MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

CAMPUS CAMPOS CENTRO

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RANNA DE JESUS AMBROSIO

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE VAN HIELE NO DESENVOLVIMENTO DE UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA A CERCA DE ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Campos dos Goytacazes/ RJ

Novembro – 2021.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

CAMPUS CAMPOS CENTRO

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RANNA DE JESUS AMBROSIO

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE VAN HIELE NO DESENVOLVIMENTO DE UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA A CERCA DE ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Profº. Me. Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Campos dos Goytacazes/RJ

Novembro – 2021.1

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

Ambrosio, Ranna de Jesus
A496c CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE VAN HIELE NO DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA A CERCA DE NGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL / Ranna de Jesus Ambrosio - 2021.
150 f.: il. color.

Orientador: Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.
Referências: f. 67 a 69.

1. Materiais manipuláveis. 2. Experimentação. 3. Geometria. I. Silva, Cleuber Eduardo do Nascimento, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
RUA DOUTOR SIQUEIRA, 273, PARQUE DOM BOSCO, CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ, CEP 28030130
Fone: (22) 2726-2903, (22) 2726-2906

PARECER N° 15/2021 - CACLMCC/DAESLCC/DIRESLCC/DGCCENTRO/REIT/IFFLU

21 de dezembro de 2021

RANNA DE JESUS AMBROSIO

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE VAN HIELE NO DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA A CERCA DE ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE
RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 22 de Novembro de 2021.

Banca Examinadora:

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues
Mestre em Engenharia de Produção/UENF Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro

Viviane da Silva Stellet
Mestre em Educação Matemática/USS Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro

Cleuber Eduardo do Nascimento Silva (Orientador) Mestre em Matemática/UFRJ
Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues (2163128)

COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que tem sido meu sustento, aos meus pais que nunca hesitaram em me apoiar, aos meus irmãos que me inspiram ser um ser humano melhor todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir ter trilhado este caminho e me sustentar em toda a minha jornada acadêmica. A meus pais que sempre se esforçaram para que eu pudesse ser a profissional que eu me tornei. Aos meus irmãos que desde sempre acreditaram muito em mim, mesmo quando eu mesma tinha dúvidas. À tia Beth que foi crucial na minha mudança para Campos e uma apoiadora incansável. Meus tios e tias que sempre que puderam me auxiliaram e sempre me incentivaram. A Lívia e Poliana, minhas orientadoras de projeto que me ajudaram a me apaixonar pelo uso de materiais manipuláveis. A Cleuber e Schirlane que acreditaram na minha proposta e sempre foram apoiadores deste trabalho e foram decisivos na proposta atual. Aos meus amigos do LEAMAR por me incentivarem e sempre se preocuparem comigo. A minha família IFFÊNIX que causou em mim uma positiva evolução mental e social. A Daniel e Bete, que nos momentos finais ouviram minhas lamúrias e me ajudaram a prosseguir.

“O desenvolvimento profissional do professor, concebido como um processo reflexivo e crítico sobre a prática educativa, é potencializado pelo movimento de escrita na medida em que esta exige (re)elaboração e (re)significação do pensamento pela própria estrutura do ato de escrever que possibilita uma formulação mais acurada das ideias do que a comunicação oral.”

(Oliveira)

RESUMO

Este trabalho visa apresentar a Teoria de van Hiele e as possíveis contribuições para o desenvolvimento de uma sequência didática. É resultado de uma pesquisa bibliográfica que aponta as deficiências no processo de ensino e aprendizagem da Geometria no Brasil, a utilização de material manipulável no ensino da Matemática e apresenta a Teoria de van Hiele como metodologia aplicada na elaboração de materiais específicos para aluno e para professor. A referida teoria tem berço na Holanda, no final dos anos 1950, porém permaneceu oculta até a reforma do ensino na União Soviética, nos anos 1960.O objetivo geral da pesquisa é investigar as possíveis contribuições da Teoria de van Hiele na elaboração de uma sequência didática para o estudo de ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para alcançar o objetivo foi desenvolvido um material que, posteriormente, foi avaliado por 4 alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro, uma professora da Licenciatura em Matemática lotada no mesmo *campus* e um professor de Matemática do ensino fundamental da cidade de São Fidélis - RJ. Ao final da pesquisa, pode-se verificar que a utilização da Teoria de van Hiele como norteadora no desenvolvimento de uma sequência didática se apresenta como eficaz e reformadora.

Palavras-chave: Materiais manipuláveis; Experimentação; Geometria.

ABSTRACT

This monograph aims to present van Hiele's Theory and the possible contributions to the development of a didactic sequence. It is the result of a bibliographical research that points out the deficiencies in the teaching and learning process of Geometry in Brazil, the use of manipulable material in the teaching of Mathematics and presents the van Hiele Theory as a methodology applied in the elaboration of specific materials for students and teachers . The referred theory has its cradle in Holland, in the late 1950s, but it remained hidden until the educational reform in the Soviet Union, in the 1960s. didactic for the study of angles formed from parallel lines cut by a transversal one. To achieve the goal, a material was developed and subsequently evaluated by 4 students of the Licentiate Degree in Mathematics at the Instituto Federal Fluminense campus Campos Centro, a teacher of the Licentiate Degree in Mathematics on the same campus and a Mathematics teacher from elementary school in the city of São Fidelis - RJ. At the end of the research, it can be seen that the use of van Hiele's Theory as a guide in the development of a didactic sequence is presented as effective and reforming

Keywords: manipulable materials; Experimentation; Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As dificuldades que permeiam o processo de ensino e aprendizagem têm sido cada vez mais discutidas nos meios acadêmicos, algumas dessas voltadas pontualmente para a Matemática. Diante dessas discussões, matemáticos, professores e estudantes de licenciatura têm voltado suas atenções para as possíveis causas da deficiência no processo de ensino e aprendizagem e a maneira pela qual elas podem ser minimizadas. "Na atualidade, a educação ainda apresenta inúmeras características de um ensino tradicional, onde o professor é visto como detentor do saber, enquanto os alunos são considerados sujeitos passivos no processo de ensino e aprendizagem" (NICOLA; PANIZ, 2017, p. 356). A fim de trazer novas contribuições e desenvolvimentos ao processo de ensino e aprendizagem, é que pesquisas e trabalhos têm sido realizados no campo da Educação e Ensino de Matemática (FONSECA; LEIVAS, 2018). Silva e Silva também afirmam que:

> As dificuldades por que passam os professores no ato do ensino, e os alunos, em termos de aprendizagem no campo da Matemática, vêm inquietando muitos pesquisadores na área da didática da Matemática. Diante de tal inquietação, muitos pesquisadores buscam caminhos diversos que possam minimizar cada uma das dificuldades diagnosticadas ao longo do tempo, principalmente as registradas nos últimos 10 anos. Nessa busca, teóricos, pesquisadores e professores procuram apresentar procedimentos e estabelecer recursos didáticos – pedagógicos que possibilitem uma melhor compreensão em toda esfera do conhecimento matemático (SILVA; SILVA, 2004, p. 1).

Uma área da Matemática que sofre ainda mais com os percalços do processo é a Geometria. Barbosa (2003) pondera que:

> Durante séculos, a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva. Ainda assim, a Geometria formava a base das Ciências Exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico. A partir da metade do século passado, porém, o chamado movimento da "Matemática Moderna" levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial. Desta forma, a Geometria foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores do ensino fundamental e do ensino médio, com conseqüências que se fazem sentir até hoje (BARBOSA, 2003, p. 3)

Rogenski e Pedroso (2019, p. 1) declaram que a Geometria constitui um "[...]como um dos conteúdos estruturantes para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Essa é ponte que une diferentes conteúdos, é rica em elementos facilitadores à aprendizagem da álgebra e números".

Harmonizando com as pesquisas já existentes é que este trabalho foi pensado. Uma das principais motivações para a realização deste trabalho, foram as experiências com aulas mais cooperativas que a autora teve enquanto estudante do ensino fundamental em uma escola municipal. Em uma das oportunidades, pôde ter acesso a uma representação geométrica quando estava aprendendo frações. Toda a experiência de não apenas ver ilustrações no livro didático, mas de experimentar fazer divisões iguais em uma pizza, assentou o significado e abriu o caminho para o estudo desse conteúdo de uma forma mais aprazível.

O envolvimento no projeto de pesquisa CONSTRUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS E PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O LEAMAT - LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, já em sua graduação de licenciatura em Matemática, no qual eram desenvolvidos materiais e métodos de viabilizar o ensino e aprendizagem de Matemática, a impeliu a buscar formas de abordar conteúdos matemáticos nos quais estes fossem mais satisfatoriamente inteligíveis. Nesse projeto, a autora desenvolvia e produzia materiais manipuláveis, o que a fez compreender a importância destes para o estudo da matemática.

> Os materiais didáticos manipuláveis (MD) constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa (RODRIGUES; GAZIRE, 2012, p. 1)

Em suas práticas de estágio e, também, quando foi monitora do programa do MEC intitulado **Mais Educação**, a autora experienciou a rotina de planejamento de aula, bem como o contato com mais autonomia no exercício do magistério, mas que, por outro lado, revelaram a face do desinteresse por parte de muitos alunos da educação básica. Nessas oportunidades, porém, percebia sempre uma postura mais favorável quando utilizava materiais concretos e jogos ao ministrar as aulas. Esse projeto também foi muito importante, uma vez que, a proposta deste era estimular processo de ensino e aprendizagem por meio de práticas que fugiam da limitação de utilização do quadro e livros didáticos. Todos esses fatores associados, implicaram na autora um interesse em desenvolver um estudo e uma prática mais voltada para o desenvolvimento gradual do ensino pautada na **Teoria de van Hiele** como método para a formulação de uma aula.

A percepção sobre a falta de entendimento de seus próprios alunos acerca de conteúdo de geometria, levou o casal Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof a fazer uma investigação na década de 1950 e desenvolver um modelo que visa entender o processo de assimilação do conhecimento geométrico, o aporte na qualidade do raciocínio e de quais formas este pode ser conduzido (SUÁRES, 2019).

O primeiro contato da autora deste trabalho com a Teoria de van Hiele aconteceu em meio aos estudos para o projeto de pesquisa na qual ela fazia parte. Logo na primeira leitura, a autora se apaixonou pelo método proposto pelo casal van Hiele e o tomou como fundamentação teórica para sua futura monografia. Tal teoria chamou atenção pois esta converge para os estágios de aprendizagem que Piaget (1976) defende e possui passos muito precisos para a orientação e desenvolvimento de aprendizagem do conhecimento geométrico.

A teoria do desenvolvimento piagetiana, como é chamada a teoria desenvolvida por Jean Piaget, se preocupa em suma com as funções cognitivas. Os pressupostos biológicos são a base da teoria e das consequências epistemológicas que ela realiza. A teoria formulada pelo casal van Hiele defende que, muito mais que o fator idade, mas a maturidade, é determinante para o desenvolvimento do pensamento geométrico (VARGAS; ARAYA, 2013).

A Teoria de Van Hiele é um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico que é caracterizado por níveis de raciocínio e um trabalho de progressão entre esses níveis. Existem 5 níveis, sendo estes: o nível 1 é denominado Visualização, o nível 2 é denominado Análise, o nível 3 é denominado Dedução Informal, o nível 4 é denominado Dedução Formal e o nível 5 é denominado Rigor. O modelo, ainda, conta com 5 características gerais, sendo elas: Sequencial, Avanço, Intrínseco e Extrínseco, Linguística e Combinação Inadequada. Além disso, é possível estabelecer 5 fases de aprendizado: Informação, Orientação dirigida, Explicação, Orientação livre e Integração. (CROWLEY, 1994)

A partir dessas reflexões formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as possíveis contribuições da Teoria de van Hiele na elaboração de uma proposta de sequência didática para o estudo de ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal?

A fim de responder a questão de pesquisa, traçou-se o seguinte objetivo geral: Investigar as possíveis contribuições da Teoria de van Hiele na elaboração de uma proposta de sequência didática para o estudo de ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal.

Para atingir o objetivo geral instituiu-se os seguintes objetivos específicos:

- Aprofundar estudos sobre a Teoria de Van Hiele;
- Investigar sobre as deficiências no processo de ensino e aprendizagem da Geometria;
- Elaborar uma proposta de intervenção embasada na Teoria de van Hiele para o estudo dos ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal;
- Fazer um levantamento do material de apoio necessário à implementação da proposta;
- Formular um protocolo detalhado que servirá de apoio à aplicação.

Este trabalho traz uma proposta de intervenção pedagógica e contém os procedimentos metodológicos que estarão augurados os passos e os materiais para a aplicação e desenvolvimento das aulas, seguindo os princípios delimitados pela teoria de van Hiele.

A monografia foi dividida em cinco principais capítulos, sendo eles: Introdução, Revisão da Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões e Considerações Finais.

O capítulo de Revisão da Literatura é destinado a um estudo aprofundado da teoria na qual o trabalho se baseia, um estudo histórico sobre as deficiências no eensino da Geometria no Brasil e a importância do uso de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática. Neste capítulo também estão listados os Trabalhos Relacionados que concebem a estrutura básica desta monografia.

O capítulo de Procedimentos Metodológicos é destinado ao detalhamento do método de pesquisa adotado nesta monografia. Também se encontra uma transcrição prévia das atividades da proposta de intervenção elaborada nesta pesquisa.

O capítulo de Resultados e Discussões é destinado a ponderar as contribuições da teoria de van Hiele no desenvolvimento de uma sequência didática, se conduzida da maneira especificada neste trabalho, bem como apresentar o parecer de alguns alunos da Licenciatura em Matemática do IFF, professores da Licenciatura em Matemática do IFF e professores do ensino fundamental da cidade de São Fidélis - RJ.

O capítulo de Considerações finais é destinado à apresentar os pareceres completos sobre a pesquisa e apresentar um retorno aos objetivos geral e específicos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo será apresentado o conteúdo que alicerça este trabalho tendo três subseções, sendo estas: Deficiência no estudo da Geometria na qual são listados os principais fatores que tornaram a Geometria uma parte pouco trabalhada nas aulas de Matemática; Teoria de van Hiele, onde é explicitado o estudo sobre a teoria que norteia toda a prática pedagógica elaborada neste trabalho; Material manipulável, onde traz a importância de se trabalhar material manipulável no estudo de Geometria, mais precisamente o material manipulável que é utilizado na aula aqui transcrita.

2.1 Aporte teórico

A Geometria envolve um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo material. Destarte, é importante desenvolver o pensamento geométrico no aluno já que este pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos certificados. (BRASIL, 2017)

O envolvimento e participação das famílias e de toda a comunidade escolar e acadêmica tem, por decisão conjunta, criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, manter a formação continuada do docente, a fim de que se possibilite um aperfeiçoamento contínuo dos processos de ensino e aprendizagem (BRASIL, 2017). Desta forma, o objetivo desse trabalho é proporcionar ao docente um material de apoio diferenciado e com aporte bem delimitado.

2.1.1 Deficiência no ensino da geometria

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a Geometria é uma unidade temática que abraça um vasto conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas de diferentes áreas do conhecimento e do mundo físico (Brasil, 2018). Porém, o cenário no qual o ensino da Geometria se revela não conjuga com tal relevância.

O estudo da geometria sofre há anos uma desvalorização proveniente de fatores como: falta de preparo dos professores em sua formação, ser uma das últimas seções abordadas nos livros didáticos que, por falta de tempo no final do ano, é deixada de lado e também por necessitar de materiais de apoio que colaborem na abstração dos conteúdos abordados (BARBOSA, 2003). Barbosa certifica que

> Os conteúdos de Geometria sempre são trabalhados no último bimestre do ano letivo. Existindo uma acumulação de matérias a serem dadas, os professores abandonam o ensino desta parte da Matemática, abrindo com isso uma grande lacuna no aprendizado do aluno, trazendo-lhe conseqüentemente grandes dificuldades posteriores. Esta omissão se deve ao fato de muitos professores sentirem-se inseguros, porque, às vezes, falta-lhes o preparo necessário e o desejo de tentar uma mudança para enfrentar um novo desafio: a reciclagem da sua postura didático-pedagógica (BARBOSA, 2003, p.1)

As causas da omissão no estudo de Geometria podem ser inúmeras, no entanto, duas estão agindo direta e fortemente em sala de aula. A primeira causa que pode ser citada é a falta de conhecimentos geométricos nos professores, conhecimentos estes necessários para a sua prática pedagógica. Um professor que desconhece a Geometria também não conhece o poder, a importância e a beleza que ela possui na formação do seu aluno. A segunda causa a ser citada é a abordagem da Geometria nos livros didáticos. Muitas vezes ela é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, sem qualquer aplicação aparente seja de natureza histórica ou lógica, ou ainda é reduzida a poucas formas do mundo físico (BARBOSA, 2003).

O chamado Movimento da Matemática Moderna é entendido como um dos precursores na mobilização para a desobrigação do ensino da Geometria. As propostas de modernização do ensino de matemática traziam duas principais visões: a primeira, defendida por Jean Dieudonné, defendia a abolição da Geometria como tratava Euclides, e dava ênfase a geometria como o estudo de um conjunto de transformações, que significava a valorização da Álgebra e da Geometria Vetorial. A outra visão, defendia a utilização de novos conjuntos axiomáticos parao estudo da Geometria (DUARTE; SILVA, 2006, p. 173).

Pavanello (1993) afirma que o ensino da geometria iniciou seu processo de abandono aqui no Brasil com a promulgação da Lei 5692/71 que garantia autonomia às instituições de ensino no tocante à organização dos seus currículos. O Art. 5° dessa lei diz: "Os currículos plenos de cada grau de ensino, constituídos por matérias tratadas sob a forma de atividades, áreas de estudo e disciplinas, com as disposições necessárias ao seu relacionamento, ordenação e seqüência, serão estruturados pelos estabelecimentos de ensino" (BRASIL, 1971).

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula - talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar da falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado como tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 1)

Deve-se levar então com decisão compatível com medidas governamentais, este abandono do ensino da Geometria. Quais seriam as reais intenções que revelam as relações à oferta de oportunidades educacionais a todos os segmentos? (PAVANELLO, 1993).

Como encarar uma realidade já tão definida por características de desamparo, desinteresse e despreparo? Diante desse cenário torna-se possível e necessário o desenvolvimento de metodologias e sequências didáticas que viabilizem o desenvolvimento gradual e progressivo do conhecimento geométrico. Alusivo a esta ideia, Costa (2016) declara

> [...] Matemática acompanha o homem desde os primórdios e está presente na maioria das atividades cotidianas. Reconhecida como uma disciplina de difícil compreensão muitas pessoas se afastam em vez de buscar meios que possibilitem o interesse para seu estudo. Habitualmente o professor de Matemática se depara tanto com alunos que têm dificuldade de assimilar conteúdos matemáticos como com os que têm aversão à disciplina (COSTA, 2016, p. 8).

Ambicionando estimular uma postura diferenciada na própria autora, mas também na sociedade acadêmica e pedagógica como um todo, é que este trabalho foi constituído.

2.1.2 A teoria de van Hiele

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) fomenta que, é competência geral da educação básica, exercitar a curiosidade intelectual e empregar a abordagem característica das ciências, incluindo a investigação, reflexão, a criticidade e imaginação, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e solucionar problemas e conceber soluções, incluindo tecnológicas, se baseando nas diversas áreas (BRASIL, 2018). Ela ainda traz que “A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental” (BRASIL, 2018, p. 265).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, trazem que, não só a seleção dos conteúdos e temas, mas também a forma de conduzi-los no ensino são decisivas. A forma como se organizam as atividades, a sala de aula, a escolha do material didático oportuno e a metodologia de ensino aplicada é que poderão permitir o trabalho síncrono dos conteúdos e competências (BRASIL, 2002).

Posto isto, também é importante consolidar a autonomia dos adolescentes, oferecendo a eles condições e meios para acessar e interagir criticamente com os diversos saberes e fontes de informação (BRASIL, 2018).

Em busca de promover uma prática pedagógica que concordem com as visões da BNCC, e valer-se metodologias que viabilizem o desenvolvimento gradual e progressivo do conhecimento, pode-se tomar como modelo de desenvolvimento geométrico o elaborado pelos van Hiele. Rodrigues (2007) afirma que:

> O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos Van Hiele propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Ressalta se o ensino, mais do que a maturidade, como fator que contribui mais significativamente para esse modelo (RODRIGUES, 2007. p. 1).

Dina van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele foram um casal de professores holandeses que desenvolveram um modelo de desenvolvimento geométrico que visa orientar na formação, mas também na avaliação das habilidades do aluno. Tal teoria foi desenvolvida a partir das teses de doutorado de cada um deles na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. A propagação dessa teoria ficou por conta de Pierre, pois, logo depois de concluir a tese, Dina morreu (RODRIGUES, 2015).

Esta metodologia começou a ser implantada na União Soviética nos anos 60, devido a reformulação do ensino médio (MAZZINI; SANTOS, 2021, p. 3), o que permitiu que essa teoria se disseminasse pelo mundo. O modelo demorou a merecer atenção internacional. Impelidos por encontrar soluções para as dificuldades com o ensino de geometria, nos Estados Unidos, na década de 1970, muitos professores tomaram como base de estudos a Teoria de van Hiele. Em 1973, o orientador do casal van Hiele, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado "Mathematical as an Task Educational", onde citava a Teoria. Já em 1976, Izaak Wirsup, um professor norteamericano, começou a divulgar o modelo em seu país. (MAZZINI; SANTOS, 2021, p. 3)

E nos anos 90 a Teoria foi então trazida para o Brasil. Ainda segundo Dos Santos Mazzini e Dos Santos:

> No Brasil, um dos trabalhos pioneiros foi apresentado pelo professor Nilson José Machado no livro "Matemática e Língua Materna" da editora Cortez publicado em 1990, e em 1992, uma aplicação do modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (DOS SANTOS MAZZINI; DOS SANTOS, 2021, p. 4)

A Teoria de van Hiele se caracteriza principalmente por distinguir a compreensão geométrica em cinco níveis de pensamento e também defende que o processamento dos níveis de aprendizagem está mais relacionado com as instruções recebidas em cada um deles, do que com a idade na qual o aluno se encontra (RODRIGUES, 2007).

O modelo define cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico (ou níveis de aprendizagem geométrica) com as seguintes características, segundo Rodrigues (2007):

> No nível 1 (Visualização), as figuras são avaliadas por sua aparência apenas, neste nível o aluno consegue reconhecer entes geométricos e têm condições de aprender o vocabulário geométrico, porém ainda não é capaz de reconhecer propriedades;
>
> No nível 2 (Análise), o aluno reconhece propriedades, porém não é capaz de

fazer inclusão de classes;

No nível 3 (Dedução Informal), ele já faz inclusão de classes e acompanha uma demonstração informal, porém ainda não poderá construir uma demonstração por si só;

No nível 4 (Dedução Formal), o aluno raciocina num contexto axiomático e é capaz de desenvolver demonstrações formais;

No nível 5 (Rigor), este aluno é capaz de comparar sistemas fundamentados em diversos axiomas, nesse nível as geometrias não-euclidianas são assimiladas.

Na figura 1 é apresentado um diagrama dos níveis elaborados na Teoria de van Hiele.

Figura 1 – Níveis de raciocínio na Teoria de van Hiele

Fonte: Elaboração própria

Alguns estudos utilizam a numeração de 0 à 4 para os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico, porém, para facilitar a leitura e compreensão, nesta pesquisa é adotada a numeração de 1 à 5.

Esta Teoria não é apenas fundamentada na delimitação dos níveis, mas também postula as características gerais da Teoria e determina fases de aprendizagem a serem seguidas. Crowley (1996) estabelece as características gerais da Teoria de van Hiele, como sendo:

1. Sequencial: O aluno deve necessariamente passar por todos os níveis, uma vez que não é possível atingir um nível posterior sem dominar os anteriores.
2. Avanço: A progressão ou não de um nível para outro, depende mais dos métodos de ensino e do conteúdo do que da idade ou maturação biológica. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns acentuam o progresso, mas há alguns que retardam.
3. Intrínseco e Extrínseco: Os objetivos intrínsecos em um nível tornam-se extrínsecos no nível seguinte.
4. Linguística: Cada nível tem sua própria linguagem e um conjunto de relações interligando-os. Assim, uma relação que é "correta" em um certo nível, pode se modificar em outro nível.
5. Combinação inadequada: O professor e o aluno precisam estar raciocinando em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

É importante entender, além do nível de conhecimento no qual o aluno se encontra e as características, também como é feita a progressão de um nível para outro mais elevado dentre os citados acima. Para tal, o modelo do casal também prevê as etapas pelas quais alunos e professor devem percorrer, a fim de alcançar o próximo nível. Cada uma dessas etapas é chamada fases de aprendizagem. Segundo Crowley (1996), são elas:

1. Interrogação informada: Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos de estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.
2. Orientação dirigida: Atividades são desenvolvidas para explorarem as características de um nível e isso deve ser feito com o uso de material selecionado e preparado pelo professor.
3. Explicação: Agora, o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores, os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

4. Orientação livre: Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.
5. Integração: Nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. Assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

De acordo com a BNCC é uma das competências específicas de Matemática para o ensino fundamental: "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018, p. 267). Logo, a utilização da Teoria de van Hiele como norteadora do processo de ensino e aprendizagem é relevante.

2.1.3 Material manipulável

Ao observar historicamente a sociedade, nota-se que, a utilização de materiais manipuláveis na abordagem de conteúdos matemáticos data de tempos antigos e são instrumentos essenciais no tratamento da Geometria. Teles e Morais afirmam que "Desde a antiguidade o ser humano necessitou representar figuras em três dimensões" (TELES; MORAIS, 2016, p. 1). "Na grande maioria de nossas escolas de ensino fundamental, contudo, não é habitual serem realizadas atividades nas aulas de Matemática que favoreçam a visualização e a percepção do espaço à nossa volta". (BARBOSA, 2003, p. 3).

É denominado material manipulável (ou material manipulativo em algumas literaturas), todo material concreto (material concreto é todo material de apoio que o professor utiliza em suas aulas, como aplicativos, livros, jornais, softwares, jogos, materiais manipuláveis) que permite o toque, sentir, manipular e movimentar (MORÉ, *et al.*, 2021).

Segundo Martins (2008), a utilização de materiais desta natureza se justifica no estudo da geometria pois a ausência da experimentação e da utilização do material no ensino da Geometria faz-se um dos principais motivos da falta de entendimento da disciplina por parte dos alunos. Oferecer situações onde eles visualizem, comparem e desenhem formas, dobrem, recortem, moldem, deformem, montem e desmontem é necessário. Pode parecer um passatempo, mas é uma etapa de extrema importância para a aprendizagem das formas geométricas.

Entendendo o papel elementar dos materiais manipulativos, Sarmento explana:

> A utilização dos materiais manipulativos oferece uma série de vantagens para a aprendizagem das crianças, entre outras, podemos destacar: a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas. (SARMENTO, 2011, p. 4).

O uso de materiais manipuláveis possibilita uma ponte entre o professor e o aluno, compondo uma via de mão dupla que contribui para que o processo de ensino e aprendizagem seja uma alternação de conhecimentos entre estes indivíduos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. (AMBROSIO; ABREU; RODRIGUES, 2019).

A BNCC defende que o uso de recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e software de geometria dinâmica disponham de papel crucial para a compreensão e utilização das noções de Matemática. No entanto, estes materiais precisam estar integrados com situações que conduzam à reflexão e sistematização, de modo que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018).

A Base Nacional Comum Curricular ainda aponta que mesmo a Matemática sendo primordialmente uma ciência hipotético-dedutiva, uma vez que suas demonstrações se apoiam em um sistema axiomático e de postulados, é de imprescindível importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, 2018).

2.2 Trabalhos relacionados

A partir de pesquisas no Google Acadêmico e no portal da Capes foi possível fazer um levantamento de trabalhos relacionados que auxiliaram no aprofundamento temático do presente projeto.

No dia 17 de maio de 2019, utilizando o portal de Periódicos da Capes foi pesquisado, na busca avançada: teoria van hiele OR paralelismo e perpendicularidade.

Após essa pesquisa prévia, foram detectados 47 resultados.

Aplicou-se então o filtro Artigos e foram exibidos 45 periódicos como resultado. Logo depois aplicou-se o filtro Periódicos revisados por pares, o resultado caiu para 29. Por fim o filtro Idioma - Português foi aplicado e como resultado foram 20 periódicos encontrados.

Tais filtros foram utilizados a fim de buscar trabalhos relacionados ao tema da presente pesquisa que tivessem maior aceitação no meio acadêmico como embasamento teórico do trabalho e que fosse de fácil entendimento para a autora.

Foram então selecionados 2 trabalhos que pareceram mais pertinentes para a autora e que serão explanados nesta monografia.

Será ainda elucidado um terceiro trabalho que é de autoria de uma professora do IFF *campus* Campos Centro, pois esta traz a Teoria de van Hiele como metodologia aplicada para sua dissertação de mestrado

2.2.1 José Carlos Pinto Leivas (2012) - Pitágoras e van Hiele: uma possibilidade de conexão

Este trabalho objetiva-se promover visualização, na tentativa de eliminar certo obstáculo envolvendo o Teorema de Pitágoras. A presente pesquisa segue uma abordagem qualitativa. Considerando que todo teorema em Matemática tem uma demonstração, que toda demonstração tem um ponto de partida, ou seja, as condições iniciais ou hipóteses, e que toda demonstração tem por objetivo comprovar ou validar certa propriedade para todos os casos, a partir dessas condições iniciais, a formulação de um enunciado correto na mente do professor e dos estudantes da licenciatura em Matemática é fundamental tanto ao ensino quanto à aprendizagem. O autor, portanto, chegou à conclusão que ainda há muito a fazer em Educação Geométrica, para que se possa atingir um patamar aceitável no ensino e na aprendizagem de Geometria nos diversos níveis de escolaridade. Logo, aprimorar habilidades de visualização que permitam diversas formas de representação de um conceito matemático é fundamental para se atingir esse objetivo e, especialmente, distinguir Geometria e Formas de Grandezas e Medidas.

2.2.2 Alessandra Coelho Rodrigues (2007) - O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

O objetivo deste trabalho é analisar a eficiência do método de van Hiele. Ele foi oferecido em formato de um minicurso voltado para alunos da sétima série do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública, com o intuito de discutir e comparar as médias de notas dos grupos (experimental e controle), analisando o desempenho dos alunos da intervenção pedagógica e se as instruções recebidas promovem aquisição de cada um dos níveis de Van Hiele. A pesquisa foi feita de forma sistemática, através de análises de experiências em sala de aula. O processo se constituiu em um pré-teste e pós- teste, onde posteriormente foram coletados para análise. Após a análise foi possível definir a eficiência do modelo de van Hiele no processo de ensino da geometria. Este trabalho ainda apresenta o modelo da teoria estudada e as fases de aprendizagem características, que contribuem para o melhor entendimento do trabalho dos van Hiele.

2.2.3 Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues (2015) - A teoria de van Hiele aplicada aos triângulos: uma sequência didática para o 8° ano do ensino fundamental

Esse trabalho objetiva-se conduzir o aluno a conhecer e familiarizar-se com o triângulo quanto a sua classificação, condição de existência, medidas dos lados e ângulos, soma dos ângulos internos, teorema do ângulo externo e casos de congruência. A fundamentação teórica deste trabalho consiste em apresentar a teoria de van Hiele. Ele foi conduzido através do teste de van Hiele, testes sobre triângulos e uma sequência de atividades sobre triângulos. Conclui-se que a sequência organizada de tarefas e a maneira como foram desenvolvidas através da intervenção pedagógica com uso de materiais manipuláveis, envolvendo a interação entre os alunos, entre a professora e os alunos e os momentos de discussão, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Fez-se necessária uma nova busca de materiais relacionados visto que muito tempo se passou desde o início da escrita deste trabalho. Essa diferença de tempo ocorreu em consequência da pandemia do novo coronavírus que impossibilitou por mais de um ano a conclusão do trabalho.

Essa nova pesquisa foi realizada no dia 06 de julho de 2021 no portal de Periódicos da Capes e utilizou-se os seguintes filtros na busca avançada: teoria van hiele OR retas paralelas. Obteve-se então 58.351 resultados. Aplicando também os filtros Data de publicação - último ano e Tipo de material - artigo, os resultados se restringem a 5.732 trabalhos. Ao empregar o filtro (é exato) para a frase teoria de van hiele, o novo número de resultados é 539. Refinando ainda mais os resultados com o filtro tópico: Education, obteve-se 28 artigos. Porém nenhum desses novos artigos traziam a Teoria de van Hiele como objeto de estudo ou como norteadora do processo de ensino e aprendizagem.

Desta forma, uma nova pesquisa foi feita, agora no portal Google Acadêmico utilizando: As contribuições de van Hiele na elaboração de uma sequência didática e o filtro desde 2020, foram alcançados 107 trabalhos. Após a leitura do título e por vezes o resumo do trabalho, delimitou-se mais dois trabalhos a serem utilizados como Trabalhos Relacionados a esta monografia.

O primeiro trabalho é uma dissertação de mestrado de autoria de Oséias Pereira Matias da Silva. O segundo trabalho é um artigo publicado no **XIX Seminário Temático Internacional** de autoria de Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos e Talita Freitas dos Santos Mazzini.

2.2.4 Oséias Pereira Matias da Silva (2018) - A Teoria de Ausubel e o Modelo dos van Hiele aplicados à Geometria: Uma Proposta Didática

Essa obra se trata de uma dissertação para o mestrado profissional em Matemática (PROFMAT/UFCG). Este trabalho é fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e na Teoria de van Hiele, com ênfase nesta última teoria. O cerne desta dissertação é a união dessas duas teorias para beneficiar o processo de ensino e aprendizagem de Geometria, desta maneira, a proposta de ensino apresentada no trabalho é apenas um modelo de como unir essas duas teorias em sala de aula.

Na fundamentação teórica é exposto primeiramente o autor apresenta a diferença entre Aprendizagem Mecânica e Aprendizagem Significativa. Posteriormente são apresentadas as teorias abordadas no trabalho de maneira mais detalhada. Logo em seguida o escritor traz a parceria entre as teorias, que é objeto de estudo de sua dissertação.

Adiante, Oséias apresenta uma proposta de sequência didática sobre QUADRILÁTEROS, onde apresenta os entes geométricos dessa classe de maior destaque em estudos, elementos, classificação, demonstrações, propriedades. Apresenta ainda neste capítulo um Modelo de Avaliação Diagnóstica, que consiste em uma lista de atividades que tem por objetivo determinar o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a Teoria de van Hiele.

Este autor, assim como eu, propõe em seu trabalho uma atividade de construção utilizando materiais concretos, análise dos entes estudados, demonstrações e formalização dos conceitos. Por fim apresenta uma nova lista de atividades para verificar se um novo nível foi atingido.

Por fim, são relatadas as aulas onde o autor aplicou a sequência didática na qual ele desenvolveu para o trabalho e apresentou que pode notar que os alunos assimilaram melhor os conteúdos, de uma forma significativa, mesmo apresentando alguns resultados não esperados.

2.2.5 Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos e Talita Freitas dos Santos Mazzini (2021) - TEORIA DE VAN HIELE: os níveis de pensamento geométrico de alunos concluintes do Ensino Fundamental

O artigo apresenta a proposta de identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo a Teoria de van Hiele, no qual se encontram os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola pública da Cidade de São Paulo/Brasil. A metodologia utilizada no trabalho relatado neste artigo se baseou na aplicação do teste dos níveis de van Hiele elaborado pelo Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997). A análise de dados focou na perspectiva analítica, porém, com categorização quantitativa devido aos registros deixados pelos alunos nos testes realizados.

É apresentado um pequeno contexto histórico sobre o desenvolvimento, aplicação e expansão da Teoria de van Hiele em escala mundial. Posteriormente é descrita a Teoria de van Hiele, apresentando os níveis, propriedades e fases que essa especifica.

Então é explicada a Metodologia e exposto os Resultados da aplicação da atividade e as considerações finais. Como resultados os autores expressam que identificaram um grande percentual de alunos que apresentam vocabulário geométrico pouco desenvolvido, com muitas dificuldades tanto nas resoluções como para justificar.

Segundo os autores nota-se a importância de trabalhar a Teoria de van Hiele para ampliar os conhecimentos existentes sobre o processo de ensino e aprendizagem. O modelo é um referencial, uma vez que traz diversas possibilidades de comunicação com os alunos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de reunir informações acerca do tema, bem como divulgar as informações agregadas, esta pesquisa se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica, uma vez que é baseada na análise de materiais (FONTELLES, 2009) já publicados a respeito da Teoria de van Hiele.

O público ao qual se destina a pesquisa são alunos do sétimo ano do ensino fundamental da rede pública de ensino. A escolha deste se deu a partir de pesquisas em livros didáticos e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos quais está prescrita a abordagem do conteúdo Retas paralelas cortadas por uma transversal no ano anteriormente citado.

Primeiramente foi pensada a Lista de verificação de nível Inicial. Essa lista foi desenvolvida de forma a fazer uma averiguação gradual dos níveis partindo do nível 1 (visualização) da Teoria de van Hiele, até o nível 4 (Dedução formal).

O motivo pelo qual foi desenvolvida até o nível da Dedução formal (4) e não até o nível do Rigor (5), é que, os conceitos abordados para este nível não são ministrados na educação básica. No nível 5, o aluno já compreende as geometrias não-euclidianas (RODRIGUES, 2015), e este conteúdo é abordado somente no nível superior de ensino.

Depois de terminada a lista de verificação de nível -Inicial, foi feita uma pesquisa em livros didáticos para entender como o conteúdo de ângulos formados a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal é apresentado aos alunos. Com base nessa pesquisa e atentamente seguindo as fases do desenvolvimento do pensamento geométrico prescritas na Teoria de van Hiele, foi então estruturada uma apostila onde é desenvolvida uma experimentação com material manipulável (par de esquadros, caneta, caneta permanente para CD e folha de acetato). A apostila também traz a exposição do conteúdo de ângulos formados a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal e posteriormente é apresentada a prova da soma dos ângulos internos de um triângulo e o Teorema dos bicos, uma vez que as duas demonstrações empregam o conteúdo abordado anteriormente.

Havendo a necessidade de uma atividade onde os alunos pudessem repensar e ancorar os conteúdos e experimentações (fase da Integração), desenvolveu-se, então, uma atividade de fixação do conteúdo.

Por fim, a lista de verificação de nível - Final foi elaborada, fazendo uso de todo o material já pensando nas etapas anteriores e com o intuito de averiguar se o aluno progrediu do nível 3 (Dedução Informal) para o nível 4 (Dedução Formal).

3.1 Contexto da pesquisa e coleta de dados

Esta pesquisa tinha o intuito inicial uma intervenção pedagógica, na qual a autora além de elaborar o material exposto neste documento, também iria aplicar a sequência didática e analisar os dados levantados através das Listas de verificação de nível. No entanto, com o surgimento da pandemia do Covid-19 que afligiu o mundo inteiro desde o início do ano de 2020, a pesquisa passou por mudanças com relação a seu tipo e abordagem.

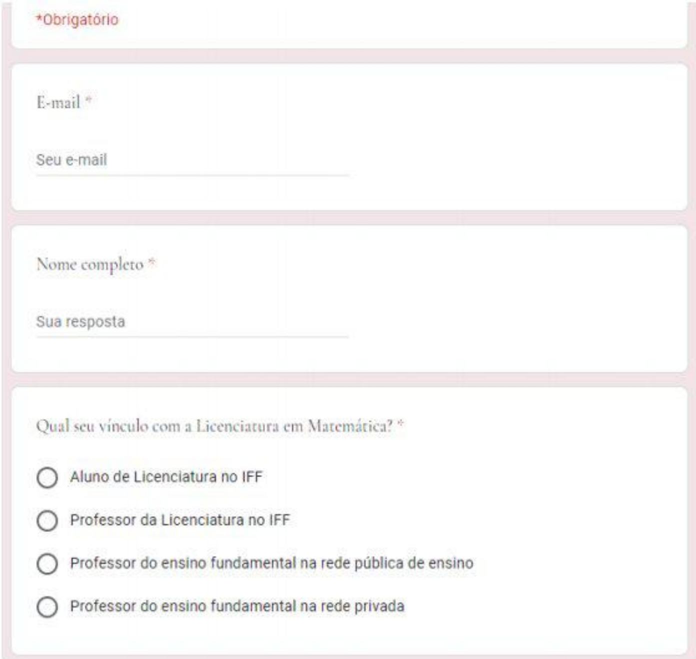
O instrumento de coleta de dados utilizado neste trabalho é o levantamento bibliográfico que permite o aprofundamento teórico da pesquisa, análise de resultados dos trabalhos obtidos e serve como protocolo para o desenvolvimento da sequência didática proposta neste trabalho.

Também será utilizado como instrumento de coleta de dados um questionário aplicado a alunos e professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro e a um professor que atua no ensino fundamental. O questionário foi enviado a todos os aluno e professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro, porém nem todos eles responderam e o professor do ensino fundamental foi escolhido por ser uma pessoa próxima a autora desta monografia Visto o tempo para o grupo responder e a autora analisar os dados, os respondentes constituem um pequeno grupo de seis pessoas.

Esse questionário online contém 4 seções, sendo a primeira para recolhimento de dados pessoais e aceite dos termos da pesquisa; a segunda se refere ao grau de satisfação (de 1 à 5, sendo 1 Totalmente Insatisfeito e 5 Totalmente Satisfeito); a terceira seção é destinada à perguntas sobre a Apostila do professor (**Anexos 1, 2 e 3**) e deixa espaço para que os respondentes dissertarem sobre a apostila; a quarta seção é idêntica a terceira, porém é referente a Apostila do aluno (**Anexos 4, 5 e 6**). Além do questionário, foi disponibilizada uma pasta online onde se encontravam todas as apostilas para análise. A Figura 2 e a Figura 3 apresentam a primeira seção do questionário online.

Optou-se por não fazer nenhum teste exploratório, pois a autora entendeu ser necessário um momento anterior a aplicação de um teste para explanar a Teoria de van Hiele, além dos vários encontros que seriam necessários para a aplicação de todo o teste, porém o tempo para a realização já era escasso. Outro impedimento também é o fato da utilização de material manipulável que necessitaria ser distribuído às pessoas que participassem deste teste exploratório

Figura 2 - Seção 1 (Questionário online)



*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Nome completo *

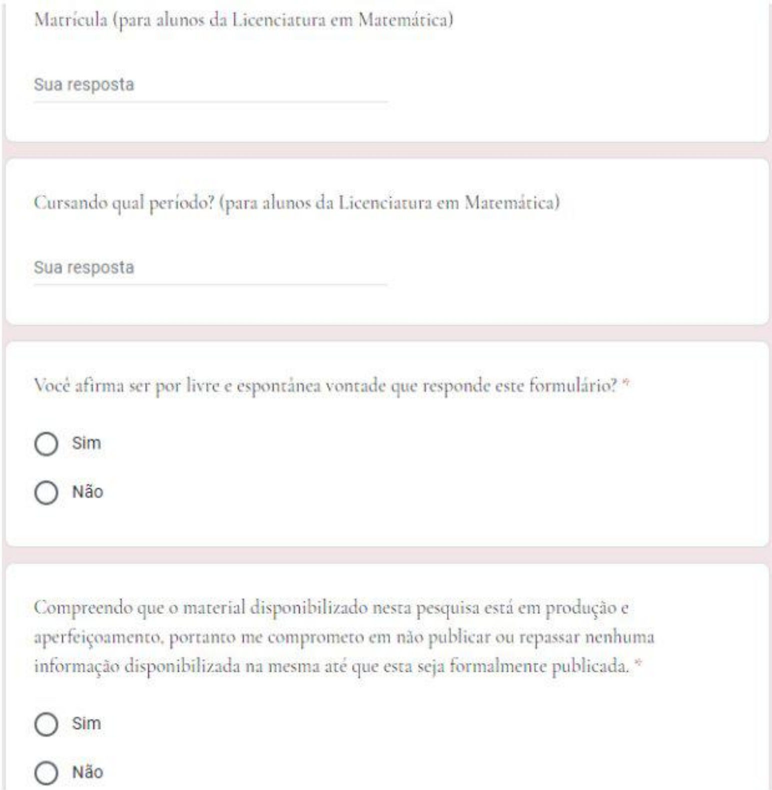
Sua resposta

Qual seu vínculo com a Licenciatura em Matemática? *

- Aluno de Licenciatura no IFF
- Professor da Licenciatura no IFF
- Professor do ensino fundamental na rede pública de ensino
- Professor do ensino fundamental na rede privada

Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 3 - Seção 1 (Questionário online)



Matrícula (para alunos da Licenciatura em Matemática)

Sua resposta

Cursando qual período? (para alunos da Licenciatura em Matemática)

Sua resposta

Você afirma ser por livre e espontânea vontade que responde este formulário? *

- Sim
- Não

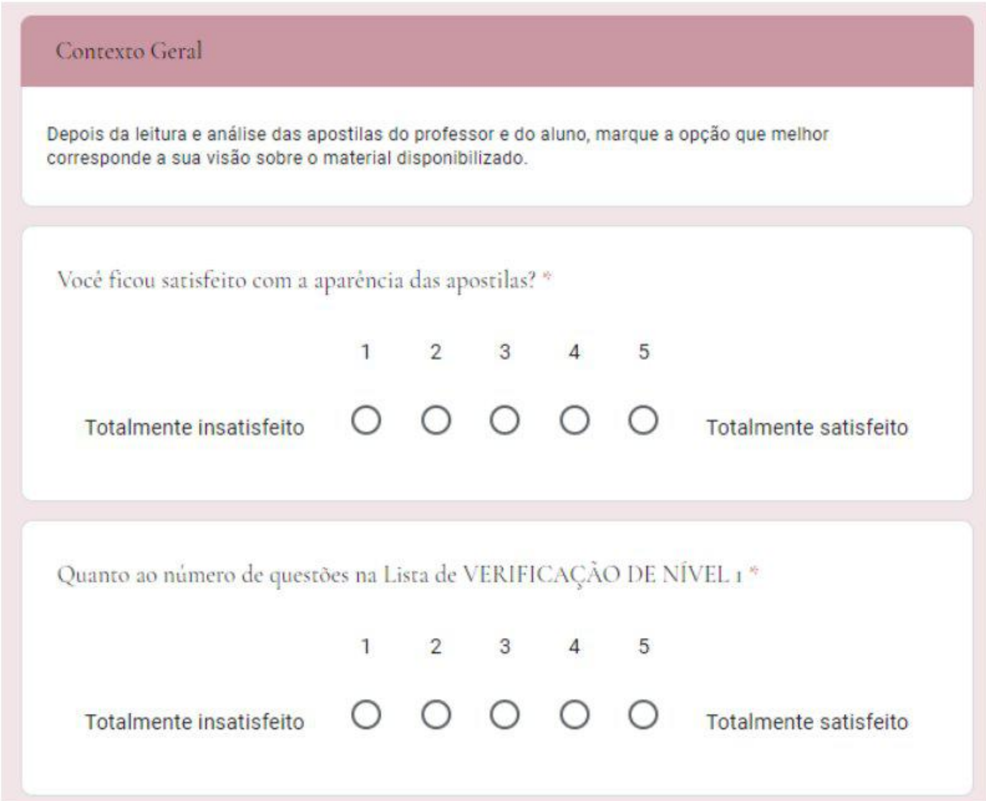
Compreendo que o material disponibilizado nesta pesquisa está em produção e aperfeiçoamento, portanto me comprometo em não publicar ou repassar nenhuma informação disponibilizada na mesma até que esta seja formalmente publicada. *

- Sim
- Não

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na Figura 4, na Figura 5 e na Figura 6 será disponibilizada a lista de perguntas que compõem a segunda seção do questionário online.

Figura 4 - Seção 2 (Questionário online)


Contexto Geral

Depois da leitura e análise das apostilas do professor e do aluno, marque a opção que melhor corresponde a sua visão sobre o material disponibilizado.

Você ficou satisfeito com a aparência das apostilas? *

1 2 3 4 5

Totalmente insatisfeito Totalmente satisfeito

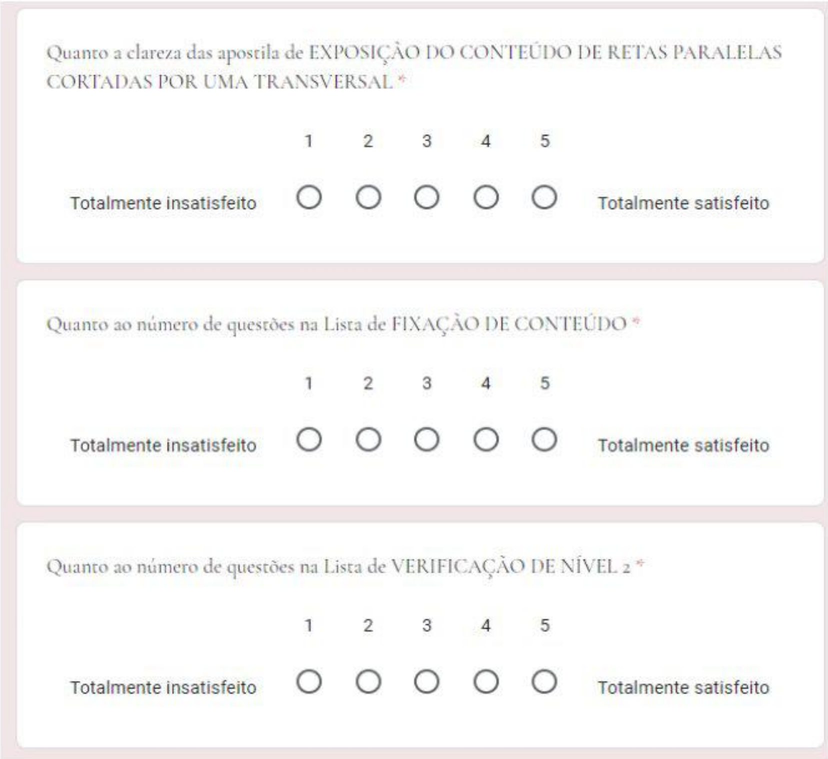
Quanto ao número de questões na Lista de VERIFICAÇÃO DE NÍVEL 1 *

1 2 3 4 5

Totalmente insatisfeito Totalmente satisfeito

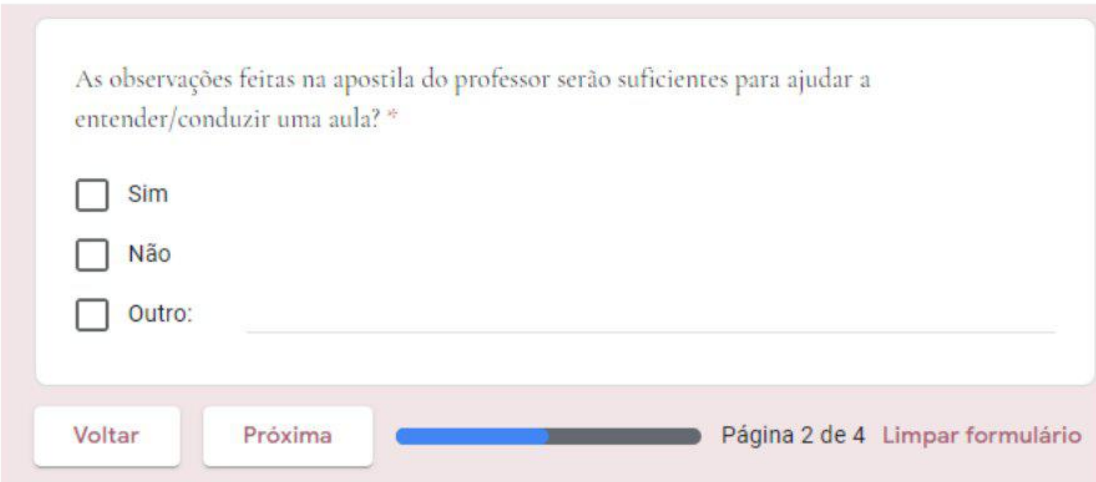
Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 5 - Seção 2 (Questionário online)



Fonte: Protocolo de pesquisa

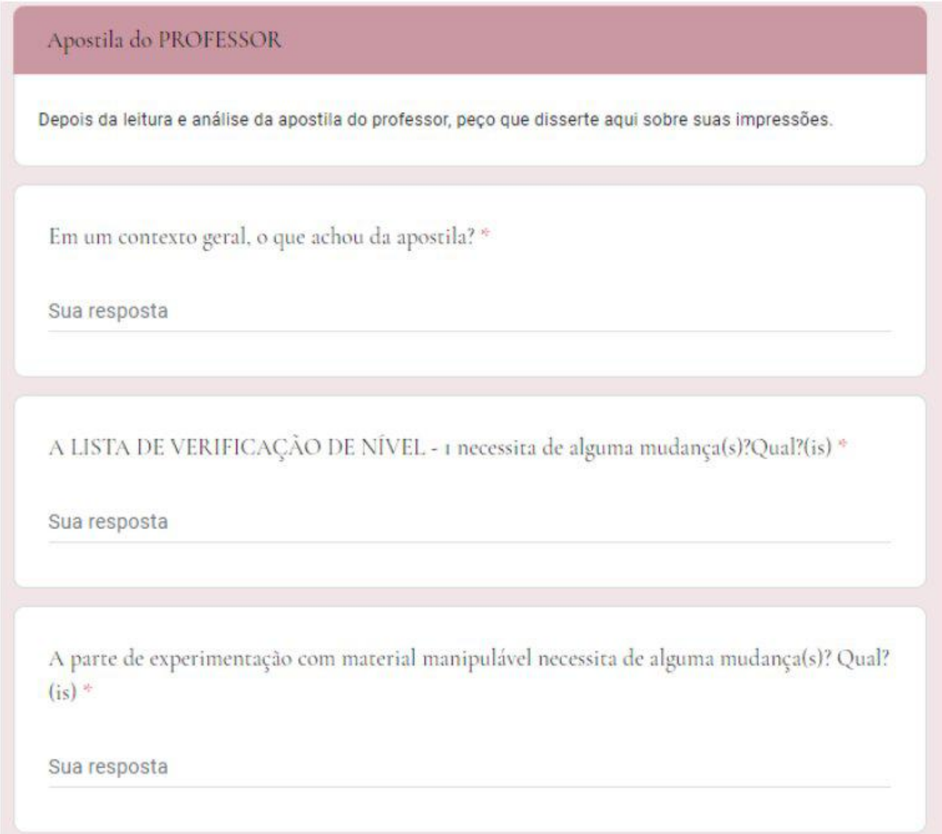
Figura 6 - Seção 2 (Questionário online)



Fonte: Protocolo de pesquisa

Na Figura 7 e Figura 8 estão apresentadas as perguntas referentes a terceira seção do questionário online. As perguntas da seção 4 são idênticas às perguntas da seção 3, porém são direcionadas ao material do aluno.

Figura 7 - Seção 3 (Questionário online)



Apostila do PROFESSOR

Depois da leitura e análise da apostila do professor, peço que disserte aqui sobre suas impressões.

Em um contexto geral, o que achou da apostila? *

Sua resposta

A LISTA DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1 necessita de alguma mudança(s)?Qual?(is) *

Sua resposta

A parte de experimentação com material manipulável necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is) *

Sua resposta

Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 8 - Seção 3 (Questionário online)

A parte de explanação do conteúdo necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is) *

Sua resposta

A parte de demonstrações (Soma dos ângulos internos do triângulo e Teorema dos bicos) necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is) *

Sua resposta

A LISTA DE FIXAÇÃO DO CONTEÚDO necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is) *

Sua resposta

A LISTA DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 2 necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is) *

Sua resposta

Voltar Próxima Página 3 de 4 Limpar formulário

Fonte: Protocolo de pesquisa

3.2 Etapas da Pesquisa

Com o intuito de atingir os objetivos específicos e consequentemente atingir também o objetivo geral e responder a questão de pesquisa, este trabalho está estruturado em (1) Pesquisa bibliográfica; (2) Elaboração de materiais; (3) Escrita e apresentação da pesquisa, etapas que se subdividem da seguinte maneira:

- Determinar a questão de pesquisa;
- Estudo sobre a Teoria de van Hiele e o Estudo da Geometria;
- Pesquisa e leitura de artigos científicos e dissertações sobre a Teoria de van Hiele;
- Pesquisa e leitura de livros didático sobre Retas paralelas cortadas por uma transversal;
- Escrita do aporte teórico e trabalhos relacionados;

- Elaboração das listas de verificação de nível;
- Elaboração das apostilas do professor e do aluno;
- Avaliação do material produzido;
- Escrita monográfica;
- Apresentação em seminário da pesquisa monográfica aqui relatada.

3.3 A proposta sequência didática

Sequência didática é “[...]de modo simples e numa resposta direta, sequência didática (doravante SD) é um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais. (DE ARAÚJO, 2013, p. 322). Posto isso, essa seção é destinada a expor o modelo de sequência didática elaborado para esta pesquisa.

A sequência didática aqui relatada possui quatro subdivisões: Atividade de verificação de nível - Inicial, Apostila de experimentação e Exposição do conteúdo de ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL, Atividade de fixação e Atividade de verificação de nível - Final

3.3.1 Atividade de verificação de nível - Inicial

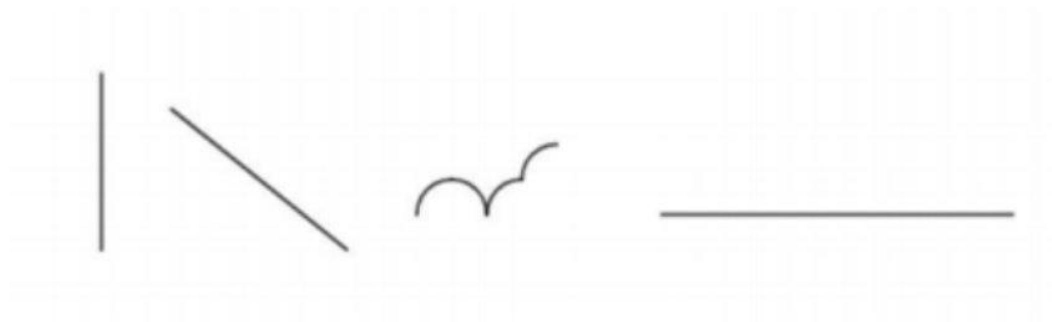
Essa atividade é constituída por uma lista com 6 exercícios e é prevista como o primeiro encontro para aplicação da sequência didática. Tem o objetivo de avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico no qual o aluno se encontra.

O exercício 1 é um exercício de visualização que se refere ao primeiro nível da Teoria de van Hiele (Figura 9).

Figura 9 - Questão 1 da Lista de verificação de nível - 1

1. Analise as figuras abaixo. Elas pertencem à mesma família de figuras geométricas? Se sim, qual é essa família? Se não, circule a figura que não pertence. Justifique a sua resposta

a)



Fonte: Elaboração própria

O exercício 2 se refere ao segundo nível da Teoria de van Hiele, o nível da Análise. É um exercício onde se espera que o aluno discorra sobre propriedades de um triângulo, um retângulo e um quadrado (Figura 10).

Almeja-se que o aluno exprima o número de lados e a relação entre eles, medidas ou a soma dos ângulos.

Figura 10- Questão 2 da Lista de verificação de nível - Inicial

2. Escreva 3 propriedades de cada uma das figuras:

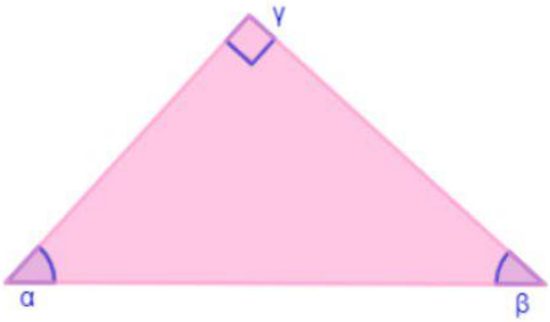
a) 

Fonte: Elaboração própria

O exercício de número 3 se refere ao nível de Dedução Informal, que é o terceiro nível da Teoria de van Hiele. Esse exercício evidencia ângulos em um triângulo e um trapézio e instiga o aluno a dissertar sobre as características específicas desses elementos quando evidente nos referidos entes geométricos (Figura 11).

Figura 11 - Questão 3 da Lista de verificação de nível - Inicial

3. Dadas as figuras a seguir, o que você consegue descrever sobre os elementos destacados?
   a)



Fonte: Elaboração própria

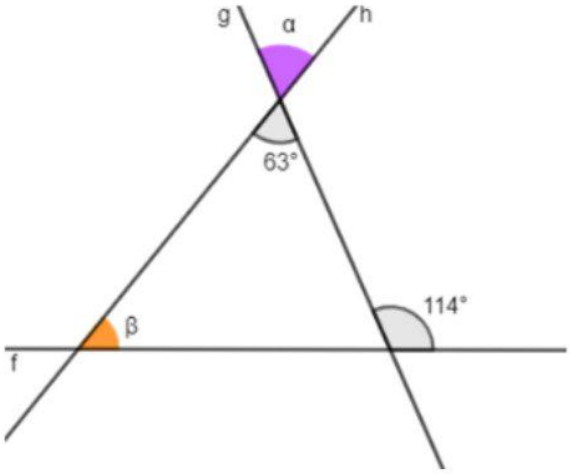
O exercício de número 4 também se refere ao nível de Dedução Informal, que é o terceiro nível da Teoria de van Hiele. Neste exercício apresenta quatro pares de retas e questiona quais desses aparentam ser um par de retas paralelas entre si. O objetivo implícito na questão é investigar se o aluno possui o conceito de retas paralelas internalizado.

O exercício 5 ainda se refere ao terceiro nível da Teoria de van Hiele, o nível da Dedução Informal. Esse exercício foi pensado para averiguar o grau de conhecimento do aluno acerca de amplitude de ângulos. É apresentado um conjunto de retas concorrentes e evidenciado alguns ângulos com amplitudes conhecidas e um ângulo com amplitude desconhecido, ao qual o aluno deverá registrar a amplitude deste ângulo.

O exercício 6 é um exercício de cálculo de amplitude de ângulos e se refere ao quarto nível da Teoria de van Hiele, Dedução Formal. Neste, indaga-se sobre suplementariedade e soma de ângulos internos de um triângulo formado por um feixe de retas concorrentes (Figura 12).

Figura 12- Questão 6 da Lista de verificação de nível - Inicial

6. A partir dos conhecimentos que você possui sobre ângulos suplementares e soma de ângulos internos de um triângulo, indique os valores que estão assinalados pelas letras gregas α e β.



Fonte: Elaboração própria

3.3.2 Apostila de experimentação e Exposição do conteúdo de ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Essa apostila foi desenvolvida com o objetivo de, seguindo as cinco fases para desenvolvimento do pensamento geométrico prescritas na Teoria de van Hiele (Interrogação informada, Orientação dirigida, Explicação, Orientação livre e Integração), o aluno alcançar o próximo nível. Estipulou-se, para o desenvolvimento de um modelo de proposta de sequência didática, que a apostila partiria do princípio que o aluno se encontra no nível 3, o nível da Dedução Informal, e se encaminhará no decorrer da apostila para o nível 4, o da Dedução Formal. Ficou assim estabelecida, pois, ao observar alguns livros didáticos, a autora percebeu que o nível de maturidade do pensamento geométrico exigido era o da Dedução Informal.

- Atividade de construção de retas e comparação de ângulos (Interrogação Informada)

Nessa atividade os alunos juntamente com o professor farão a construção de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal e posteriormente, os alunos farão a dedução da congruência de alguns ângulos formados a partir da sua construção. Depois de estabelecidas suas relações, os alunos compararão seus resultados com os resultados dos colegas a fim de estabelecer a generalização das relações descobertas.

- Definição informal (sugerida pelos alunos) sobre as relações entre os ângulos encontrados na atividade anterior (Orientação Dirigida)

Nessa etapa, o aluno irá informalmente estabelecer as relações em uma conversa com o professor e os colegas. É importante que o professor auxilie na linguagem matemática correta para o conteúdo a ser explorado na próxima etapa.

- Exposição do conteúdo ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

A etapa em questão perpassa as fases da Explicação, pois o professor orienta o aluno na linguagem correta para este nível e os alunos têm a oportunidade de se baseando nas atividades anteriores, além de revelar, modificar seus pontos de vista a respeito do conteúdo explorado.

Além disso, é apresentada a demonstração de soma de ângulos internos de um triângulo qualquer utilizando os conceitos explicitados anteriormente. Também expõe o Teorema dos Bicos (essa nomenclatura é informal, porém nenhuma outra é utilizada) e sua prova também utilizando os conceitos abordados na exposição do conteúdo.

3.3.3 Atividade de fixação (Orientação livre e Integração)

As fases trabalhadas com essas atividades são para, através de exercícios mais complexos, o aluno possa buscar suas próprias soluções podendo se orientar no material utilizado durante a aplicação desta sequência didática. Também permite que ele, o aluno, releia e resuma o material para ancorar a sua visão geral sobre o conteúdo de ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL.

A atividade é composta por oito exercícios, sendo os exercícios número 1 e 2 de reconhecimento e relacionamento de ângulos formados a partir de feixe de retas paralelas cortadas por um transversal.

Já o exercício número 3 é contextualizado e exige que, além de estabelecer as relações entre ângulos formados a partir de um par de retas paralelas cortadas por um transversal, o aluno faça cálculo para averiguação de amplitude de ângulo.

No exercício número 4 é necessário que o aluno encontre a amplitude de dois ângulos, sendo eles colaterais internos e a amplitude de um é o triplo do outro.

Os exercícios 5 e 6 também se tratam de relacionar ângulos e uma medida desconhecida, na questão 5 os ângulos são alternos internos e na 6, opostos pelo vértice.

O exercício 7 poderá ser resolvido de duas formas, por soma de ângulos internos de um triângulo ou pelo Teorema dos Bicos. É uma questão onde a Orientação Livre é bem declarada.

Por fim, o exercício 8 é referente ao Teorema dos Bicos e exige que o aluno o use para estabelecer a amplitude de ângulos.

Essa atividade permite ao aluno uma oportunidade de tirar dúvidas e fazer questionamentos antes da nova verificação de nível.

3.3.4 Atividade de verificação de nível - Final

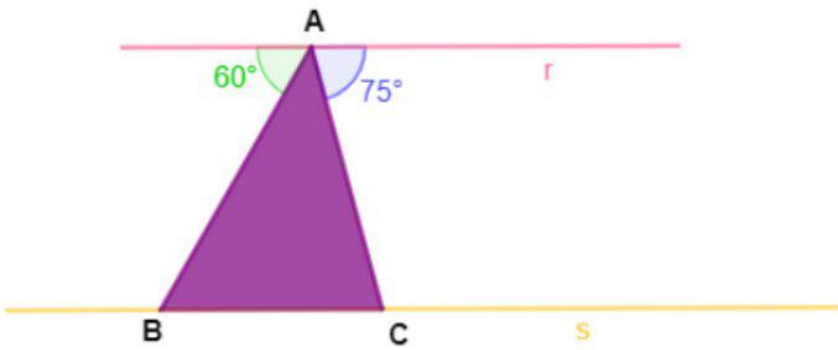
A última etapa da sequência didática é similar à primeira em seu fundamento. O objetivo dessa também é averiguar o nível no qual se encontra o aluno.

A primeira questão diz respeito à suplementariedade de ângulos e se refere ao nível 2 da Teoria de van Hiele, uma vez que, o aluno reconhece as propriedades desses entes geométricos e consegue resolver questões que demandam esse tipo de compreensão.

No segundo exercício é apresentado um triângulo entre duas paralelas, sendo a base do triângulo suportada por uma dessas retas, e é informado dois ângulos externos que são internos à reta paralela oposta à base. Pede-se que o aluno encontre todos os ângulos deste triângulo. Essa questão é atribuída ao nível de Dedução Informal (nível 3), pois o aluno que reconhece que uma propriedade pode decorrer de outra, possui uma lógica ordenada e informal das classes das figuras geométricas.

Figura 13 - Questão 2 da Lista de verificação de nível - 2

2. Sabendo que as retas r e s são paralelas entre si, determine os ângulos internos do triângulo ABC a seguir:



Fonte: Elaboração própria

O exercício de número 3 pede que o aluno encontre a amplitude de ângulos, constituídos a partir de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal. Também se refere ao nível 3

(Dedução Informal) da Teoria de van Hiele.

A quarta questão é referente ao nível 4 (Dedução Formal) da Teoria, uma vez que, o aluno é capaz de seguir um processo dedutivo e demonstrações. O exercício postula que o aluno deverá provar a amplitude de um ângulo desconhecido a partir das seguintes informações: um par de retas paralelas cortadas por uma transversal e um ângulo conhecido.

O último exercício (questão 5) também remete ao nível 4 da Teoria de van Hiele. Neste exercício o aluno deverá encontrar a amplitude de um ângulo que está inscrito em uma poligonal, que por sua vez está inscrita em um quadrado.

3.4 Transcrição da aula

O objetivo desta subseção é transcrever o protocolo de aula a ser utilizado em uma oportunidade futura. Os arquivos complementares a essa aula se encontram nos apêndices deste trabalho. Todo o material foi pensado para as seguintes etapas: 1- verificação do nível de raciocínio que a turma se encontra (Atividade de verificação de nível – Inicial); 2- construção de retas paralelas cortadas por uma transversal; comparação dos ângulos formados na etapa 2 e comparação entre os colegas; explanação do conteúdo FEIXE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL E ÂNGULOS ALTERNOS, COLATERAIS, CORRESPONDENTES E OPOSTOS PELO VÉRTICE (Apostila de experimentação e Exposição do conteúdo de ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL); 3- atividade para fixação dos conceitos abordados (Atividade de fixação); 4- verificação de alcance de um novo nível de raciocínio (Atividade de verificação de nível – Final).

Acredita-se serem necessários 4 encontros com a turma. O primeiro encontro para a aplicação da Lista de verificação 1. Como será necessária a avaliação das respostas obtidas nessa primeira atividade para possíveis adequações nas etapas 2, 3 e 4, esse primeiro encontro será mais curto e somente para a aplicação da Lista de verificação 1.

No segundo encontro é possível desenvolver as etapas 2, 3 e 4 citadas acima. É nesta fase que serão aplicadas as Fases de Aprendizagem Características presentes na pesquisa do casal van Hiele (ver tópico 2.1.1).

O terceiro encontro ficará reservado para a aplicação da Atividade para fixação dos conceitos abordados. É possível que o professor consiga fazer a correção desta atividade neste mesmo encontro, a correção pode ser interessante para que os alunos tirem as suas dúvidas referentes ao conteúdo exposto na etapa 4.

O quarto encontro se assemelha ao primeiro, uma vez que, tem o mesmo caráter de verificação do primeiro encontro.

É necessário lembrar das propriedades e características da teoria de van Hiele ao passo que se constroem essas aulas. Necessita-se averiguar o nível no qual se encontram os alunos visto que só se atinge o progresso de nível tendo aprendido todos os fundamentos do nível anterior.

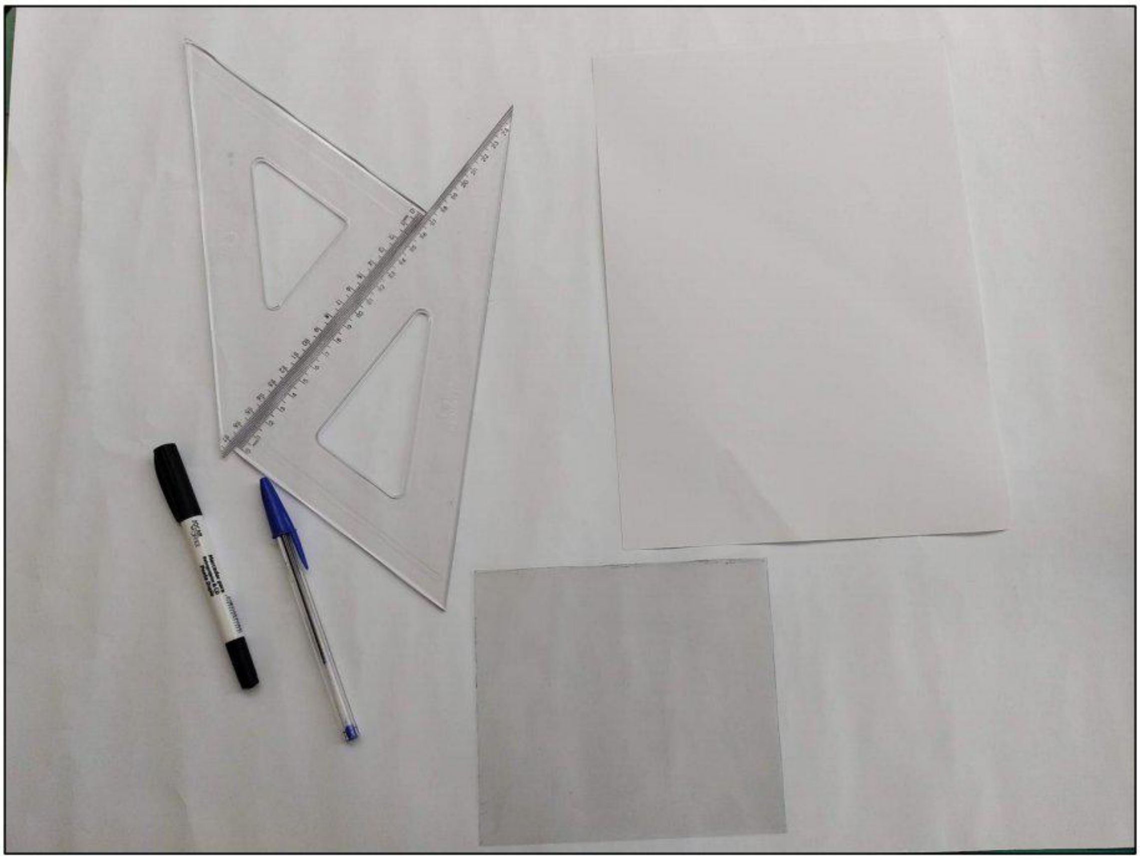
1- Verificação do nível de raciocínio que a turma se encontra: Para tal, foi elaborada uma lista de exercícios, Lista de verificação de nível - 1 (APÊNDICE A), que deverá ser disponibilizada aos alunos para que os mesmos respondam baseando-se apenas nos conhecimentos já adquiridos anteriormente e sem nenhuma intervenção do professor pesquisador ou dos colegas de turma.

Ao final dessa atividade o professor pesquisador deverá fazer a correção dessa atividade. Para analisar o nível em que se encontram, ficará estabelecido que: os alunos que só conseguirem responder corretamente à questão 1 estão no nível de raciocínio 1, os alunos que só conseguirem responder corretamente até a questão 2 estão no nível de raciocínio 2, os alunos que só conseguirem responder corretamente até a questão 4 estão no nível de raciocínio 3, os alunos que só conseguirem responder corretamente todas as questões estão no nível de raciocínio 4.

A verificação do nível 5 de raciocínio não se fará com essa atividade uma vez que não se faz necessário para o bom andamento das atividades posteriores e que segundo Crowley (1994) "Nesse estágio, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem- se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria vista no plano abstrato".

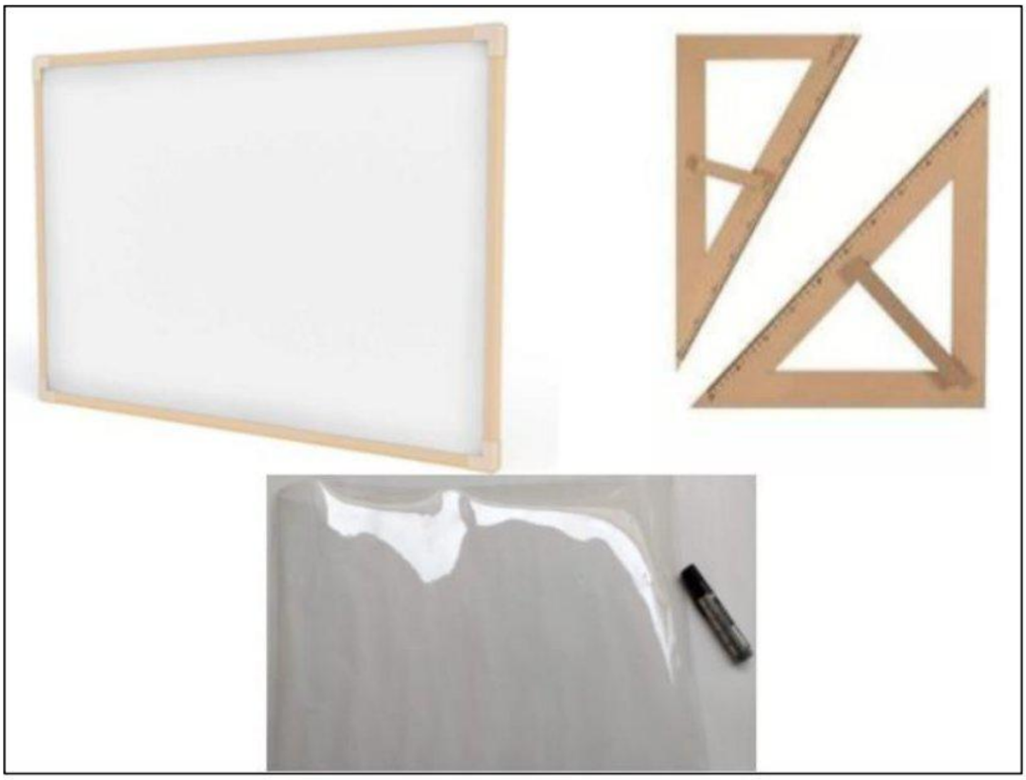
2- Construção de retas paralelas cortadas por uma transversal: Para essa etapa o professor pesquisador contará com o suporte de material manipulável. A construção das retas será feita tanto pelo professor no quadro com auxílio de caneta apropriada e esquadros em escala maior, quanto pelos alunos que contarão com o auxílio de folha branca, esquadros, lápis e borracha ou caneta.

Figura 14 - Material para construção do aluno



Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 15 - Material para construção do professor



Fonte: Protocolo de pesquisa

***3- Comparação dos ângulos formados na etapa 2 e comparação entre os colega*s**: Nessa etapa os alunos terão uma folha de acetato e caneta para escrita permanente e o professor pesquisador contará também com uma folha de acetato de tamanho maior e caneta para quadro.

A BNCC afirma que o aluno deve:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 267)

***4- Explanação do conteúdo* ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL**: Nesta etapa é apresentada uma apostila suporte para auxiliar ao professor tanto com a exposição quanto com as demonstrações e provas referentes as amplitudes e congruências dos ângulos. Tal etapa se caracteriza por generalização de observações obtidas na etapa anterior e experimentações em formato de demonstrações também da SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO e do TEOREMA DOS BICOS (nome popular).

5- Atividade para fixação dos conceitos abordados: Para esta atividade foi elaborado um material que se constitui em uma lista de exercícios de livros didáticos e vestibulares que abordem o conteúdo explicitado na etapa 4.

Nessa etapa o professor pesquisador deixará os alunos livres para responderem a lista, discutirem com os colegas e recorrerem ao auxílio do professor.

6- verificação de alcance de um novo nível de raciocínio: Neste momento será aplicada uma nova lista de atividades que seguirá o mesmo modelo da Lista de verificação 1 na qual denominar-se-á Lista de verificação 2. A diferença presente entre esse passo e o passo 1 é que ao final se verificará se a sequência didática elaborada segundo o modelo dos van Hiele contribuiu para que os alunos alcançassem um novo nível de raciocínio segundo o estipulado na obra destes autores. Então após a aplicação dessa última lista o professor pesquisador deverá analisar as respostas e estabelecer o nível captado com a atividade e formalizar os resultados deste trabalho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo é destinado a apresentar a experiência da autora ao desenvolver uma sequência didática, na qual se baseia inteiramente na Teoria de van Hiele. Será apresentado o processo para desenvolver tal sequência e os resultados de uma avaliação do material produzido. A avaliação foi feita por 4 alunos da Licenciatura em Matemática do IFF *campus* Campos Centro, 1 professora da Licenciatura em Matemática do IFF *campus* Campos Centro e 1 professor do ensino fundamental da rede particular de ensino da cidade de São Fidélis - RJ. Deve-se salientar que uma resposta preliminar foi feita pelo orientador desta monografia para verificar a validade e integridade do questionário online aplicado.

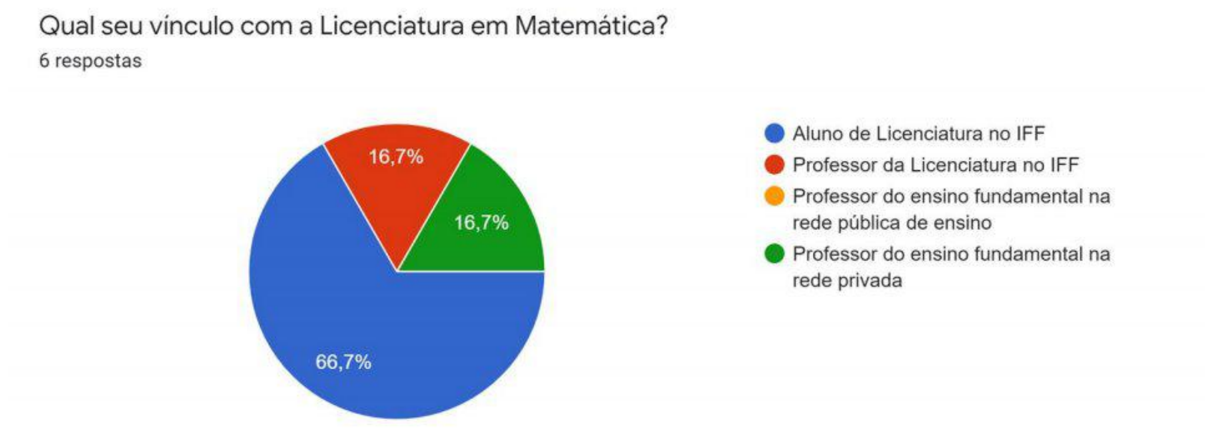
4.1 Questionário online

O questionário foi disponibilizado no dia 03 de novembro de 2021 através da ferramenta Formulários do Google e recebeu respostas até o dia 08 de novembro de 2021. Este recebeu 6 respostas válidas e 1 resposta teste, sendo a última proveniente do orientador deste trabalho.

É necessário destacar que foi pedida uma avaliação para o material do professor e uma outra avaliação para o material do aluno, porém somente a lista de verificação de nível - 1 e a parte de demonstração da Soma dos ângulos internos de um triângulo, na apostila, tiveram respostas diferentes nos dois materiais.

Das respostas, têm-se o seguinte público:

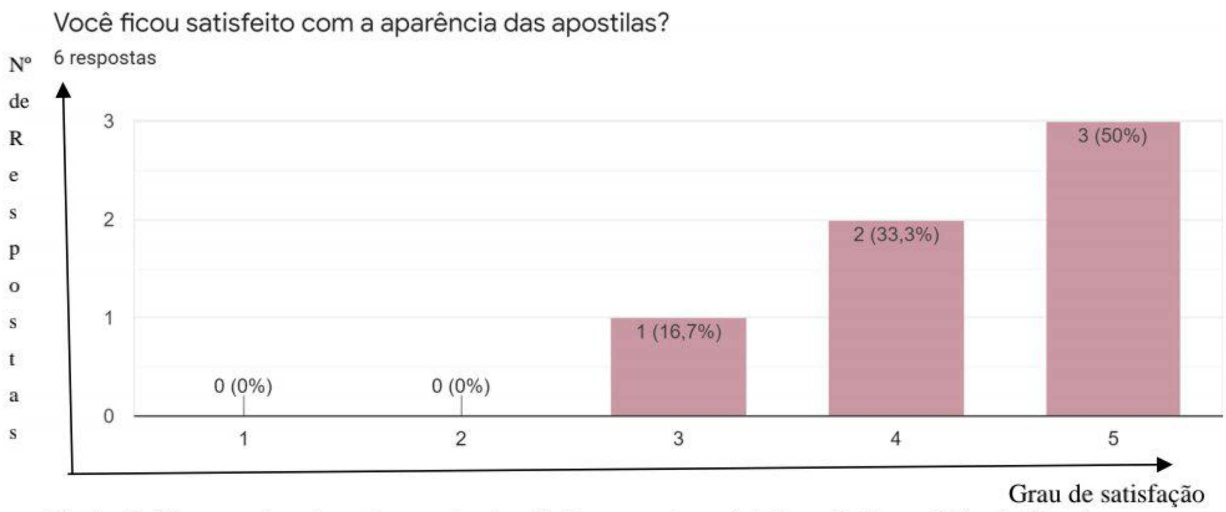
Gráfico 1 - Vínculo com a Licenciatura em Matemática



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

Sobre a aparência geral das apostilas é possível constatar que:

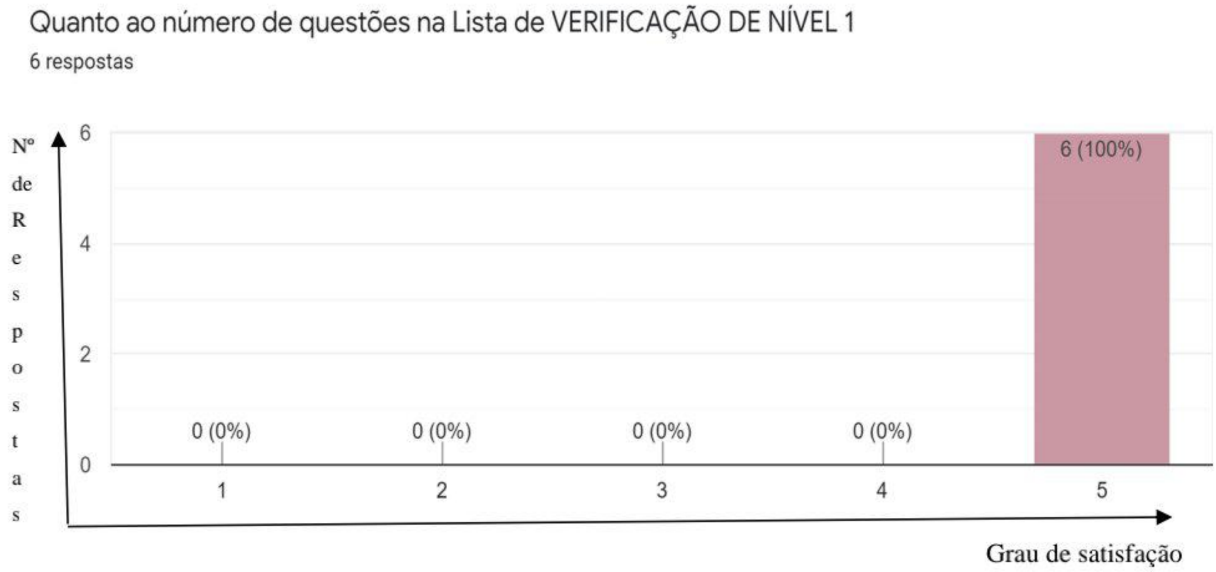
Gráfico 2 - Aparência geral do material



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

Com relação ao número de questões apresentadas na Lista de verificação de nível - Inicial

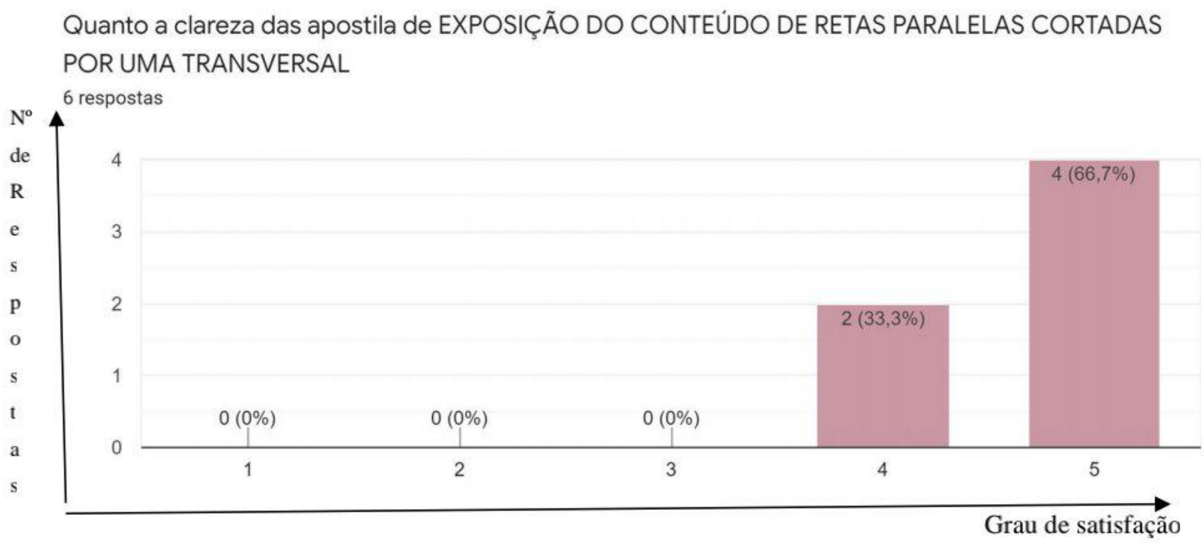
Gráfico 3 - Quanto ao número de questões da Lista de verificação de nível - 1



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

Com relação a clareza da apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

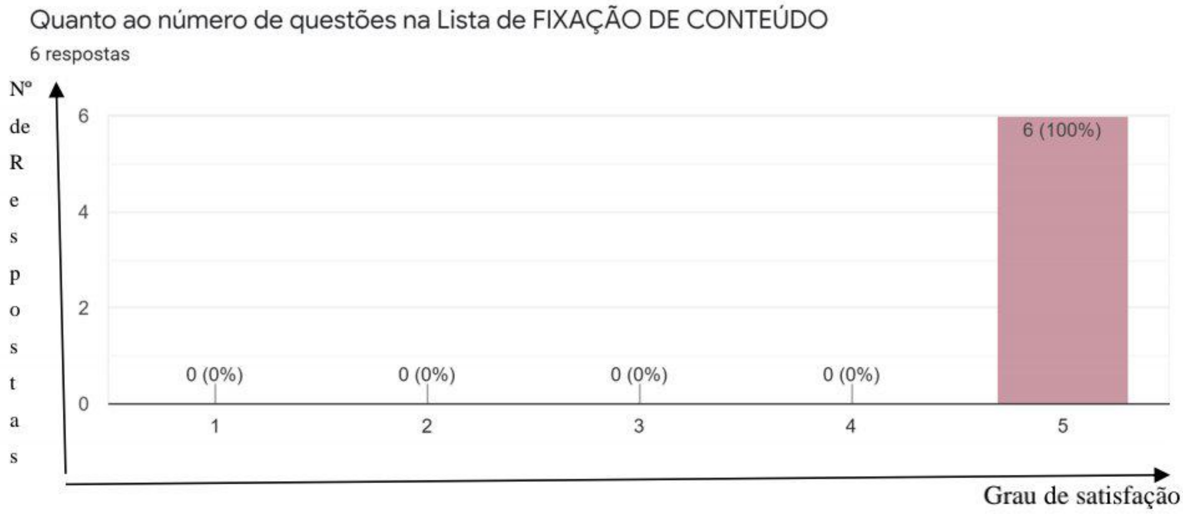
Gráfico 4 - Clareza da apostila de Exposição do conteúdo



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

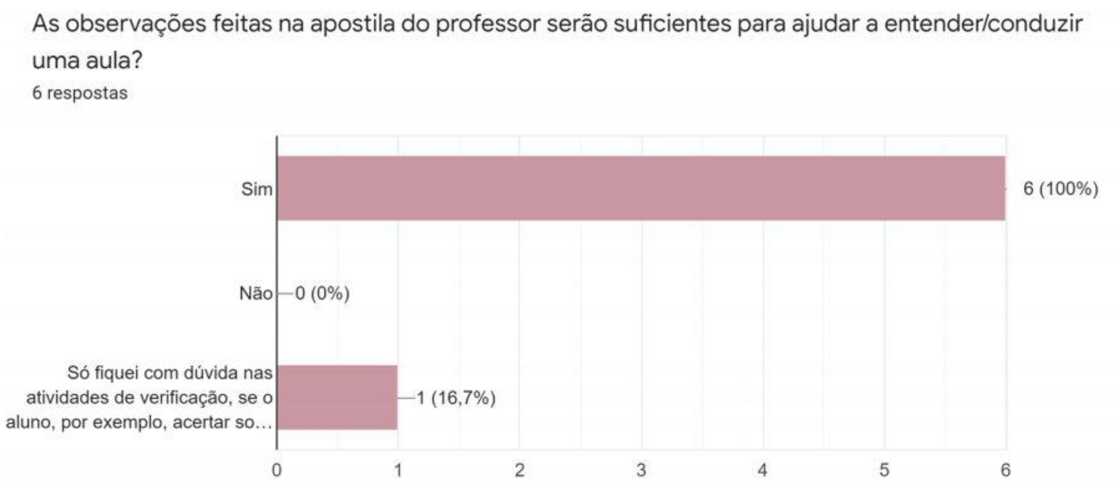
Com relação a clareza da apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Gráfico 5 - Quanto ao número de questões da Lista de Fixação



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

Gráfico 6 - Quanto às observações e instruções feitas na apostila do professor



Fonte: Gráfico gerado automaticamente através das respostas coletadas pelo Formulário do Google

Um dos respondentes pontuou que: “Só fiquei com dúvida nas atividades de verificação, se o aluno, por exemplo, acertar somente a atividade 1 tem uma orientação de que ele precisa de um trabalho específico para que ele possa atingir o nível 2. Que trabalho seria esse?”

Deve-se salientar que as Listas de verificação de nível 1 e 2 têm orientações explícitas sobre o que determina o acerto em cada uma das questões que compõem estas listas, porém o objetivo da Lista de Fixação do conteúdo não se assemelha ao das listas de verificação de nível.

Logo, não se faz necessário um apontamento acerca dos acertos das questões na lista de fixação, uma vez que, essa faz parte da última fase do desenvolvimento do pensamento geométrico e tem o intuito geral de ancorar os conhecimentos produzidos no decorrer da apostila de Exposição do conteúdo.

Segundo a Teoria de van Hiele é necessário que se percorra todas as cinco fases para que se alcance um novo nível, sendo a última fase a Integração. Nesta fase, o aluno relê e sintetiza o que foi exposto e experimentado, com o objetivo de construir um olhar global da nova rede de objetos e relações.

Quando deixado um espaço em aberto para respostas escritas, obteve-se os seguintes apontamentos:

Figura 16 - Respostas do Questionário online (Contexto geral do material)

Em um contexto geral, o que achou da apostila?

6 respostas

Eu achei a apostila bem explicativa, expositiva também. As imagens estão ótimas e o espaço para desenvolvimento das respostas estão de acordo. Gostei muito das cores nos destaques dos ângulos e na linguagem clara e objetiva.

Bem didática e eficiênte. Para um aluno não do ensino superior está bem objetiva

Eu gostei muito da proposta e da ordem da apostila. Achei algumas figuras um pouco desfocadas e com letras muito pequenas. Acredito que elas tenham sido produzidas no GeoGebra, sendo assim, sugiro, em configurações aumentar a fonte do software e printar novamente. Também sugiro uma formatação e diagramação da apostila, por exemplo, na parte de Exposição do conteúdo tem umas partes que parecem soltas (texto dentro de quadros coloridos, textos fora de quadro, textos coloridos, figuras sem borda). Acredito que essa impressão tenha sido devido a necessidade de uma formatação. Eu gosto também de organizar apostilas por parte, por exemplo, PARTE 1 - ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1 / PARTE 2 - CONSTRUÇÃO DE RETAS E COMPARAÇÃO DE ÂNGULOS. Acho que organiza a cabeça do aluno.
Além disso sugiro padronizar os recados para o professor todos no mesmo estilo de quadro e cor. Em alguns momentos existe uma confusão do que é recado para o professor e o que compõe a apostila do aluno.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Figura 17 - Respostas do Questionário online (Contexto geral do material)

Excelente apostila, tanto a parte de explicação quanto a de exercícios está bem escrita e muito bem pensada para a proposta. Além do visual está incrível e chamativo.

Muito boa! Achei muito interessante os comentários para especificar qual atividade se referia a qual nível.

Achei a apostila muito boa. De uma forma geral foi bem trabalhada, os exercicios propostos estão de acordo com o que se quer captar do aluno.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Após a apreciação das respostas, notou-se a necessidade de algumas mudanças na formatação do material. De igual modo, foi enfatizada algumas mudanças que a autora considerou viável acatar, desta forma, nas subseções posteriores serão apresentadas as respostas obtidas e, quando necessário, as mudanças feitas nos materiais.

4.2 Avaliação da lista de verificação de nível - 1

Os maiores apontamentos constatados para esta parte do material são de caráter de formatação. A seguir são exibidas as respostas obtidas no questionário online.

Figura 18 - Avaliação da Lista de verificação de nível -1 (para o Professor)

A LISTA DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1 necessita de alguma mudança(s)?Qual?(is)

6 respostas

Eu achei bem completa, acredito que não precisa de Mudancas.

Não

É o que comentei antes, quando o recado do professor diz que precisa de um trabalho específico com o aluno, fiquei na dúvida de que trabalho é esse.

Acredito que não.

Na questão 3, pede para descrever sobre os elementos destacados, mas como na letra a), o triângulo e os seus ângulos internos estão da mesma cor, talvez causaria uma certa confusão sobre o que está sendo destacado, sugiro colocar com uma cor diferente, como na letra b).

Sim, na questões 1, em qual espaço o professor poderá colocar a resposta correta? Na questão dois eu tentaria deixar as figuras padronizadas em relação as letras, ou tudo embaixo ou tudo em cima. Na 5 da apostila dos professores a letra "b" está longe da figura.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Com relação ao trabalho necessário a ser feito destacado no material do professor, diz respeito à análise das respostas obtidas pelos alunos. O aluno que somente acertar a questão 1 desta lista está no nível da **visualização** e necessitará de uma sequência didática voltada ao objetivo de fazê-lo progredir para o nível 3 (**Dedução Informal**), que é o nível para o qual a sequência didática apresentada neste trabalho monográfico foi elaborada. No referido nível (visualização), o aluno reconhece as figuras geométricas por suas características globais (aparência), porém não são capazes de identificar suas propriedades (DOS SANTOS MAZZINI; DOS SANTOS, 2021).

Figura 19- Avaliação da Lista de verificação de nível -1 (para o Aluno)

A LISTA DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1 necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Nao.

não

As questões 2 e 3 são de respostas abertas. Será que colocar pelo menos uma das duas com múltipla escolha? Não sei se isso sai da Teoria de Van Hiele, mas alunos geralmente não gosta de escrever.

Não.

Eu só daria um espaço para colocar o enunciado da questão 3 na mesma página que a letra a) e b). E as sugestões que falei anteriormente.

Não

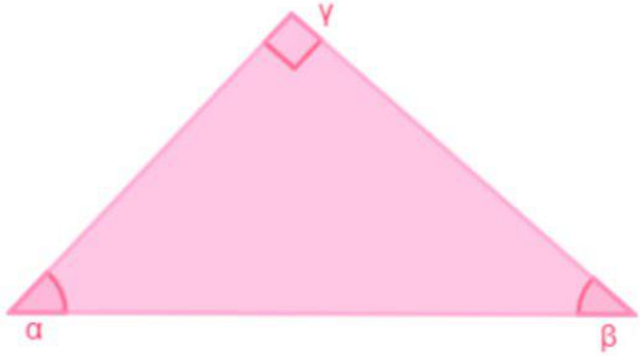
Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

No tocante à necessidade das questões 2 e 3 serem de respostas abertas e exigirem que os alunos redijam a resposta é para constatar se o aluno possui domínio de todos os fundamentos do nível 2 (**Análise**). Neste nível os alunos começam a discernir propriedades e características das figuras geométricas, mas ainda não inter-relacionam essas propriedades ou figuras (DOS SANTOS MAZZINI; DOS SANTOS, 2021). Portanto, é indispensável que o professor obtenha respostas através de texto para averiguação do domínio dos fundamentos do nível da Análise.

Figura 20- Questão 3 (apostila avaliada)

3. Dadas as figuras a seguir, o que você consegue descrever sobre os elementos destacados?

   a)

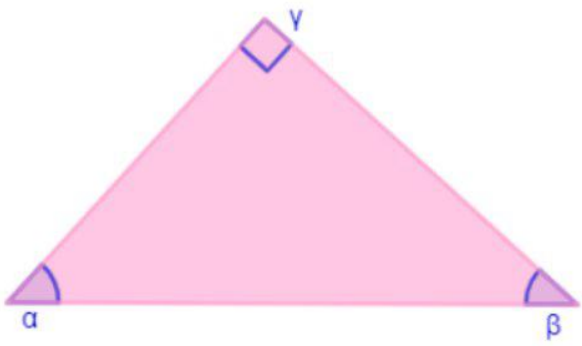


Fonte: Elaboração própria

Figura 21- Questão 3 (apostila revisada)

3. Dadas as figuras a seguir, o que você consegue descrever sobre os elementos destacados?

   a)



Fonte: Elaboração própria

4.3 Avaliação da apostila de Exposição do conteúdo de Retas paralelas cortadas por uma transversal

Nesta lista, as maiores indicações constatadas são de caráter de formatação, exceto pelo erro da autora quando explicitou os materiais a serem utilizados na experimentação (o material manipulável), a autora colocou compasso em lugar de esquadro. O erro foi devidamente reparado no material. Também foi sugerido uma melhor padronização nos recados para o professor em seu material de apoio. Uma outra sugestão foi indicar as retas transversais construídas na parte de demonstração da Soma dos ângulos internos do triângulo. A seguir são exibidas as respostas obtidas no questionário online.

Figura 22 - Avaliação da parte de experimentação com material manipulável

A parte de experimentação com material manipulável necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Não

Na minha opinião não precisa. A foto está bem clara do que será usado e o passo a passo da construção está ótimo, da para o aluno entender perfeitamente o que deve fazer.

Quando você descreve o passo a passo da construção das retas paralelas você escreve "apoie o compasso de..." seria "esquadro" certo?
Outra sugestão é colocar a foto do passo a passo que está na apostila do professor para o aluno também.

Não.

Não, as várias imagens que foram colocadas deixa bem evidente o que é pra ser feito.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Figura 23 - Avaliação da parte de exposição do conteúdo de Ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal (para o Professor)

A parte de explanação do conteúdo necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Não

Nao.

Essa acredito que seja uma formatação melhor e revisão das figuras. Em alguns momentos sugiro ir mais devagar com os conceitos, na parte que você sobre os ângulos correspondentes você diz que os ângulos da mesma cor são correspondentes, sugiro indicar as letras também. E o padrão dos recados para o professor, todos no mesmo tipo de quadro e cor.

Não.

Talvez só aumentaria um pouco a letra mas, de resto, está ótimo.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Figura 24- Materiais manipuláveis utilizados na experimentação (apostila avaliada)

1º passo: Desenhe uma reta qualquer com auxílio de um esquadro

2º passo: Apoie o compasso de 30º,60º,90º de maneira que este esteja perpendicularmente posicionado com relação à reta que você já traçou.

3º passo: Apoie o compasso de 45º,90º,45º com o ângulo de 90º alinhado ao do outro compasso e logo abaixo da reta criada.

4º passo: Deslize o compasso menor e construa 1 reta paralela à primeira. Observação: utilize o espaçamento que você desejar.

5º passo: Trace uma reta inclinada que corte todas as outras já desenhadas.

Fonte: Elaboração própria

Figura 25 - Materiais manipuláveis utilizados na experimentação (apostila revisada)

1º passo: Desenhe uma reta qualquer com auxílio de um esquadro

2º passo: Apoie o esquadro de 30º,60º,90º (maior) de maneira que este esteja perpendicularmente posicionado com relação à reta que você já traçou.

3º passo: Apoie o esquadro de 45º,90º,45º (menor) com o ângulo de 90º alinhado ao do outro esquadro e logo abaixo da reta criada.

4º passo: Deslize o esquadro menor e construa 1 reta paralela à primeira. Observação: utilize o espaçamento que você desejar.

5º passo: Trace uma reta inclinada que corte todas as outras já desenhadas.

Fonte: Elaboração própria

Figura 26- Avaliação da parte de demonstração da Soma dos ângulos internos e do Teorema dos bicos (para o Professor)

A parte de demonstrações (Soma dos ângulos internos do triângulo e Teorema dos bicos) necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Nao.

não

Mesma sugestão do padrão dos recados.

Não.

Só aumentaria um pouco a letra também e trocaria a cor de amarelo para uma cor mais escura, acho ficar melhor para visualizar mas ficou muito bom.

Não

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Figura 27- Avaliação da parte de demonstração da Soma dos ângulos internos e do Teorema dos bicos (para o Aluno)

A parte de demonstrações (Soma dos ângulos internos do triângulo e Teorema dos bicos) necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Nao.

não

Também sugiro detalhar melhor no texto. Ex.: Ao traçar a reta i, paralelas ao lado c, oposto ao ângulo de 75º, observa-se duas retas paralelas cortadas por uma transversal (quais são as paralelas e a transversal? sugiro indicar, pois o aluno pode ler e ficar na dúvida).

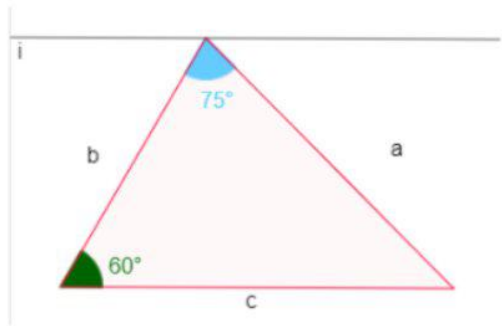
Não.

Não, está bom.

Não

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

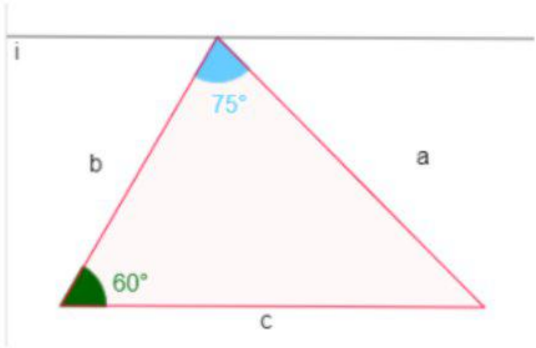
Figura 28- Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo (apostila avaliada)



Ao traçar a reta i, paralela ao lado c, oposto ao ângulo 75°, observa-se duas retas paralelas cortadas por duas transversais.

Fonte: Elaboração própria

Figura 29- Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo (apostila revisada)



Ao traçar a reta i, paralela ao lado c, oposto ao ângulo 75°, observa-se duas retas paralelas cortadas por duas transversais (lados a e b do triângulo).

Fonte: Elaboração própria

4.4 Avaliação da Lista de fixação do conteúdo

Como essa lista tem o intuito de estimular ainda mais o processo dedutivo do aluno e a fixação do conteúdo trabalhado anteriormente, poucas mudanças foram feitas baseando-se nas observações feitas no questionário online.

Figura 30- Avaliação da Lista de fixação de conteúdo

A LISTA DE FIXAÇÃO DO CONTEÚDO necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Nao.

não

Não. As figuras e textos estão bem organizados e apresentados.

Não.

Na questão 1, eu sugiro colocar os pares de ângulos coloridos com a mesma cor, mas a questão em si está boa.
Na questão 3, caso possível, colocaria uma imagem que realmente fosse uma piscina com os guarda-sol desenhados para uma melhor contextualização, ou só colocaria os pontos e indicaria, por exemplo, que o ponto A é o guarda-sol 1 e o ponto B o guarda-sol 2.
Também sugiro mais algumas atividades contextualizadas como esse exercício 3.

Melhoria a imagem da questão Da questão 7 para os alunos compreenderem melhor sobre qual ângulo a questão está se referindo.

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

Figura 31- Questão 7 (apostila avaliada)

7. Determine os ângulos pedidos a seguir:

a) o ângulo γ, sabendo que WXYZ é um retângulo.

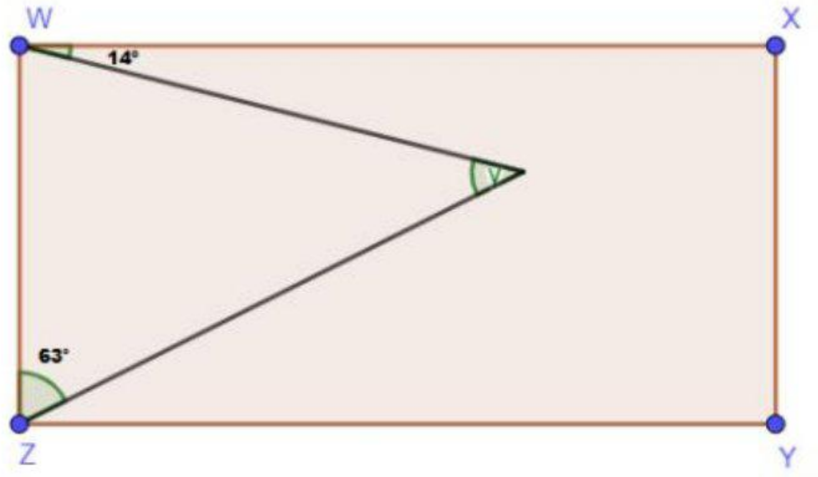
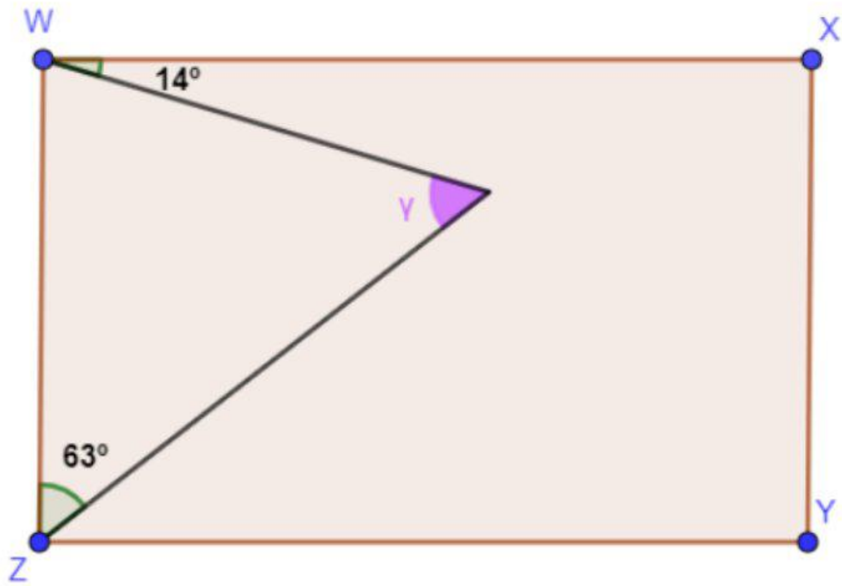


Figura 32 - Questão 7 (apostila revisada)

7. Determine os ângulos pedidos a seguir:

a) o ângulo γ, sabendo que WXYZ é um retângulo.



Fonte: Elaboração própria

4.5 Avaliação da Lista de verificação de nível - 2

Feita a análise das respostas ao questionário online, nessa lista apenas foi adicionada uma informação na questão dois para indicação do triângulo exibido na questão. A seguir são exibidas as respostas obtidas no questionário online.

Figura 33- Avaliação da Lista de verificação de nível - 2

A LISTA DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 2 necessita de alguma mudança(s)? Qual?(is)

6 respostas

Nao.

não

As figuras e textos estão bem organizados e apresentados. Sugiro somente indicar os polígonos nas questões 2 e 5. Triângulo ABC e quadrado ABCD.

Não.

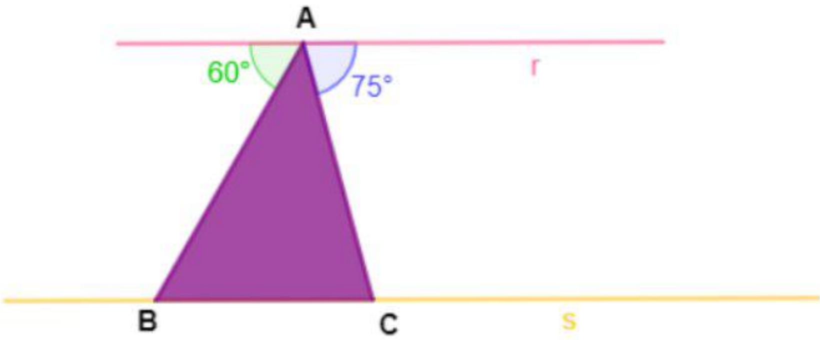
Não, está ótimo!

Não

Fonte: Respostas coletadas através do Formulário do Google

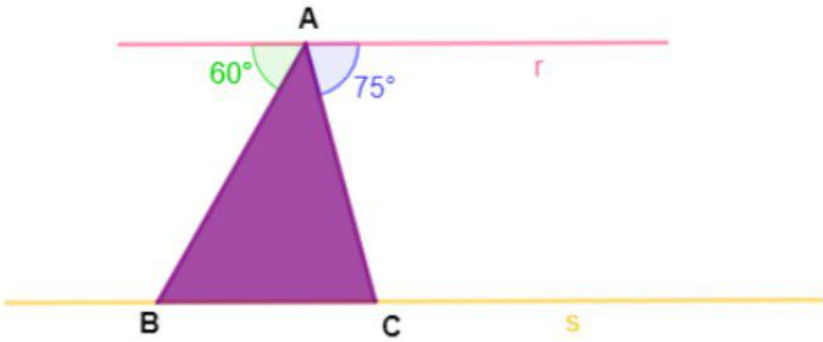
Figura 34- Questão 2 (apostila avaliada)

2. Sabendo que as retas r e s são paralelas entre si, determine os ângulos internos do triângulo a seguir:



Fonte: Elaboração própria

Figura 35- Questão 2 (apostila revisada)


2. Sabendo que as retas r e s são paralelas entre si, determine os ângulos internos do triângulo ABC a seguir:

Fonte: Elaboração própria

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por novas metodologias no ensino da matemática é um fator primordial para o desenvolvimento de novas pesquisas que celebrem um ativo processo de ensino e aprendizagem. O ensino da Geometria, em especial, sofre ao longo dos últimos anos por diversos fatores tais como falta de preparo ou modelos que não estimulam a experimentação. Investigar teorias e metodologias voltadas para o ensino de tal área da Matemática, leva o estudante de Licenciatura a pensar sobre as suas práticas.

Ao pesquisar sobre as deficiências no ensino da Geometria é possível perceber que a negligência com essa unidade temática se desencadeia desde os processos de formação inicial, e perdura por toda a vida até a formação superior, que por sua vez, forma professores despreparados para trabalhar com a Geometria. Então o ciclo se reinicia, com o professor incapacitado para o ensino da Geometria e novos alunos que refletrirão as lacunas que o educador traz desde sua formação primária. Demanda-se, portanto, que o professor reconheça suas próprias insuficiências, e busque métodos de reparar a falta de preparo que este carrega.

Sendo a Geometria uma área essencial para a representação da vida e do cotidiano humano, a utilização de material manipulável na prática docente é capaz de auxiliar na compreensão e ancoragem de conceitos muitas vezes expostos de forma abstrata. Dado o potencial lúdico que detém o material manipulável, atividades que façam uso deste instrumento despertam curiosidade, possibilitam interações, têm caráter motivador do processo de ensino e aprendizagem e possibilitam descobertas ou redescobertas de relações matemáticas (MORÉ. *et al.*, 2021).

A Teoria de van Hiele, por apresentar propriedades e características muito explícitas, torna possível, tangível e ameno o processo de produção de uma sequência didática, que visa ampliar o papel do aluno na construção do saber. O modelo apresentado na teoria e as fases de aprendizagem sugere um meio de identificar o nível de maturidade geométrica e aponta meios para ajudar o aluno a avançar de um nível para o seguinte (LEIVAS, 2012).

Neste contexto, quando remetida ao objetivo geral desta pesquisa (Investigar as possíveis contribuições da Teoria de van Hiele na elaboração de uma sequência didática para o estudo de ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal), a autora acredita que a referida Teoria teve um papel fundamental como norteadora dos elementos presentes na sequência didática. A riqueza de detalhes que a Teoria traz, permite desenvolver uma sequência didática completa e rica, onde é possível fazer uso de diversos materiais concretos, e onde até o professor encontra uma lógica progressiva para se elaborar as atividades. A atenção às características gerais da Teoria de van Hiele (Sequencial, Avanço, Intrínseco e Extrínseco, Linguística, Combinação inadequada), compele o professor a se colocar no lugar do aluno e pensar cada passo da atividade com cuidado, adequando a linguagem e os materiais a serem utilizados.

Quando retomado o primeiro objetivo específico, aprofundar estudos sobre a Teoria de Van Hiele, foi feita uma pesquisa bibliográfica em diversos materiais que, primeiramente, resultaram na maior clareza de entendimento por parte da autora e, posteriormente, resultasse em um capítulo coeso e inteligível acerca dos parâmetros gerais da Teoria de van Hiele.

Para o segundo objetivo específico, investigar sobre as deficiências no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, também foi feita uma pesquisa bibliográfica, uma vez que este trabalho é resultado de uma pesquisa desta natureza, em materiais específicos que discutiam o tema. Percebeu-se que até mesmo uma Lei, nos anos 1970, teve influência na negligência ao ensino e aprendizagem da Geometria, fator que se reflete ainda hoje no despreparo para abordar esta unidade temática. Em contraste, os documentos legais para a educação dos dias atuais, asseguram a importância do ensino da Geometria e incentivam a formação continuada dos professores.

O terceiro e quarto objetivos específicos, elaborar uma proposta de intervenção embasada na Teoria de van Hiele para o estudo dos ângulos formados a partir de retas paralelas cortadas por uma transversal e fazer um levantamento do material de apoio necessário à implementação da proposta, são excepcionalmente complementares. Estes dois foram alcançados simultaneamente, pois, ao passo que se avançava no desenvolvimento da sequência didática, eram analisados os materiais de apoio a serem utilizados em cada etapa presente nesta. Determinar que o uso de material manipulável se faria para essa sequência foi crucial no momento de se pensar a sequência como um todo.

Com relação ao quinto, e último objetivo específico, formular um protocolo detalhado que servirá de apoio à aplicação, tem-se como resultado a subseção 3.4, Transcrição da aula, e os materiais específicos para o professor (**APÊNDICES A**, **B**, **C, D** e **E**). Nestes se encontram orientações detalhadas para a utilização do material e a aplicação da sequência didática de uma forma acessível e direta.

Desenvolver a proposta de sequência didática para esta monografia foi um trabalho de incansáveis voltas aos textos e releitura sobre a Teoria de van Hiele. Por se tratar de uma metodologia ainda pouco difundida, a falta de familiaridade com o processo demandou que a autora se atentasse sempre em reler as características e fases, mas numa visão geral, foi um trabalho que agregou em muito na percepção e na interpretação da sua futura prática pedagógica.

Para trabalhos futuros que desejem utilizar a Teoria de van Hiele, a sugestão é trabalhar com software de geometria livre para compor uma atividade de experimentação. Também se pode pensar em utilizar as propriedades e características dos níveis de aprendizagem para elaborar sequências didáticas para outros eixos temáticos, como Álgebra ou Aritmética. Ainda reforço o quão interessante seria a aplicação da proposta da sequência didática aqui relatada e a narrativa do desempenho de tal sequência para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Conclui-se, a partir dos resultados e dos materiais desenvolvidos nesta pesquisa, que a Teoria de van Hiele é uma metodologia facilitadora para o desenvolvimento de uma sequência didática. Espera-se que mais alunos da Licenciatura em Matemática se interessem pelo estudo e aplicação desta teoria em suas práticas para desenvolvimento monográfico.

REFERÊNCIAS

AMBROSIO, R.J.; ABREU, L.A.F; RODRIGUES, P.C. A utilização da impressão 3d no ensino de matemática: contribuições do software *geogebra*, 2019. **Anais**. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/emapem/2018/schedConf/presentations. Acesso em: 27 ago. 2019.

BRASIL. Lei nº5692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências. MEC. Ensino de 1º e 2º grau.

BRASIL, Ministério da Educação – Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 28 jul. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 28 jul. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BARBOSA, P. M. O estudo da Geometria. Benjamin Constant. **Revista Benjamim Constant**, n. 25, 2003.Disponível em: http://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/546. Acesso em: 10 out. 2019

BONGIOVANNI, V.. O teorema de Tales:uma ligação entre o geométrico e o numérico. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. v2.5, p. 94-106, 2007. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_bongiovanni.pdf. Acesso em: 23 ago. 2019

COSTA, C. L. **A história da Matemática como estímulo ao Ensino-Aprendizagem**. 2016. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística (IME). Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016, 51p. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6754/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Cleomar%20Luiz%20da%20Costa%20-%202016.pdf. Acesso em: 22 jul. 2019.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. **Aprendendo e ensinando geometria.** Atual, São Paulo, p. 1-19, 1994.

DE ARAÚJO, D. L. O que é (e como faz) sequência didática?. **Entrepalavras**, v. 3, n. 1, p. 322-334, 2013. Disponível em: http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/view/148. Acesso em 05 nov. 2021

DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. da. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa (Brasil)**, v. 1, n. 1, p. 87-93, 2006. Disponível em:

https://www.redalyc.org/pdf/2912/291222086008.pdf. Acesso em: 02 dez. 2021

GODOY, A. S.. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rae/a/wf9CgwXVjpLFVgpwNkCgnnC/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 17 mar. 2021

GONÇALVES, C. L. D. **Gerações, tecnologia e educação: análise crítica do emprego educativo de novas tecnologias da informação e comunicação na educação superior da Região Metropolitana de Campinas**, 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNISAL, São Paulo, 2012. Disponível em: https://unisal.br/wp-content/uploads/2013/04/Disserta%C3%A7%C3%A3o_-Carolina-Louren%C3%A7o-Defilippi-Gon%C3%A7alves.pdf. Acesso em: 24 de jul. de 2019

LEIVAS, J. C. P.. Pitágoras e van Hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 18, p. 643-655, 2012. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/PvgqnD73Vqs96S3SVCKKsPn/abstract/?lang=pt. Acesso em: 03 jul. 2019

MAZZINI, T. F.; SANTOS, M. E. K. L.. TEORIA DE VAN HIELE. **Seminário Temático Internacional**, p. 1-16, 2021. **Anais**. Disponível em: http://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/55. Acesso em: 08 nov. 2021

MORÉ, C. B. B. et al. Ensino do teorema de Pitágoras utilizando material concreto manipulável. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 9, p. 92523-92529, 2021. Disponível em: https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/36408. Acesso em 01 nov. 2021

NICOLA, J. A.; PANIZ, C. M.. A importância da utilização de diferentes recursos didáticos no Ensino de Ciências e Biologia. **InFor**, v. 2, n. 1, p. 355-381, 2017. Disponível em: https://ojs-devel.ipiranga.unesp.br/index.php/nead/article/view/InFor2120167. Acesso em 13 mar. 2021

OLIVEIRA, Z. V.; KIKUCHI, L. M.. O laboratório de matemática como espaço de formação de professores1. **Cadernos de Pesquisa**, v. 48, p. 802-829, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/cp/a/5JJGyGWZCfD9Q4gLZDMJRyR/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 28 out. 2021

PAVANELLO, R. M.. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822. Acesso em: 04 fev 2021

RODRIGUES, A. C.. **O Modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**, 2007. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: https://docplayer.com.br/35580537-O-modelo-de-van-hiele-de-desenvolvimento-do-pensamento-geometrico.html. Acesso em: 25 jul. 2019.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S.. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão Reflections on use of material in school teaching of mathematics manipulable: trial of action to ponder**. Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187. Acesso em: 27 out. 2021

RODRIGUES, S. S. A. **A teoria de van Hiele aplicada aos triângulos:** uma sequência didática para o 8° ano do ensino fundamental. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/24072015Schirlane-dos-Santos-Aguiar-Rodrigues.pdf. Acesso em: 17 mar. 2020.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D.. O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades. **Artigo.** v. 3, 2019. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. dos. **Dificuldades na aprendizagem de Matemática**. Monografia (Graduação em Matemática). UNASP, São Paulo, 2007.Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em: 15 ago. 2021

SILVA, R. C. da.; SILVA, J. R. da. O PAPEL DO LABORATÓRIO NO ENSINO DE MATEMATICA, 2004. **Anais**. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/RE75541815487.pdf. Acesso em: 14 out. 2021.

SILVA, O. P. M. da. **A teoria de Ausubel e o modelo dos Van Hiele aplicados à geometria:** uma proposta didática. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2018. Disponível em: http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2282. Acesso em: 29 out. 2021

SUÁREZ, M. M. S.. Rotaciones y niveles de razonamiento, segun el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. **Educación**, vol. 28, no. 54, 2019, p. 127+. Disponível em: link.gale.com/apps/doc/A594664721/AONE?u=capes&sid=bookmark-AONE&xid=5ec37c0d. Acesso em: 6 Jul 2021.

TELES, V.; MORAIS, W. A. Impressão 3D. Universidade Positivo, Curitiba, 2016. Disponível em: http://www.cronosquality.com/artigos/ar007.pdf. Acesso em: 12 ago. 2019.

VARGAS, G.; ARAYA, R. G.. El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. **Uniciencia**, v. 27, n. 1, p. 74-94, 2013. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/15162/. Acesso em: 08 nov. 2021

APÊNDICES

APÊNDICE A – Apresentação do material para o professor

Apostila para o professor

Olá estimado professor pesquisador!

Esta apostila foi pensada e formulada como um material de apoio para a aula sobre ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL.

Todo o material segue o modelo de desenvolvimento do conhecimento proposto pelo casal Diana van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele.

Aqui será apresentada uma proposta de aula a ser aplicada após a verificação de nível dos alunos, por isso é possível que algumas adaptações necessitem ser feitas, uma vez que, alguns pré-requisitos para o melhor desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem que você demande não estejam aqui compreendidos. As atividades e conteúdos descritos nesta apostila abarcam alunos que já tenham assimilado todos os atributos do nível de dedução informal (nível 3) e se objetiva a desenvolver habilidades que tornem os alunos capazes de avançar para o nível de compreensão da dedução (nível 4).

1. Disposição das atividades:

1.1 Encontro 1

- Aplicação da atividade de verificação de nível - 1

1.2 Encontro 2

- Atividade de construção de retas e comparação de ângulos
- Definição informal (sugerida pelos alunos) sobre as relações entre os ângulos encontrados na atividade anterior
- Exposição do conteúdo ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

1.3 Encontro 3

- Aplicação da atividade de fixação

1.4 Encontro 4

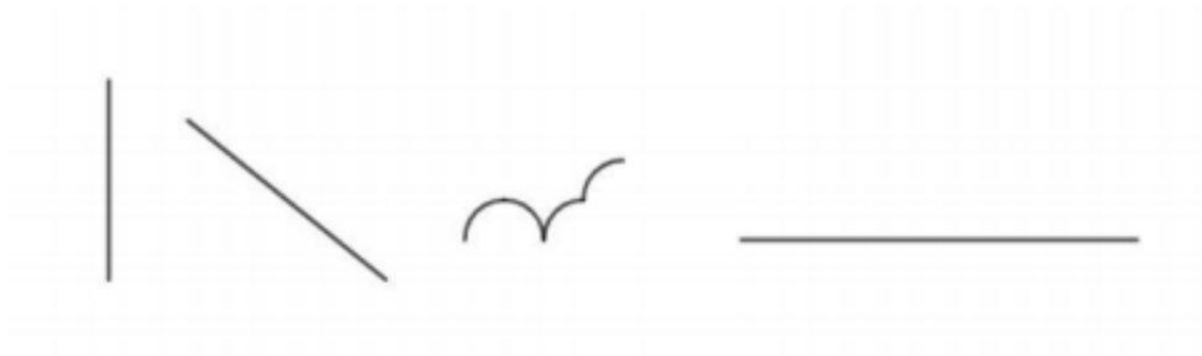
- Aplicação da atividade de verificação de nível - 2

APÊNDICE B - Lista de verificação de nível - Inicial (versão para o professor)
ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1

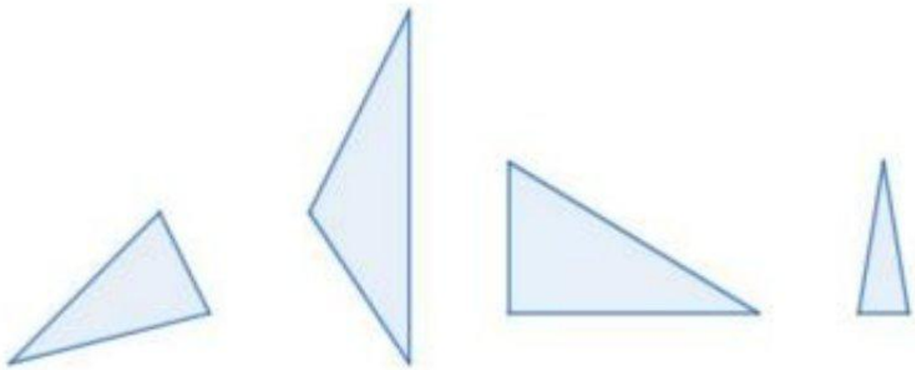
1. Analise as figuras abaixo. Elas pertencem à mesma família de figuras geométricas? Se sim, qual é essa família? Se não, circule a figura que não pertence. Justifique a sua resposta

> Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 1 (Visualização).
> O aluno que somente acertar essa atividade está no nível 1 e será necessário um trabalho específico para que este alcance o nível 2 (Análise).

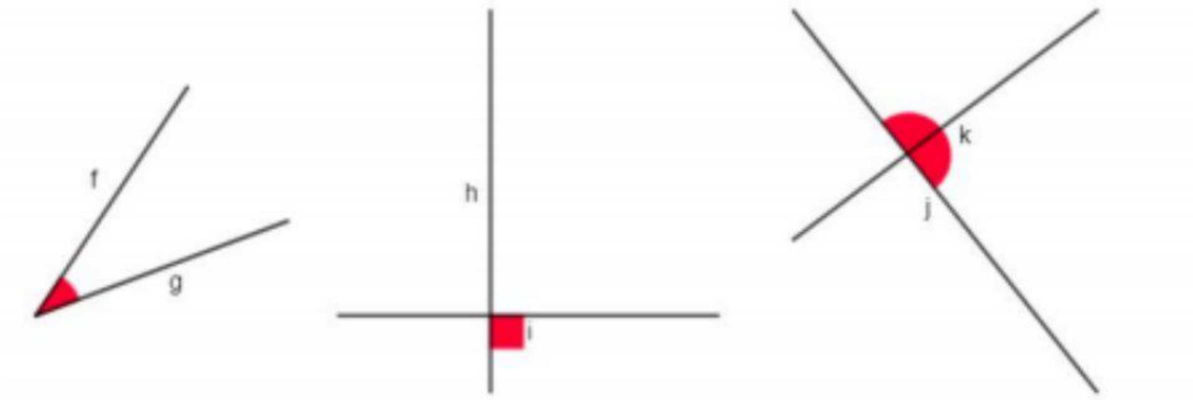
a)



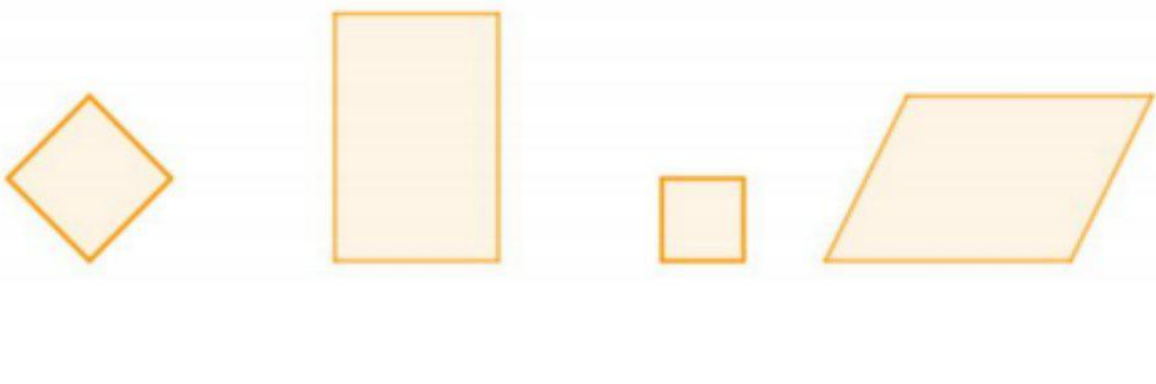
b)



c)



d)



2. Escreva 3 propriedades de cada uma das figuras:

Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 2 (Análise). O aluno que somente acertar essa atividade está no nível 2 e será necessário um trabalho específico para que este alcance o nível 3 (Dedução Informal).

a) 

____

____

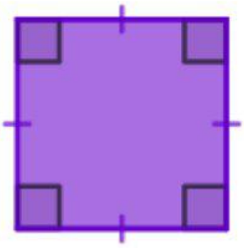
____

b)

____

____

____



c)

____

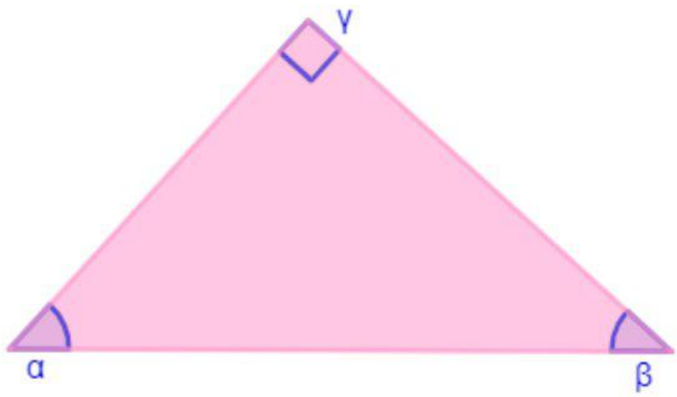
____

____

3. Dadas as figuras a seguir, o que você consegue descrever sobre os elementos destacados?

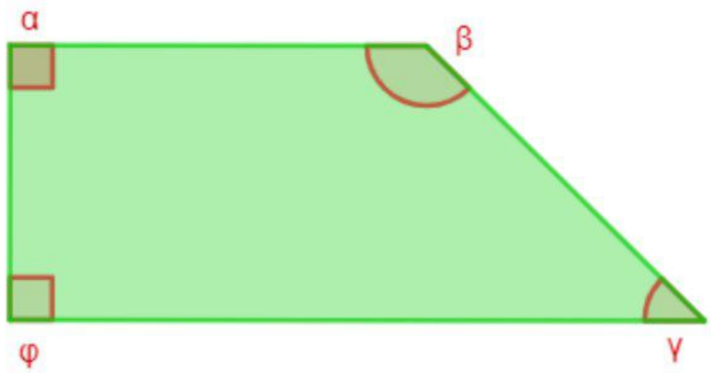
Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 3 (Dedução Informal).
O trabalho desenvolvido nessa proposta tem o objetivo de auxiliar na progressão do aluno até o nível 4 (Dedução Formal)

a)



____
____
____

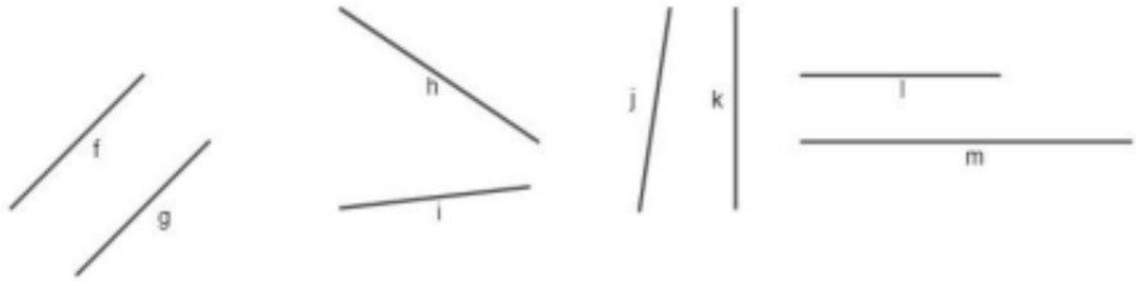
b)



____
____
____

4. Circule os pares de retas paralelas:

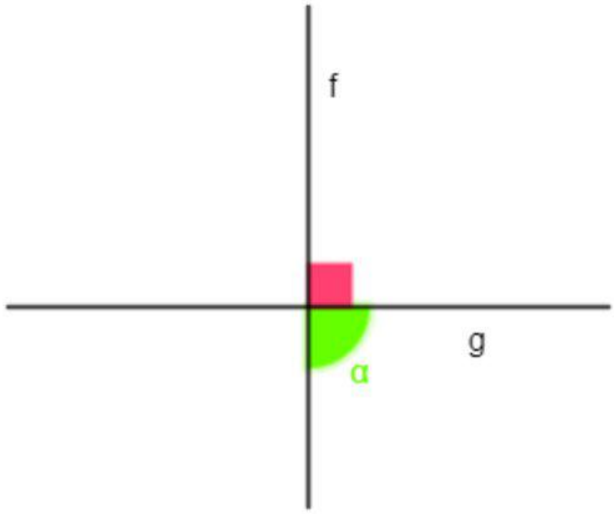
Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 3 (Dedução Informal).
O trabalho desenvolvido nessa proposta tem o objetivo de auxiliar na progressão do aluno até o nível 4 (Dedução Formal)



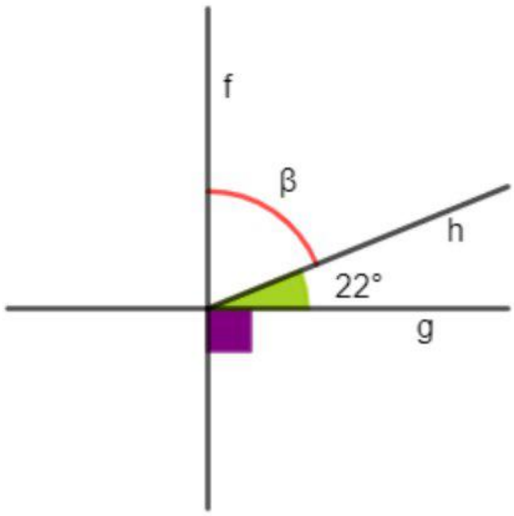
5. Indique o valor em graus dos ângulos denotados por letras gregas nas figuras a seguir.

Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 4 (Dedução Formal).
Ao notar que o aluno respondeu corretamente todas as atividades procure colocá-lo com outros alunos (se for o caso) que também responderam todas as atividades corretamente. Desta forma é possível que você professor identifique se é necessário que se faça um trabalho complementar ao proposto nesta apostila.
Minha sugestão para deixar os alunos que acertarem tudo juntos é para que estes não acabem mascarando o desenvolvimento dos demais alunos que estiverem em níveis do desenvolvimento anteriores ao nível 4.

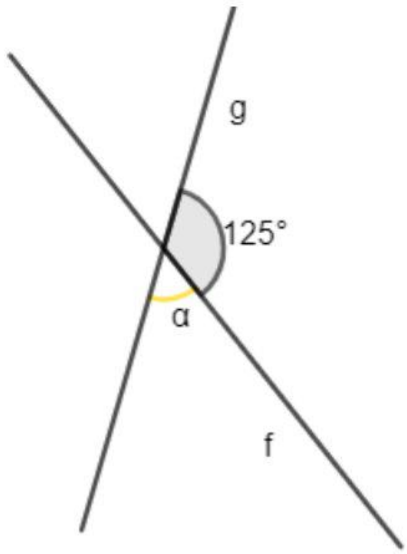
a)



b)

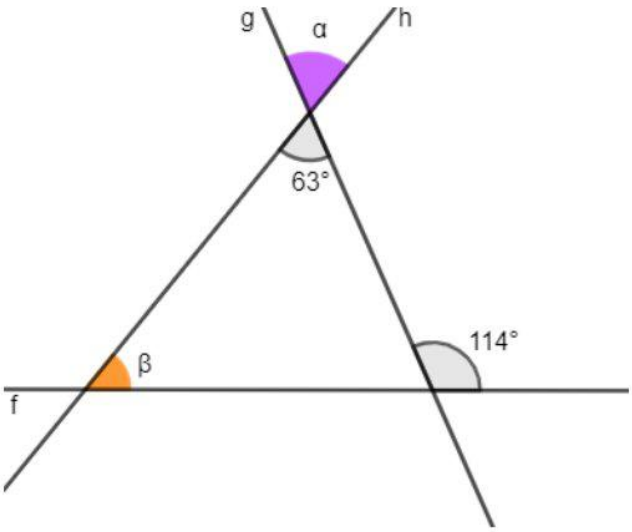


c)



6. A partir dos conhecimentos que você possui sobre ângulos suplementares e soma de ângulos internos de um triângulo, indique os valores que estão assinalados pelas letras gregas α e β.

Essa atividade é para verificar se o aluno possui domínio do nível 4 (Dedução Formal).
Ao notar que o aluno respondeu corretamente todas as atividades procure colocá-lo com outros alunos (se for o caso) que também responderam todas as atividades corretamente. Desta forma é possível que você professor identifique se é necessário que se faça um trabalho complementar ao proposto nesta apostila.
Minha sugestão para deixar os alunos que acertarem tudo juntos é para que estes não acabem mascarando o desenvolvimento dos demais alunos que estiverem em níveis do desenvolvimento anteriores ao nível 4.



APÊNDICE C - Apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO - (versão para o professor)

Apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

Divida a turma em pequenos grupos para facilitar a discussão e troca de informações entre os alunos. O objetivo das tarefas seguintes é estimular a dedução no aluno.

Na atividade a seguir é apresentado um detalhamento para a construção de retas paralelas cortadas por uma transversal. Por se tratar de uma atividade onde cada aluno deverá executar de forma individual, cada um terá um conjunto de retas único no qual fará análise e posteriormente poderá comparar com os colegas de grupo.

Esta atividade perpassa por todas as fases do desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que o objetivo desta apostila é que ao final o aluno consiga alcançar a integração, sendo esta a etapa final no desenvolvimento de um nível e inicial do nível posterior.

As tarefas presentes nesta apostila tomam como base alunos que tenham compreendido o nível 3 do desenvolvimento do pensamento geométrico, o de Dedução Informal, ou seja, o aluno já é capaz de fazer inclusão de classes e acompanhar uma demonstração informal, porém ainda não é capaz de construir sozinho uma demonstração.

Materiais a serem utilizados:

Professor:

- Quadro
- Marcador de quadro
- Par de esquadros para quadro
- Folha de acetato inteira

Alunos:

- Folha branca
- Caneta ou lápis
- Marcador permanente para CD
- Par de esquadros

- ¼ da folha de acetato

Alunos:

Figura 1

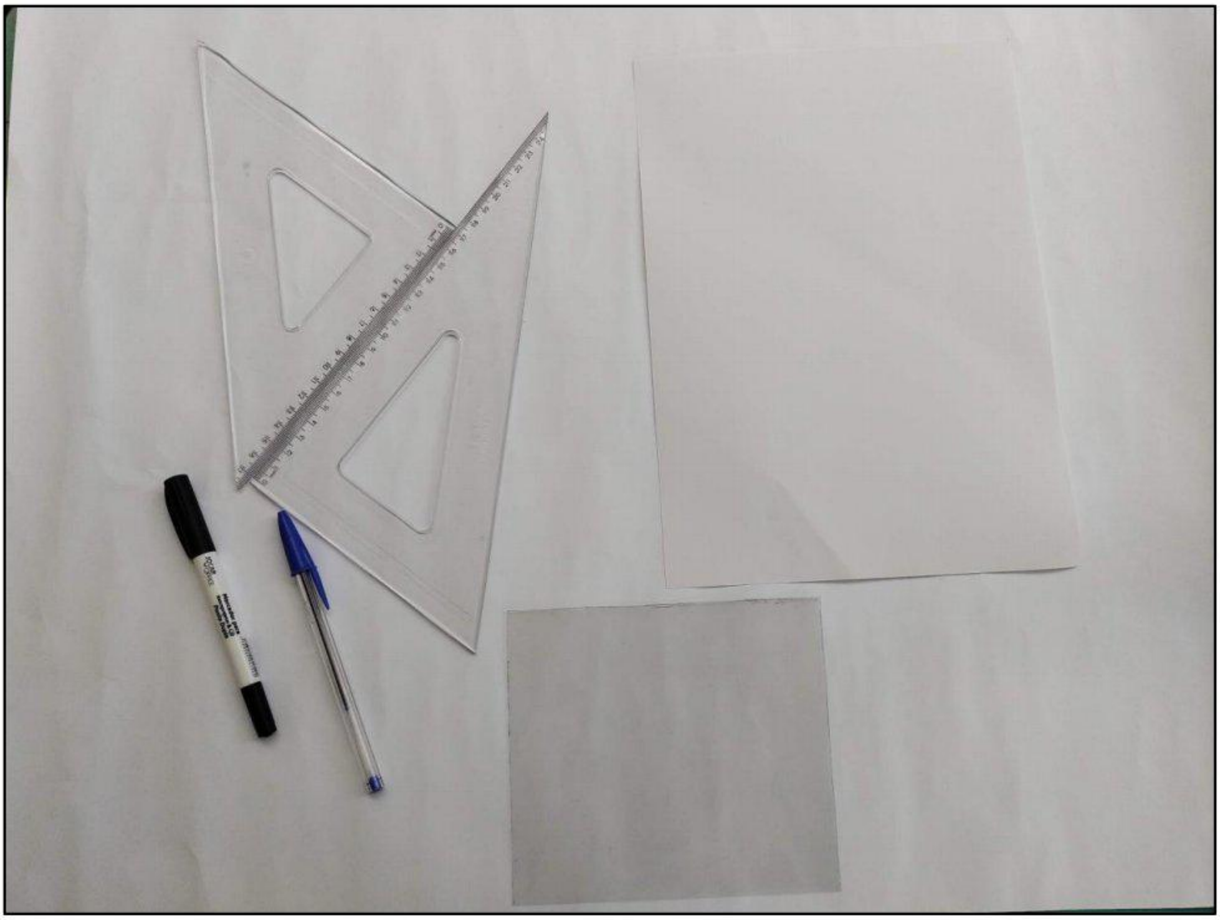
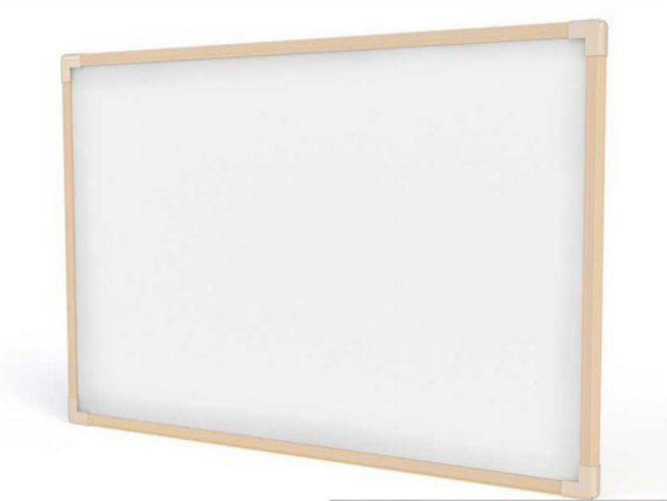


Figura 2

Professor:



A construção se dará da seguinte forma:

1º passo: Desenhe uma reta qualquer com auxílio de um esquadro

2º passo: Apoie o compasso de 30º,60º,90º de maneira que este esteja perpendicularmente posicionado com relação à reta que você já traçou.

3º passo: Apoie o compasso de 45º,90º,45º com o ângulo de 90º alinhado ao do outro compasso e logo abaixo da reta criada.

4º passo: Deslize o compasso menor e construa 1 reta paralela à primeira. Observação: utilize o espaçamento que você desejar.

5º passo: Trace uma reta inclinada que corte todas as outras já desenhadas.

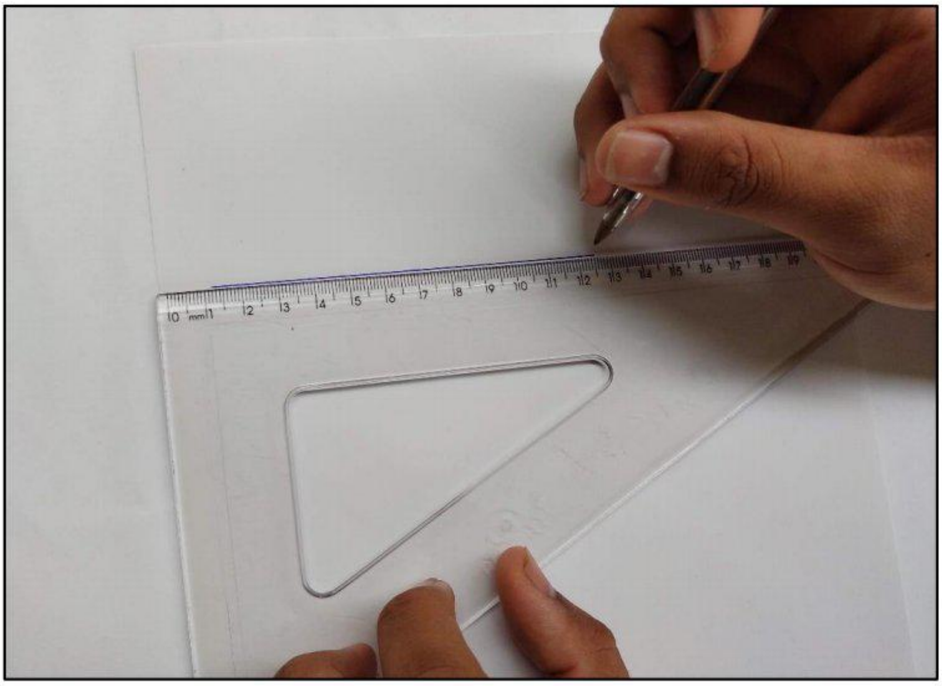
Nessa etapa é importante que se estabeleça primeiramente um momento para que se tire dúvidas sobre os pré requisitos das atividades que se seguirão, tais como: conceitos de retas paralelas, conceito de retas transversais, conceito de retas concorrentes, propriedades de quadrados e retângulos, ângulos complementares e suplementares, ângulo agudo, ângulo reto e ângulo obtuso.

Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

A atividade de construção de retas constitui a primeira fase do processo de ensino e aprendizagem denominado interrogação. Segundo Crowley (1994) "nesta etapa inicial, professor e aluno conversam e desenvolvem atividades envolvendo os objetos de estudo do respectivo nível. Fazem-se observações, levam-se questões e introduz-se um vocabulário específico do nível".

FOTOS DO PASSO A PASSO

Figura 3



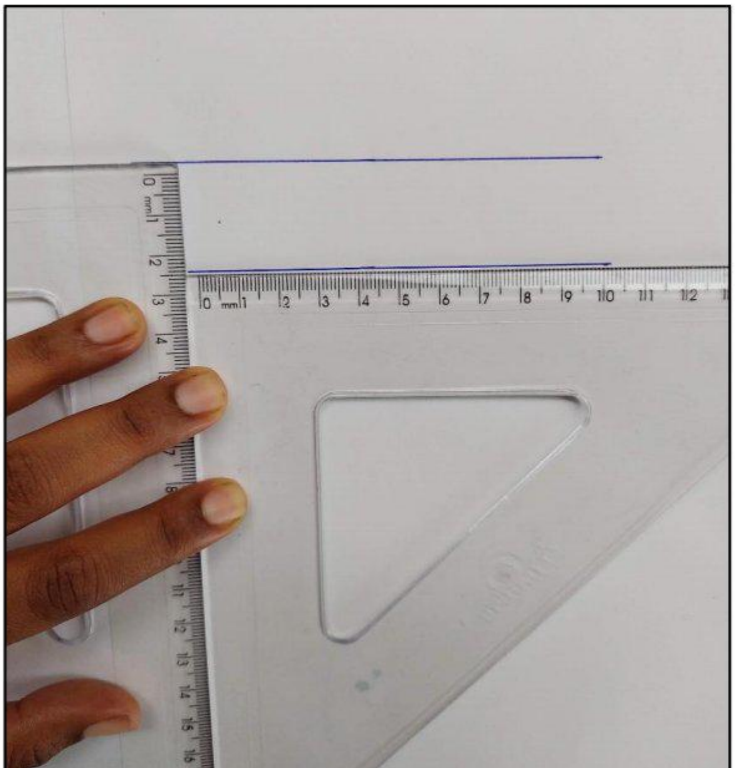


Figura 5

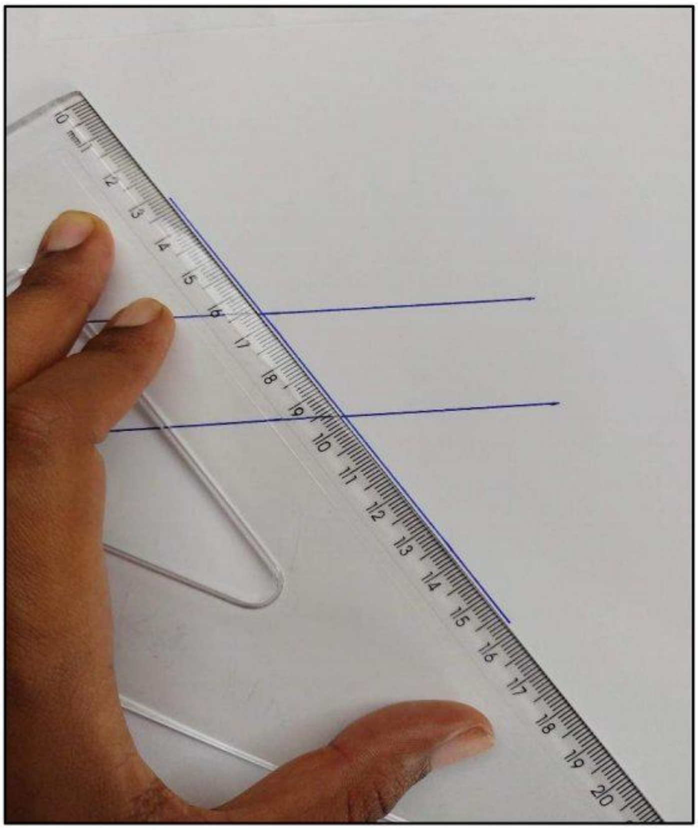
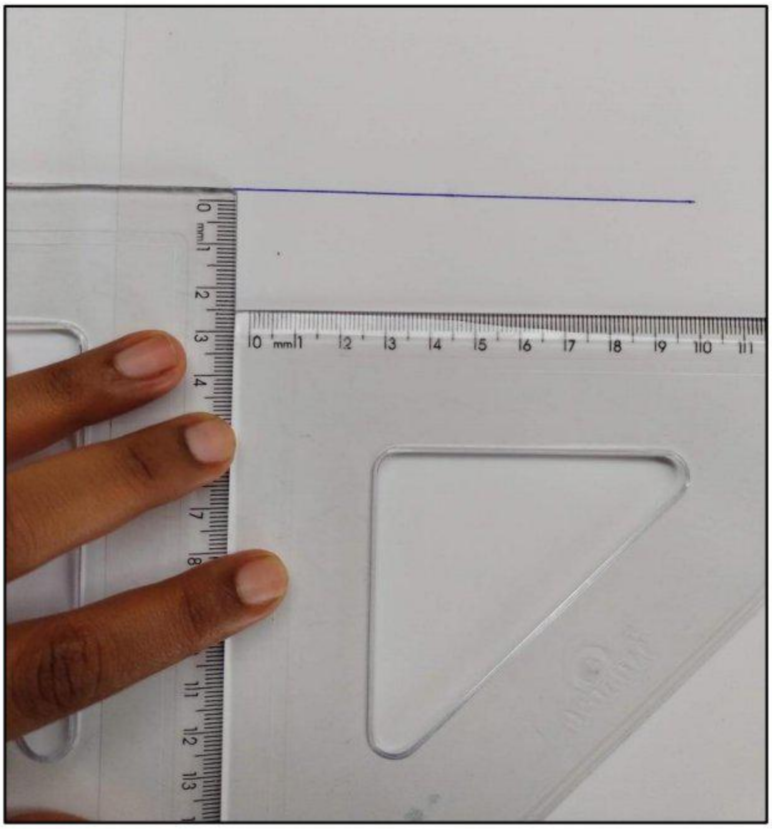


Figura 6



Comparação dos ângulos na própria construção:

Essa atividade é destinada a estimular a formulação de conceitos acerca das amplitudes dos ângulos pela sua posição nas retas. Se refere à fase 2, orientação dirigida em que o aluno explora o conteúdo através do material ordenado em sequência organizada pelo professor.

1º passo: Utilizando a transparência e o marcador de CD, marque o ângulo inferior interno à primeira reta.
2º passo: Agora, deslize a transparência entre as retas e verifique quais ângulos têm a mesma amplitude.

Nessa etapa é importante que se estabeleça primeiramente um ambiente propício para a discussão entre os alunos, que as comparações sejam feitas de maneira livre. Você professor, neste momento, é um agente incentivador da troca de informação entre os alunos e um provocador de novos questionamentos que possam levar o aluno à generalização por si mesmo.

Perguntas poderão ser feitas para instigar a construção do conhecimento, como: Tentou virar esse ângulo 180º e ver o que aparece? Você acha que isso sempre acontece?

Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

A atividade de comparação de ângulos constitui a segunda fase do processo de ensino e aprendizagem denominado orientação dirigida. Essa tarefa tem o objetivo de provocar respostas concisas e demonstrar gradualmente as características do terceiro nível (nível da dedução informal)

FOTOS DO PASSO A PASSO

Figura 7

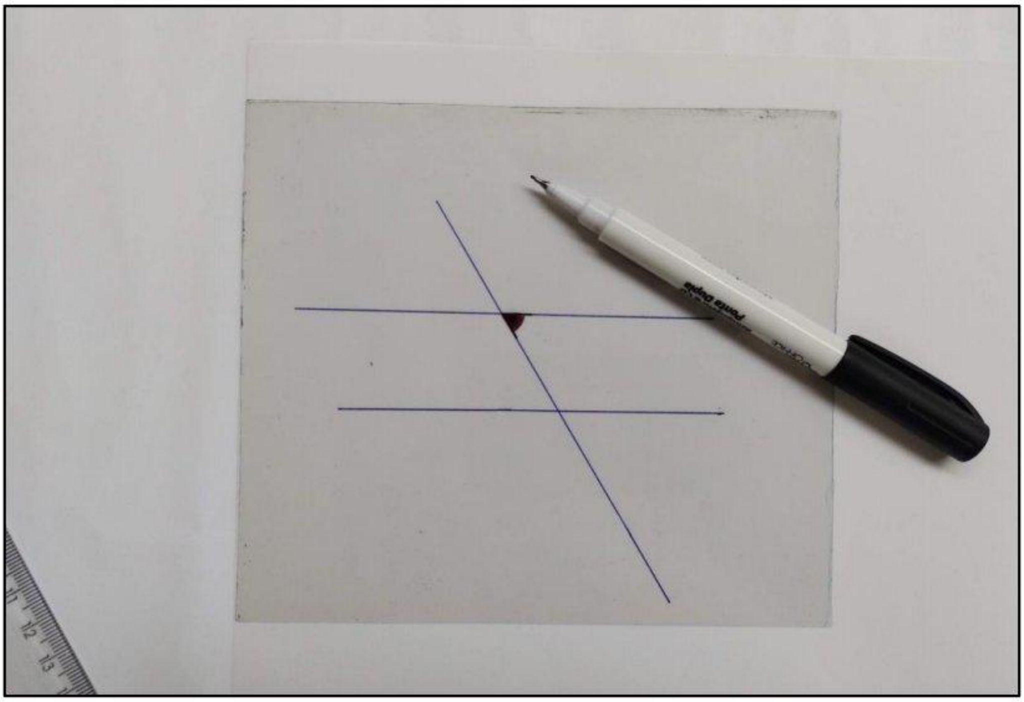


Figura 8

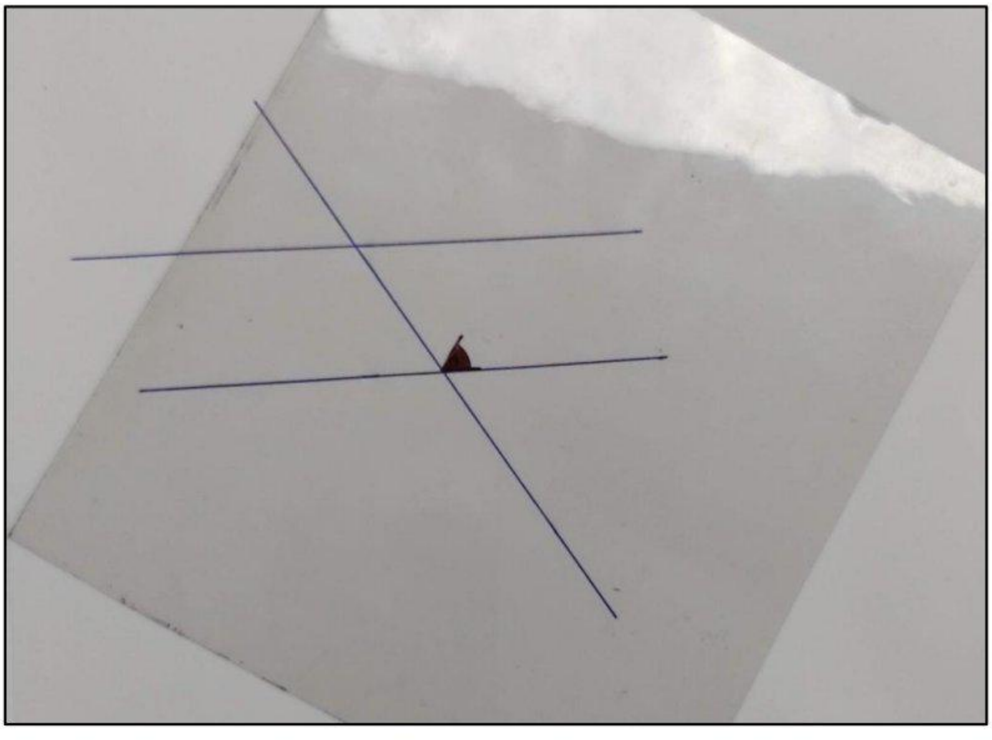
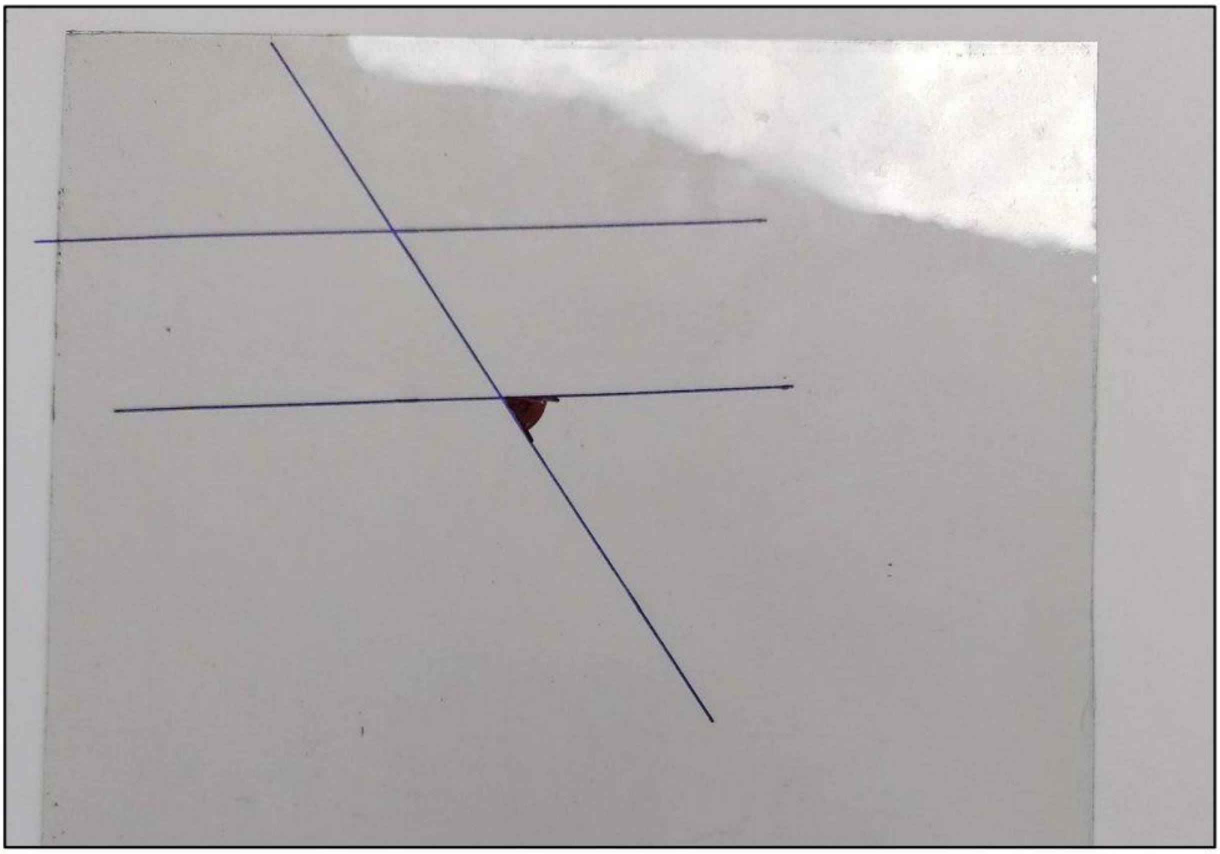


Figura 9



Comparação com os outros alunos:

Essa atividade é destinada a estabelecer uma visão crítica acerca das percepções já estimuladas e formuladas na tarefa anterior. Essa atividade se refere à fase da explicação. Aqui o papel do professor é mínimo, orienta o uso de uma linguagem precisa e adequada, e observa. Já os alunos trocam experiências, os diferentes pontos de vista contribuem para a análise de suas ideias.

Definição informal (sugerida pelos alunos) sobre as relações entre os ângulos encontrados na atividade anterior

A partir da discussão do tópico anterior, é esperado que os alunos possam imprimir suas conclusões e pré estabelecer as relações que serão expostas no próximo tópico.

Nessa etapa deverá ser levado em conta todas as deduções e questionamentos feitos pelos alunos e formulado em conjunto definições prévias sobre ângulos opostos pelo vértice, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos.

Nessa etapa é importante que os alunos se expressem à sua maneira e você apenas os oriente para uma linguagem mais adequada.

Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

Esta atividade constitui a terceira fase do processo de ensino e aprendizagem denominado EXPLICAÇÃO. Essa tarefa tem o objetivo de estabelecer o aluno no nível da dedução informal e o preparar para o próximo nível, o nível da dedução.

Exposição do conteúdo ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL (material de apoio)

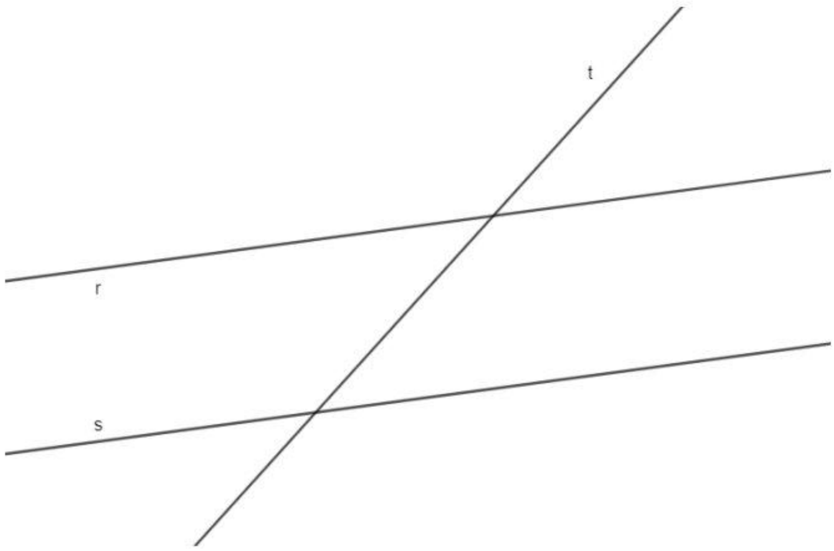
O material apresentado nesta etapa e nas duas demonstrações a seguir tem por finalidade ancorar as discussões feitas anteriormente. A experimentação e demonstrações apreciadas tem o professor como sujeito norteador do processo de ensino e aprendizagem de uma forma muito mais explícita, porém o aluno ainda poderá expor as relações que identificar e suas próprias suposições.

Essa etapa é destinada a explicitar os conceitos de ângulos opostos pelo vértice, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais externos e ângulos colaterais internos. E também expor a relação entre suas amplitudes.

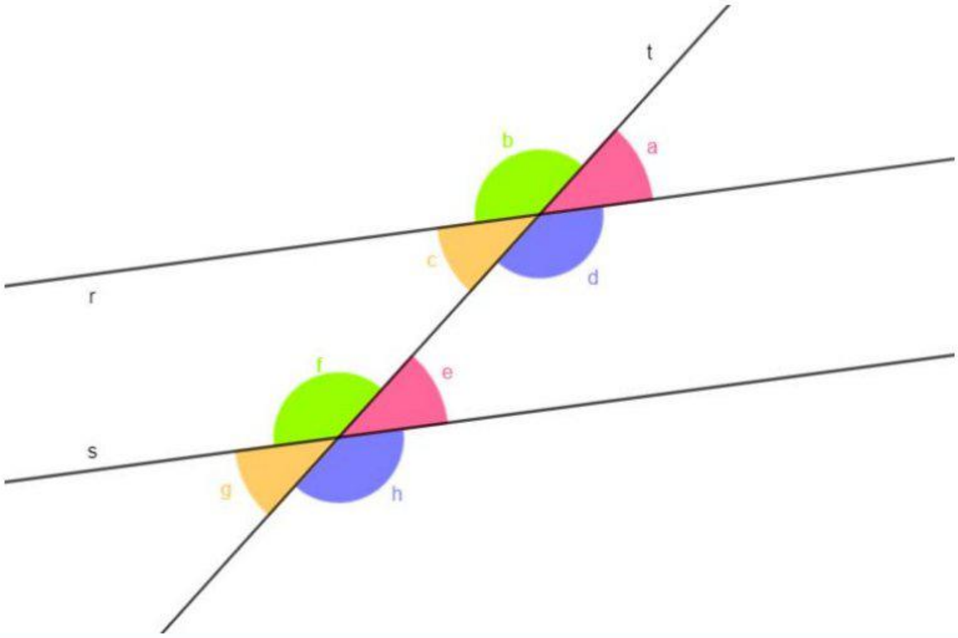
Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

Esta atividade constitui a terceira fase do processo de ensino e aprendizagem denominado EXPLICAÇÃO. Essa tarefa tem o objetivo de estabelecer o aluno no nível da dedução informal e o preparar para o próximo nível, o nível da dedução.

Considere duas retas *r* e *s* paralelas entre si cortadas por uma transversal t. Segue um exemplo:



Nessa figura existem ângulos nos quais é possível perceber algumas propriedades. Na figura a seguir delimitaremos os ângulos correspondentes, para então, determinar as propriedades presentes neles.

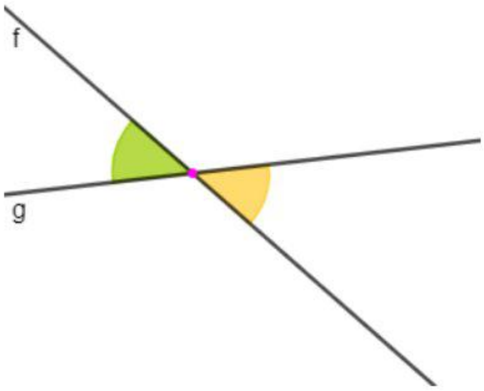


Nessa figura os ângulos indicados pela mesma cor são ângulos correspondentes e ângulos correspondentes determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes, ou seja, possuem a mesma amplitude.

Observe que se duas retas *r* e *s* são cortadas por uma transversal e determinam ângulos com as mesmas características da figura anterior, então as retas *r* e *s* são paralelas entre si.

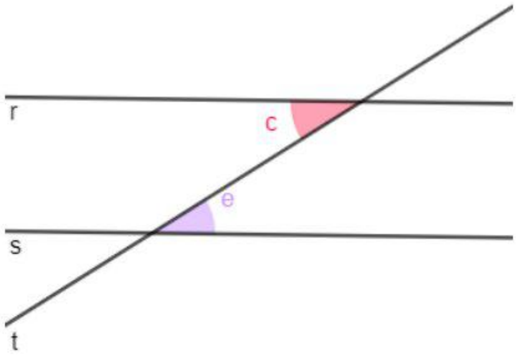
Relembrando…

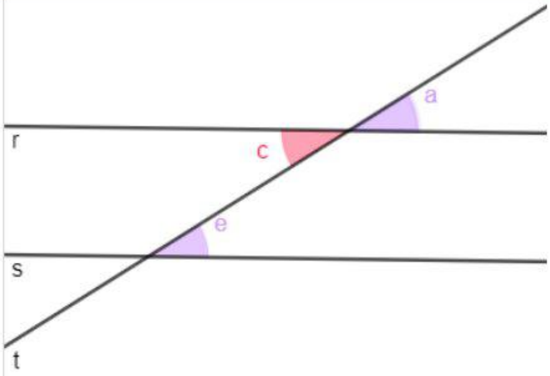
Dois ângulos formados por retas concorrentes e denominados **opostos pelo vértice (o.p.v)** são congruentes.



Das propriedades expostas anteriormente (propriedades de congruência de ângulos) é possível chegar a outras propriedades.

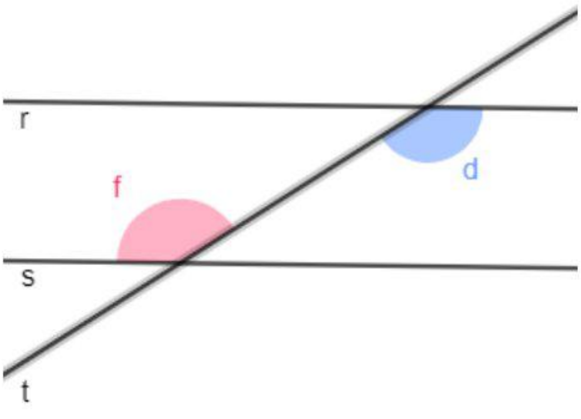
P1: Ângulos alternos internos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes.



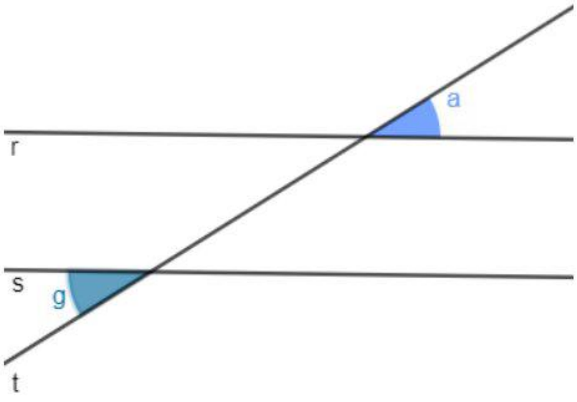


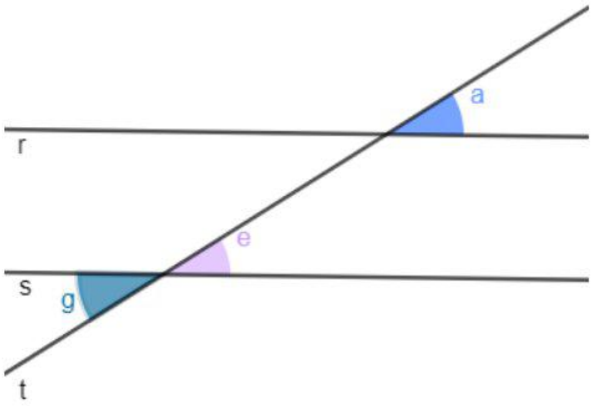
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **a** e **e** são correspondentes, logo congruentes. Como **c** é o.p.v de **a** e estes são congruentes, consequentemente **c** = **e**.

Também são ângulos alternos internos:



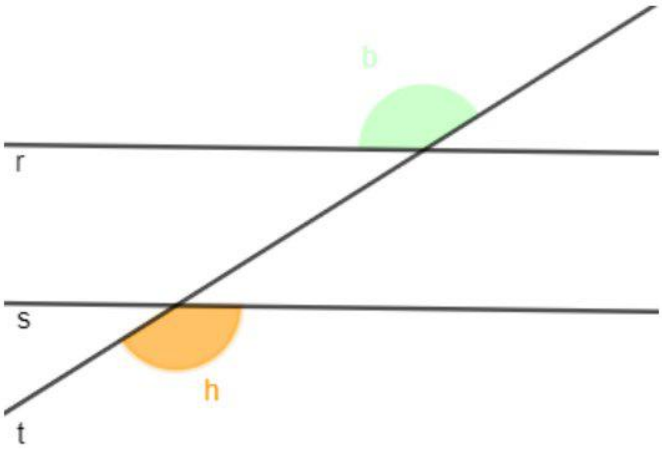
P2: Ângulos alternos externos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes.



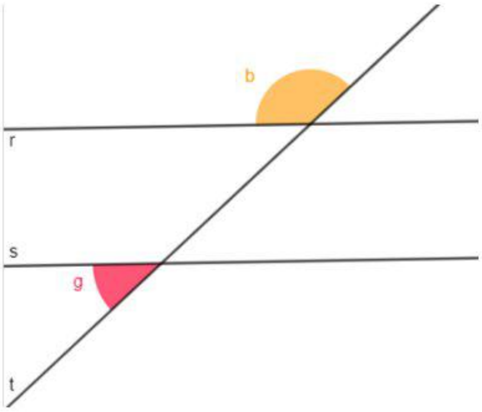


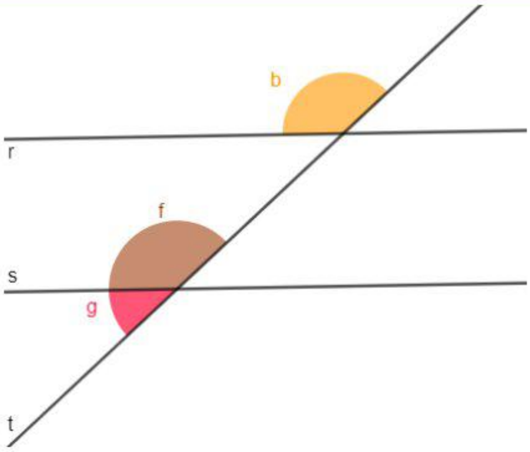
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **a** e **e** são correspondentes, logo congruentes. Como **g** é o.p.v de **e** e estes são congruentes, consequentemente **g** = **a**.

Também são ângulos alternos externos:



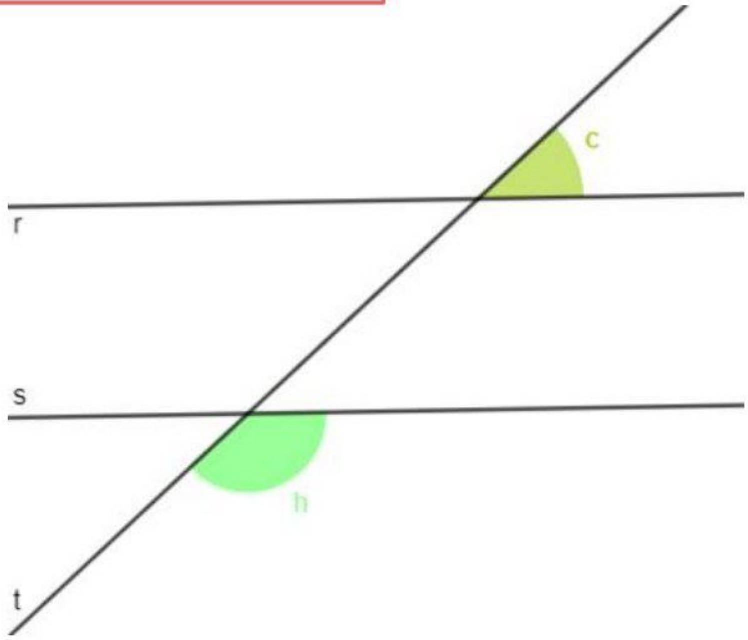
P3: Ângulos colaterais externos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são suplementares.



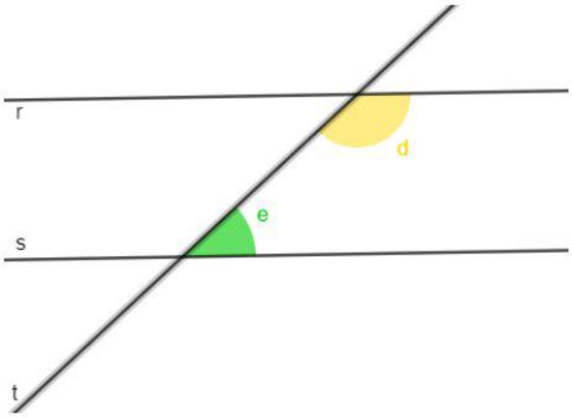


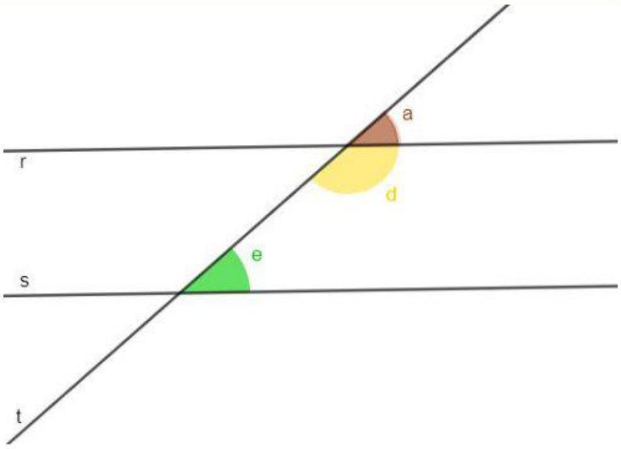
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **f** e **b** são correspondentes, logo congruentes. Como **g** pertence a mesma reta (*t*) que **f**, logo **g** + **f** = 180º, consequentemente **g e b são suplementares**.

Também são ângulos colaterais externos:



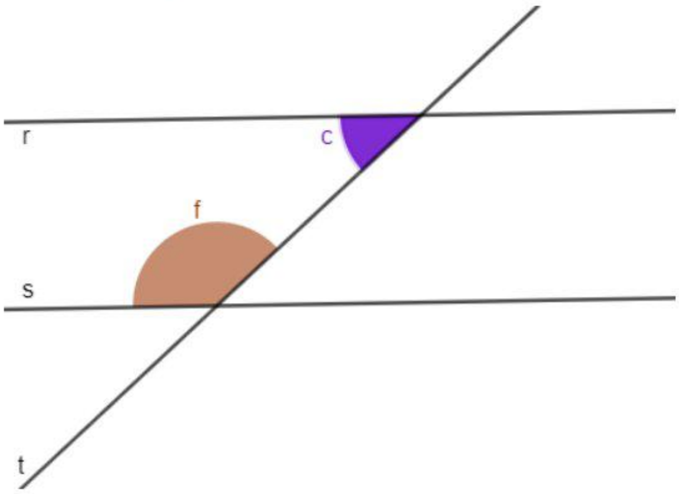
P4: Ângulos colaterais internos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são suplementares.





Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **e** e **a** são correspondentes, logo congruentes. Como **d** pertence a mesma reta (*t*) que **a**, logo **a** + **d** = 180º, consequentemente **d e e são suplementares**.

Também são ângulos colaterais internos:

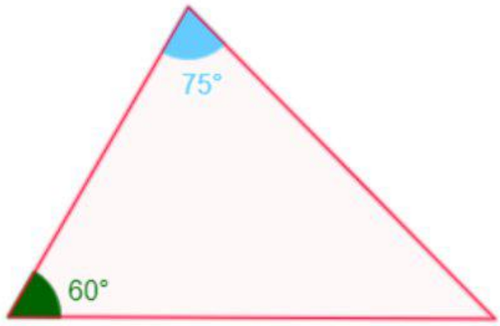


Demonstração da soma interna dos ângulos de um triângulo:

Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo:

Dado o triângulo a seguir:

Nessa etapa é importante que os alunos se expressem a sua maneira e você apenas os oriente para uma linguagem mais adequada.

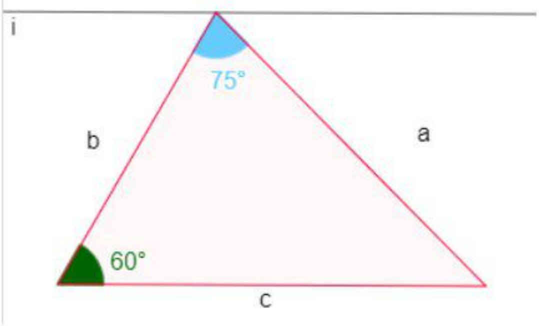


Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

Esta atividade constitui a terceira fase do processo de ensino e aprendizagem denominado EXPLICAÇÃO. Essa tarefa tem o objetivo de estabelecer o aluno no nível da dedução informal e o preparar para o próximo nível, o nível da dedução.

Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo:

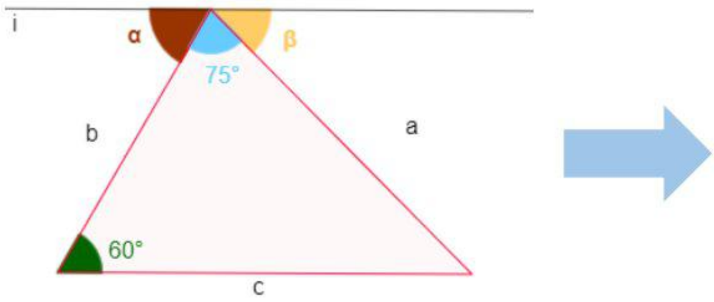
Nessa etapa é importante que os alunos se expressem à sua maneira e você apenas os oriente para uma linguagem mais adequada.



Aqui listarei as fases do processo de ensino e aprendizagem proposto pelo casal van Hiele que cada componente das atividades engloba.

Esta atividade constitui a terceira fase do processo de ensino e aprendizagem denominado EXPLICAÇÃO. Essa tarefa tem o objetivo de estabelecer o aluno no nível da dedução formal e o preparar para o próximo nível, o nível da dedução.

Ao traçar a reta i, paralela ao lado c, oposto ao ângulo 75°, observa-se duas retas paralelas cortadas por duas transversais (lados a e b do triângulo).



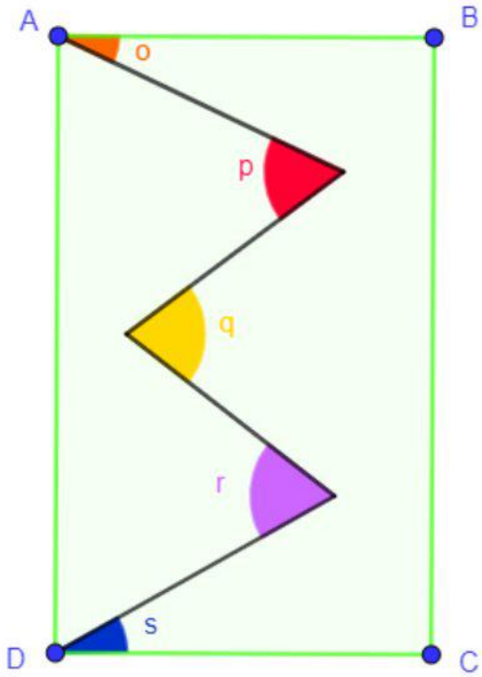
Pode-se destacar os ângulos α e β formados pela reta i e as transversais a e b.
O ângulo α é alterno interno ao ângulo de 60°, portanto $\alpha = 60°$. (1)

Como α, 75° e β estão sob a mesma reta, $\alpha + 75° + \beta = 180°$
Sendo $\alpha = 60°$, tem-se: $60° + 75° + \beta = 180°$. Logo $135° + \beta = 180°$. (2)
De (2), tem-se: $\beta = 180° - 135°$, logo $\beta = 45°$

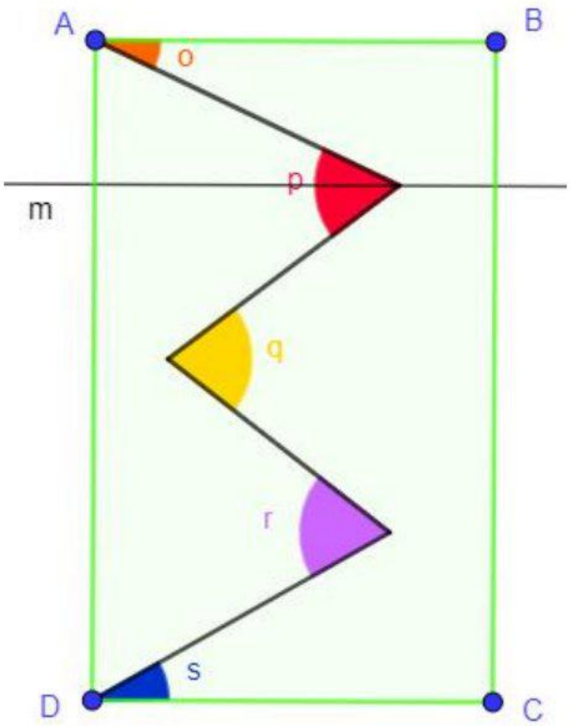
Analogamente a (1) o ângulo β é alterno interno ao ângulo desconhecido no triângulo, portanto este ângulo é igual a β,ou seja, mede 45°.

Teorema dos bicos:

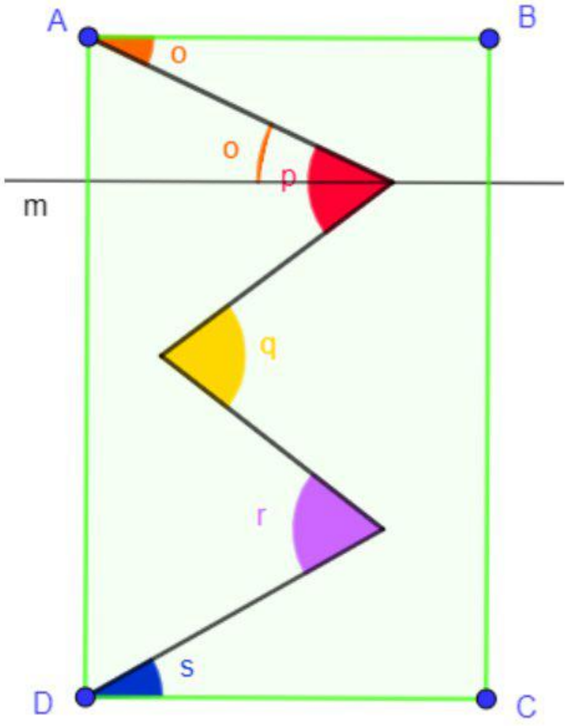
Dado o retângulo ABCD a seguir:



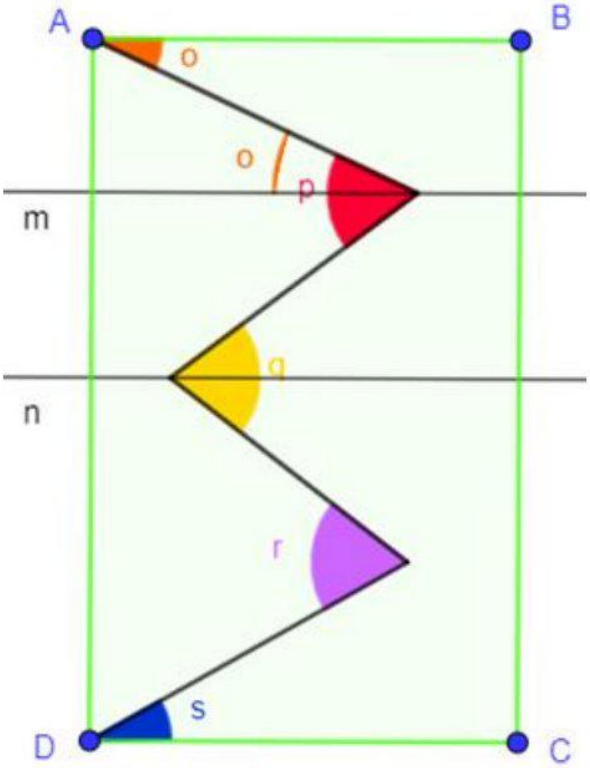
Tracemos uma paralela m ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice do ângulo *p*:



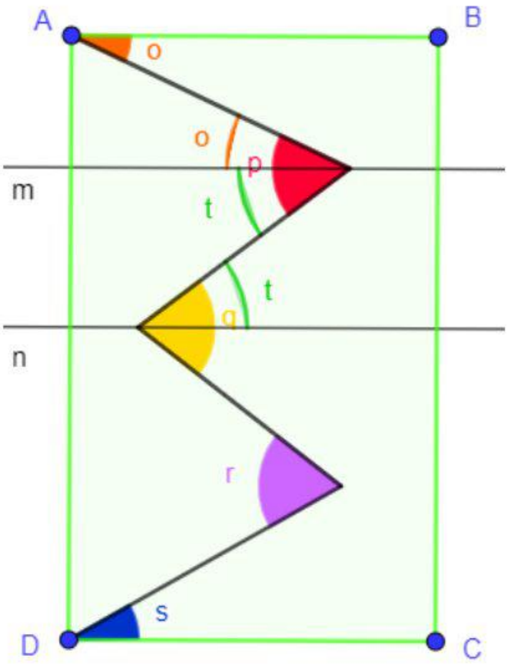
Podemos concluir que a parte superior do ângulo *p* tem a mesma amplitude que o ângulo *o* pois estes são alternos internos.



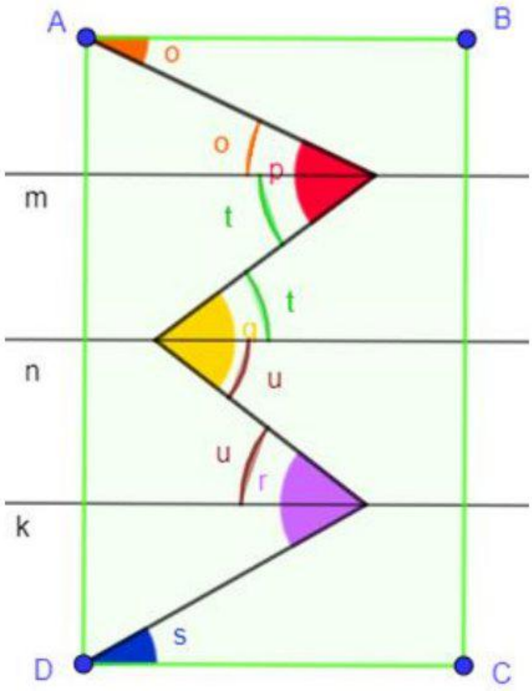
Agora tracemos uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice do ângulo *q*:



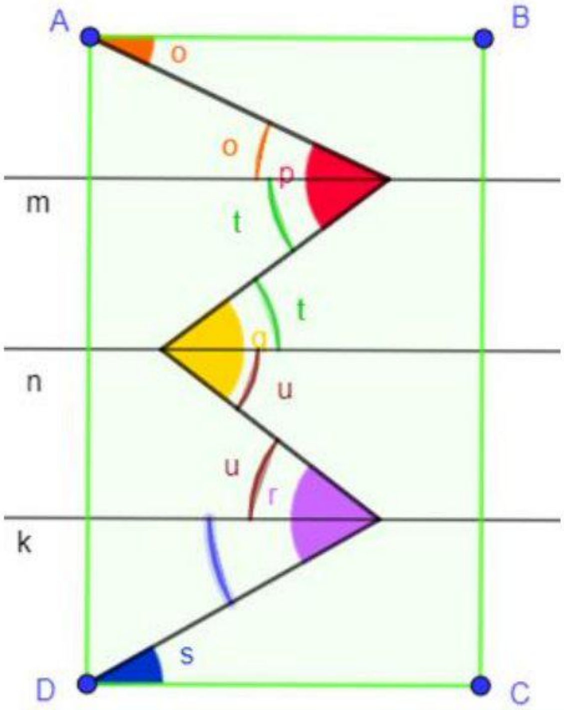
Observamos que a parte inferior do ângulo *p* é alterno interno a parte superior do ângulo q, logo terão a mesma amplitude t.



Analogamente à proposição anterior, temos a parte inferior do ângulo *q* alterna interna a parte superior do ângulo *r*, logo terão a mesma amplitude u.

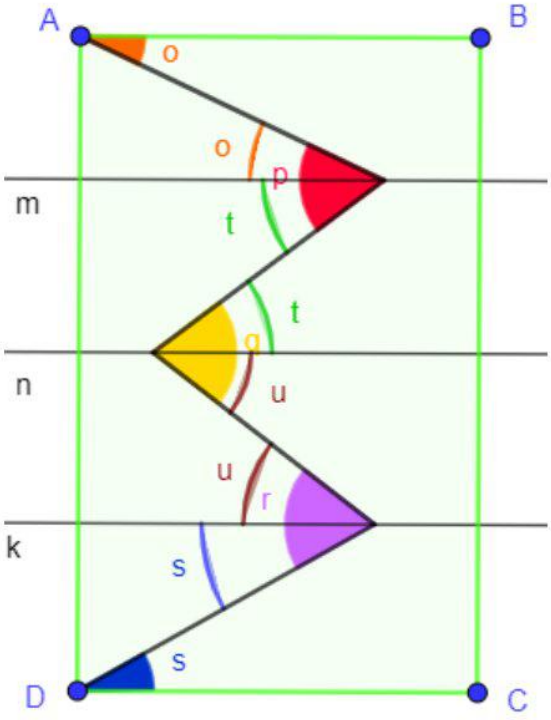


Agora observe a parte inferior do ângulo *r* e o ângulo *s*:



Também são alternos internos, certo?

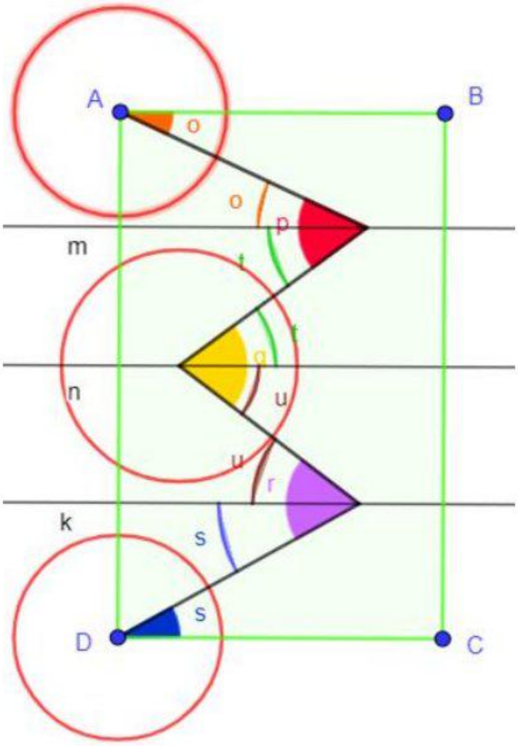
Logo também tem a amplitude s



\

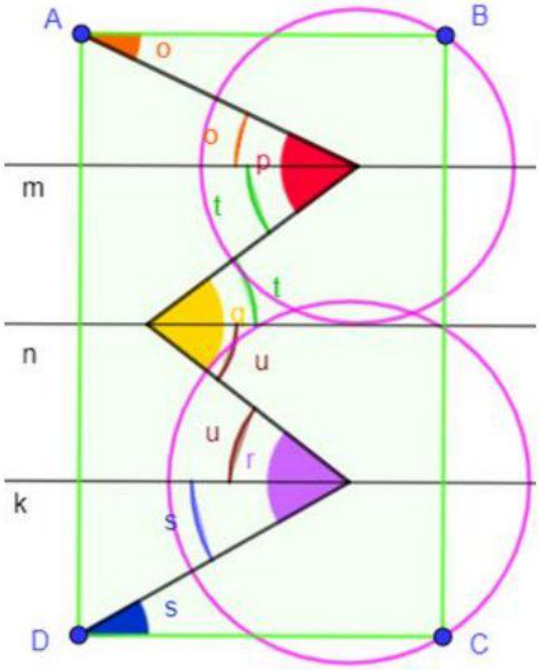
Nesse momento partiremos para outras observações.

Preste atenção em todos os ângulos que apontam para esquerda:



Fazendo a soma de todos eles teremos:
o + t +u +s

Observando agora os ângulos que apontam para direita...



Fazendo também a soma de todos eles teremos:
o + t +u +s

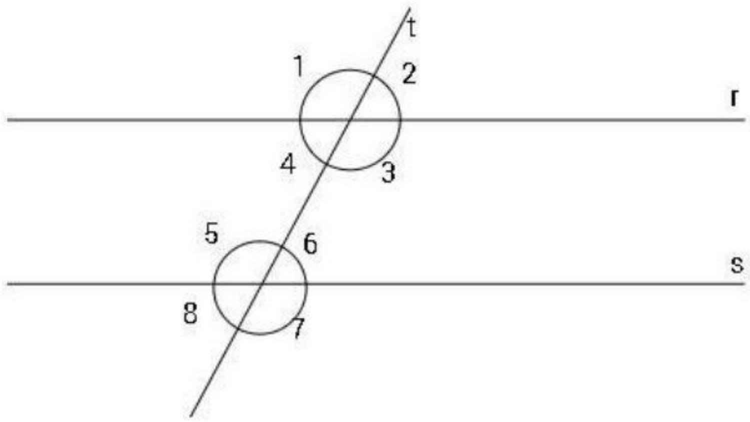
Dessa maneira é possível provar que, quando entre duas retas paralelas existir uma poligonal, a soma dos ângulos que apontam para um lado é igual a soma dos ângulos que apontam para o lado oposto.

APÊNDICE D - Atividade de fixação do conteúdo (versão para o professor)

Esta lista de exercícios tem o objetivo fixar o conteúdo abordado e experimentado na apostila anteriormente. Nesse momento o papel do professor se faz mais por instigar o aluno a explorar as suas próprias deduções e relembrar a investigação feita anteriormente. Também se faz necessário a ancoragem da linguagem correta (nomenclatura e relações).
A discussão entre os alunos será restrita ao momento da experimentação, o processo nessa etapa deve ser o mais individual e autônomo possível, mas poderão ocorrer intervenções.
Se você professor achar interessante, faça a correção dessa atividade em sala.
Este é o último momento que os alunos poderão sanar as suas dúvidas antes da atividade de verificação final.
A fase a qual essa atividade se refere é a 5, orientação livre. Nessa fase o aluno possui uma certa autonomia, as tarefas são mais complexas, admite várias formas de resolução, e pode resolver resolvê-las de sua própria maneira. Podendo orientar-se no campo da pesquisa. (SILVA, 2013)[1]

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO DE CONTEÚDO

1. A partir dos conhecimentos elaborados na aula, quais os nomes e as relações entre os ângulos listados abaixo na figura?



a) 1 e 3 ____
b) 3 e 6 ____
c) 4 e 6 ____
d) 2 e 8 ____

[1] OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE: Produções Didático-Pedagógicas. **Rosalire Terezinha da Silva**. Paraná, GOVERNO DO ESTADO: Secretaria de educação, volume II, 2013.

2. Das alternativas abaixo que fazem afirmações a respeito de ângulos formados por uma reta transversal a um feixe de retas paralelas, assinale aquela que for correta.

a) Ângulos alternos internos são complementares.

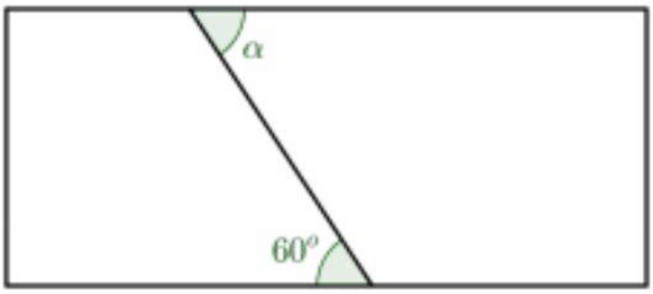
b) Ângulos alternos internos são suplementares.

c) Ângulos correspondentes são suplementares.

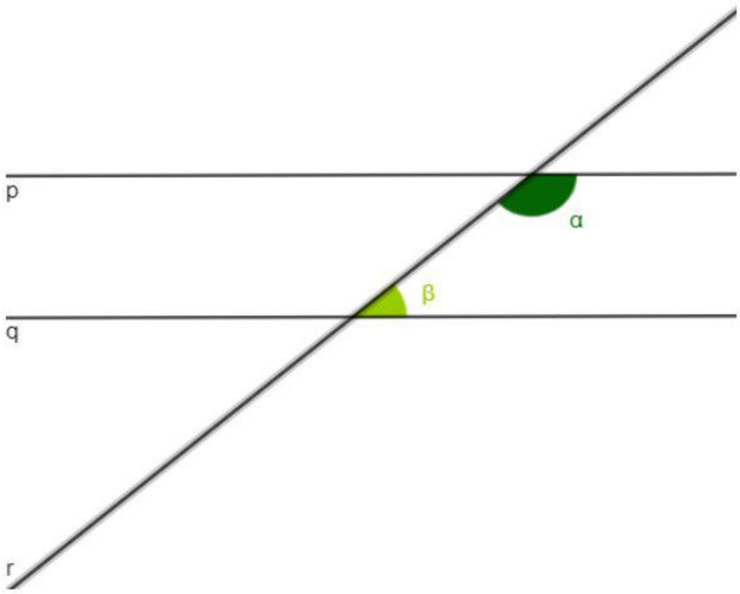
d) Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

e) Ângulos opostos pelo vértice são suplementares

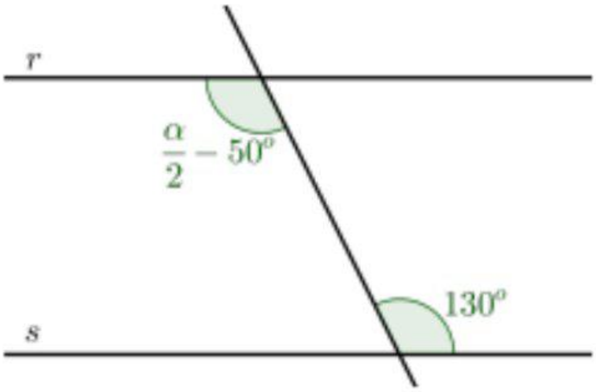
3. A figura abaixo mostra a representação da vista de uma piscina de um clube. As laterais opostas desta piscina são segmentos paralelos entre si. O segmento transversal foi traçado a fim de determinar o posicionamento de dois guardas-sol. Conhecendo o ângulo que faz a sombra do guarda-sol 1, determine o ângulo α que definirá o posicionamento do guarda-sol 2.



4. Na figura a seguir, p e q são retas paralelas entre si e a amplitude do ângulo α é o triplo do ângulo β. Determine a medida em graus dos ângulos α e β.



5. Sendo r e s retas paralelas, determine o valor de α na figura abaixo.



6. Duas retas cruzam-se no ponto V, formando os ângulos opostos pelo vértice de 10x + 20 e 5x + 50. Qual é o valor de x?

a) 5

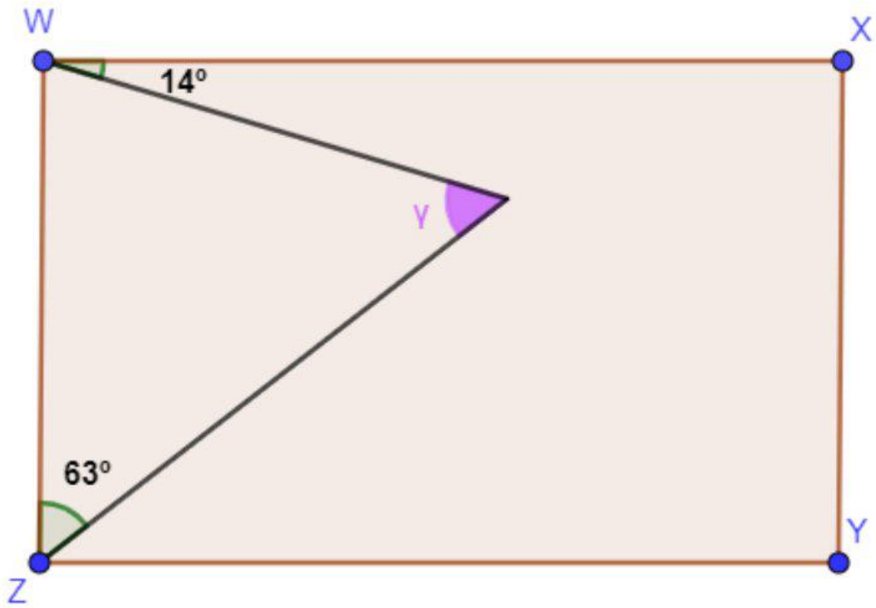
b) 6

c) 7

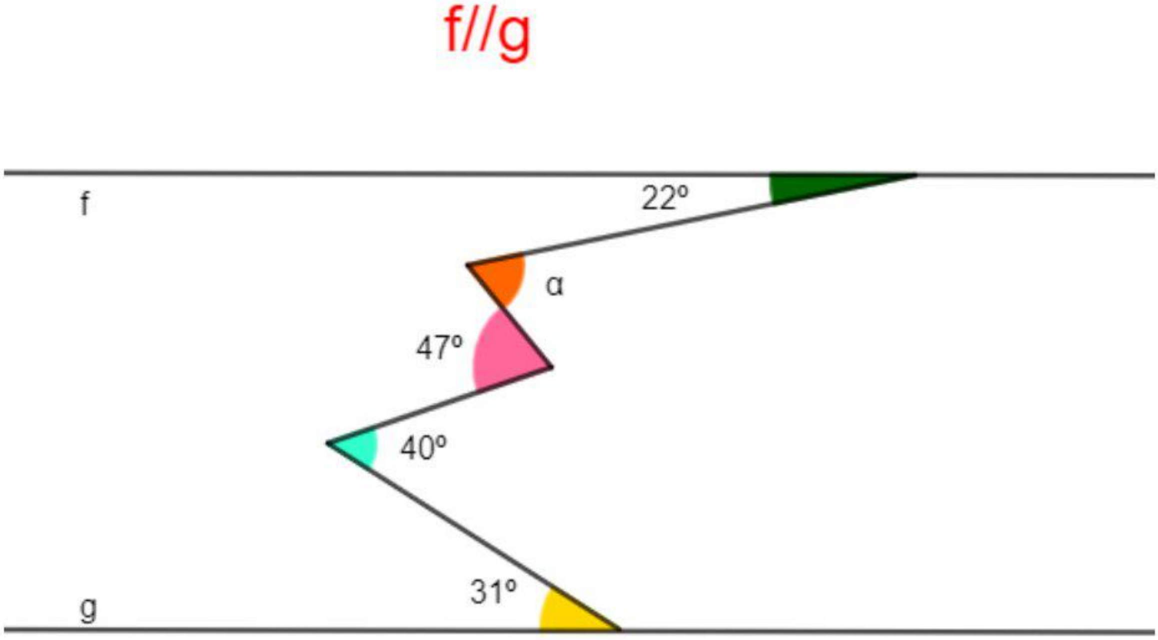
d) 8

e) 9

7. Determine o ângulo γ, sabendo que WXYZ é um retângulo.



8. Utilizando o Teorema dos bicos, determine a amplitude do ângulo indicado por α:



APÊNDICE E - Lista de verificação de nível -Final (versão para o professor)

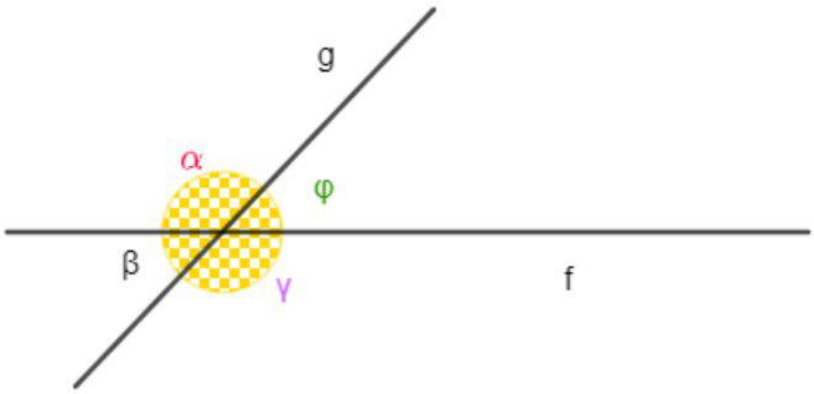
Muito bem meu querido professor! Última etapa do nosso processo juntamente com os alunos.
Nessa atividade o procedimento é similar ao da primeira: o aluno deverá responder todos os exercícios individualmente. E você só poderá auxiliar em caso técnicos (erro de impressão e similares).
É muito importante que o aluno passe por essa etapa sozinho pois é através dela que você poderá avaliar se o progresso para um nível superior foi atingido.
Lembrando que a TEORIA DE VAN HIELE é SEQUENCIAL, então garanta que ele tenha dominado todas as fases do nível que este estava no início, depois da aplicação da ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - Inicial.

ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 2

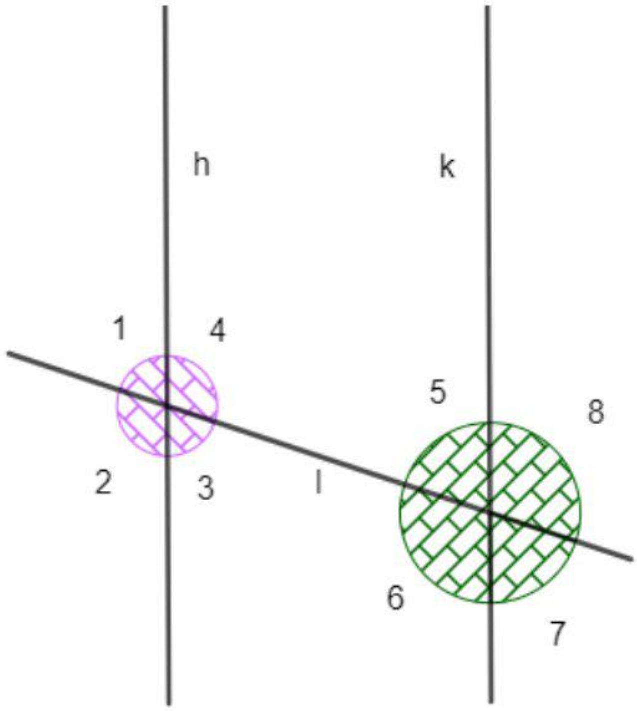
1. Determine os ângulos suplementares entre si:

O aluno que somente acertar essa atividade está no nível 2, o de Análise. O aluno reconhece propriedades e elementos das figuras e é capaz de resolver problemas que necessitem desse nível de compreensão.

a.

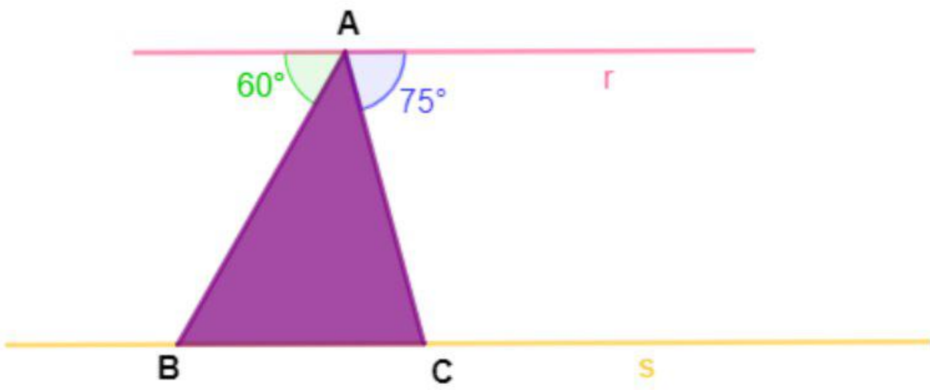


b. k e h são paralelas



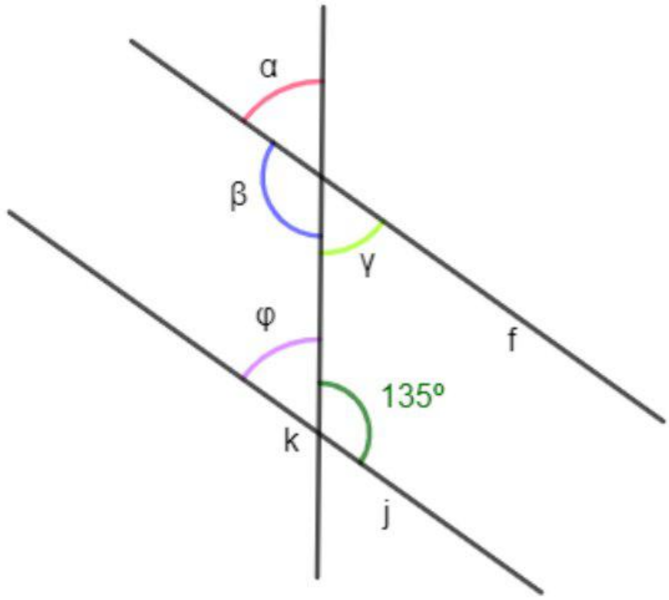
2. Sabendo que as retas r e s são paralelas entre si, determine os ângulos internos do triângulo ABC a seguir:

O aluno que somente acertar até essa atividade está no nível 3, o nível de Dedução Informal. Através de definições precisas, o aluno entende que uma propriedade pode decorrer de outra, possui uma ordenação lógica e informal das classes de figuras geométricas.



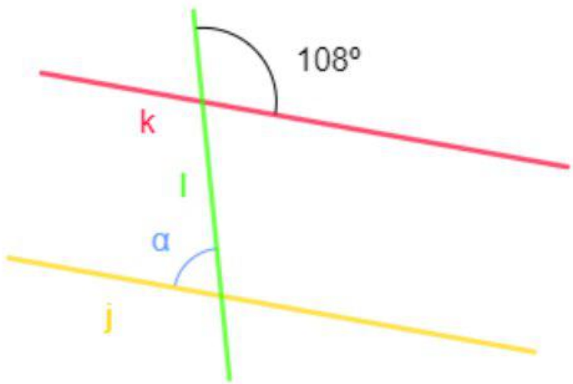
3. Determine os ângulos indicados por letras gregas, sendo f e j paralelas:

O aluno que somente acertar até essa atividade está no nível 3, o nível de Dedução Informal. Através de definições precisas, o aluno entende que uma propriedade pode decorrer de outra, possui uma ordenação lógica e informal das classes de figuras geométricas.



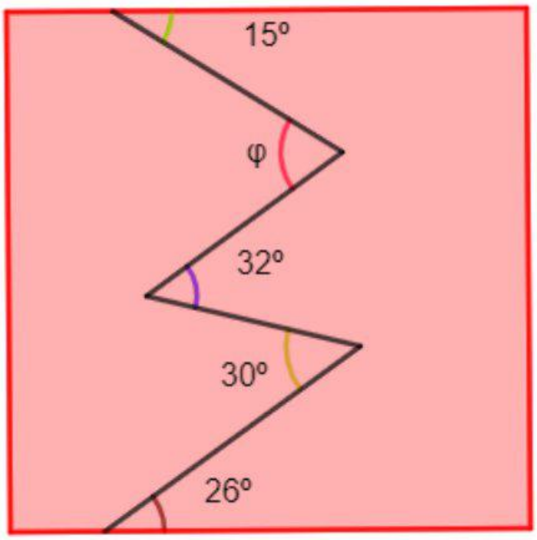
4. Prove que o ângulo***α*** é agudo se as retas k e j são paralelas:

O aluno que somente acertar essa atividade está no nível 4, Dedução Formal. Este aluno é capaz de seguir um processo dedutivo e de demonstrações.



5. Sabendo que o polígono abaixo é um quadrado, determine o ângulo φ:

O aluno que somente acertar essa atividade está no nível 4, Dedução Formal. Este aluno é capaz de seguir um processo dedutivo e de demonstrações.



Muito bem! Chegamos ao final desta jornada. Espero ter contribuido de alguma forma na sua prática docente e ter trazido uma nova forma de trabalhar a experimentação em sala de aula. Gostaria muito que me informasse se essa apostila te ajudou e me coloco a disposição caso queira tirar dúvidas ou discutir o tema aqui abordado. um forte abraço.

E-mail: vanhielera@gmail.com

APÊNDICE F – Lista de verificação de nível - Inicial (versão para o aluno)

Apostila para o aluno

Olá estimado aluno!

Esta apostila foi formulada pensada como um material de apoio para a aula sobre ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL.

Todo o material segue o modelo de desenvolvimento do conhecimento proposto pelo casal Diana van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele.

O objetivo desta apostila é contribuir para o desenvolvimento do seu pensamento geométrico. Ao final o professor irá verificar o nível de maturidade que você atingiu e se esta apostila realmente o auxiliou de alguma forma.

1. Disposição das atividades:

1.1 Encontro 1

- Aplicação da atividade de verificação de nível - 1

1.2 Encontro 2

- Atividade de construção de retas e comparação de ângulos
- Definição informal sobre as relações entre os ângulos encontrados na atividade anterior
- Exposição do conteúdo ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

1.3 Encontro 3

- Aplicação da atividade de fixação

1.4 Encontro 4

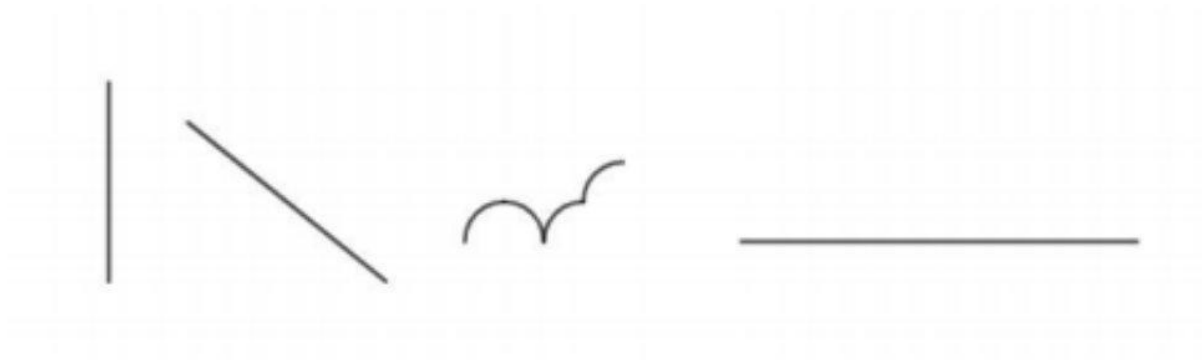
- Aplicação da atividade de verificação de nível - 2

APÊNDICE G - Lista de verificação de nível - 1 (versão para o aluno)

ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 1

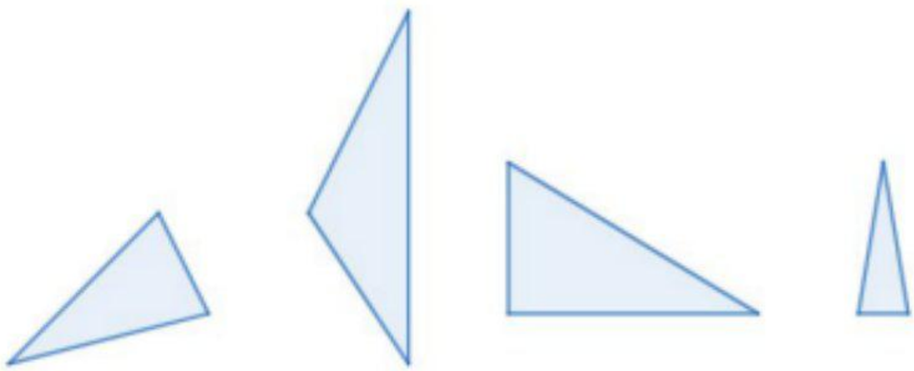
1. Analise as figuras abaixo. Elas pertencem à mesma família de figuras geométricas? Se sim, qual é essa família? Se não, circule a figura que não pertence. Justifique a sua resposta

a)



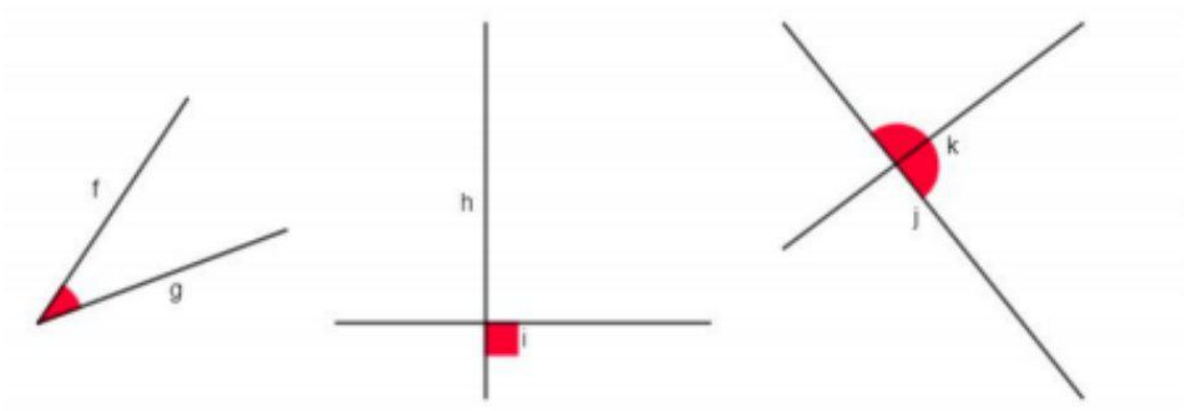
____

b)



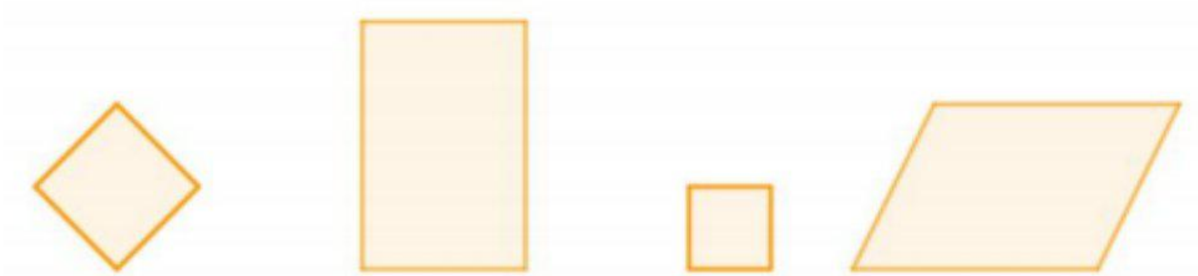
____

c)



____

d)

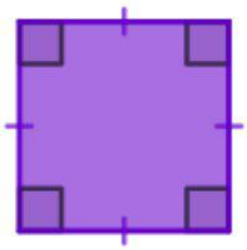


____

2. Escreva 3 propriedades de cada uma das figuras:

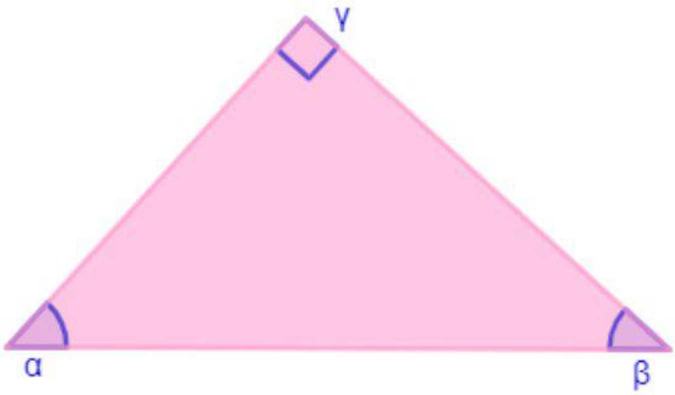
a) 

b) 

c) 

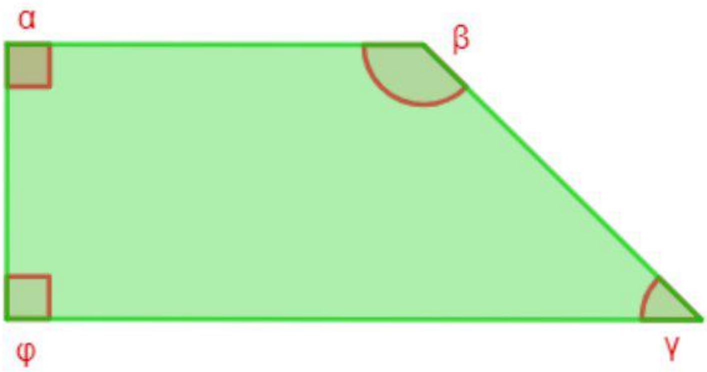
3. Dadas as figuras a seguir, o que você consegue descrever sobre os elementos destacados?

   a)



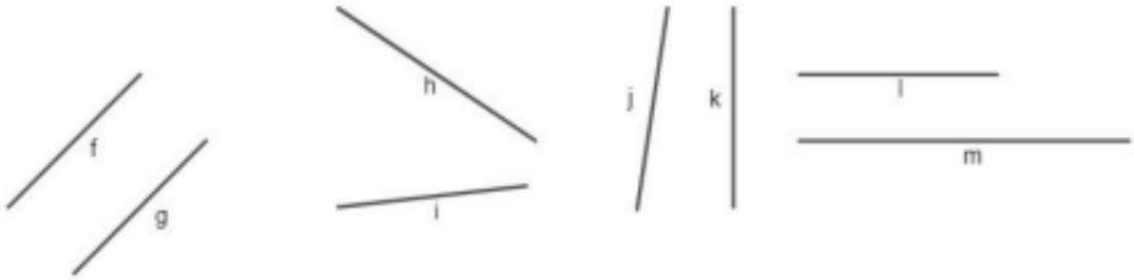
____
____
____

   b)



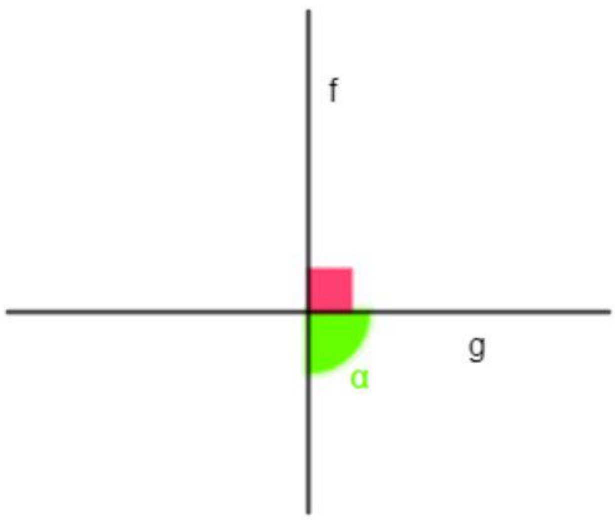
____
____
____

4. Circule os pares de retas paralelas:



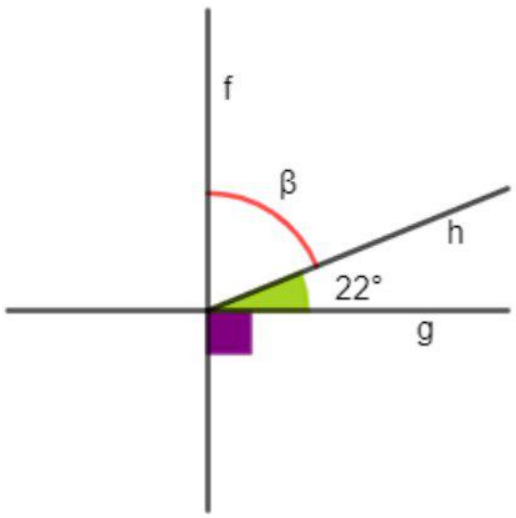
5. Indique o valor em graus dos ângulos denotados por letras gregas nas figuras a seguir.

a)



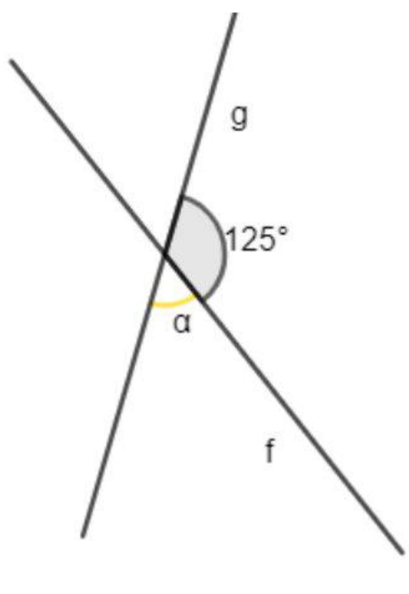
____

b)



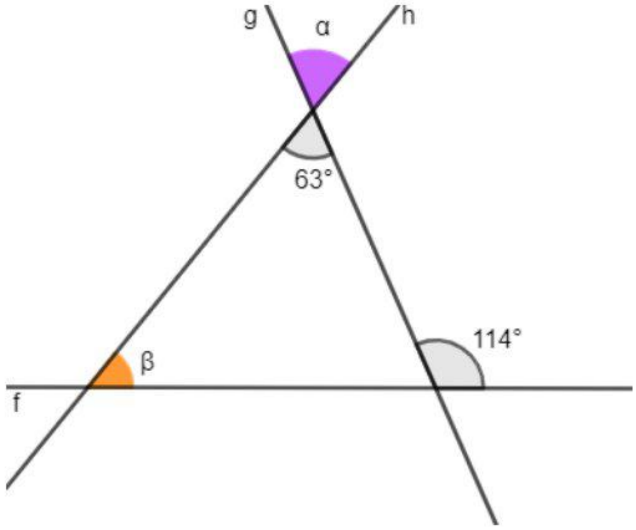
____

c)



____

6. A partir dos conhecimentos que você possui sobre ângulos suplementares e soma de ângulos internos de um triângulo, indique os valores que estão assinalados pelas letras gregas α e β.



APÊNDICE H - Apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO (versão para o aluno)

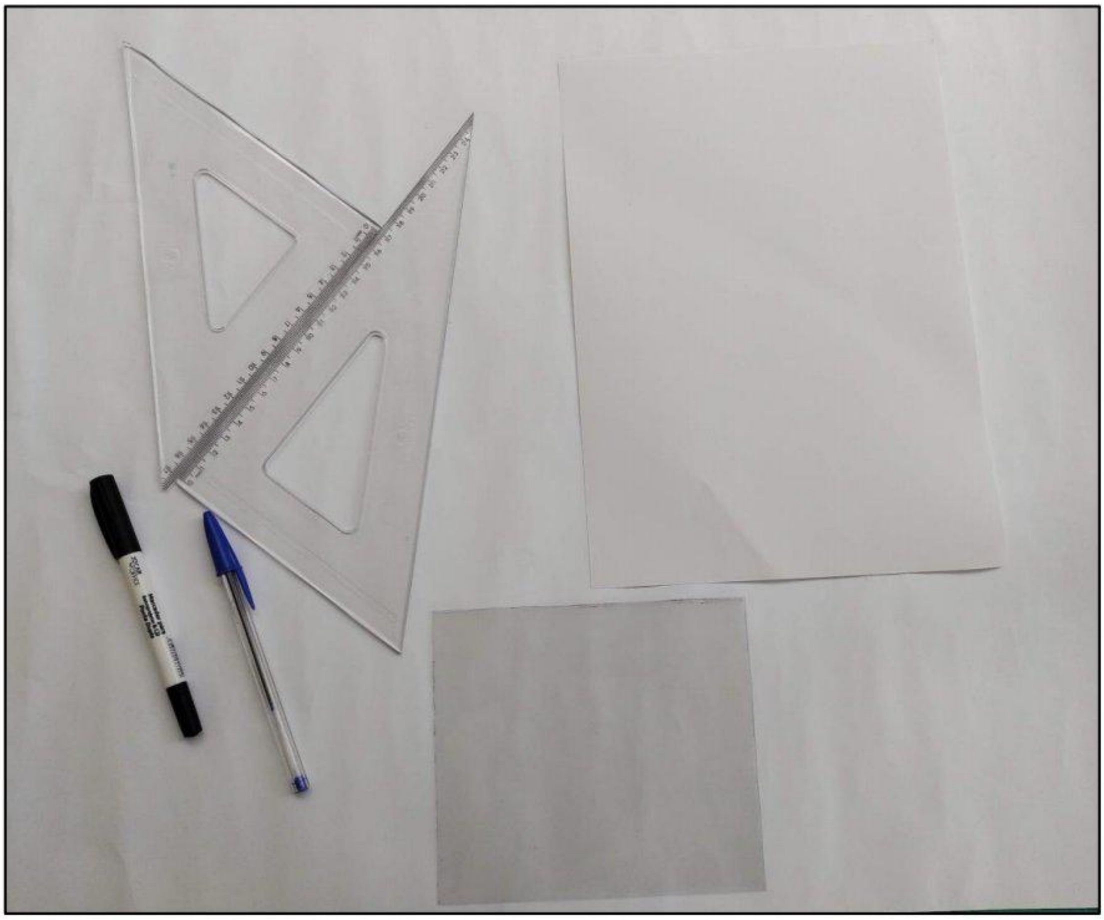
Apostila de EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

Na atividade a seguir é apresentado um detalhamento para a construção de retas paralelas cortadas por uma transversal. Sinta-se à vontade para tirar suas dúvidas durante esse processo.

Materiais a serem utilizados:

- Folha branca
- Caneta
- Marcador permanente para CD
- Par de esquadros
- ¼ da folha de acetato

Figura 1



A construção se dará da seguinte forma:

1º passo: Desenhe uma reta qualquer com auxílio de um esquadro

2º passo: Apoie o esquadro de 30º,60º,90º (maior) de maneira que este esteja perpendicularmente posicionado com relação à reta que você já traçou.

3º passo: Apoie o esquadro de 45º,90º,45º (menor) com o ângulo de 90º alinhado ao do outro esquadro e logo abaixo da reta criada.

4º passo: Deslize o esquadro menor e construa 1 reta paralela à primeira. Observação: utilize o espaçamento que você desejar.

5º passo: Trace uma reta inclinada que corte todas as outras já desenhadas.

Comparação dos ângulos na própria construção:

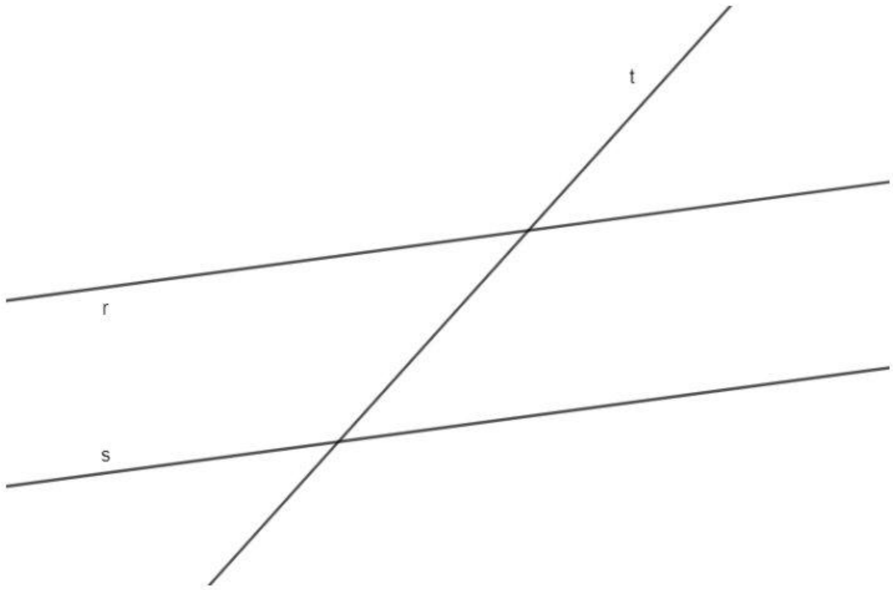
1º passo: Utilizando a transparência e o marcador de CD, marque o ângulo inferior interno à primeira reta.
2º passo: Agora, deslize a transparência entre as retas e verifique quais ângulos têm a mesma amplitude.

Comparação com os outros alunos:

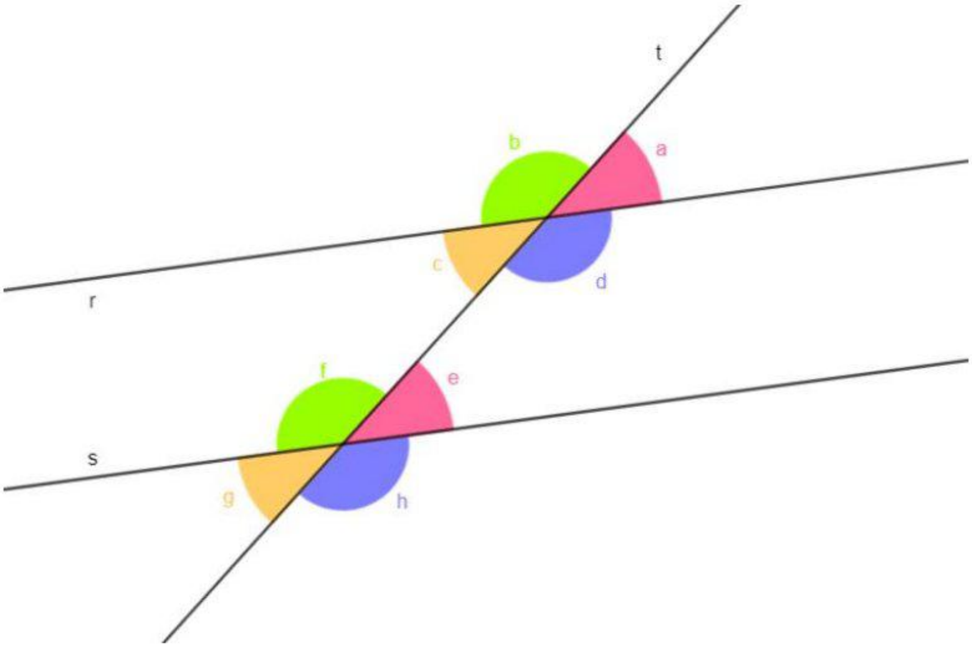
Agora você poderá comparar os resultados que obteve com os seus colegas. Existe alguma semelhança? Que conclusões você chega com essas comparações?

Exposição do conteúdo ÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Considere duas retas *r* e *s* paralelas entre si cortadas por uma transversal t. Segue um exemplo:



Nessa figura existem ângulos nos quais é possível perceber algumas propriedades. Na figura a seguir delimitaremos os ângulos correspondentes, para então, determinar as propriedades presentes neles.

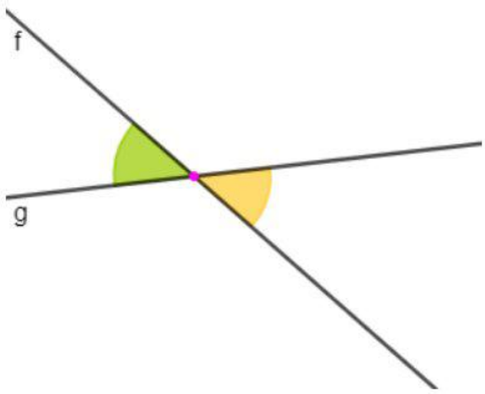


Nessa figura os ângulos indicados pela mesma cor são ângulos correspondentes e ângulos correspondentes determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes, ou seja, possuem a mesma amplitude.

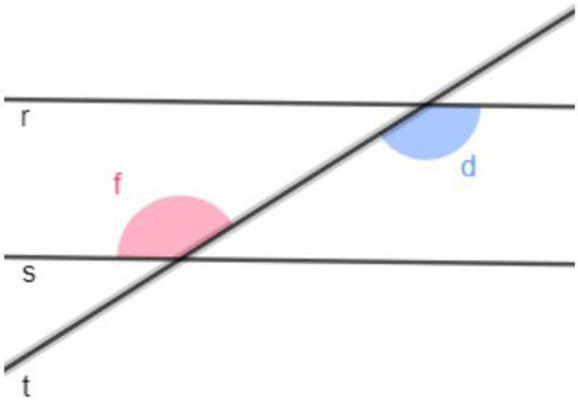
Observe que se duas retas *r* e *s* são cortadas por uma transversal e determinam ângulos com as mesmas características da figura anterior, então as retas *r* e *s* são paralelas entre si.

Relembrando…

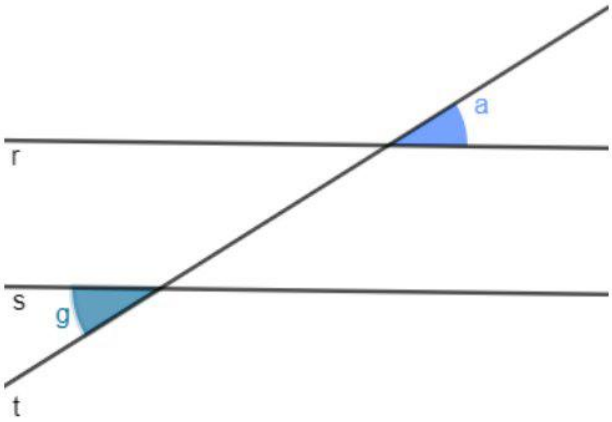
Dois ângulos formados por retas concorrentes e denominados **opostos pelo vértice (o.p.v)** são congruentes.

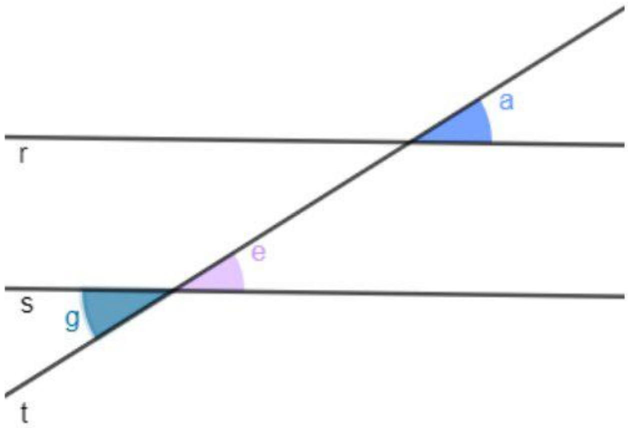


Também são ângulos alternos internos:



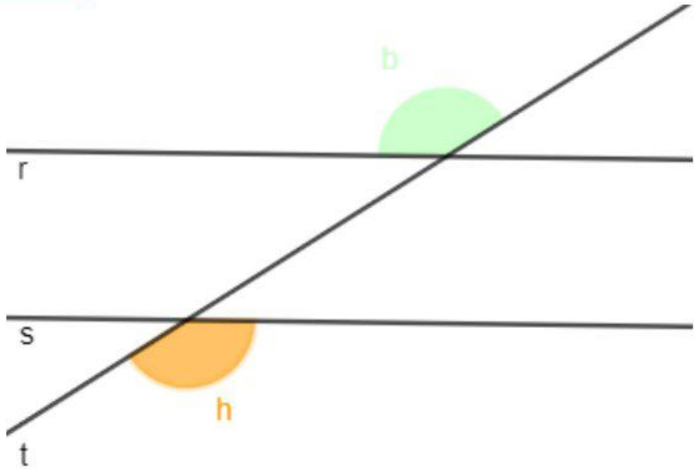
P2: Ângulos alternos externos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes.





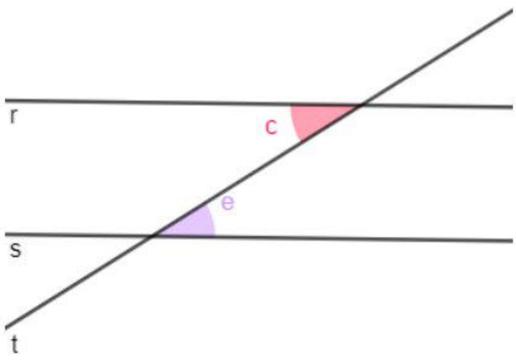
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **a** e **e** são correspondentes, logo congruentes. Como **g** é o.p.v de **e** e estes são congruentes, consequentemente **g** = **a**.

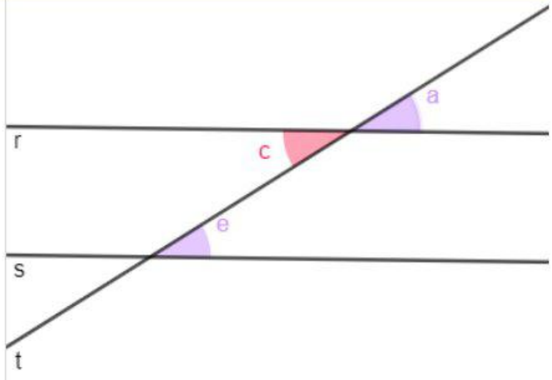
Também são ângulos alternos externos:



Das propriedades expostas anteriormente (propriedades de congruência de ângulos) é possível chegar a outras propriedades. Sejam elas:

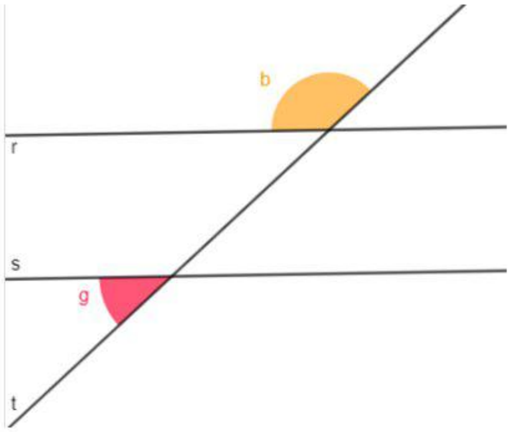
P1: Ângulos alternos internos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes.

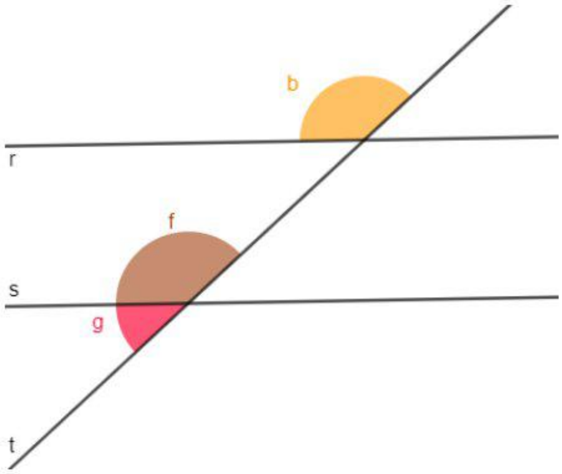




Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **a** e **e** são correspondentes, logo congruentes. Como **c** é o.p.v de **a** e estes são congruentes, consequentemente **c** = **e**.

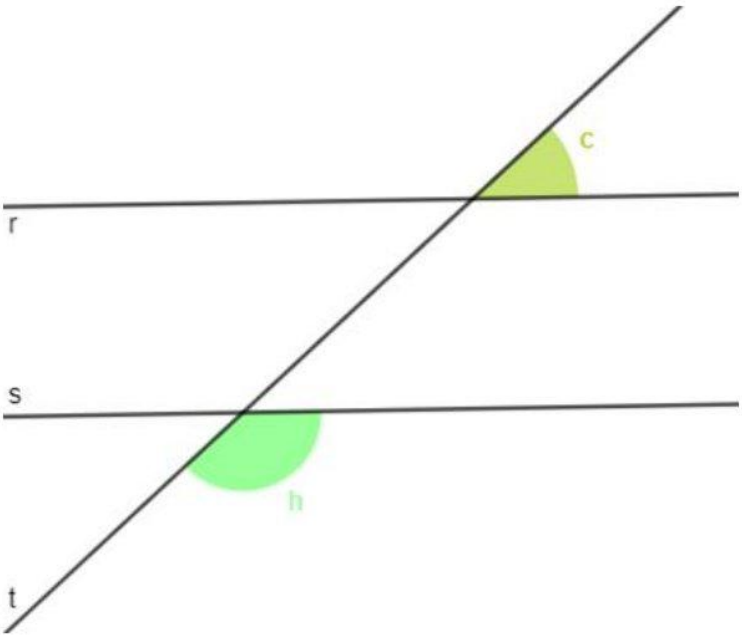
P3: Ângulos colaterais externos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são suplementares.



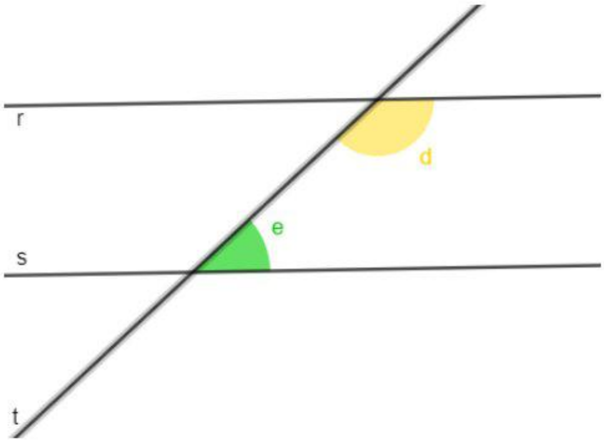


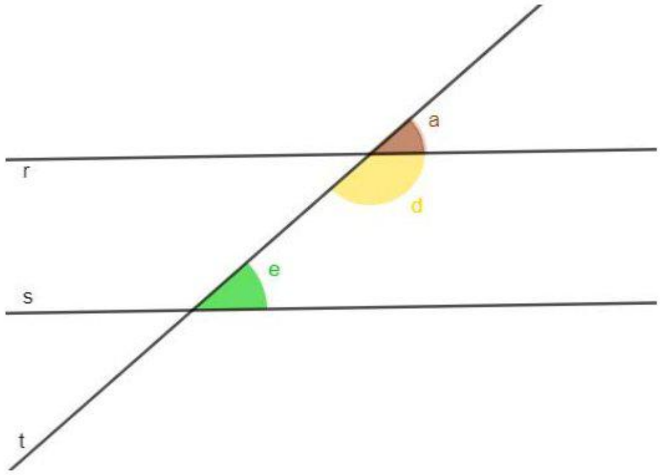
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **f** e **b** são correspondentes, logo congruentes. Como **g** pertence a mesma reta (*t*) que **f**, logo **g** + **f** = 180º, consequentemente **g e b são suplementares**.

Também são ângulos colaterais externos:



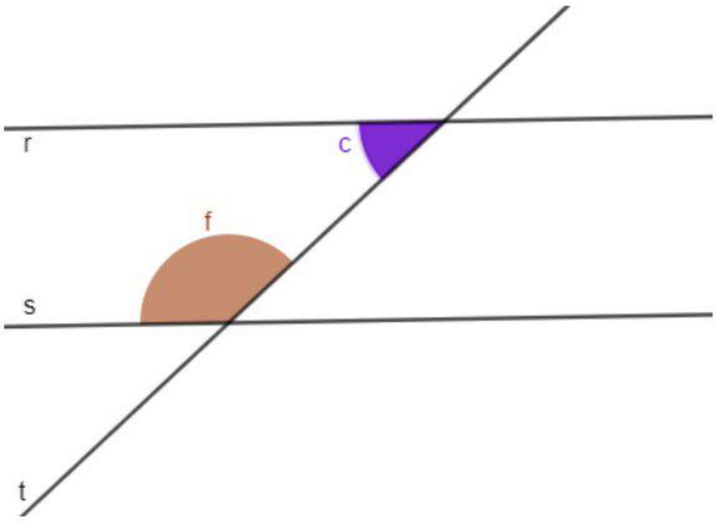
P4: Ângulos colaterais internos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal são suplementares.





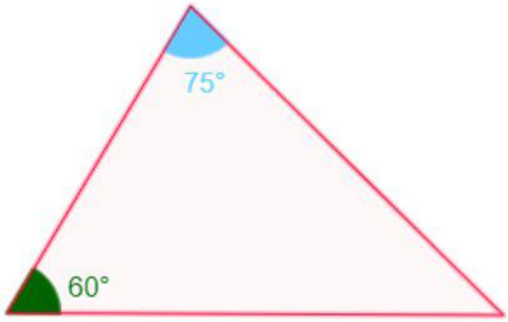
Podemos verificar que tais ângulos são congruentes pois **e** e **a** são correspondentes, logo congruentes. Como **d** pertence a mesma reta (*t*) que **a**, logo **a** + **d** = 180º, consequentemente **d e e são suplementares**.

Também são ângulos colaterais internos:

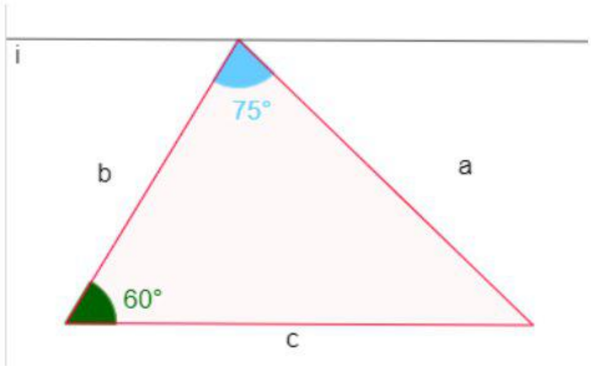


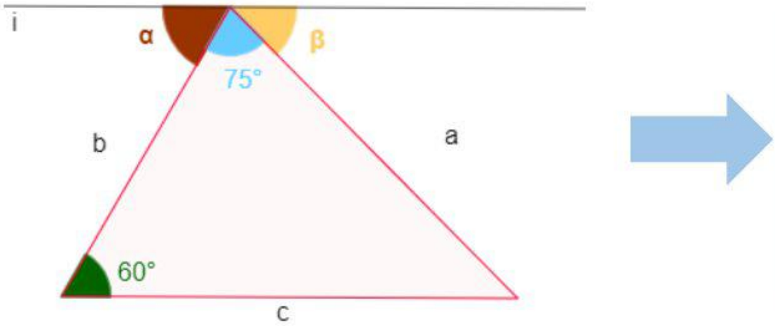
Demonstração da soma interna dos ângulos de um triângulo:

Dado o triângulo a seguir:



Ao traçar a reta i, paralela ao lado c, oposto ao ângulo 75°, observa-se duas retas paralelas cortadas por duas transversais.





Pode-se destacar os ângulos α e β formados pela reta i e as transversais a e b.
O ângulo α é alterno interno ao ângulo de 60°, portanto $\alpha = 60°$. (1)

Como α, 75° e β estão sob a mesma reta, $\alpha + 75° + \beta = 180°$
Sendo $\alpha = 60°$, tem-se: $60° + 75° + \beta = 180°$. Logo $135° + \beta = 180°$. (2)
De (2), tem-se: $\beta = 180° - 135°$, logo $\beta = 45°$

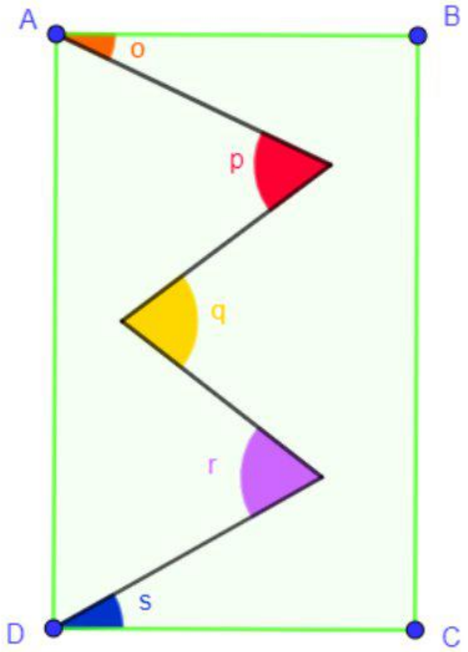
Analogamente a (1) o ângulo β é alterno interno ao ângulo desconhecido no triângulo, portanto este ângulo é igual a β,ou seja, mede 45°.

Dessa forma é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre será 180º

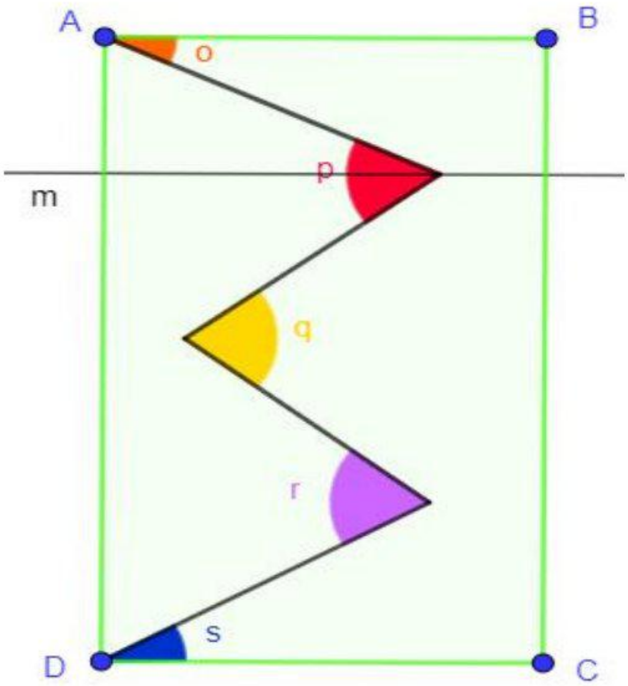
Teorema dos bicos:

Este nome é uma designação informal, porém nenhuma outra nomenclatura é utilizada.

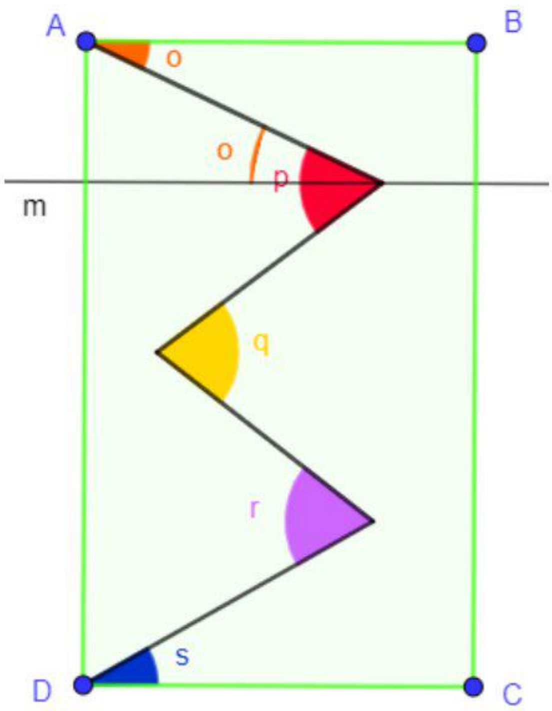
Dado o retângulo ABCD a seguir:



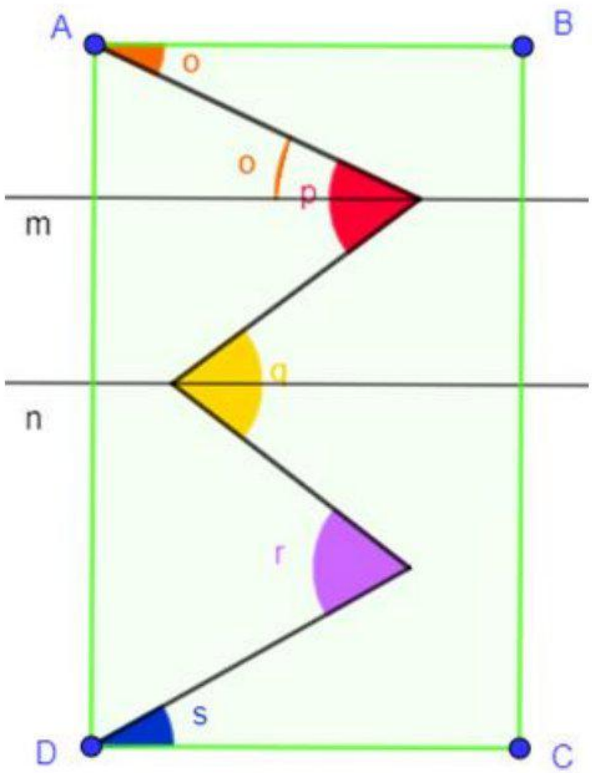
Tracemos uma paralela m ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice do ângulo *p*:



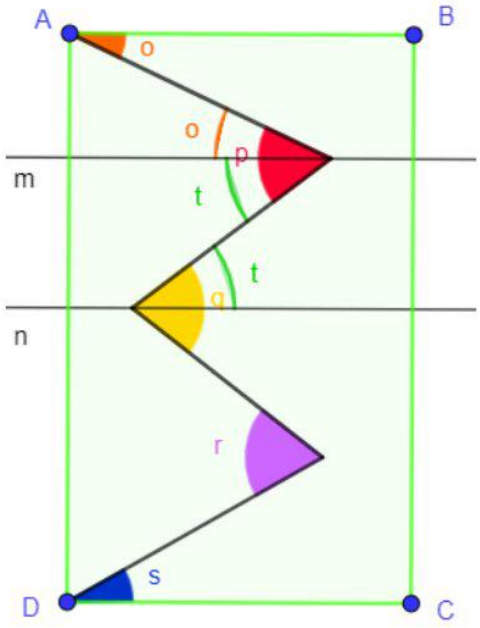
Podemos concluir que a parte superior do ângulo *p* tem a mesma amplitude que o ângulo *o* pois estes são alternos internos.



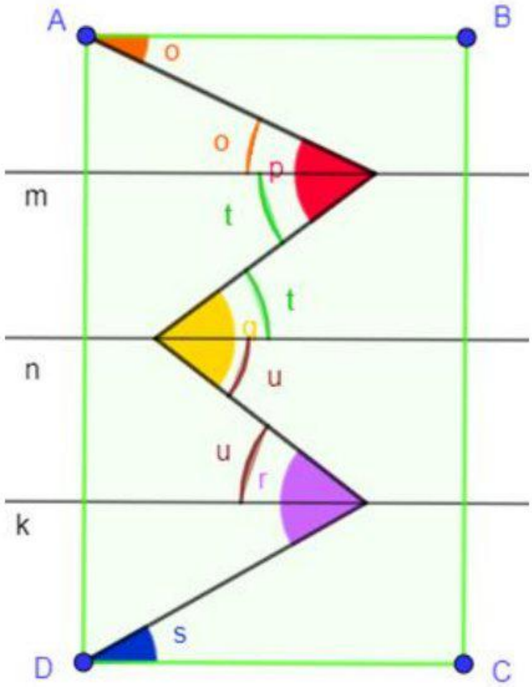
Agora tracemos uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice do ângulo *q*:



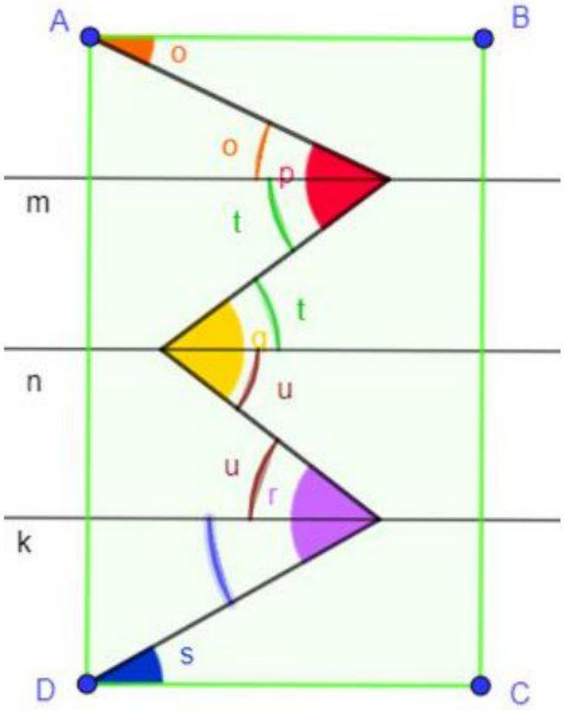
Observamos que a parte inferior do ângulo *p* é alterno interno a parte superior do ângulo q, logo terão a mesma amplitude t.



Analogamente à proposição anterior, temos a parte inferior do ângulo *q* alterna interna a parte superior do ângulo *r*, logo terão a mesma amplitude u.

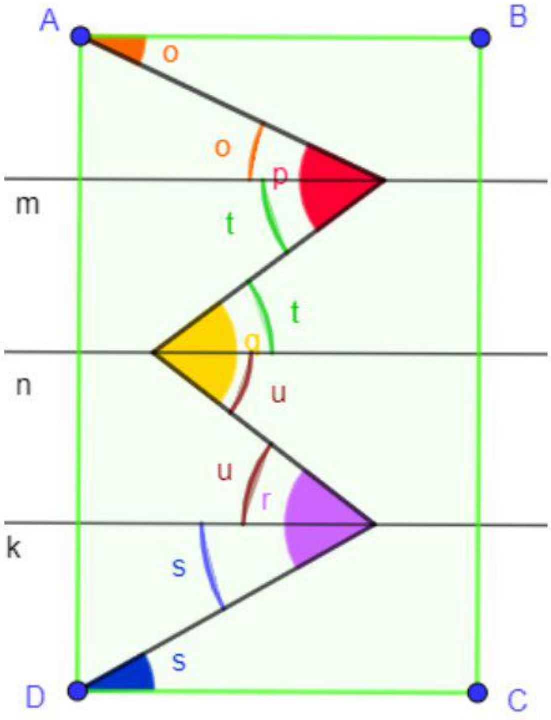


Agora observe a parte inferior do ângulo *r* e o ângulo *s*:



Também são alternos internos, certo?

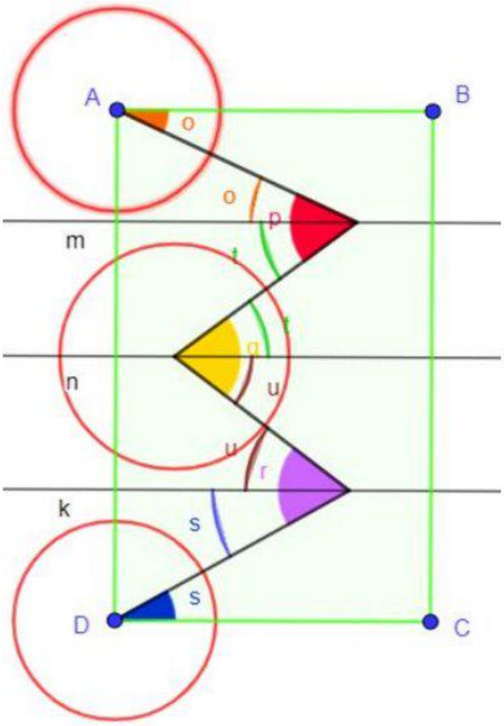
Logo também tem a amplitude s



\

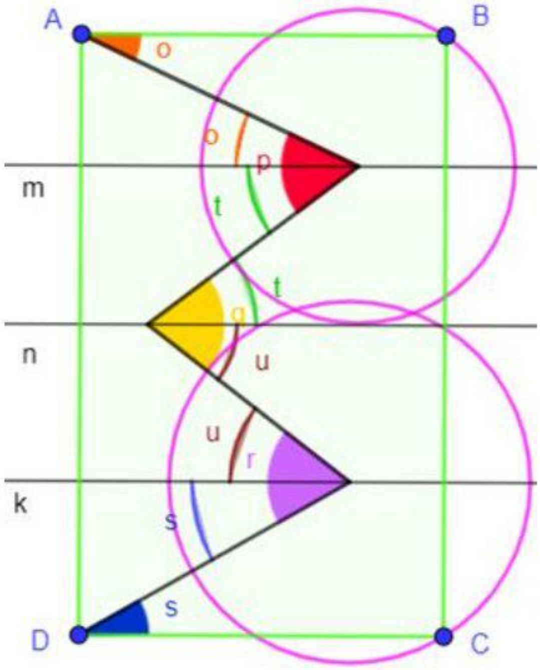
Nesse momento partiremos para outras observações.

Preste atenção em todos os ângulos que apontam para esquerda:



Fazendo a soma de todos eles teremos:
o + t +u +s

Observando agora os ângulos que apontam para direita...



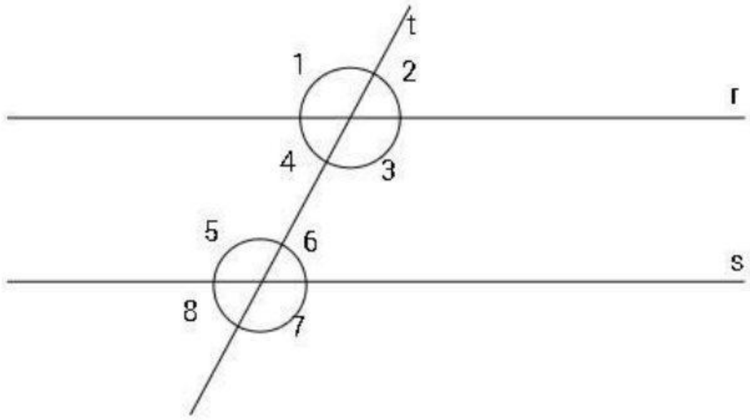
Fazendo também a soma de todos eles teremos:
o + t +u +s

Dessa maneira é possível provar que, quando entre duas retas paralelas existir uma poligonal, a soma dos ângulos que apontam para um lado é igual a soma dos ângulos que apontam para o lado oposto.

APÊNDICE I - Lista de Fixação do conteúdo (versão para o aluno)

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO DE CONTEÚDO

1. A partir dos conhecimentos elaborados na aula, quais os nomes e as relações entre os ângulos listados abaixo na figura?



e) 1 e 3 ____

f) 3 e 6 ____

g) 4 e 6 ____

h) 2 e 8 ____

2. Das alternativas abaixo que fazem afirmações a respeito de ângulos formados por uma reta transversal a um feixe de retas paralelas, assinale aquela que for correta.

a) Ângulos alternos internos são complementares.

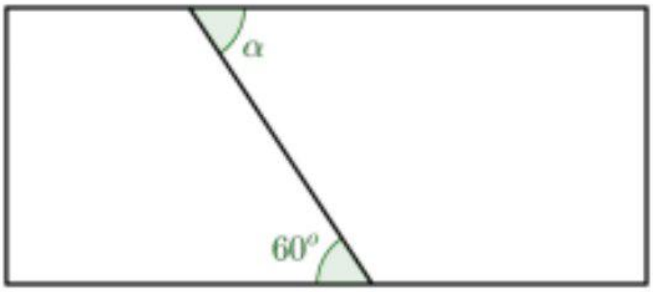
b) Ângulos alternos internos são suplementares.

c) Ângulos correspondentes são suplementares.

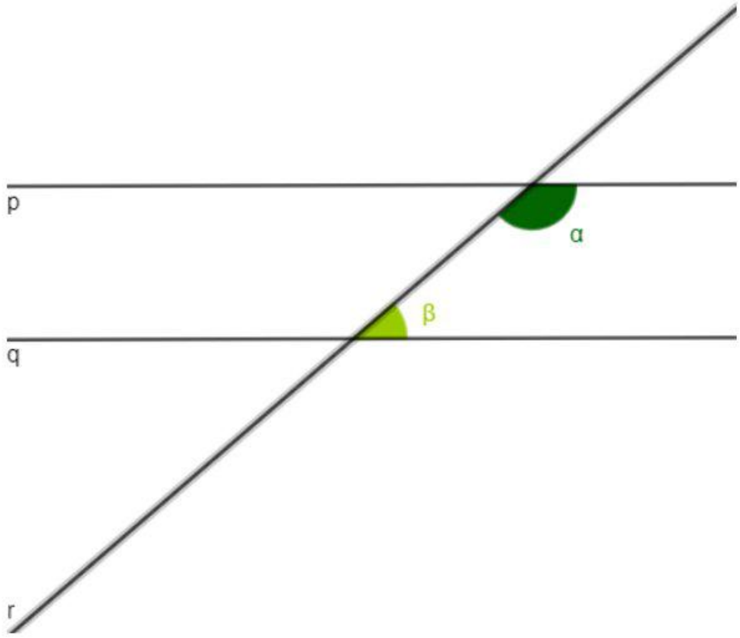
d) Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

e) Ângulos opostos pelo vértice são suplementares

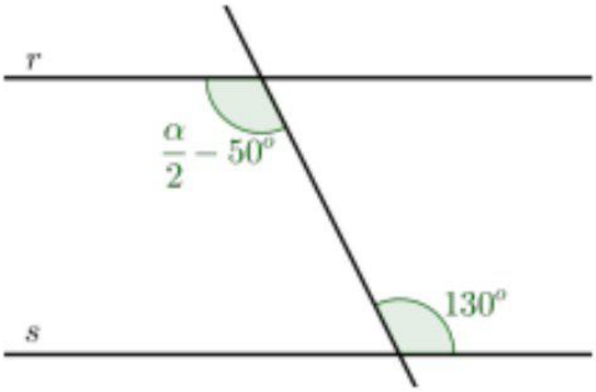
3. A figura abaixo mostra a representação da vista de uma piscina de um clube. As laterais opostas desta piscina são segmentos paralelos entre si. O segmento transversal foi traçado a fim de determinar o posicionamento de dois guarda-sol. Conhecendo o ângulo que faz a sombra do guarda-sol 1, determine o ângulo α que definirá o posicionamento do guarda-sol 2.



4. Na figura a seguir, p e q são retas paralelas entre si e a amplitude do ângulo α é o triplo do ângulo β. Determine a medida em graus dos ângulos α e β.



5. Sendo r e s retas paralelas, determine o valor de α na figura abaixo.



6. Duas retas cruzam-se no ponto V, formando os ângulos opostos pelo vértice de 10x + 20 e 5x + 50. Qual é o valor de x?

a) 5

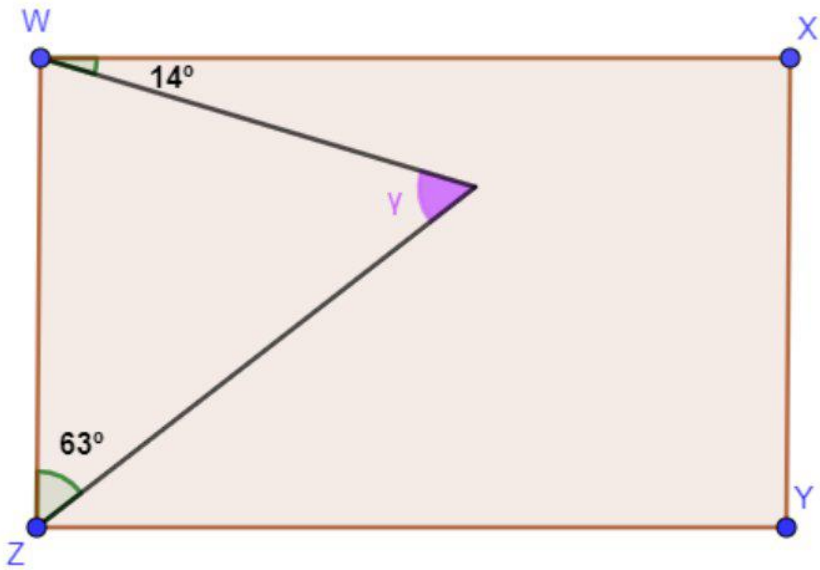
b) 6

c) 7

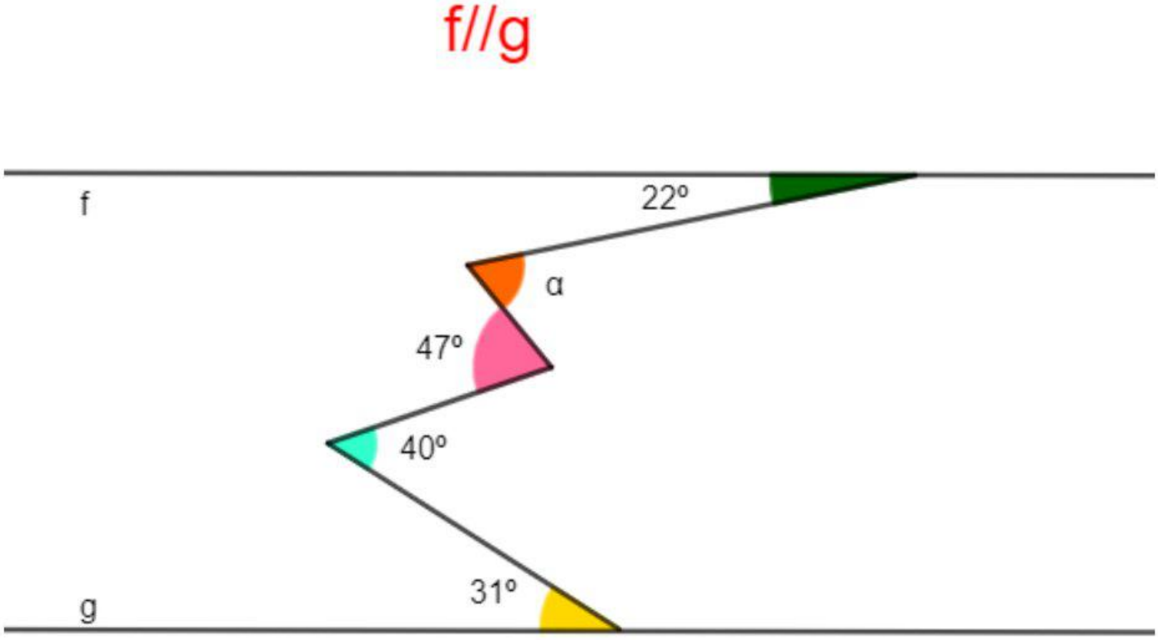
d) 8

e) 9

7. Determine o ângulo γ, sabendo que WXYZ é um retângulo.



8. Utilizando o Teorema dos bicos, determine a amplitude do ângulo indicado por α:

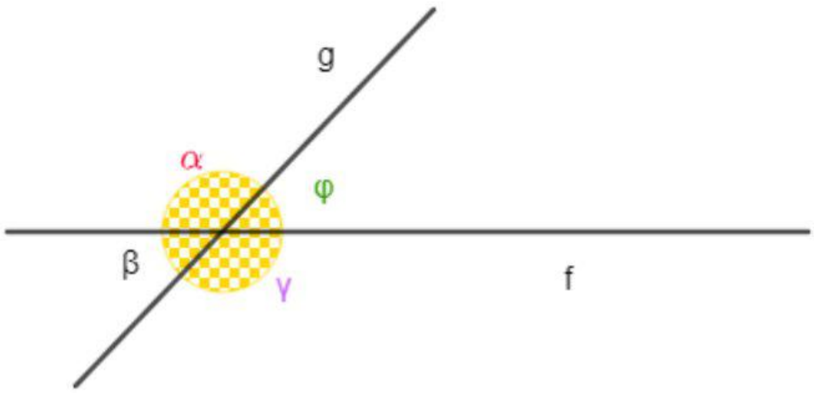


APÊNDICE J - Lista de verificação de nível - Final (versão para o aluno)

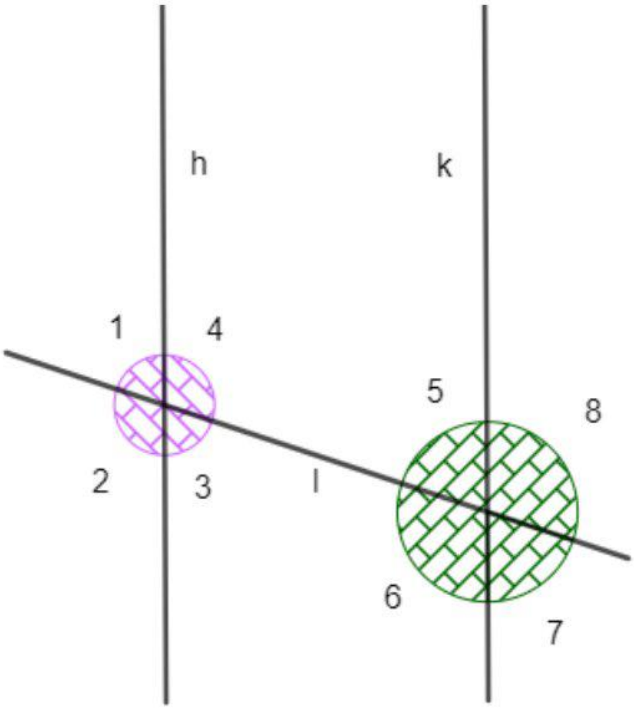
ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DE NÍVEL - 2

1. Determine os ângulos suplementares entre si

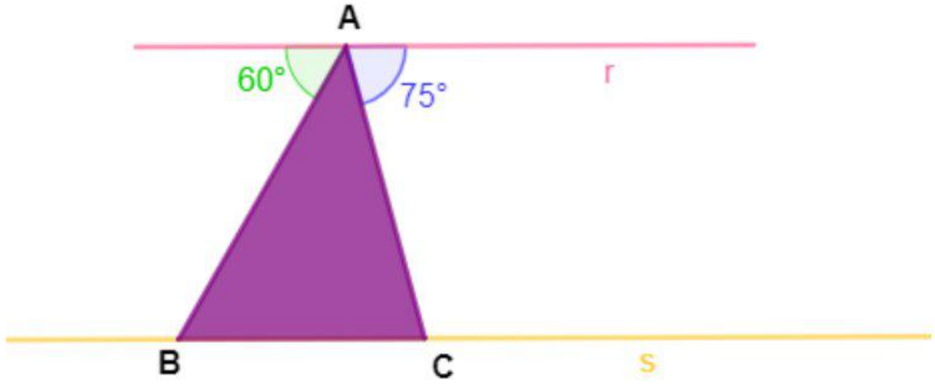
c.



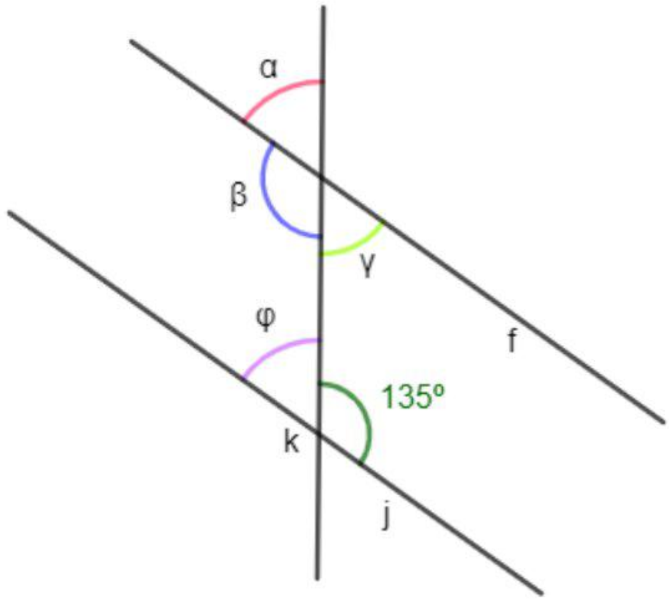
d. k e h são paralelas



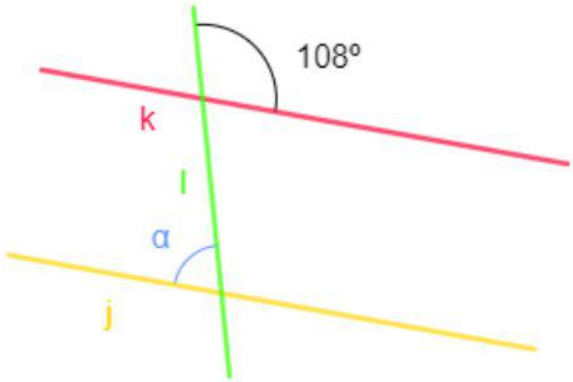
2. Sabendo que as retas r e s são paralelas entre si, determine os ângulos internos do triângulo ABC a seguir:



3. Determine os ângulos indicados por letras gregas, sendo f e j paralelas:



4. Prove que o ângulo ω é agudo se as retas k e j são paralelas:



5. Sabendo que o polígono abaixo é um quadrado, determine o ângulo φ: