stellet de Menezes e Lethícia Emily Cardoso Fernandes, alunas do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense campus Campos Centro, sob orientação do professor Tiago Destéffani Admiral. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Portanto, solicitamos que responda de forma espontânea e sincera a todas as questões, justificando todas as suas respostas. Agradecemos pela sua colaboração e participação.

Nome completo: *

Sua resposta

Questão 1

1. (Mackenzie) O valor de $\frac{x^4-y^4}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$ para $x = 111$ e $y = 112$ é:

Adicionar arquivo

Questão 2

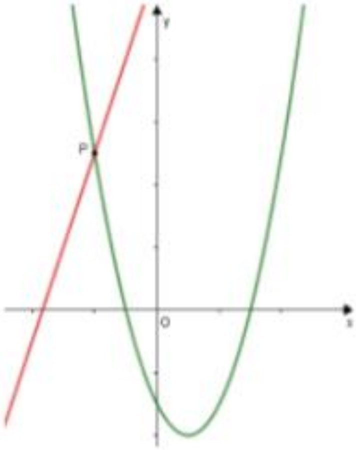
2. (UFPR) Sabendo que o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 + 1$, é correto afirmar:

(a) $2a + b = -2$ **(b)** $a + 2b = \frac{1}{2}$ **(c)** $a - 2b = 0$ **(d)** $2a - b = 3/4$ **(e)** $a - b = -1$

Adicionar arquivo

Questão 3

3. (Mackenzie - Adaptada) Na figura, estão representados os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 3x + 11$.



A soma da abscissa do ponto P com o valor mínimo de f(x) é:

(a) $-\frac{89}{4}$ **(b)** -4 **(c)** -2 **(d)** -6 **(e)** 3

Adicionar arquivo

Questão 4

4. Se $log\ 2 = 0,301$, determine o valor da expressão $log\ 20 + log\ 40 + log\ 800$.

Adicionar arquivo

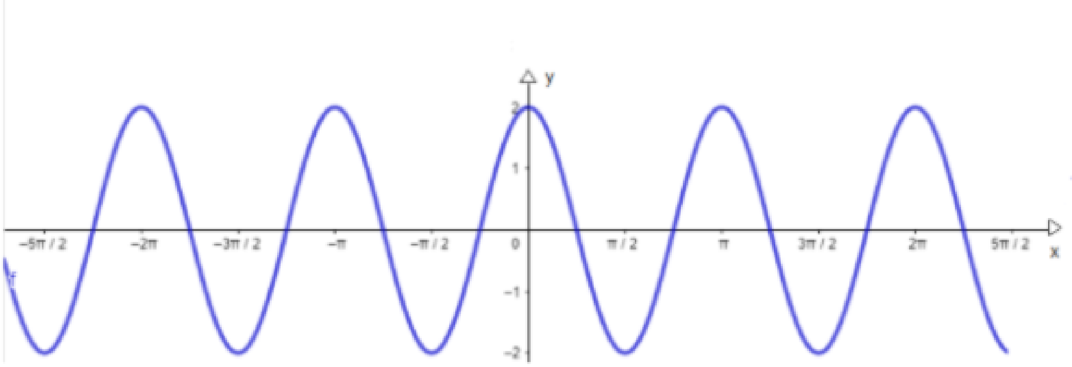
Questão 5

5. Mostre a seguinte identidade trigonométrica: $\frac{cotg^2 x}{1+cotg^2 x} = cos^2 x$.

Adicionar arquivo

Questão 6

6. Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico abaixo. Apresente seus cálculos.



Adicionar arquivo