MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHENNYFER PESSANHA DE SOUZA
LUCIANO CORRÊA SOARES

ARGUMENTAR PARA DEMONSTRAR: UM ESTUDO SOBRE AS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Campos dos Goytacazes/ RJ

Junho – 2021.2

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHENNYFER PESSANHA DE SOUZA

LUCIANO CORRÊA SOARES

ARGUMENTAR PARA DEMONSTRAR: UM ESTUDO SOBRE AS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade

Campos dos Goytacazes/RJ

Junho – 2021.2

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

S729a

Souza , Jhennyfer Pessanha de
ARGUMENTAR PARA DEMONSTRAR: UM ESTUDO SOBRE AS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS
/ Jhennyfer Pessanha de Souza , Luciano Corrêa Soares - 2022.
186 f.: il. color.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2022.
Referências: f. 127 a 132.

1. Argumentação matemática. 2. Demonstração formal. 3. Geometria . 4. Quadriláteros notáveis . I. Soares , Luciano Corrêa . II. Andrade, Ana Paula Rangel de , orient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
RUA DOUTOR SIQUEIRA, 273, PARQUE DOM BOSCO, CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ, CEP 28030130
Fone: (22) 2726-2903, (22) 2726-2906

PARECER N° 3/2022 - CACLMCC/DAESLCC/DIRESLCC/DGCCENTRO/REIT/IFFLU

8 de junho de 2022

JHENNYFER PESSANHA DE SOUZA

LUCIANO CORRÊA SOARES

ARGUMENTAR PARA DEMONSTRAR: UM ESTUDO SOBRE AS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 02 de junho de 2022.

Banca Examinadora:

Leandro Sopeletto Carreiro

Mestre em Matemática - PROFMAT / UENF

IFFluminense *Campus* Campos Centro

Mylane dos Santos Barreto

Doutora em Cognição e Linguagem / UENF

IFFluminense *Campus* Campos Centro

Ana Paula Rangel de Andrade (Orientador)

Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade / UCAM

IFFluminense *Campus* Campos Centro

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues (2163128)

COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Leandro Sopeletto Carreiro**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, **COORDENACAO ADJUNTA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA**, em 09/06/2022 20:46:14.
- **Mylane dos Santos Barreto**, **CHEFE - RPS - CADLMCC**, **COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA**, em 09/06/2022 18:29:02.
- **Ana Paula Rangel de Andrade**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, **COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA**, em 08/06/2022 22:51:44.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 08/06/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.iff.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 361495
Código de Autenticação: eafc11046c

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, a Deus por ter nos capacitado e dado força para trilhar o caminho que nos trouxe até aqui.

Aos nossos familiares e amigos pelo suporte e compreensão, permanecendo conosco durante toda essa etapa.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro que contribuíram, não apenas com ensinamentos acadêmicos, mas também com exemplos de vida.

À Profª. Dra. Mylane dos Santos Barreto por todo carinho e apoio ao longo da graduação, servindo de inspiração.

À banca examinadora deste trabalho, o Prof. Me. Leandro Sopeletto Carreiro e a Profª. Dra. Mylane dos Santos Barreto, pela disponibilidade e atenção empregada ao nosso trabalho.

À todos os alunos que frequentaram as monitorias, colaborando diretamente para nossa formação, motivando o desenvolvimento deste trabalho.

Em especial, à nossa orientadora, Profª. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade por todo o comprometimento e dedicação com esta pesquisa, sendo nossa admiração e inspiração na área da docência.

“Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo.”

Paulo Freire

RESUMO

De acordo com alguns documentos norteadores da Educação Básica, a argumentação matemática está associada a uma importante competência a ser desenvolvida nesta fase, que contribui para a formação crítico-social do educando, bem como para a compreensão das demonstrações. Apesar da importância de se trabalhar com a argumentação matemática, estudos evidenciam sua ausência nas salas de aula. Nesta perspectiva, esta pesquisa tem como objetivo geral investigar as contribuições de um estudo sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis, com base na argumentação matemática, para o processo de demonstração formal. Para alcançar tal objetivo, foi desenvolvida uma pesquisa de caráter qualitativo, do tipo intervenção pedagógica, contemplando as fases de planejamento, implementação e avaliação, com dez licenciandos do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação. Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: respostas dos alunos nas atividades, questionário de sondagem, observação, anotações no caderno de campo, gravação em áudio e entrevista semiestruturada. Empregou-se os níveis de argumentação matemática propostos por Balacheff para analisar as argumentações dos licenciandos. Embora a pesquisa tenha despertado o interesse dos licenciandos a respeito da temática, todos demonstraram dificuldade no processo de argumentação matemática, fato que pode ter sido propiciado pelo escasso trabalho com a argumentação no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Ressalta-se que a aplicação, no contexto remoto, dificultou a interação e o diálogo com os licenciandos. Diante do cenário desfavorável, vê-se a necessidade da inserção da prática argumentativa na Educação Básica, tendo em vista suas contribuições para a formação do educando.

Palavras-chave: Argumentação matemática. Demonstração formal. Geometria. Quadriláteros notáveis.

ABSTRACT

According to some documents that guide Basic Education, mathematical argumentation is associated with an important competence to be developed at this stage, which contributes to the critical-social formation of the student, as well as to the understanding of the demonstrations. Despite the importance of working with mathematical argumentation, studies show its absence in classrooms. In this perspective, this research has the general objective of investigating the contributions of a study on the properties of notable quadrilaterals, based on mathematical argumentation, to the process of formal demonstration. To achieve this objective, a qualitative research was developed, of the pedagogical intervention type, contemplating the planning, implementation and evaluation phases, with ten undergraduates from the first period of a Mathematics Licentiate course at a Federal Educational Institution. The data collection instruments used were: student responses to activities, survey questionnaire, observation, notes in the field notebook, audio recording and semi-structured interview. The levels of mathematical argumentation proposed by Balacheff were used to analyze the students' arguments. Although the research has aroused the interest of undergraduates on the subject, all of them showed difficulty in the process of mathematical argumentation, a fact that may have been caused by the scarce work with argumentation in Elementary School and High School. It is noteworthy that the application, in the remote context, made interaction and dialogue with the undergraduates difficult. Faced with the unfavorable scenario, there is a need to insert the argumentative practice in Basic Education, in view of its contributions to the education of the student.

Keywords: Mathematical argumentation. Formal demonstration. Geometry. Notable quadrilaterals.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A argumentação matemática está associada a uma importante competência a ser trabalhada na Educação Básica, tendo em vista sua contribuição para a formação crítico-social do aluno, bem como para o processo demonstrativo.

A motivação para a escolha desse tema surgiu da observação de um dos autores deste trabalho que, ao atuar na monitoria da disciplina Geometria I, durante cinco períodos, constatou que a maioria dos alunos apresentava grande dificuldade nos conteúdos que necessitavam de demonstração matemática. Em algumas situações, os alunos, a partir da representação gráfica, visualizavam determinadas propriedades, porém não conseguiam justificá-las por meio de argumentos matemáticos.

Da mesma forma, Ordem (2015) observou o fraco desempenho dos estudantes do curso da Licenciatura em Ensino de Matemática, na disciplina de Geometria Plana. Em sua tese, ele ressalta que: "As dificuldades eram tremendas quando era pedido aos estudantes que produzissem demonstrações de algumas propriedades geométricas da escola básica" (ORDEM, 2015, p. 23).

Além disso, os autores desta monografia observaram que, enquanto alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, raramente foi trabalhada, em sala de aula, a argumentação matemática ou qualquer tipo de prova, o que pode corroborar as dificuldades enfrentadas pelos alunos recém-chegados ao curso de Licenciatura em Matemática. Rosale (2017) afirma que essa grande dificuldade é comum a muitos alunos, especialmente quando se trata de uma argumentação que necessita de uma linguagem formal.

De acordo com Amorim (2017), diversas vezes o ensino da Matemática fica restrito à mecanização e à memorização de fórmulas. Segundo esta autora, em Álgebra e, principalmente, em Geometria, o trabalho com provas, demonstrações de teoremas ou propriedades deixa muito a desejar. "De modo geral, o resultado a que se chega pode ser comparado a um 'passo de mágica', em virtude da falta de explicação de 'como se chega a tal resultado'" (AMORIM, 2017, p. 14, grifo do autor).

Para Aguilar e Nasser (2012) e Rosale (2017), a habilidade de argumentar em Matemática favorece não apenas o desenvolvimento matemático, mas também a formação do indivíduo que tende a compreender o mundo de forma mais crítica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), por sua vez, salienta que o processo de argumentação matemática está vinculado ao desenvolvimento de competências ligadas ao raciocínio, sendo necessário que o aluno seja capaz de investigar, explicar e justificar, em conjunto com o professor e demais colegas de classe.

Em relação ao Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017) explicita como uma das competências específicas da Matemática: “[..]desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2017, p. 267).

Para Ferreira, Nasser e Vaz (2017), ações trazidas por esta competência não são muito observadas no ensino de Geometria. Segundo esses autores, a Geometria, durante anos, foi deixada em segundo plano, o que contribuiu para a carência de atividades que estimulem o raciocínio lógico e para a ausência do domínio do processo dedutivo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), a Geometria possui uma gama de situações-problema que favorecem o desenvolvimento da capacidade de argumentar, e desperta o interesse dos alunos de modo natural, sendo a prática argumentativa fundamental para a compreensão das demonstrações.

Nos termos de Almouloud (2020) "A demonstração ocupa um lugar central na matemática, pois é o método de prova cujo uso sistemático caracteriza esta disciplina entre as ciências” (ALMOULOUD, 2020, p. 540, tradução nossa).

Diante do que foi exposto acima, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições de um estudo sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis, com base na argumentação matemática, para o processo de demonstração formal?

Entende-se por demonstração formal ou prova formal:

> [...] uma sequência finita de afirmações onde a primeira é um axioma, cada uma das seguintes pode ser também um axioma ou uma afirmação deduzida de sentenças anteriores por meio do uso de regras de inferência, sendo a última o enunciado a ser provado (HANNA, 1990 apud COSTA, 2017, p. 51).

Para responder a essa questão de pesquisa, foi traçado o seguinte objetivo geral: investigar as contribuições de um estudo sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis com base na argumentação matemática para o processo de demonstração formal.

Para alcançar tal objetivo, traçou-se os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as dificuldades dos alunos participantes da pesquisa no processo de argumentação;
- Verificar o tipo de linguagem utilizada pelos alunos participantes da pesquisa no processo de argumentação;
- Promover diálogos e discussões entre os alunos participantes da pesquisa.

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é a qualitativa do tipo intervenção pedagógica. Pesquisas desse tipo são intervenções que envolvem o planejamento e a implementação de interferências, assim como a avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI, 2013).

O público-alvo são alunos do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação e os instrumentos de coleta de dados são: respostas dos alunos nas atividades, questionário de sondagem, observação, anotações no caderno de campo, gravação em áudio e entrevista semiestruturada.

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo esta introdução, sendo os demais: Revisão da Literatura, Procedimentos metodológicos, Resultados e Discussão e as Considerações Finais, nesta ordem.

A Revisão de Literatura, segundo capítulo, está subdividida em quatro seções. A primeira discorre sobre a importância da argumentação matemática na Educação Básica, a segunda sobre o ensino da Geometria no Ensino Fundamental, a terceira sobre as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e as potencialidades do software Geogebra e a quarta sobre cinco trabalhos relacionados a esta pesquisa.

O terceiro capítulo refere-se aos procedimentos metodológicos e aborda a metodologia de pesquisa que inclui: o público-alvo, os instrumentos de coleta de dados, as etapas a serem desenvolvidas neste trabalho monográfico e o detalhamento da intervenção pedagógica considerando as suas três fases.

No quarto capítulo, Resultados e Discussão, são explicitadas tanto a aplicação e a análise do teste exploratório como a implementação e a avaliação da proposta pedagógica na turma do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática.

No quinto capítulo, são apresentadas as Considerações Finais com a resposta à questão de pesquisa, os aspectos importantes das fases de implementação da proposta pedagógica, o cumprimento dos objetivos gerais e específicos, as contribuições do trabalho para os pesquisadores e uma sugestão para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentado o aporte teórico que fundamenta os estudos da pesquisa a ser desenvolvida. Está subdividido em quatro seções: (i) A importância da argumentação matemática na Educação Básica, (ii) O ensino da Geometria na Educação Básica, (iii) As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e as potencialidades do software Geogebra e (iv) Trabalhos relacionados.

2.1 A importância da argumentação matemática na Educação Básica

Para Aguilar Júnior e Nasser (2012), a argumentação está associada a uma competência que precisa ser desenvolvida gradativamente, desde os anos iniciais da Educação Básica, objetivando capacitar o aluno para elaborar justificativas matemáticas convincentes.

A argumentação, entendida como mediadora dos conflitos cognitivos, pode estabelecer ações que tornam dinâmico o ato de aprender como algo prazeroso, propiciando o engrandecimento de ideias, a interação social, a cooperação, a evolução da criatividade, na qual a palavra resulta-se em um convite à ação transformadora (BRITO; MELLO, 2013).

Por fomentar ações como justificar, explorar, contrapor, enunciar e verificar ideias, a argumentação, quando desenvolvida em um ambiente de interação e de reciprocidade, valorizando o conhecimento prévio do aluno, pode aperfeiçoar os procedimentos empregados na solução de problemas, colaborando significativamente para a melhoria do desempenho matemático do educando (BRITO; MELLO, 2013).

Nesta perspectiva, Boavida (2005) elenca alguns pontos positivos decorrentes do envolvimento dos alunos em atividades de argumentação, a saber: (i) a valorização do raciocínio matemático sob uma ótica que não enfatiza o rigor e o formalismo; (ii) aproximação da comunicação desenvolvida na aula de Matemática, com a praticada pelos matemáticos; (iii) o valor concedido às linguagens naturais e a interação social para a aprendizagem; (iv) a importância da escola propiciar a todos os alunos condições necessárias para desenvolverem algumas competências transversais, tal como a competência argumentativa; (v) a identificação de dificuldades evidenciadas na aprendizagem da prova e a busca por caminhos que ajudem essa aprendizagem; e (vi) a indicação que os alunos aprendam Matemática com compreensão, desde o início da Educação Básica, e a relevância da resolução de problemas nesse processo.

Corroborando com essa ideia, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) citam em um dos seus objetivos gerais para o Ensino Fundamental, que os alunos precisam utilizar-se da linguagem matemática para se comunicar, sendo capazes de "[...] descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas" (BRASIL, 1998, p. 48).

Neste sentido, destaca-se nos PCN (BRASIL, 1998) o seguinte princípio norteador para a área de Matemática no Ensino Fundamental: "[...] o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa" (BRASIL, 1998, p. 56).

No que tange o estudo da argumentação matemática, evidencia-se o trabalho do francês Nicholas Balacheff, referência sobre o assunto, cuja primeira publicação nesta temática ocorreu em 1982 (FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017). Em um de seus trabalhos, Balacheff elucida a distinção entre os termos explicação, prova e demonstração (BALACHEFF, 1987, p. 147-148 apud LINS; MEDEIROS; NASCIMENTO, 2020, p. 205):

> Chamamos **explicação** um discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões podem ser discutidas, recusadas ou aceitas. Chamamos **prova** uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. Entre as provas, certamente há uma em particular, elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou bem é obtido a partir daqueles que lhe precedem com o auxílio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos **demonstração** essas provas (BALACHEFF, 1987, p. 147- 148 apud LINS; MEDEIROS; NASCIMENTO, 2020, p. 205).

Para Balacheff (1987 apud FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017), as provas podem ser classificadas como pragmáticas ou conceituais.

> [...] prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado

> resultado, chamados pelo autor de “recursos de ação”, enquanto a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas (BALACHEFF, 1987 apud FERREIRA; NASSER; VAZ; 2017, p. 501).

Em uma nova subdivisão, dentro das provas pragmáticas e conceituais, Balacheff (1987 apud FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017) considera quatro modalidades: o empirismo ingênuo (naive empiricism), o experimento crucial (crucial experiment), o exemplo genérico (generic example) e o experimento mental (thought experiment). As duas primeiras são consideradas um tipo de prova pragmática, a última, um tipo de prova conceitual e a terceira, transita entre os dois tipos (FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017).

Para uma melhor compreensão dessa classificação, seguem as ideias principais sobre cada modalidade e um exemplo correspondente. Todos os exemplos têm como objetivo verificar se a soma de dois números pares é sempre um número par.

1. Empirismo ingênuo: o aluno conclui a veracidade da proposição com base na verificação de alguns casos.

Justificativa: 2 + 2 = 4; 6 + 2 = 8; 12 + 2 = 16; (LINS; MEDEIROS; NASCIMENTO, 2020; FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017).

2. Experimento Crucial: o aluno conclui a veracidade da proposição com base na verificação de um caso especial, geralmente não familiar. Supõe que se é válido para este caso, também o será para os outros.

Justificativa: o aluno verifica a afirmação para números bem grandes, como 1356 + 1202 = 2558. (LINS; MEDEIROS; NASCIMENTO, 2020; FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017).

3. Exemplo Genérico: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após verificar para um caso particular, utilizando um raciocínio que se aplica a um caso geral.

Justificativa: 52 + 36 = 2 (26 + 18) = 2 x 44 = 88. (FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017).

4. Experimento mental: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica.

Justificativa: o aluno mostra que se m e n são pares, então m e n podem ser reescritos como $2p$ e $2q$, respectivamente. Portanto, $m + n = 2p + 2q = 2\ (p + q)$ (LINS; MEDEIROS; NASCIMENTO, 2020; FERREIRA; NASSER; VAZ, 2017).

Um fator interessante discutido por Balacheff está relacionado à transição entre o experimento mental e as demonstrações (BALACHEFF, 2000 apud LIMA; SANTOS, 2020). Conforme o autor, ainda é preciso mais estudos para averiguar o que ocorre durante esse processo de elaboração das provas e demonstrações e se realmente existem outros tipos de provas entre o experimento mental e a demonstração (BALACHEFF, 2000 apud LIMA; SANTOS, 2020).

De acordo com Costa (2017), das definições apresentadas por Balacheff (1987) sobre explicação, prova e demonstração, as duas primeiras são o tipo de validação que devem ser trabalhadas em sala de aula, principalmente no Ensino Fundamental, pois elas permitem o desenvolvimento da habilidade de conjecturar, formular hipóteses, testar, comparar, validar e comunicar sua descoberta por meio da construção de argumentos.

Sales e Pais (2010) concordam que procedimentos pré-demonstrativos contribuem para o desenvolvimento da habilidade de demonstrar, mas são insuficientes para concluir um processo. Todavia, possuem "a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo, que é a demonstração" (SALES; PAIS, 2010, p. 119).

Em relação à demonstração, Sales e Pais (2010), a consideram um tipo de argumentação, entretanto, algumas de suas características, como o formalismo e o excesso de rigor, a tornam questionável do ponto de vista da educação. Segundo esses autores, sendo ela um elemento conclusivo de uma procura ou de um debate, discute-se o seu valor formativo em um contexto de valorização do diálogo. A demonstração apenas contribui efetivamente para a aprendizagem da Matemática quando são elaboradas atividades, de tal modo que a demonstração seja o nível mais elevado de um processo gradativo (SALES; PAIS, 2010).

2.2 O ensino da Geometria na Educação Básica

O termo "geometria" é de origem grega, em que geo significa terra e metria significa medida, desta forma, a palavra geometria é utilizada para indicar medição de terra (EVES,1992).

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), a Geometria constitui um dos ramos mais primitivos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas, uma vez que, as civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. A BNCC (BRASIL, 2017) complementa, que esta parte da Matemática engloba o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos, imprescindíveis para a resolução de problemas do mundo real e de diferentes áreas do conhecimento.

Ao longo da história, a Geometria sempre teve muita importância, facilitando a vida do homem, tanto no âmbito social, para a construção da cidadania, a qual a sociedade se utiliza de conhecimentos científicos e tecnológicos, quanto no âmbito do raciocínio lógico e na resolução de problemas cotidianos (CALDEIRA; MARQUES, 2018).

No desenvolvimento de conteúdos relacionados ao ramo da Geometria e medidas, os alunos poderão identificar regularidades, fazer generalizações e aperfeiçoar a linguagem algébrica (BRASIL, 1998). Além disso, as atividades de Geometria são muito oportunas para que o aluno compreenda a necessidade e a importância da prova para legitimar as hipóteses, a partir de experiências concretas estruturadas juntamente com o professor (BRASIL, 1998).

Para Abrantes (1999), a variabilidade e a riqueza da Geometria constituem, de fato, importantes argumentos para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática. O autor cita alguns, a saber:

> - A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.
> - As actividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. Além disso, a geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática (ABRANTES, 1999, p. 156).

Na Geometria, pode-se trabalhar com figuras planas ou poliedros, no plano ou no espaço, propiciando a exploração de inúmeras propriedades e conexões, sendo também possível encontrar muitos exemplos e concretizações que permitem estabelecer relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas (ABRANTES, 1999). Ademais, na Geometria, as explorações e as investigações podem ser realizadas em todos os níveis de escolaridade e desenvolvimento (ABRANTES, 1999).

No Ensino Fundamental, o que se compreende sobre a importância do ensino de Geometria, é que esse ramo da Matemática propicia ao aluno desenvolver a compreensão do mundo em que se vive, aprendendo a descrevê-lo, representá-lo e a se localizar nele (SILVA, 2021).

Na concepção de Lorenzato (1995), os estudos de Geometria no Ensino Fundamental devem propiciar as oportunidades para os alunos realizarem suas primeiras explorações de modo metódico. Para este autor, é nesse período que as primeiras deduções lógicas são estruturadas, os resultados e os processos devem ser dialogados, embora sem a preocupação com a formalização.

De acordo com Silva (2021), o ensino da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental está associado ao sentido de localização, reconhecimento de figuras, manipulação de formas geométricas, representação espacial e estabelecimento de propriedades, conhecimentos importantes e preparatórios para o que será trabalhado nos anos subsequentes.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2017), nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria deve enfatizar os conceitos de semelhança e congruência de figuras geométricas, de modo que os alunos sejam capazes de identificar as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes, e de aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo assim, para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo.

Para o quarto ciclo[1], os PCN (BRASIL, 1998) expõem que os alunos devem ser capazes de verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos, o que vem ao encontro da proposta dessa pesquisa.

Almouloud, Campos, Manrique e Silva (2004) evidenciam que, apesar da Geometria ser um campo importante da Matemática, por desempenhar um papel, principalmente, de

[1] 8°. e 9°. anos do Ensino Fundamental

instrumento para outras áreas do conhecimento, professores do Ensino Fundamental apontam problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem (ALMOULOUD; CAMPOS; MANRIQUE; SILVA, 2004).

Um dos problemas expostos pelos autores é a discordância no que diz respeito à seleção e à organização dos conteúdos a serem desenvolvidos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio (ALMOULOUD; CAMPOS; MANRIQUE; SILVA, 2004).

Outro problema está relacionado à formação dos professores, que é muito precária quando se trata da Geometria. Este fato compromete o uso adequado das recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCN (ALMOULOUD; CAMPOS; MANRIQUE; SILVA, 2004).

Ademais, alguns livros didáticos também favorecem a origem de vários problemas, uma vez que propõem situações geométricas que privilegiam resoluções algébricas, e que exploram pouco o raciocínio dedutivo ou a demonstração (ALMOULOUD; CAMPOS; MANRIQUE; SILVA, 2004).

A ausência ou precariedade do ensino da Geometria tem sido evidenciada por vários autores. Conforme Lorenzato (1995) e Silva (2021), os conteúdos de Geometria, na maioria das vezes, são trabalhados apenas no final do ano letivo. Lorenzato (1995) destaca que, o conteúdo de Geometria, em muitos casos, aparece na última parte do livro didático, o que contribuiu para o aumento da chance deste estudo não ser concretizado por falta de tempo. Vale salientar que a Geometria, pouco ou em grande parte não é estudada no Ensino Fundamental (LORENZATO, 1995). Situação essa, também observada por Dorneles e Sena (2013), nos anos 60 e 70.

O movimento da Matemática Moderna também contribuiu para este cenário de precariedade no ensino da Geometria. Antes de sua chegada ao Brasil, este ensino era notoriamente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos os detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não obteve êxito no Brasil, mas conseguiu extinguir o modelo anterior, resultando em uma lacuna nas práticas pedagógicas, que perdura até os dias de hoje (LORENZATO, 1995).

O abandono da Geometria proporciona fortes motivos para a inquietação dos professores, no sentido de melhorar os seus conhecimentos nesta área (PAVANELLO, 1993).

Apesar das adversidades apontadas, grandes esforços têm sido realizados na capacitação de docentes, com a finalidade de permitir-lhes realizar um trabalho de qualidade em relação à Geometria, e inúmeras pesquisas estão sendo desenvolvidas visando determinar o “que” ensinar desse tema e “como” fazê-lo (PAVANELLO, 1993).

2.2.1 Classificação dos quadriláteros notáveis

A BNCC (BRASIL, 2017) propõe que o conteúdo de quadriláteros notáveis seja estudado no oitavo ano do Ensino Fundamental e que os alunos desenvolvam as habilidades de “demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (BRASIL, 2017, p. 315). Além disso, que sejam capazes de “identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles” (BRASIL, 2017, p. 303).

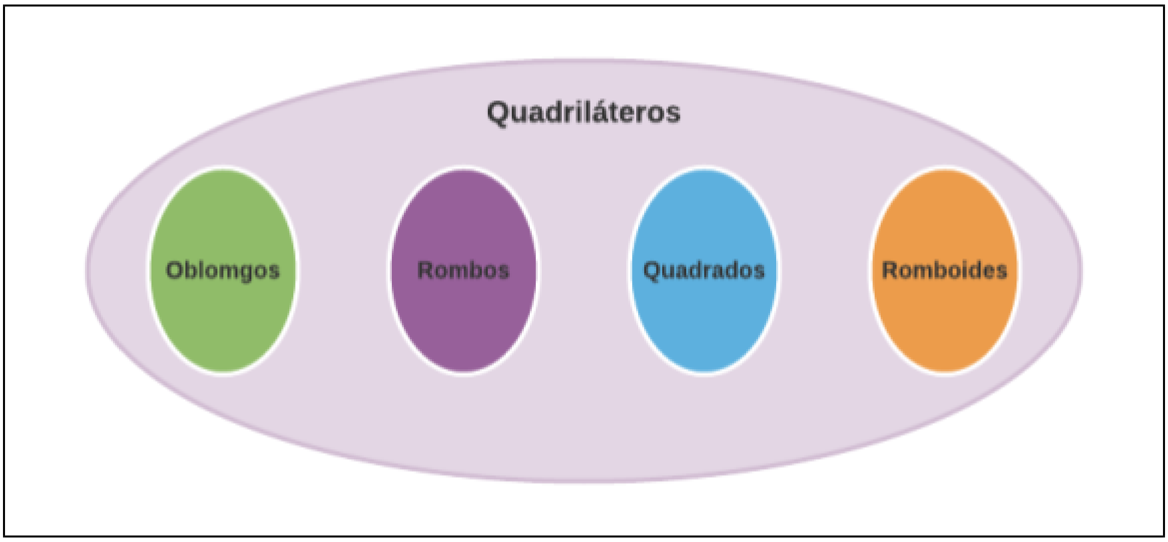
Segundo Costa (2019), os quadriláteros notáveis são constituídos pelos paralelogramos (que, a partir da intersecção de classes, incluem o losango, o retângulo e o quadrado) e pelos trapézios. Como resultado do desenvolvimento da própria Matemática, a definição desses quadriláteros foi sofrendo transformações ao longo da história humana (COSTA, 2019). Na literatura, são três as principais definições apresentadas para os quadriláteros notáveis (BONGIOVANNI, 2004 apud COSTA, 2019).

A primeira classificação é explicitada em *Os elementos,* de Euclides (2009), no livro I, na definição 22, em que são apresentadas as características dos quadriláteros notáveis, da seguinte forma:

- Quadrado - É uma figura que possui tanto os lados quanto os ângulos iguais;
- Oblongo - É uma figura que possui os ângulos iguais, mas não possui os lados iguais;
- Rombo - É uma figura que possui os lados iguais, mas não possui os ângulos iguais;
- Romboide - É uma figura que possui os lados opostos iguais, mas não possui os lados e ângulos iguais.

Nesta classificação, cada quadrilátero difere um do outro. Desta forma, um quadrado, por exemplo, não poderia ser chamado de oblongo, rombo ou de romboide, pois as suas definições os particularizam (AMORIM, 2009) (Figura 1).

Figura 1 - Conjunto dos quadriláteros segundo Euclides



Fonte: Elaboração própria a partir de Euclides (2009).

A segunda classificação foi desenvolvida por Legendre que, segundo Costa (2019), está estruturada, conforme explicitado abaixo:

- Quadrado – possui lados iguais e ângulos internos retos;
- Retângulo – possui ângulos retos sem ter os lados iguais;
- Losango – possui os lados iguais, mas os ângulos internos não são retos;
- Paralelogramo – possui os lados opostos paralelos.

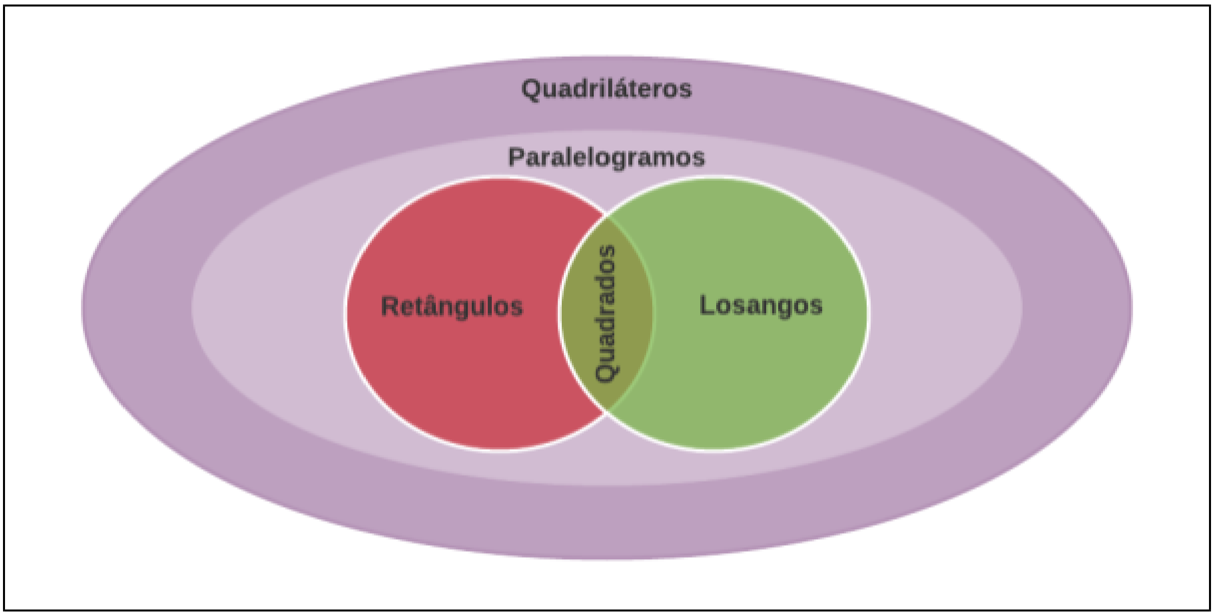
Nessa definição desenvolvida por Legendre, verificam-se mudanças importantes em relação à definição proposta por Euclides. Por exemplo, o rombo e o oblongo passam a ser chamados de losango e retângulo, respectivamente e o nome do romboide é alterado para paralelogramo (COSTA, 2019). Contudo, neste último, ocorreu uma transformação em relação ao conceito, uma vez que passa a apresentar lados opostos paralelos (COSTA, 2019).

A terceira classificação foi proposta por Hadamard. Neste contexto, Amorim (2009) cita a caracterização proposta por este matemático:

- Quadrado - É um quadrilátero que possui todos os lados e ângulos iguais;
- Retângulo - É um quadrilátero que possui todos os ângulos iguais, ou seja, retos;
- Losango - É um quadrilátero que possui todos os lados iguais;
- Paralelogramo - É um quadrilátero que possui os lados paralelos dois a dois.

Conforme a classificação de Hadamard, um quadrado também é retângulo e losango, enquanto que o quadrado, o retângulo e o losango são todos paralelogramos (FERREIRA, 2016) (Figura 2).

Figura 2 - Conjuntos dos quadriláteros segundo Hadamard



Fonte: Elaboração própria a partir de Hadamar (apud AMORIM, 2009).

Essa classificação é a mesma apresentada nos atuais livros didáticos, e possibilita uma maior mobilização de raciocínio na estruturação de uma prova, uma vez que utiliza a teoria dos conjuntos: os quadrados estão na interseção entre os conjuntos dos losangos e dos retângulos e a união dos mesmo é um subconjunto dos paralelogramos (DUARTE, 2007).

Com relação aos trapézios, não há um consenso em relação à sua definição. Ferreira (2016) evidencia duas definições:

- Trapézio - É um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos;
- Trapézio - É um quadrilátero que possui apenas dois lados opostos paralelos.

Para este trabalho, optou-se por utilizar as definições propostas por Dolce e Pompeo (2013), na qual a definição de trapézio assemelha-se à primeira supracitada e a dos demais quadriláteros assemelham-se às definições de Hadamard.

2.3 As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e as potencialidades do software Geogebra

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) são consequências do avanço das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e caracterizam-se pela transmissão dos conteúdos por meio da digitalização e da comunicação em redes (JESUZ; HIRATA; IZIDORO; PEREIRA, 2018). O computador, a televisão, os rádios digitais, a internet, a telefonia móvel, o e-mail, as fotografias, os vídeos, as tecnologias de acesso remoto como o Wi-Fi e o Bluetooth, dentre outras, são exemplos de TDIC (JESUZ; HIRATA; IZIDORO; PEREIRA, 2018).

A evolução das TDIC é notória e inevitável e seus impactos refletem em todas as esferas da sociedade (CAMILLO, 2020). Diante disso, se torna necessário explorar seus recursos no contexto educacional (CAMILLO, 2020).

Os PCN (BRASIL, 1998) do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental citam que as tecnologias são agentes transformadores da sociedade e influenciam na forma como as pessoas se comunicam. Indicam como um dos objetivos para essa fase, a capacidade de utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos (BRASIL, 1998).

Destacam-se como fatores positivos, decorrentes do uso dos recursos tecnológicos digitais em sala de aula, a inovação docente, no que diz respeito à utilização de metodologias e o estímulo dos estudantes ao estudo das disciplinas (JESUZ; HIRATA; IZIDORO; PEREIRA, 2018). Além disso, tecnologias como, por exemplo, os softwares de simulação, quando utilizados, favorecem o aprendizado do aluno, ao passo que oportunizam a visualização de conceitos difíceis ou abstratos (JESUZ; HIRATA; IZIDORO; PEREIRA, 2018).

No que tange o ensino de Matemática, o uso desses recursos contempla significativas contribuições para se repensar o processo de ensino e aprendizagem à medida que:

> - relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;

- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 1988, p. 43-44).

A BNCC (BRASIL, 2017) explicita como uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental que o aluno seja apto a "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 267) .

A informática viabiliza no ensino da Matemática diversas ferramentas de suporte ao desenvolvimento de conteúdos. A exemplo disso, tem-se o software GeoGebra, um importante programa destinado à difusão do conhecimento, voltado para a Geometria dinâmica, Álgebra e cálculos matemáticos (SILVA, 2014).

O software GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwanter, pesquisador da Universidade de Salzburg, na Áustria, em 2001 e após esse período, passou a ser aprimorado e melhorado por um grupo de programadores da Universidade de Florida Atlantic, nos Estados Unidos, orientados por Markus Hohenwanter e Judith Hohenwanter (COSTA, 2016). O nome do software surgiu a partir da aglutinação dos termos Geometria e Álgebra (COSTA, 2016).

Este software é uma ferramenta gratuita, desenvolvida para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Mediante as suas múltiplas janelas, o GeoGebra integra, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação em Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade (BORTOLOSSI, 2016).

Assim, o GeoGebra possui a vantagem didática de apresentar, simultaneamente, diferentes representações de um mesmo objeto que interagem entre si (BORTOLOSSI, 2016). Há versões do software tanto para computadores desktop (Windows, Linux e Mac OS), quanto para tablets Android e iOS e smartphones Android (BORTOLOSSI, 2016).

O Geogebra é um programa bastante intuitivo e auto-explicativo, apropriado tanto para os usuários com conhecimentos avançados em informática quanto para os iniciantes, e o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização (PETLA, 2008). Por se tratar de um software livre, há colaboração de vários programadores, incluindo brasileiros, que disponibilizaram uma versão totalmente em português, favorecendo a utilização no Brasil (PETLA, 2008).

Segundo Dorneles (2011), o Geogebra tem o objetivo de diversificar o ensino da Matemática nas salas de aula, favorecendo o entendimento de alguns conceitos que podem ser explorados por meio do mesmo, uma vez que permite ao aluno pôr em prática seus conhecimentos ao realizar construções e fazer novas descobertas explorando as potencialidades do software.

Permite ainda construir representações de figuras geométricas de forma simples, utilizando apenas o mouse do computador (COSTA, 2016). Viabiliza construções utilizando pontos, segmentos, retas e círculos, disponibilizando comandos para inserir coordenadas e equações, derivar e integrar funções e encontrar raízes e pontos extremos de uma função (DORNELES, 2016).

Também, é viável realizar medições de áreas, de comprimentos, de perímetros, de ângulos, de distâncias, de inclinações, entre outros, e alterar os objetos produzidos, com a atualização das medições ocorrendo instantaneamente (COSTA, 2016). O usuário pode manipular as construções dos objetos geométricos de diferentes formas, por meio do recurso arrastar, mesmo após serem finalizadas (COSTA, 2016).

De acordo com o exposto, o Geogebra oferece várias ferramentas que podem ser exploradas pelos professores e empregadas em sala de aula, objetivando diversificar as aulas e inter-relacionando a Matemática e a informática (DORNELES, 2016). O seu uso também se beneficia da evolução tecnológica e da curiosidade dos alunos pela tecnologia, fator que pode ser um facilitador no processo de ensino e aprendizagem (DORNELES, 2016).

As múltiplas possibilidades de construções que possui o Geogebra concedem ao aluno um controle sobre as atividades, deixando a tarefa mais prazerosa e motivadora, levando-o a construir conhecimentos, por meio de suas próprias ações no software e despertando o espírito investigador de cada um (DORNELES, 2016).

Além do apresentado, o site do GeoGebra possui um banco com mais de um milhão de materiais didáticos (Figura 3) com atividades gratuitas, simulações, aulas e jogos para Matemática e Ciências (GEOGEBRA, 2022b).

Figura 3 - Tela inicial da seção Materiais do site do Geogebra

Fonte: Tela capturada pelos pesquisadores no site https://www.geogebra.org/materials?lang=pt-PT em 21 de janeiro de 2022.

Alguns desses materiais estão dispostos como construções interativas, sobre os mais variados tópicos matemáticos, disponibilizados pelos usuários. Durante muito tempo, essas construções foram chamadas de *applets* (ALVES, HENRIQUES, 2018).

No processo de aprendizagem da Matemática, os *applets* contribuem para facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos. De acordo com Barcelos *et al*. (2009, p. 1), “[...] os applets, em geral, permitem investigar, levantar e testar conjecturas e, assim, construir conhecimentos”.

Neste trabalho, os *applets* do Geogebra foram utilizados para propiciar a visualização de alguns conceitos matemáticos na “Atividade de requisito” e investigar e testar algumas propriedades referentes aos quadriláteros notáveis, nas atividades de argumentação.

2.4 Trabalhos Relacionados

Para aprofundar o estudo do presente trabalho, foi realizada uma pesquisa avançada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), com o objetivo de encontrar trabalhos cujas temáticas fossem semelhantes ao tema em questão.

Foram utilizadas as seguintes palavras-chave: “argumentação matemática” e "quadriláteros". Obteve-se como retorno três trabalhos, e a partir da leitura dos resumos, dois foram selecionados devido a similaridade do tema ou conteúdo: Amorim (2009) e Souza (2009).

Com o intuito de buscar trabalhos mais atualizados fez-se uma nova pesquisa na BDTD com as palavras-chave "argumentação matemática" e "Ensino Fundamental" e com os filtros: (i) tipo de documento: dissertação, e (ii) ano de publicação: de 2016 a 2020. Dessa forma, foram encontrados vinte trabalhos. A partir da leitura dos resumos e levando em consideração a proximidade com o tema desta monografia, três foram selecionados: Azevedo (2019), Costa (2017) e Rosale (2017).

A seguir, são descritos os cinco trabalhos selecionados.

2.4.1 O desafio de argumentar nas aulas de Matemática: uma investigação com estudantes do 1º. ano do Ensino Fundamental

A dissertação "O desafio de argumentar nas aulas de Matemática: uma investigação com estudantes do 1º. ano do Ensino Fundamental" escrita por Simone Aparecida dos Anjos Azevedo (2019) tratou do desenvolvimento de competências argumentativas por estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental para a resolução de problemas de enunciado do campo aditivo, valendo-se dos princípios da engenharia didática como metodologia.

A autora não explicita de forma clara os instrumentos de coleta de dados, mas segundo a leitura da dissertação evidencia-se pelo menos três: as respostas dos alunos às atividades, o questionário e a entrevista.

O questionário foi aplicado a 81 professores de diferentes regiões do Brasil, que atuavam no primeiro ano do Ensino Fundamental e as entrevistas com a professora da turma e com a coordenadora pedagógica da escola. O primeiro instrumento teve como objetivo caracterizar os professores incluindo sua formação e atuação profissional e buscar dados acerca das concepções dos professores sobre os "momentos de discussão na sala com os alunos" sobre vários aspectos como a frequência com que ocorrem.

As entrevistas foram aplicadas à professora da turma e à coordenadora da escola e tiveram como objetivo obter dados sobre a escola, o perfil dos alunos e o trabalho na área de Matemática que já vinha sendo desenvolvido.

A autora elaborou uma sequência didática que foi aplicada a uma turma de 15 alunos num total de sete sessões, com duração de aproximadamente uma hora cada.

Foi constatado que as discussões favoreceram a explicitação, a justificativa e a validação dos conhecimentos de que os estudantes se utilizaram na resolução dos problemas. Constatou-se também que os alunos desenvolvem competências argumentativas logo no 1 ° ano do Ensino Fundamental por meio de situações-problema complexas.

Os pontos em comuns com esse trabalho são: a utilização da argumentação no Ensino Fundamental e da entrevista como instrumento de coleta de dados. Como pontos distintos, destacam-se o público-alvo, a metodologia e os temas matemáticos abordados nas atividades.

2.4.2 Argumentação Matemática sob uma perspectiva crítica: uma análise da prática didática no Ensino Fundamental

A dissertação de Costa (2017) teve como objetivos: (i) fazer uma reflexão teórica sobre a argumentação, com base na literatura estudada, de autores como Balacheff, Carraher, Skovsmose e Van Hiele: (ii) produzir atividades didáticas com a finalidade de explorar processos de validação e argumentações com alunos de 6°. e 7°. anos do Ensino Fundamental de uma escola pública e (iii) fazer um levantamento sobre o que a legislação e os autores definem acerca da formação integral do educando.

A metodologia e os instrumentos de coleta de dados não foram explicitados no trabalho.

O autor concluiu que o pensamento crítico pode ser construído pelo educando durante a Educação Básica, à medida que forem trabalhadas em sala de aula, situações de aprendizagem que estimulem sua capacidade de apreciar a existência de diversas relações que podem ser feitas em torno do tema em estudo. Além disso, que um trabalho voltado para argumentações pode contribuir de maneira efetiva para a validação e construção de conhecimentos matemáticos e para o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes.

Teve como ponto em comum a esse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), a utilização da argumentação na Educação Básica, e como pontos distintos, o público-alvo, a metodologia e os temas matemáticos abordados na sequência didática.

2.4.3 Argumentação e prova matemática na Educação Básica

O estudo de caráter qualitativo realizado por André Rodrigues Rosale (2017), descrito em sua dissertação intitulada “Argumentação e prova matemática na Educação Básica” adotou algumas características do *Design Experiments* (Experimento planejado) como opção metodológica, e teve como público-alvo alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Os objetivos da pesquisa foram: (i) propor situações que favoreçam o desenvolvimento de argumentações, (ii) analisar as produções de uma amostra de alunos do nono ano da Educação Básica na construção de argumentações matemáticas e (iii) apresentar ações que os professores de Matemática podem adotar para que atividades envolvendo argumentação façam parte da prática docente.

Embora o autor não explicite os instrumentos de coleta de dados, foram utilizados para a análise final, as respostas dos alunos às atividades propostas e dois questionários para diagnóstico da turma, seguido de discussões de cada questão para que os alunos analisassem pontos importantes das tarefas.

Como panorama conclusivo, foi notado que muitos alunos realizaram argumentações com base em casos particulares, e que com o decorrer das discussões e aplicações ocorreu sensível evolução nas argumentações dos estudantes. Ficou claro também que ações do professor como proporcionar discussões entre os resultados obtidos, fazer com que o estudante analise as respostas de outros alunos e estimular os testes de casos particulares e discussões sobre possíveis contradições por meio de contraexemplos, podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades de argumentação.

De modo semelhante a esse TCC, o autor elaborou atividades sobre a argumentação para os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e analisou os dados à luz da teoria de Balacheff. Observam-se diferenças quanto à metodologia adotada e os temas matemáticos abordados.

2.4.4 Argumentação e prova: uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades

A dissertação de Márcia Cristina dos Santos Amorim “Argumentação e prova: uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades” (AMORIM 2009), teve como público-alvo, seis alunos do 1.° ano do Ensino Médio de uma escola de rede particular de São Paulo.

O trabalho utilizou noções de Engenharia Didática na metodologia e um questionário para o mapeamento da concepção dos alunos de Ensino Fundamental e Médio de escolas públicas e particulares. Teve como objetivo apresentar uma sequência de atividades que possibilitasse aos alunos do Ensino Médio novas formas de pensar, relacionar informações e propriedades em uma abordagem significativa para justificativas matemáticas, com o auxílio da geometria dinâmica proporcionada pelo software Cabri-Géometrè.

A sequência didática utilizou atividades de caráter experimental, manipulativo e investigativo, relativas às propriedades dos quadriláteros. O intuito foi despertar no aluno a necessidade de demonstração dedutiva, levando-o a adquirir habilidades em argumentação e prova matemática.

Reconhece-se como instrumentos de coleta de dados, mesmo não indicados de forma clara no texto, a observação, as respostas dos alunos às atividades, e a gravação em áudio e vídeo.

Ao fim do trabalho, a autora concluiu que, a geometria dinâmica proporcionou um ambiente de aprendizagem significativa, possibilitando aos alunos confirmarem algumas propriedades conhecidas das figuras e a partir delas construírem suas hipóteses, basicamente apoiadas em justificativas empíricas. Além disso, ela percebeu que os alunos não conseguiram desvincular-se dos casos particulares para concretizar a argumentação.

Os pontos comuns com essa pesquisa são: o uso de software de geometria dinâmica e o trabalho com a argumentação matemática. Os pontos distintos são: a metodologia e o público-alvo.

2.4.5 A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer

A dissertação intitulada “A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer”, escrita por Maria Estela Conceição de Oliveira de Souza (2009), teve como objetivo mapear as concepções sobre argumentação e provas de alunos na faixa etária entre 14 e 16 anos de escolas públicas e particulares do estado de São Paulo.

A pesquisa teve como base a aplicação de um questionário, contendo cinco questões de Álgebra e cinco de Geometria, cujo o foco da análise estava em uma questão de geometria, em que os alunos deveriam responder se a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é sempre 360°, justificando a resposta. Entrevistas individuais foram realizadas com alguns alunos para esclarecimento de algumas respostas do questionário.

Foi feita uma análise estatística das respostas. Verificou-se que mais de 50% dos alunos pesquisados responderam positivamente a essa questão. A maioria utilizou argumentos empíricos para justificar, havendo uma quantidade considerável de respostas "não sei" e outras deixadas em branco. Poucos alunos justificaram a resposta com o uso das propriedades.

Sendo assim, a autora caracterizou as provas realizadas pelos alunos como pragmáticas, identificando a predominância do empirismo ingênuo. Quanto às causas dos erros cometidos e das dificuldades, destacam-se a insuficiência de conhecimentos elementares de Geometria plana.

Verifica-se como pontos comuns a essa monografia: o uso do questionário e da entrevista, o trabalho com a argumentação e a análise das respostas dos alunos com base nas definições de provas e suas subdivisões propostas por Balacheff. Diferencia-se pelo tema matemático tratado.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o intuito de propiciar uma melhor compreensão do percurso metodológico adotado neste TCC, evidencia-se mais uma vez o objetivo geral: investigar as contribuições de um estudo sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis com base na argumentação matemática para o processo de demonstração formal.

O capítulo está dividido em duas seções: i) a caracterização da pesquisa, na qual são salientados o tipo da pesquisa, o público-alvo, os instrumentos de coleta de dados e as etapas da pesquisa e; ii) o detalhamento da Intervenção Pedagógica, realizado por meio do planejamento, da implementação das mudanças propostas e da avaliação dos efeitos dessas mudanças.

3.1 Caracterização da Pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada é a qualitativa do tipo intervenção pedagógica. Pesquisas desse tipo são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências, assim como a avaliação dos efeitos dessas interferências, visando melhorias no processo de aprendizagem dos participantes (DAMIANI, 2013). O exposto acima está em consonância com essa pesquisa que objetiva promover melhorias no desenvolvimento da prática argumentativa, em uma turma do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática, a fim de contribuir para o processo de demonstração formal.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividades numéricas, e sim com o aprofundamento da compreensão de um grupo social ou organização. Para Bicudo (2012), este tipo de pesquisa permite colocar em relevo o sujeito do processo, valendo-se de um olhar contextualizado, que não o vê de forma isolada mas inserido culturalmente e socialmente. Em relação a esse aspecto, a investigação será feita sobre o modo particular como cada aluno utiliza a argumentação em questões de Geometria, valorizando os saberes provenientes de sua vivência escolar e fora dela, fatos que certamente o influenciarão nesse processo argumentativo.

Os instrumentos de coleta de dados são: as respostas dos alunos nas atividades, o questionário de sondagem, a observação, as anotações no caderno de campo, a gravação em áudio e a entrevista semiestruturada.

O questionário é um conjunto de perguntas que são respondidas pelo pesquisado, constituindo-se um meio rápido de obtenção de informações que não necessita de treinamento pessoal e garante o anonimato (GIL, 2002).

As perguntas podem ser classificadas como abertas ou fechadas. As primeiras têm como vantagens o fato de permitir que o respondente elabore uma resposta com total liberdade de criação, sem a interferência de respostas pré- elaboradas pelo pesquisador. No entanto, elas demandam habilidade de escrita, de formatação e construção do raciocínio por parte do pesquisado. Já as perguntas fechadas, podem ser de múltipla escolha ou dicotômicas, tendo como aspectos negativos a limitação da gama de respostas (CHAER; DINIZ; RIBEIRO, 2011). O questionário empregado neste trabalho, contém perguntas abertas e fechadas.

Este trabalho também utilizou a entrevista como um instrumento de coleta de dados. Conforme Gerhardt e Silveira (2009, p.72), a entrevista é "uma técnica de interação social, uma forma de diálogo assimétrico, em que uma das partes busca obter dados, e a outra se apresenta como fonte de informação".

Segundo Cunha (1982) o uso da entrevista possui as seguintes vantagens: possibilita captar as reações, os sentimentos e os hábitos do entrevistado, uma vez que propicia o contato direto com o mesmo, oferecendo um maior grau de confiabilidade aos dados coletados; permite ao entrevistador esclarecer alguma pergunta ou terminologia não compreendida pelo entrevistado ou realizar outros questionamentos, a partir das respostas fornecidas, quando são detectados fatos interessantes ou novos.

Dentre as desvantagens do uso da entrevista, Gil (2008) destaca: a falta de clareza nas respostas, em decorrência de insuficiência vocabular ou de problemas psicológicos; a influência exercida pelo aspecto pessoal e pelas opiniões do entrevistador sobre o entrevistado.

A entrevista semiestruturada foi adotada dentre todas as opções de entrevista, por ter uma "série de perguntas abertas, feitas verbalmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador pode acrescentar perguntas de esclarecimento" (DIONNE; LAVILLE, 1999, p. 188). Neste contexto, o entrevistador pode falar livremente sobre assuntos que vão surgindo em decorrência do desenvolvimento do tema principal (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Dentre as vantagens do uso da entrevista semiestruturada, Dionne e Laville (1999) destacam a flexibilidade, a qual ocasiona uma maior aproximação entre o entrevistador e o entrevistado, oportunizando a exploração em profundidade de seus saberes, bem como de suas representações, de suas crenças e valores.

Esta pesquisa tem como público-alvo, alunos do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática e está dividida nas seguintes etapas:

- a revisão bibliográfica;

- o planejamento da ação interventiva que consta: (i) da elaboração do questionário de sondagem; (ii) da escolha do *applet* sobre congruência de triângulos; (iii) da elaboração das atividades de requisito e de argumentação; (iv) da elaboração da sequência didática; e (v) do teste exploratório.

- a implementação da ação interventiva por meio da aplicação da proposta pedagógica com as atividades de requisito e de argumentação matemática.

- a avaliação desta ação feita por meio dos seguintes instrumentos: observação, anotações no caderno de campo, respostas dos alunos às atividades, ao Questionário de Sondagem e a entrevista semiestruturada, e gravação em áudio.

A análise dos dados obtidos foi feita segundo o referencial teórico considerado na monografia. Em especial, nas respostas dos alunos às atividades de argumentação foram consideradas as definições propostas por Balacheff.

3.2 Detalhamento da Intervenção Pedagógica

O detalhamento da intervenção pedagógica é realizada com base na definição proposta por Damiani *et al.* (2013), a qual afirma que pesquisas desse tipo envolvem o planejamento e a implementação de interferências, assim como a avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI *et al.*, 2013).

Dessa forma, esta subseção está estruturada em três partes: o planejamento, a implementação e a avaliação.

3.2.1 O Planejamento

O planejamento constitui-se da elaboração da proposta pedagógica, do Questionário de Sondagem, do roteiro da entrevista semiestruturada e do teste exploratório.

3.2.1.1 Elaboração da Proposta Pedagógica

A proposta pedagógica está dividida em três atividades realizadas em quatro encontros com duração de aproximadamente 2 horas cada, a saber: “Atividade de requisito”, “Atividade de Argumentação matemática I” e “Atividade de Argumentação matemática II”, esta última dividida em duas partes.

A elaboração das atividades foi pensada para uma aplicação remota, mas a proposta pedagógica pode ser desenvolvida no contexto de aulas presenciais, com algumas adaptações.

O quadro abaixo explicita o nome das atividades com seus objetivos (Quadro 1).

Quadro 1 - Atividades e objetivos

Atividade	Objetivos
Atividade de requisito	Revisar conceitos e conteúdos fundamentais para a realização das atividades de argumentação.
Atividade de Argumentação matemática I e Atividade de Argumentação matemática II	Elaborar uma argumentação matemática sobre propriedades relacionadas aos quadriláteros notáveis a partir da apresentação de ideias que compõem a estrutura de tal argumentação.

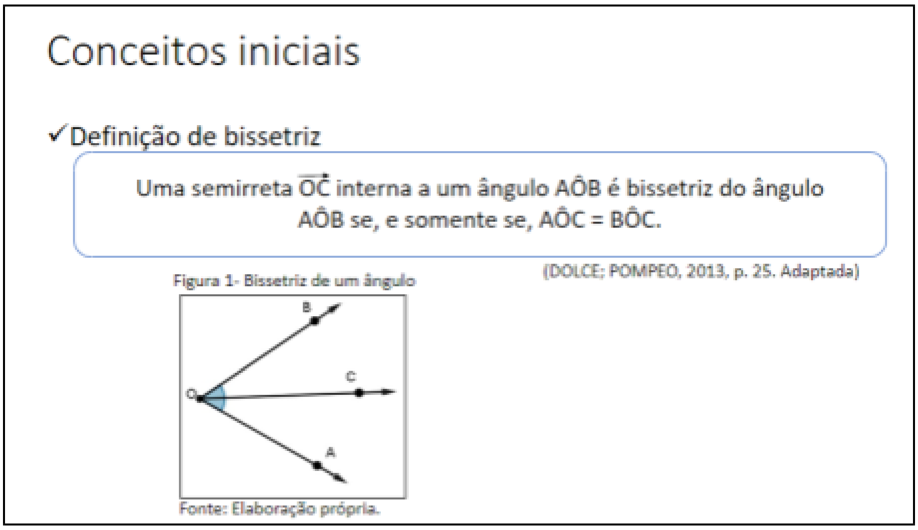
Fonte: Elaboração própria.

A “Atividade de requisito” é dividida em dois momentos. O primeiro, que corresponde à apresentação da parte teórica e o segundo momento, a um jogo elaborado no *kahoot*, abrangendo questões relacionadas à parte teórica.

A parte teórica, apresentada por meio de slides (APÊNDICE B), é estruturada da seguinte forma: conceitos iniciais, retas paralelas cortadas por uma transversal, congruência de triângulos, quadriláteros e quadriláteros notáveis.

Nos conceitos iniciais, são apresentadas as definições de bissetriz, ângulo suplementar adjacente e retas perpendiculares, os dois primeiros seguidos, respectivamente, de exemplos (Figura 4).

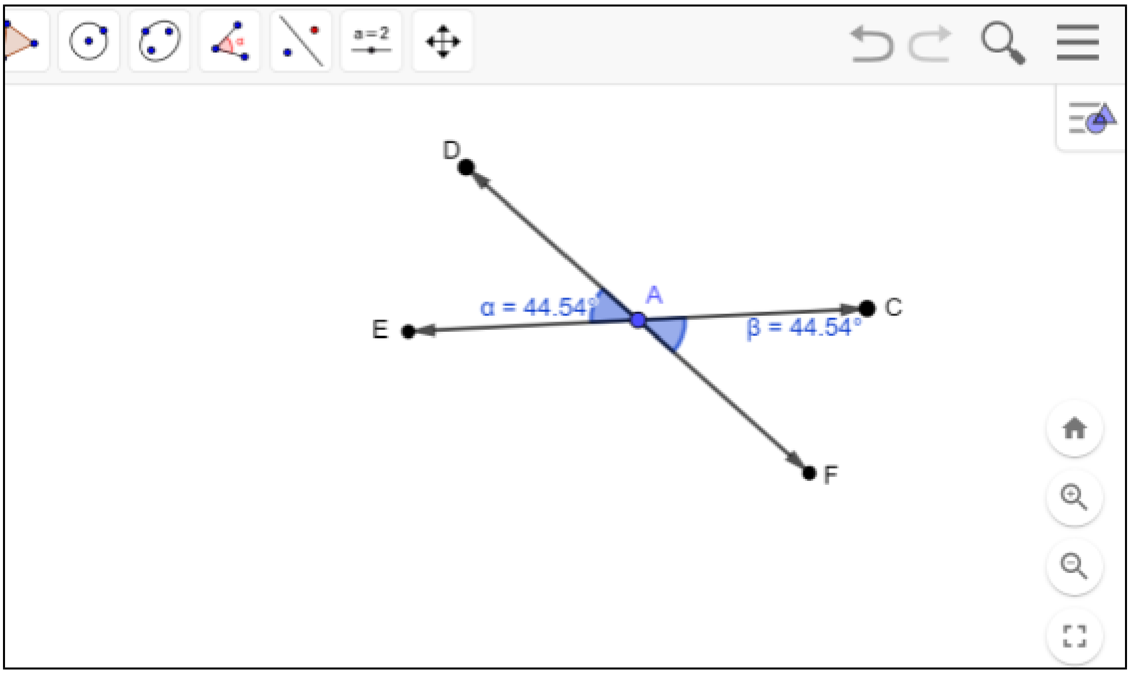
Figura 4 - Slide sobre a definição de bissetriz



Fonte: Elaboração própria.

Nesse primeiro tópico, também é explicitada a definição de ângulos opostos pelo vértice. Diferente dos conceitos anteriores, que são apresentados explorando as imagens dos slides, este é trabalhado manipulando um *applet* elaborado no Geogebra*,* que ressalta a propriedade da congruência dos ângulos opostos pelo vértice, explicitada de forma empírica (Figura 5).

Figura 5 - Construção de ângulos opostos pelo vértice

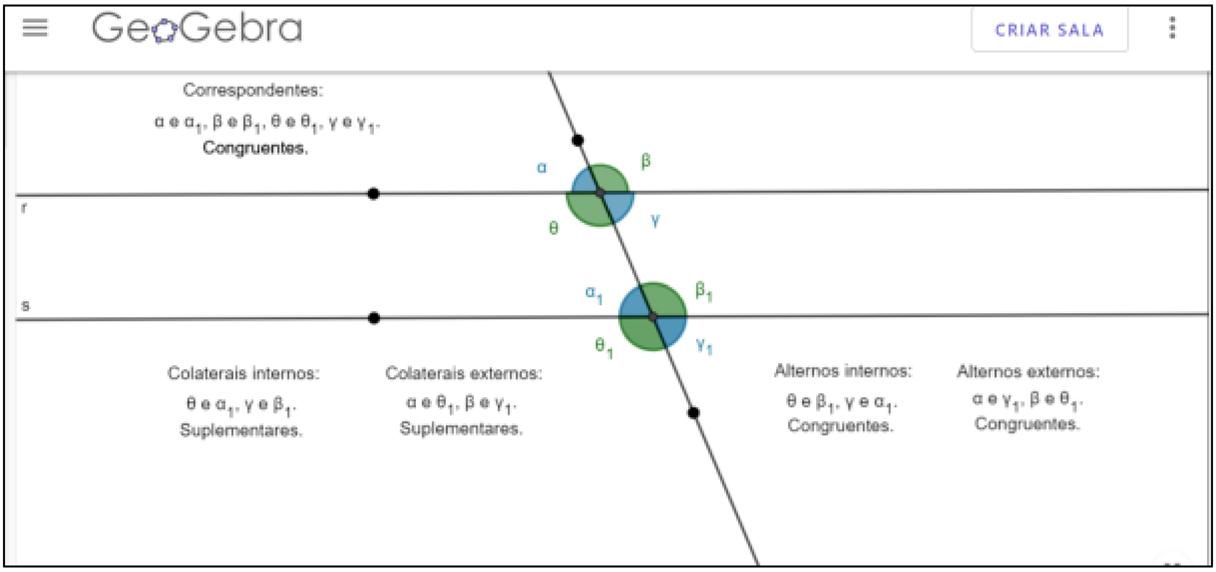


Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela do Geogebra.

Em seguida, é abordado o conteúdo de retas paralelas cortadas por uma transversal. Neste momento, é exposta a definição de retas paralelas e identificada a relação dos pares de ângulos formados pelas retas paralelas cortadas por uma reta transversal e suas nomenclaturas: ângulos correspondentes, ângulos colaterais internos, ângulos colaterais externos, ângulos alternos internos e ângulos alternos externos.

Toda a manipulação é realizada por meio de um *applet* elaborado no Geogebra e, no decorrer da apresentação, são fomentadas discussões a respeito do conteúdo, com os participantes (Figura 6).

Figura 6 - Retas paralelas cortadas por uma transversal



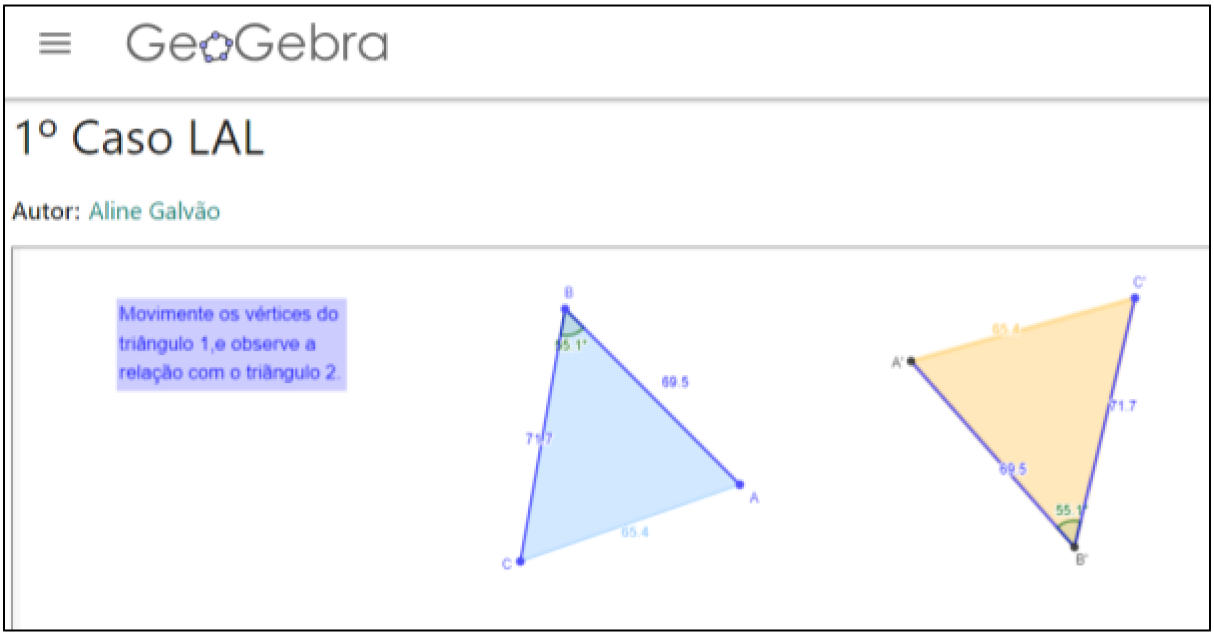
Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela do Geogebra.

Na sequência, é exposto o conteúdo de congruência de triângulos, explorando a definição e os seguintes casos de congruência:

- Lado, Ângulo, Lado (LAL);
- Ângulo, Lado, Ângulo (ALA);
- Lado, Lado, Lado (LLL);
- Lado, Ângulo, Ângulo oposto (LAA_o).

A análise é realizada por meio de um *applet* do Geogebra e a apresentação dos casos de congruência de triângulos é executada por meio da construção, reforçando a importância de respeitar a ordem de cada elemento que compõe os casos (Figura 7).

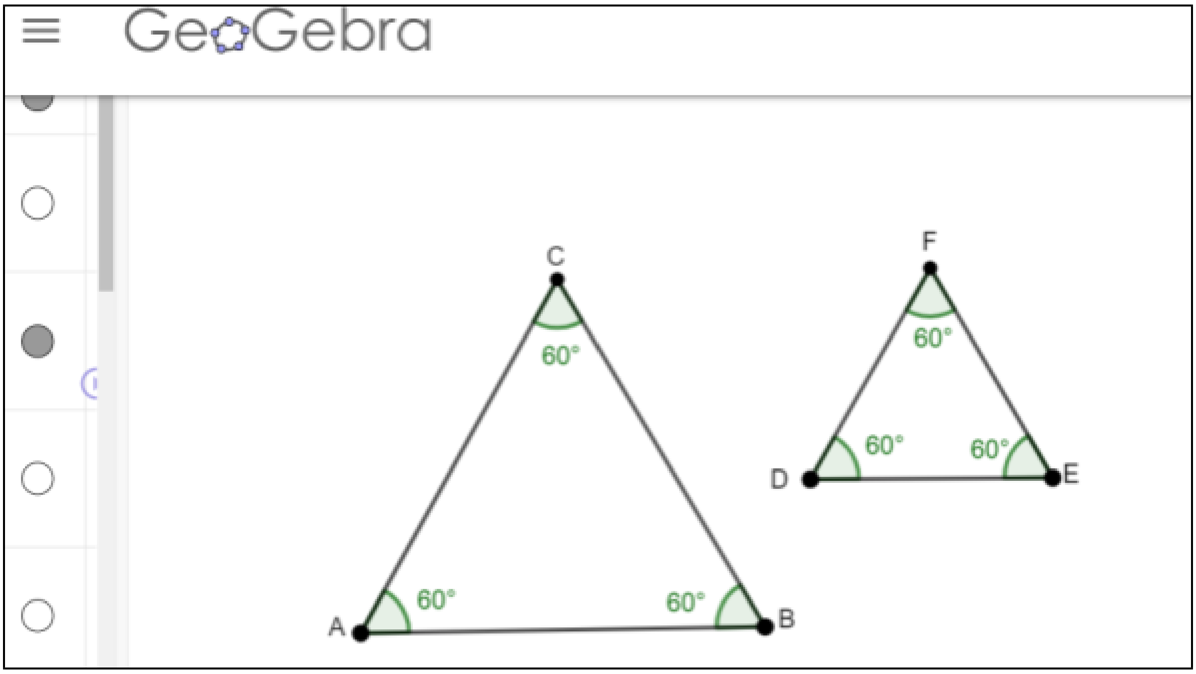
Figura 7 - Caso de congruência de triângulos LAL



Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela do Geogebra.

Para finalizar o tópico, utilizando uma construção elaborada no Geogebra, é exposto um exemplo que não constitui um caso de congruência de triângulos, composto pelos elementos: Ângulo, Ângulo, Ângulo. O contraexemplo tem como intuito corroborar para a percepção que quaisquer combinações de três elementos de um triângulo, não necessariamente, constituem um caso de congruência (Figura 8).

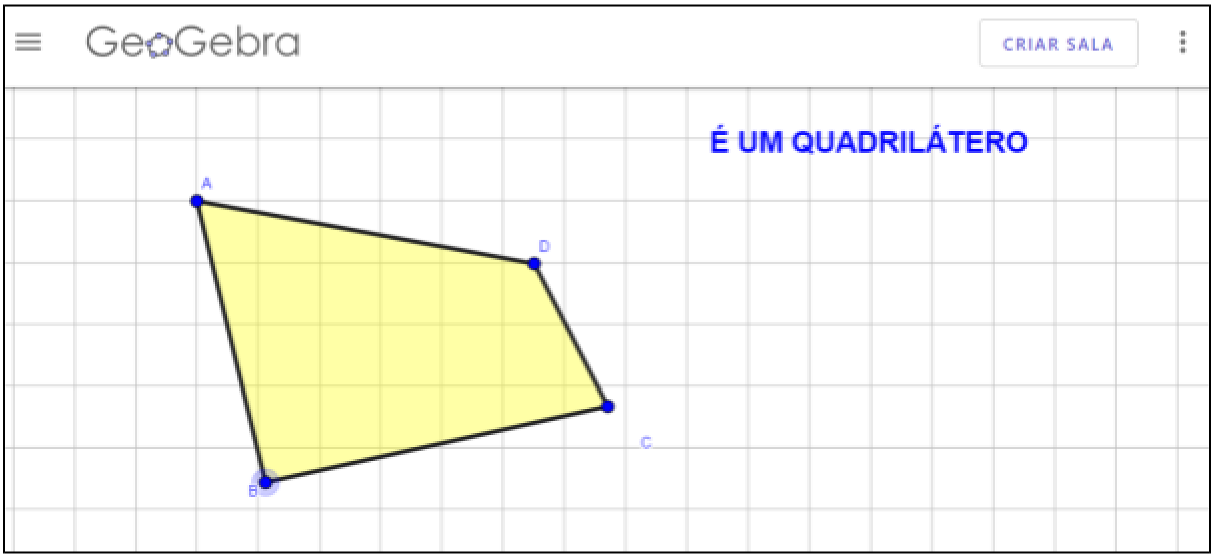
Figura 8 - Elementos que não constituem um caso de congruência de triângulos



Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela do Geogebra.

O penúltimo tópico estudado é sobre os quadriláteros, onde é analisada a definição dos mesmos, valendo-se da visualização proporcionada pelo *applet* do Geogebra (Figura 9).

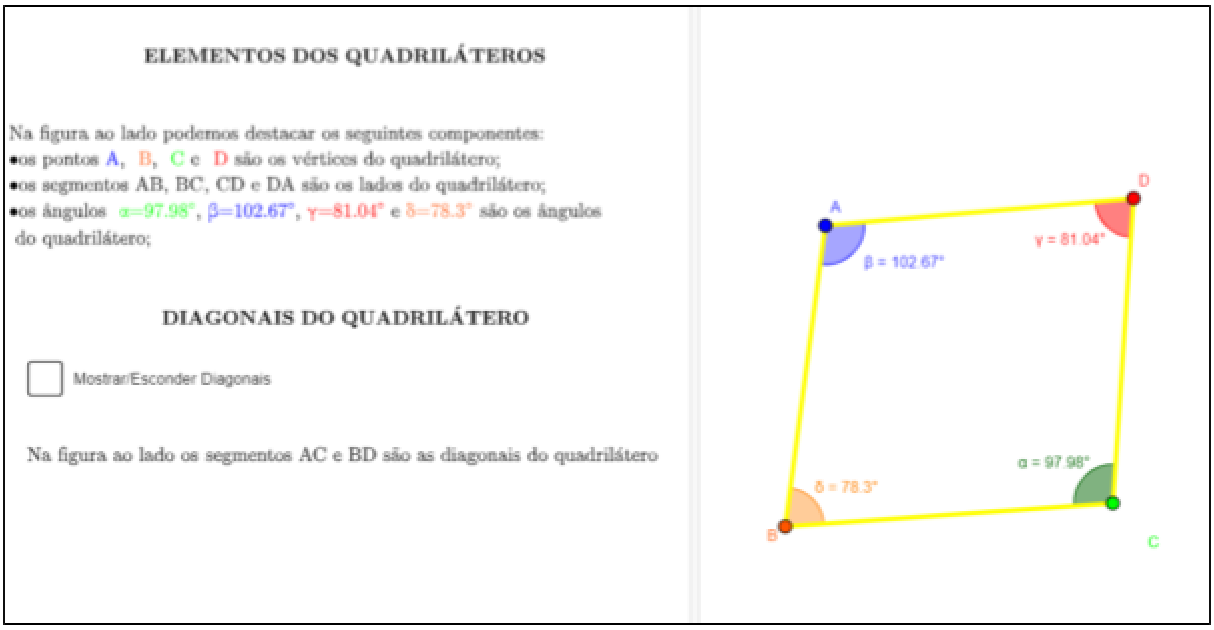
Figura 9 - Exemplo de um quadrilátero



Fonte: Elaboração própria a partir da captura da tela do Geogebra.

Ainda nesse tópico, é apresentado os elementos de um quadrilátero, sendo eles: os vértices, os lados, os ângulos internos e as diagonais. Também é exposta a definição de quadriláteros côncavos e convexos, seguidos de exemplos, com auxílio de um *applet* do Geogebra (Figura 10).

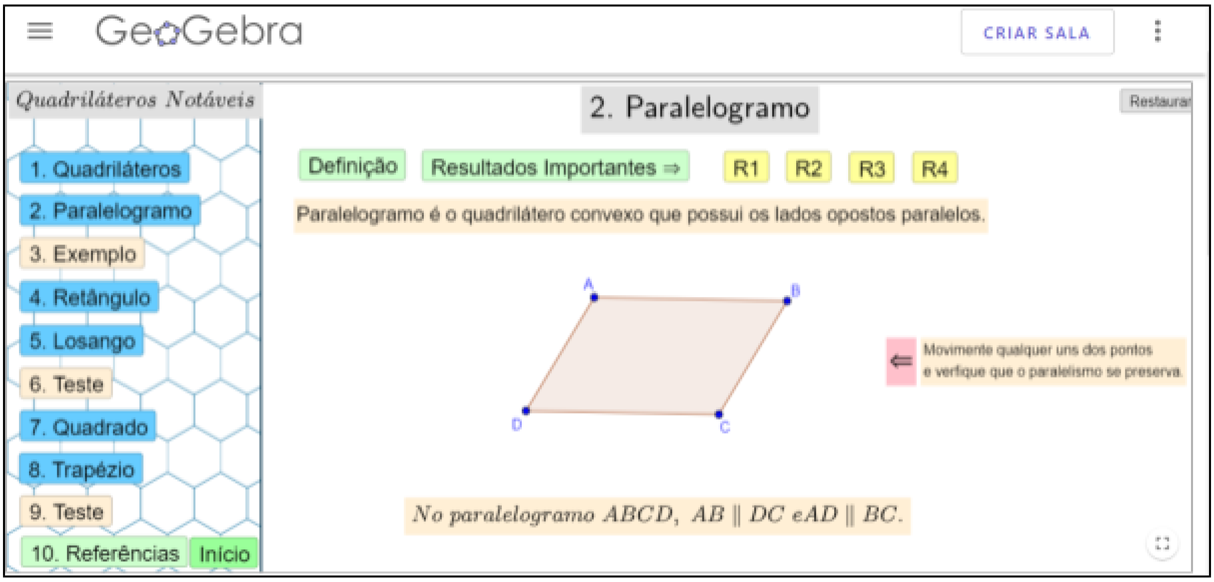
Figura 10 - Elementos de um quadrilátero



Fonte: Elaboração própria a partir da captura da tela do Geogebra.

Por fim, é explícita a definição dos cinco quadriláteros notáveis: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado. Vale salientar que as definições apresentadas, neste momento, proporcionam uma ferramenta de relevância para o desenvolvimento dos argumentos matemáticos, propostos nas próximas atividades (Figura 11).

Figura 11 - Apresentação dos quadriláteros notáveis



Fonte: Elaboração própria a partir da captura da tela do Geogebra.

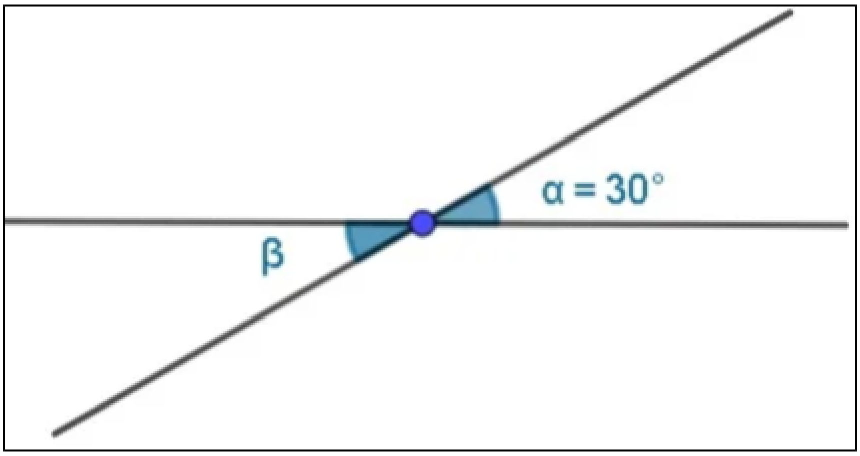
A segunda parte da "Atividade de requisito" corresponde a um jogo elaborado no *Kahoot*[2], que tem como objetivo a aferição da aprendizagem dos conceitos e conteúdos abordados na parte teórica.

O jogo é composto de 6 questões de múltipla escolha e de 8 questões do tipo verdadeiro ou falso. A dinâmica do jogo garante que o participante saiba instantaneamente se errou ou acertou e conheça a resposta correta de cada questão. A seguir, são elencadas as questões:

1. Qual o valor do ângulo β? (múltipla escolha) (Figura 12)

[2] É uma plataforma de aprendizado baseada em jogos, usada como tecnologia educacional em escolas e outras instituições de ensino. Seus jogos de aprendizado, "Kahoots", são testes de múltipla escolha que permitem a geração de usuários e podem ser acessados por meio de um navegador da Web ou do aplicativo Kahoot. KAHOOT!. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Kahoot!&oldid=62336821>. Acesso em: 30 out. 2021.

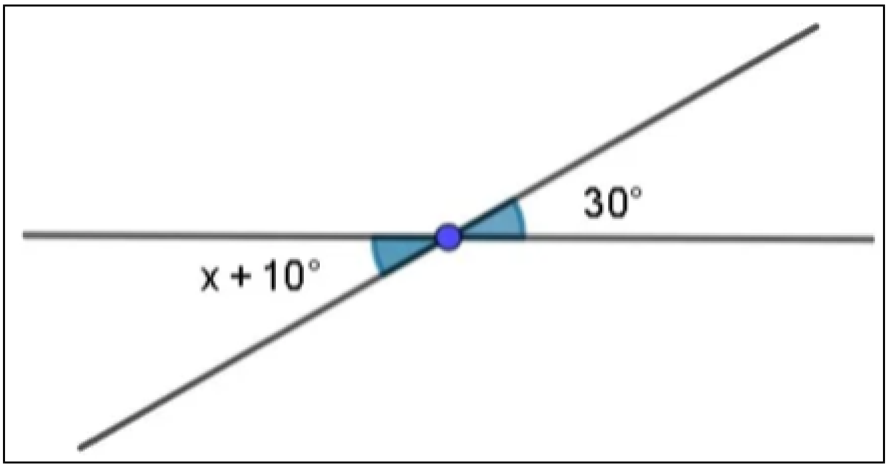
Figura 12 - Imagem da questão 1 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

2. Determine o valor de x. (múltipla escolha) (Figura 13)

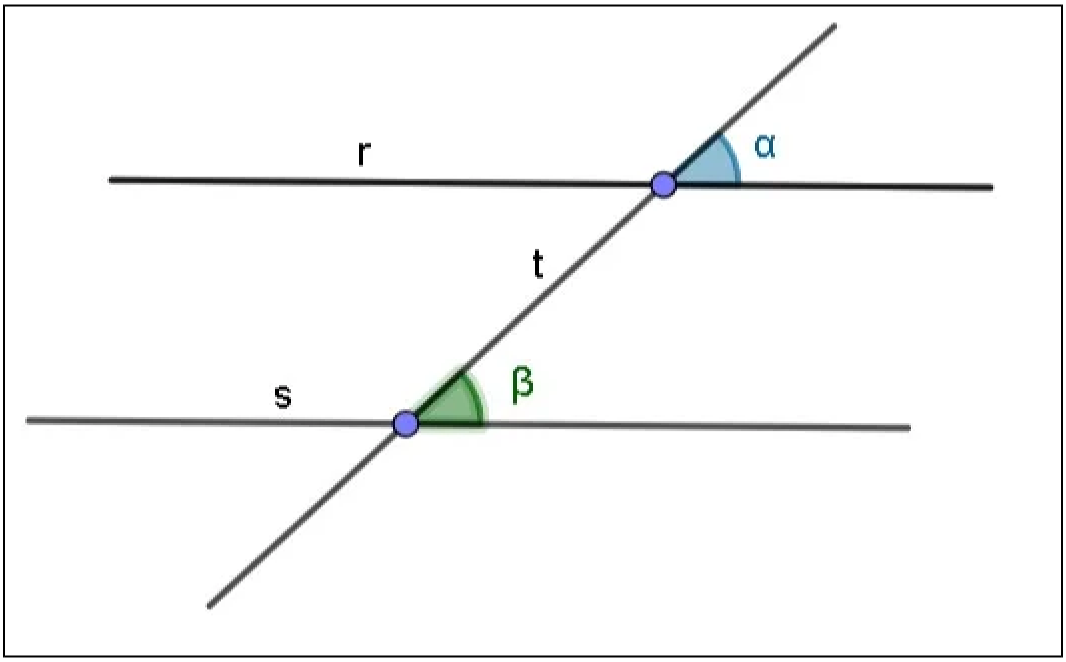
Figura 13 - Imagem da questão 2 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

3. Todo quadrilátero notável que possui lados opostos paralelos é um retângulo. (verdadeiro ou falso)
4. Considere as retas r e s paralelas e t transversal. Qual o nome dado aos ângulos α e β? (múltipla escolha) (Figura 14)

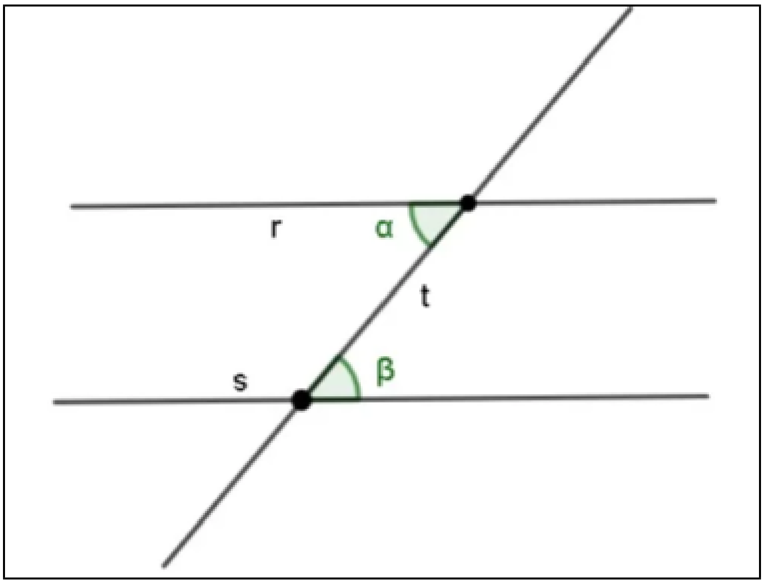
Figura 14 - Imagem da questão 4 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

5. Todo quadrilátero notável que possui quatro ângulos congruentes é losango. (verdadeiro ou falso)
6. Considere as retas r e s paralelas e t transversal. Qual o nome dado aos ângulos α e β? (múltipla escolha) (Figura 15)

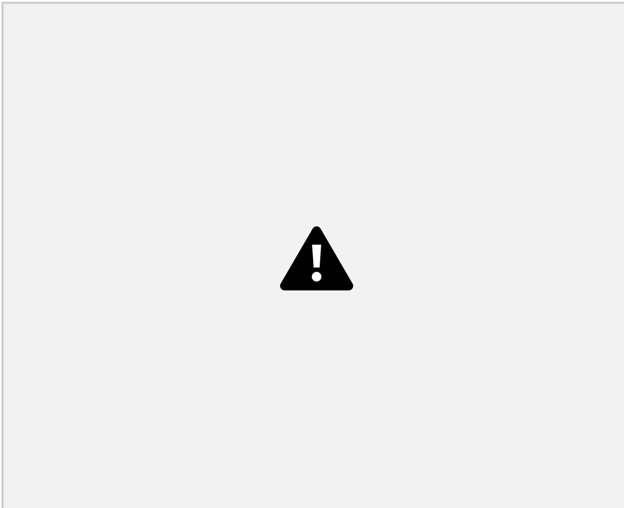
Figura 15 - Imagem da questão 6 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

7. Sendo $\overline{OC}$ pertencente à bissetriz do ângulo AÔB, qual o valor de θ? (múltipla escolha) (Figura 16)

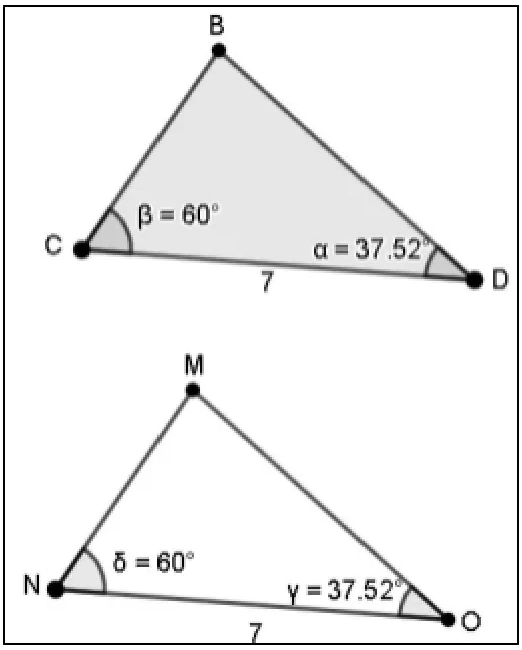
Figura 16 - Imagem da questão 7 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

8. Os triângulos BCD e MNO são congruentes pelo caso AAL. (verdadeiro ou falso) (Figura 17)

Figura 17 - Imagem da questão 8 do "*Quiz*"

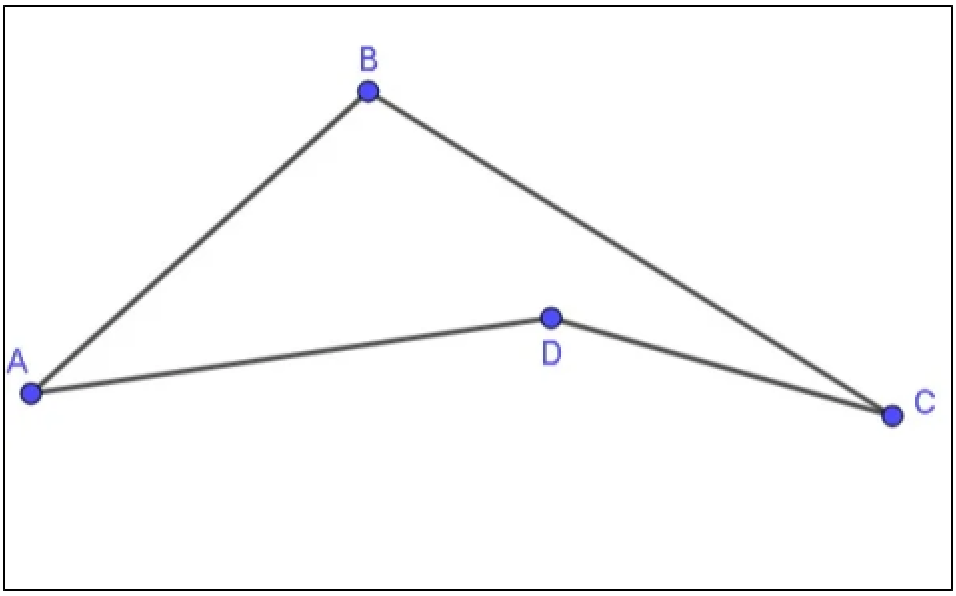


Fonte: Elaboração própria.

Destaca-se, que esta questão oito ressalta a importância da ordem dos elementos nesse caso de congruência. Da mesma forma, deve-se atentar à ordem dos elementos nos demais casos.

9. Quadrilátero é a reunião de quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ sendo A, B, C, e D pontos não colineares três a três. (verdadeiro ou falso)
10. O quadrilátero ABCD é convexo. (verdadeiro ou falso) (Figura 18)

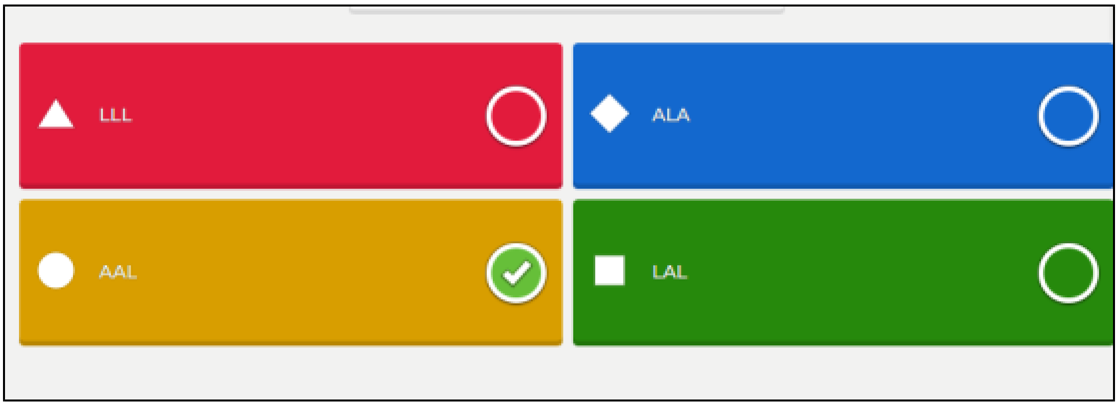
Figura 18 - Imagem da questão 10 do "*Quiz*"



Fonte: Elaboração própria.

11. Todo quadrilátero notável que possui os lados opostos paralelos é um paralelogramo. (verdadeiro ou falso)
12. Todo quadrilátero notável que possui os quatro lados congruentes é um losango. (verdadeiro ou falso)
13. Qual das alternativas não apresenta um caso de congruência de triângulos? (múltipla escolha) (Figura 19)

Figura 19 - Imagem da questão 13 do “*Quiz*”



Fonte: Elaboração própria.

Salienta-se que a alternativa que não constitui um caso de congruência de triângulo é a AAL (Ângulo, Ângulo, Lado), a mesma sequência de elementos apresentada na questão oito.

A justificativa para a exploração da sequência AAL deve-se à observação de um dos autores deste trabalho que, ao atuar na monitoria da disciplina de Geometria I durante seis períodos, evidenciou erros recorrentes por parte dos licenciandos, proporcionados por este “suposto caso de congruência”.

14. Todo quadrilátero notável que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes é um quadrado. (verdadeiro ou falso)

Ao término do jogo, os slides são enviados por e-mail, encerrando o encontro.

A “Atividade de Argumentação matemática I” é apresentada no segundo encontro. A princípio, a atividade é liberada em formato pdf para acesso dos participantes, e, posteriormente, na tela do computador de um dos pesquisadores, é compartilhada para a explicação dos enunciados. Ademais, nesse momento, são realizadas as orientações para entrega das resoluções que devem ocorrer, preferencialmente, por e-mail.

Esta atividade é realizada de forma individual, e os participantes têm aproximadamente uma hora aula para responder às questões.

Ao término da execução das situações problemas por parte dos participantes, a correção é iniciada. Em seu decorrer, os participantes são questionados em relação às respostas, com o intuito de promover uma interação entre os mesmos. Vale destacar que, no final de cada uma das situações, objetiva-se ouvir argumentações orais, pré-elaboradas pelos participantes.

A atividade é estruturada por duas situações problemas. Na primeira situação, a professora solicita que o personagem Cascão justifique a seguinte propriedade dos paralelogramos: “Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes” (Figura 20).

Figura 20 - Enunciado da primeira situação da “Atividade de Argumentação matemática I”

Situação 1

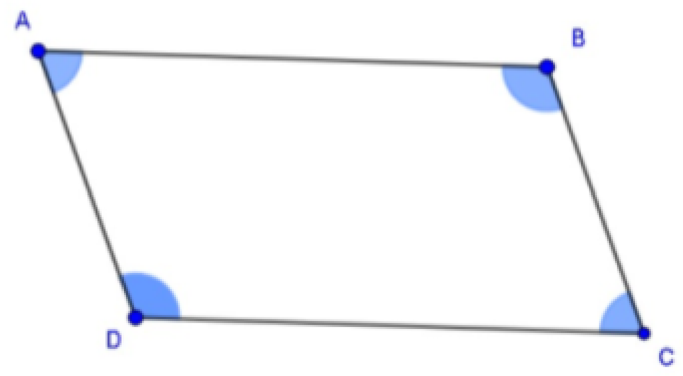
A professora de Cascão pediu para ele justificar a seguinte propriedade dos paralelogramos.

Fonte: Elaboração própria.

Após a leitura do problema, os participantes identificam quais são os ângulos opostos do paralelogramo (Figura 21).

Figura 21 - Identificação dos ângulos opostos de um paralelogramo

Primeiro, Cascão quer identificar os ângulos opostos do paralelogramo. Considerando a figura a seguir, identifique os ângulos opostos.



____

Fonte: Elaboração própria.

A próxima questão tem como objetivo a identificação da propriedade do paralelogramo que o personagem Cascão deseja justificar e qual ideia ele pode utilizar, a partir da definição (Figura 22).

Figura 22 - Distinção entre a propriedade e as ideias a serem utilizadas na situação 1

Cascão precisa identificar quais as ideias que ele pode utilizar a partir da definição de paralelogramo, e qual a propriedade que ele quer justificar. Ajude-o a identificar.

I) Propriedade que ele quer justificar ( ) $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

II) Ideia que ele pode utilizar ( ) $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$

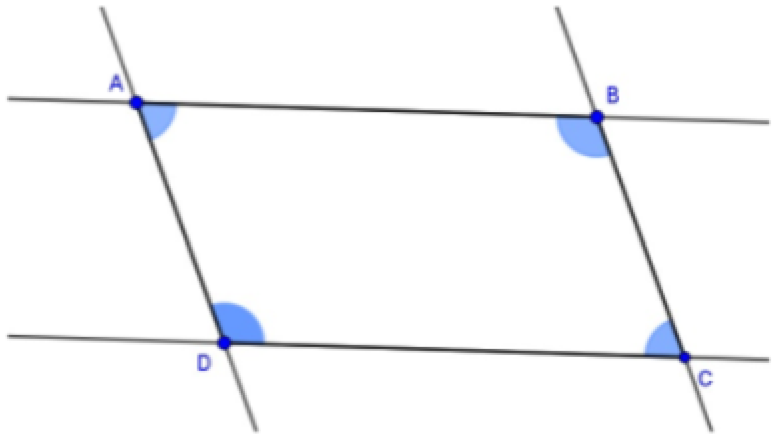
Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, ao identificar a ideia que pode ser utilizada e que é o ponto de partida para a elaboração da argumentação matemática, é exposto um texto, relacionando o conteúdo de retas paralelas com a definição do paralelogramo. Este texto tem como finalidade apresentar um conceito matemático que auxilie o desenvolvimento dos argumentos (Figura 23).

Figura 23 - Texto relacionando à definição de paralelogramo

Após identificar o que pode ser utilizado como verdade, Cascão decidiu explorar esse fato, buscando relacioná-lo com algum conceito matemático que já tenha sido estudado, e a partir daí, obter argumentos que sejam suficientes para justificar a propriedade.

Cascão observou que o conceito matemático relacionado à definição de paralelogramo é o de retas paralelas cortadas por transversais.



Fonte: Elaboração própria.

As próximas perguntas têm como objetivo levantar questões sobre as relações existentes entre os ângulos formados pelas retas paralelas cortadas por retas transversais, que possam auxiliar o personagem no desenvolvimento da argumentação (Figura 24).

Figura 24 - Perguntas finais da primeira situação da “Atividade de Argumentação matemática I”

Em relação à nomenclatura, o que Cascão pode observar a respeito dos ângulos:

I) $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$?

II) $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$?

Em relação à soma, o que Cascão pode observar a respeito dos ângulos:

I) $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$?

II) $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$?

III) Ao comparar os itens I e II, o que é possível afirmar?

Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar, a última pergunta tem como intuito formalizar a propriedade relacionada a congruência dos lados opostos de um paralelogramo (Figura 25).

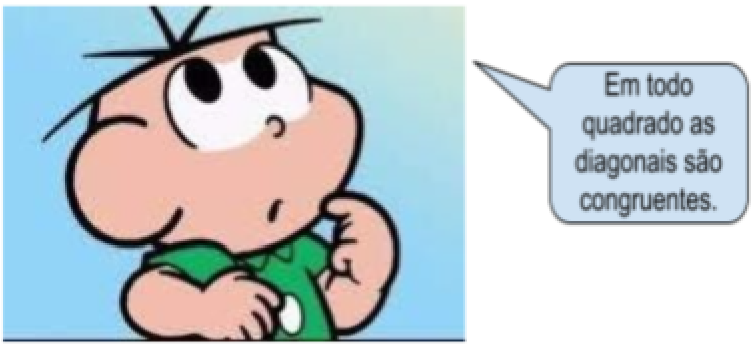
Figura 25 - Última pergunta da primeira situação da “Atividade de Argumentação matemática I”

IV) A partir das observações feitas, que argumentação matemática Cascão pode utilizar para justificar a propriedade?

Fonte: Elaboração própria.

A segunda situação consta do seguinte desafio proposto pelo personagem Cascão ao amigo Cebolinha: “Em todo quadrado, as diagonais são congruentes” (Figura 26).

Figura 26 - Enunciado da segunda situação da “Atividade de Argumentação matemática I”



Fonte: Elaboração própria.

A situação possui estrutura análoga à primeira, com as questões contemplando os mesmos objetivos.

Inicialmente, o participante identifica as diagonais de um quadrado. Logo após, é apresentada uma questão que tem como finalidade distinguir a propriedade a ser justificada das ideias que podem ser utilizadas na situação 2 (Figura 27).

Figura 27 - Identificação da propriedade

Assim como Cascão fez na primeira situação, Cebolinha precisa identificar quais as ideias que ele pode utilizar, a partir da definição de quadrado, e qual a propriedade que ele quer justificar. Ajude-o a identificar.

I) Propriedade que ele quer justificar

II) Ideia que ele pode utilizar

( ) $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

( ) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

( ) $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, os participantes devem estabelecer relações e responder algumas questões. Pretende-se, ao final, justificar a propriedade da congruência das diagonais de um quadrado (Figura 28).

Figura 28 - Últimos enunciados da segunda situação da “Atividade de Argumentação matemática I”

Utilizando-se das informações anteriores, e após observar as figuras acima, Cebolinha percebeu que é possível estabelecer uma relação entre os elementos correspondentes dos dois triângulos. Ajude-o a identificar.

I) $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

II) $A\widehat{D}C$ e $B\widehat{C}D$

III) $\overline{DC}$ e $\overline{CD}$

IV) A partir da relação estabelecida acima, o que Cebolinha pode concluir a respeito dos triângulos ADC e BCD? Por quê?

V) Com base na resposta do item IV, que argumentação matemática Cebolinha pode utilizar para justificar a propriedade?

Fonte: Elaboração própria.

Finalizada a “Atividade de Argumentação matemática I”, inicia-se, no próximo encontro, a “Atividade de Argumentação matemática II”, dividida em Parte 1 e Parte 2.

A Parte 1 tem como objetivo a elaboração da justificativa da seguinte propriedade: “Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes”. Tal argumentação é realizada com base na identificação da relação existente entre os lados opostos de um paralelogramo. Na atividade, esta identificação é facilitada pelo uso de um *applet* no Geogebra que permite visualizar as medidas dos lados.

Inicialmente, os participantes recebem orientações a respeito do envio das resoluções, neste caso, por e-mail, e em seguida, a tela do computador de um dos autores deste trabalho é compartilhada para apresentação da atividade.

A Parte 1 é subdividida em sete itens, em que os seis primeiros são dialogados em conjunto com os participantes (Figura 29).

Figura 29 - Enunciados dos seis primeiros itens da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”

I) Acesse o link: https://www.geogebra.org/classic/mvgveppe

II) Qual o nome do quadrilátero observado?

III) Após observar o quadrilátero ABCD, é possível identificar alguma relação entre as medidas dos lados opostos?

IV) Movimente um dos vértices da figura, exceto o vértice C.

V) O que você observou no item III, continuou ocorrendo mesmo movimentando os vértices?

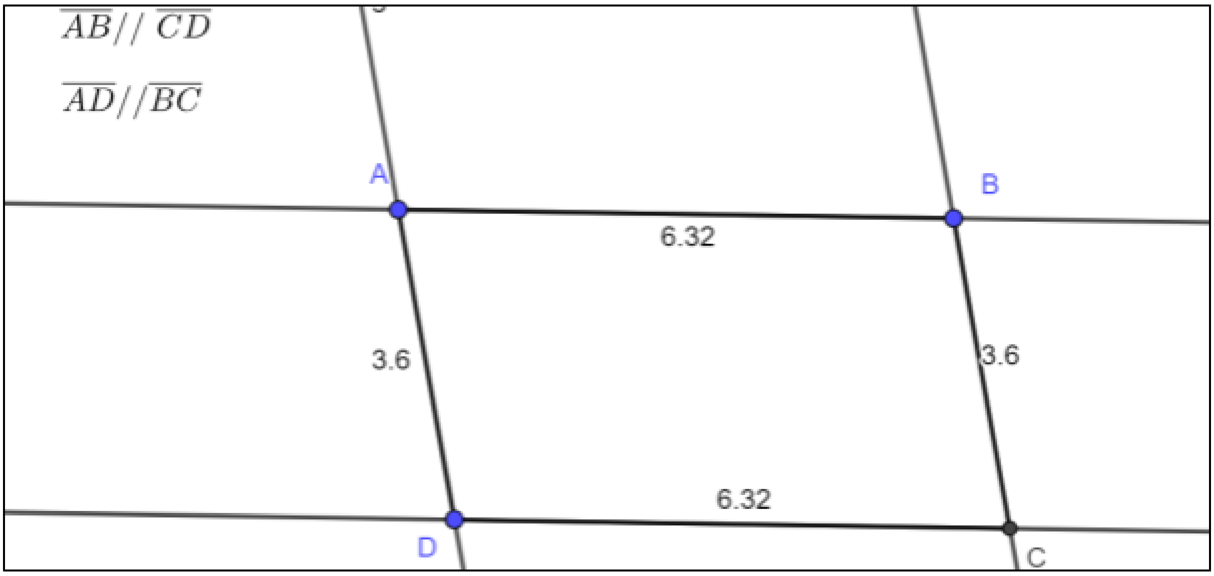
VI) Você acha que a relação identificada será valida para qualquer paralelogramo?

Fonte: Elaboração própria.

Salienta-se que no item II, além da identificação do quadrilátero, os pesquisadores questionam quanto à justificativa para classificação do mesmo, com o intuito de verificar a compreensão das definições de quadriláteros notáveis, apresentadas na “Atividade de requisito”.

Destaca-se novamente que, para auxiliar e proporcionar melhor visualização da propriedade, é utilizada uma construção elaborada no Geogebra (Figura 30).

Figura 30 - Construção utilizada na “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”

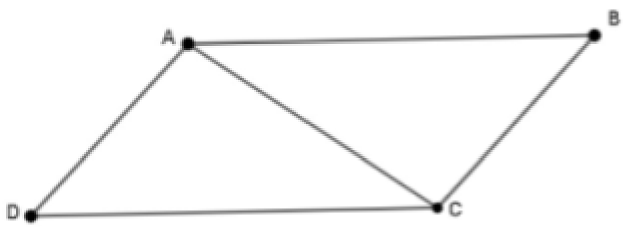


Fonte: Elaboração própria.

O item sete corresponde à justificativa da propriedade do paralelogramo, que foi identificada nos itens anteriores. Além disso, nesse item é averiguado se o participante compreendeu a estruturação de um argumento matemático, abordado na “Atividade de Argumentação matemática I (Parte 1)” (Figura 31).

Figura 31 - Último item da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”

VII) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada no item III.



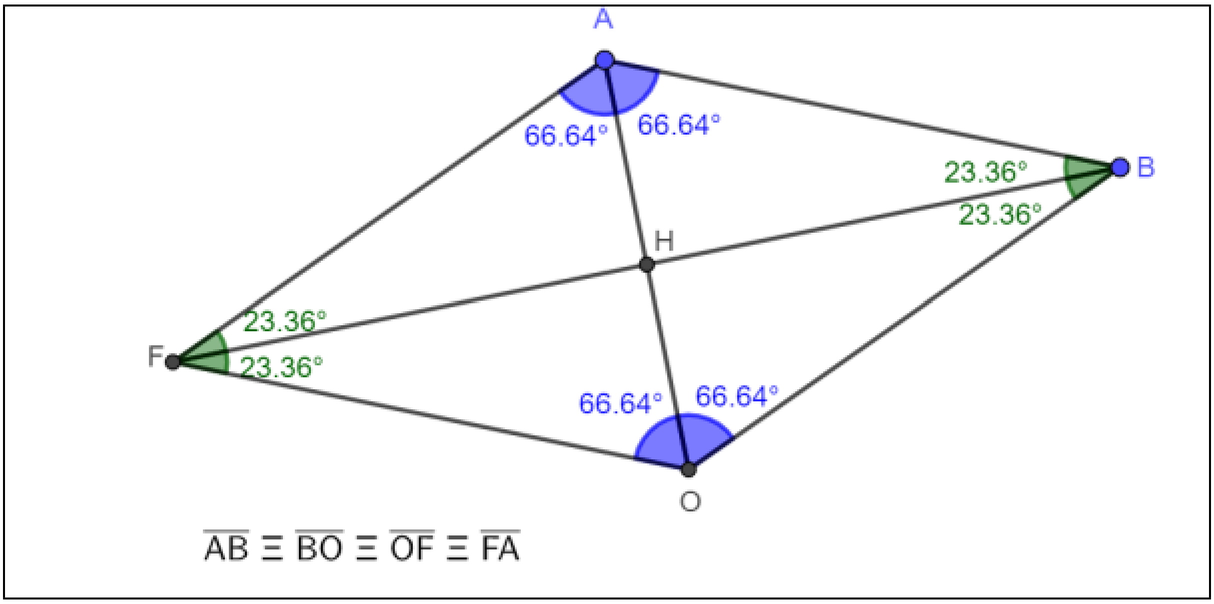
Fonte: Elaboração própria.

O item é resolvido pelos participantes e enviado para os autores, por e-mail, finalizando o encontro.

No próximo, é aplicada a Parte 2, que corresponde a justificativa da seguinte propriedade: “Em todo losango, as diagonais coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos”.

A atividade é estruturada de forma análoga à primeira parte da “Atividade de Argumentação matemática II”, abrangendo os mesmos objetivos. Os sete primeiros itens são dialogados com os participantes, explorando uma construção de um losango elaborada no Geogebra (Figura 32) e o oitavo item é resolvido de forma individual.

Figura 32 - Construção utilizada na "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Elaboração própria.

Devido ao fato de ser o último encontro para a aplicação de atividades, a resolução comentada do oitavo item da Parte 2 é enviada em formato pdf para o e-mail dos participantes, bem como o gabarito de todas as demais atividades discutidas no decorrer dos encontros.

Destaca-se que a maioria dos *applets* utilizados nas atividades foram elaborados pelos pesquisadores.

3.2.1.2 Elaboração do questionário

Para esta pesquisa, foi elaborado um Questionário de Sondagem (APÊNDICE A), com perguntas abertas e fechadas.

O Questionário de Sondagem foi estruturado como formulário no *Google Forms* e respondido *on-line*, de forma síncrona, antes do primeiro encontro para aplicação da proposta pedagógica. Está dividido em quatro seções e tem por objetivo coletar informações sobre os participantes. Algumas respostas podem, inclusive, explicar o processo argumentativo utilizado por eles.

A primeira seção apresenta um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), informando o nome dos autores do trabalho, da orientadora, da instituição e do curso envolvidos. Além disso, esclarece que a pesquisa é de caráter acadêmico, sem ganhos financeiros para os autores do trabalho e solicita a autorização dos participantes para a publicação das respostas obtidas no questionário e nas atividades.

A segunda seção do questionário é denominada “Parte 1: Perfil”, e tem como finalidade coletar informações sobre identidade (nome ou apelido), idade e gênero.

A terceira seção do questionário é denominada “Parte 2: Formação acadêmica e ensino remoto”, cujas perguntas têm como finalidade coletar informações referentes à formação acadêmica do participante, que podem influenciar no processo argumentativo e também tratar de temas relacionados ao ensino remoto, como por exemplo, a proximidade com o uso de tecnologia, incluindo os pontos positivos e negativos de sua utilização.

Por último, a quarta seção do questionário é denominada "Parte 3: A argumentação matemática na Educação Básica”, e inicialmente, apresenta um esclarecimento sobre a argumentação matemática. Essa seção tem como finalidade investigar de que modo a argumentação matemática foi abordada no decorrer da Educação Básica e a familiaridade do participante com o tema.

Vale ressaltar que, no final da seção, é exposta uma questão, apresentando quatro argumentações sobre a seguinte propriedade: “Quando você soma a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°”. Cada argumento matemático refere-se a um nível de prova proposto por Balacheff (1987). Essa questão tem como objetivo verificar em qual nível o participante se encontra naquele momento.

3.2.1.3 Elaboração do Roteiro de Perguntas para a Entrevista

O propósito da realização da entrevista semiestruturada é coletar informações acerca do trabalho desenvolvido.

O roteiro de perguntas para a entrevista semiestruturada (APÊNDICE F) é constituído por oito questões. Destaca-se que a entrevista é realizada após o estudo sobre a apresentação da primeira demonstração formal na disciplina de Geometria I, que ocorreu cinco dias depois de concluída a implementação da proposta pedagógica. A intenção é verificar se o trabalho desenvolvido auxiliou na estruturação das demonstrações.

A primeira questão refere-se à avaliação de alguns tópicos relacionados à proposta pedagógica, a saber: tempo para realização das atividades, clareza nos enunciados das questões, grau de dificuldade das atividades desenvolvidas, qualidade dos materiais utilizados e clareza no questionário.

A segunda questão tem como finalidade verificar qual é a importância da “Atividade de requisito” para a realização da “Atividade de Argumentação matemática I”.

Com o mesmo intuito, a terceira questão aborda a importância da “Atividade de Argumentação matemática I” para a “Atividade de Argumentação matemática II”.

Na quarta questão, pretende-se verificar se os diálogos e conversas, realizadas no decorrer dos encontros, contribuíram para o processo argumentativo do participante.

A quinta questão tem como objetivo verificar como foi o processo de estruturação dos argumentos matemáticos, destacando estratégias utilizadas, dificuldades encontradas e erros recorrentes.

A sexta e sétima questões referem-se à possibilidade da aplicação das atividades elaboradas em uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental, salientando quais seriam suas contribuições.

Por fim, a oitava questão tem como objetivo investigar se as atividades de argumentação matemática desenvolvidas no âmbito deste TCC, auxiliaram o processo de estruturação de uma demonstração formal, tema tratado nas primeiras semanas da disciplina de Geometria I.

3.2.1.4 Teste exploratório

O teste exploratório foi realizado entre os dias 29/11/2021 e 03/12/2021, totalizando cinco encontros consecutivos. O primeiro e o último encontro tiveram duração de uma hora, enquanto os demais tiveram duração de duas horas. A proposta pedagógica foi aplicada a dez licenciandos do quinto período, do curso de Licenciatura em Matemática.

Estes participantes foram convidados devido ao fato de terem cursado recentemente as disciplinas de Geometria plana com desempenho satisfatório, propiciando conhecimentos a respeito da temática, possibilitando um olhar crítico para as possíveis falhas da sequência e ressaltando as dificuldades que os licenciandos do primeiro período podem encontrar no desenvolvimento das atividades.

A realização do teste exploratório teve os seguintes objetivos: (i) analisar aspectos como: tempo de duração, clareza dos enunciados, grau de dificuldade das questões e qualidade dos materiais; (ii) verificar a adequação da sequência didática ao nível pretendido; (iii) avaliar a condução do trabalho por parte dos pesquisadores; e (iv) identificar possíveis dúvidas dos participantes nas atividades e diante das questões propostas.

Os resultados obtidos no teste exploratório, assim como a análise dos dados serão apresentados no Capítulo 4, seção 4.1.

3.2.2 A Implementação

A proposta pedagógica foi aplicada em formato de minicurso para dez licenciandos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação, na cidade de Campos do Goytacazes/RJ. Os encontros foram viabilizados por meio da plataforma *Google meet*.

Para selecionar os licenciandos, inicialmente, foi enviado um e-mail para a professora da disciplina de Geometria I, uma vez que o trabalho foi planejado para que a aplicação ocorresse antes da apresentação da primeira demonstração formal nesta disciplina.

Posteriormente, na primeira aula de Geometria I, os pesquisadores apresentaram a proposta do trabalho e o cronograma das atividades para a turma. Foi disponibilizado um questionário, elaborado no *Google Forms*, e os licenciados que o preencheram, demonstrando interesse e disponibilidade, foram selecionados.

A aplicação da proposta pedagógica aconteceu por meio de um minicurso, dividido em quatro encontros, cada um com duração de aproximadamente duas horas.

Nos quatro encontros estiveram presentes os dez licenciandos. O primeiro encontro ocorreu no dia 15 de fevereiro de 2022; o segundo, no dia 17 de fevereiro de 2022; o terceiro, no dia 18 de fevereiro de 2022; e o quarto encontro, no dia 22 de fevereiro de 2022.

No Capítulo 4, subseção 4.2.2 serão apresentados os resultados e a análise de dados obtidos nesta fase da intervenção pedagógica.

3.2.3 A Avaliação

A avaliação dos efeitos da interferência proposta foi feita por meio dos seguintes instrumentos de coleta de dados: observação, anotações no caderno de campo decorrentes da observação, Questionário de Sondagem, entrevista semiestruturada e gravação em áudio de todos os encontros.

Os dados coletados foram analisados segundo o referencial teórico adotado neste TCC e serão apresentados no Capítulo 4, seção 4.2.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, inicialmente, são descritos e analisados os resultados obtidos no teste exploratório, destacando-se as alterações promovidas após as sugestões dos participantes. Posteriormente, são apresentados os dados obtidos nas fases de implementação e avaliação.

4.1 Teste Exploratório

Nesta seção, são apresentadas as considerações a respeito do Questionário de Sondagem, dos resultados obtidos na aplicação das atividades e dos relatos feitos na entrevista semiestruturada que ocorreu após a realização do teste.

4.1.1 Questionário de Sondagem

Para efeito da escrita monográfica, optou-se por nomear os participantes como: P_1, P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , P_7 , P_8 ,P_9 e P_{10} .

No dia 29 de novembro de 2021, foi realizado o primeiro encontro para a apresentação do Questionário de Sondagem, retratando o objetivo de cada seção. A partir deste encontro, o questionário permaneceu aberto até o dia 04 de dezembro de 2021 para análise. Dos 10 participantes, 8 analisaram o questionário.

Não houve sugestão de alteração. Os participantes relataram que o questionário está estruturado de forma organizada, com uma linguagem adequada, como destacam os comentários abaixo:

> As perguntas estão ótimas e bem claras! (Participante P_7)

> Nenhuma, achei que ficou muito bom!! (Participante P_3)

Ademais, contempla questões que podem influenciar no processo argumentativo do aluno, conforme explicita o participante P_1:

> O formulário está ótimo, acredito que estão descritos todos os fatores que influenciarão na média do conhecimento dos alunos em relação a saber fazer demonstração. (Participante P_1)

O participante P_5 sugeriu que no momento da apresentação do questionário, fosse feita uma orientação em relação à questão 21:

> Sobre a imagem da questão 21, no celular ela está um pouco pequena, acho que vale falar que caso o aluno não consiga ler, basta dar um zoom. (Participante P_5)

A única alteração realizada no questionário foi o título que inicialmente era "Questionário inicial" e depois do teste, passou a ser "Questionário de sondagem". A mudança ocorreu devido ao fato de que o questionário final foi substituído por uma entrevista semiestruturada.

4.1.2 Aplicação da Proposta Pedagógica

A proposta pedagógica, analisada no teste exploratório, foi dividida em três atividades: "Atividade de requisito", "Atividade de Argumentação matemática I" e "Atividade de Argumentação matemática II", esta última dividida em três partes (Quadro 2). Os objetivos das atividades no teste exploratório são iguais aos expostos na subseção 3.2.1.1 (Quadro 1).

Quadro 2 - Cronograma de atividades do teste exploratório com as datas

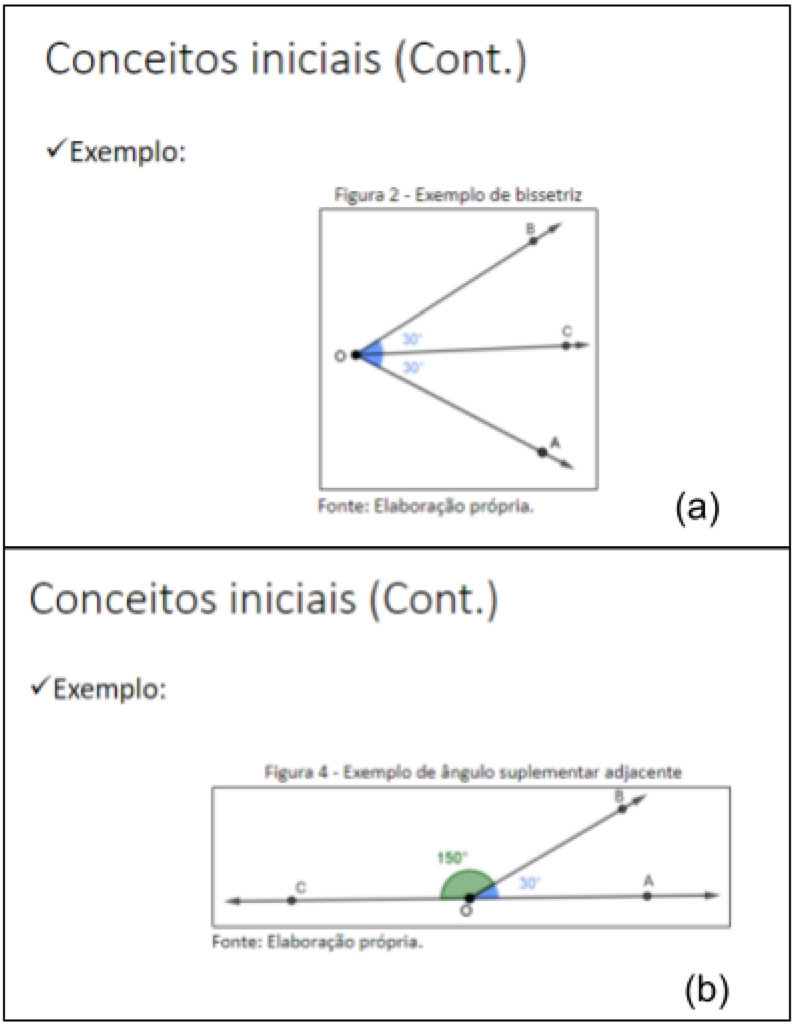
Data	**Atividade**
30/11/2021	Atividade de requisito
01/12/2021	Atividade de Argumentação matemática I
02/12/2021	Atividade de Argumentação matemática II

Fonte: Elaboração própria.

No dia 30 de novembro de 2021, foi realizado o segundo encontro para a aplicação da "Atividade de requisito". Inicialmente, foram apresentados, por meio de slides, alguns conceitos, tais como: bissetriz, ângulo suplementar adjacente, retas perpendiculares e ângulos opostos pelo vértice.

Neste momento, foi observado pelos pesquisadores a necessidade de acrescentar exemplos relacionados às definições de bissetriz e ângulo adjacente suplementar (Figura 33).

Figura 33 - Exemplos de bissetriz de um ângulo (a) e de ângulo suplementar adjacente (b)



Fonte: Elaboração própria.

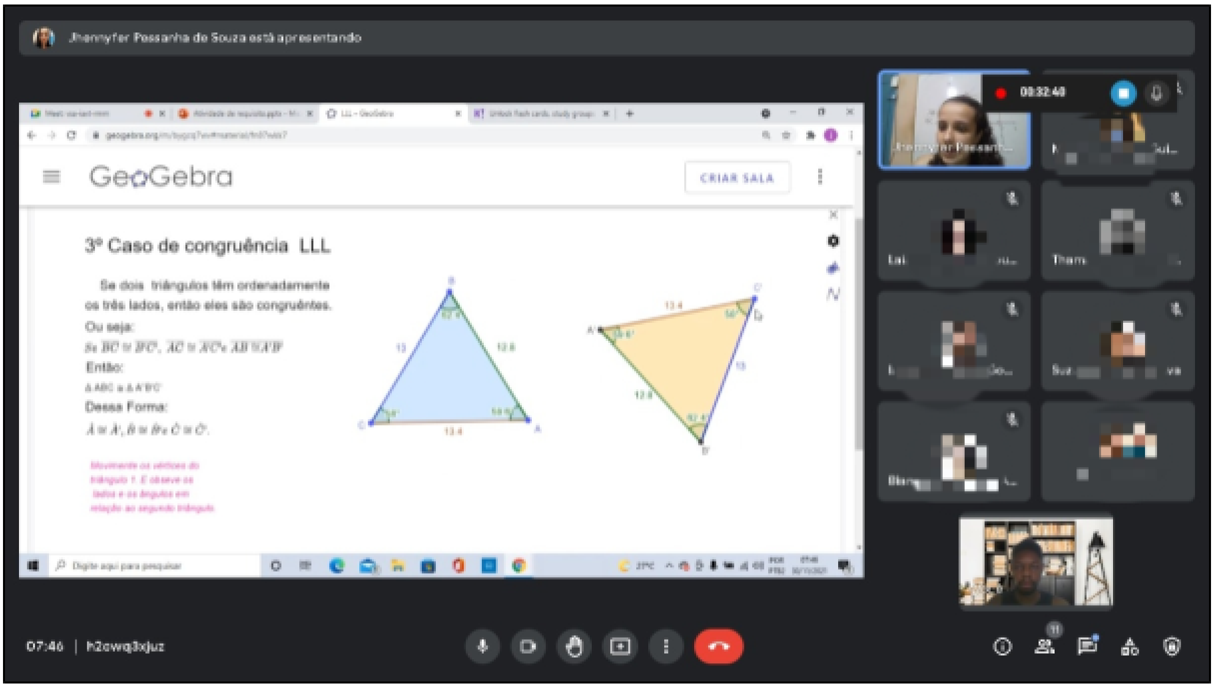
Em seguida, com o auxílio de um *applet* no Geogebra, os pesquisadores explicaram o conteúdo de retas paralelas cortadas por uma transversal, identificando as nomenclaturas e as relações entre alguns pares de ângulos formados.

Da mesma forma, foi trabalhado o conteúdo de congruência de triângulos, abordando os quatros casos de congruência (Figura 34):

- Lado, Ângulo, Lado (LAL);
- Ângulo, Lado, Ângulo (ALA);

- Lado, Lado, Lado (LLL);
- Lado, Ângulo, Ângulo oposto (LAA_o).

Figura 34 - Apresentação dos casos de congruência de triângulos



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

Para finalizar a parte teórica, foram apresentados a definição de quadrilátero, os elementos de um quadrilátero, quadrilátero côncavo e convexo e a definição dos quadriláteros notáveis. De modo geral, os participantes não demonstraram dificuldades, e alguns ressaltaram a importância das imagens e dos *applets* para a compreensão dos conceitos e conteúdos.

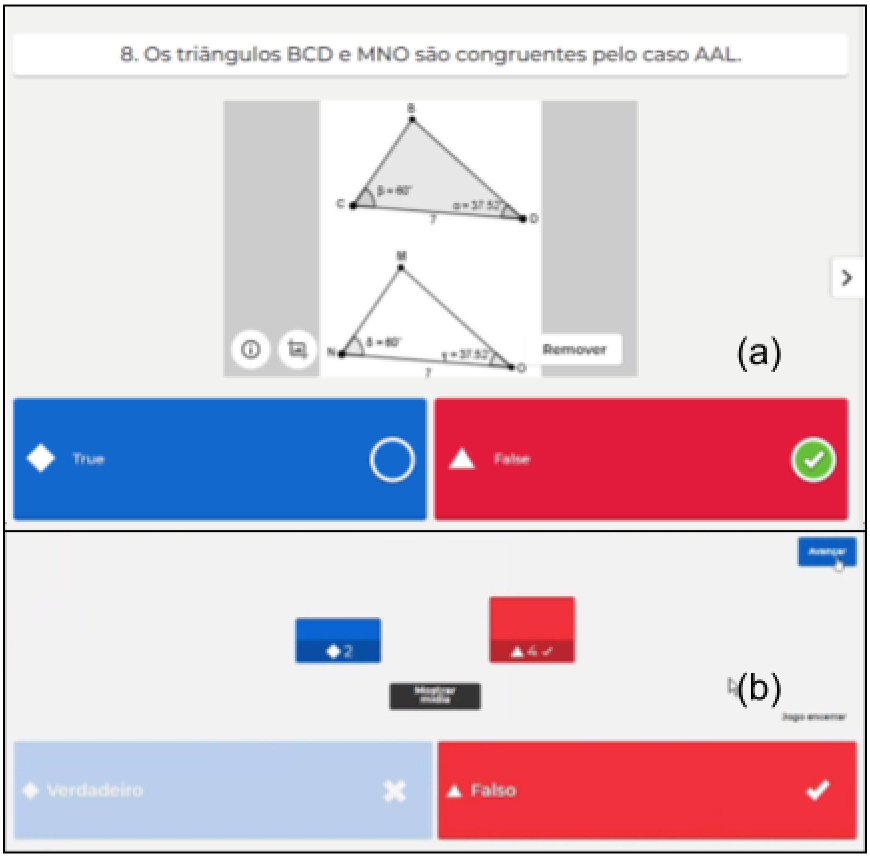
Ao término da parte teórica, foi aplicado um “*Quiz*” elaborado no *kahoot*, contendo 14 questões. Apenas três apresentaram algumas respostas incorretas. O primeiro erro ocorreu na questão quatro, referente a nomenclatura dos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal (Figura 35).

Figura 35 - Pergunta 4 do "*Quiz*" (a) e resposta dos participantes (b)

Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

O segundo erro ocorreu na questão oito, na qual é apresentada a figura de dois triângulos, explicitando um lado e dois ângulos adjacentes a ele, em cada triângulo (Figura 36).

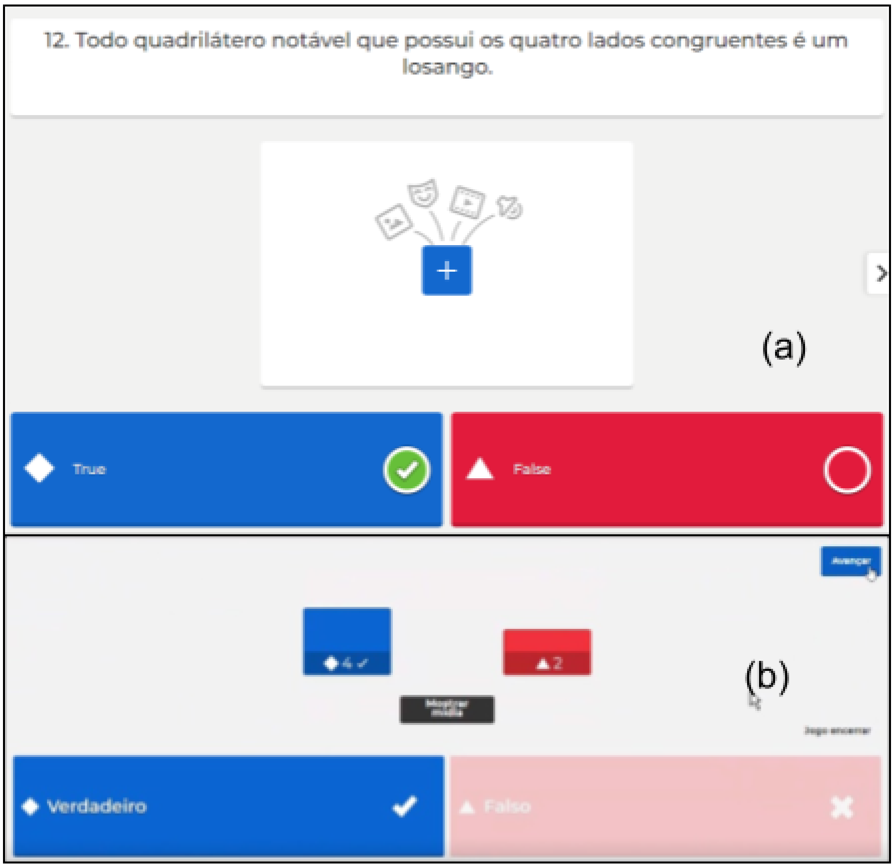
Figura 36 - Pergunta 8 do “*Quiz*” (a) e resposta dos participantes (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

O terceiro erro verificou-se na questão 12, correspondente à definição de um losango (Figura 37).

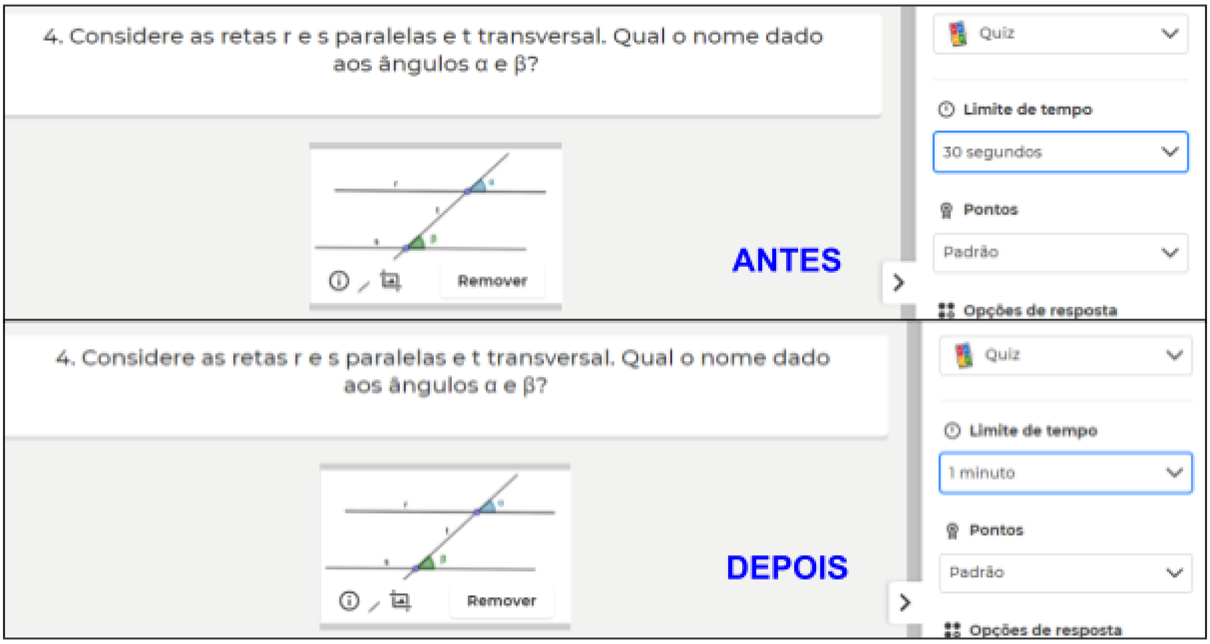
Figura 37 - Pergunta 12 do "*Quiz*" (a) e resposta dos participantes (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

No momento da aplicação do "*Quiz*", foi observado pelos participantes que algumas questões estavam com um tempo insuficiente para resposta. Dessa forma, aumentou-se o tempo em cada uma, como no exemplo abaixo (Figura 38):

Figura 38 - Alteração do tempo das questões após o teste exploratório

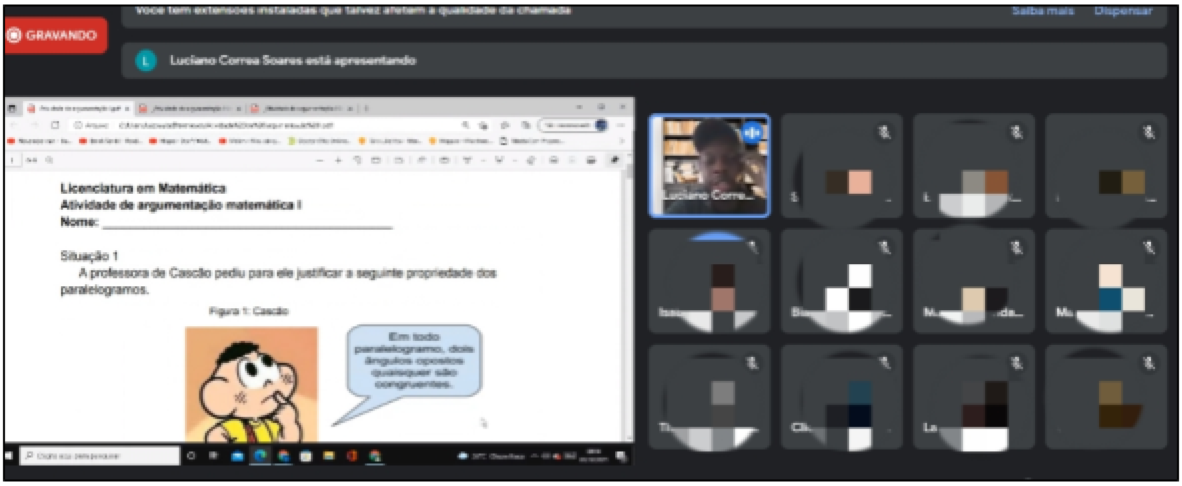


Fonte: Elaboração própria.

No dia 01 de dezembro de 2021, foi realizado o terceiro encontro para a aplicação da "Atividade de Argumentação matemática I", composta por duas situações problemas. Na primeira situação, propõe-se que os participantes argumentem sobre a propriedade da congruência dos ângulos opostos de um paralelogramo qualquer. Na segunda, propõe-se que as participantes argumentem sobre a propriedade da congruência das diagonais de um quadrado.

Inicialmente, foi explicitado seu objetivo e a partir deste momento, os participantes tiveram aproximadamente uma hora para realizá-la (Figura 39).

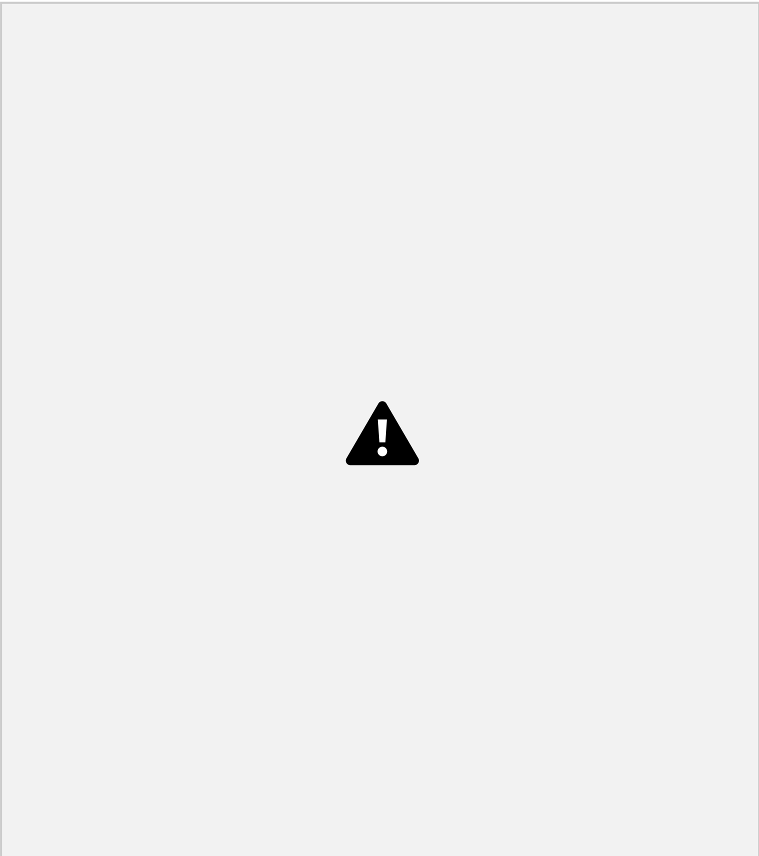
Figura 39 - Apresentação da “Atividade de Argumentação matemática I”



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

Após os participantes finalizarem a resolução, a correção foi iniciada. O participante P_6 observou, no início da situação I, que, na segunda figura do paralelogramo, os vértices estavam trocados (Figura 40).

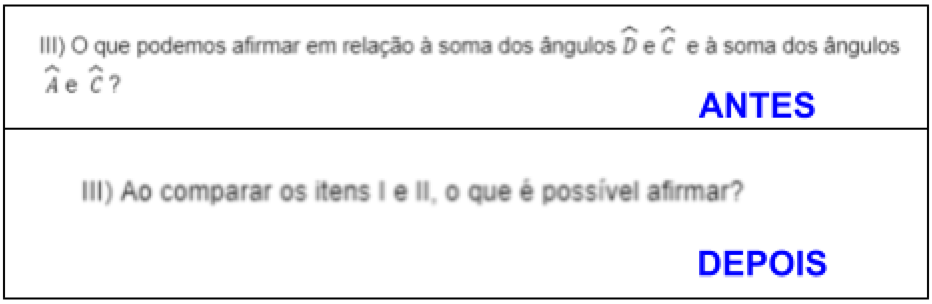
Figura 40 - Paralelogramo antes e depois da observação



Fonte: Elaboração própria.

Ademais, foi alterado o item III da situação 1, pois segundo alguns participantes do teste exploratório, havia risco de dupla interpretação (Figura 41).

Figura 41 - Reformulação do item III da situação 1 da “Atividade de Argumentação matemática I”



III) O que podemos afirmar em relação à soma dos ângulos $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ e à soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$?

ANTES

III) Ao comparar os itens I e II, o que é possível afirmar?

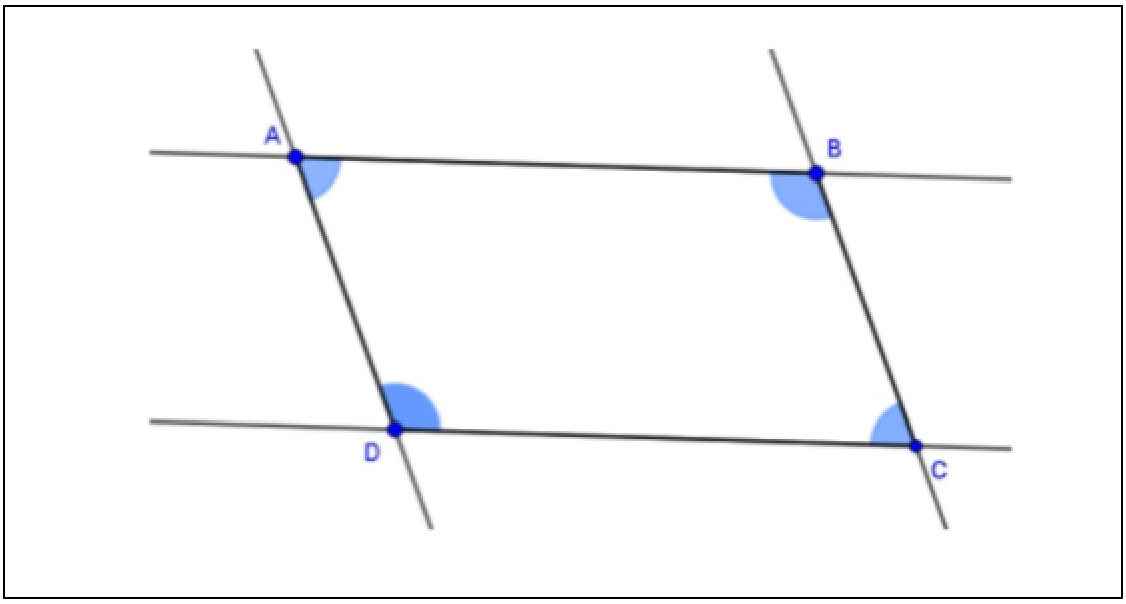
DEPOIS

Fonte: Elaboração própria.

De modo geral, os participantes atuaram de forma ativa e não apresentaram dificuldade. No último item, relativo à argumentação da congruência dos ângulos opostos de um paralelogramo qualquer, o participante P_5 realizou uma argumentação oral (Figura 42):

> [...] comecei falando que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são opostos, tá. Daí eu pego $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Daí eu isolo o ângulo $\widehat{B}$, e acho que $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ são iguais. (Participante P_5)

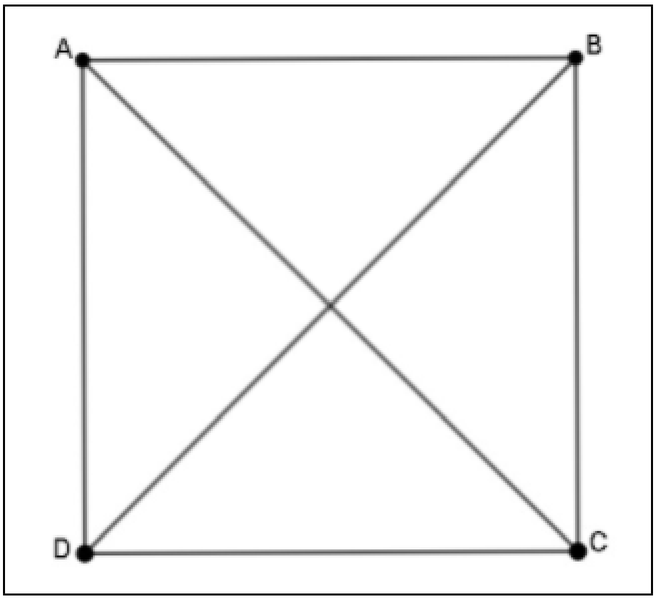
Figura 42 - Paralelogramo da situação 1 da “Atividade de Argumentação matemática I”



Fonte: Elaboração própria.

No último item da situação 2, relativo à argumentação da congruência das diagonais de um quadrado qualquer, o participante P_9 afirmou que os triângulos ADC e BCD são congruentes, porém não justificou o caso de congruência de triângulos (Figura 43).

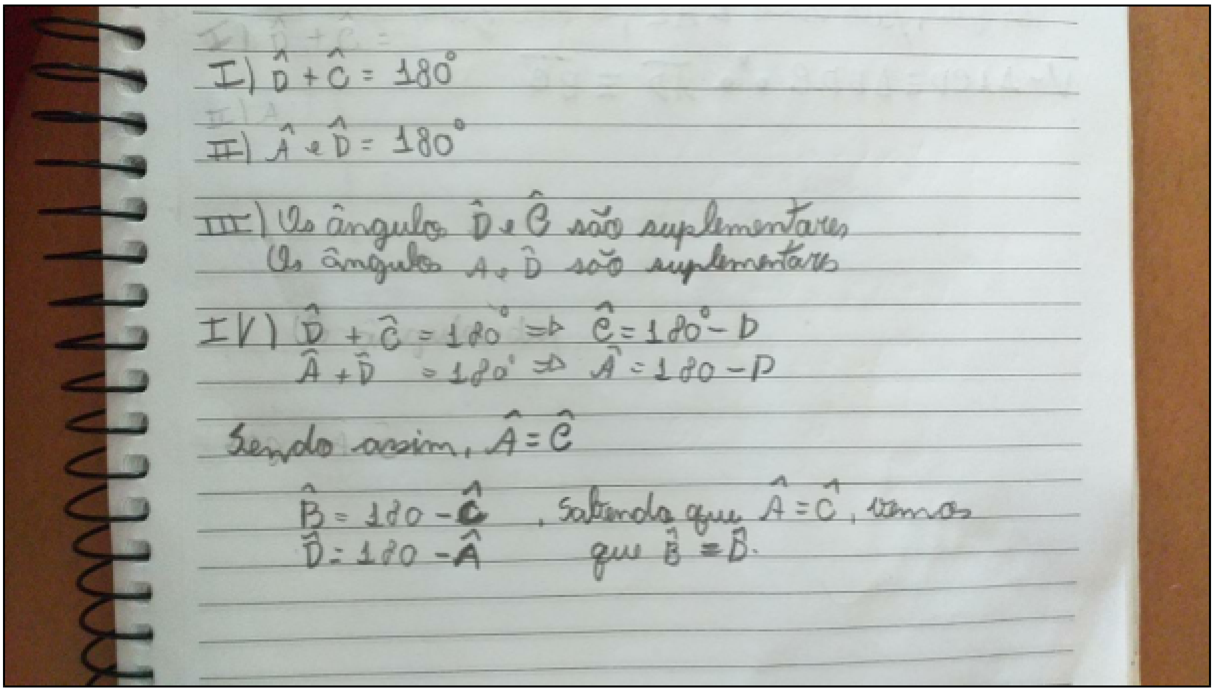
Figura 43 - Quadrado da situação 2 da “Atividade de Argumentação matemática I”



Fonte: Elaboração própria.

Ao analisar as argumentações matemáticas desenvolvidas pelos participantes, no último item da situação 1 da “Atividade de Argumentação matemática I”, observou-se que todos realizaram argumentações que aproximaram-se do quarto nível (Experimento mental), proposto por Balacheff. Abaixo é apresentada uma das argumentações estruturada pelo participante P_8 (Figura 44):

Figura 44 - Argumentação do participante P_8 na primeira situação da "Atividade de Argumentação matemática I"

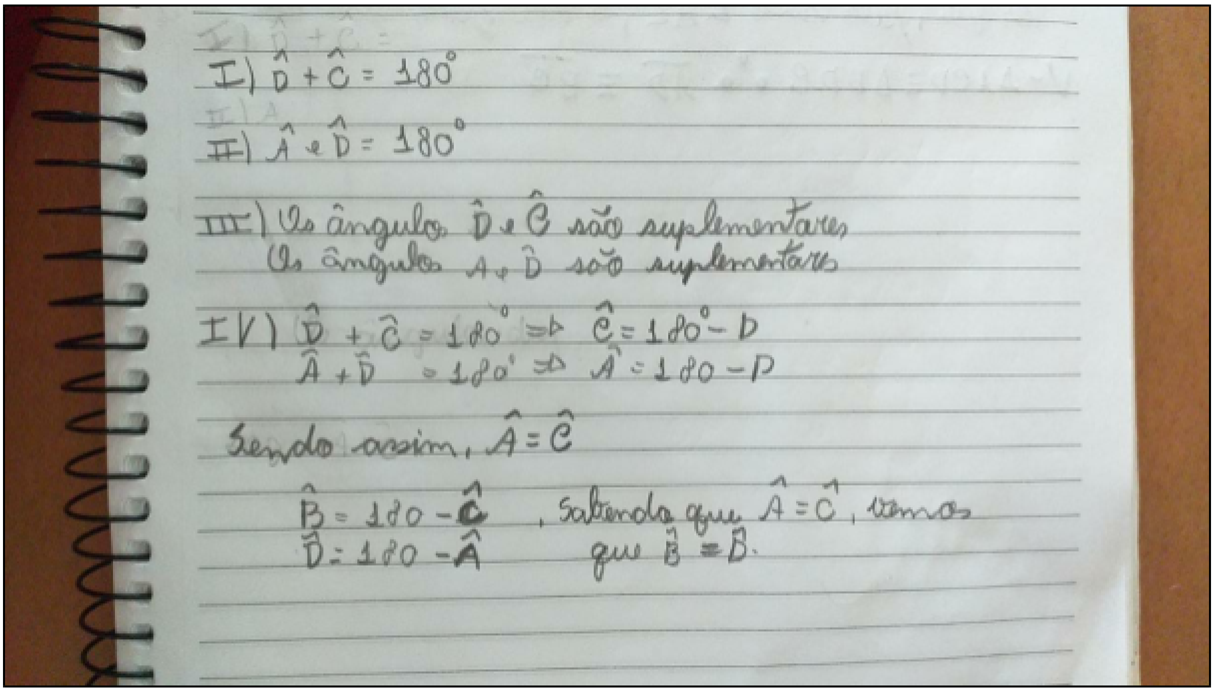


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação às argumentações realizadas no último item da situação 2 da "Atividade de Argumentação matemática I", constatou-se que, com exceção do participante P_3, todos elaboraram argumentações que aproximavam-se do quarto nível (Experimento mental), proposto por Balacheff.

O participante P_3 realizou uma argumentação com pouca simbologia matemática e não justificou a congruência dos elementos mencionados na resolução (Figura 45).

Figura 45 - Argumentação do participante P_3 no item V da situação 2 da “Atividade de Argumentação matemática I”

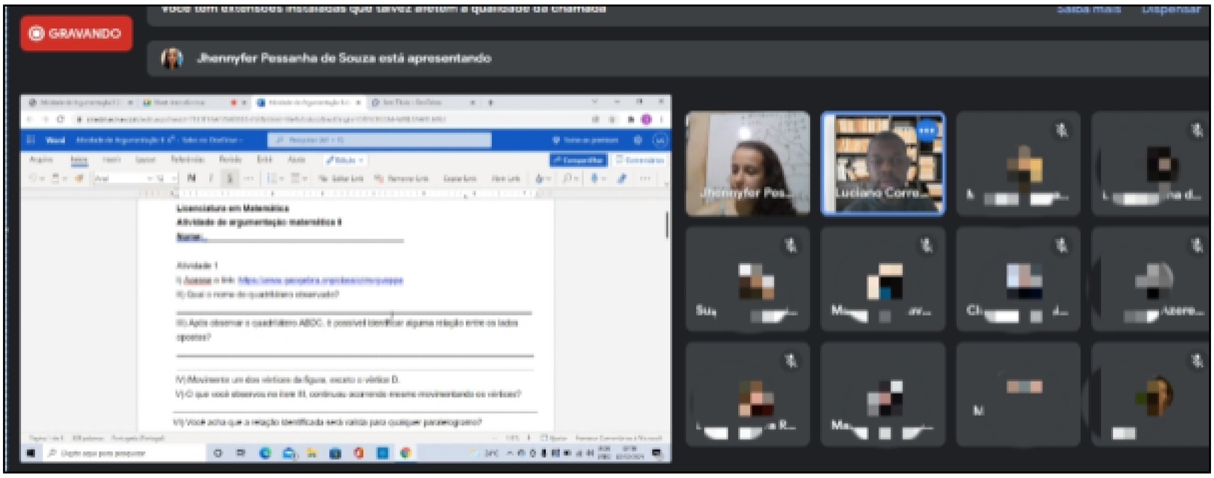


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No dia 2 de dezembro de 2021, foi realizado o quarto encontro para a aplicação da “Atividade de Argumentação matemática II”, composta por três partes. Na primeira, propõe-se que os participantes argumentem sobre a propriedade da congruência dos lados opostos de um paralelogramo qualquer. Na segunda, sobre a propriedade das diagonais de um losango qualquer, coincidirem com as bissetrizes internas, e, por último, que argumentem sobre a propriedade das diagonais de um quadrado intersectarem-se de forma perpendicular.

A atividade foi disponibilizada para os participantes do teste mas, diferente da “Atividade de Argumentação matemática I”, todos os itens foram dialogados juntamente com os pesquisadores, exceto o último de cada parte que consiste na argumentação das propriedades (Figura 46).

Figura 46 - Resolução dos itens da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

Durante a aplicação, no item III da Parte 1, os participantes identificaram duas relações existentes entre os lados opostos do paralelogramo, o paralelismo e a congruência. Como o objetivo da Parte 1 consiste na argumentação da propriedade da congruência dos lados opostos, optou-se por modificar o enunciado (Figura 47).

Figura 47 - Reformulação do item III da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”

III) Após observar o quadrilátero ABCD, é possível identificar alguma relação entre os lados opostos? **ANTES**
III) Após observar o quadrilátero ABCD, é possível identificar alguma relação entre as medidas dos lados opostos? **DEPOIS**

Fonte: Elaboração própria.

Outra modificação ocorreu no último item de cada atividade (Figura 48).

Figura 48 - Reformulação do item VII da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)"

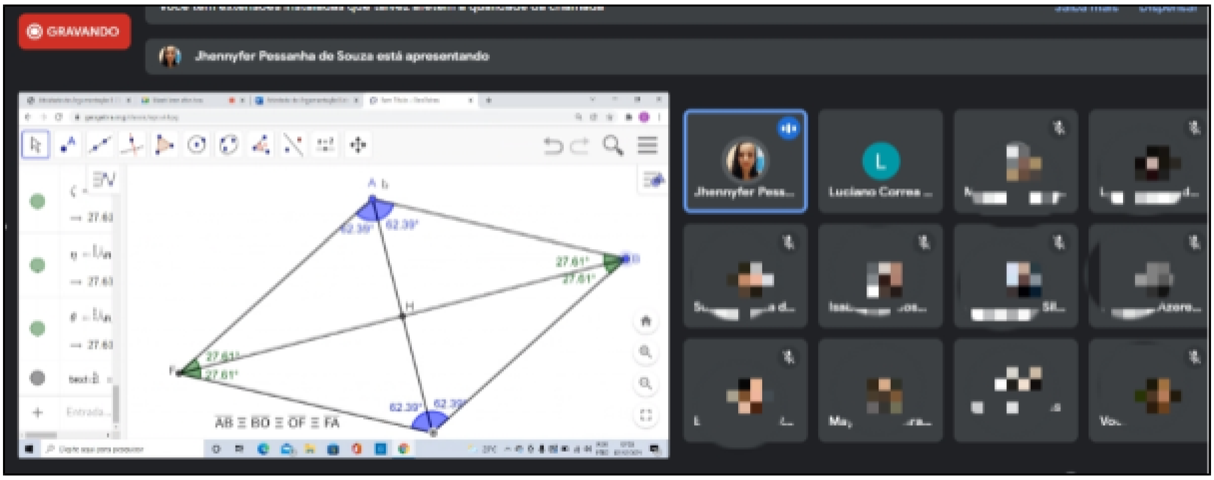
VII) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada.	**ANTES**
IX) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada no item VII?	**DEPOIS**

Fonte: Elaboração própria.

Como previsto pelos pesquisadores, não foi possível aplicar as três partes, devido ao tempo. Desta forma, os itens da Parte 3 (APÊNDICE H) foram discutidos e os participantes não apresentaram dúvidas. Ressaltaram porém, as dificuldades que o público-alvo poderia ter com a questão do tempo, na realização da Parte 3. Devido a este fato, a atividade foi replanejada para ser aplicada em dois encontros e foi retirada a última argumentação.

De modo geral, os participantes não apresentaram dificuldades e observaram que os *applets* contribuíram para a visualização das propriedades (Figura 49). Tal fato está coerente com a pesquisa desenvolvida por Barcelos *et al* [...] (2009), na qual foi possível evidenciar que os applets favorecem a construção de conhecimentos matemáticos.

Figura 49 - Aplicação da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2) "



Fonte: Protocolo de pesquisa. Imagem obtida a partir da captura da tela da *Ferramenta de Captura.*

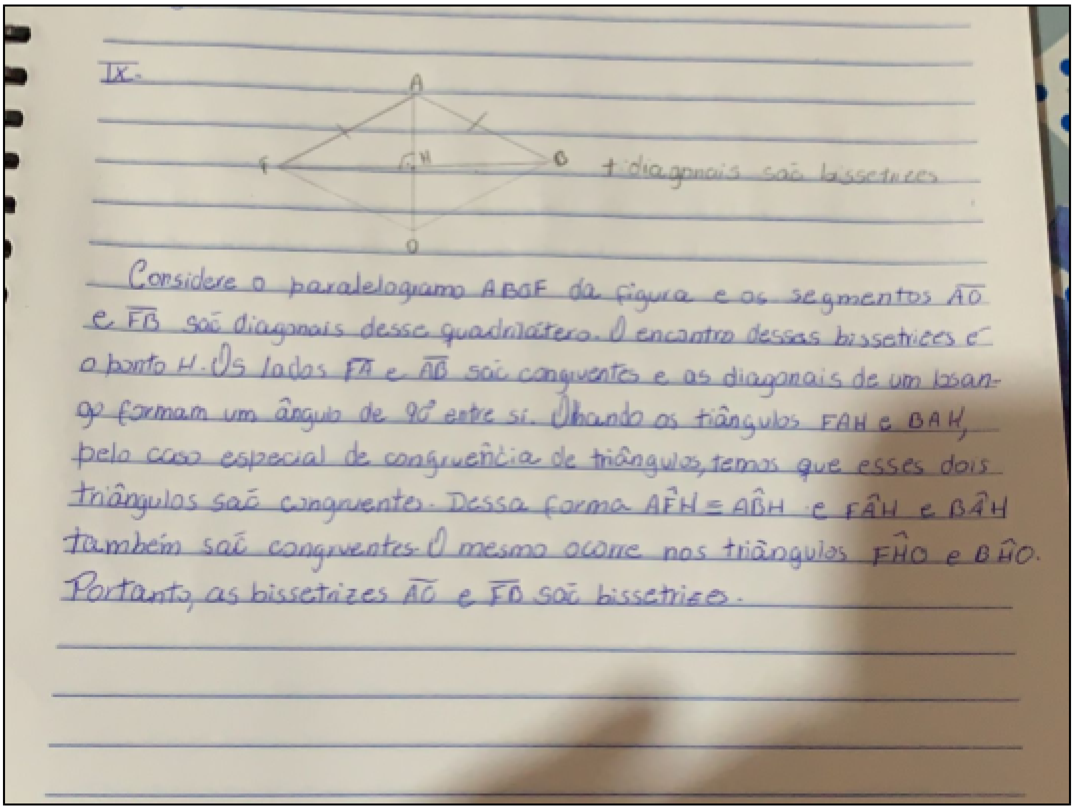
No final da aplicação, uma das participantes fez o seguinte comentário a respeito da "Atividade de Argumentação matemática II":

> Achei muito boa, ela leva a gente a pensar nos nossos argumentos para demonstrar depois. (Participante P_8)

Ao analisar as argumentações realizadas no último item da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)", cujo o objetivo era argumentar que as diagonais do losango coincidem com as bissetrizes internas, foi observado que, com exceção do participante P_{10}, todos desenvolveram justificativas que aproximaram-se de uma demonstração formal. A seguir, serão apresentadas algumas argumentações, destacando pontos importantes.

O participante P_3 utilizou a propriedade das diagonais intersectarem-se de forma perpendicular, propriedade esta, que não foi abordada no decorrer da sequência. Ressalta-se também que em alguns momentos, ele troca a palavra diagonais por bissetrizes (Figura 50).

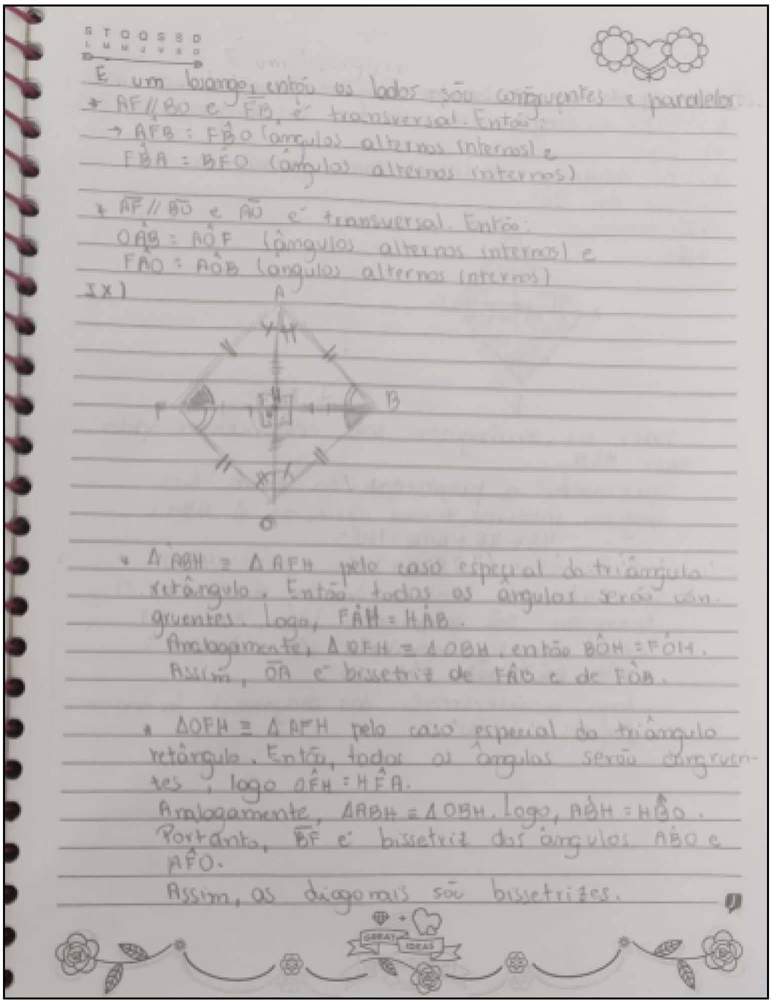
Figura 50 - Argumentação do participante P_3 no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante P_1 elaborou uma demonstração formal, utilizando conceitos de retas paralelas cortada por uma transversal, identificando as nomenclaturas dos ângulos formados pelos lados e as diagonais do losango (Figura 51).

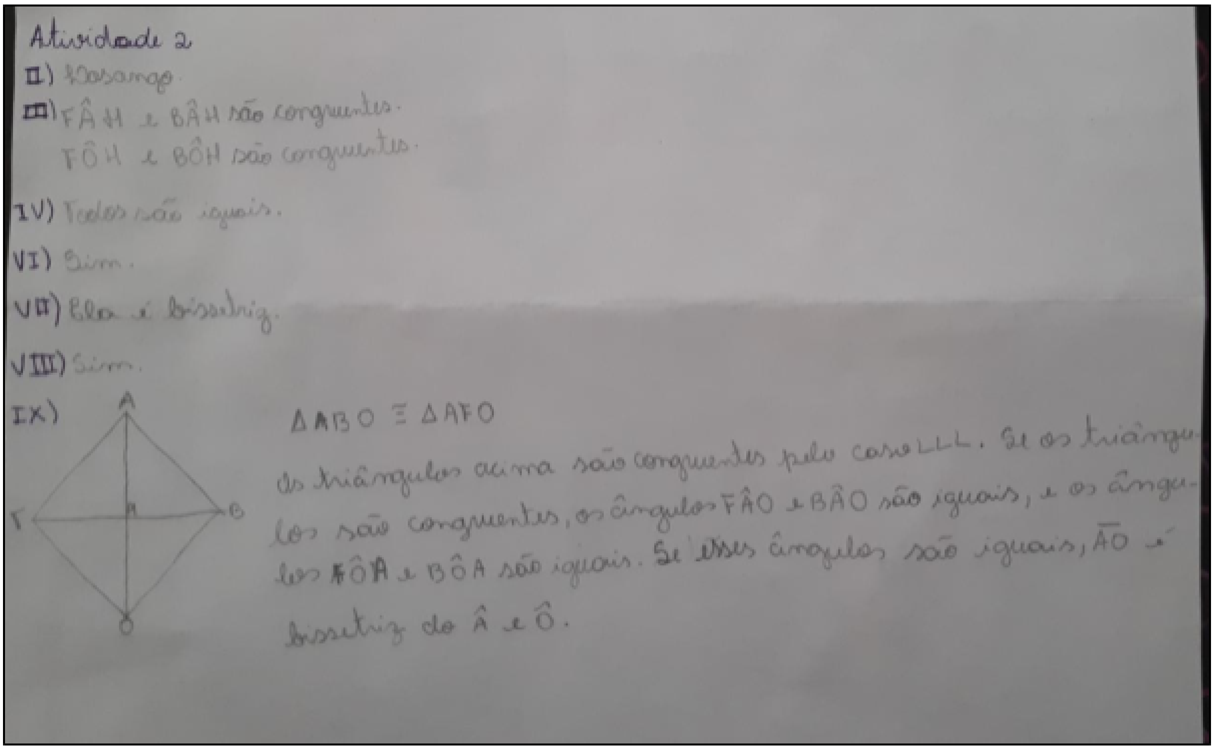
Figura 51 - Argumentação do participante P_1 no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante P_{10} elaborou uma argumentação matemática, entretanto não justificou a congruência dos lados (Figura 52).

Figura 52 - Argumentação do participante P_{10} no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

4.1.3 Entrevista semiestruturada

No dia 03 de dezembro de 2021, foi realizada uma entrevista semiestruturada, com o objetivo de ouvir as sugestões dos participantes a respeito da sequência didática. O roteiro (APÊNDICE G) utilizado na entrevista é composto por 7 perguntas.

Sobre a primeira, os participantes relataram que a "Atividade de requisito" estava organizada, com definições claras, com o tempo adequado de aplicação e materiais de qualidade. Ademais, um participante expôs a contribuição das imagens e do uso do Geogebra para a compreensão das definições.

> As imagens facilitaram muito na visualização, e o Geogebra também. (Participante P_9)

Dorneles (2011) explicita que o Geogebra tem o objetivo de diversificar o ensino da Matemática nas salas de aula, favorecendo o entendimento de alguns conceitos que podem ser explorados por meio do mesmo, e permitindo novas descobertas a partir das potencialidades do software.

Em relação à segunda e à terceira perguntas, alguns participantes evidenciaram a importância da “Atividade de requisito” e relataram que a mesma contempla todos os conceitos necessários para a realização das atividades de argumentação:

> [...] tudo que tá aí, pelo menos eu, usei nas demonstrações posteriores, então, para mim foi muito importante. (Participante P_1)

> [...] serviu como uma revisão de todo o conteúdo que a gente ia precisar para os dois dias. (Participante P_5)

No "*Quiz*", foi sugerido aumentar o tempo de algumas questões com os enunciados longos, fato esse, observado durante a aplicação, por um dos participantes.

Sobre a quarta pergunta, foi destacada que a “Atividade de Argumentação matemática I” estava bem estruturada com uma linguagem adequada. E, na quinta, os participantes reforçaram a importância dessa atividade para a realização da próxima:

> Uma atividade muito leve, muito gostosa de fazer [...]. (Participante P_5)

> Importantíssima, [...] você vai fazendo perguntas bem leves e ele vai conseguindo construir o pensamento aos pouquinhos, sabe? Vai subindo os degraus para chegar à conclusão. (Participante P_6)

Na sexta pergunta, o participante P_3 relatou que o tempo de realização da “Atividade de Argumentação matemática II”, não foi suficiente e o participante P_1 sugeriu que as argumentações fossem trabalhadas em dias distintos. A sugestão foi aceita pelos pesquisadores.

Na última pergunta, foi relatado a respeito da estruturação da “Atividade de Argumentação matemática II”:

> Adorei a atividade, adorei que as perguntas foram muito bem construídas [...] vai pegando os detalhes aos poucos para utilizar lá no final. (Participante P_4)

Ainda nesse momento, o participante P_5, fez a seguinte sugestão, que foi acatada:

> [...] no decorrer da explicação vão utilizando o Geogebra, de repente, acho que seria uma boa disponibilizar a construção, tipo mandar o link no *chat*. (Participante P_5)

De forma geral, as participantes argumentaram sobre a importância do trabalho para os licenciados do primeiro período:

> [...] demonstração é um ponto que a gente tem muita dificuldade. [...] Eu achei muito bom, eu acho que vai ajudar bastante os alunos, porque se eu tivesse no primeiro período, e tivesse esse teste que vocês fizeram, me ajudaria bastante. (Participante P_{10})

> Dá um choque de realidade, mas um choque de realidade conduzido. (Participante P_1)

Desta forma, os pesquisadores observaram que as atividades de argumentação matemática, desenvolvidas nos encontros, contribuíram para a estruturação de uma demonstração, o que está em concordância com os PCN (BRASIL, 1998) ao explicitar que a prática argumentativa é fundamental para a compreensão das demonstrações.

4.2 Implementação e avaliação

Nesta seção são descritos e analisados os resultados obtidos nas duas últimas etapas do processo de intervenção pedagógica, propostas por Damiani (2012), a implementação e a avaliação.

A seção está dividida em três partes: as respostas ao Questionário de Sondagem; a aplicação da proposta pedagógica; e os relatos na entrevista semiestruturada, realizada após a implementação, com as impressões gerais dos licenciandos sobre o trabalho.

4.2.1 Questionário de Sondagem

No dia 14/02/2022 realizou-se um encontro para a aplicação do Questionário de Sondagem. Inicialmente, foi apresentado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e o tema de cada seção, e, posteriormente, enviado o link. Os alunos dispuseram de aproximadamente 50 minutos para responder. Todos concordaram com o Termo de Consentimento e responderam ao questionário.

O Quadro 3 explicita o perfil dos licenciandos segundo a idade e o gênero. Para fins de escrita, suas identidades serão mantidas em sigilo, sendo nomeados por: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, e L_{10} .

Quadro 3 - Perfil dos licenciandos por idade e gênero

Identificação	**Idade**	**Gênero**
L_1	32	Masculino
L_2	19	Masculino
L_3	20	Masculino
L_4	25	Feminino
L_5	18	Feminino
L_6	22	Feminino
L_7	38	Feminino
L_8	27	Masculino
L_9	23	Masculino
L_{10}	19	Masculino

Fonte: Elaboração própria.

O Questionário de Sondagem foi dividido em três partes. A primeira parte foi denominada “Perfil”, e corresponde às três primeiras perguntas.

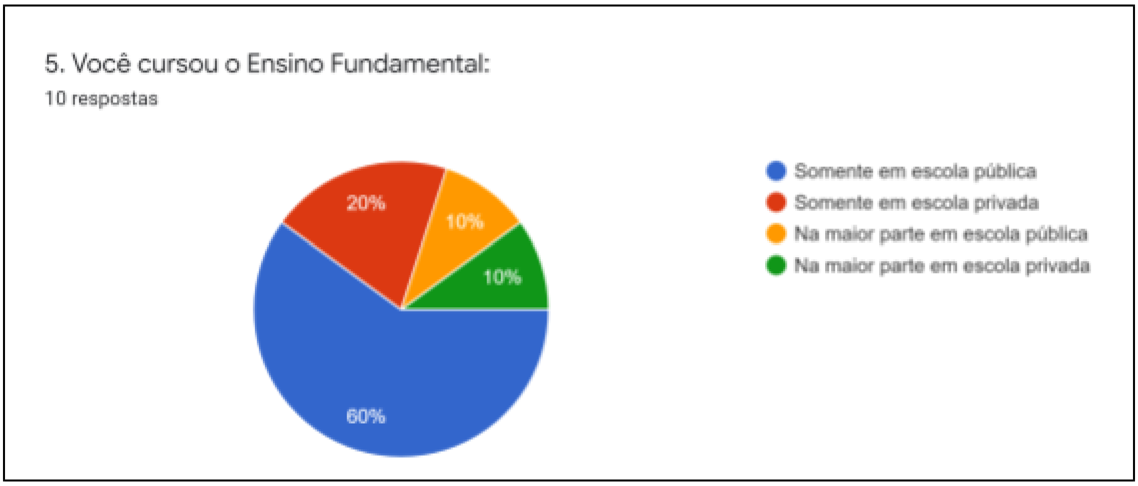
Das respostas obtidas, observou-se que cinco licenciandos tinham entre 20 e 28 anos de idade, um com 18 anos, dois com 19 anos, um com 32 anos e um com 38 anos de idade. Ademais, 6 eram do gênero masculino e 4 eram do gênero feminino.

A segunda parte do questionário foi denominada “Formação acadêmica e ensino remoto”, e corresponde às questões de 4 à 13.

A questão 4 corresponde ao tempo de término do Ensino Médio. Das respostas obteve-se que: um concluiu há 1 ano, três concluíram há 2 anos, um concluiu há pelo menos 3 ou 4 anos, um concluiu há 5 anos, um concluiu há 7 anos, um concluiu há 9 anos (Proeja), um concluiu há 10 anos e um concluiu há 15 anos.

Na quinta questão verificou-se que a maioria dos licenciandos cursou todo o Ensino Fundamental em escola pública (Gráfico 1).

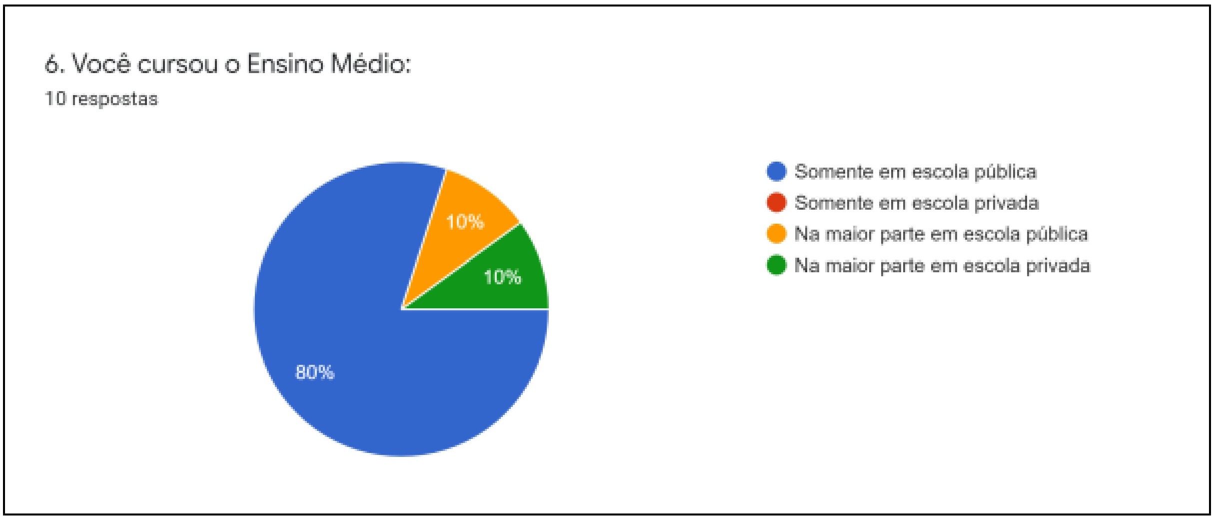
Gráfico 1 - Resposta à questão 5 do Questionário de Sondagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão seis foi observado que: oito licenciados cursaram o Ensino Médio apenas em escola pública, um licenciando cursou a maior parte em escola pública e um licenciando cursou a maior parte em escola privada (Gráfico 2). Além disso, na questão 7, foi evidenciado que um licenciando cursou formação de Professores na Modalidade Normal Médio.

Gráfico 2 - Resposta à questão 6 do Questionário de Sondagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nas questões 8, 9, 10 e 11 foi explicitado que dentre os dez participantes, seis realizaram cursos técnicos, sendo eles: farmácia, eletromecânica, eletrônica, enfermagem, mecânica e caldeiraria. Além disso, o curso de Licenciatura em Matemática é a primeira graduação de todos os participantes.

Na questão 12, constatou-se que metade dos participantes tiveram experiência com o ensino remoto. E, na questão 13, o licenciando L_2 destaca como vantagem desse tipo de ensino, o fato de não precisar locomover-se de sua residência para a instituição, o que propicia a realização de mais de uma tarefa, simultaneamente. Como desvantagem, menciona o cansaço mental, devido ao grande tempo em frente à tela do computador.

O licenciando L_6 aponta como desvantagem a necessidade do acesso à internet e dispositivos:

> Tem que ter acesso a internet com o sinal bom para conseguir assistir as aulas e também ter celular ou microcomputadores para ter acesso às aulas, mas nem todos têm condições financeiras para ter um dispositivo. (Licenciando L_6)

Esta afirmação está em consonância com Carvalho, Esquincalha, Marquês (2021) ao destacar que muitos alunos não possuem condições de acesso às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, demandadas pelo ensino remoto, devido à qualidade da internet disponível ou à falta de dispositivos.

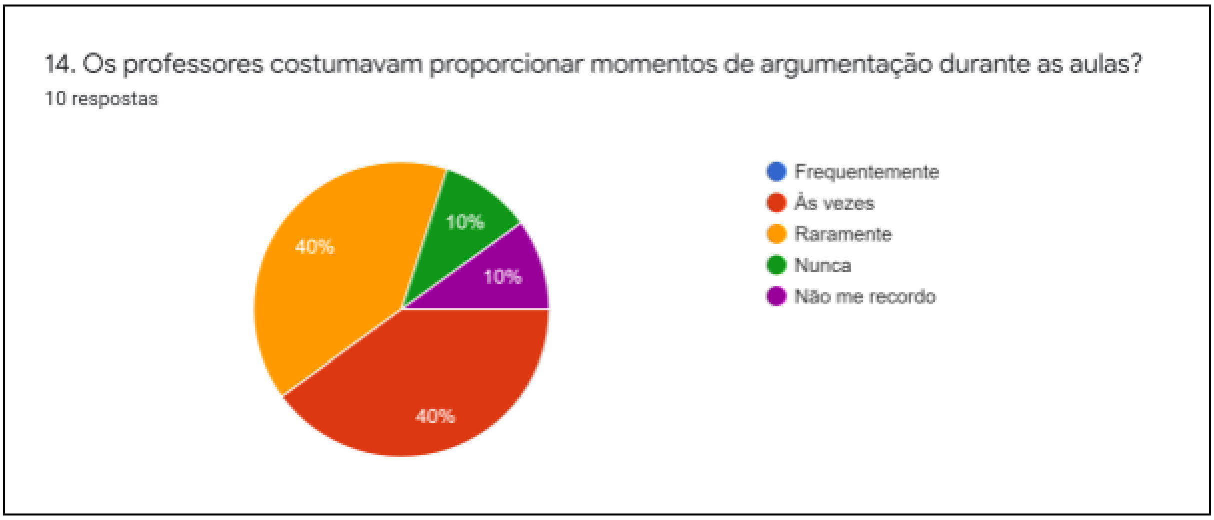
O licenciando L_7 não menciona desvantagens em relação ao ensino remoto e afirma que:

> Aprendo muito melhor remotamente pois adapto meu dia ao ensino. (Licenciando L_7)

A terceira parte do questionário foi denominada “A argumentação matemática na Educação Básica”, e corresponde às demais questões.

Na questão 14, referente aos momentos de argumentação proporcionados pelos professores no decorrer da Educação Básica, cinco licenciandos alegaram que nunca ou raramente ocorriam. Ressalta-se que nenhum licenciando marcou a opção frequentemente (Gráfico 3).

Gráfico 3 - Resposta à questão 14 do Questionário de Sondagem

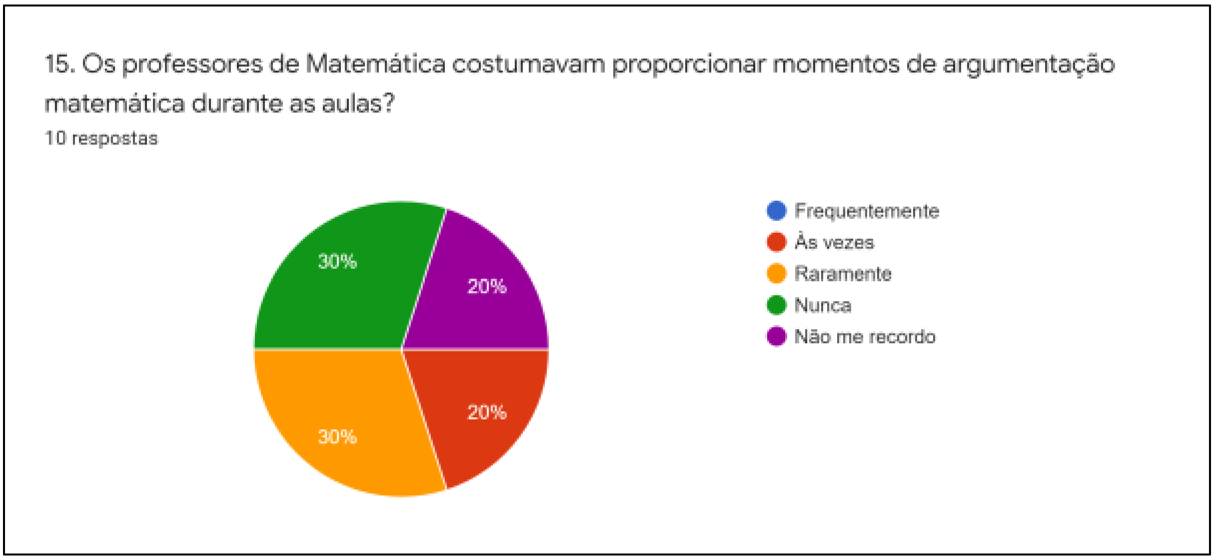


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação aos momentos de argumentação matemática proporcionados pelos professores de Matemática, constatou-se que a maioria assinalou que nunca ou raramente ocorriam (Gráfico 4). Da mesma forma que na questão anterior, salienta-se que nenhum dos licenciandos sinalizou a opção frequentemente.

A ausência do trabalho com argumentação matemática também foi verificado por Lima e Lins (2015), em uma pesquisa realizada com alguns alunos do Ensino Médio, na qual, os resultados evidenciaram: “ausência do pensamento e argumentação matemáticos no ensino da Matemática a nível escolar, o que faz-nos apontar a urgente necessidade de mudança e reformulação em nossas práticas enquanto professores de Matemática da educação básica” (LIMA; LINS, 2016, n.p).

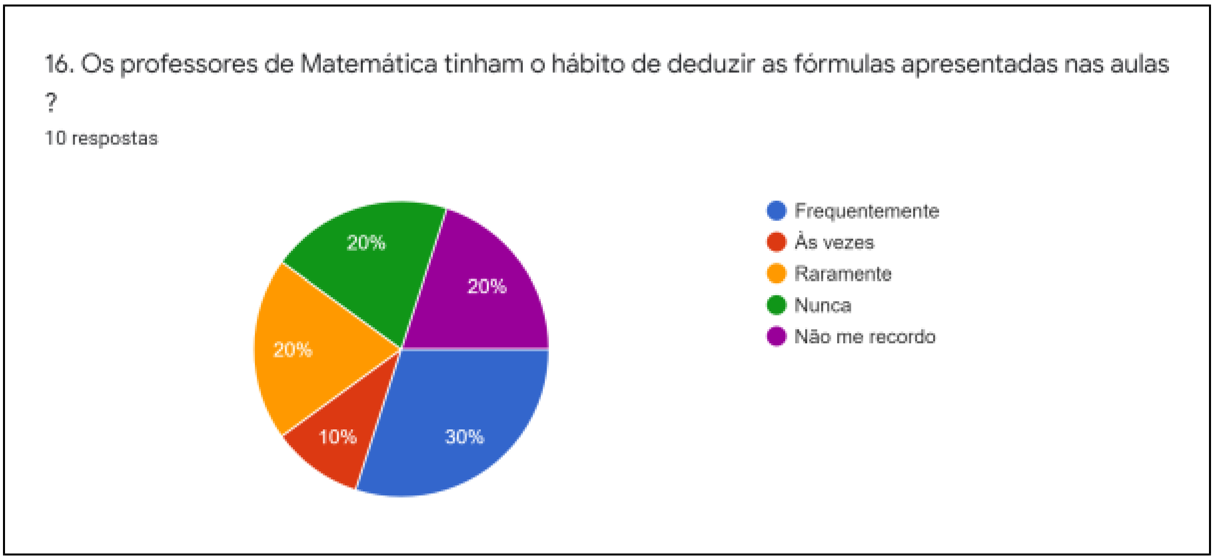
Gráfico 4 - Resposta à questão 15 do Questionário de Sondagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 16, conforme apresentado no Gráfico 5, em relação ao hábito de deduzir as fórmulas apresentadas nas aulas de Matemática, por parte dos professores, apenas 3 licenciandos afirmaram que tal situação ocorria frequentemente. Esse fato, está de acordo com Amorim (2017), ao expor que em Álgebra e, principalmente, em Geometria, o trabalho com provas, demonstrações de teoremas ou propriedades deixa muito a desejar.

Gráfico 5 - Resposta à questão 16 do Questionário de Sondagem



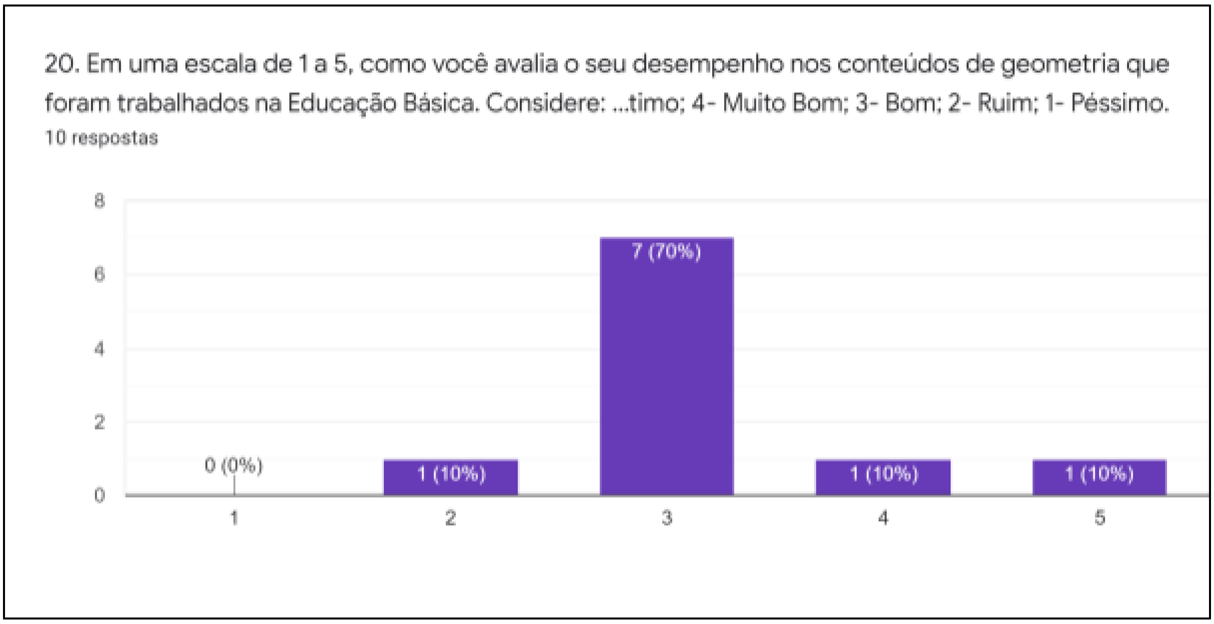
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 17, verificou-se que seis licenciandos consideram a dedução das fórmulas um fator positivo para o processo de ensino e aprendizagem, um licenciando não considera, dois licenciandos responderam talvez e dois licenciandos não souberam opinar. Na questão 18, o licenciando L_1, o único que afirmou não considerar a dedução das fórmulas um fator positivo, não justificou sua opinião. O licenciando L_3, por sua vez, argumenta que:

> Considero um método de aprendizagem positivo, pois sempre que deduzimos algo, automaticamente estamos usando o raciocínio, na matemática como uma coisa leva a outra, a dedução é um termo indispensável. (Licenciando L_3)

Na questão 19, que trata do desempenho na disciplina de Matemática, no decorrer da Educação Básica, dois licenciandos avaliaram como ruim, quatro licenciandos avaliaram como bom, dois avaliaram como muito bom e dois licenciandos avaliaram como ótimo. E, na questão 20, em relação ao desempenho nos conteúdos de Geometria, a maioria dos licenciandos avaliou como bom (Gráfico 6).

Gráfico 6 - Resposta à questão 20 do Questionário de Sondagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 21 letra A, na qual os licenciandos deveriam escolher a argumentação matemática mais parecida com a que eles elaborariam para justificar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, quatro licenciandos escolheram a argumentação de

Dario, quatro licenciandos escolheram a argumentação de Cíntia e dois licenciandos escolheram a argumentação de Amanda. Observa-se que os quatro licenciandos que optaram pela argumentação de Dario, encontram-se no primeiro nível de prova proposto por Balacheff (Empirismo ingênuo), os quatro licenciandos que optaram pela argumentação de Cíntia, no quarto nível de prova proposto por Balacheff (Experimento mental) e os dois licenciandos que optaram pela argumentação de Amanda, no segundo nível de prova proposto por Balacheff (Experimento crucial).

Para justificar a escolha da argumentação de Dario o licenciando L_{10} explicita que:

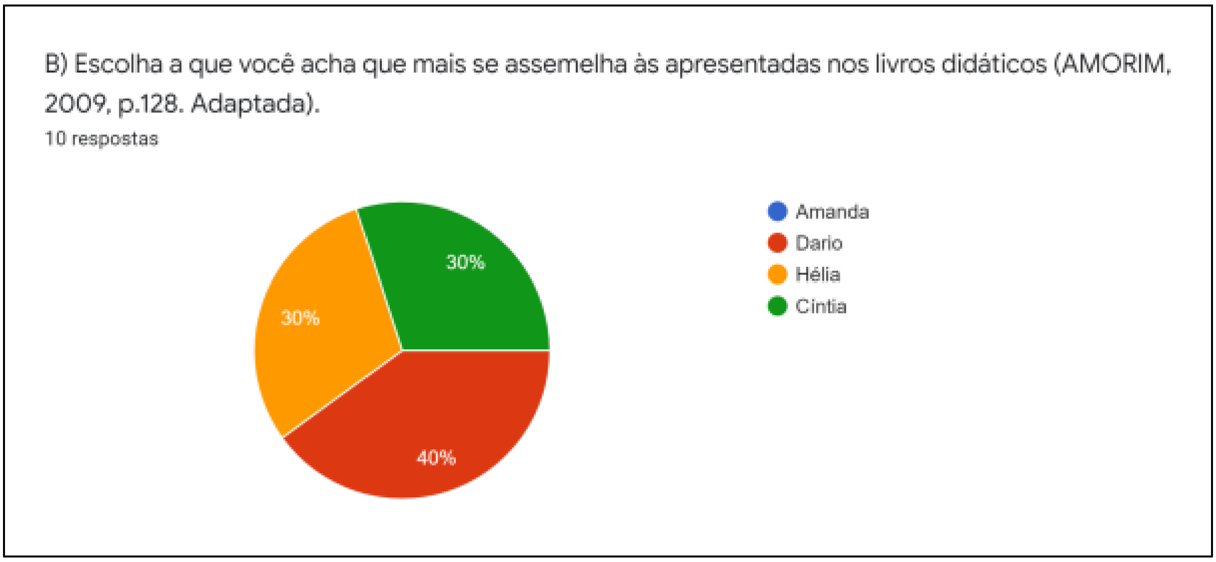
> Acredito ser a forma mais simples de mostrar que a afirmativa é verdadeira, pensando em provar essa afirmativa para diferentes faixas etárias, essa na minha concepção, seria a que a maioria entenderia. (Licenciando L_{10})

O licenciando L_5 optou pela argumentação que corresponde ao quarto nível de prova proposto por Balacheff e afirmou ser a mais simples:

> Achei a resposta de Cintia mais simples e explicativa, sem muito enrolo e dificuldade para os alunos entenderem. (Licenciando L_5)

Na questão 21 letra B, na qual os licenciandos deveriam escolher a argumentação matemática que mais se assemelha às apresentadas nos livros didáticos, evidencia-se que 40% (4 licenciandos) optaram pela argumentação matemática de Dario, que se enquadra no primeiro nível de argumentação matemática (Gráfico 7).

Gráfico 7 - Resposta à questão 21 do Questionário de Sondagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_{10} escolheu a argumentação de Hélia, relacionado ao terceiro nível de argumentação (Exemplo genérico), proposto por Balacheff e justificou que:

> Para mim é a que mais se assemelha porque é uma forma simples, porém, é a que mostra de uma forma mais "completa". (Licenciando L_{10})

4.2.2 Aplicação da Proposta Pedagógica

A proposta pedagógica foi aplicada por meio de um minicurso. O Quadro 4 apresenta o cronograma dos quatro dias de aplicação.

Quadro 4 - Cronograma de atividades da proposta pedagógica

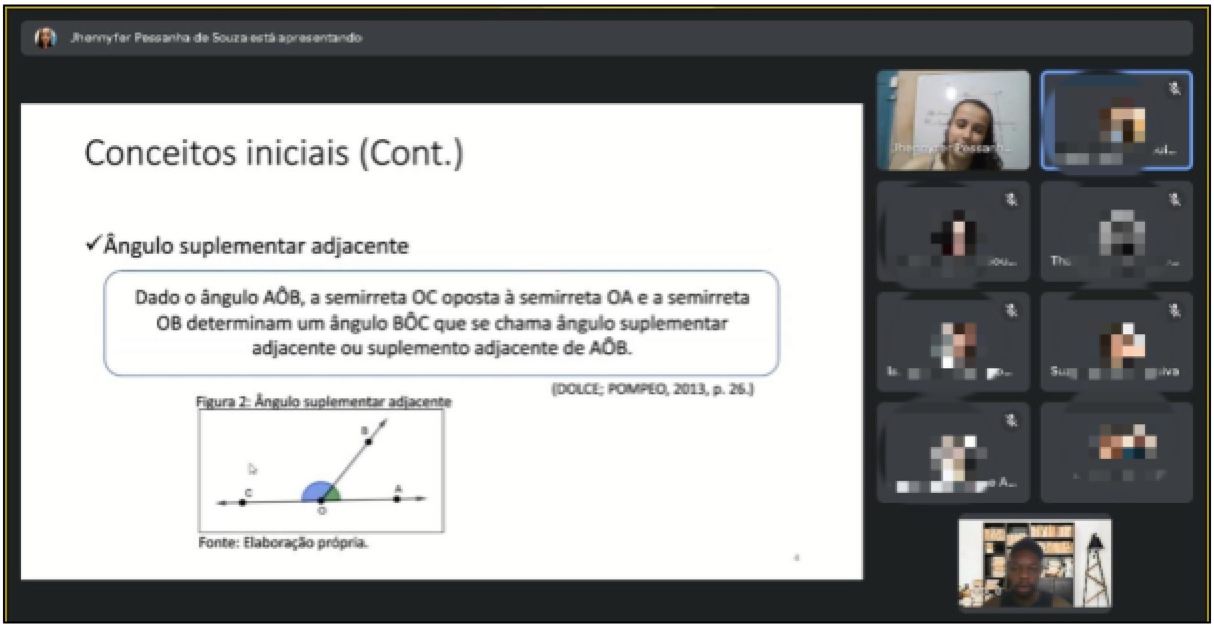
Dia	**Atividade**
15/02/2022	Atividade de requisito
	Quiz
17/02/2022	Atividade de Argumentação matemática I
18/02/2022	Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)
22/02/2022	Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)

Fonte: Elaboração própria.

Os quatro encontros destinados para a aplicação da proposta pedagógica foram gravados, sob a autorização dos licenciandos participantes.

No dia 15 de fevereiro de 2022, foi realizado o primeiro encontro para a aplicação da "Atividade de requisito" e do *"Quiz"*. Inicialmente, por meio de slides, foram apresentados alguns conceitos iniciais, importantes para a compreensão das atividades de argumentação. Na conceituação de bissetriz, os licenciandos não demonstraram dúvidas, mas na apresentação da definição de ângulo suplementar adjacente, o licenciando L_3 questionou a respeito da posição das semirretas opostas, uma vez que no exemplo utilizado, as mesmas estavam na horizontal. Os pesquisadores responderam que a definição independe da posição das semirretas opostas (Figura 53).

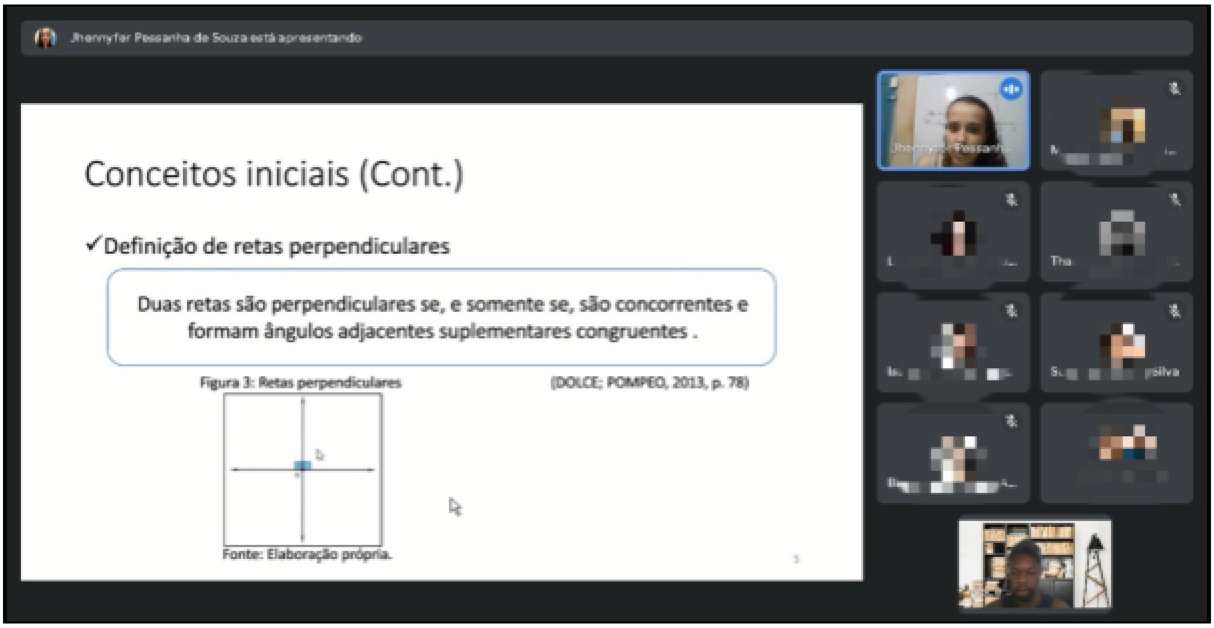
Figura 53 - Apresentação do conceito de ângulo suplementar adjacente



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto ao conceito de retas perpendiculares, o licenciando L_{10} perguntou se uma alteração na inclinação da reta que está na vertical, modificaria o fato das retas serem perpendiculares. Os pesquisadores argumentaram que, se fosse alterada a inclinação da reta na vertical, os ângulos suplementares adjacentes deixariam de ser congruentes, e, consequentemente, as retas deixariam de ser perpendiculares (Figura 54).

Figura 54 - Apresentação da definição de retas perpendiculares



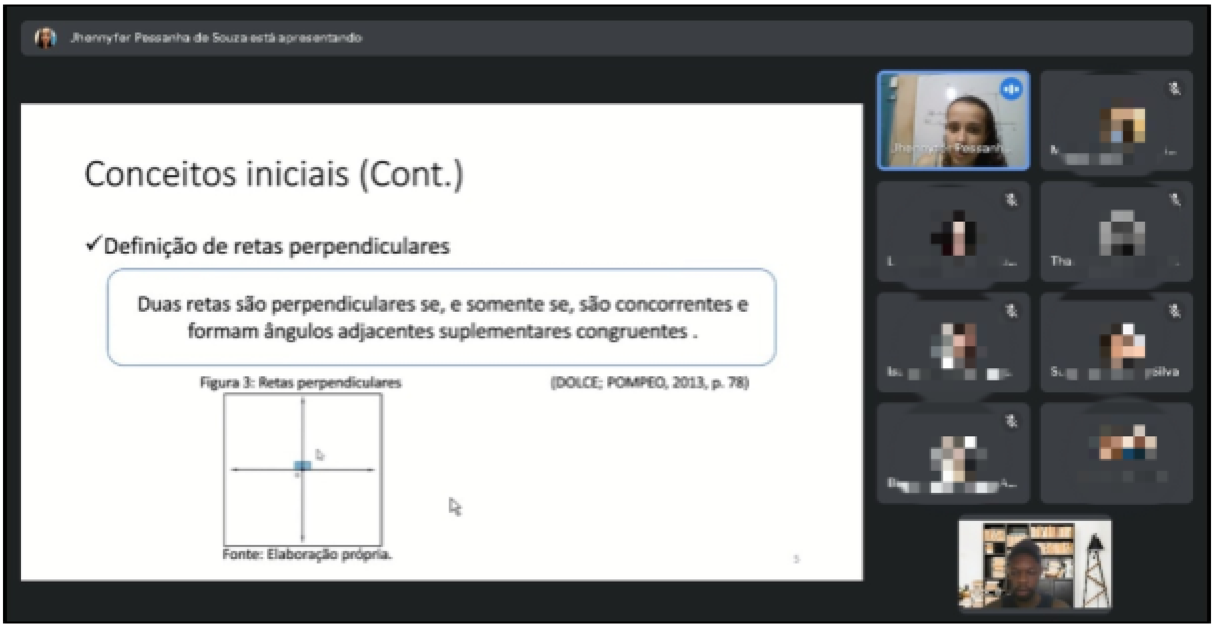
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Além disso, a conceituação de ângulos opostos pelo vértice foi explicada duas vezes, para que o licenciando L_3 compreendesse.

Após a apresentação dos conceitos iniciais, foi abordado o conteúdo de retas paralelas cortadas por transversais. Inicialmente, os pesquisadores perguntaram aos licenciandos sobre a definição de retas paralelas e o licenciando L_4 respondeu que são retas que não se “cruzam”. Os pesquisadores relacionaram este caso com o das retas paralelas distintas que são coplanares e não possuem pontos em comum, mas complementaram afirmando que retas paralelas coincidentes possuem todos os pontos em comum.

Em relação às nomenclaturas dos ângulos formados pelas retas paralelas cortadas por uma reta transversal, não houve dúvidas quanto aos ângulos correspondentes (Figura 55). Também, nesse momento, o licenciando L_{10} identificou dois ângulos opostos pelo vértice, indicando a compreensão da definição exposta anteriormente.

Figura 55 - Apresentação dos ângulos correspondentes



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Evidencia-se que o *applet* foi de grande importância para construção do conhecimento. Segundo Barcelos *et al*. (2009, p. 1), “[...] os applets, em geral, permitem investigar, levantar e testar conjecturas e, assim, construir conhecimentos”.

Em relação aos ângulos colaterais internos, o licenciando L_4 pediu para repetir, pois não havia compreendido. Não foi apresentado dúvidas quanto aos ângulos colaterais externos e o licenciando L_2 teceu o seguinte questionamento que foi respondido logo depois de forma afirmativa pelos pesquisadores:

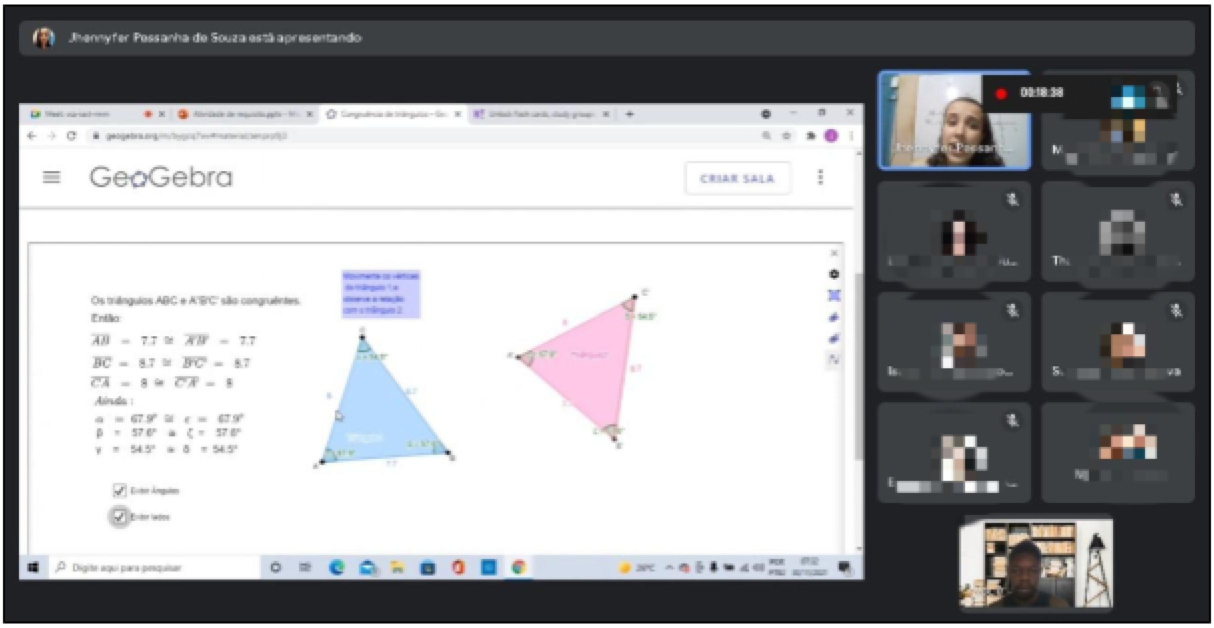
> Os colaterais são aqueles elementos que estão do mesmo lado da reta [...] e o que difere o interno do externo é estarem dentro ou fora das duas linhas paralelas, correto? (Licenciando L_2)

A respeito dos ângulos alternos internos e alternos externos, os licenciandos não apresentaram dúvidas quanto a identificação e as características.

Na sequência, iniciou-se a apresentação do conteúdo de congruência de triângulos. Na definição de congruência, o licenciando L_4 perguntou se triângulos congruentes são triângulos iguais, e os pesquisadores responderam que não necessariamente, complementando que triângulos congruentes possuem lados e ângulos correspondentes congruentes.

Na explicitação dos critérios de congruência de triângulos, o mesmo licenciando questionou sobre a relação: “se os vértices são congruentes, então os triângulos são congruentes”. Após dialogar com o licenciando, os pesquisadores verificaram que a palavra “vértices” estava referindo-se aos lados e foi explicado a diferença entre vértice e lado de um triângulo. Apesar do equívoco, pode-se destacar que o mesmo identificou o caso de congruência de triângulos: Lado, Lado, Lado (Figura 56).

Figura 56 - Apresentação da definição de congruência de triângulos



Fonte: Protocolo de pesquisa

Os *applets* do Geogebra contribuíram para a explicitação dos casos de congruência de triângulos e nenhuma dúvida foi identificada. Nesse momento, os pesquisadores perguntaram se os licenciandos se recordavam deste conteúdo e três deles responderam:

> Eu, particularmente, não lembro. (Licenciando L_4)

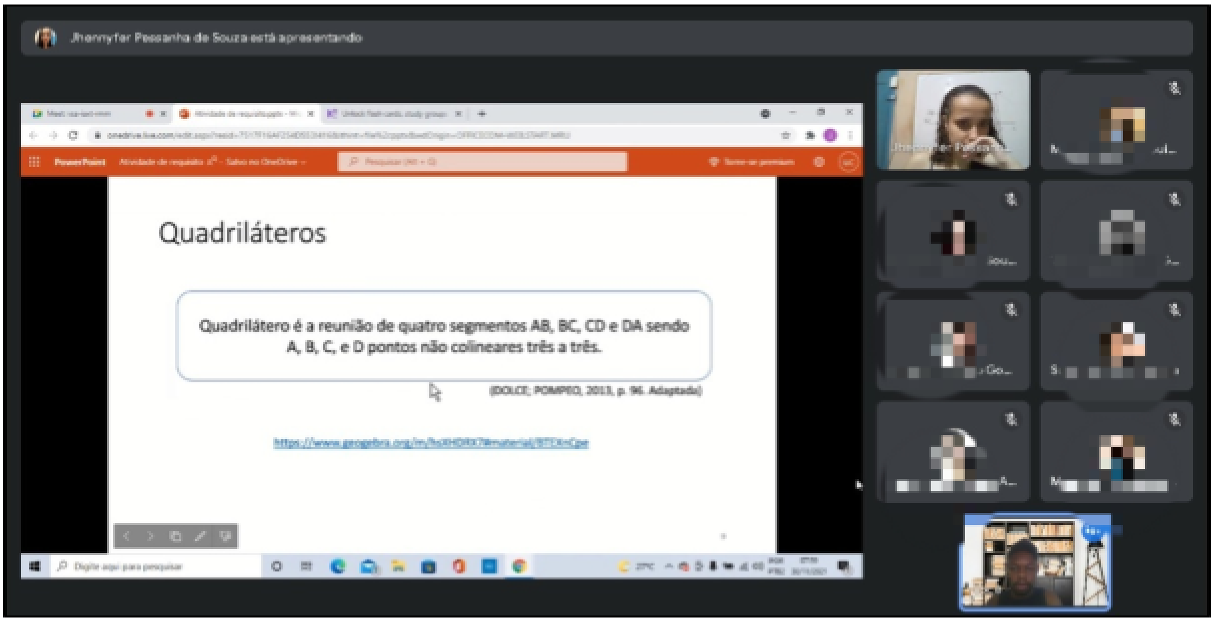
> Eu me recordo, mas me recordo bem vagamente. Se eu não me engano, foi no Ensino Médio, com um professor do IFF, e no final do Fundamental, o professor tinha passado, mas bem vago. (Licenciando L_2)

> Eu não lembro de ter estudado essa matéria. (Licenciando L_7)

Na apresentação de um contra-exemplo dos casos de congruência de triângulos, realizada por meio de uma construção no Geogebra, o licenciando L_2 explicitou que os triângulos apresentados não eram congruentes, pois os lados correspondentes possuíam medidas distintas.

Ao iniciar o conteúdo de quadriláteros, expondo a definição do mesmo, os pesquisadores questionaram os participantes quanto à conceituação de pontos colinares. O licenciando L_8 confundiu esses pontos com pontos coplanares e, neste momento, os pesquisadores explicaram ambos os conceitos (Figura 57).

Figura 57 - Apresentação da definição de quadriláteros



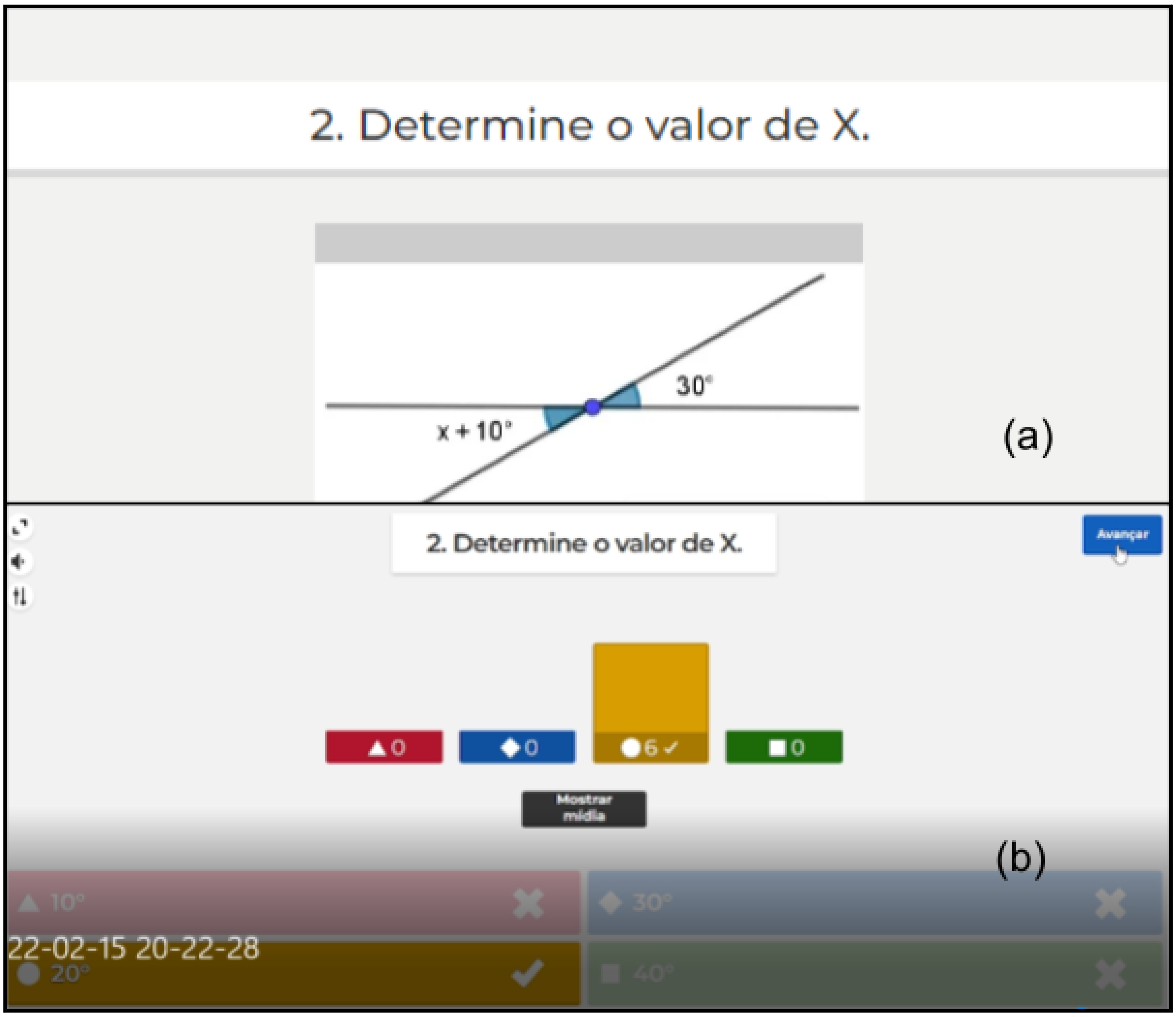
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na apresentação das definições dos quadriláteros notáveis, houve apenas um questionamento a respeito do paralelogramo. Observou-se que o licenciando L_2 compreendeu a conceituação de trapézio, explicada anteriormente, porém confundiu os termos oposto e paralelo. Os pesquisadores explicitaram a noção de oposto e paralelo, sanando a dúvida do licenciando.

Ao término da aplicação da “Atividade de requisito", os licenciandos sinalizaram não haver dúvidas a respeito dos conceitos e conteúdos abordados e foi aplicado um “*Quiz*”. Devido a instabilidade do site, dentre os dez licenciandos, apenas seis participaram.

Na questão 2, verificou-se que todos os licenciandos que participaram do *"Quiz"* compreenderam a definição de ângulos opostos pelo vértice (Figura 58).

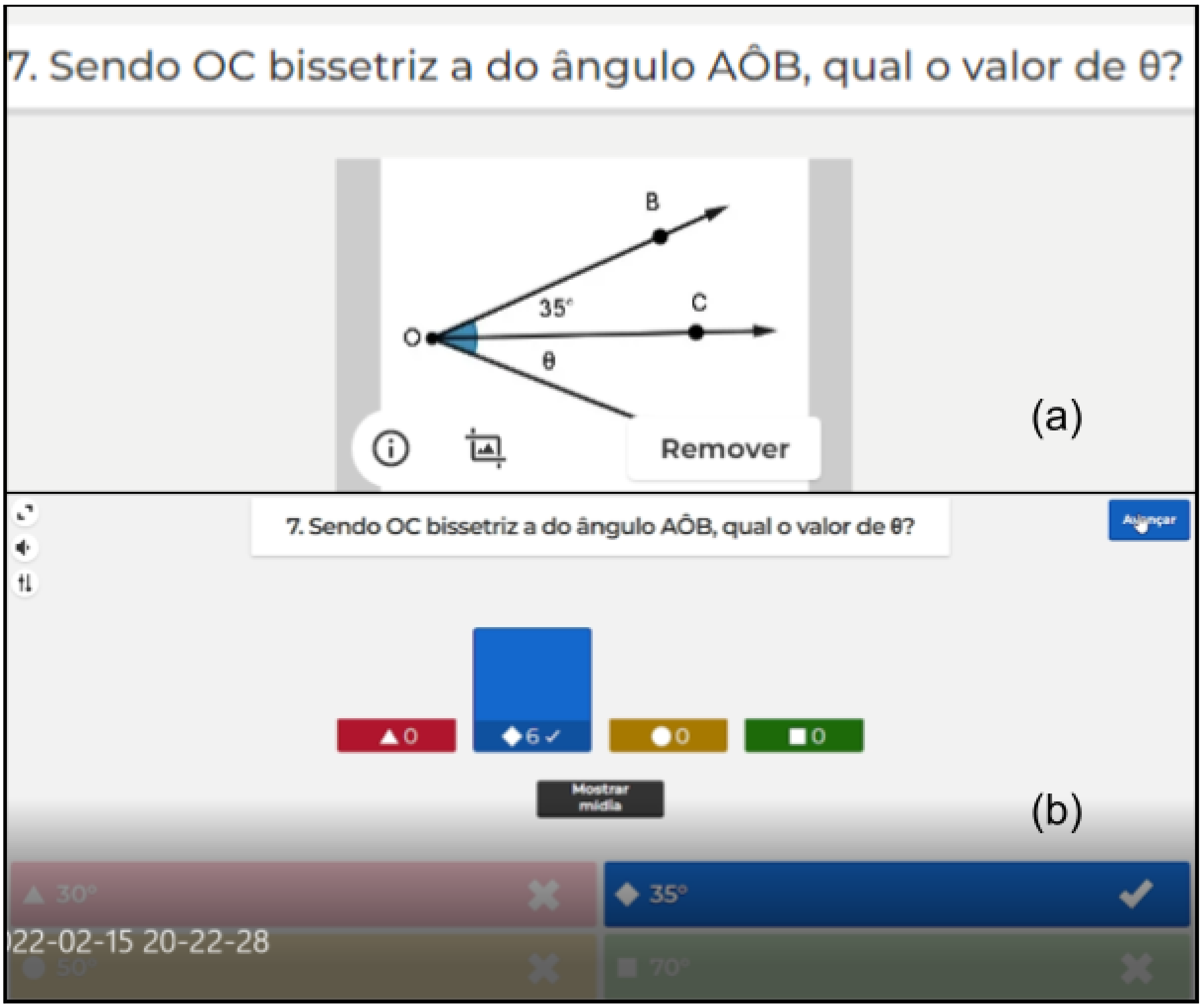
Figura 58 - Pergunta 2 do “*Quiz*” (a) e resposta dos licenciandos (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 7, constatou-se que todos os licenciandos que participaram do *"Quiz"* assimilaram a definição de bissetriz (Figura 59).

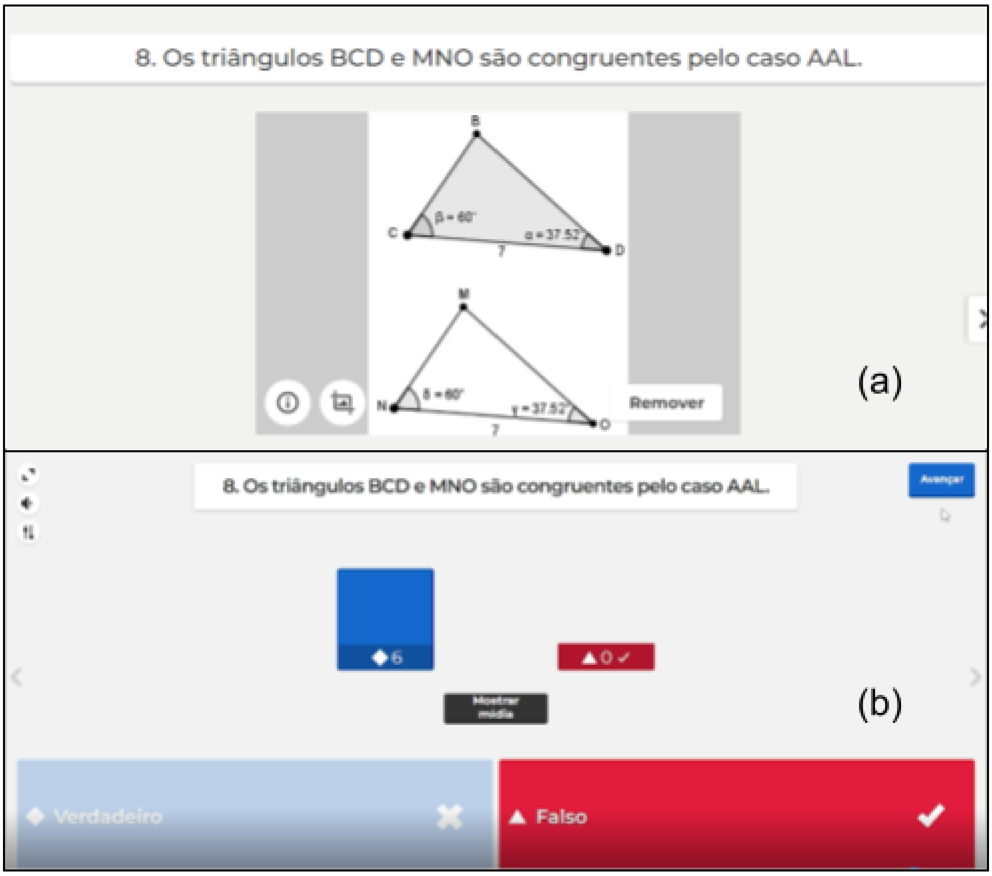
Figura 59 - Pergunta 7 do “*Quiz*” (a) e resposta dos licenciandos (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 8, evidenciou-se que todos os licenciandos participantes do *"Quiz"*, erraram, demonstrando que a importância da disposição dos elementos do caso de congruência não foi compreendida (Figura 60).

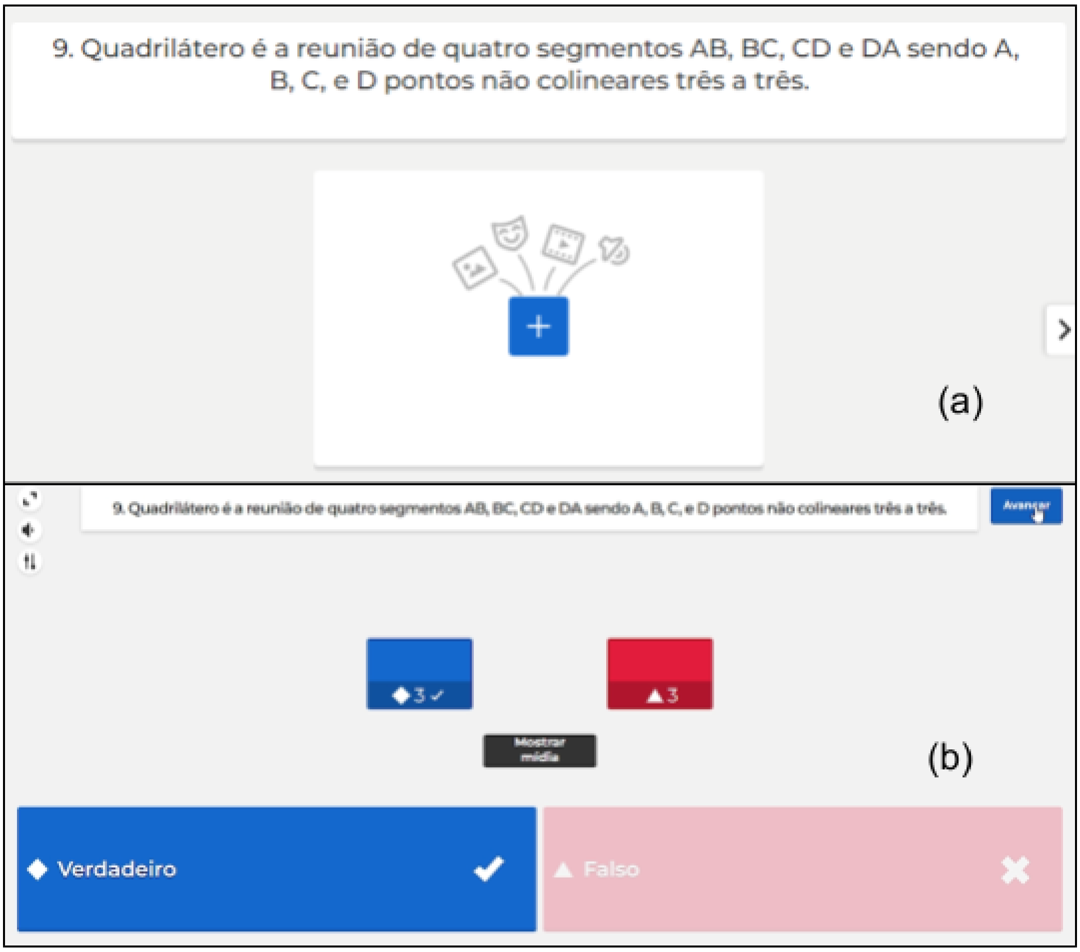
Figura 60 - Pergunta 8 do "*Quiz*" (a) e resposta dos licenciandos (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão 9, constata-se que apenas metade dos licenciandos participantes do *"Quiz"*, compreenderam a definição de quadrilátero (Figura 61).

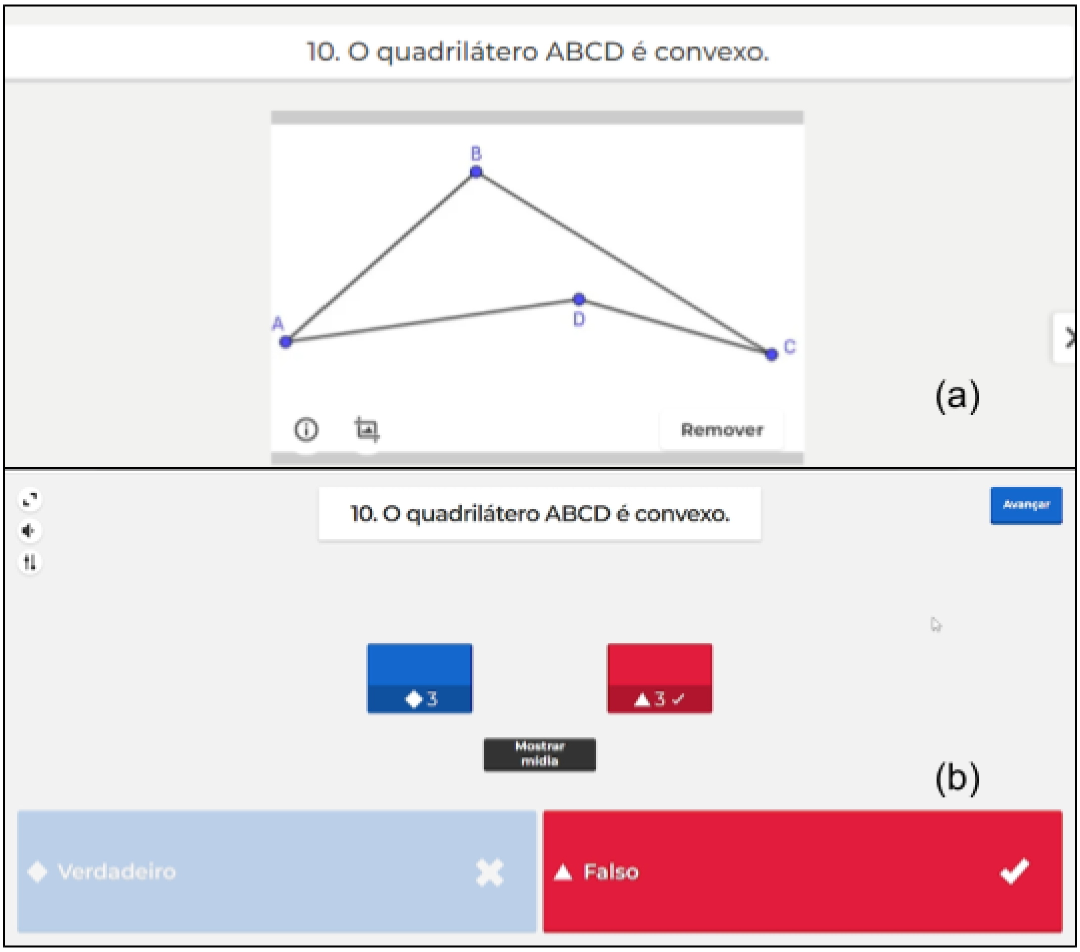
Figura 61 - Pergunta 9 do "*Quiz*" (a) e resposta dos licenciandos (b)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nas questões 10, constata-se que apenas metade dos licenciandos participantes do *"Quiz"*, assimilou a definição de quadrilátero côncavo e quadrilátero convexo (Figura 62).

Figura 62 - Pergunta 10 do "*Quiz*" (a) e resposta dos licenciandos (b)

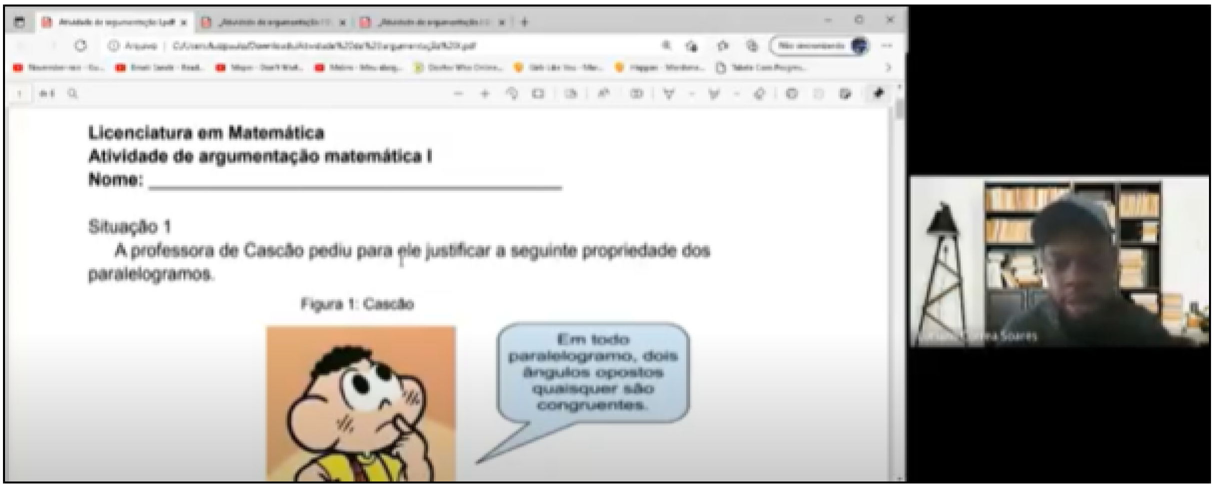


Fonte: Protocolo de pesquisa.

O resultado do "*Quiz*" foi analisado e todos os erros cometidos foram retomados no decorrer das atividades de argumentação.

No dia 17 de fevereiro de 2022 foi aplicada a "Atividade de Argumentação matemática I". Inicialmente, explicou-se a dinâmica da mesma e os licenciandos tiveram aproximadamente 50 minutos para resolvê-la (Figura 63).

Figura 63 - Apresentação da "Atividade de Argumentação matemática I"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após o período destinado para a resolução das duas situações contidas na atividade, iniciou-se a correção, que foi dialogada. O texto a seguir cita os licenciandos que participaram da conversa, respondendo ou trazendo indagações. Os que não foram citados, não se manifestaram nem por áudio, nem pelo *chat*.

Na primeira situação, os licenciandos não apresentaram dúvidas para distinguir a ideia que pode ser utilizada e a propriedade que se deseja justificar. Ademais, ao relacionar a definição de paralelogramo com o conteúdo de retas paralelas cortadas por uma transversal, observou-se que identificaram as nomenclaturas dos pares de ângulos colaterais internos e um deles explicitou que estes eram suplementares.

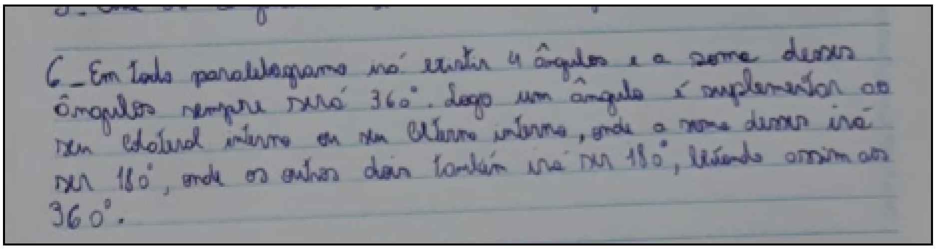
Na segunda situação, os licenciandos responderam oralmente todos os itens corretamente, exceto o último, correspondente à argumentação, que não foi respondido de forma oral. Destacou-se que os licenciandos conseguiram identificar a congruência de alguns elementos, nos itens I, II e III.

No final, ao expor uma argumentação que utilizou o caso de congruência de triângulo: Lado, Ângulo, Lado (LAL) para justificar a propriedade da congruência das diagonais do quadrado, o licenciando L_3 teve dificuldade para visualizar a congruência dos lados correspondentes que representavam as diagonais do quadrilátero em questão, embora tenha compreendido a congruência dos triângulos. Os pesquisadores reforçaram a definição de triângulos congruentes, destacando os lados correspondentes.

Em relação à argumentação da primeira situação que corresponde a justificativa da seguinte propriedade: "Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes", ao analisar as respostas, observou-se que nenhum licenciando elaborou uma argumentação que justificasse a propriedade. Abaixo são apresentadas algumas das respostas.

O licenciando L_3 apresentou algumas informações verídicas, porém, não concluiu o raciocínio. Além disso, a propriedade sobre a qual ele busca justificar, refere-se à soma dos ângulos internos do paralelogramo, enquanto a situação problema corresponde à congruência dos ângulos opostos de um paralelogramo (Figura 64).

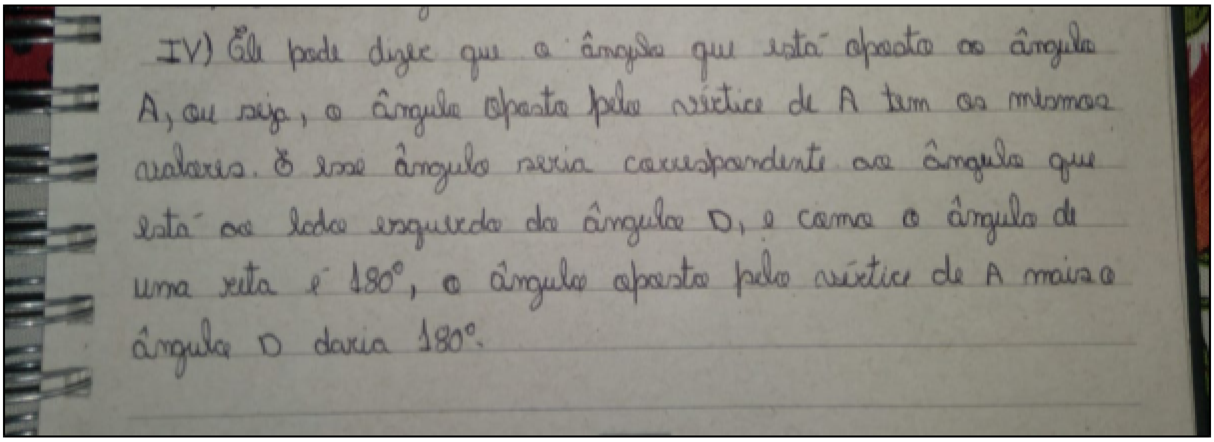
Figura 64 - Argumentação do licenciando L_3 na situação 1 da "Atividade de Argumentação matemática I"


6_ Em todo paralelogramo irá existir 4 ângulos e a soma desses ângulos sempre será 360°. Logo um ângulo é suplementar ao seu colateral interno ou seu alterno interno, onde a soma desses irá ser 180°, onde os outros dois também irá ser 180°, levando assim aos 360°.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_{10} tentou argumentar quanto à característica dos ângulos colaterais internos de serem suplementares. Apesar de expor algumas informações corretas, não concluiu o raciocínio. Assim como o licenciando L_3, o mesmo não justificou a propriedade solicitada na primeira situação (Figura 65).

Figura 65 - Argumentação do licenciando L_{10} na situação 1 da "Atividade de Argumentação matemática I"

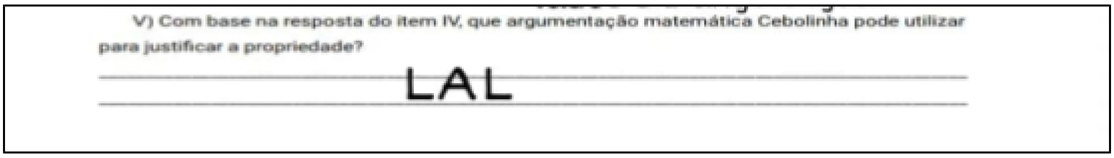

IV) Ele pode dizer que o ângulo que está oposto ao ângulo A, ou seja, o ângulo oposto pelo vértice de A tem os mesmos valores. E esse ângulo seria correspondente ao ângulo que está ao lado esquerdo do ângulo D, e como o ângulo de uma reta é 180°, o ângulo oposto pelo vértice de A mais o ângulo D daria 180°.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação à argumentação da segunda situação, que corresponde a seguinte propriedade: "Em todo quadrado, as diagonais são congruentes", novamente, nenhum licenciando apresentou uma argumentação para justificar a propriedade em questão. Abaixo serão elencadas algumas respostas, fomentando observações.

O licenciando L_1 identificou o caso de congruência dos triângulos apresentados, porém, não realizou a argumentação matemática para validar a propriedade da congruência das diagonais do quadrado (Figura 66).

Figura 66 - Argumentação do licenciando L_1 na situação 1 da "Atividade de Argumentação matemática I"

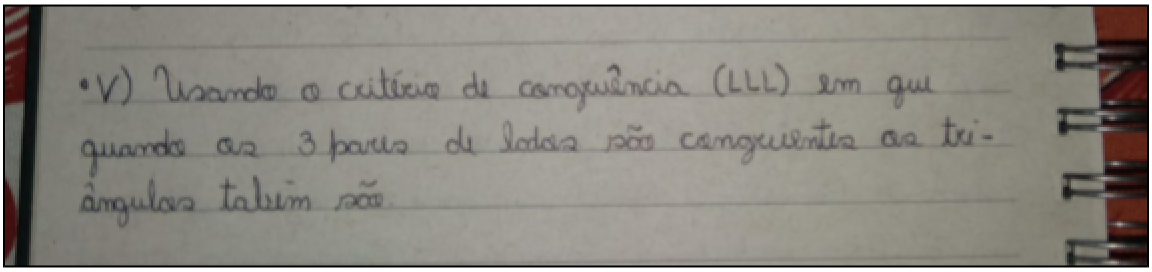

V) Com base na resposta do item IV, que argumentação matemática Cebolinha pode utilizar para justificar a propriedade?

LAL

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_{10} utilizou o caso de congruência de triângulos: Lado, Lado, Lado (LLL). Todavia, este caso não poderia ser empregado, pois, um par de lados correspondentes dos triângulos correspondiam às diagonais (Figura 67).

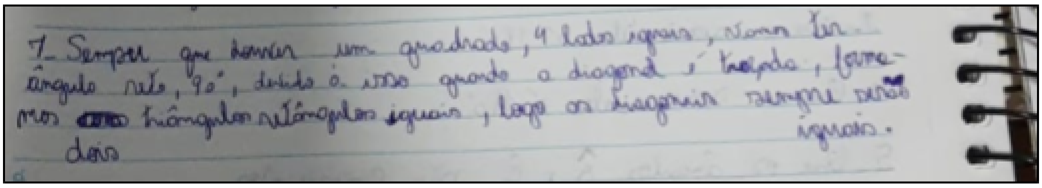
Figura 67 - Argumentação do licenciando L_{10} na situação 2 da "Atividade de Argumentação matemática I"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na argumentação do licenciando L_3, evidenciou-se a utilização da definição de um quadrado. Além disso, o mesmo identificou que os triângulos apresentados na situação eram congruentes, porém, não justificou (Figura 68).

Figura 68 - Argumentação do licenciando L_3 na situação 2 da “Atividade de Argumentação matemática I”



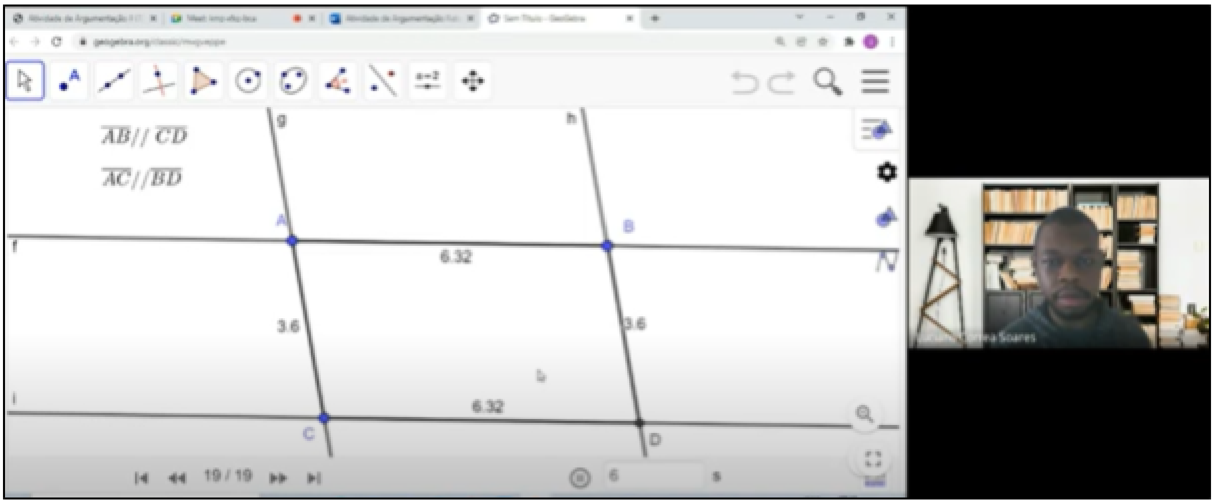
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No dia 18 de fevereiro de 2022 foi aplicada a “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”. Todos os itens foram discutidos juntamente com os licenciandos. Com exceção da última questão de cada atividade, serão mencionados os licenciandos que participaram da conversa, respondendo ou trazendo indagações. Os que não foram citados, não se manifestaram nem por áudio, nem pelo *chat*.

No item II, os licenciandos L_3 e L_4 responderam que o quadrilátero observado era um paralelogramo. Ao serem questionados quanto a justificativa, nenhum dos licenciandos explicitou a condição necessária e suficiente. O licenciando L_7 argumentou que o quadrilátero ABCD era um paralelogramo, pois "as paralelas têm o mesmo valor”. Apesar de sua fala conter o paralelismo, percebeu-se que o enfoque está na congruência dos lados opostos, que é uma propriedade.

Ainda sobre a justificativa mencionada no parágrafo imediatamente anterior, o licenciando L_3 justificou da seguinte forma: “ Porque a reta $\overline{AB}$ é igual a reta $\overline{CD}$ e a reta $\overline{AD}$ é igual a reta $\overline{BC}$”. O licenciando L_3 confundiu os termos reta e segmento de reta, e o foco da sua justificativa estava na congruência dos lados opostos, assim como no do licenciando L_7. Em seguida, o mesmo acrescentou: “Duas retas paralelas cortadas por duas transversais”. Nesta fala, evidenciou-se que o licenciando não identificou as transversais como paralelas (Figura 69). Os pesquisadores diferenciaram reta de segmento de reta e esclareceram a definição de paralelogramo.

Figura 69 - Apresentação do item II da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)”



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item III, os licenciandos L_3, L_4 e L_{10} identificaram os lados opostos do paralelogramo ABCD, e em relação às medidas dos lados opostos, o licenciando L_{10} expôs que: “têm a mesma medida”. No item IV não havia pergunta e nos itens V e VI, todos os licenciandos responderam de forma afirmativa.

Durante o período destinado para a resolução do item VII, o licenciando L_3 identificou a propriedade dos ângulos opostos de um paralelogramo serem congruentes, propriedade essa justificada no encontro anterior.

Por causa da instabilidade na conexão da internet, o licenciando L_5 entrou no final da aplicação da atividade, e, por isso, toda a sequência foi repetida para o mesmo.

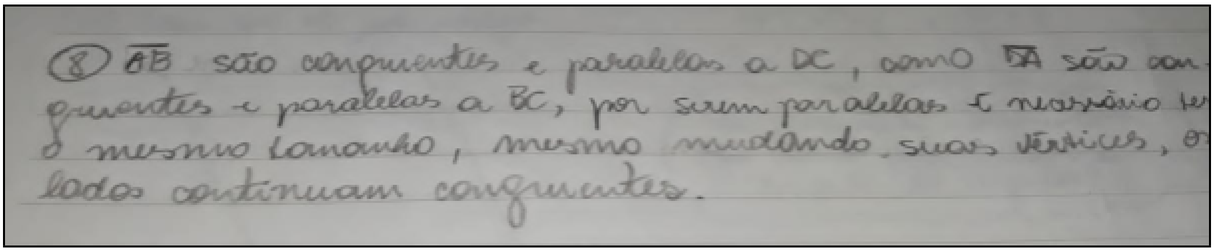
Assim como os demais licenciandos, o licenciando L_5 , no item II, visualizou que o quadrilátero ABCD era um paralelogramo, porém utilizou a congruência entre os lados opostos como justificativa. Os pesquisadores afirmaram que a congruências dos lados opostos era uma propriedade e esclareceram a definição.

No item III, o licenciando não apresentou dificuldades em identificar os lados opostos do paralelogramo e a relação existente entre eles, porém, também confundiu os termos reta e segmento de reta. Novamente, os pesquisadores diferenciaram reta de segmento de reta. Do item IV ao item VI, o licenciando L_5 não demonstrou dificuldades.

Ao analisar as respostas, do item VII que corresponde a seguinte propriedade: “Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes”, constatou-se que nenhum licenciando desenvolveu uma argumentação matemática para justificar a propriedade do paralelogramo. Abaixo serão elucidadas algumas das respostas, destacando pontos importantes.

O licenciando L_5 utilizou a simbologia matemática para representar segmento de reta e argumentou sobre a propriedade, utilizando o paralelismo dos lados opostos e a visualização de alguns casos, propiciada pelo *applet* do Geogebra. Esta argumentação se aproxima do primeiro nível de argumentação (Empirismo ingênuo), proposto por Balacheff (Figura 70).

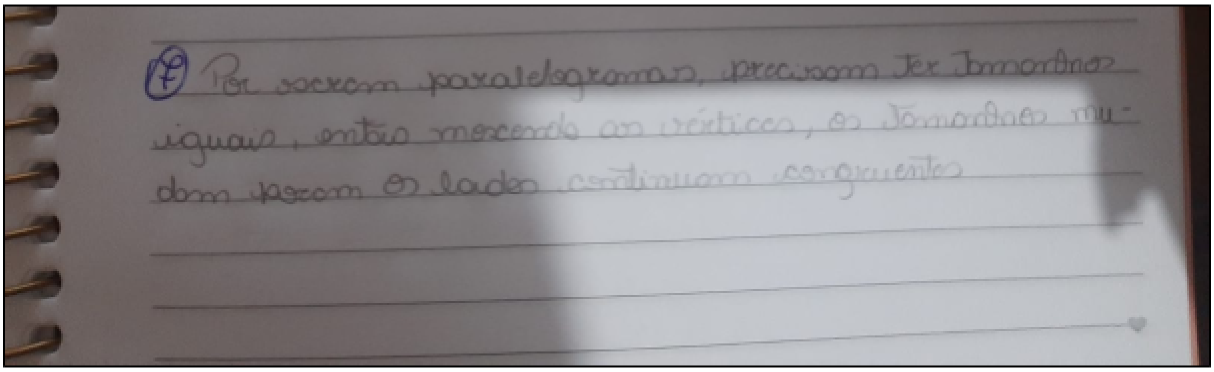
Figura 70 - Argumentação do licenciando L_5 no último item da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)"


(8) $\overline{AB}$ são congruentes e paralelos a DC, como DA são con-
gruentes e paralelas a BC, por serem paralelas é necessário te
o mesmo tamanho, mesmo mudando suas vértices, os
lados continuam congruentes.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Assim como o licenciando L_5, o licenciando L_4 estruturou uma argumentação matemática que se aproxima do primeiro nível de argumentação, porém não utilizou simbologia matemática (Figura 71).

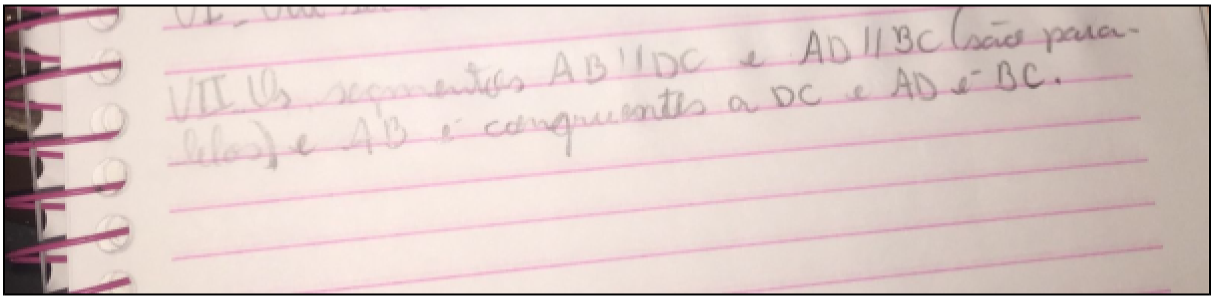
Figura 71 - Argumentação do licenciando L_4 no último item da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)"


(7) Por serem paralelogramos, precisam ter tamanhos
iguais, então mexendo os vértices, os tamanhos mu-
dam porem os lados continuam congruentes

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_7 não estruturou uma argumentação matemática para justificar a propriedade, apenas afirma, conforme explicitado na Figura 72:

Figura 72 - Argumentação do licenciando L_7 no último item da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)"



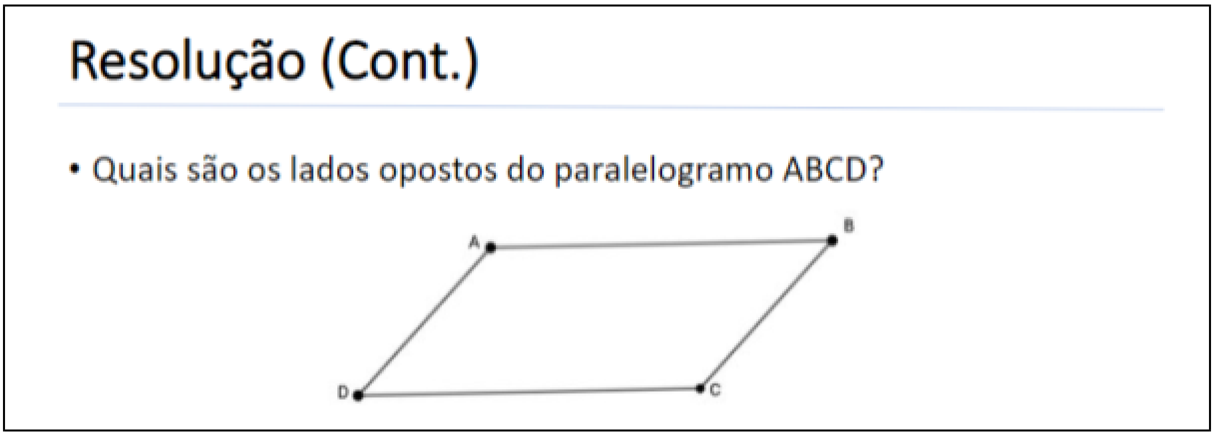
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No dia 22 de fevereiro de 2022 foi aplicada a "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)". Antes do início desta atividade, houve a discussão do item VII da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)": "Que argumentação você usaria para validar ou não a relação identificada", neste caso a de que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Conforme observações realizadas no encontro anterior e na análise das argumentações matemáticas, do item VII, na "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)", verificou-se que os licenciandos ainda apresentavam dificuldades no desenvolvimento da argumentação matemática. Devido a esse fato, foram acrescentados alguns slides (APÊNDICE D) com a argumentação da propriedade, estruturada de maneira análoga ao da "Atividade de Argumentação matemática I".

No slide 3, o licenciando L_{10} identificou os lados opostos do paralelogramo (Figura 73).

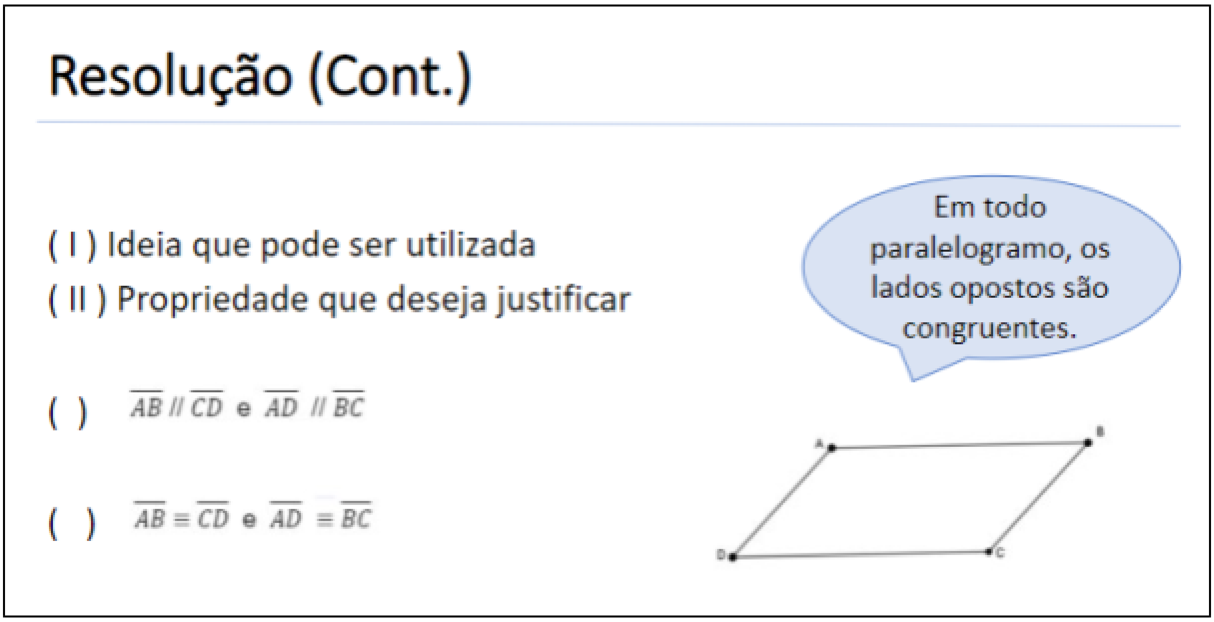
Figura 73 - Slide 3 da justificativa da propriedade do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria.

No slide 4, o licenciando L_4 distinguiu a ideia que pode ser utilizada da propriedade que deseja justificar, demonstrando que compreendeu a diferença entre as duas informações (Figura 74).

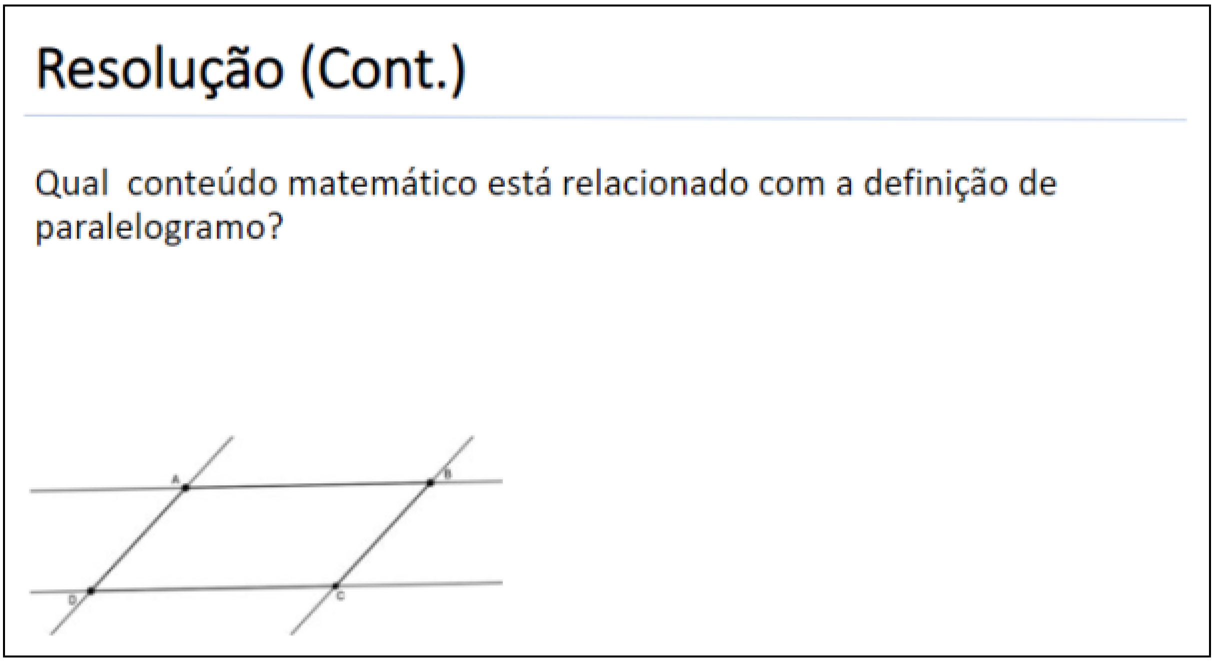
Figura 74 - Slide 4 da justificativa da propriedade do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria.

No slide 5, o licenciando L_{10} expôs que o conteúdo matemático que estava relacionado com a definição de paralelogramo era o de retas paralelas cortadas por uma transversal (Figura 75).

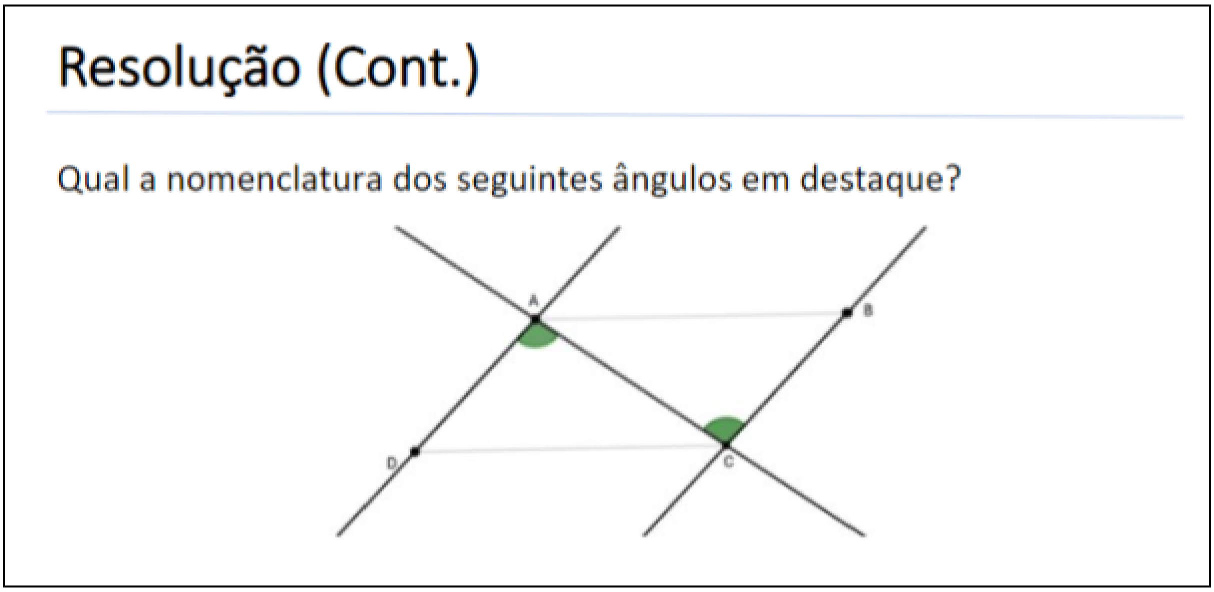
Figura 75 - Slide 5 da justificativa da propriedade do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria.

No slide 6, após construir a diagonal $\overline{AC}$, os licenciandos foram questionados quanto a nomenclatura dos ângulos $D\widehat{A}C$ e $B\widehat{C}A$ e os licenciandos L_6 e L_{10} alegaram que eram colaterais internos. Neste momento, os pesquisadores relembraram a noção de ângulos colaterais internos e ângulos alternos internos. Ademais, o licenciando L_4 identificou como característica, a congruência dos ângulos alternos internos (Figura 76).

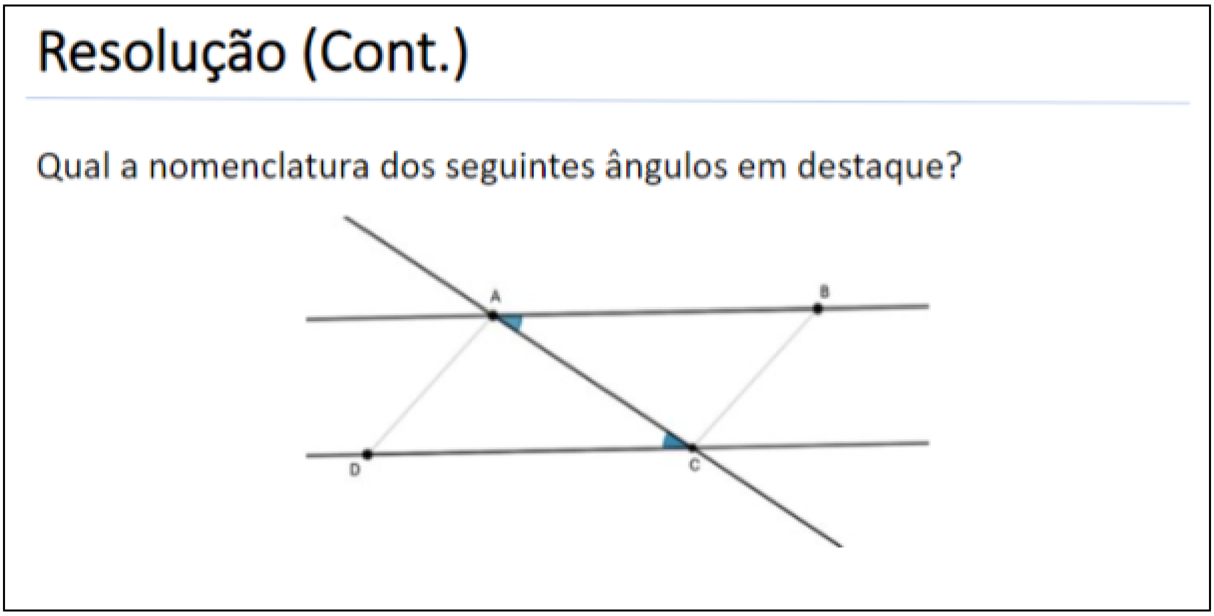
Figura 76 - Slide 6 da justificativa da propriedade do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria.

No slide 7, os licenciandos identificaram a nomenclatura dos ângulos em destaque, sem apresentar dificuldades. Destacou-se que o licenciando L_9 afirmou a característica da congruência dos ângulos alternos internos (Figura 77).

Figura 77 - Slide 7 da justificativa da propriedade do paralelogramo

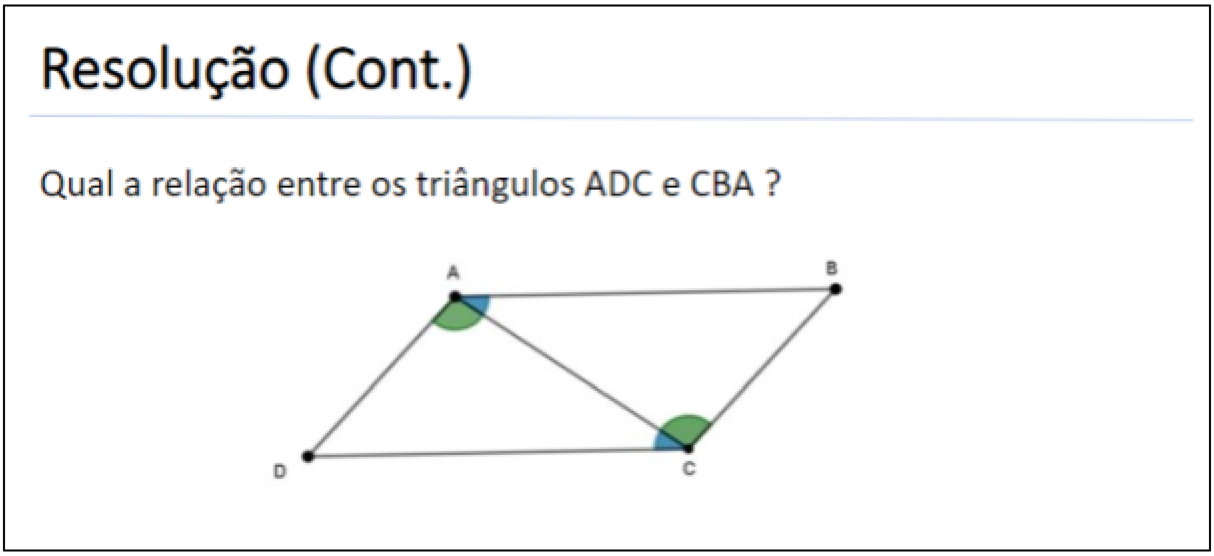


Fonte: Elaboração própria.

No slide 8, o licenciando L_{10} realizou uma argumentação oral para justificar a congruência dos triângulos ADC e CAB pelo caso Ângulo, Lado, Ângulo (Figura 78):

> Porque o ângulo $B\widehat{A}C$ é congruente ao $A\widehat{C}D$, o ângulo $D\widehat{A}C$ é congruente ao $A\widehat{C}B$ e a linha que tá cortando de A à C tem a mesma medida no triângulo. (Licenciando L_{10})

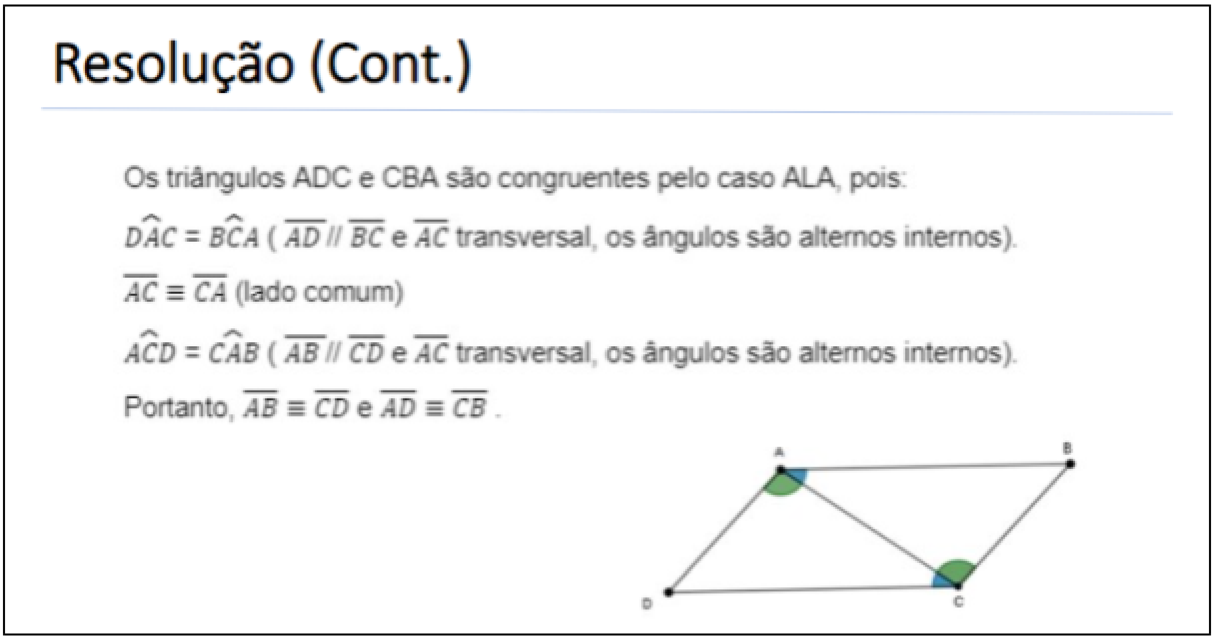
Figura 78 - Slide 8 da justificativa da propriedade do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria.

Após as discussões realizadas e considerando que nenhum licenciando apresentou uma formalização da argumentação, os pesquisadores, no slide 9, concluíram a argumentação matemática que justifica a propriedade da congruência dos lados opostos de um paralelogramo (Figura 79).

Figura 79 - Slide 9 da justificativa da propriedade do paralelogramo

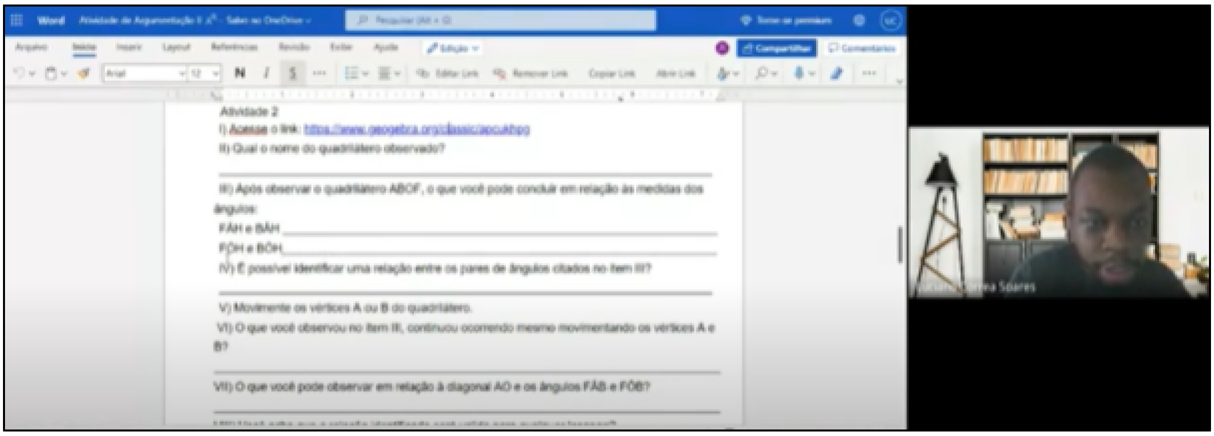


Fonte: Elaboração própria.

Na sequência, iniciou-se a aplicação da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)”. No item II, os licenciandos L_5 e L_7 afirmaram que o quadrilátero ABOF era um losango. Ao serem questionados quanto à justificativa, o licenciando L_3 explicitou: “Ele possui retas paralelas opostas umas às outras, e ângulos congruentes opostos uns aos outros”. Nesta fala, evidenciou-se a definição e a propriedade do paralelogramo.

Como nenhum licenciando falou a definição, os pesquisadores exploraram a construção no Geogebra, buscando identificar informações que conduzissem à condição necessária e suficiente para classificar um quadrilátero como losango. Após essa discussão, o licenciando L_3 respondeu de forma correta, apontando que todos os lados eram congruentes (Figura 80).

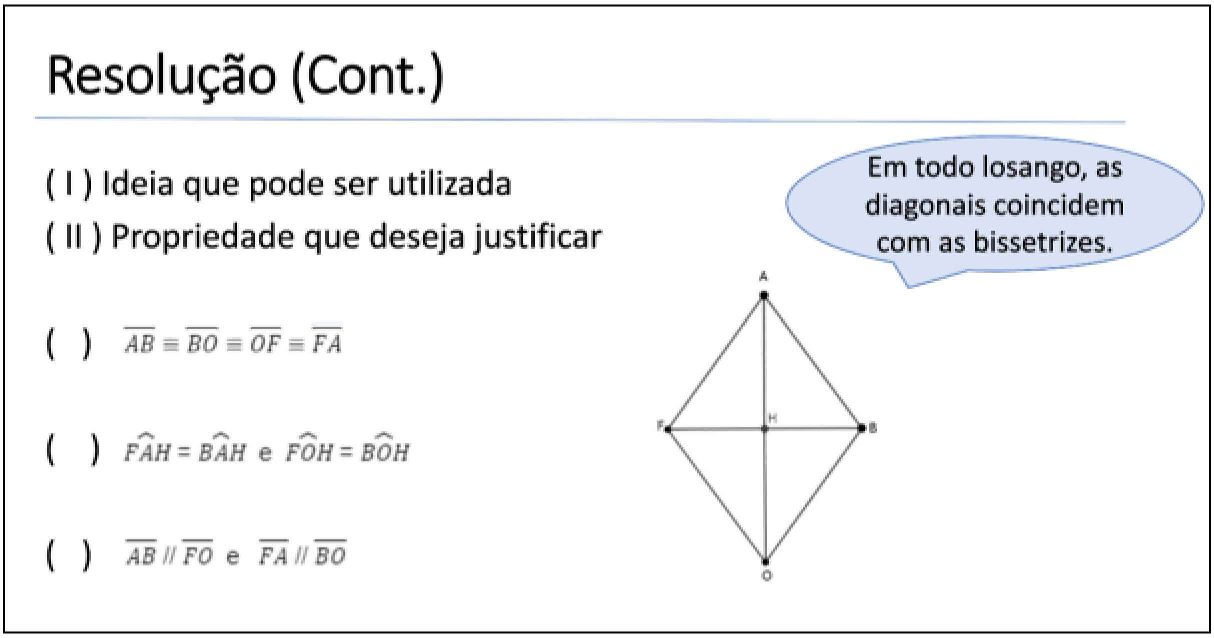
Figura 80 - Apresentação do item II da “Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)”



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Do item III ao item VIII, os licenciandos responderam de forma correta, mas no item IX, verificou-se que apresentaram dificuldades para iniciar o desenvolvimento da argumentação matemática. Devido a esse fato, foi apresentado um slide explicitando a propriedade que se desejava justificar e as ideias que poderiam ser utilizadas (Figura 81).

Figura 81 - Slide 3 da justificativa da propriedade do losango



Fonte: Elaboração própria.

O licenciando L_7 reconheceu a informação dos lados congruentes e paralelos como a característica do losango, ideias que poderiam ser utilizadas e a dos ângulos congruentes como a propriedade a ser justificada. Para finalizar, após distinguir as informações, o licenciando L_9 identificou dois triângulos congruentes pelo caso: Lado, Lado, Lado (LLL), porém não explicitou quais eram os triângulos. Ademais, todos os licenciandos afirmaram ter compreendido o encaminhamento para a estruturação da argumentação matemática que justificava a propriedade em questão, conforme exposto na Figura 82.

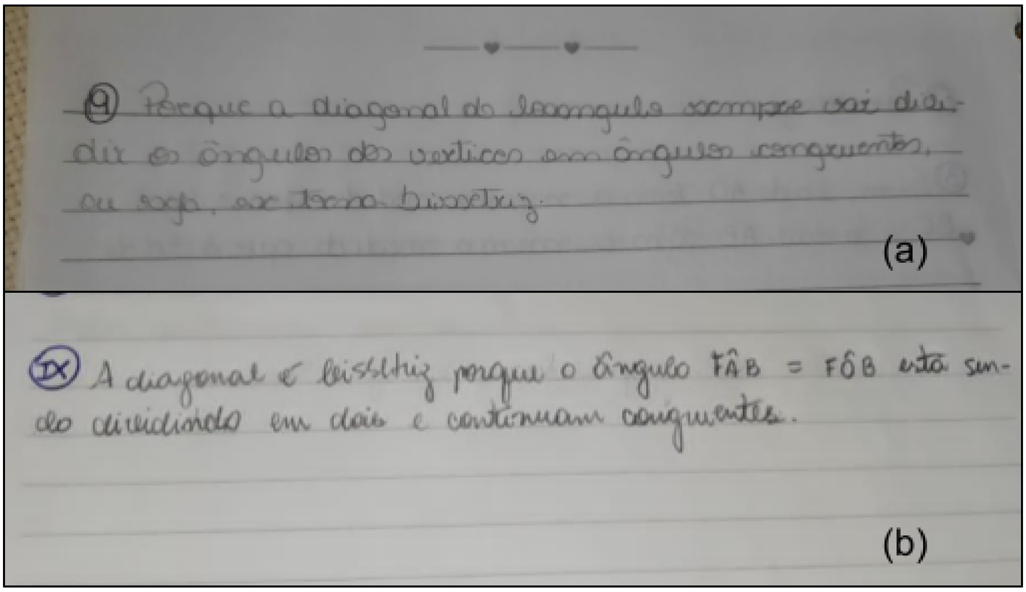
Figura 82 - *Chat* ao término da “Atividade de Argumentação matemática II”

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao analisar as respostas dos licenciandos, no item correspondente à argumentação matemática, observou-se que nenhum licenciando justificou a propriedade de que as diagonais coincidem com as bissetrizes do losango. A seguir, são apresentadas algumas argumentações dos licenciandos, tecendo observações.

Os licenciandos L_4 e L_5 apenas escrevem a propriedade (Figura 83).

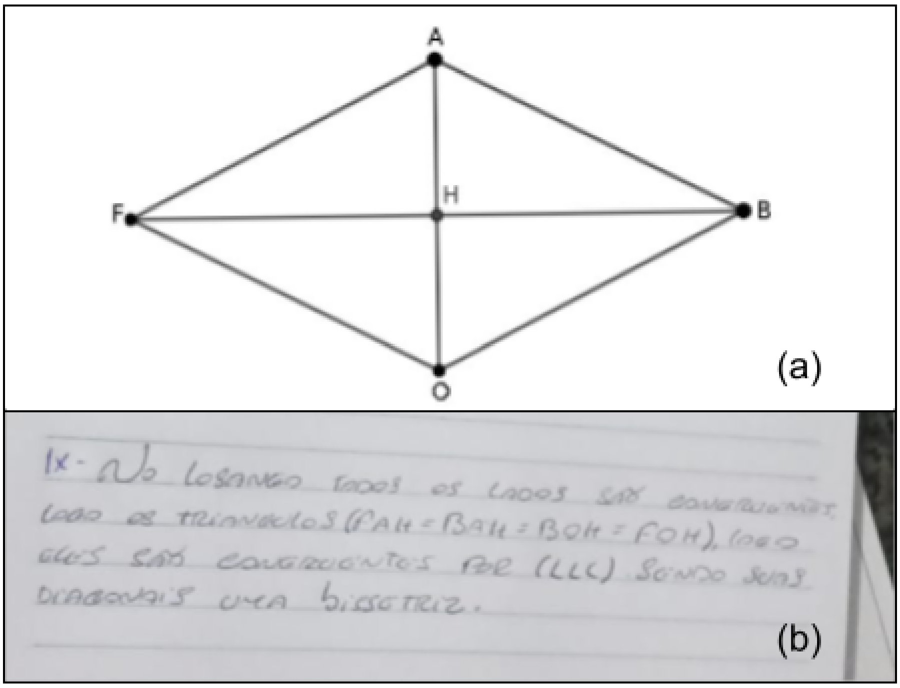
Figura 83 - Argumentações dos licenciandos L_4 (a) e L_7 (b) no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de Pesquisa.

O licenciando L_9 ao estruturar a argumentação matemática, afirmou que os quatro triângulos são congruentes pelo caso: Lado, Lado, Lado (LLL), porém não justificou a congruência dos segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{OH}$ e dos segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{FH}$, ou seja, que as diagonais se intersectam no ponto médio (Figura 84).

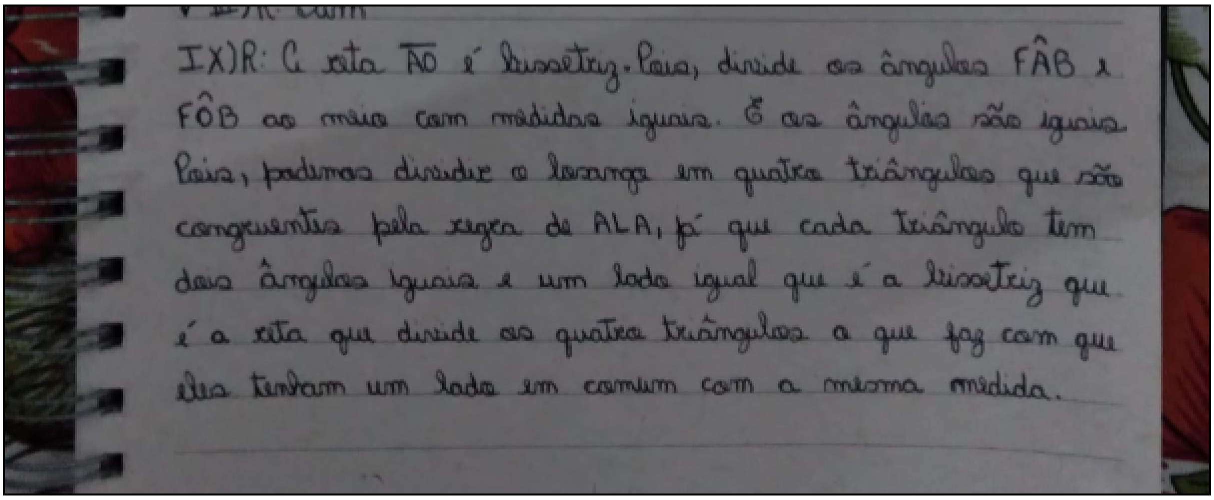
Figura 84 - Losango (a) e a argumentação do licenciando L_9 (b) no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_{10}, estruturou uma argumentação matemática, porém não explicitou os elementos que compõem o caso de congruência de triângulos, nem justificou os pares de ângulos congruentes (Figura 85).

Figura 85 - Argumentação do licenciando L_{10} no item IX da "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No decorrer da aplicação da proposta pedagógica, os pesquisadores constataram a dificuldade dos licenciandos no processo de argumentação matemática. Rosale (2017) também identifica "a dificuldade de muitos alunos em justificar o seu raciocínio, ou até mesmo seguir uma linha básica de argumentação" (ROSALE, 2017, p.15).

Além disso, devido a precariedade das argumentações matemáticas elaboradas pelos licenciandos, os pesquisadores encontraram dificuldades para classificá-las conforme os níveis de provas elaborados por Balacheff. Desta forma, apenas duas argumentações foram classificadas como próximas do primeiro nível (Empirismo ingênuo), as dos licenciandos L_4 e L_5.

Após a aplicação, os pesquisadores observaram que, embora no Questionário de Sondagem, na questão 21 letra A, na qual os licenciados deveriam escolher, dentre algumas argumentações matemáticas, a mais parecida com a que eles elaborariam para justificar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, 4 licenciandos escolheram a argumentação que se enquadra no quarto nível de prova e 2 licenciandos escolheram a argumentação que se enquadra no terceiro nível de prova, os resultados das atividades evidenciaram que nenhum dos licenciandos se encontram nos níveis supracitados.

4.2.3 Entrevista semiestruturada

Após a aplicação da proposta pedagógica, ocorreu, no dia 07 de março de 2022, um encontro para a realização da entrevista semiestruturada. A reunião teve duração de aproximadamente uma hora e foi gravada mediante o consentimento de todos os licenciandos.

A respeito da primeira pergunta que corresponde a análise da sequência didática, os licenciandos avaliaram cada atividade separadamente de acordo com os itens apresentados. Em todas as atividades, os licenciandos explicitaram que o grau de dificuldade estava moderado, o tempo de aplicação foi adequado, os enunciados estavam claros e de fácil compreensão e os materiais eram de qualidade.

Na "Atividade de Argumentação matemática I", o licenciado L_1 evidenciou dificuldades, provenientes de defasagens do ensino.

> Difícil pelo ensino fraco que eu tive. (Licenciando L_1)

Posterior a essa resposta, os pesquisadores perguntaram aos licenciandos, se os mesmos haviam visto alguma argumentação matemática durante a Educação Básica. Vale ressaltar que esta pergunta não estava prevista no roteiro, mas em entrevistas desse tipo, essa é uma ação que pode ocorrer. Alguns licenciandos fizeram os seguintes relatos:

> Posso dizer que não vi. (Licenciando L_1)

> Eu também tenho dificuldade com essa parte aí (Argumentação matemática) [...] não me recordo. (Licenciando L_7)

O relato do licenciando L_7, evidencia a dificuldade a respeito da argumentação matemática, observada por Rosale (2017) ao afirmar que essa grande dificuldade é comum a muitos alunos, especialmente quando se trata de uma argumentação que necessita de uma linguagem formal.

O licenciando L_{10}, por sua vez, expôs que já viu a argumentação matemática, no primeiro ano do Ensino Médio, nos conteúdos de função e trigonometria. De acordo com o licenciando L_8, uma das justificativas para a ausência da argumentação matemática, é a acomodação por partes dos professores e dos alunos:

> Eu acho assim que falta os professores levar o aluno a argumentar, questionar, porque o aluno, às vezes é acomodado. [...] Às vezes, o professor não ensina tanto essa argumentação, porque falta também do aluno, ah também não vou fazer, porque ele não perguntou, tá tudo certo [...]. (Licenciando L_8)

O licenciando L_6 apontou que os conteúdos matemáticos abordados nas atividades foram novos, o que, por sua vez, evidenciou uma precariedade no ensino de conteúdos geométricos. Conforme Lorenzato (1995) e Silva (2021), os conteúdos de Geometria, na maioria das vezes, são trabalhados apenas no final do ano letivo. Vale salientar que a Geometria, na maioria das vezes, ou é pouco estudada ou não é estudada no Ensino Fundamental (LORENZATO, 1995).

> Não tava difícil, a questão é que, para mim, foi algo novo. Porque eu tive um Ensino Médio muito fraco, eu não tinha visto isso, então tive uma certa dificuldade em realizar, mas não estava difícil depois que vocês explicaram. (Licenciando L_6)

Na pergunta 2, que corresponde às contribuições da “Atividade de requisito”, o licenciando L_5 reforçou o exposto acima pelo licenciando L_6. Neste momento, os pesquisadores observaram que a falta de conhecimento sobre alguns conteúdos de Geometria acarreta insegurança no processo de argumentação e que, apesar da “Atividade de requisito", ter sido desenvolvida com os licenciandos, é necessário um tempo de amadurecimento sobre as ideias trabalhadas. Além disso, os licenciandos L_6 e L_8 argumentaram que as atividades colaboraram para o desenvolvimento da disciplina de Geometria I do curso de Licenciatura que estavam cursando.

> Ajudou muito, porque quando eu estava estudando para a prova, quando a gente foi lembrando os conceitos, foi ligando uma coisa na outra, e ajudou muito, porque, até então, não tínhamos visto isso na Geometria. (Licenciando L_6)
>
> Ajudou até a nossa matéria. (Licenciando L_8)

Na terceira pergunta, os licenciandos afirmaram que a “Atividade de Argumentação matemática I” contribuiu para o desenvolvimento da “Atividade de Argumentação matemática II” e o licenciando L_6 destacou que os conceitos foram a base de tudo. E na pergunta seguinte, os licenciandos explicitaram que os diálogos que ocorreram durante a aplicação da proposta pedagógica favoreceram o processo de argumentação matemática.

Na quinta pergunta, os licenciandos L_7 e L_8 expressaram ter dificuldades no processo de estruturação de uma argumentação matemática, porém não evidenciaram quais foram. Ademais, o licenciando L_8 salientou que a sequência didática despertou o interesse pelas argumentações e que ele pretende levar para seus alunos este trabalho.

Na sexta pergunta, os licenciandos elucidaram ser possível a aplicação das atividades em uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental, mas o licenciando L_8 argumentou que o tempo, em geral, é um obstáculo.

Na sétima questão, que corresponde às contribuições da aplicação das atividades em turmas de Ensino Fundamental, o licenciando L_3 expôs que a argumentação auxilia no processo de aprendizagem da Geometria e propicia a inserção da linguagem matemática.

Na última pergunta, todos os licenciandos afirmaram que as atividades de argumentação matemática colaboraram para o desenvolvimento da estruturação das demonstrações formais que ocorrem na disciplina de Geometria I.

Observou-se que, no decorrer da realização da entrevista semiestruturada, poucos licenciados ativaram o aúdio para responder às perguntas, optando por responder no *chat,* fato que dificultou a aplicação efetiva da entrevista, devido a falta de interação. Esse aspecto, configura uma das dificuldades do Ensino Remoto Emergencial, evidenciado por Carvalho, Esquincalha e Marquês (2021) em uma pesquisa realizada com alguns docentes. Os autores relataram algumas angústias relacionadas à falta de interação e participação, sobretudo em atividades síncronas, nas falas dos docentes participantes da pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para a realização desta pesquisa foi a dificuldade que licenciandos em Matemática apresentam na estruturação de uma demonstração formal. Considerando que, segundo os PCN (BRASIL, 1988), a prática argumentativa é essencial para a compreensão das demonstrações, neste trabalho monográfico, visou-se o desenvolvimento de um minicurso, abordando atividades de argumentação matemática, em uma turma do primeiro período de um curso de Licenciatura em Matemática.

Nas atividades elaboradas, foi abordado o seguinte tema da Geometria: as propriedades dos quadriláteros notáveis. Optou-se por este ramo da Matemática, pois a Geometria possui uma gama de situações-problemas que propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e da prática argumentativa.

A metodologia utilizada foi a intervenção pedagógica que consta do planejamento, da implementação e da avaliação. Na fase de planejamento, destaca-se a aplicação do teste exploratório, no qual foi possível testar, analisar e aprimorar o material produzido. Todos os objetivos do teste exploratório foram alcançados.

Salienta-se que, apesar de estarem no quinto período do curso e terem cursado as disciplinas de Geometria plana, nem todos os participantes do teste elaboraram uma demonstração formal, o que evidencia, mais uma vez, as dificuldades relativas ao desenvolvimento das demonstrações.

Na fase de implementação das interferências, enfatizam-se duas atividades, a saber: a "Atividade de requisito" e a "Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)". Na primeira, embora fosse de requisito, constatou-se que a maioria dos participantes desconheciam partes dos conceitos apresentados, o que corrobora a precariedade do ensino da Geometria na Educação Básica. Na segunda, os licenciandos demonstraram dificuldades para compreender e estruturar uma argumentação matemática, sendo necessário adicionar uma nova atividade, análoga à "Atividade de Argumentação matemática I".

Além disso, nesta fase, os pesquisadores verificaram as contribuições dos *applets* e das construções no Geogebra para o entendimento dos conceitos e dos conteúdos trabalhados ao longo das atividades.

Quanto à fase de avaliação dos efeitos da interferência, os instrumentos de coleta de dados empregados na pesquisa, deixaram claro a ausência da prática argumentativa na Educação Básica.

A respeito da questão de pesquisa, os licenciandos participantes da proposta pedagógica, consideraram a prática argumentativa importante para a estruturação das demonstrações, o que contribuiu para a compreensão de ideias desenvolvidas na disciplina de Geometria I. Nos relatos dos licenciandos, observou-se que as atividades propiciaram a inserção da argumentação e da linguagem matemática, a distinção entre ideias importantes na argumentação matemática, tais como as ideias que podem ser utilizadas e a propriedades que deseja-se justificar, o encaminhamento para a estruturação de uma argumentação e o interesse dos licenciandos quanto à temática.

No que tange os objetivos específicos, foi possível identificar as diversas dificuldades apresentadas pelos licenciandos no processo de argumentação matemática, dentre elas, a falta de requisitos, conceitos básicos da Geometria plana, pouca destreza e familiaridade com a argumentação e a falta de domínio da linguagem matemática.

Os participantes apresentaram uma linguagem verbal precária e com pouco simbolismo matemático. Em relação ao último objetivo específico, os diálogos colaboraram de forma parcial para o processo argumentativo, uma vez que a aplicação ocorreu de forma remota, dificultando a participação e interação dos licenciandos.

Dessa forma, acredita-se que o objetivo geral da pesquisa, que é "investigar as contribuições de um estudo sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis, com base na argumentação matemática, para o processo de demonstração formal", foi alcançado.

Dentre as dificuldades encontradas pelos pesquisadores, estão as adversidades decorrentes do contexto remoto, tal como a instabilidade na conexão de internet e a disponibilidade de horário para a aplicação da proposta pedagógica.

De modo geral, a pesquisa contribuiu de diversas formas para a formação dos pesquisadores, possibilitando que estes: i) aprofundassem seus conhecimentos a respeito da argumentação matemática e dos quadriláteros notáveis; ii) compreendessem as dificuldades dos licenciandos nos processos de argumentação matemática e de demonstração formal; iii) adquirissem experiência em ministrar um minicurso remotamente, e iv) aprimorassem as habilidades de pesquisa, leitura e escrita.

Para trabalhos futuros, deixa-se como sugestão a aplicação prensencial desta sequência didática, com as devidas alterações, em uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental, tendo em vista a importância da inserção da argumentação matemática na Educação Básica.

Além disso, sugere-se o desenvolvimento de pesquisas sobre a argumentação matemática no campo da Álgebra.

Independente do campo matemático estudado, a argumentação matemática deve fazer parte da prática docente, levando em consideração suas contribuições para a formação integral do educando.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. Investigações em Geometria na Sala de Aula. *In*: ABRANTES, Paulo; FONSECA, Helena; PONTE, João Pedro da; VELOSO, Eduardo. **Ensino da Geometria no Virar do Milênio.** Lisboa: FCUL, 1999. p. 153-167. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf. Acesso em: 14 jan. 2022.

AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto; NASSER, Lilian. **Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental,** Santa Maria, v.32, n. 4, p.133-147, jul./dez., 2012. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/278. Acesso: 05 jul. 2021.

ALBUQUERQUE, Sonia; ARAÚJO, José Carlos Morais de; BOTELHO, NESPOLI, Ziléa Baptista. **Tópicos em história da matemática**. Rio de Janeiro: UCB, 2008. Disponível em: https://silo.tips/download/topicos-em-historia-da. Acesso em: 12 jan. 2022.

ALVES, Adriana Mota; HENRIQUES, Edmila Corrêa Cordeiro. **Estudo introdutório de superfícies quádricas: atividades investigativas com o software geogebra**. 2018. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, Campos dos Goytacazes, 2018. Disponível em: http://licenciaturas.centro.iff.edu.br/cursoslicenciatura/licenciatura-em-matematica/trabalho-de-conclusao-de-curso/2019/estudo-introdutorio-de-superficies-quadricas-atividades-investigativas-com-o-software-geogebra/view. Acesso em: 23 jan. 2022.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Demonstration in geometry: historical and philosophical perspectives. **Qualitative Research Journal**, São Paulo, v. 8, n. 18, p. 540-570, 2020. Disponível em:https://editora.sepq.org.br/rpq/article/download/344/218. Acesso em: 09 jul. 2021.

ALMOULOUD, Saddo Ag; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MANRIQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n. 27, set. /out. /nov./dez. 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbedu/a/xzRGKxDRJ6XS4ZXxLnBTkFL/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 11 jan. 2022.

AMORIM, Márcia Cristina dos Santos. **Argumentação e prova:** uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11411. Acesso em: 12 jun. 2021.

AZEVEDO, Simone Aparecida dos Anjos. **O desafio de argumentar nas aulas de Matemática:** uma investigação com estudantes do 1º. ano do Ensino Fundamental. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São de Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/22665. Acesso em: 12 jun. 2021.

BARCELOS, Gilmara Teixeira *et al*. Applets em ambientes de geometria dinâmica: ações para a formação de professores de matemática. **Revista Novas tecnologias na educação - RENOTE**, Porto Alegre, v. 7, n. 3, p. 1-10, dez. 2009. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/13606/8837. Acesso em: 21 jan. 2022.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, set. 2002. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10595. Acesso em: 09 jul. 2021.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 15-26, mai./ago. 2012. Disponível em:https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185. Acesso em: 25 jul. 2021.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. **A argumentação em Matemática:** Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 2005. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005. Disponível em: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https%3A%2F%2Frepositorio.ul.pt%2Fbitstream%2F10451%2F3140%2F1%2Fulsd048032_td_Ana_Boavida.pdf&ved=2ahUKEwiF-ZXmtar3AhV5hJUCHd9iAQ8QFnoECAkQAQ&usg=AOvVaw1XPT5Moh6CjvVNalJYB2_8&authuser=1. Acesso em: 21 abr. 2022.

BORTOLOSSI, Humberto José. O uso do software gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **Vidya**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul./dez. 2016. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804. Acesso em: 21 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 jun. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 27 jun. 2021.

BRITO, Márcia Regina Ferreira de; MELLO, Telma Assad. Alguns aspectos teóricos e conceituais da argumentação na prática pedagógica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais eletrônicos** [...]. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. p. 1-16. Disponível em: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http%3A%2F%2Fsbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws%2Fanais%2FXIENEM%2Fpdf%2F2888_1657_ID.pdf&ved=2ahUKEwiSz4nltqr3AhV7rpUCHSyWCuoQFnoECAcQAQ&usg=AOvVaw2TwbZ3PmF_hZdmMdyMYylO&authuser=1. Acesso em: 21 abr. 2022.

CAMILLO, Cíntia Moralles. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática. **Research, Society and Development**, Itajubá, v. 9, n. 7, p. 1-15, 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/341259872_Tecnologias_Digitais_de_Informacao_e_Comunicacao_contribuicoes_para_o_ensino_e_aprendizagem_de_Matematica. Acesso em: 20 jan. 2022.

CARVALHO; Thays Rayana Santos de; ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição; MARQUÊS; Pedro Paulo Mendes da Rocha. Impactos da Pandemia de COVID-19 na Rotina Profissional de Professores que Ensinam Matemática: Alguns Aspectos de Precarização do Trabalho Docente. **RIPEM**, v. 11, n. 3, p. 19-40, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.37001/ripem.v11i3.2565. Acesso em: 02 nov. 2021.

CHAER, Galdino; DINIZ, Rafael Rosa Pereira; RIBEIRO, Elisa Antônia. A técnica do questionário na pesquisa educacional. **Evidência**, Araxá, v. 7, n. 7, p. 251-266, 2011. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/sociologia_artigos/pesqusia_social.pdf. Acesso em: 18 jul. 2021.

COSTA, André Pereira da. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros notáveis . 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019. Disponível em: https://attena.ufpe.br/bitstream/123456789/33431/1/TESE%20Andr%c3%a9%20Pereira%20da%20Costa.pdf. Acesso em: 18 jan. 2022.

COSTA, Valter Magalhães. **Argumentação Matemática sob uma perspectiva crítica**: uma análise da prática didática no ensino fundamental. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-08052018- 155035/. Acesso em: 12 jun. 2021.

CUNHA, Murilo Bastos da. Metodologias para estudo dos usuários de informação cientifica e tecnológica. **Revista de Biblioteconomia de Brasília**, Brasília, v. 10, n. 2, p. 5-19, jul./dez. 1982. Disponível em: https://www.brapci.inf.br/_repositorio/2010/02/pdf_a7a477d359_0008278.pdf. Acesso em: 01 fev. 2022.

DAMIANI, Magda Floriana. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45., p. 57-67, mai./ago. 2013. Disponível em: http://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822. Acesso em: 18 jul. 2021.

DIONNE, Jean; LAVILLE, Christian. **A construção do saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed, 1999. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/287028/mod_resource/content/1/Laville%2C%20Christian%20%20Dionne%2C%20Jean_A%20Construcao%20do%20Saber%20%28completo%29.pdf. Acesso em: 02 fev. 2022.

DORNELES, Beatriz Vargas; SENA, Rebeca Moreira. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, jun. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138. Acesso em: 17 jan. 2022.

DORNELES, Bruna de Bastos Pazini. **Aplicação do software geogebra no estudo dos quadriláteros notáveis**. 2011. Monografia (Especialização em Tecnologia no Ensino de Matemática) - Fundação Universidade Federal Do Pampa, Alegrete, 2011. Disponível em: https://dspace.unipampa.edu.br/bitstream/riu/1797/1/Aplica%c3%a7%c3%a3o%20do%20software%20geogebra%20no%20estudo%20dos%20quadril%c3%a1teros%20not%c3%a1veis.pdf. Acesso em: 19 jan. 2022.

DUARTE, Valdemir Francisco. **Um estudo sobre propriedade do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova**. 2007. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11287/1/Valdenir%20Francisco%20Duarte.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009. Disponível em: https://ia801604.us.archive.org/35/items/Os.Elementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf. Acesso em: 17 jan. 2022.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula**. São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, Magno Luiz; NASSER, Lilian; VAZ, Rafael Filipe Novoa. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, jun./dez. 2017. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2090/1956. Acesso em: 25 jul. 2021.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadriláteros que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18952/2/Maridete%20Brito%20Cunha%20Ferreira.pdf. Acesso em: 18 jan 2022.

GEOGEBRA, 2022b. **Materials GeoGebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/materials?lang=pt-PT. Acesso em: 21 jan. 2022.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2009. (Série Educação à Distância). Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf . Acesso em: 18 jul. 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2002. Disponível em: http://www.uece.br/nucleodelinguasitaperi/dmdocuments/gil_como_elaborar_projeto_de_pesquisa.pdf. Acesso em: 18 jul. 2018.

JESUZ, Danilo Augusto Ferreira de; HIRATA, Cely Kaori; IZIDORO, Rafhael Henrique Fraga; PEREIRA, Ana Lúcia. Formação docente e o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação nas aulas de matemática na educação básica. **Revista Internacional de Formação de Professores**, Itapetininga, v. 3, n. 1, p. 59-76, jan./mar. 2018. Disponível em: https://periodicos.itp.ifsp.edu.br/index.php/RIFP/article/view/949/858. Acesso em: 23 jan. 2022.

LIMA, Marcella Luanna da Silva; LINS, Abigail Fregni. Ausência de pensamento matemático e argumento dedutivo na educação matemática: resultados de uma pesquisa. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2016, Paraíba. **Anais eletrônicos** [...]. Campina Grande: Realize Editora, 2016. n.p. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/epbem/2016/TRABALHO_EV065_MD1_SA13_ID647_08102016110320.pdf. Acesso em: 28 mar. 2022.

LIMA, Marcella Luanna da Silva; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Provas e demonstrações e níveis do pensamento geométrico: conceitos, bases epistemológicas e relações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2020.e66702/43212/259464#:~:text=A%20partir%20de%20seus%20primeiros,gen%C3%A9rico%20e%20a%20experi%C3%AAncia%20mental. Acesso em: 04 abr. 2022.

LINS, Abigail Fregni; MEDEIROS, Kátia Maria de; NASCIMENTO, Anderson de Araújo. Análise dos tipos de provas matemáticas de alunos do 1°. ano do ensino médio. **INTERNATIONAL JOURNAL EDUCATION AND TEACHING** , Recife, v. 3, n. 3, p. 201-214, set./dez. 2020. Disponível em: https://ijet-pdvl.com/index.php/pdvl/article/view/131. Acesso em: 25 jul. 2021.

LORENZATO, Segio. Por que não ensinar geometria?. **A Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 4, jan./jun. 1995. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1311. Acesso em: 15 jan. 2022.

ORDEM, Jacinto. **Prova e Demonstração em Geometria Plana**: Concepções de Estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11035/1/Jacinto%20Ordem.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil; causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724. Acesso em: 16 jan. 2022.

PETLA, Reveliano José. **Geogebra – possibilidades para o ensino de matemática**. 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-6.pdf. Acesso em: 23 jan. 2022.

ROSALE, André Rodrigues. **Argumentação e prova matemática na Educação Básica**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.11606/D.45.2019.tde-13052019-130421. Acesso em: 12 jun. 2021.

SILVA, Silvia Renata Florentino Camargo. **O Ensino da Geometria no Ensino Fundamental e sua Importância**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/33726/4/EnsinoGeometriaEnsino.pdf. Acesso em: 17 jan. 2022.

SILVA, Willian Ribeiro da. Aplicação do geogebra no estudo de funções quadráticas. **Revista Digital FAPAM**, Pará de Minas, v. 5, n. 5, p. 160-185, abr. 2014. Disponível em: https://periodicos.fapam.edu.br/index.php/synthesis/article/view/87/82. Acesso em: 20 jan. 2022.

SOUZA, Maria Estela de Oliveira. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11429. Acesso em: 12 jun. 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário de Sondagem

Seção 1 de 4

Questionário de Sondagem

Descrição do formulário

Termo de Compromisso Livre e Esclarecido

Prezado(a) participante,
Nós, Jhennyfer Pessanha de Souza e Luciano Corrêa Soares, alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense *Campus* Campos Centro, estamos realizando uma pesquisa no âmbito do Trabalho de Conclusão de Curso, sob a orientação da Prof. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade.
Solicitamos a sua autorização para responder a este questionário e às atividades.
Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida em sigilo. Esclarecemos ainda que a pesquisa é de caráter estritamente acadêmico, sem ganhos financeiros para nós, autores do trabalho.
Desde já, agradecemos sua colaboração.

Após todo o esclarecimento descrito acima, você consente em participar da pesquisa, voluntariamente? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

Seção 2 de 4

Parte 1: Perfil

Descrição (opcional)

1. Nome ou apelido: *

Texto de resposta curta

2. Idade: *

Texto de resposta curta

3. Gênero *

◯ Feminino

◯ Masculino

◯ Prefiro não assinalar

Seção 3 de 4

Parte 2: Formação acadêmica e ensino remoto

Descrição (opcional)

4. Há quanto tempo você concluiu o Ensino Médio? *

Texto de resposta curta

5. Você cursou o Ensino Fundamental: *

◯ Somente em escola pública

◯ Somente em escola privada

◯ Na maior parte em escola pública

◯ Na maior parte em escola privada

6. Você cursou o Ensino Médio: *

- Somente em escola pública
- Somente em escola privada
- Na maior parte em escola pública
- Na maior parte em escola privada

7. Você cursou formação de Professores na Modalidade Normal em Nível Médio? *

- Sim
- Não

8. Você já fez algum curso técnico? *

- Sim
- Não

10. O curso de Licenciatura em Matemática é a sua primeira graduação? *

- Sim
- Não

11. Caso a resposta acima seja "não", qual a outra graduação que já cursou?

Texto de resposta curta

12. Antes de iniciar o curso de Licenciatura em Matemática, você já teve experiências com o ensino remoto? *

- Sim
- Não

13. Quais suas concepções a respeito do ensino remoto (vantagens, desvantagens, dificuldades etc.) ? *

Texto de resposta longa

Seção 4 de 4

Parte 3: A argumentação matemática na Educação Básica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) salienta que o processo de argumentação matemática está vinculado ao desenvolvimento de competências ligadas ao raciocínio, sendo necessário que o aluno seja capaz de investigar, explicar e justificar, em conjunto com o professor e demais colegas de classe.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 jun. 2021.

Para responder as questões 14, 15 e 16, leve em consideração o período em que você foi aluno da Educação Básica.

Descrição (opcional)

14. Os professores costumavam proporcionar momentos de argumentação durante as aulas? *

- Frequentemente
- Às vezes
- Raramente
- Nunca
- Não me recordo

15. Os professores de Matemática costumavam proporcionar momentos de argumentação matemática durante as aulas? *

- Frequentemente
- Às vezes
- Raramente
- Nunca
- Não me recordo

16. Os professores de Matemática tinham o hábito de deduzir as fórmulas apresentadas nas aulas ? *

- Frequentemente
- Às vezes
- Raramente
- Nunca
- Não me recordo

17. Você considera a dedução das fórmulas um fator positivo para o processo de aprendizagem? *

- Sim
- Talvez
- Não
- Não sei opinar

18. Justifique a resposta acima. *

Texto de resposta longa

20. Em uma escala de 1 a 5, como você avalia o seu desempenho nos conteúdos de geometria que foram trabalhados na Educação Básica. Considere: 5- Ótimo; 4- Muito Bom; 3- Bom; 2- Ruim; 1- Péssimo. *

1 2 3 4 5

19. Em uma escala de 1 a 5, como você avalia o desempenho que teve na disciplina de Matemática no decorrer da Educação Básica. Considere: 5- Ótimo; 4- Muito Bom; 3- Bom; 2- Ruim; 1- Péssimo *

1 2 3 4 5

21. Amanda, Dario, Hélia e Cíntia estavam tentando provar que a seguinte afirmativa é verdadeira: Quando você soma a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180° (AMORIM, 2009, p.128. Adaptada).

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

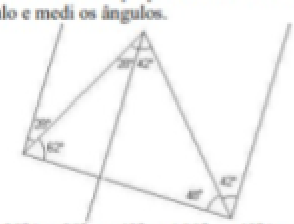
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Para responder as letras A e B, leve em consideração as respostas apresentadas acima

Descrição (opcional)

A) Escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão (AMORIM, 2009, p.128). *

- ◯ Amanda
- ◯ Dario
- ◯ Hélia
- ◯ Cíntia

Justifique a escolha anterior.

Texto de resposta longa

B) Escolha a que você acha que mais se assemelha às apresentadas nos livros didáticos (AMORIM, 2009, p.128. Adaptada). *

- Amanda
- Dario
- Hélia
- Cíntia

Justifique a escolha anterior.

Texto de resposta longa

AMORIM, Márcia Cristina dos Santos. **Argumentação e prova**: uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11411. Acesso em: 12 jun. 2021.

Descrição (opcional)

APÊNDICE B - Slides da Atividade de requisito

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Atividade de requisito

Trabalho de Conclusão de Curso

Autores: Jhennyfer Pessanha de Souza e Luciano Corrêa Soares
Orientadora: Prof. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade

Sumário

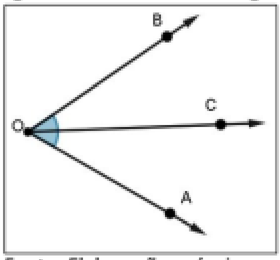
Conceitos iniciais

✓Definição de bissetriz

Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ interna a um ângulo AÔB é bissetriz do ângulo AÔB se, e somente se, AÔC = BÔC.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 25. Adaptada)

Figura 1- Bissetriz de um ângulo



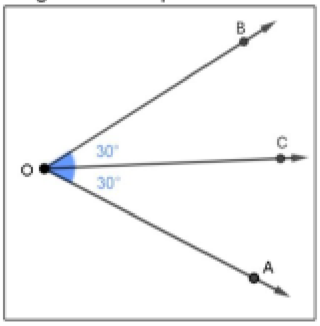
Fonte: Elaboração própria.

3

Conceitos iniciais (Cont.)

✓Exemplo:

Figura 2 - Exemplo de bissetriz



Fonte: Elaboração própria.

4

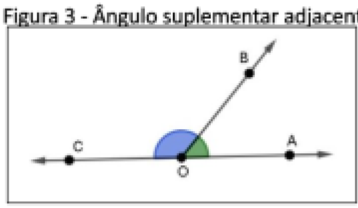
Conceitos iniciais (Cont.)

✓Ângulo suplementar adjacente

Dado o ângulo $A\hat{O}B$, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e a semirreta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo $B\hat{O}C$ que se chama ângulo suplementar adjacente ou suplemento adjacente de $A\hat{O}B$.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 26.)

Figura 3 - Ângulo suplementar adjacente



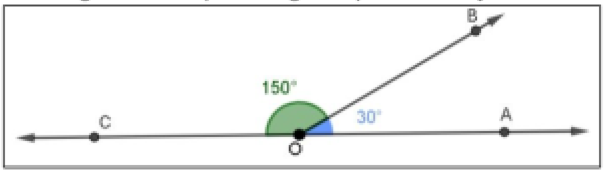
Fonte: Elaboração própria.

5

Conceitos iniciais (Cont.)

✓Exemplo:

Figura 4 - Exemplo de ângulo suplementar adjacente



Fonte: Elaboração própria.

6

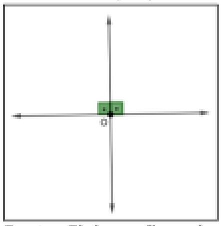
Conceitos iniciais (Cont.)

✓Definição de retas perpendiculares

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 78)

Figura 5 - Retas perpendiculares



Fonte: Elaboração própria.

7

Conceitos iniciais (Cont.)

✓Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

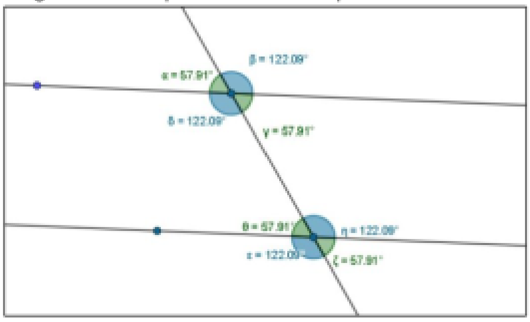
(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 22)

https://www.geogebra.org/classic/vm8akpgn

8

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Figura 6 - Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: Elaboração própria.

https://www.geogebra.org/m/xpapzanr

9

Congruência de triângulos

Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 38)

https://www.geogebra.org/m/bygcq7wv#material/amprp9j3

https://www.geogebra.org/classic/dxzjrhz9

https://www.geogebra.org/m/navewwfs

10

Quadriláteros

Quadrilátero é a reunião de quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ sendo A, B, C, e D pontos não colineares três a três.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 96. Adaptada)

https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#material/qNuQ6U3r

11

Quadriláteros notáveis

Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 97)

https://www.geogebra.org/m/N37zEZ2T

12

Referência

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da matemática elementar**: Geometria plana. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

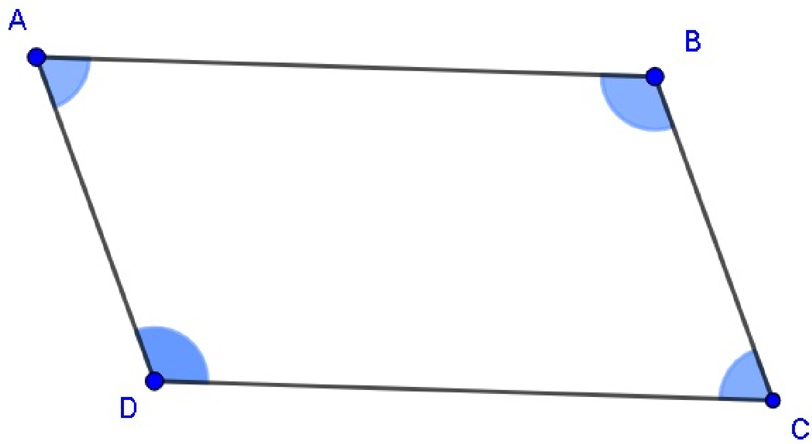
APÊNDICE C - Atividades de Argumentação matemática

Licenciatura em Matemática
Atividade de Argumentação matemática I
Nome: ____

Situação 1

A professora de Cascão pediu para ele justificar a seguinte propriedade dos paralelogramos.

Primeiro, Cascão quer identificar os ângulos opostos do paralelogramo. Considerando a figura a seguir, identifique os ângulos opostos.



____

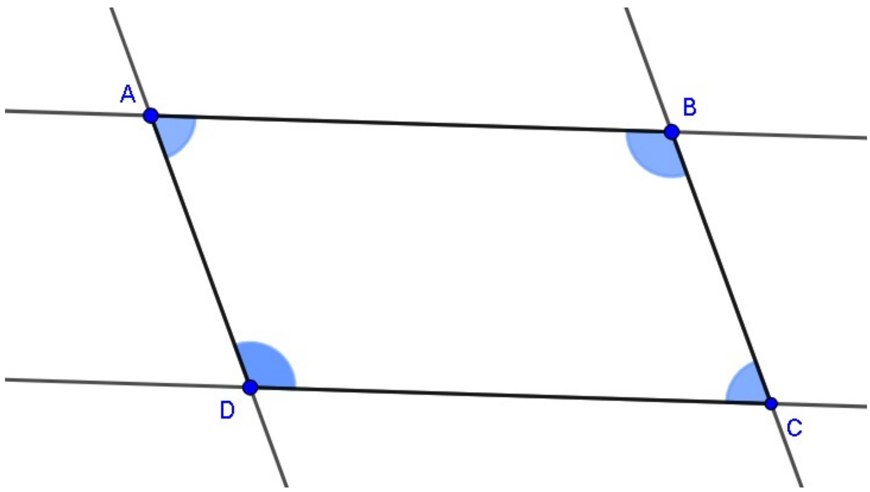
Cascão precisa identificar quais as ideias que ele pode utilizar a partir da definição de paralelogramo, e qual a propriedade que ele quer justificar. Ajude-o a identificar.

I) Propriedade que ele quer justificar ( ) $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$

II) Ideia que ele pode utilizar ( ) $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$

Após identificar o que pode ser utilizado como verdade, Cascão decidiu explorar esse fato, buscando relacioná-lo com algum conceito matemático que já tenha sido estudado, e a partir daí, obter argumentos que sejam suficientes para justificar a propriedade.

Cascão observou que o conceito matemático relacionado à definição de paralelogramo é o de retas paralelas cortadas por transversais.



Em relação à nomenclatura, o que Cascão pode observar a respeito dos ângulos:

I) $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$?

II) $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$?

Em relação à soma, o que Cascão pode observar a respeito dos ângulos:

I) $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$?

II) $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$?

III) Ao comparar os itens I e II, o que é possível afirmar?

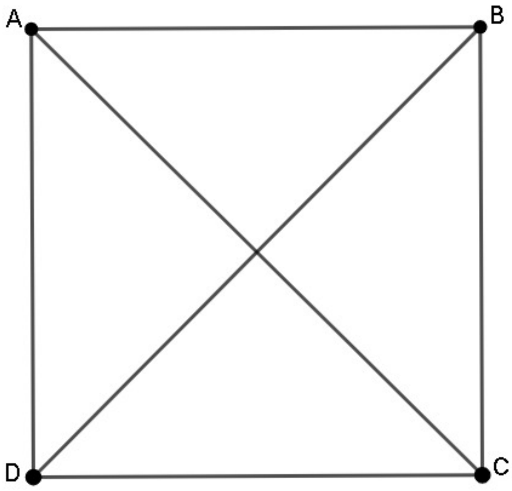
IV) A partir das observações feitas, que argumentação matemática Cascão pode utilizar para justificar a propriedade?

Situação 2

Cascão desafiou Cebolinha a justificar uma das propriedades do quadrado…

Primeiro, Cebolinha precisa identificar as diagonais do quadrado. Considerando a figura abaixo, quais são as diagonais?

____



Assim como Cascão fez na primeira situação, Cebolinha precisa identificar quais as ideias que ele pode utilizar, a partir da definição de quadrado, e qual a propriedade que ele quer justificar. Ajude-o a identificar.

I) Propriedade que ele quer justificar

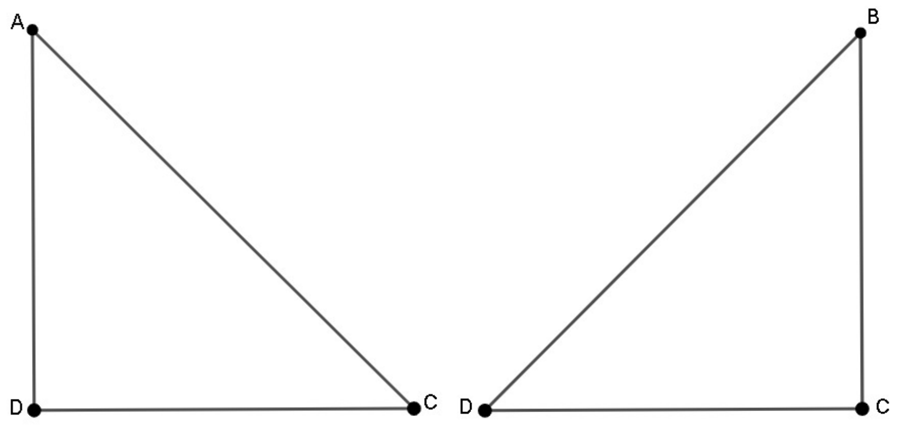
II) Ideia que ele pode utilizar

( ) $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

( ) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$

( ) $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Ao observar o quadrado ABCD anterior, Cebolinha percebeu que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são os lados dos triângulos ADC e BCD, respectivamente.



Utilizando-se das informações anteriores, e após observar as figuras acima, Cebolinha percebeu que é possível estabelecer uma relação entre os elementos correspondentes dos dois triângulos. Ajude-o a identificar.

I) $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

___

II) $A\widehat{D}C$ e $B\widehat{C}D$

___

III) $\overline{DC}$ e $\overline{CD}$

___

IV) A partir da relação estabelecida acima, o que Cebolinha pode concluir a respeito dos triângulos ADC e BCD? Por quê?

___

V) Com base na resposta do item IV, que argumentação matemática Cebolinha pode utilizar para justificar a propriedade?

___

___

Licenciatura em Matemática
Atividade de Argumentação matemática II
Nome: ____

Parte 1

I) Acesse o link: https://www.geogebra.org/classic/mvgveppe
II) Qual o nome do quadrilátero observado?

____

III) Após observar o quadrilátero ABCD, é possível identificar alguma relação entre as medidas dos lados opostos?

____

____

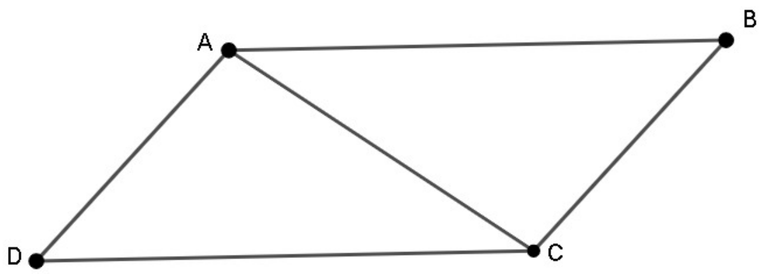
IV) Movimente um dos vértices da figura, exceto o vértice C.
V) O que você observou no item III, continuou ocorrendo mesmo movimentando os vértices?

____

VI) Você acha que a relação identificada será válida para qualquer paralelogramo?

____

VII) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada no item III?



____

____

____

____

____

____

____

Licenciatura em Matemática
Atividade de Argumentação matemática II
Nome: ____

Parte 2

I) Acesse o link: https://www.geogebra.org/classic/apcukhpg

II) Qual o nome do quadrilátero observado?

____

III) Após observar o quadrilátero ABOF, o que você pode concluir em relação às medidas dos ângulos:

$F\widehat{A}H$ e $B\widehat{A}H$ ____

$F\widehat{O}H$ e $B\widehat{O}H$ ____

IV) É possível identificar uma relação entre os ângulos de cada par citado no item III?

____

V) Movimente os vértices A ou B do quadrilátero.

VI) O que você observou no item III, continuou ocorrendo mesmo movimentando os vértices A e B?

____

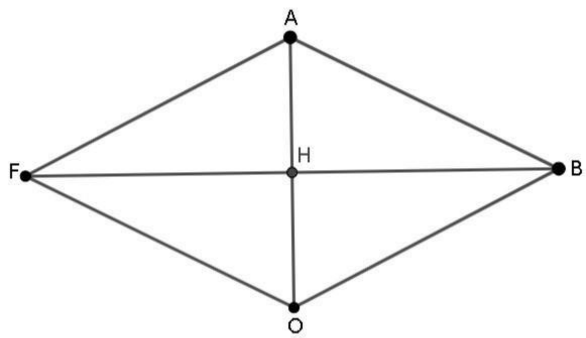
VII) O que você pode observar em relação à diagonal $\overline{AO}$ e os ângulos $F\widehat{A}B$ e $F\widehat{O}B$?

____

VIII) Você acha que a relação identificada será válida para qualquer losango?

____

IX) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada no item VII?



APÊNDICE D - Slides da justificativa da propriedade do paralelogramo

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Atividade de Argumentação matemática II (Parte 1)

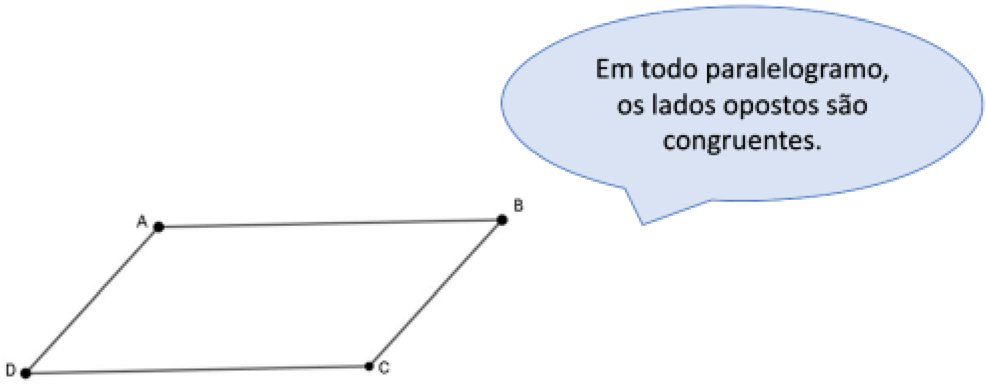
Jhennyfer Pessanha de Souza
Luciano Corrêa Soares

Orientadora: Prof. Dr. Ana Paula Rangel de Andrade

Fevereiro/2022

1

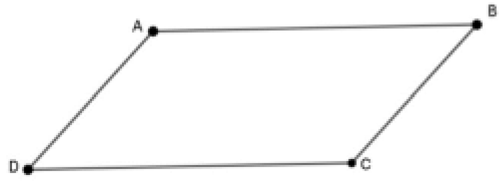
Resolução



2

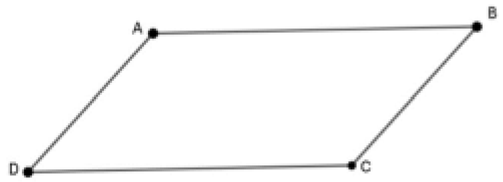
Resolução (Cont.)

- Quais são os lados opostos do paralelogramo ABCD?



Resolução (Cont.)

- Quais são os lados opostos do paralelogramo ABCD?



$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

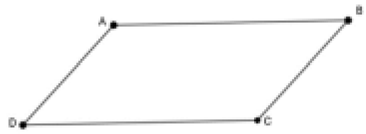
Resolução (Cont.)

(I) Ideia que pode ser utilizada
(II) Propriedade que deseja justificar

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

( ) $\overline{AB} \, // \, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \, // \, \overline{BC}$

( ) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$



4

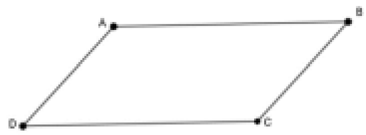
Resolução (Cont.)

(I) Ideia que pode ser utilizada
(II) Propriedade que deseja justificar

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

(I) $\overline{AB} \, // \, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \, // \, \overline{BC}$

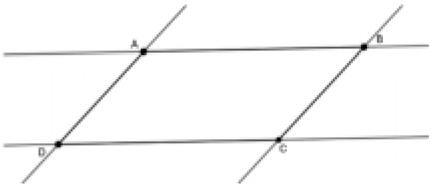
(II) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$



4

Resolução (Cont.)

Qual conteúdo matemático está relacionado com a definição de paralelogramo?

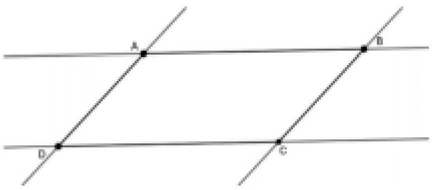


5

Resolução (Cont.)

Qual conteúdo matemático está relacionado com a definição de paralelogramo?

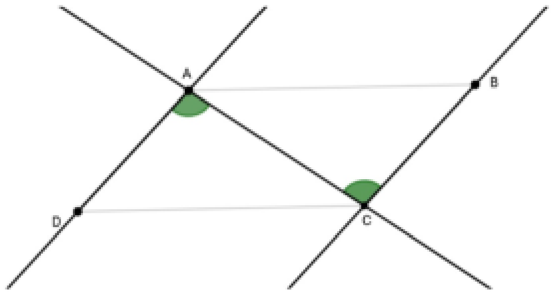
Retas paralelas cortadas por transversais



5

Resolução (Cont.)

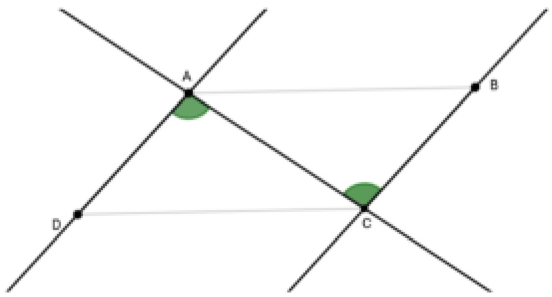
Qual a nomenclatura dos seguintes ângulos em destaque?



6

Resolução (Cont.)

Qual a nomenclatura dos seguintes ângulos em destaque?



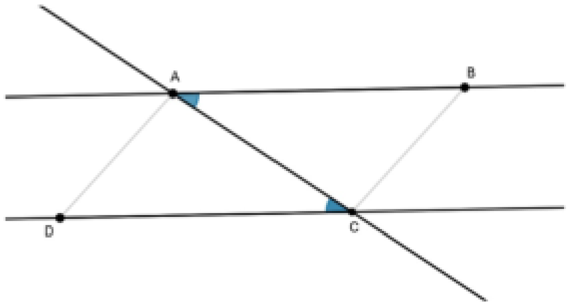
Alternos internos

Congruentes

6

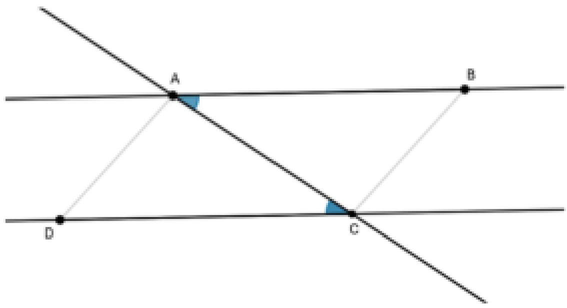
Resolução (Cont.)

Qual a nomenclatura dos seguintes ângulos em destaque?



Resolução (Cont.)

Qual a nomenclatura dos seguintes ângulos em destaque?

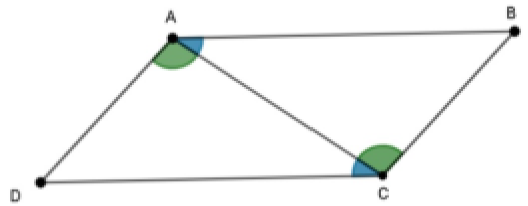


Alternos internos

Congruentes

Resolução (Cont.)

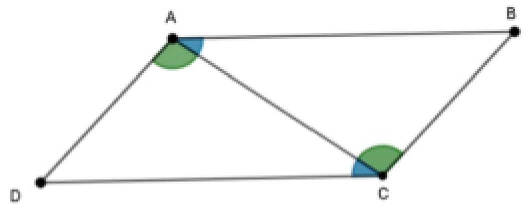
Qual a relação entre os triângulos ADC e CBA ?



8

Resolução (Cont.)

Qual a relação entre os triângulos ADC e CBA ?



Congruentes pelo caso
ALA

8

Resolução (Cont.)

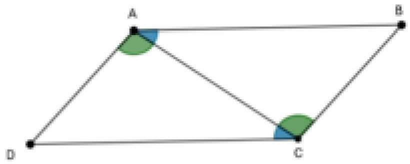
Os triângulos ADC e CBA são congruentes pelo caso ALA, pois:

$D\widehat{A}C = B\widehat{C}A$ ($\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ transversal, os ângulos são alternos internos).

$\overline{AC} \equiv \overline{CA}$ (lado comum)

$A\widehat{C}D = C\widehat{A}B$ ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ transversal, os ângulos são alternos internos).

Portanto, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$.



9

APÊNDICE E - Slides da justificativa da propriedade do losango

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

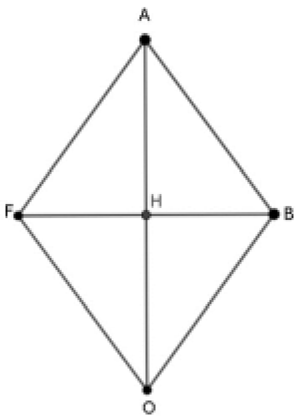
Atividade de Argumentação matemática II (Parte 2)

Jhennyfer Pessanha de Souza
Luciano Corrêa Soares

Orientadora: Prof. Dr. Ana Paula Rangel de Andrade

Fevereiro/2022

Resolução

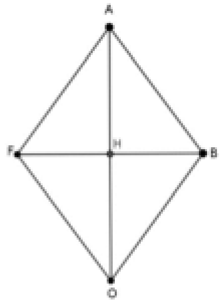


Em todo losango, as diagonais coincidem com as bissetrizes.

Resolução (Cont.)

(I) Ideia que pode ser utilizada
(II) Propriedade que deseja justificar

Em todo losango, as diagonais coincidem com as bissetrizes.



( ) $\overline{AB} \equiv \overline{BO} \equiv \overline{OF} \equiv \overline{FA}$

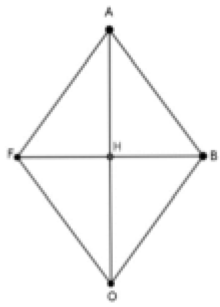
( ) $F\widehat{A}H = B\widehat{A}H$ e $F\widehat{O}H = B\widehat{O}H$

( ) $\overline{AB} // \overline{FO}$ e $\overline{FA} // \overline{BO}$

Resolução (Cont.)

(I) Ideia que pode ser utilizada
(II) Propriedade que deseja justificar

Em todo losango, as diagonais coincidem com as bissetrizes.



(I) $\overline{AB} \equiv \overline{BO} \equiv \overline{OF} \equiv \overline{FA}$

(II) $F\widehat{A}H = B\widehat{A}H$ e $F\widehat{O}H = B\widehat{O}H$

(I) $\overline{AB} // \overline{FO}$ e $\overline{FA} // \overline{BO}$

APÊNDICE F - Roteiro de Perguntas para a Entrevista

Roteiro de perguntas para a entrevista

1. Com relação à sequência didática, faça uma avaliação sobre os seguintes tópicos:
    - Tempo para realização das atividades;
    - Clareza nos enunciados das questões;
    - Grau de dificuldade das atividades desenvolvidas;
    - Qualidade dos materiais utilizados: slide, apostilas, *applets* e questionário.

2. Qual a importância da Atividade de requisito, composta da apresentação em slide, dos applets de Geometria e do Quiz, para a realização da Atividade de Argumentação matemática I?

3. E qual a importância da Atividade de Argumentação matemática I para a realização da Atividade de Argumentação matemática II?

4. Os diálogos que ocorreram durante a aplicação das atividades contribuíram para o desenvolvimento do processo argumentativo? Por quê?

5. Como foi o processo de elaboração das argumentações? Ocorreram dificuldades? Quais?

6. As atividades desenvolvidas nesse TCC podem ser realizadas em uma turma do Ensino Fundamental (oitavo e nono anos)?

7. Se essa aplicação for possível, que contribuições ela traria para o processo de aprendizagem do aluno?

8. As atividades desenvolvidas contribuíram para o processo de demonstração formal? Por quê?

APÊNDICE G - Roteiro de Perguntas para a Entrevista do Teste Exploratório

Roteiro de perguntas para o teste exploratório

1. Com relação à “Atividade de requisito”, faça uma avaliação sobre os seguintes tópicos:
   • Tempo para realização das atividades;
   • Clareza nos enunciados das questões;
   • Grau de dificuldade das atividades desenvolvidas;
   • Qualidade dos materiais utilizados: slide, apostilas, *applets* e o quiz.

2. Qual a importância da “Atividade de requisito", composta da apresentação em slide, dos applets de Geometria e do Quiz, para a realização da “Atividade de Argumentação matemática I"?

3. A Atividade de requisito contempla os conceitos necessários para a realização das atividades de argumentação? Você tem alguma sugestão ?

4. Com relação à “Atividade de Argumentação matemática I”, faça uma avaliação sobre os seguintes tópicos:
   • Tempo para realização das atividades;
   • Clareza nos enunciados das questões;
   • Grau de dificuldade das atividades desenvolvidas;
   • Qualidade dos materiais utilizados.

5. E qual a importância da “Atividade de Argumentação matemática I” para a realização da “Atividade de Argumentação matemática II”? Você tem alguma sugestão ?

6. Com relação à “Atividade de Argumentação matemática I”, faça uma avaliação sobre os seguintes tópicos:
   • Tempo para realização das atividades;
   • Clareza nos enunciados das questões;
   • Grau de dificuldade das atividades desenvolvidas;
   • Qualidade dos materiais utilizados.

7. Na “Atividade de argumentação matemática II”, houve dificuldade? Você tem alguma sugestão?

APÊNDICE H - Atividade de Argumentação matemática II (Parte 3)

Licenciatura em Matemática
Atividade de Argumentação matemática II
Nome:____

Parte 3

I) Acesse o link: https://www.geogebra.org/classic/dgtfhnne

II) Qual o nome do quadrilátero observado?

____

III) Após observar o quadrilátero ABCD, o que você pode concluir em relação às medidas dos ângulos AÔB, BÔC, CÔD e DÔA? É possível identificar alguma relação entre eles?

____

IV) Movimente os vértices A ou C da figura.

V) O que você observou no item III, continuou ocorrendo mesmo movimentando os vértices?

____

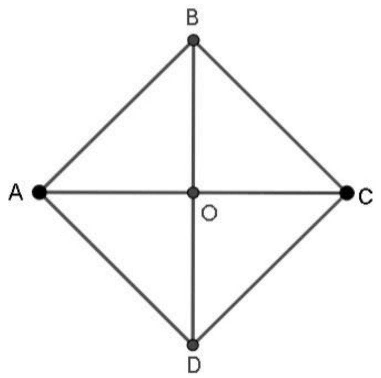
VI) Que relação você consegue identificar a respeito da intersecção das diagonais do quadrado?

____

VII) Você acha que a relação identificada será válida para qualquer quadrado?

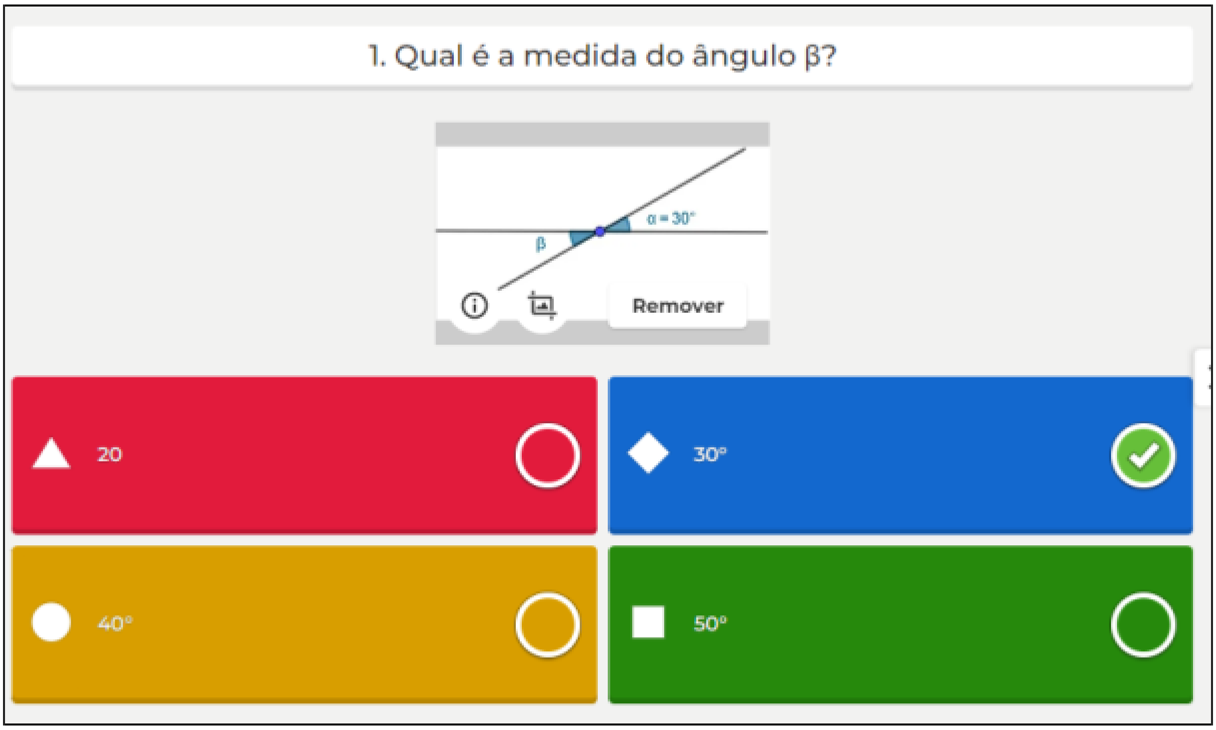
____

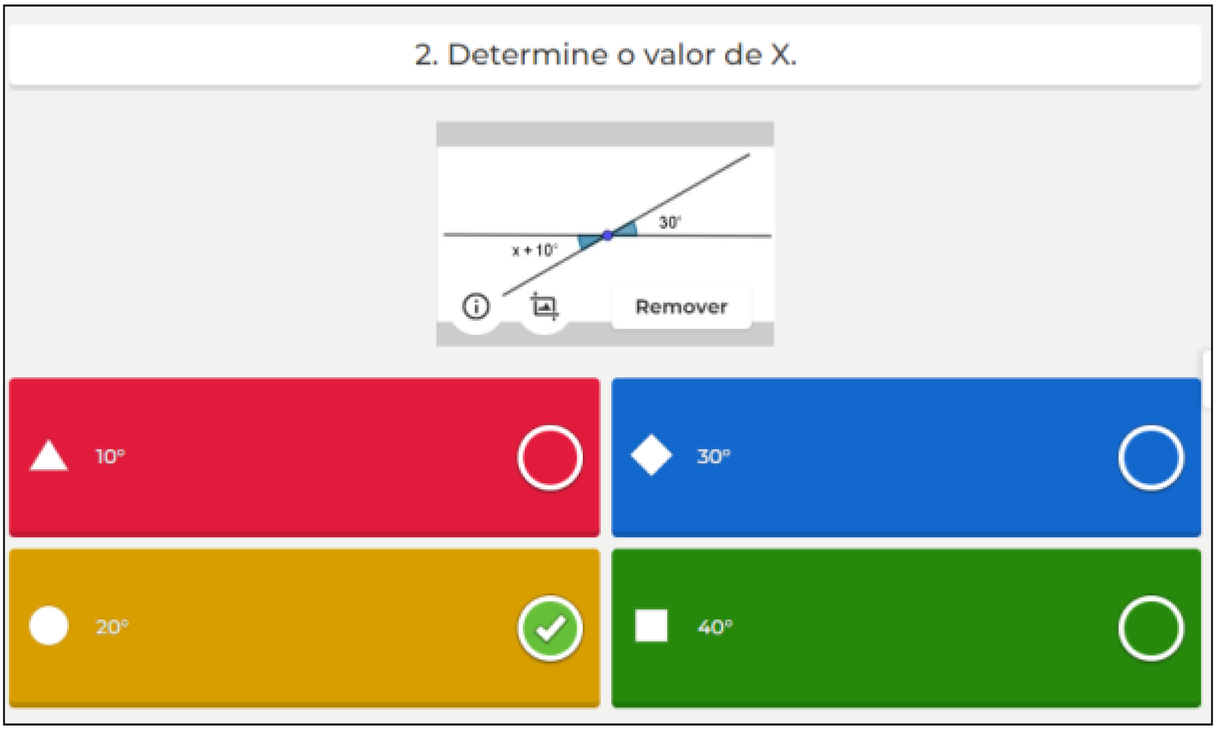
VIII) Que argumentação matemática você usaria para validar ou não a relação identificada no item VI?



____

APÊNDICE J - Questões do *Karrot*

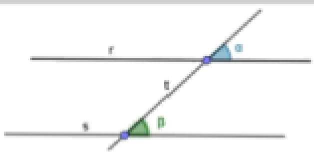

1. Qual é a medida do ângulo β?
α = 30°
β
Remover
20
30°
40°
50°


2. Determine o valor de X.
30°
x + 10°
Remover
10°
30°
20°
40°

3. Todo quadrilátero notável que possui lados opostos paralelos é um retângulo.

- Verdadeiro
- Falso

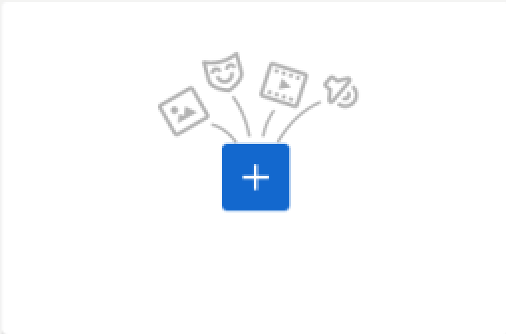
4. Considere as retas r e s paralelas e t transversal. Qual o nome dado aos ângulos α e β?



Remover

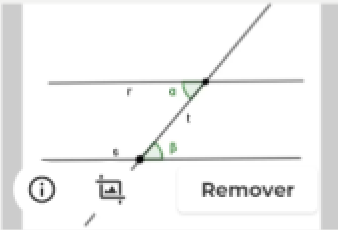
- Alternos internos
- Alternos externos
- Colaterias
- Correspondentes

5. Todo quadrilátero notável que possui quatro ângulos congruentes é losango.

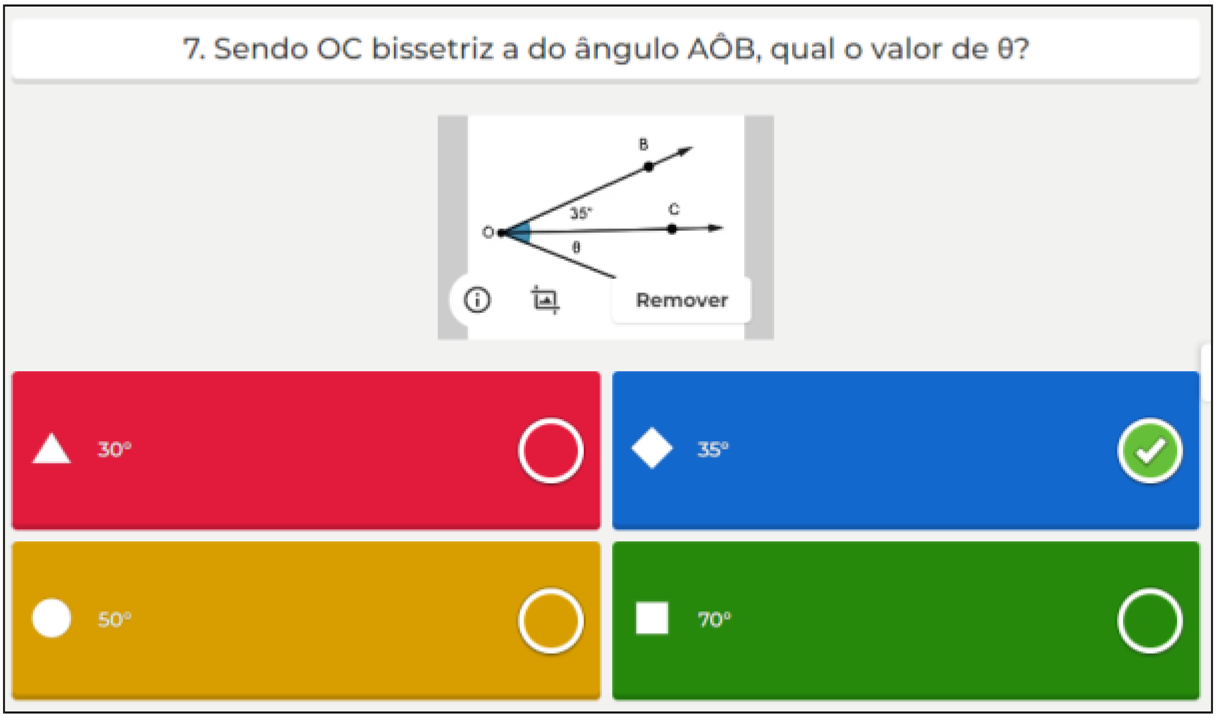


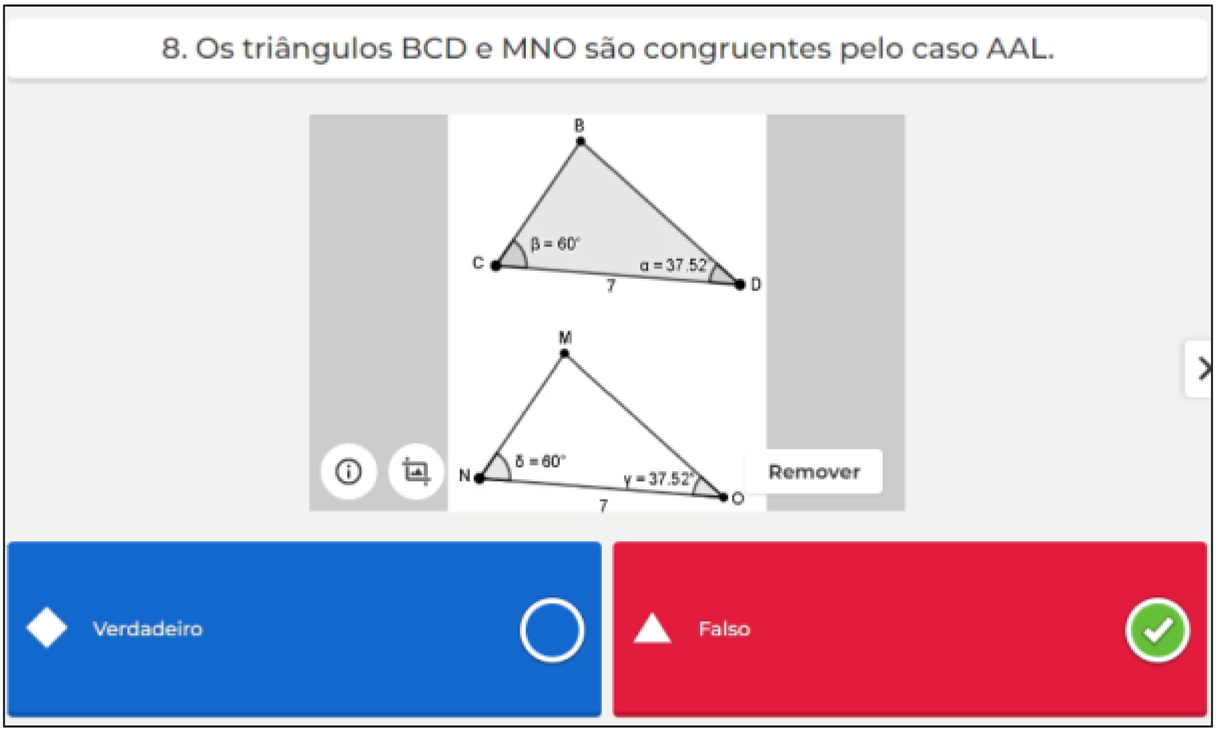
- Verdadeiro
- Falso

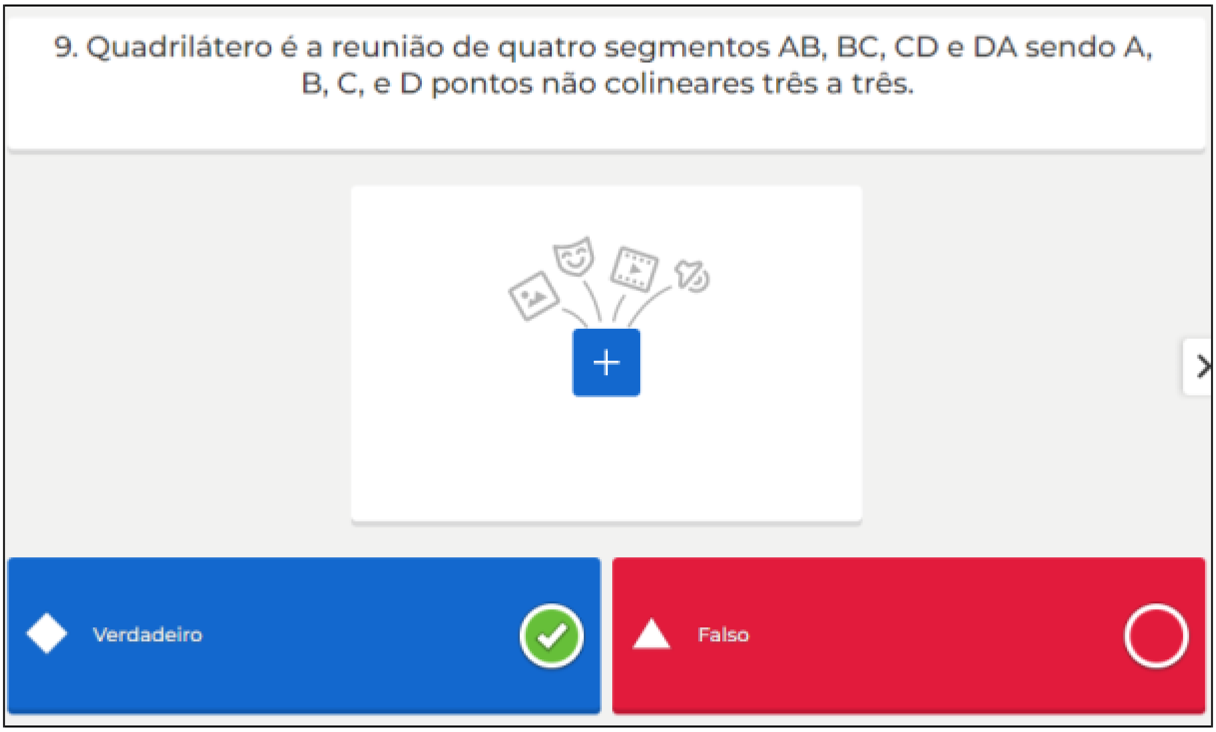
6. Considere as retas r e s paralelas e t transversal. Qual o nome dado aos ângulos α e β?

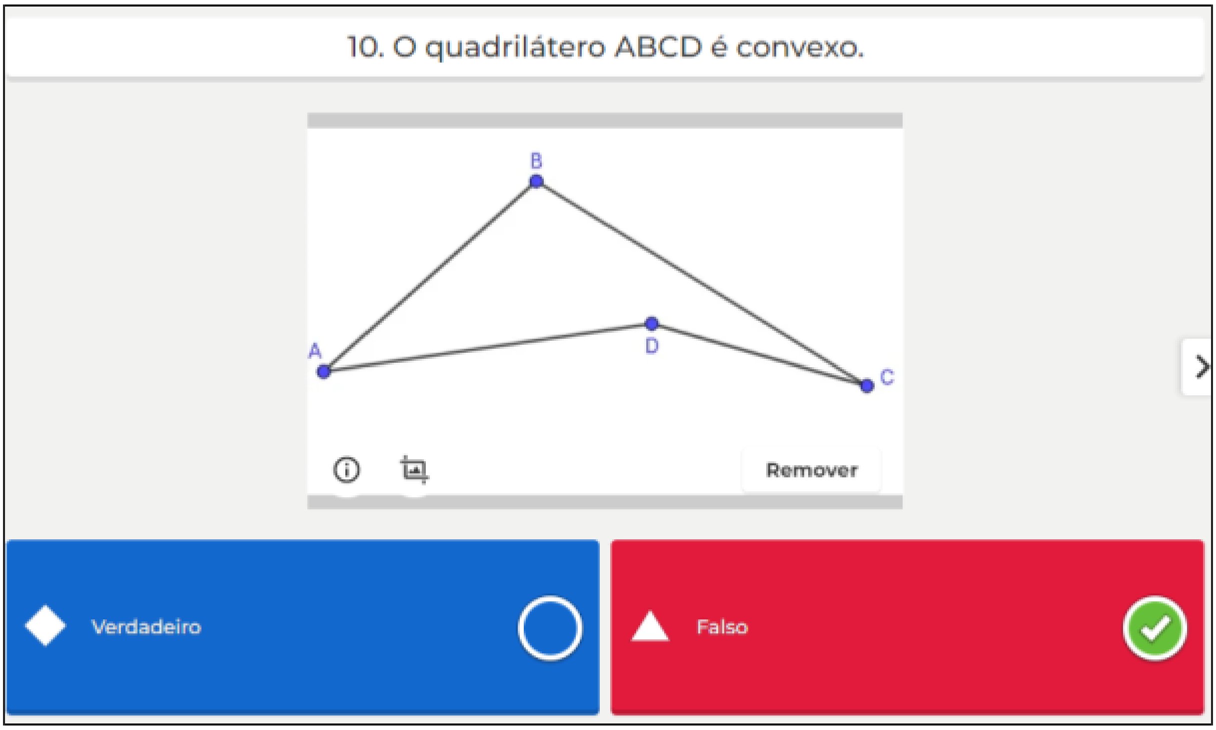


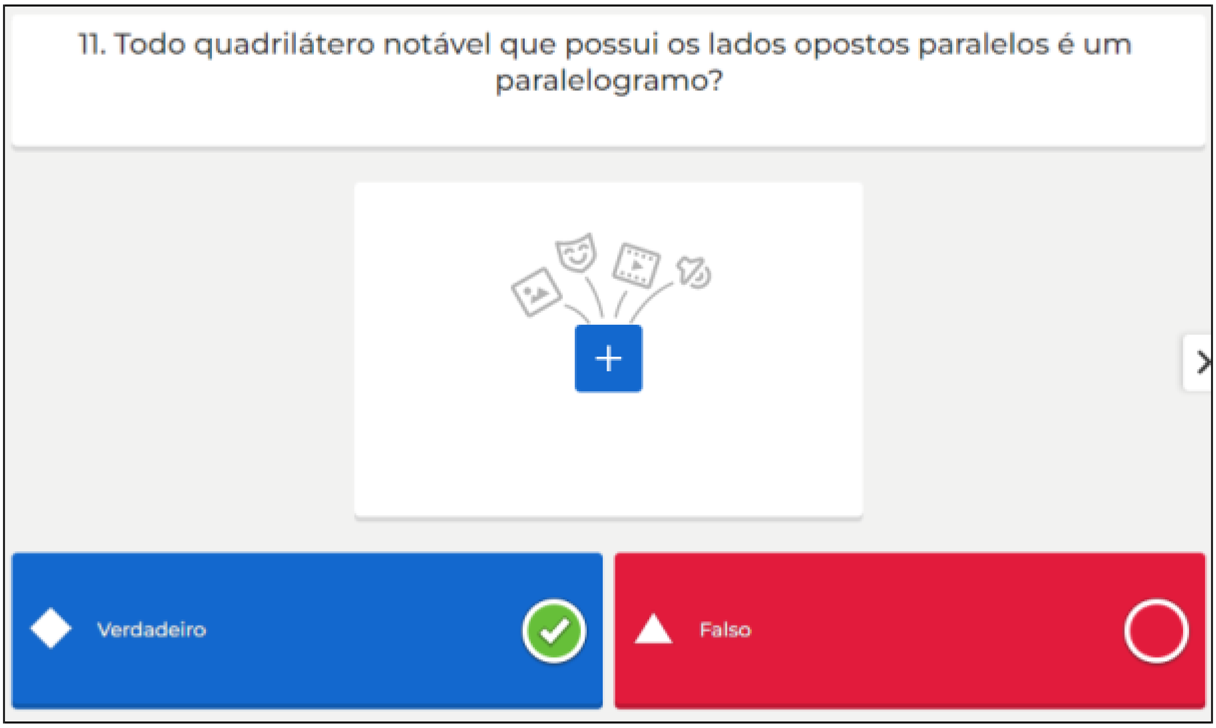
- Alternos internos
- Alternos externos
- Suplementares
- Correspondentes.

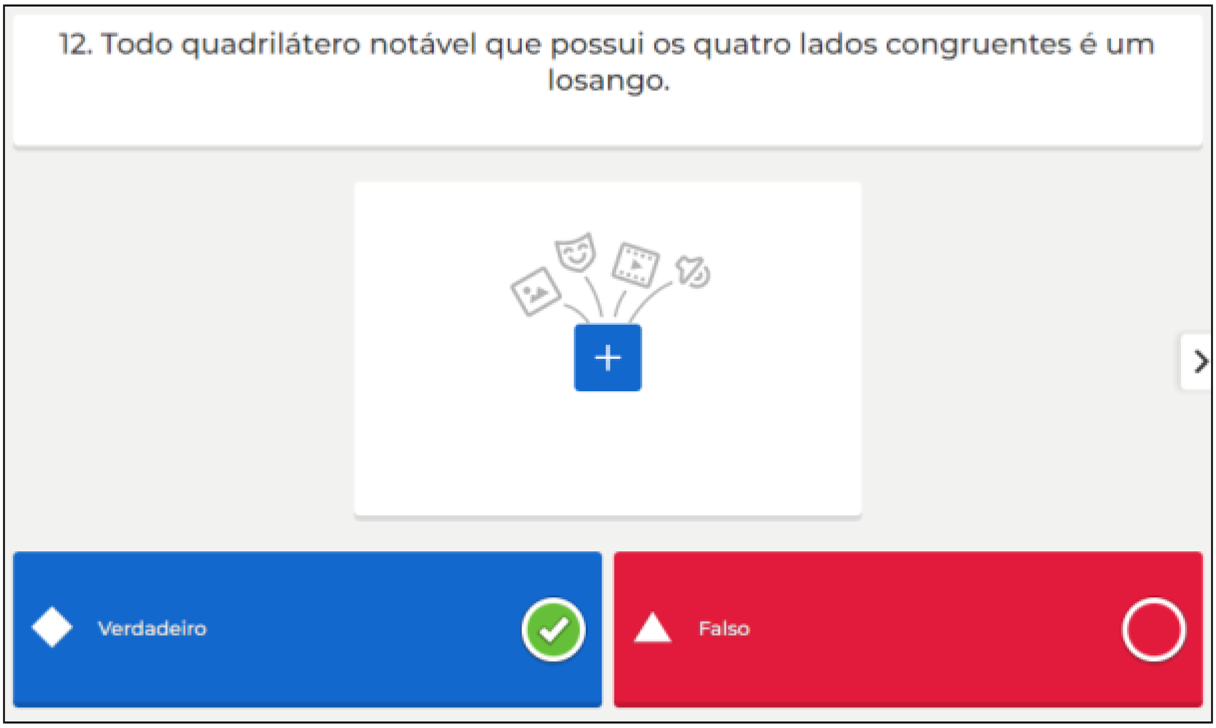

7. Sendo OC bissetriz a do ângulo AÔB, qual o valor de θ?
B
35°
C
O
θ
Remover
30°
35°
50°
70°

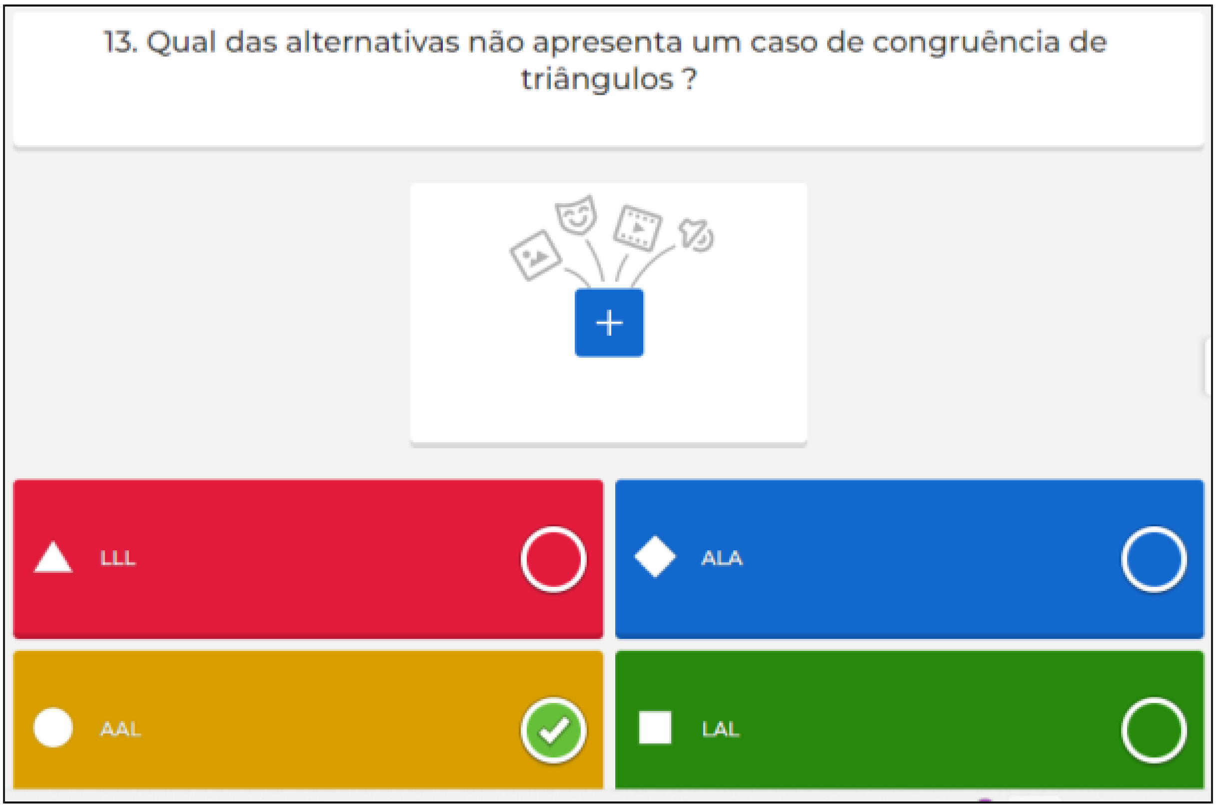

8. Os triângulos BCD e MNO são congruentes pelo caso AAL.
B
β = 60°
C
α = 37.52°
D
7
M
δ = 60°
N
γ = 37.52°
O
7
Remover
Verdadeiro
Falso

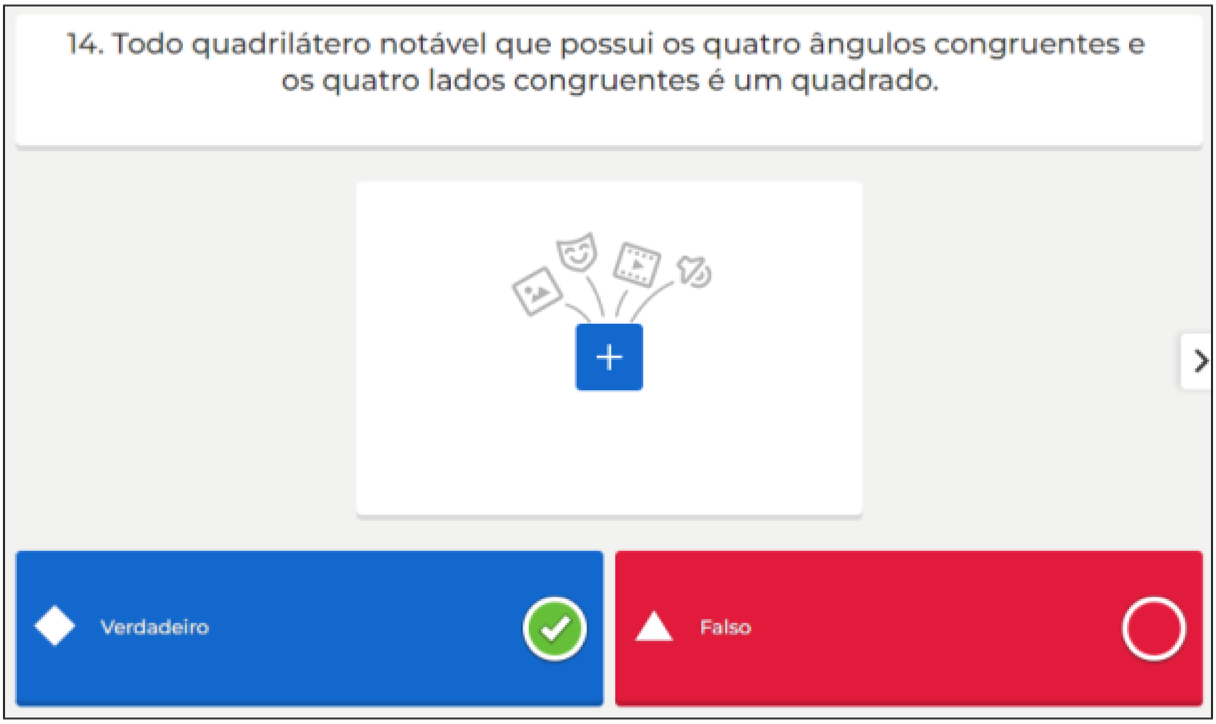

9. Quadrilátero é a reunião de quatro segmentos AB, BC, CD e DA sendo A, B, C, e D pontos não colineares três a três.
Verdadeiro
Falso


10. O quadrilátero ABCD é convexo.
B
A
D
C
Remover
Verdadeiro
Falso


11. Todo quadrilátero notável que possui os lados opostos paralelos é um paralelogramo?
Verdadeiro
Falso


12. Todo quadrilátero notável que possui os quatro lados congruentes é um losango.
Verdadeiro
Falso


13. Qual das alternativas não apresenta um caso de congruência de triângulos ?
LLL
ALA
AAL
LAL


14. Todo quadrilátero notável que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes é um quadrado.
Verdadeiro
Falso