MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**

**CAMPUS CAMPOS CENTRO**

**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**GIULLIA GOMES FAES**

# ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA:
## Um estudo sobre as equações da reta

**Campos dos Goytacazes/ RJ**

**2021.1**

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**

**CAMPUS CAMPOS CENTRO**

**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

GIULLIA GOMES FAES

# ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA:

## Um estudo sobre as equações da reta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza
Coorientadora: Me. Paula Eveline da Silva dos Santos

Campos dos Goytacazes/RJ

2021.1

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

F149r

Faes, Giullia Gomes
ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA: Um estudo sobre as equações da reta / Giullia Gomes Faes - 2021.
224 f.: il. color.

Orientador: Pâmella de Alvarenga Souza
Coorientador: Paula Eveline da Silva dos Santos

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.
Referências: f. 125 a 128.

1. Ensino Híbrido. 2. Rotação por Estações. 3. Geometria Analítica. 4. Equações da reta. 5. Registros de Representação Semiótica. I. Souza, Pâmella de Alvarenga, orient. II. Santos, Paula Eveline da Silva dos, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GIULLIA GOMES FAES

ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA:

Um estudo sobre as equações da reta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 19 de novembro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof ª. Carla Antunes Fontes (Examinadora)
Me. em Matemática Aplicada / UFRJ / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Profª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto (Examinadora)
Dr. em Informática na Educação / UFRGS / RS
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Me. Pâmella de Alvarenga Souza (Orientadora)
Me. em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Me. Paula Eveline da Silva dos Santos (Coorientadora)
Me. em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a primeiramente a Deus, por todas as graças derramadas sobre a minha vida nesses últimos anos, por me guiar pelos caminhos que tomei para chegar aonde estou hoje, por todas as oportunidades concedidas e pela sabedoria que Ele me concedeu para aproveita-las bem.

Agradeço também aos meus familiares, em especial a minha mãe, que fez de tudo por mim e me deu todo o suporte que eu precisei durante toda a minha vida escolar e durante a graduação para que eu me dedicasse ao máximo para me tornar a melhor profissional que eu posso ser!

Agradeço também as minhas orientadoras, Pâmella e Paula, por toda a paciência, carinho, apoio e sugestões concedidas nesse caminho, por estarem sempre ao meu lado, tirando todas as minhas dúvidas, me dando força e me auxiliando no processo de escrita desse trabalho.

Agradeço também ao meu namorado, aos meus amigos, e em especial aos remanescentes da turma de 2017.1. Todos vocês estiveram comigo de forma muito intensa durante a graduação, me incentivaram, me ajudaram e me deram muito apoio para vencer mais essa etapa.

Agradeço também a todos os professores que de alguma forma contribuíram para essa pesquisa e para a minha formação, em especial as professoras Carla e Gilmara por aceitarem o convite para a compor a banca da defesa, por todas as considerações e aprendizado.

A todos vocês, o meu carinho e a minha gratidão. Muito obrigada por tudo!

O principal objetivo da educação é criar pessoas capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que outras gerações fizeram.

(Jean Piaget)

**RESUMO**

A partir da percepção de que o estudo de Geometria Analítica em muitas escolas tem sido realizado de forma mecanizada, dando ênfase apenas à aplicação de fórmulas e distante do raciocínio e visualização geométrica, determinou-se como o objetivo geral desta pesquisa: identificar a contribuição de uma proposta didática, por meio da Rotação por Estações, na compreensão das diferentes representações das equações da reta. Dessa forma, o presente trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, que utiliza o modelo do Ensino Híbrido chamado de Rotação por Estações e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas como suporte para o ensino das equações da reta, por meio da Geometria Analítica. A partir do referencial teórico apresentado, da leitura dos documentos oficiais brasileiros e da análise dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD, elaborou-se uma proposta didática organizada em: atividade inicial, rotação entre quatro estações e atividade final. Para análise e experimentação das atividades elaboradas, foram convidados cinco professores da Educação Básica para avaliar e propor sugestões. Após as análises feitas, percebeu-se que o modelo híbrido de Rotação por Estações juntamente com a teoria dos Registros de Representação Semiótica pode ser uma boa alternativa para o ensino das equações da reta pela Geometria Analítica, por propor uma abordagem dos conceitos de forma integrada entre as formas da equação, desenvolvimento a conversão entre os registros e se apoiando em um ensino por meio das tecnologias.

Palavras-chave: Ensino Híbrido. Rotação por Estações. Geometria Analítica. Equações da reta. Registros de Representação Semiótica.

**ABSTRACT**

From the perception that the study of analytical geometry in many high schools has been accomplished in a mecanical way, emphasizing only the formula application and far from the logic and the geometry visualization, it was determined as the general objetive of this research: to verify the contribuition of the Station Rotation on the understanding of the different representations of the equations of lines. In this way, the present work is caracterized as a qualitative research that uses the model of Blended Learning called Station Rotation and the Theory of Semiotic Representation Records as the support for the teaching of the equations of lines, through the analytical geometry. From the theoretical reference introduced, the reading of Brazilian oficial documents and from the analisys of the didatic books aproved by the National Book and Courseware Program – PNLD, it was created a didatic proposal organized in: warm-up activity, rotation among four stations and final activity. For the analisys and experimentation of these activities, five teachers from basic education were invited to evaluate and propose suggestions. After the analisys, it was realised that the blended model of Station Rotation along with the Theory of Semiotic Representation Records can be a good alternative for the teaching of the equations of lines from analytical geometry, because of an approach of the concepts in an integrated way between the shapes of the equations of lines, developing the convertion among the records and leaning and teaching with tecnologies.

Keywords: Blended Learning. Station Rotation. Analytical Geometry. Equations of Lines. Semiotic Representation Records.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE GRÁFICOS

## LISTA DE QUADROS

# LISTA DE TABELAS

**SUMÁRIO**

## INTRODUÇÃO

A geração de alunos que temos nas escolas atualmente diferencia-se muito da geração que tínhamos 30 anos atrás. De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), consequentemente, os objetivos educacionais atribuídos à escola também sofreram diversas mudanças, mas, apesar disso, a forma na qual a escola está organizada e como as aulas são conduzidas mantiveram-se as mesmas. Com a disseminação das tecnologias digitais e o aumento do acesso à internet, as informações estão cada vez mais acessíveis, assim, a escola não se caracteriza mais como a principal fonte de se alcançar determinadas informações pois os temos de maneira muito rápida e eficiente (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Dessa forma, um dos reflexos dessa resistência é visível na rotina tradicional no ensino da Matemática, afinal, esta disciplina é comumente vista pelos alunos como difícil, distante da sua realidade e até mesmo da sua capacidade de compreensão, gerando assim desânimo, baixo rendimento e falta de motivação neles para esforçar-se a compreender os conteúdos e responder os exercícios (SILVA, 2014).

Esses impasses no ensino da Matemática se mostram ainda mais consideráveis quando é analisada a forma que a Geometria Analítica tem sido abordada na sala de aula. De acordo com Domingos (2017), há uma necessidade de se refletir as escolhas a serem feitas para o ensino desse ramo da Matemática pois, esta tem sido desassociada de seus conceitos e tem enfatizado a aplicação de fórmulas. Essa realidade mecanizada reflete na situação em que os alunos até sabem trabalhar com as fórmulas, mas desconhecem os conceitos e os objetos matemáticos por trás destas (DOMINGOS, 2017).

Reiterando essa ideia, Silva (2014) afirma que a Geometria Analítica não tem sido estudada com a devida relevância e que é possível perceber dificuldades na compreensão de tópicos fundamentais desta área. A autora atribui parte dessas dificuldades ao caráter desafiador de que é ensinar e aprender essa união entre a Álgebra e a Geometria (SILVA, 2014).

De acordo com Lima (2005), a Geometria Analítica fundamenta-se na representação de linhas e superfícies, tanto no plano como no espaço, por meio de equações. Assim, é possível "[...] tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas." (LIMA, 2005, p. 3). Por essa união entre a Geometria e a Álgebra, a Geometria Analítica precisa ter o seu ensino proporcionado de forma integrada, que desenvolva a compreensão de que um mesmo objeto matemático pode ser estudado e representado de maneiras diferentes.

Essa utilização de diferentes representações para um mesmo ente matemático aponta para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2009, 2011, 2012, 2018). Essa teoria tem por objetivo contribuir no desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de algumas atividades cognitivas (formação, tratamento e conversão). E como a Matemática é uma área de conhecimento que se apropria inteiramente de representações, torna-se, então, indispensável que esse raciocínio cognitivo seja desenvolvido (DUVAL, 2009).

O estudo das equações da reta (equação geral, reduzida, fundamental, paramétrica e segmentária) por meio da Geometria Analítica é um conteúdo que possibilita, com facilidade, o trabalho com as diferentes representações, pois a formação de um registro é propiciada por esses diferentes formatos. Por meio de manipulações algébricas, em alguns casos bem simples, de acordo com o autor, é possível modificar (tratamento) a maneira que uma mesma reta é escrita. Em casos onde ocorre a mudança do registro algébrico para o registro gráfico, por exemplo, ocorre a atividade cognitiva de conversão. Duval (2011) aponta que, mesmo após estudar retas e suas equações, os alunos ainda não conseguem fazer conversões, mesmo em casos mais simples, justificando assim a importância de se fazer um estudo sobre este conteúdo.

Ao analisar os documentos oficiais brasileiros, é possível perceber que realmente há essa necessidade de a Geometria Analítica, em especial as equações da reta, serem estudadas com foco neste desenvolvimento das capacidades de raciocínio. É possível citar, como um exemplo, o texto das Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006, p. 70-71) que reconhecem que

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático [...]

Buscando atender a essa aprendizagem que valorize o raciocínio, a necessidade do aprimoramento das práticas escolares, abordadas anteriormente e a superação desse ensino mecanizado retratado por Domingos (2017), propõe-se utilizar o Ensino Híbrido como uma modalidade de ensino que tem como objetivo colocar o aluno numa posição ativa diante dos conteúdos e da sua própria aprendizagem (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Dentre tantas definições possíveis do Ensino Híbrido, segundo Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), todas convergem para um mesmo ponto: a união do ensino presencial e do ensino *on-line*, por meio das tecnologias digitais, de forma que o aluno consiga aproveitar o melhor desses dois mundos. Tirar o foco do ensino, do professor e trazer essa autonomia para que estes trabalhem no seu tempo promove uma compreensão muito mais efetiva dos conteúdos. Esta abordagem consiste em atividades feitas em diferentes situações, utilizando, necessariamente, das tecnologias digitais como meio de dinamizar a aprendizagem, superando os métodos tradicionais de quadro e giz (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

O Ensino Híbrido possui vários modelos, ou seja, várias formas de ser aplicado em sala de aula. De acordo com os autores, os seus modelos vão desde aqueles que rompem com as estruturas escolares que temos atualmente – esses são os chamados modelos disruptivos – até os modelos sustentados, que mantém a organização escolar, mas propõe uma nova cultura, um novo papel a ser desenvolvido tanto pelos professores, como pelos alunos. Esses modelos sustentados são os mais utilizados no país. Dentre estes, está o modelo de Rotação por Estações que visa o trabalho colaborativo e a diversificação das atividades propostas, sem alterar a estrutura curricular ou física da escola (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

A motivação inicial para este trabalho foram as aulas de Geometria Analítica que a pesquisadora teve durante a graduação, que a fez despertar um grande interesse por este conteúdo, especialmente por ter sido ensinado de maneira muito esclarecedora, proporcionando uma visualização clara das relações existentes entre a Álgebra e Geometria. Posteriormente, a percepção do ensino deste conteúdo na Educação Básica muitas vezes distante de um sentido lógico, apenas como uma bateria de fórmulas a serem decoradas, ideia que é reforçada por Domingos (2017) também serviu de motivação.

Diante do que foi exposto, elaborou-se a seguinte questão norteadora para esta pesquisa: como uma proposta didática pode contribuir na compreensão das diferentes representações das equações da reta, por meio da modalidade híbrida de Rotação por Estações?

Para responder a essa questão de pesquisa, foi determinado o objetivo geral dessa pesquisa: identificar a contribuição de uma proposta didática, por meio da Rotação por Estações na compreensão das representações das equações da reta.

Buscando atender ao objetivo geral, foram elaborados os seguintes objetivos específicos:

(i) Aprofundar estudos sobre as equações da reta por meio da Geometria Analítica;

(ii) Investigar as possíveis contribuições do Ensino Híbrido e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo do tema;

(iii) Promover, por meio da pesquisa realizada e pela elaboração da proposta didática, reflexões acerca da importância do uso de diferentes recursos no estudo das equações da reta.

O capítulo seguinte desta pesquisa traz um estudo mais aprofundado de cada uma das equações da reta estudadas pela Geometria Analítica que estão sendo trabalhadas nesta monografia, detalhando as suas demonstrações, sempre acompanhadas de exemplos. Ao final deste capítulo há uma breve análise do ensino de Matemática, consequentemente do ensino de Geometria Analítica, proposto pelos documentos oficiais brasileiros.

O segundo capítulo deste trabalho de conclusão de curso aborda o aporte teórico desta pesquisa, definindo-se o Ensino Híbrido e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Este mesmo capítulo conta com uma análise dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD – apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Análise de Conteúdo de Bardin (2016), além de uma pesquisa por trabalhos relacionados, buscando identificar outras pesquisas que também utilizaram o Ensino Híbrido para o estudo da Geometria Analítica.

O terceiro capítulo, por sua vez, trata dos aspectos metodológicos. Será descrita a metodologia que caracteriza este trabalho como uma pesquisa qualitativa, os instrumentos de coleta de dados e a descrição da proposta didática elaborada para o estudo das equações da reta por meio da Geometria Analítica, utilizando o modelo de Rotação por Estações para alunos da 3ª. série do Ensino Médio.

O quarto capítulo apresenta os resultados coletados por meio de teste exploratório realizado com professores da Educação Básica, os quais foram convidados para analisar as atividades elaboradas e dar as suas sugestões. Por fim, apresentam-se as considerações finais desta pesquisa.

# 1 A GEOMETRIA ANALÍTICA

Há algumas divergências históricas quanto ao surgimento deste ramo da Matemática que conhecemos como Geometria Analítica (EVES, 2011). Alguns autores, como Eves (2011) defendem a ideia de que os gregos antigos já se dedicavam de forma considerável ao estudo da álgebra geométrica e que a ideia de coordenadas já era utilizada pelos egípcios e romanos.

Em relação ao surgimento da Geometria Analítica, destaca-se um dos trabalhos do matemático Nicole Oresme (século XIV) que utilizou "[...] um gráfico de duas dimensões no qual a linha horizontal representa a extensão (o tempo ou o espaço) e a linha vertical, a intensidade da qualidade." (ROQUE, 2012, p. 224). Dessa forma, a representação utilizada por Oresme pode ser considerada como um antecessor do plano cartesiano, causando possíveis influências em matemáticos posteriores (EVES, 2011).

Após séculos de desenvolvimento dos simbolismos e métodos algébricos, foi apenas no século XVII que a Geometria Analítica teve avanços mais significativos. As contribuições mais decisivas nesse processo foram feitas pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat (EVES, 2011).

O filósofo matemático René Descartes publicou em 1637 o livro intitulado "Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências"[1]. Esse tratado filosófico era acompanhado de três apêndices, sendo o último denominado de "La géométrie". Este apêndice tratava de uma explanação de alguns dos princípios da álgebra geométrica grega e, a partir dessa continuidade aos estudos feitos pelos gregos, ele teve a inspiração para inventar as bases do que conhecemos como Geometria Analítica. (EVES, 2011; MOL, 2013).

Em relação ao método desenvolvido no apêndice do livro escrito por Descartes, Roque (2012) relata que ele considerou que as equações ajudavam a construir soluções de problemas geométricos, de forma que "[...] seu objetivo não era propriamente algébrico; ele queria desenvolver um método que permitisse reduzir problemas geométricos à resolução de uma ou mais equações." (ROQUE, 2012, p. 259).

Ao mesmo tempo que Descartes, Pierre de Fermat, também elaborava as suas contribuições para a base da Geometria Analítica. Em seu livro "Introdução aos Lugares Planos e Sólidos"[2], ele explanou um dos princípios fundamentais da Geometria Analítica: uma equação

[1] Traduzido de *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, sendo os apêndices: La dioptrique, Les météores e La géométrie. (EVES, 2011)
[2] Originalmente, o livro é intitulado "*Isogoge ad locus planos et sólidos*". (EVES, 2011).

envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano (MOL, 2013). Apesar da publicação de seu livro ter sido apenas após a sua morte, em uma carta escrita em 1636, Fermat afirma que as suas ideias já estavam sendo desenvolvidas há sete anos (EVES, 2011).

A partir dos esforços de muitos outros estudiosos e matemáticos, a Geometria Analítica continuou se desenvolvendo ao longo dos séculos. Atualmente, esta área da Matemática é definida, basicamente, como a relação entre a Álgebra e a Geometria, de forma que todos os problemas propostos tenham suas interpretações geométricas e algébricas.

Richt (2005) define a Geometria Analítica como um

> [...] método de estudo que Geometria e Álgebra se relacionam, pois problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos e relações algébricas são interpretadas geometricamente e esta transição é um processo de suma importância à construção do conhecimento nessa área. (RICHT, 2005, p. 41).

Por essa relação entre as duas áreas da Matemática, o ensino da Geometria Analítica deve ser feito de forma a privilegiar tanto a manipulação algébrica quanto a visualização geométrica (RICHT, 2005 apud CALVACA, 1997).

De acordo com Domingos (2017), o ensino da Geometria Analítica tem sido mais manipulativo e algébrico, de forma que os alunos até sabem aplicar as fórmulas estudadas, mas não compreendem os conceitos e as estruturas geométricas por trás delas. Concordando com a autora, Cardoso (2014) também afirma que os conteúdos são abordados de forma mecanizada, pela repetição das fórmulas, sem desenvolver neles a capacidade de raciocínio, de dedução e elaboração de conjecturas.

Esse ensino da Geometria Analítica reduzido à aplicação de fórmulas tem refletido na dificuldade que os alunos apresentam em compreender alguns tópicos fundamentais da disciplina (HAJNAL, 2007 apud SILVA, 2014). Um exemplo dessa dificuldade é apresentado no estudo das equações da reta.

Apesar de as equações de reta serem estudadas desde o sétimo ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017a), quando esse estudo é feito por meio da Geometria Analítica no Ensino Médio, os alunos ainda possuem algumas dificuldades em relação à determinação das equações e suas representações algébricas (SILVA, 2014).

Faria, Santos e Curi (2012) afirmam que, no ensino das equações da reta, é oportunizado o reconhecimento de uma mesma equação tanto no registro gráfico como no registro algébrico, assim, pode-se articular conhecimentos algébricos e geométricos ao mesmo tempo. Em sua pesquisa, os autores perceberam que “[...] as dificuldades dos alunos concentram-se em tarefas que exigem [...] que o aluno passe do registro gráfico para algébrico [...]” (FARIA, SANTOS, CURI; 2012, p. 66). Portanto, justifica-se o quão importante é o estudo das equações da reta.

Para definir matematicamente as equações de uma reta, será considerado por conhecido alguns conceitos elementares da Geometria, como, por exemplo, por dois pontos dados passam uma, e somente uma reta; por um ponto dado fora de uma reta, passa apenas uma única reta paralela e uma única reta perpendicular à reta dada (LIMA, 2005). Será admitido também o conhecimento de alguns conceitos básicos da Geometria Analítica como o conceito de coordenadas no plano.

Visando facilitar a leitura e compreensão do texto, as definições e conceitos apresentados a seguir são baseados nos seguintes trabalhos: Leithold (1994), Lima (2014), Iezzi (2013), Silva (2015) e Delgado, Frensel e Crissaff (2017).

Entende-se por equação de uma reta uma igualdade envolvendo as variáveis $x$ e $y$ que é satisfeita se, e somente se, um ponto $P = (x, y)$ pertencer a esta equação. Entende-se também como o gráfico de uma equação em $\mathbb{R}^2$, o conjunto de todos os pares ordenados em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas satisfazem a equação (LEITHOLD, 1994).

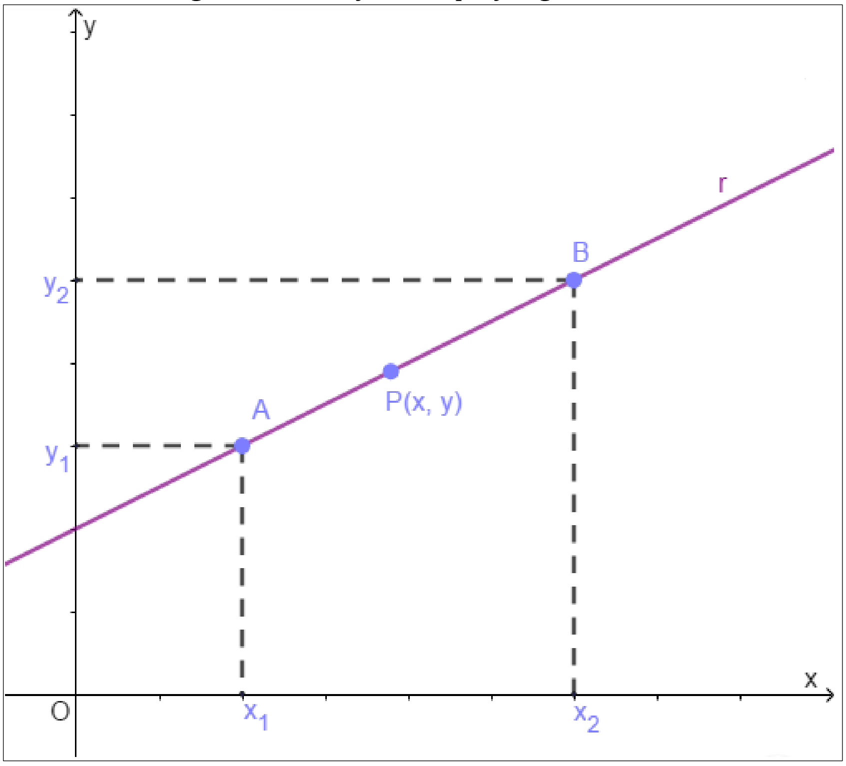
Por exemplo, a equação $x = y$ é a equação de uma reta, a qual é bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º quadrantes), pois o ponto $P = (x, y)$ pertence a esta reta se, e somente se, $x = y$.

A seguir, é realizado um breve estudo sobre as equações da reta estudadas pela Geometria Analítica. Como a partir de dois pontos, podemos determinar uma reta e, consequentemente, a sua equação, todas as retas a serem descritas terão a sua determinação partindo sempre de dois pontos pertencentes a essa reta.

### 1.1 Equação Geral da Reta

Uma das principais formas de se representar a equação de uma reta, também conhecida como equação cartesiana da reta é a equação da forma $ax + by + c = 0$ em que $a$, $b$, e $c$ são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano cartesiano, então, $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ são todos números reais conhecidos, como na Figura 1.

Figura 1 - Dedução da equação geral da reta




Fonte: Elaboração própria.

Sendo a reta $r$ definida pelos pontos $A$ e $B$, se $P = (x, y)$ for um ponto genérico pertencente a essa reta $r$, os pontos $A$, $B$ e $P$ serão colineares, assim, pela condição de alinhamento de três pontos, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante:

$$x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_1y - x_2y_1 = 0$$

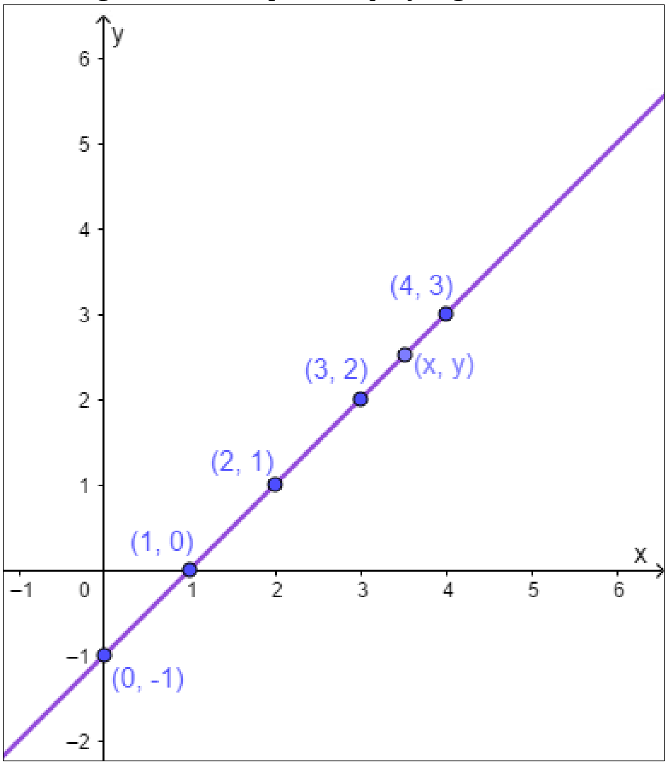
Colocando $x$ e $y$ em evidência:

$$x\,\underbrace{(y_1 + y_2)}_{a} + y\,\underbrace{(-x_1 - x_2)}_{b} - \underbrace{(-x_1y_2 + x_2y_1)}_{c} = 0$$

Fazendo $(y_1 + y_2) = a$; $(-x_1 - x_2) = b$ e $(-x_1y_2 + x_2y_1) = c$, chega-se à equação $ax + by - c = 0 \Rightarrow ax + by = c$.

Por exemplo, para definir a equação da reta da Figura 2, deve-se escolher dois pontos pertencentes a esta reta para montar o determinante juntamente com o ponto genérico $(x, y)$.

Figura 2 – Exemplo da equação geral da reta




Fonte: Elaboração própria.

Ao escolher os pontos $(2, 1)$ e $(1, 0)$, tem-se o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x - y - 1 = 0 \Rightarrow x - y = 1$$

Ao escolher os pontos $(4, 3)$ e $(0, -1)$, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow 4\,x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow 4x - 4y = 4$$

Assim, é perceptível que uma mesma reta pode admitir infinitas equações gerais equivalentes entre si[3]. Se a equação $ax + by + c = 0$ representa uma reta $r$ então a equação $(ka)x + (kb)y\ + kc = 0$ define a mesma reta $r$ pois sendo um número real $k \neq 0$, as retas serão equivalentes entre si, portanto, um par ordenado $(x, y)$ satisfaz uma delas se, e somente se, satisfaz a outra.

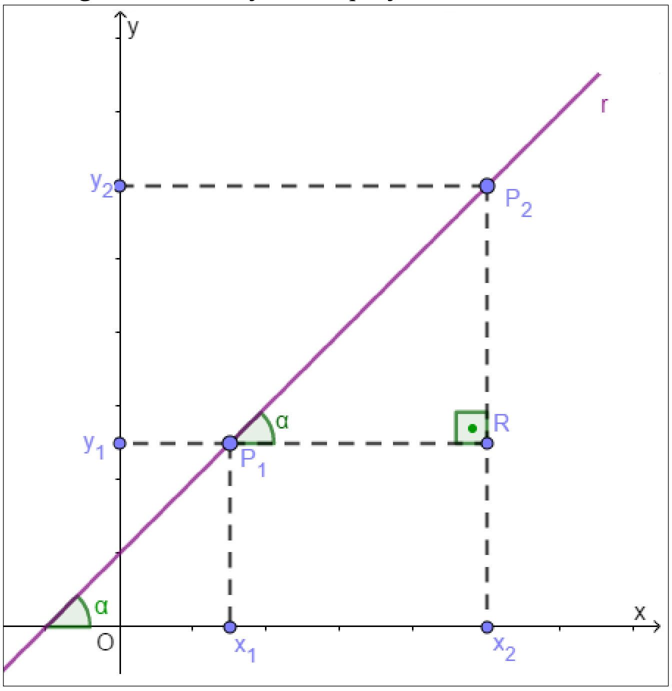
[3] Este enunciado é verdadeiro tanto para a equação geral como para as equações reduzidas e paramétricas.

### 1.2 Estudo do Coeficiente Angular e Equação Fundamental da Reta

Antes de enunciar a equação fundamental da reta, é importante que se tenha um breve estudo sobre a determinação do coeficiente angular (inclinação) de uma reta. Assim, o coeficiente angular, que será chamado de $m$, equivale a medida da tangente de um ângulo $\alpha$ determinado entre a reta e o eixo das abscissas.

Considere uma reta $r$ em que os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pertecem a essa reta, como podemos ver na Figura 3.

Figura 3 – Dedução da equação reduzida da reta




Fonte: Elaboração própria.

Perceba que, os pontos $P_1$, $P_2$ e $R$ são vértices de um triângulo retângulo em R. Assim, aplicando a definição de tangente sobre o ângulo $\alpha$, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Como a medida do cateto oposto é a variação no eixo das ordenadas $(y_2 - y_1)$ e a medida do cateto adjacente é a variação no eixo das abscissas $(x_2 - x_1 \neq 0)$, tem-se que:

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ou seja, sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos sobre uma reta $r$, a inclinação $m$ dessa reta será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Em relação ao coeficiente angular de uma reta, há três análises possíveis:

- Se a inclinação de uma reta for positiva ($m > 0$), então, essa reta será crescente e quando o valor da abscissa aumentar, a ordenada também aumentará.
- Se a inclinação de uma reta for negativa ($m < 0$), então, essa reta será decrescente e quando o valor da abscissa aumentar, o valor da ordenada diminuirá.
- Se a inclinação for nula ($m = 0$), então, a reta será paralela ao eixo das abscissas.

Agora que já foi realizado um estudo sobre o coeficiente angular de uma reta, é possível, então, determinar a equação fundamental[4]. Assim, considera-se um ponto $A = (x_A, y_A)$ e um ponto $P = (x, y)$ genérico. Já é conhecido que o coeficiente angular desta reta será:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

Multiplicando ambos os membros por $(x - x_A)$:

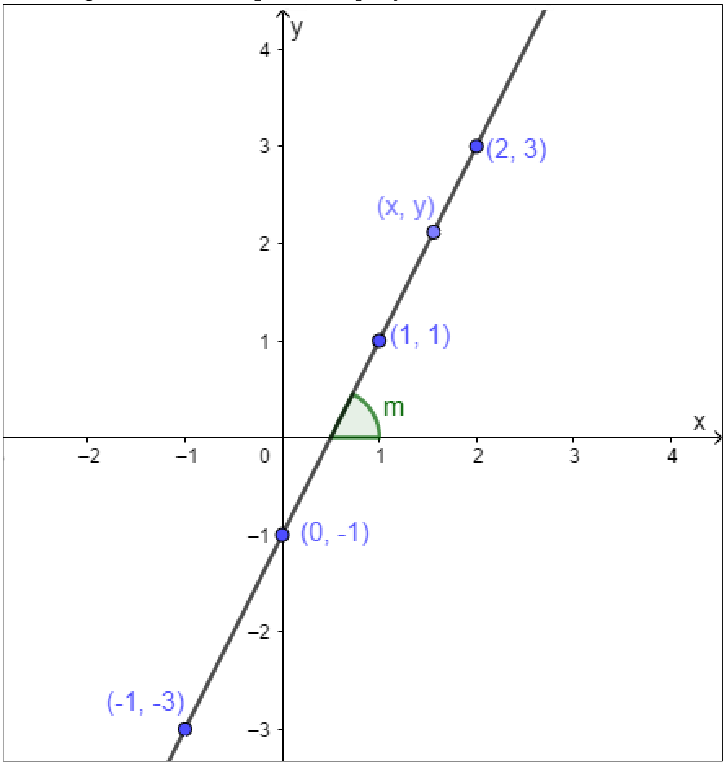
$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Esta é a equação fundamental da reta, também conhecida como a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, pois, conhecidas a inclinação e um ponto pertencente a esta reta, pode-se facilmente determinar esta equação.

Por exemplo, ao serem definidos o coeficiente angular e a equação fundamental da reta representada pela Figura 4, primeiramente, deve-se escolher dois pontos pertencentes a esta reta e calcular o seu coeficiente angular. Em seguida, este coeficiente angular calculado será utilizado para determinar a equação fundamental, juntamente com um ponto pertencente a reta e um ponto genérico $(x, y)$.

[4] Alguns livros como Paiva (2016) e Dante (2016) nomeiam a equação $y - y_A = m(x - x_A)$ como equação fundamental, mas também é possível encontrar autores que a intitulam como a equação conhecidos a sua inclinação e um ponto (CHAVANTE; PRESTES, 2016; BALESTRI, 2016) ou como a forma ponto-inclinação da equação de uma reta (LEITHOLD, 1994).

Figura 4 – Exemplo de equação fundamental da reta




Fonte: Elaboração própria.

É possível escolher quaisquer dois pontos pertencentes a esta reta para calcular o coeficiente angular. Ao escolher os pontos $(-1,-3)$ e $(0,-1)$, tem-se que:

$$m = \frac{-1-(-3)}{0-(-1)} = \frac{-1+3}{1} = 2$$

Ao escolher os pontos $(1,1)$ e $(2,3)$, tem-se então:

$$m = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Ou seja, independentemente de quais dois pontos sejam escolhidos, sendo estes pertencentes à mesma reta, o resultado do cálculo do coeficiente angular será sempre o mesmo. Para determinar a equação fundamental da reta na forma $y - y_A = m(x - x_A)$, será utilizado o ponto genérico $(x,y)$ e um ponto pertencente a esta reta de coordenadas conhecida, como o ponto $(-1,-3)$, assim:

$$y-(-3) = 2\big(x-(-1)\big) \Rightarrow y+3 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x-1$$

Ao escolher o ponto $(2,3)$, tem-se que:

$$y-3 = 2(x-2) \Rightarrow y-3 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1$$

Perceba que, ao manipular essas equações fundamentais para o formato da equação geral, obtém-se a mesma equação. Assim, pode-se concluir que qualquer que seja o ponto utilizado, desde que estes pertençam à mesma reta, resultará na mesma equação.

### 1.3 Equação Reduzida da Reta e Posições Relativas Entre Retas

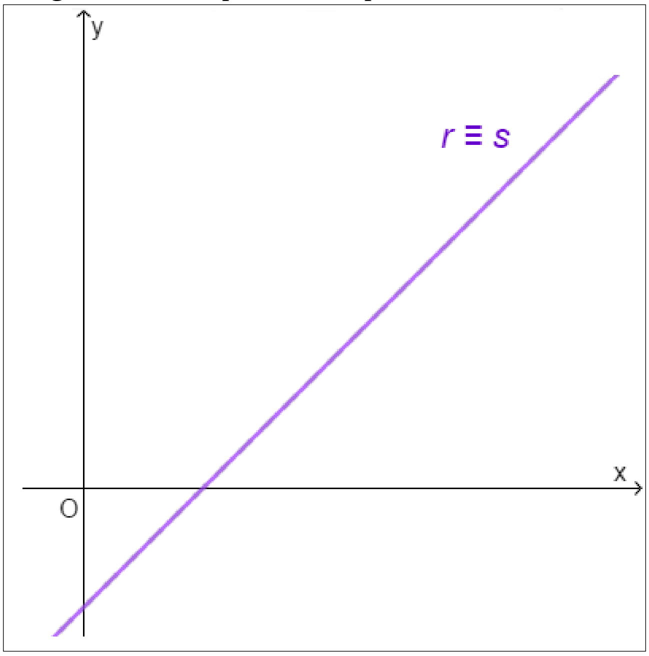
Já conhecido o coeficiente angular de uma reta, será enunciada a equação reduzida da reta que é aquela na forma $y = mx + n$ em que $m$ e $n$ são números reais, $m$ é o coeficiente angular da reta e $n$, a interseção da reta com o eixo das ordenadas, também conhecido como coeficiente linear. Se $n = 0$, então a reta de equação $y = mx$ passará pela origem do sistema cartesiano.

Dadas duas retas $r$ e $s$ de equações reduzidas: $\begin{cases} r\colon\ mx + n \\ r'\colon m'x + n' \end{cases}$. Essas retas podem ocupar duas posições relativas no plano cartesiano, paralelas e concorrentes. Sendo que, cada uma dessas posições, desencadeia em dois casos: as paralelas podem ser coincidentes ou distintas e as concorrentes podem ser perpendiculares ou não perpendiculares.

- $r$ e $r'$ paralelas coincidentes ⇒ todos os pontos comuns;
- $r$ e $r'$ paralelas distintas ⇒ nenhum ponto em comum;
- $r$ e $r'$ concorrentes não perpendiculares ⇒ apenas um ponto em comum;
- $r$ e $r'$ concorrentes perpendiculares ⇒ apenas um ponto em comum.

Duas retas $r$ e $s$ de equações reduzidas: $\begin{cases} r\colon\ mx + n \\ r'\colon\ m'x + n' \end{cases}$ serão paralelas coincidentes se, e somente se, tiverem a mesma inclinação e mesma interseção no eixo das ordenadas, ou seja, $m = m'$ e $n = n'$. Daí, todos os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem uma reta, irão satisfazer também a outra, como na Figura 5.

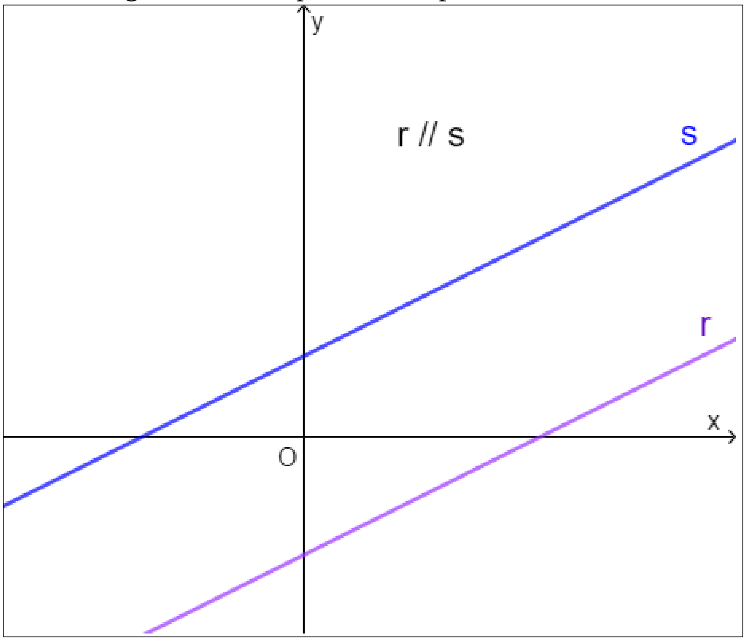
Figura 5 – Exemplo de retas paralelas coincidentes




Fonte: Elaboração própria.

Duas retas $r$ e $s$ de equações reduzidas: $\begin{cases} r: \ mx + n \\ r': m'x + n' \end{cases}$ serão paralelas distintas se, e somente se, tiverem a mesma inclinação ($m = m'$) e intersectarem o eixo das ordenadas em pontos diferentes ($n \neq n'$), como na Figura 6. Portanto, as retas não terão nenhum ponto de interseção.

Figura 6 – Exemplo de retas paralelas distintas

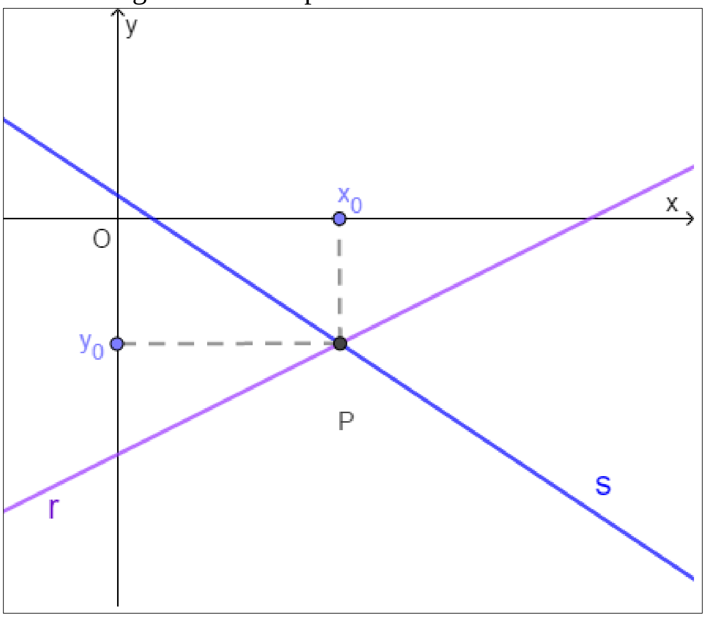



Fonte: Elaboração própria.

Por exemplo, dada uma reta $r$ de equação $y = 2x + 3$, as retas paralelas a esta reta $r$ serão todas aquelas que tiverem coeficiente angular igual a 2, ou seja, todas aquelas que tiverem a mesma inclinação da reta $r$ e interseção com o eixo das ordenadas diferente de 3. Assim, serão todas as retas do tipo $y = 2x + k$, tal que $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 3$.

Duas retas $r$ e $s$ de equações reduzidas: $\begin{cases} r:\ mx + n \\ r':\ m'x + n' \end{cases}$ serão concorrentes não perpendiculares se, e somente se, tiverem coeficientes angulares diferentes, ou seja, $m \neq m'$. Assim, as retas terão apenas um ponto em comum e esse ponto $P = (x_0, y_0)$ será solução de ambas as equações das retas, como na Figura 7.

Figura 7 – Exemplo de retas concorrentes

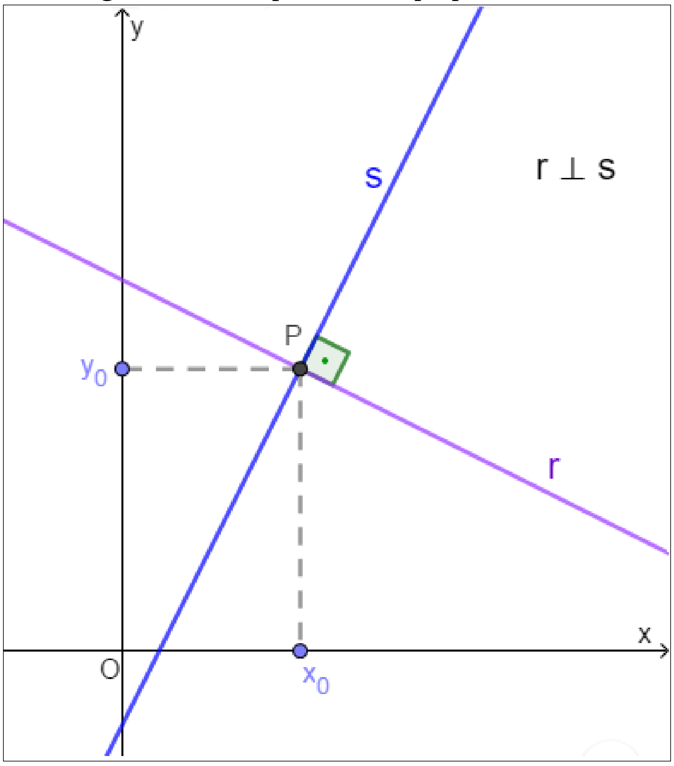



Fonte: Elaboração própria.

Por exemplo, dada uma reta $r$ de equação $y = 2x + 3$, as retas concorrentes não perpendiculares a esta reta $r$ serão todas aquelas que tiverem coeficiente angular diferente de 2 e interseção com o eixo das ordenadas diferente de 3, ou seja, serão todas as retas do tipo $y = ax + k$, tal que $a, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 2$ e $k \neq 3$.

Duas retas $r$ e $s$ de equações reduzidas: $\begin{cases} r:\ mx + n \\ r':\ m'x + n' \end{cases}$ serão concorrentes perpendiculares se, e somente se, o ângulo formado entre as duas retas for um ângulo reto. A inclinação de uma reta deverá ser, necessariamente, o oposto do inverso da inclinação da outra, ou seja, $m' = -\frac{1}{m} \Rightarrow m \cdot m' = -1$. Assim, as retas terão apenas um ponto em comum e esse ponto $P = (x_0, y_0)$ será solução de ambas as equações das retas, como na Figura 8.

Figura 8 – Exemplo de retas perpendiculares



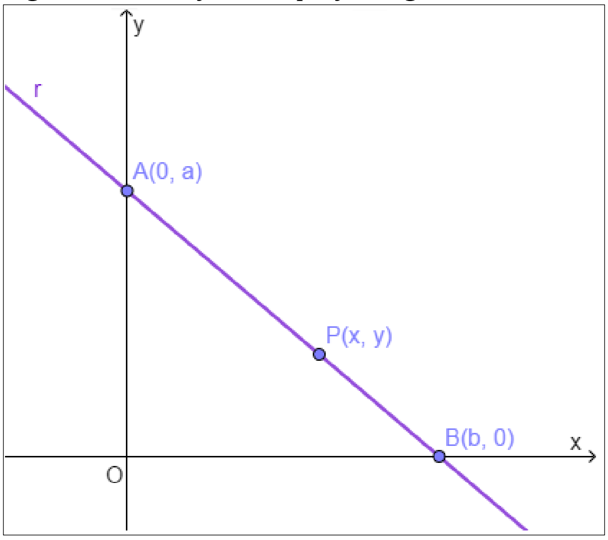

Fonte: Elaboração própria.

Por exemplo, dada uma reta $r$ de equação $y = 2x + 3$, as retas concorrentes perpendiculares a esta reta $r$ serão todas aquelas que tiverem coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$, ou seja, serão todas as retas do tipo $y = -\frac{1}{2}x + k$, tal que $k \in \mathbb{R}$.

## 1.4 Equação Segmentária da Reta

Considere uma reta $r$ que intercepta os eixos cartesianos nos pontos $A = (0, a)$ e $B = (b, 0)$ distintos e considere também um ponto genérico $P = (x, y)$ pertencente a esta reta $r$, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Dedução da equação segmentária da reta




Fonte: Elaboração própria.

Considerando os pontos $P$, $A$ e $B$ colineares, pela condição de alinhamento de três pontos, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & a & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by - ab = 0$$

Somando $ab$ a ambos os membros da equação:

$$ax + by = ab$$

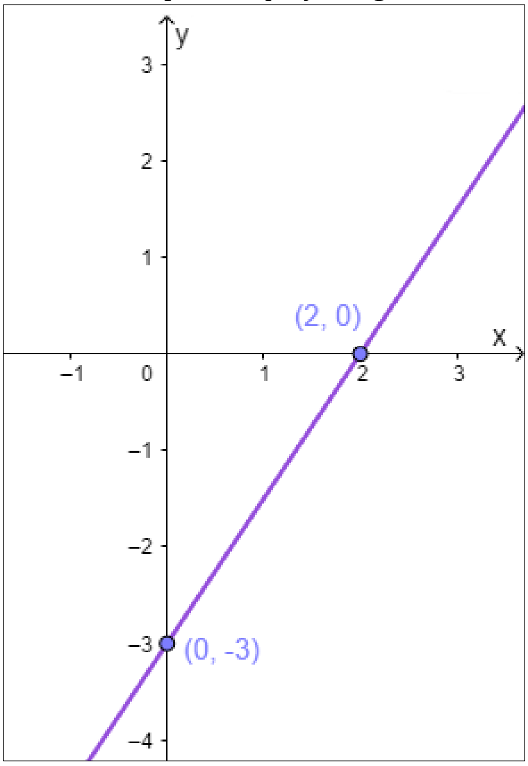
Dividindo ambos os membros por $ab$:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Essa é a equação segmentária da reta. Perceba que o denominador de $x$ é o valor da abscissa do ponto em que a reta $r$ intercepta o eixo $x$ e o denominador de y é o valor da ordenada do ponto em que a reta $r$ intercepta o eixo $y$.

É importante destacar que, diferentemente das outras equações da reta, a equação segmentária é única. Nos outros formatos, uma mesma reta admite várias equações equivalentes entre si, mas como a equação segmentária relaciona as variáveis com os interceptos, e esses são únicos, não há equações segmentárias equivalentes. Como exemplo, será determinada a equação segmentária da reta representada na Figura 10.

Figura 10 – Exemplo de equação segmentária da reta




Fonte: Elaboração própria.

Para isso, pode-se calcular o determinante da condição de alinhamento de três pontos, ou também é possível simplesmente utilizar os valores das interseções com os eixos coordenados para determinar a equação segmentária:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

É possível conferir essa equação por meio do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 6$$

Dividindo ambos os membros da equação geral acima por 6, obtém-se a mesma equação segmentária encontrada anteriormente.

## 1.5 Equação Paramétrica da Reta

As equações da reta estudadas nas seções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 relacionam diretamente as coordenadas $(x, y)$ com as coordenadas dos pontos pertencentes a reta. Já na equação paramétrica, as coordenadas dos pontos são dadas por expressões do primeiro grau em relação a um parâmetro. Ao variar o valor do parâmetro no conjunto dos números reais, obtém-se os pontos da reta, ou seja, cada ponto da reta está associado a um valor do parâmetro.

Considere uma reta $r$ e os pontos de coordenadas conhecidas $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e um ponto genérico $P = (x, y)$, todos os pontos pertencentes a esta reta $r$. Conforme já exposto, o coeficiente angular $m$ de uma reta pode ser calculado a partir de dois pontos pertencentes a esta reta. Ao considerar os pontos $A$ e $P$, tem-se:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow (x - x_A)\, m = y - y_A \quad \text{(I)}$$

Ao calcular o mesmo coeficiente angular, agora considerando os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, tem-se:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I):

$$y - y_A = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)(x - x_A)$$

Reescrevendo a equação:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Igualando cada um dos membros da equação a um número qualquer $t$, tem-se:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = t \Rightarrow x = x_A + t(x_B - x_A)$$

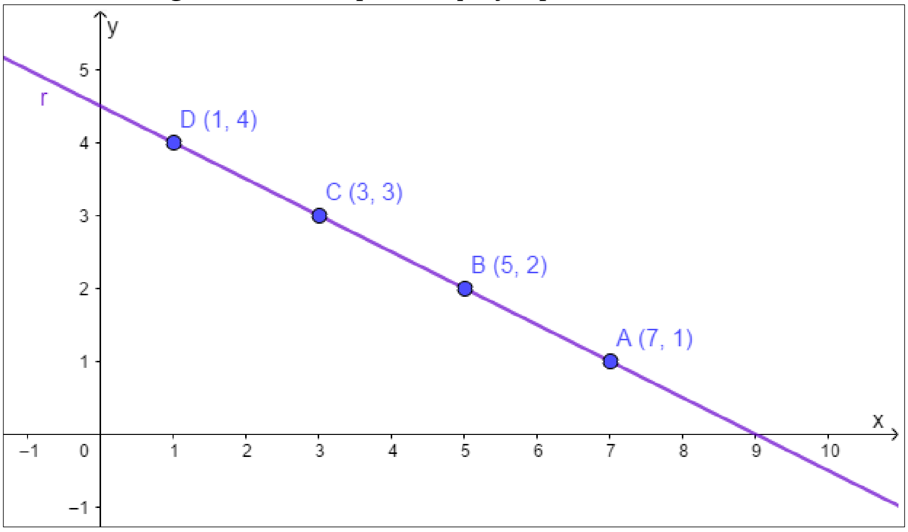
$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t \Rightarrow y = y_A + t(y_B - y_A)$$

Então, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, obtém-se um ponto da reta. Assim, determina-se a equação paramétrica da reta, que é assim conhecida por causa do parâmetro $t$ que relaciona as coordenadas $x$ e $y$.

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

Por exemplo, considere a reta $r$ abaixo e os pontos $A = (7, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (3, 3)$ e $D = (1, 4)$, todos pertencentes a reta, como na Figura 11.

Figura 11 – Exemplo da equação paramétrica da reta




Fonte: Elaboração própria.

Como visto acima, para determinar a equação paramétrica de uma reta, basta utilizar dois pontos pertencentes a esta reta. Considerando os pontos $A$ e $B$, tem-se:

$$\begin{cases} x = 7 + t\,(5 - 7) \\ y = 1 + t\,(2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Agora considerando os pontos $C$ e $D$, tem-se:

$$\begin{cases} x = 3 + t\,(1 - 3) \\ y = 3 + t\,(4 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

Nota-se que, utilizando diferentes pares de pontos pertencentes a reta $r$, encontra-se diferentes equações da reta, mas todas essas equações são equivalentes entre si, já que todos os pontos pertencem a essa mesma reta.

Considere a equação paramétrica da reta $\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$. A cada valor que é atribuído ao parâmetro $t$, encontra-se um par ordenado $(x, y)$ pertencente a esta reta.

- Se $t = 3$, então, $x = 1$ e $y = 4$, logo, obtém-se o par ordenado $(1, 4)$ que são as coordenadas do ponto $C$;
- Se $t = 2$, então, $x = 3$ e $y = 3$, logo, obtém-se o par ordenado $(3, 3)$ que são as coordenadas do ponto $D$.

Analogamente, ocorre com a equação $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Atribuindo outros valores para o parâmetro $t$, encontram-se outros pontos pertencentes a reta $r$.

## 1.6 A Geometria Analítica nos Documentos Oficiais

Após esse breve estudo sobre as equações da reta, é importante compreender como os Documentos Oficiais brasileiros esperam que este assunto seja estudado no Ensino Médio. Dessa forma, analisou-se a maneira que a Matemática deve ser abordada nessa etapa, buscando uma melhor abordagem dos conteúdos como, por exemplo, a utilização de tecnologias digitais e de diferentes representações matemáticas. Também foram analisadas as habilidades propostas para o ensino da Geometria Analítica como um todo e, especificamente, o ensino das equações da reta.

Os Documentos Oficiais aqui considerados são: a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio – BNCC (BRASIL, 2017b), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN (BRASIL, 1998) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN + (BRASIL, 2002).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017b), a área de Matemática no Ensino Médio deve aprofundar as aprendizagens feitas durante todo o Ensino Fundamental, proporcionando ao aluno uma visão mais integrada da disciplina. Em concordância, os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que a partir dos conhecimentos obtidos no Ensino Fundamental, eles devem ter condições de utilizá-los em favor da ampliação de suas capacidades de abstração, resolução de problemas, compreensão de fatos matemáticos e fatos da própria realidade. Assim, a Matemática do Ensino Médio deve fornecer os instrumentos necessários para que deem continuidade aos seus estudos (BRASIL, 1998).

Para isso, deve-se aproveitar todo o potencial que os alunos já possuem para estimular seus processos de abstração e reflexão, dando suporte para raciocínios criativos, dedutivos e analíticos (BRASIL, 2017b). Diante disso, as OCEM norteiam que “[...] toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o ‘pensar matematicamente’.” (BRASIL, 2006, p. 70).

Deste modo, as Orientações Curriculares (BRASIL, 2006) vão definir esse pensamento matemático como uma aprendizagem que valorize o raciocínio, apresentando as propriedades por meio de suas explicações, as fórmulas pelas suas deduções e valorizando a solução de problemas interessantes, tanto aqueles de natureza simplesmente teórica como aqueles problemas de aplicação. Ou seja, para o desenvolvimento desse pensamento matemático é necessário que afastem as “[...] exigências de memorização, as apresentações de ‘regras’ desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de 'fixação' ou a aplicação direta de fórmulas." (BRASIL, 2006, p. 70).

Já os PCN+ (BRASIL, 2002) reconhecem que os exercícios do tipo "Calcule..." ou "Resolva..." têm a sua funcionalidade no aprendizado de técnicas e algoritmos, mas que não dão oportunidade ao aluno de mobilizar os seus conhecimentos e desenvolver a sua própria forma de pensar. Por isso, o documento afirma que os velhos paradigmas educacionais e currículos extremamente conteudistas tornam-se cada vez menos adequados.

Tendo em vista essa adequação do Ensino Médio às novas gerações, os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que há uma unanimidade entre educadores matemáticos quanto à necessidade de novos métodos de aprendizado. O documento, porém, também reconhece que um dos maiores desafios a serem enfrentados para a implementação dessas novas ideias é a modificação da estrutura da escola e do posicionamento daqueles que ali estão.

As Orientações Educacionais Complementares (BRASIL, 2002) afirmam que o que está sendo proposto depende de uma mudança de atitudes nas práticas educacionais. Isso significa que somente pela forma "[...] como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências." (BRASIL, 2002, p. 113). Trabalho simultâneo esse que os PCN (BRASIL, 1998) reconhecem como o conjunto inseparável: o conteúdo e a forma com a qual ele é abordado.

Em relação à abordagem dos conteúdos, busca-se atingir as três grandes competências para o Ensino Médio determinadas pelos PCN+ (BRASIL, 2002): a representação e comunicação, investigação e compreensão e a contextualização das ciências.

A competência referente à representação e a comunicação almeja que, ao fim da etapa do Ensino Médio, o aluno consiga ler, interpretar e utilizar adequadamente diferentes linguagens e representações, articulando-as sempre que conveniente, como sentenças, equações, esquemas, tabelas, gráficos e representações geométricas (BRASIL, 2002). De acordo com essa competência, a BNCC (BRASIL, 2017b, p. 519) também reconhece

> [...] a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio.

Já a competência relacionada à investigação e a compreensão espera que seja desenvolvida a capacidade de, em um problema com uma diversidade de dados e de informações, até mesmo com diferentes representações, identificar aquelas informações relevantes para buscar alternativas ou estratégias para resolvê-lo. Em um dos exemplos dados pelo documento, é reconhecida a relevância de se utilizar um sistema de eixos cartesianos e resolver o problema por meio da Geometria Analítica (BRASIL, 2002).

Ainda referente a esta competência da investigação e da compreensão, os PCN+ (BRASIL, 2002) também propõem que estes saibam identificar padrões e regularidades em situações análogas para que seja possível estabelecer algumas propriedades ou regras, buscando a resolução de situações-problema.

A terceira grande competência para o Ensino Médio, relativa à contextualização das ciências, espera que os alunos compreendam a ciência e a tecnologia como componentes integrantes da cultura contemporânea na qual estamos inseridos, por isso, esta competência propõe que eles comparem os cálculos feitos "à mão" com aqueles desenvolvidos por meio das tecnologias, percebendo as vantagens e limitações de cada ferramenta (BRASIL, 2002).

Em relação à tecnologia, as OCEM (BRASIL, 2006) também reconhecem o seu impacto na sociedade atual, por isso, o documento sugere que a formação escolar insira esta ferramenta no aprendizado de Matemática. Essas Orientações Curriculares (BRASIL, 2006) recomendam, de modo especial, a utilização de *softwares* caracterizados pela manipulação de um certo domínio matemático, de forma a expandir o conhecimento daquele conteúdo por meio de diferentes representações. O documento também admite a conveniência desses programas para o aprendizado da Geometria Analítica.

Dando continuidade ao conjunto inseparável conteúdo e forma, citados pelos PCN (BRASIL, 1998), o conteúdo a ser destacado a seguir será a Geometria Analítica. Obviamente, todas as competências e proposições referentes ao ensino esperado na etapa do Ensino Médio também se aplicam a este ramo da Matemática e, por consequência, ao estudo das equações da reta.

As OCEM (BRASIL, 2006) definem a Geometria Analítica como um sistema de coordenadas que associam um ponto $P$ do plano cartesiano às suas coordenadas $(x, y)$. Assim, "[...] podemos caracterizá-la como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação [...]; b) o estudo dos pares ordenados de números $(x, y)$ que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica". (BRASIL, 2006, p. 76-77).

Já os PCN+ *(*BRASIL, 2002) consideram que a Geometria Analítica proporciona um tratamento algébrico aos elementos e às propriedades geométricas, transformando problemas que seriam geométricos em soluções algébricas, por meio de equações, inequações e sistemas. O documento também aborda os conteúdos e as habilidades propostas para a Geometria Analítica. Assim, os conteúdos a serem estudados são as representações no plano cartesiano, as equações e as posições relativas de figuras e suas interseções. Referente a estes conteúdos espera-se que sejam desenvolvidas as seguintes habilidades:

> - Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
> - Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> - Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> - Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p. 125)

Para atender a esses conteúdos estabelecidos pelo documento e desenvolver tais habilidades, é considerável fazer um estudo sobre as equações da reta. Esta temática deve ser estudada a partir do estabelecimento da correspondência entre a equação, seu gráfico e a resolução de problemas que exigem a análise da posição relativa entre as retas (BRASIL, 2002).

Sobre o estudo das equações da reta, as OCEM (BRASIL, 2006) consideram a importância da compreensão do significado de uma equação, estas não devem ser simplesmente apresentadas aos alunos, mas sim deduzidas para que o sentido geométrico de seus parâmetros seja compreendido. Por exemplo, o documento orientador destaca a relação existente entre os coeficientes de retas que são paralelas ou perpendiculares entre si.

Em suma, os PCN (BRASIL, 1998) compreendem que as funções da Matemática apresentadas e a utilização das tecnologias permitem caminhar para um ensino desta disciplina que seja muito mais do que apenas memorizar resultados, afinal, a aquisição do conhecimento deve ser associada a um saber fazer Matemática.

Portanto, os Documentos Oficiais analisados sinalizam que o Ensino Médio e, consequentemente a Geometria Analítica e as equações da reta estudadas por esta, possibilite ao aluno o desenvolvimento da capacidade do "pensar matematicamente", com novas metodologias e novas formas de abordar os conteúdos. O ensino conteudista deve, aos poucos, ir sendo superado para dar espaço a novas atitudes em sala de aula, almejando o cumprimento das habilidades e competências propostas pelos documentos. Reiterando então as ideias já anteriormente apresentadas por Domingos (2018) e Silva (2014).

# 2 APORTE TEÓRICO

Este capítulo relata o aporte teórico que estrutura esta pesquisa. O capítulo está dividido em quatro partes: (i) Ensino Híbrido, em que consta a apresentação dos seus modelos, com o enfoque no modelo de Rotação por Estações escolhido para esta pesquisa; (ii) Teoria dos Registros de Representação Semiótica em que o aprendizado se dá pela identificação de uma representação, tratamento e conversão dos diferentes registros de representação; (iii) Análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD baseando a análise na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Análise de Conteúdo; (iv) Trabalhos relacionados, buscas feitas para identificação de trabalhos relacionados ao tema da pesquisa.

## 2.1 Ensino Híbrido

Conforme já mencionado, os estudantes da atualidade que frequentam a Educação Básica diferem-se de muitas formas das gerações anteriores, mas, mesmo assim, poucas mudanças foram realizadas na cultura escolar para que houvesse uma adequação da escola às novas gerações. A sociedade como um todo evolui para uma sociedade mais tecnológica e integrada, no entanto, a educação permaneceu estática, nos mesmos moldes que foram determinados décadas atrás. Antigamente, a escola tinha um papel social de levar informação e instrução para as pessoas, mas com o avanço da *internet* e a disseminação das tecnologias digitais, as informações nunca estiveram tão próximas e tão presentes na realidade das pessoas (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Com todas essas mudanças ocorridas, é justo apropriar-se de uma modalidade de ensino “[...] em que não existe uma única forma de aprender e na qual a aprendizagem é um processo contínuo, que ocorre de diferentes formas, em diferentes espaços.” (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 52). É nisso que está fundamentada a definição do Ensino Híbrido.

A palavra híbrido vem do termo em inglês *blended* que significa mesclado, misturado. Dentre as muitas definições para o Ensino Híbrido, segundo Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), é possível compreender que todas trazem dois modelos de aprendizagem: o modelo presencial, em sala de aula, como tradicionalmente ocorre, e o modelo *on-line*, utilizando tecnologias digitais para promover o ensino. Os autores Christensen, Horn e Staker (2013, p. 7) definem o Ensino Híbrido da seguinte forma:

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino *on-line*, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência.

Com isso, é possível entender que o objetivo dessa modalidade é trazer o foco da aprendizagem para o aluno, tirar a centralidade da figura do professor, o detentor das informações fornecidas aos alunos, incentivando, assim, a responsabilidade e autonomia dos alunos para que desenvolvam as competências que lhes são necessárias para viver na sociedade do conhecimento. Como afirmam os autores Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 34)

> Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias nas quais eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que se tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa.

Além dessa união entre o ensino presencial e o virtual, o Ensino Híbrido propõe que sejam reavaliados, refletidos e repensados alguns aspectos que envolvem a realidade escolar como o papel do professor, o papel do aluno, a utilização das tecnologias digitais, a avaliação, entre outros. Todos esses temas devem ser pensados como peças de uma engrenagem, como na Figura 12, que funcionam de forma articulada, integrados para que as mudanças propostas na realidade escolar possam ser de fato efetivadas (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Figura 12 – Engrenagens dos principais aspectos do Ensino Híbrido


Fonte: https://personalizacao.porvir.org/[5]

Como é possível ver na Figura 12, o aluno é o centro, ou seja, o foco de todos os outros aspectos passa a ser o processo de aprendizagem deste. O Ensino Híbrido propõe que eles assumam responsabilidades perante a sua aprendizagem, posturas mais participativas, que desenvolvam a sua autonomia e as suas competências. Além do desenvolvimento dessas novas atitudes, essa modalidade também propõe a utilização de atividades individuais e colaborativas. De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), a aprendizagem se dá em conjunto com o professor, com os colegas, com desconhecidos e também de forma individual, logo, devemos valorizar as diferentes interações possíveis.

Em relação ao papel do professor, este assume um novo caráter, não mais de transmissor dos conhecimentos, de orador, mas agora de um *design* de caminhos, arquiteto desse conhecimento. Ele assume esse novo papel de mediar as informações disponíveis e a aprendizagem, elaborando, avaliando e disponibilizando materiais relevantes para que eles possam construir o seu aprendizado a partir disso. Dessa forma, a utilização do Ensino Híbrido exige do professor uma boa formação, disposição e planejamento (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Quanto à utilização das tecnologias digitais, uma das peças da engrenagem apresentada na figura 12, não basta somente inserir esses recursos se a forma com a qual as aulas são conduzidas se mantêm, sem avaliar a sua real serventia. A utilização das atividades *on-line* configura uma grande aliada da educação quando essas representam a melhor alternativa para

---

[5] PORVIR: Inovações em Educação. São Paulo, 2021. Disponível em: https://personalizacao.porvir.org/. Acesso em 13 jul. 2021.

o aprendizado do aluno, desenvolvendo a autonomia, a reflexão, a interação com os pares, de modo criativo e crítico, para que eles não sejam apenas receptores de informação. A inserção das tecnologias digitais, porém, não significa abandonar as práticas que já são conhecidas e consolidadas, mas promover novas formas de se ensinar e de conduzir a aprendizagem, isso significa aproveitar "o melhor dos dois mundos" (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Tendo em vista essa utilização das tecnologias digitais para a promoção do ensino, faz-se necessário repensar também a utilização dos espaços físicos da escola, a cultura escolar que se estabelece e as formas de avaliação. A disposição das carteiras enfileiradas, a utilização sempre dos mesmos recursos em sala de aula, uma única avaliação ao final da aprendizagem, entre outras práticas mais tradicionais compreendem uma forma de ensinar como se todos aprendessem da mesma forma e ao mesmo tempo. A educação é aberta, contínua, uma combinação de vários espaços, tempos, atividades e formas. Se em uma turma temos alunos diferentes, estes têm necessidades e aprendizagens diferentes, por isso, justifica-se a utilização de diferentes formas de ensinar para as mais diversas formas de aprender (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

De acordo com Christensen, Horn e Staker (2013), há duas formas diferentes para propor as inovações: o sustentado e o disruptivo. As inovações de forma sustentada combinam a sala de aula com as atividades *on-line* por meio das tecnologias. Estas propõem mudanças mais "leves", mantendo algumas características da escola tradicional, como o formato das salas, os currículos e os profissionais se adaptam para a utilização dessas inovações. Já as inovações disruptivas são mais "radicais", devido a estas romperem com a sala de aula tradicional que conhecemos e propõem um ensino baseado no ensino *on-line* e não em conjunto com ele (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013).

Para Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), existem diversos modelos do Ensino Híbrido: Rotação, Flex, À La Carte e Virtual Enriquecido. A Figura 13 ilustra esses modelos, os quais podem utilizar as tecnologias digitais tanto de modo sustentado (mantendo as atividades presenciais como os modelos de Rotação, exceto a Rotação Individual) quanto de modo disruptivo (como os modelos de Rotação Individual, Flex, À la Carte e no Virtual Enriquecido) (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2015). As definições desses modelos são baseadas em Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015).

Figura 13 – Modelos do Ensino Híbrido


Fonte: (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p.28).

(i) Modelos de Rotação: as atividades são alternadas conforme a orientação do professor e horários fixos. As tarefas podem ser dos mais variados tipos, com ou sem a presença do professor, sendo que, necessariamente, pelo menos parte dessas atividades deve ser *on-line* (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015). Este modelo pode ser proposto das seguintes formas:

a) Rotação por Estações: os alunos são divididos em grupos e cada grupo realiza uma tarefa em um espaço determinado (estações), de acordo com as orientações do professor. Um dos grupos, pelo menos, estará realizando uma atividade *on-line*. O professor pode estar mais próximo de algum dos grupos para orientá-los durante a realização das atividades. Após determinado tempo, os grupos revezam entre as estações até o momento em que todos os grupos tenham passado por todas elas. As atividades das estações não são sequenciais, ou seja, não há uma ordem determinada a ser realizada , contudo, todas funcionam de forma integrada para que todos tenham uma aprendizagem completa. É importante destacar que as atividades valorizam tanto o trabalho colaborativo quanto o individual.

b) Laboratório Rotacional: as atividades são realizadas tanto em sala de aula como em laboratórios. A aula tem início na sala de aula e, em seguida, rotaciona-se os alunos para computadores ou para laboratórios. Este modelo utiliza o ensino *on-line* e as tecnologias digitais para dar suporte e melhorar a aprendizagem. Assim, ele se assemelha a Rotação por Estações, porém, a Rotação ocorre entre a sala de aula e laboratórios.

c) Sala de Aula Invertida: neste modelo há a inversão da função da sala de aula. A teoria é estudada em casa, de forma *on-line* e em sala, são feitas discussões, exercícios, entre outros. Tradicionalmente, o funcionamento das aulas é exatamente o oposto ao que é proposto nesse modelo, pois o que era feito em casa será feito em sala de aula e vice e versa. Algumas pesquisas evidenciam que os alunos desenvolvem melhor o pensamento crítico quando primeiro exploram algo e, depois, recebem uma instrução mais formal.

d) Rotação Individual: este modelo tem fortes traços da personalização do ensino, já que os alunos são protagonistas no controle do seu processo de aprendizagem. Cada um tem um plano de estudos a ser cumprido. Ao longo do curso, o aluno vai sendo avaliado e as aprendizagens seguintes vão sendo adaptadas de acordo com as suas necessidades e objetivos, assim, a aprendizagemé feita de acordo com o tempo do aluno.

(ii) Modelo Flex: cada aluno tem seu plano de estudos personalizado. A aprendizagem é feita de acordo com o seu tempo, por meio do ensino *on-line*, tendo o professor como um orientador, apenas para tirar as eventuais dúvidas e aprofundar a aprendizagem. Tal modelo é considerado disruptivo pelo fato do ensino ser feito pela não divisão em séries ou anos.

(iii) Modelo À La Carte: a aprendizagem é personalizada. Isso significa que o aluno determina os seus objetivos e, assim, seus estudos são organizados em parceria com um professor. Neste modelo pelo menos um curso é feito inteiramente *on-line* e a aprendizagem pode ser realizada no momento e local mais adequado para este.

(iv) Modelo Virtual Enriquecido: esse é considerado disruptivo pois deve ser acolhido por toda a escola. A aprendizagem das disciplinas ocorre de modo presencial e *on-line*, sendo necessário aos alunos o comparecimento à escola apenas uma vez por semana.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) ressaltam que não há nenhum tipo de hierarquia ou ordem estabelecida para esses modelos, tampouco a necessidade de escolher apenas um deles. Há professores que os utilizam de maneira integrada, melhorando a abordagem dos conteúdos e proporcionando uma melhor aprendizagem. Reiterando as ideias iniciais, os modelos do Ensino Híbrido abordam “[...] diferentes vertentes e tem como objetivo principal encontrar maneiras de fazer o aluno aprender mais e melhor.” (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 60).

Algumas instituições mais inovadoras propõem modelos de educação mais inovadores, disruptivos, reconfigurando o currículo e redesenhando os espaços físicos. Para a utilização do Ensino Híbrido, no entanto, basta diversificar as atividades, combinando o percurso individual e grupal com metodologias ativas apoiadas em atividades *on-line* e por meio das tecnologias digitais (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015). Assim, os modelos de Rotação são os mais atrativos para professores (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2015). Além das suas diversas possibilidades de aplicação, esses propõem inovações de forma sustentada e aproximam-se mais da realidade escolar brasileira, mantendo a estrutura curricular e priorizando o desenvolvimento do aluno e a sua participação ativa.

Dessa forma, para esta pesquisa foi escolhido o modelo de Rotação por Estações e, buscando justificar a sua utilização no ensino da Geometria Analítica, serão apresentados a seguir alguns resultados já obtidos mediante a aplicação de tal modelo em aulas a respeito deste conteúdo.

Schiehl (2018) apresentou em sua dissertação que o modelo de Rotação por Estações para o estudo da Geometria Analítica facilita o “montar e desmontar” da sala de aula tradicional em estações, de acordo com a necessidade do professor, em poucos minutos. Pela aplicação de um questionário de satisfação aos alunos após as atividades, ficou evidente o contentamento e entusiasmo das turmas quando foi verificado que, por exemplo, 73,2% deles responderam de maneira positiva sobre a utilização da Rotação em relação a aulas tradicionais. O autor afirma que “[...] a prática do ensino híbrido de rotação por estações caracteriza possibilidades de melhorias no ensino-aprendizagem.” (SCHIEHL, 2018, p. 102-103).

Xoteslem (2018) evidencia em sua dissertação que o Ensino Híbrido é um grande aliado da educação moderna, proporcionando uma aprendizagem mais efetiva. Pelos resultados obtidos da aplicação das atividades utilizando diversos modelos do Ensino Híbrido (dentre estes a Rotação por Estações) ficou bastante claro que alguns alunos se adaptam a qualquer que seja o modelo utilizado, mas pela oportunidade dada a eles de se desenvolverem no seu próprio ritmo, há significativa melhora nos resultados. Pela participação do professor como um mediador (contrário do encontrado em realidades de ensino mais tradicionais), houve a possibilidade de o professor dar um pouco mais de atenção a aqueles mais apáticos e retraídos, assim, alcançando um maior êxito com esse grupo. Ele afirma que o Ensino Híbrido, sem dúvidas, proporciona uma aprendizagem mais autônoma e expressiva (XOTESLEM, 2018).

A partir dos trabalhos relatados e dos resultados obtidos por estes, percebe-se a possibilidade de relacionar o modelo de Rotação por Estações e o estudo de Geometria Analítica. Essa relação tem por objetivo modificar a forma que a disciplina é abordada em sala de aula, buscando a superação das aulas mecanizadas expostas por Domingos (2017).

## 2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

De acordo com Duval (2009), o objetivo do ensino da Matemática não é formar futuros matemáticos nem dar aos alunos instrumentos que só lhe serão úteis muito mais tarde, mas colaborar para o desenvolvimento das capacidades de visualização, raciocínio e análise. Dessa forma, podemos fazer relação com a quarta competência específica para o ensino de Matemática definida pela BNCC (BRASIL, 2017a, p. 523) a qual espera que ao final da etapa do Ensino Médio estes consigam

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Assim, considera-se conveniente que o estudo dos conteúdos de Geometria Analítica tenha as atividades baseadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009, 2011, 2012, 2018).

Duval (2012) define as representações semióticas como a produção e utilização de diferentes símbolos (registros) para representar um determinado objeto matemático. O autor exemplifica algumas destas representações semióticas como um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, uma representação geométrica ou um gráfico (DUVAL, 2012).

A Matemática é uma área de conhecimento que tem uma particularidade em relação às outras ciências visto que esta apropria-se inteiramente da utilização de representações semióticas, dado que os objetos matemáticos não são físicos, reais ou de imediata percepção, há uma confusão quase inevitável entre o objeto matemático e a sua representação (DUVAL, 2012).

Apesar de o próprio autor reconhecer que essa confusão entre o objeto e a sua representação é algo natural da Matemática, ele também afirma que essa distinção a ser feita é parte fundamental da compreensão em Matemática e do funcionamento cognitivo do aluno. Por essa razão, é necessário que sejam utilizadas diferentes Representações Semióticas no ensino, pois somente por essa pluralidade de representações que essas darão acesso aos objetos matemáticos. Duval (2012) afirma que somente haverá uma apreensão desses objetos quando houver a coordenação destes em diferentes registros de representação.

Para tratar dessa coordenação, é faz necessário conhecer os diferentes registros de representação semiótica mobilizados na Matemática. Para isso Duval (2009) especifica os tipos de representações em dois registros diferentes, de acordo com o Quadro 1.

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático segundo Duval

| | REPRESENTAÇÂO DISCURSIVA | REPRESENTAÇÂO NÂO DISCURSIVA |
|---|---|---|
| REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis. | Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos. |
| REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos. | Sistemas de escritas: numéricas (binária, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais) Cálculo | Gráficos cartesianos mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação. |

Fonte: Elaboração própria a partir de Duval (2009).

Os registros multifuncionais são aqueles referentes à língua natural (representações discursivas) e às figuras geométricas (representações não discursivas, perceptivas), pois nesses registros há o raciocínio e a exploração das transformações dessas figuras. Já os registros monofuncionais são aqueles relacionados aos algoritmos, são registros mais formais, estudados na Matemática (DUVAL, 2009, 2018).

Cada um desses registros possibilita diferentes transformações dos objetos matemáticos, assim como diferentes representações semióticas não são todas equivalentes e igualmente interessantes. Duval (2018) afirma que a primeira exigência cognitiva ao aprendizado da Matemática é poder reconhecer e utilizar de pelo menos duas representações diferentes de um mesmo objeto, sem confundi-lo com os conteúdos das suas representações.

Concordando com o autor, Damm (2008) reitera que a aprendizagem dos objetos matemáticos só é feita pela coordenação dos registros de representação pelo sujeito que a apreende, dessa forma, maior será a apreensão de um objeto pelo aluno, quanto maior for a sua mobilidade com diferentes registros.

Ou seja, para que ocorra a apreensão conceitual do objeto matemático por parte do aluno, torna-se necessária a utilização de diversas representações. De acordo com Duval (2012, p. 270) a *noesis* (conceituação) é inseparável da *semiose* (representação), para que ocorra a *noesis* são necessárias significativas *semioses*.

> A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir que sejam desenvolvidas três atividades cognitivas básicas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A **formação** é a utilização de uma representação compreensível. Damm (2008, p. 178) define a formação de uma representação como a “[...] seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado [...]”. Podemos compará-la com uma atividade de descrição como um enunciado de uma frase, um desenho de uma figura geométrica, expressão de uma fórmula, elaboração de um esquema, etc. Além disso, essa formação deve respeitar algumas regras, por exemplo, as regras gramaticais para composições de textos, o sistema posicional, algoritmos, etc., buscando garantir as condições de reconhecimento da representação e possibilitar a sua utilização para tratamentos (DUVAL, 2012). Um exemplo dessa formação é apresentado na Figura 14.

Figura 14 – Exemplo de formação de uma representação identificável

$$(x - x_A) \cdot m = y - y_A$$

Equação Fundamental da Reta

Essa equação da reta também é conhecida como a **forma ponto–inclinação** da equação de uma reta pois esta é a equação generalizada de uma reta se forem conhecidos a sua inclinação $(m)$ e um ponto $A = (x_A, y_A)$ pertencente a esta reta.

Fonte: Elaboração própria.

O **tratamento** é a transformação de uma representação no mesmo registro em que esta foi formada, isso quer dizer que o tratamento é considerado uma transformação interna a um registro. Esta atividade cognitiva pode ser realizada em diferentes registros como a linguagem natural, em cálculos como: o cálculo numérico, algébrico e proporcional, em figuras geométricas ou em representações figurais (DUVAL, 2009, 2012). O tratamento está relacionado à forma e não ao conteúdo da representação, assim, podem haver duas representações diferentes que exigem tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático (DAMM, 2008). Claramente, há regras de tratamento próprias a cada tipo de registro a ser utilizado, variando de acordo com a sua especificidade. Como, por exemplo, o tratamento realizado na Figura 15.

Figura 15 – Exemplo de tratamento de uma equação na forma paramétrica para a forma geral

- Vamos utilizar a equação paramétrica $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ como exemplo.

- Escolha uma das equações e isole o parâmetro em um dos membros:

$$y = 7 + t \Rightarrow y - 7 = t$$

- Agora que o parâmetro já está isolado, basta substitui-lo na outra equação:

$$x = 5 + 2t \Rightarrow x = 5 + 2(y - 7) \Rightarrow$$

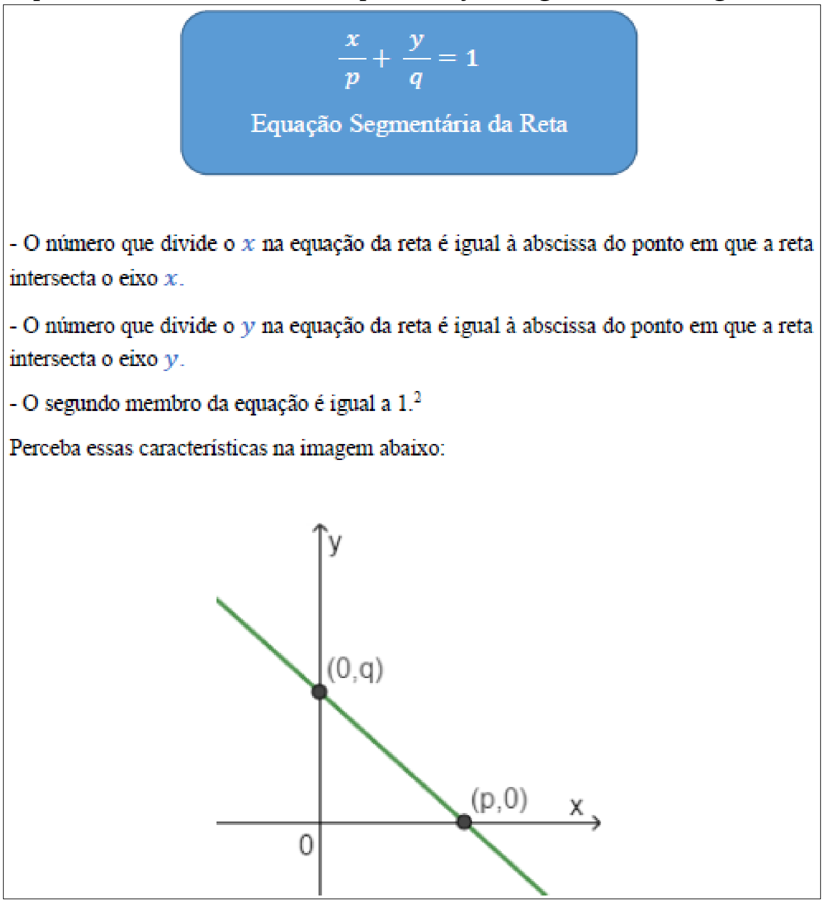
$$\Rightarrow x = 5 + 2y - 14 \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2y = -9$$

Fonte: Elaboração própria.

A **conversão** é a transformação de uma representação em um registro diferente do registro de partida. Esta é considerada uma transformação externa a esse registro, conservando totalmente ou apenas parte do conteúdo da representação inicial. As conversões podem ser feitas entre diferentes registros como, por exemplo, a mudança entre uma representação linguística e uma representação figural, uma representação linguística em um determinado idioma em outra representação linguística de outro idioma, uma representação linguística em uma representação não verbal (gráficos, esquemas, figuras), ou passar de uma representação algébrica para uma representação gráfica, como podemos ver na Figura 16 (DUVAL, 2009, 2012).

Figura 16 – Exemplo de conversão entre as representações algébrica, em língua natural e geométrica




Fonte: Elaboração própria.

Segundo o autor, a atividade de conversão não deve ser confundida com outras duas atividades que podem parecer bem próximas: a interpretação e a codificação. A interpretação implica em uma mudança de quadro teórico, não em uma mudança de registro. Já a codificação pode ser entendida como uma "transcrição" de um registro de representação em outro utilizando sucessivas regras de substituição (DUVAL, 2012).

De acordo com Duval (2009), se a atividade de conversão fosse simplesmente uma codificação de informações, a conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois bastaria aplicar algumas regras de correspondência para "traduzir" as informações. Dessa forma, a passagem de uma equação ao seu gráfico bastaria utilizar a correspondência entre um par ordenado e um ponto e vice-versa, o que não é suficiente para caracterizar uma atividade de conversão entre os dois registros. A atividade de conversão exige custos cognitivos muito mais elaborados que uma simples codificação.

> [...] bem que a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por um lado, ela não se funda sobre

> alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação. (DUVAL, 2012, p. 273).

Das três atividades cognitivas apresentadas, somente o tratamento e a formação de uma representação identificável são ensinados em Matemática (DUVAL, 2012). Em muitos casos é considerado que a conversão acontece naturalmente desde que se saiba formar representações e tratá-las, mas, na prática, a conversão dos registros de representação é o que se mostra a maior fonte de dificuldades na aprendizagem em matemática (DAMM, 2008; DUVAL, 2012).

Esse obstáculo na aprendizagem pode se intensificar na conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico (DUVAL, 2012). Segundo Duval (2011), mesmo depois de aulas sobre o estudo das retas, os alunos ainda apresentam confusões para determinar a equação partindo da representação gráfica. O autor ainda afirma que as dificuldades em Matemática não são por conta dos conceitos, mas da falta de conhecimento das correspondências semióticas entre o registro gráfico e o algébrico.

## 2.3 Análise dos Livros Didáticos do PNLD

Após compreendermos um pouco sobre as equações da reta a serem estudadas nesta pesquisa e a abordagem esperada pelos documentos oficiais brasileiros, é importante que também seja feita uma análise dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas de todo o país.

O valor desta análise se dá pelo fato de o livro didático ser o maior objeto de apoio para professores de todo o Brasil. A utilização dos livros didáticos influência muito além dos conteúdos a serem ensinados, mas também condiciona as estratégias de ensino a serem aplicadas (ALENCAR, 2014). Dessa forma, o livro didático se torna um grande aliado no desenvolvimento das expectativas dos documentos oficiais e das críticas ao ensino de Geometria Analítica aqui já salientadas.

Dito isso, os livros didáticos utilizados em todas as escolas de ensino público do Brasil são ofertados e distribuídos por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Este programa é desenvolvido pelo Ministério da Educação (MEC) por meio de um edital público ao qual as editoras submetem as suas edições para análise e avaliação. As coleções de livros que forem aprovados pelo MEC são descritas no chamado Guia Digital do

PNLD (BRASIL, 2018) e este é disponibilizado no *site*. Para que os professores possam escolher a coleção a ser utilizada, exemplares dos livros e dos materiais de apoio são entregues às escolas (BRASIL, 2018)

A análise dos livros didáticos é feita de modo sistemático de acordo com a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016) e buscando reconhecer as diferentes Representações Semióticas tratadas por Duval (2009, 2011, 2012).

Para Bardin (2016), a Análise de Conteúdo consiste em um conjunto de ferramentas metodológicas, de técnicas aplicáveis a comunicações, utilizando de procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição. A Análise de Conteúdo é organizada em três fases, a saber: pré-análise, exploração do material e o tratamento dos dados e interpretação.

A primeira fase, pré-análise, tem por objetivo a organização inicial. Para isto, Bardin (2016) sugere utilizar de alguns procedimentos como: a escolha de documentos, a leitura "flutuante", a formulação de hipóteses e objetivos, a preparação do material e a elaboração de indicadores que amparem a interpretação final. Essas técnicas que conduzem a pré-análise não seguem uma ordem cronológica, apesar de estarem interligadas de forma dependente. Perceba que, para que os objetivos da análise sejam estabelecidos, é preciso conhecer os documentos disponíveis e, para que sejam definidos quais documentos serão utilizados, é necessário ter os objetivos estabelecidos (BARDIN, 2016).

Ainda nesta fase, foi estabelecido que serão analisados os oito livros didáticos selecionados pelo MEC que compõem o Guia Digital do PNLD de 2018 (BRASIL, 2018). O objetivo desta análise será reconhecer as Representações Semióticas (DUVAL, 2009, 2011, 2012) utilizadas para o estudo das equações da reta. O Guia Digital (BRASIL, 2018) afirma que o estudo da Geometria Analítica se concentra na 3ª. série do Ensino Médio, por isso, serão analisados os livros referentes a esse ano de escolaridade. Em relação ao estudo deste ramo da Matemática, o Guia Digital (BRASIL, 2018, p. 32) afirma que

> Um aspecto muito criticado, mas que persiste na abordagem da geometria analítica nas coleções, é a fragmentação dos conceitos. Por exemplo, no estudo da reta, vários tipos de equação – geral, reduzida, segmentária, paramétrica, entre outras – são apresentados isoladamente e com igual destaque, prejudicando-se, assim, uma abordagem mais integrada dessas equações. [...] São importantes as conexões da geometria analítica com outros tópicos como: gráficos de funções; representações geométricas [...].

A fase seguinte, da exploração do material, diz respeito à aplicação sistemática das decisões tomadas na fase de pré-análise. Esta fase abrange, basicamente, a decomposição, sistematização, codificação e enumeração dos dados coletados no material determinado anteriormente (BARDIN, 2016)

Tendo em vista a determinação do material prevista para a pré-análise e a sua sistematização na segunda fase, são apresentados no Quadro 2, abaixo, os livros didáticos integrantes do Guia Digital do PNLD de 2018 (BRASIL, 2018). Os demais dados coletados nesta fase são organizados por meio de quadros e demonstrados posteriormente.

Quadro 2 – Livros integrantes do PNLD 2018

| Identificação | Autor (Ano) | Título do livro |
|---|---|---|
| L1 | DANTE (2016) | Matemática: Contexto e Aplicações |
| L2 | CHAVANTE; PRESTES (2016) | Quadrante |
| L3 | IEZZI ET AL. (2016) | Matemática: Ciências e Aplicações |
| L4 | SMOLE; DINIZ (2016) | Matemática para compreender o mundo |
| L5 | BALESTRI (2016) | Matemática: Interação e Tecnologia |
| L6 | SOUZA; GARCIA (2016) | Contato Matemático |
| L7 | PAIVA (2016) | Matemática Paiva |
| L8 | LEONARDO (2016) | Conexões com a Matemática |

Fonte: Elaboração própria. [6]

A última fase determinada por Bardin (2016) refere-se ao tratamento dos dados e à interpretação. Os resultados obtidos na fase anterior são abordados de maneira a tornarem-se significativos para a pesquisa. O próprio autor esclarece que nesta fase podem ser feitas operações estatísticas simples, como a porcentagem, diagramas e modelos que condensem e destaquem as informações. Dando sequência a esta fase, após ter os dados à disposição, o pesquisador pode então propor inferências e tratar os dados, de acordo com os objetivos estabelecidos na primeira fase (BARDIN, 2016)

[6]As informações utilizadas no quadro foram obtidas por meio do Guia Digital disponível em: http://portal.mec.gov.br/busca-geral/318-programas-e-acoes-1921564125/pnld-439702797/12391-pnld. Acesso em 13 abr. 2021.

A partir disso, inicia-se a análise dos livros classificando-os de acordo com a abordagem ou não (Quadro 3) de cada uma das equações da reta estudadas nesta pesquisa. Vale destacar a importância dessa análise inicial tendo em vista que, ao tratar mais detalhadamente a forma que cada material aborda cada equação, aqueles que não a abordarem, consequentemente, não serão ali citados. Além disso, é pertinente salientar que a análise dos exercícios resolvidos e exercícios a serem resolvidos é feita após as equações.

Quadro 3 – Estudo das equações em cada livro

| Livros/Equações | Fundamental | Geral | Reduzida | Segmentária | Paramétrica |
|---|---|---|---|---|---|
| DANTE (2016) | x | x | x | x | x |
| CHAVANTE; PRESTES (2016) | x | x | x | x | x |
| IEZZI ET AL. (2016) | x | x | x | x | x |
| SMOLE; DINIZ (2016) | Não aborda | x | x | Não aborda | Não aborda |
| BALESTRI (2016) | x | x | x | Não aborda | Não aborda |
| SOUZA; GARCIA (2016) | x | x | x | Não aborda | Não aborda |
| PAIVA (2016) | x | x | x | Não aborda | x |
| LEONARDO (2016) | x | x | x | Não aborda | Não aborda |

Fonte: Elaboração própria.

O Quadro 3 evidencia um privilégio em relação a abordagem das equações fundamental, geral e reduzida, afinal, é notável que apenas um livro não aborda a equação fundamental no capítulo destinado ao estudo da Geometria Analítica. De forma análoga, percebe-se um detrimento do estudo das equações segmentárias e paramétricas. Este fato já nos revela que, apesar de os livros terem sido todos aprovados pelos critérios estabelecidos pelo MEC, as suas abordagens em relação às equações da reta se diferenciam em muitos pontos.

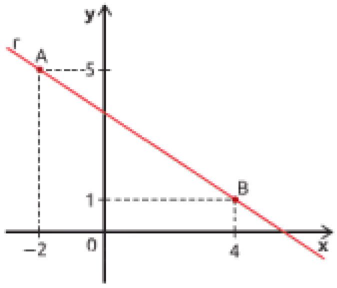
Tais diferenças podem ser exemplificadas ao direcionar a presente análise para a abertura do estudo das equações da reta em cada livro. Os livros L2, L3, L4, L5 e L6 fazem uma pequena revisão do que já foi estudado em anos anteriores sobre as equações da reta e a sua representação geométrica, como na Figura 17. Enquanto os outros livros apenas dão continuidade aos tópicos a serem estudados.

Figura 17 – Exemplo de revisão do livro L2 no início do estudo da reta

## Reta

No estudo da função afim, vimos que sua representação gráfica no plano cartesiano corresponde a uma reta não perpendicular ao eixo das abscissas, isto é, não vertical.

Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos de uma reta, é possível representá-la no plano cartesiano, porque dois pontos distintos determinam uma única reta. Por exemplo, dados os pontos $A(-2,5)$ e $B(4,1)$, podemos obter sua representação no plano cartesiano indicando os pontos $A$ e $B$ e a reta $r$ que passa por eles.




Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 108).

Outra distinção relacionada à abordagem preliminar dos livros ocorre em relação a qual equação se dá por qual é abordada primeiramente: os livros L1, L2, L6 e L7 dão início por meio da determinação do coeficiente angular e, a partir deste, determinam a equação fundamental da reta; já os demais livros utilizam da matriz de condição de alinhamento de três pontos, que é uma condição estudada anteriormente em Geometria Analítica, para determinarem a equação geral.

Dito isso, a primeira equação da reta a ser aqui analisada, de acordo com os diferentes registros de representação em que esta é simbolizada, será a equação fundamental da reta. Como explicitado anteriormente, esse formato da equação da reta é introduzido nos livros a partir do cálculo do coeficiente angular da reta, os quais, em geral, têm uma perspectiva muito similar ao trabalharem com essa equação, conforme segue exemplificado na Figura 18.

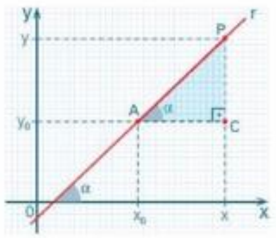
Figura 18 – Exemplo de estudo da equação fundamental no livro L5

**Equação da reta conhecidos um ponto e o coeficiente angular**

Já vimos que dois pontos distintos determinam uma única reta no plano cartesiano. Também podemos determinar a equação da reta dados um ponto $A(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular **m**. Para isso, consideramos um ponto $P(x, y)$ da reta, distinto de **A**. Nesse caso, temos:

$$\underbrace{\operatorname{tg}\alpha}_{m} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

A equação da reta que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$ e possui coeficiente angular **m** pode ser determinada por $y - y_0 = m(x - x_0)$.




O ponto **C** foi determinado de modo que o triângulo ACP seja retângulo.

Se a reta for paralela ao eixo $x$, isto é, $m = 0$, então a equação da reta é dada por $y = y_0$. Mas se a reta for paralela ao eixo $y$, embora o coeficiente angular **m** não esteja definido, a equação da reta é dada por $x = x_0$.

Exemplo: A equação da reta que passa pelo ponto $A(3, 5)$ e tem coeficiente angular $m = -4$ é dada por:

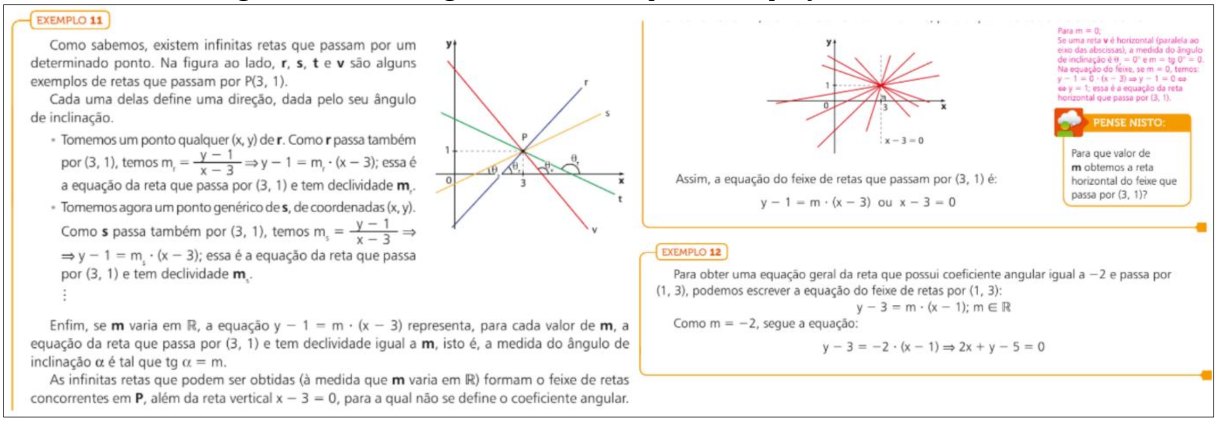
$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = -4(x - 3) \Rightarrow y - 5 = -4x + 12 \Rightarrow \boxed{4x + y - 17 = 0}$$

Fonte: Balestri (2016, p. 161).

Ao analisar a figura acima, fica claro que essa perspectiva de estudo da equação fundamental explora as três atividades cognitivas teorizadas por Duval (2012): o tratamento, a conversão e a formação de uma representação identificável. Ao partir da tg $\alpha$, manipular algebricamente a igualdade e, por meio desta, chegar na representação algébrica generalizada da equação, configura um exemplo clássico de tratamento da informação. É possível verificar que do lado direito da Figura 18 há uma representação geométrica das informações exploradas algebricamente, logo, há uma clara utilização de dois diferentes registros. Apesar disso, nota-se que no dado exemplo, na parte inferior da Figura 18, há a exclusividade do registro algébrico. Observa-se também que, no quadro cinza, há a construção de uma representação identificável, apesar desta não ter tanto destaque quanto as outras.

Diferentemente de todos os livros, o L5 traz o estudo da equação fundamental apenas em dois exemplos resolvidos, antes dos exercícios, de modo muito rápido e predominantemente algébrico, como é possível notar na Figura 19. Essa equação somente é mencionada novamente ao final do capítulo, em uma página sobre a demonstração da fórmula de distância de um ponto a reta.

Figura 19 – Abordagem do livro L5 quanto a equação fundamental



EXEMPLO 11

Como sabemos, existem infinitas retas que passam por um determinado ponto. Na figura ao lado, **r**, **s**, **t** e **v** são alguns exemplos de retas que passam por P(3, 1).

Cada uma delas define uma direção, dada pelo seu ângulo de inclinação.

- Tomemos um ponto qualquer (x, y) de **r**. Como **r** passa também por (3, 1), temos $m_r = \frac{y-1}{x-3} \Rightarrow y - 1 = m_r \cdot (x-3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m}_r$.
- Tomemos agora um ponto genérico de **s**, de coordenadas (x, y). Como **s** passa também por (3, 1), temos $m_s = \frac{y-1}{x-3} \Rightarrow$ $\Rightarrow y - 1 = m_s \cdot (x-3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m}_s$.

⋮

Enfim, se **m** varia em $\mathbb{R}$, a equação $y - 1 = m \cdot (x - 3)$ representa, para cada valor de **m**, a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade igual a **m**, isto é, a medida do ângulo de inclinação $\alpha$ é tal que tg $\alpha = m$.

As infinitas retas que podem ser obtidas (à medida que **m** varia em $\mathbb{R}$) formam o feixe de retas concorrentes em **P**, além da reta vertical $x - 3 = 0$, para a qual não se define o coeficiente angular.

Assim, a equação do feixe de retas que passam por (3, 1) é:

$$y - 1 = m \cdot (x - 3) \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

Para m = 0;
Se uma reta **v** é horizontal (paralela ao eixo das abscissas), a medida do ângulo de inclinação é $\theta_v = 0°$ e $m = \text{tg } 0° = 0$.
Na equação do feixe, se m = 0, temos: $y - 1 = 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 1$; essa é a equação da reta horizontal que passa por (3, 1).

PENSE NISTO:

Para que valor de **m** obtemos a reta horizontal do feixe que passa por (3, 1)?

EXEMPLO 12

Para obter uma equação geral da reta que possui coeficiente angular igual a −2 e passa por (1, 3), podemos escrever a equação do feixe de retas por (1, 3):

$$y - 3 = m \cdot (x - 1);\ m \in \mathbb{R}$$

Como m = −2, segue a equação:

$$y - 3 = -2 \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 38-39).

Quanto à abordagem da equação geral da reta, os livros diferenciam-se um pouco mais. Os livros L1, L2 e L7 apenas definem a equação e manipulam algebricamente equações em outros formatos para o da equação geral, priorizando, então, o registro algébrico e o tratamento dos dados. Os livros L4, L5 e L8 utilizam a condição de alinhamento de três pontos de forma generalizada para resultar na equação geral - os três utilizam o registro algébrico dessa equação generalizada - e, por fim, os livros L4 e L5 apresentam exemplos da condição de alinhamento, acompanhado do gráfico dessa equação exemplo.

Um fato interessante é que o livro L7, apesar de ter um capítulo intitulado “Geometria analítica: ponto e reta”, no qual é abordada a equação fundamental, apenas é apresentada a equação geral no capítulo seguinte: “Formas da equação da reta, paralelismo e perpendicularidade”, exemplificando a fragmentação dos conceitos citada no Guia Digital (BRASIL, 2018).

Já o livro L6, traz uma abordagem um pouco mais diversificada. Ao definir a equação em um parágrafo e, em seguida, exemplifica a transformação tanto da equação fundamental para a equação geral, como a transformação da matriz referente à condição de alinhamento de três pontos para a mesma equação geral. Esse livro traz um único registro algébrico dessa equação geral resultante desses dois exemplos.

O livro L3 possui o estudo mais extenso da equação geral, pois traz o registro geométrico em destaque logo na primeira página e faz alguns exemplos da condição de alinhamento de três pontos, resultando na equação geral. Em seguida, apresenta a definição da equação geral e demonstra, de forma generalizada, a relação entre a condição de alinhamento e a equação em sua forma geral. Diferentemente dos outros livros, o L3 expõe alguns exemplos de manipulação algébrica, todos acompanhados do seu devido registro geométrico e, ainda sim, traz a demonstração da propriedade na Figura 20.

Figura 20 – Demonstração feita pelo livro L3

**Recíproca da propriedade**

A toda equação da forma ax + by + c = 0, em que **a**, **b** e **c** são números reais tais que a ≠ 0 ou b ≠ 0, está associada uma única reta **r** do plano cartesiano, cujos pontos possuem coordenadas (x, y) que satisfazem essa equação.

**Demonstração:**

Sejam $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$ três pontos distintos cujas coordenadas satisfazem a equação ax + by + c = 0. Vamos mostrar que **M**, **N** e **P** pertencem a uma mesma reta (admitimos a ≠ 0).

Temos:

$$\begin{cases} ax_M + by_M + c = 0 \Rightarrow x_M = \dfrac{-by_M - c}{a} \\ ax_N + by_N + c = 0 \Rightarrow x_N = \dfrac{-by_N - c}{a} \\ ax_P + by_P + c = 0 \Rightarrow x_P = \dfrac{-by_P - c}{a} \end{cases}$$

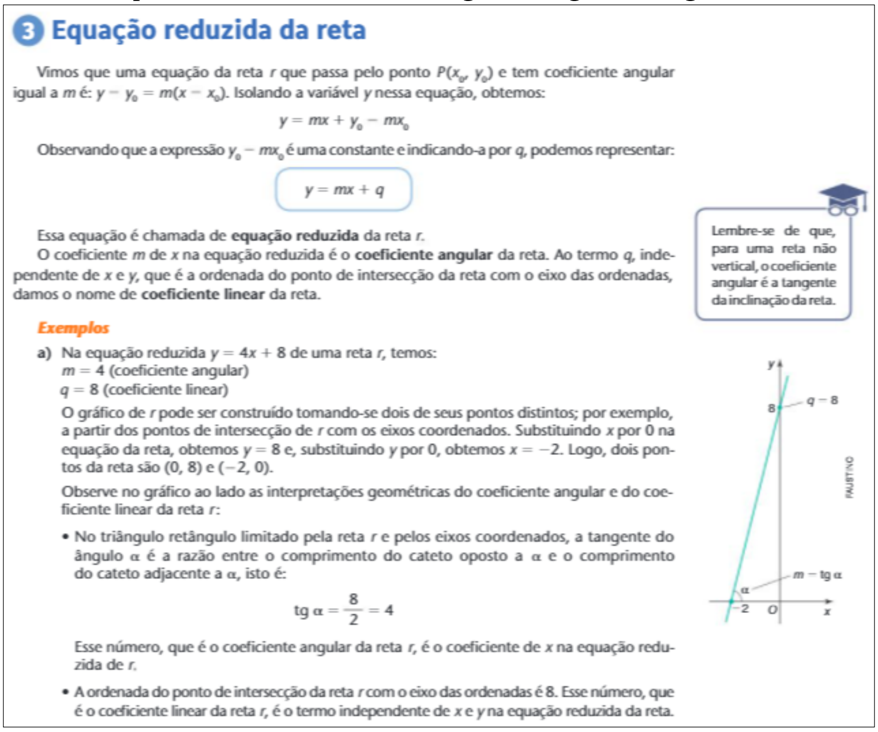
Calculamos o determinante: $\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-by_M - c}{a} & y_M & 1 \\ \dfrac{-by_N - c}{a} & y_N & 1 \\ \dfrac{-by_P - c}{a} & y_P & 1 \end{vmatrix}$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 27).

Em relação à equação reduzida da reta, a maioria dos livros têm uma abordagem mais parecida entre si. Os livros L1, L2, L5, L6 e L8 determinam a equação reduzida da reta a partir da manipulação algébrica (tratamento) de uma equação fundamental que intersecta o eixo $y$ no ponto $(0, n)$ e, em seguida, apresentam a denominação dos coeficientes: angular e linear. Apenas os livros L5, L6 e L8 utilizam da representação geométrica das retas e somente os L5 e L6 exibem alguns exemplos. O livro L6 traz apenas um exemplo relacionando uma função afim $f(x) = 3x - 5$ com a equação reduzida $y = 3x - 5$, afirmando que os gráficos são correspondentes; o livro L8 também faz essa associação, mas de forma generalizada; já o livro L5 não apresenta esse tipo de associação.

Apesar de o livro L7 introduzir a equação reduzida da reta exatamente na mesma perspectiva que os outros livros, este diferencia-se pela forma que aborda os seus exemplos. Assim, destaca-se que, primeiramente, faz a conversão entre o registro algébrico e geométrico: uma equação reduzida da reta é apresentada, identificam-se os seus coeficientes (angular e linear) e, em seguida, traz um texto explicando como, a partir de uma equação dada, traçar a reta correspondente em um plano cartesiano. Em seguida, é abordada a manipulação algébrica da equação geral para a equação reduzida, tanto por exemplos como de forma generalizada, conforme fica notável na Figura 21.

Figura 21 – Exemplo de conversão entre os registros algébrico e geométrico no livro L7



## 3 Equação reduzida da reta

Vimos que uma equação da reta $r$ que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular igual a $m$ é: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Isolando a variável $y$ nessa equação, obtemos:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Observando que a expressão $y_0 - mx_0$ é uma constante e indicando-a por $q$, podemos representar:

$$\boxed{y = mx + q}$$

Essa equação é chamada de **equação reduzida** da reta $r$.

O coeficiente $m$ de $x$ na equação reduzida é o **coeficiente angular** da reta. Ao termo $q$, independente de $x$ e $y$, que é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas, damos o nome de **coeficiente linear** da reta.

Lembre-se de que, para uma reta não vertical, o coeficiente angular é a tangente da inclinação da reta.

***Exemplos***

**a)** Na equação reduzida $y = 4x + 8$ de uma reta $r$, temos:
$m = 4$ (coeficiente angular)
$q = 8$ (coeficiente linear)

O gráfico de $r$ pode ser construído tomando-se dois de seus pontos distintos; por exemplo, a partir dos pontos de intersecção de $r$ com os eixos coordenados. Substituindo $x$ por 0 na equação da reta, obtemos $y = 8$ e, substituindo $y$ por 0, obtemos $x = -2$. Logo, dois pontos da reta são $(0, 8)$ e $(-2, 0)$.

Observe no gráfico ao lado as interpretações geométricas do coeficiente angular e do coeficiente linear da reta $r$:

- No triângulo retângulo limitado pela reta $r$ e pelos eixos coordenados, a tangente do ângulo $\alpha$ é a razão entre o comprimento do cateto oposto a $\alpha$ e o comprimento do cateto adjacente a $\alpha$, isto é:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{2} = 4$$

Esse número, que é o coeficiente angular da reta $r$, é o coeficiente de $x$ na equação reduzida de $r$.

- A ordenada do ponto de intersecção da reta $r$ com o eixo das ordenadas é 8. Esse número, que é o coeficiente linear da reta $r$, é o termo independente de $x$ e $y$ na equação reduzida da reta.



Fonte: Paiva (2016, p. 145).

Já o livro L3, logo após ao estudo da equação geral, propõe, em um exemplo, isolar a variável $y$ em relação à variável $x$ e associa essa nova equação determinada a uma função afim. Entretanto, este livro apenas traz o estudo sobre a equação reduzida da reta algumas páginas depois, este estudo é feito pelo cálculo do coeficiente angular a partir da utilização de um ponto genérico $(x, y)$ e um ponto no eixo $y$ $(0, n)$. Também é possível destacar os exemplos diversificados abordados em seguida que abrangem tanto a representação algébrica e o tratamento quanto a representação geométrica das retas.

O livro L4 tem uma abordagem bem sucinta da equação reduzida, apenas manipula a equação geral, dividindo todos os fatores pelo coeficiente $b$ e, em seguida, substitui a razão dos coeficientes $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$. Este livro não apresenta nenhum exemplo e traz uma representação geométrica da reta que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, n)$.

Mediante ao citado anteriormente no Quadro 3, apenas os livros L1, L2 e L3 abordam a equação segmentária da reta. No livro L1 esse estudo é feito a partir do cálculo do coeficiente angular e da determinação da equação reduzida da reta, utilizando seus pontos de interseção com os eixos coordenados. A equação reduzida determinada é manipulada algebricamente (tratamento) de forma a resultar no formato da equação segmentária. Ao lado dessa manipulação há o registro geométrico da reta de forma a induzir o aluno a associar os denominadores as interseções com os eixos.

O livro L2 apresenta a equação segmentária apenas em exercício ao final do estudo das outras formas da equação. No enunciado desse exercício são aplicados os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados na condição de alinhamento de três pontos, resultando em uma equação geral que é manipulada (essa demonstração é acompanhada de uma representação geométrica).

Já no livro L3, apesar deste também utilizar os pontos de interseção da reta com os eixos coordenados, ele aplica esses pontos $(p, 0)$ e $(0, q)$ na condição de alinhamento de três pontos e manipula a equação geral obtida pela matriz para o formato da equação segmentária. O diferencial deste livro é a explicação mais detalhada logo em seguida sobre o significado da equação neste formato e um exemplo, logo após, que mostra a manipulação algébrica da equação segmentária para as equações geral e reduzida, acompanhado do registro algébrico dessa reta.

Conforme já explicitado no Quadro 3, metade dos livros não abordam a equação paramétrica da reta. O livro L2 não traz um estudo específico para ela, apenas a define sucintamente e a manipula algebricamente da equação geral para a paramétrica e vice-versa em um exercício resolvido. Os livros L1 e L7 utilizam de exercícios contextualizados para abordar esta equação, e após o exercício, a definem rapidamente, sem nenhum tipo de registro gráfico.

Já o livro L3, tem a abordagem mais detalhada da equação paramétrica pois este a define e em seguida utiliza de um exemplo (não contextualizado) para mostrar o efeito que o parâmetro tem nesse tipo de reta, utilizando da conversão do registro algébrico para o numérico e do registro numérico para o geométrico. Além disso, este livro não deixa de contemplar o tratamento por meio da manipulação algébrica da equação paramétrica para a algébrica.

Como já foram analisadas as abordagens realizadas pelos livros didáticos determinados no Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2018), basta agora retornar a análise para os exercícios resolvidos (aqueles em que o livro traz o enunciado e a resolução em seguida) e aos exercícios propostos (exercícios que contêm apenas o enunciado da questão). A relevância da análise dos exercícios ofertados ocorre pela necessidade cada vez maior de desenvolver nos alunos a capacidade de resolver questões, elaborar estratégias e prever resultados. Dito isso, a análise aqui relatada diz respeito a Tabela 1, que é referente ao quantitativo de exercícios, de acordo com as atividades cognitivas de tratamento (T) e conversão (C).

Tabela 1 – Quantitativo de exercícios – Parte 1

| **Quantitativo de exercícios** | | **Exercícios do tipo "determine a equação da reta a partir das informações dadas"** | | **Equações** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Fundamental** | | **Geral** | | **Reduzida** | | **Segmentária** | | **Paramétrica** | |
| | | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** |
| **L1** | **Exercícios resolvidos** | 2 | | 2 | | 4 | | 1 | | 1 | | 1 | |
| | **Exercícios propostos** | 6 | 1 | 1 | 1 | 8 | 1 | 5 | | 2 | | 2 | |
| **L2** | **Exercícios resolvidos** | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | 1 | 1 |
| | **Exercícios propostos** | 2 | | | | 3 | 2 | | 3 | 1 | | 1 | |

Tabela 1 – Quantitativo de exercícios – Parte 2

| **Quantitativo de exercícios** | | **Exercícios do tipo "determine a equação da reta a partir das informações dadas"** | | **Equações** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Fundamental** | | **Geral** | | **Reduzida** | | **Segmentária** | | **Paramétrica** | |
| | | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** |
| **L3** | **Exercícios resolvidos** | | | | | 1 | 3 | 1 | 1 | | | | |
| | **Exercícios propostos** | 3 | 5 | 2 | | 25 | 8 | 9 | 6 | 4 | 1 | 5 | |
| **L4** | **Exercícios resolvidos** | 1 | 2 | | | 2 | | 1 | 3 | | | | |
| | **Exercícios propostos** | 1 | 3 | 3 | | 8 | 3 | 5 | 2 | | | | |

Tabela 1 – Quantitativo de exercícios – Parte 3

| **Quantitativo de exercícios** | | **Exercícios do tipo "determine a equação da reta a partir das informações dadas"** | | **Equações** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Fundamental** | | **Geral** | | **Reduzida** | | **Segmentária** | | **Paramétrica** | |
| | | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** |
| **L5** | **Exercícios resolvidos** | | | | | 2 | | 1 | | | | | |
| | **Exercícios propostos** | 4 | 1 | | | | 2 | | 1 | | | | |
| **L6** | **Exercícios resolvidos** | | | | | 2 | 2 | | | | | | |
| | **Exercícios propostos** | | 2 | | | 5 | | 3 | 4 | | | | |

Tabela 1 – Quantitativo de exercícios – Parte 4

| **Quantitativo de exercícios** | | **Exercícios do tipo "determine a equação da reta a partir das informações dadas"** | | **Equações** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Fundamental** | | **Geral** | | **Reduzida** | | **Segmentária** | | **Paramétrica** | |
| | | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** | **T** | **C** |
| **L7** | **Exercícios resolvidos** | | | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | | | | 1 | |
| | **Exercícios propostos** | 3 | 8 | 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 4 | | | 5 | |
| **L8** | **Exercícios resolvidos** | | 1 | 1 | | 5 | | 2 | 1 | | | | |
| | **Exercícios propostos** | 5 | 4 | | | 8 | | 3 | 2 | | | | |
| **Total** | | 28 | 27 | 12 | 3 | 79 | 25 | 37 | 28 | 8 | 1 | 16 | 1 |

Fonte: Elaboração própria.

Ao observar o total de exercícios em cada coluna, nota-se que, em todas as equações, o quantitativo de exercícios que trabalham o tratamento das equações é maior que a quantidade de exercícios que trabalham a conversão dos registros, reiterando assim, o Guia Digital (BRASIL, 2018) que afirma que há a predominância de exercícios repetitivos, fazendo com que o aluno apenas aplique os dados apresentados no texto, de forma similar ao que foi feito no exemplo apresentado. Não significando que o tratamento implica em exercícios repetitivos, mas, sim, que a ênfase nessa atividade cognitiva em preferência a conversão resulta, na maioria dos casos, na repetição dos exercícios.

Outro ponto a ser considerado é que boa parte dos exercícios (39,2%) são apenas sobre a equação geral da reta, evidenciando assim uma priorização tanto do tratamento quanto da conversão desse tipo de equação em relação às outras. Em contrapartida, os exercícios que trazem as equações segmentária e paramétrica mostram-se em minoria das atividades com 3,4% e 6,4% das questões, respectivamente. Apesar disso, 20,75% dos exercícios apresentavam algumas informações como coordenadas de pontos e valores de coeficientes angulares, e pediam apenas para que fosse determinada uma equação da reta, sem especificar o formato desejado.

Também fica evidente a escassez de exercícios que trabalhem a conversão entre as equações segmentárias e paramétricas e seus respectivos gráficos, principalmente ao comparar os valores referentes à quantidade de exercícios sobre as equações gerais e reduzidas em que são propostas a conversão nos dois sentidos.

Em síntese, tanto nos exercícios quanto nas definições e exemplos das equações, há um privilégio muito evidente quanto às equações gerais e reduzidas, e, especialmente, ao tratamento dessas, ou seja, a manipulação algébrica desses dois formatos da equação da reta. É importante ressaltar que o estudo da Geometria Analítica e, por consequência, das equações da reta por ela abordada, proporciona um olhar único por essa união da Álgebra com a Geometria. Assim, o estudo dessa disciplina poderia ter uma característica de conversão das representações muito mais expressiva.

## 2.4 Trabalhos Relacionados

Almejando um maior aprofundamento no tema da monografia e para identificar outras pesquisas correlatas a esta, foi realizado no dia quatro de maio de 2021, uma pesquisa no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

(CAPES), com as seguintes palavras “Ensino Híbrido AND Geometria Analítica”. Esta pesquisa resultou em 76 trabalhos. Para refinar esta busca, foram utilizados os seguintes filtros: (i) Grande Área de Conhecimento: Escolheu-se Ciências Exatas e da Terra e Multiplidiscinar, gerando 34 trabalhos. (ii) Área do Conhecimento: Ensino; Ensino de Ciências e Matemática; Matemática, restando 8 trabalhos.

Dentre os oito trabalhos restantes, escolheu-se filtrá-los novamente (Quadro 4). Dois desses trabalhos são relacionados ao estudo de Matemática, mas não estão associados ao ensino da disciplina, portanto, foram excluídos. Um dos trabalhos tem como objetivo apresentar a metodologia do ensino híbrido para professores do Ensino Fundamental, então, por não ser uma pesquisa relacionada ao ensino de Geometria Analítica, também foi excluído. Outros três trabalhos foram excluídos por abordarem conteúdos diferentes (Fractais, Geometria Plana e Geometria Espacial).

Quadro 4 – Filtros e critério de exclusão utilizados no banco da CAPES

| Filtros | Resultados |
|---|---|
| Grande Área de Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra; Multidisciplinar. | 34 trabalhos |
| Área de Conhecimento: Ensino; Ensino de Ciências e Matemática; Matemática. | 8 trabalhos |
| **Critério de exclusão** | |
| Não estar relacionado com o ensino da Geometria Analítica | 2 trabalhos |

Fonte: Elaboração própria.

Desta forma, restaram apenas dois trabalhos que desenvolvem estudos sobre o ensino de Geometria Analítica, são eles “Proposta Para a Abordagem de Geometria Analítica Via Ensino Híbrido” (SILVA, 2017) e “O Ensino de Matemática e o Processo de Construção da Autonomia do Aluno Através das Metodologias Ativas e Híbridas” (BELLOTTO, 2019).

Devido à baixa quantidade de trabalhos correlatos na plataforma da CAPES, houve a necessidade de uma nova pesquisa. Assim, no dia quatorze de maio de 2021 foi realizada uma consulta no Google Acadêmico com as seguintes palavras-chaves “Ensino Híbrido” e “Geometria Analítica”. Essa pesquisa resultou em 76 trabalhos que foram filtrados de acordo com o Quadro 5.

Quadro 5 – Filtro e critérios de exclusão utilizados no Google Acadêmico

| **Filtros** | **Resultados** |
|---|---|
| Pesquisar páginas em Português | 64 trabalhos |
| **Critério de exclusão** | |
| Não estar relacionado com o ensino da Geometria Analítica | 9 trabalhos |
| Não utilizar o Ensino Híbrido como modalidade de ensino | 4 trabalhos |

Fonte: Elaboração própria.

Diante da quantidade de trabalhos localizados (64 trabalhos), foi realizada a leitura do resumo de todos eles, buscando não descartar apenas aquelas pesquisas que estivessem diretamente relacionadas ao ensino de Geometria Analítica, tendo em vista a obtenção de trabalhos que sejam realmente correlatos a esta monografia. A maioria dos 55 trabalhos que foram excluídos por meio deste critério apenas continham a palavra-chave "Geometria Analítica" em algum ponto do texto, sem apresentar direta relação com o estudo da disciplina.

A partir dos nove trabalhos resultantes, cinco foram excluídos devido a uma razão similar a anterior: os trabalhos apenas contêm a palavra-chave, sem relação legítima com esta monografia. Dessa forma, a pesquisa no Google Acadêmico resultou em apenas quatro trabalhos, sendo que um deles é o mesmo trabalho escrito por Bellotto (2019) que também foi encontrado na plataforma da CAPES.

Assim, serão relatados os artigos: "Geometria Analítica no Ensino Superior: uma Proposta de Ensino Híbrido" (CARPES *et al.*, 2018); "Ensino Híbrido e o Desenvolvimento de Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular" (TREVISANI; CORRÊA, 2020); e "Blended Learning: Uma Experiência Sobre a Implantação de Disciplinas na Modalidade EAD em uma IES" (HALLAL *et al.*, 2014).

### 2.4.1 Proposta Para a Abordagem de Geometria Analítica Via Ensino Híbrido

A partir de experiências pessoais bem-sucedidas com o ensino de Matemática apoiado em tecnologias em escolas particulares na cidade do Rio de Janeiro, Silva (2017) desenvolveu a sua dissertação com o seguinte objetivo geral

> Analisar de que forma a metodologia híbrida contribui para personalização do ensino e desenvolvimento da autonomia para execução das atividades propostas em Geometria Analítica, por parte dos alunos do 3º ano do Ensino Médio do Centro Educacional Camões-Pinóchio ao utilizar como recurso didático tecnológico o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. (SILVA, 2017, p. 19).

Apesar do objetivo geral acima, a pesquisa empenha-se em responder a dois questionamentos feitos pelo autor: “Com o uso de novas tecnologias no processo educacional é possível obter maiores sucessos no aprendizado em Matemática de alunos inseridos na “Era Digital”?” e “Os educadores, em geral, possuem dificuldades em lidar com tecnologia em sala de aula, conhecem o termo “Educação Híbrida” e suas diversas aplicações?” (SILVA, 2017, p. 82-83).

Para atingir o objetivo geral determinado e responder a esses dois questionamentos, foram aplicadas atividades baseadas no modelo do Ensino Híbrido de Rotação por Estações para duas turmas da 3ª série do Ensino Médio com 20 alunos em cada turma. Inicialmente, cada turma foi dividida em quatro grupos de cinco e foi entregue o plano de aula das atividades que iriam realizar. As atividades tinham como pré-requisitos o conhecimento do Teorema de Pitágoras e do *software* GeoGebra, a ser utilizado para o ensino da distância entre dois pontos e da equação da circunferência em suas formas geral e reduzida (SILVA, 2017)

Na primeira estação os alunos assistiram a um vídeo sobre a distância entre dois pontos. Já na segunda estação, eles fizeram uma atividade sobre o conteúdo estudado pelo vídeo. Esses exercícios buscavam desenvolver a atividade cognitiva de conversão, pois, estes exigiam a transformação entre os registros numéricos e geométricos. Essas estações contavam com quinze e cinco minutos, respectivamente, para que as atividades fossem realizadas (SILVA, 2017)

A terceira estação contava com um vídeo para ser assistido sobre a circunferência e, na quarta, foi solicitado que fossem construídas no GeoGebra algumas circunferências, dadas as suas equações em diversos formatos. Essas estações contavam com vinte minutos e dez minutos, respectivamente, para que as atividades fossem realizadas (SILVA, 2017).

A quinta estação possuía mais um vídeo para ser assistido, sobre a equação da circunferência, e na sexta, foi solicitado que os alunos determinassem a equação de uma circunferência dados seu centro e raio, e que determinassem a equação reduzida a partir da equação geral. Essas estações contavam com vinte minutos cada para que as atividades fossem realizadas (SILVA, 2017).

Durante a descrição das estações, o autor evidencia a todo momento a posição de mediador das atividades assumida por ele, apenas orientando e sanando as dúvidas, caso existissem. Também foi esclarecido que a todo momento os alunos tinham a liberdade para voltar e reassistir ao vídeo, caso julgassem necessário e que as atividades deveriam ser realizadas no ritmo de cada um, apesar de o autor ter determinado um tempo máximo para cada estação. Ao final da Rotação nas Estações, foram entregues três questionários para que os estes registrassem as suas percepções quanto às atividades realizadas (SILVA, 2017).

Além disso, o autor reconhece diversas vantagens proporcionadas pela modalidade híbrida como o debate e a colaboração entre os alunos, o ritmo individualizado de estudo e o uso significativo das tecnologias. Esses resultados podem ser validados de acordo com as respostas fornecidas nos questionários (SILVA, 2017).

De acordo com as respostas do questionário II, constatou-se que os alunos consideraram a aula mais dinâmica com a utilização de tecnologias e que a maioria deles solicitariam ao professor a utilização em aulas regulares. Assim, apenas quatro alunos (10%) responderam não terem compreendido os conteúdos, o que o autor atribui a falta de domínio dos pré-requisitos, em contrapartida aos 90% dos alunos que afirmaram terem compreendido total ou parcialmente o conteúdo (SILVA, 2017).

Já com as respostas obtidas no questionário III, ficou perceptível que a utilização de vídeos ou de plataformas de ensino auxiliam a construção do conhecimento do aluno em diversos aspectos, como reapresentar e reforçar conteúdos já estudados, explorar novos exercícios, complementar o conteúdo, respeitar o ritmo de aprendizado de cada um, dentre outros. Juntamente com o autor, eles também reconheceram esse auxílio das plataformas de ensino e de vídeo aulas, visto que 72,5% deles afirmaram utilizar essas ferramentas para o estudo (SILVA, 2017).

Nas considerações finais da sua pesquisa o autor volta aos dois questionamentos feitos no início do seu trabalho, trazendo a afirmação de que o uso de tecnologias no ensino realmente contribui para o sucesso no aprendizado de Matemática, apesar de não ignorar a importância de uma mediação qualificada por parte do professor para o alcance desse sucesso. Dessa forma, afirma ainda que trabalhar com recursos tecnológicos nas aulas pode, de fato, caracterizar um desafio até mesmo para os docentes mais experientes, especialmente quando as dificuldades são causadas por falta de internet, computadores em mau estado de funcionamento ou outras formas de suporte às aulas que são necessárias e independem do conhecimento e formação do professor (SILVA, 2017).

### 2.4.2 O Ensino de Matemática e o Processo de Construção da Autonomia do Aluno Através das Metodologias Ativas e Híbridas

A partir do reconhecimento das deficiências e dificuldades existentes no aprendizado de Matemática, Bellotto (2019, p. 16) determinou como o objetivo geral da sua dissertação “[...] compreender a construção do processo da autonomia mediante a personalização de ensino e do estudo de conteúdos matemáticos em salas ambientes.” Buscando atender a esse objetivo, foram desenvolvidas atividades a serem aplicadas em duas turmas de uma escola da rede privada do município de Curitibanos/SC, sendo uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental e outra da 3º série do Ensino Médio. Neste relato, a ênfase é na turma do Ensino Médio, devido à maior proximidade com o público alvo desta monografia (BELLOTTO, 2019).

A aplicação de quatro sequências didáticas com os vinte alunos da 3ª série do Ensino Médio ocorreu durante o segundo bimestre do ano de 2019, por meio de combinações entre os seguintes modelos do Ensino Híbrido: Sala de Aula Invertida, Rotação Individual, Rotação por Estações e Laboratório Rotacional (BELLOTTO, 2019).

Na primeira aplicação, utilizando o modelo de Sala de Aula Invertida, desenvolveu-se uma sequência didática sobre a história da Geometria Analítica. Como “dever de casa”, a turma, dividida em dois grupos, deveria acessar a plataforma do Google Classroom e estudar os materiais disponibilizados. O grupo 1 estudaria sobre Pierre de Fermat e o grupo 2 sobre René Descartes (BELLOTTO, 2019).

Na aula presencial os alunos foram organizados de acordo com seus grupos e iniciaram as atividades de discussão sobre o material estudado e a elaboração de uma apresentação para a turma. Durante essa primeira aula, a pesquisadora assumiu a posição de mediadora, intervindo apenas quando necessário. Por exemplo, o grupo 1 precisou de auxílio devido a quatro integrantes que não realizaram a atividade em casa (BELLOTTO, 2019).

Em seguida, os grupos iniciaram as suas apresentações preparadas e, em conjunto com essas apresentações, foram feitas discussões a respeito dos matemáticos e de suas contribuições para o desenvolvimento da Geometria Analítica (BELLOTTO, 2019).

Na segunda aplicação, utilizando os modelos de Rotação Individual e a Sala de Aula Invertida, elaborou-se a aula visando sanar as dificuldades dos alunos sobre a distância entre dois pontos, o ponto médio de um segmento de reta, o baricentro de um triângulo e a condição de alinhamento de três pontos. Inicialmente, eles deveriam acessar a plataforma do Google Classroom e assistir a algumas videoaulas, como atividade para casa (BELLOTTO, 2019).

Na primeira aula presencial os alunos deveriam elaborar, de forma individual, uma “miniaula” sobre os conteúdos revisados em casa. Para isso, foram disponibilizados computadores, celulares, livros didáticos, videoaulas, *software* GeoGebra, entre outros recursos. A pesquisadora afirma que neste momento houve a possibilidade de avançar da exposição para a interação individual com o conteúdo, além de lhes proporcionar uma participação mais ativa na construção do seu conhecimento (BELLOTTO, 2019).

Na segunda aula eles logo foram apresentando os seus materiais e as ideias aos seus colegas de classe, sanando as suas próprias dúvidas, desenvolvendo a sua autonomia e, ao mesmo tempo, reforçando conceitos e procedimentos matemáticos. Já na terceira aula, os alunos realizaram atividades selecionadas por eles mesmos, sendo elas do livro didático e de vestibulares (BELLOTTO, 2019).

A terceira aplicação, por sua vez, contou com o modelo de Rotação por Estações, o qual a pesquisadora continuou a abordar o conteúdo de Geometria Analítica, mas dessa vez, reforçando o aprendizado da conversão entre as representações algébricas e geométricas. A rotação foi realizada em volta de diferentes ambientes denominados “o que escolher”, “personalizar”, “espiral”, “ação” e “ambiente final”. Em cada ambiente, deveria ser realizado um tipo de atividade (BELLOTTO, 2019).

Nas duas primeiras aulas, as quais compõem o ambiente “o que escolher”, a pesquisadora apresentou dez conteúdos de Geometria Analítica listados na lousa e, desses conteúdos, os alunos deveriam escolher dois para estudarem de forma mais aprofundada. A partir da escolha feita, formaram-se as duplas de trabalho. Em seguida, no ambiente “personalizar”, eles discutiram as suas soluções, comparam com a representação geométrica com o *software* GeoGebra, montaram mapas mentais e, por fim, elaboraram apresentações em slides.  “Os educandos utilizaram diferentes espaços, como biblioteca, sala de Informática, sala de aula, pátio, entre outros, acessaram links, sites e videoaulas para estudos e aprofundamento dos temas escolhidos [...]” (BELLOTTO, 2019, p. 76).

Nas quatro aulas seguintes os alunos apresentaram os seus temas correspondendo ao ambiente “espiral”. Já nas duas últimas aulas, contemplando os ambientes “ação” e “final”, foram realizados exercícios com o intuito de aprofundar e consolidar os estudos realizados no ambiente “espiral”. Ao fim das atividades, a pesquisadora notou bons desempenhos na turma, tendo em vista que onze dentre os vinte alunos acertaram 80% dos exercícios, cinco deles acertaram 60% e apenas quatro acertaram 50%. Além disso, 75% da turma conseguiu resolver questões de vestibulares dos conteúdos estudados (BELLOTTO, 2019).

Na última aplicação, a pesquisadora utilizou dos modelos de Sala de Aula Invertida e Laboratório Individual para estudar as posições relativas entre um ponto e uma circunferência, uma reta e uma circunferência e duas circunferências. Em casa, os alunos deveriam acessar a plataforma do Google Classroom e estudar os conteúdos disponibilizados. Na escola, eles foram encaminhados para uma sala onde pudessem ter acesso a tecnologias para que resolvessem os exercícios propostos na plataforma, tirassem dúvidas, utilizassem o *software* GeoGebra para relacionar as representações algébricas e geométricas (BELLOTTO, 2019).

Nessa atividade os alunos tiveram uma postura muito mais ativa e participativa, com discussões pertinentes, tanto com colegas de classe como com a própria pesquisadora, argumentações coerentes, relacionando os temas com os conteúdos estudados na proposta didática que utilizou o modelo de Rotação por Estações, exemplificando, assim, o potencial das metodologias ativas e da modalidade híbrida (BELLOTTO, 2019).

Em relação às percepções dos alunos com as atividades realizadas, estes afirmaram que se sentiram mais motivados, autônomos, que desenvolveram um maior sentido de capacidade em relação ao estudo da Matemática, maior facilidade para aprender, que as aulas foram mais "leves" e confortáveis, desenvolvendo maior disposição para estudar. Também reconhecem uma quebra com métodos mais tradicionais, o que demandou maior autonomia e organização, além da inserção das tecnologias que muito agregou no seu aprendizado (BELLOTTO, 2019).

Concluiu-se que houve uma mudança expressiva no comportamento e atitudes dos alunos, especialmente com o que diz respeito às tarefas de casa. Portanto "[...] organizar ambientes ativos e dinâmicos proporciona reflexões em relação ao desenvolvimento pessoal, à autonomia e ao pensamento crítico e reflexivo dos alunos." (BELLOTO, 2019, p. 87).

### 2.4.3 Geometria Analítica no Ensino Superior: uma Proposta de Ensino Híbrido

Carpes *et al.* (2018) reconheceram a diferença entre os comportamentos dos alunos deste século com os do século passado, atuais professores. A partir do entendimento dessas diferenças, surge a necessidade dos docentes se aliarem às tecnologias digitais na formação de novos profissionais, sejam esses bacharéis ou licenciados. Além disso, os autores destacaram pouca quantidade de trabalhos disponíveis quanto ao ensino de Geometria Analítica no Ensino Superior, justificando, assim, a motivação deles para a produção do artigo.

Com a disseminação das tecnologias digitais, novas metodologias foram ganhando cada vez mais espaço no processo de ensino e aprendizagem, dentre elas, os autores reconheceram as metodologias ativas e o Ensino Híbrido. Dentre as possibilidades, destacam-se os modelos de Rotação, como a Rotação por Estações, por possibilitar ao professor o trabalho mais individualizado, com grupos menores; um maior *feedback* em tempo útil; oportunidade para os alunos aprenderem tanto de forma individual como colaborativa, entre outros (CARPES *et al.*, 2018).

Diante disso, foi realizada uma proposta didática em uma turma de Geometria Analítica do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior do Estado do Rio Grande do Sul. Essa proposta foi organizada em três aulas sobre os conteúdos: equações da reta e do plano, posições e distâncias relativas entre objetos matemáticos (ponto, reta e plano) (CARPES *et al.*, 2018).

Na primeira aula houve um debate sobre o Ensino Híbrido e a proposta didática foi apresentada para os alunos. Essa aula abordou os conteúdos de pontos e vetores diretores para a determinação das equações da reta, de acordo com as suas classificações: vetoriais, paramétricas, simétricas e reduzida. O estudo foi feito a partir de um roteiro, no qual os alunos deveriam fazer algumas construções no *software* GeoGebra e, a partir dessas construções, fazer algumas conjecturas e prová-las. Ao final dessa aula, foi feita uma avaliação na plataforma Moodle[7] organizada em duas etapas: a primeira consistia na determinação de equação vetoriais e a segunda no comentário da atividade de outros colegas, destacando alguns entes matemáticos (CARPES *et al.*, 2018).

A segunda aula teve início na retomada dos conceitos e comentários feitos na aula anterior. Em seguida, foi proposto outro roteiro de atividades, desta vez com o objetivo de investigar a determinação do vetor normal a um plano para, a partir deste, determinar as equações gerais do plano. Nesta aula, utilizou-se o modelo de Rotação por Estações em que cada uma das três estações abordaria a posição relativa entre reta e plano, e entre planos, a saber: reta contida no plano, reta interceptando o plano e intersecção de planos. Ao final, foi realizada outra avaliação na plataforma Moodle. Dessa vez, a avaliação consistia na elaboração

[7] Moodle é uma plataforma de aprendizagem projetada para fornecer a educadores, administradores e alunos um único sistema robusto, seguro e integrado para criar ambientes de aprendizagem personalizados. Disponível em: https://docs.moodle.org/all/pt_br/Sobre_o_Moodle Acesso em: 13 jul. 2021.

de um material colaborativo que cada grupo apresentaria aos demais na aula seguinte (CARPES *et al.*, 2018).

A terceira e última aula iniciou com a apresentação do material elaborado, com intervenções do professor e de outros colegas. Em seguida, foi entregue outro roteiro para o estudo da distância entre dois objetos matemáticos, utilizando o GeoGebra. Ao final, o roteiro continha duas questões avaliativas a serem entregues para o professor (CARPES *et al.*, 2018).

Quanto aos resultados obtidos, os autores relataram que na primeira aula os alunos não apenas desenvolveram a compreensão do conteúdo, mas também houve um desenvolvimento da argumentação e da escrita matemática. Eles também destacam o auxílio proporcionado pelo GeoGebra para a visualização e manipulação das retas, vetores e pontos. Ao final, Carpes, *et al.* (2018) reconhecem que o Ensino Híbrido potencializa o ensino e a aprendizagem da Matemática, afinal, os alunos identificaram o seu papel nesse processo e os professores reconhecem as facilidades que as tecnologias digitais empregam, se bem utilizadas (CARPES *et al.*, 2018).

### 2.4.4 Ensino Híbrido e o Desenvolvimento de Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular

Trevisani e Corrêa (2020) reconhecem que a BNCC (BRASIL, 2017b) é a referência de todas as escolas do país na formulação de seus currículos e práticas. O documento propõe, em paralelo ao desenvolvimento cognitivo e intelectual dos alunos, o desenvolvimento de algumas competências. Essas são definidas como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que os auxiliarão no cumprimento das demandas da vida cotidiana.

Ao observarem algumas características inerentes a essas competências, como a investigação, a compreensão e a utilização de tecnologias digitais, o trabalho colaborativo e o desenvolvimento da autonomia, os autores trouxeram alguns questionamentos sobre os modelos expositivos de aula, afirmando que estes podem não dar conta de todo esse desenvolvimento esperado pela BNCC. Dessa forma, o artigo propõe a prática em sala de aula baseada em modelos ativos de aprendizagem, pois, a partir desses, é que serão possibilitados os desenvolvimentos dessas competências (TREVISANI; CORREA, 2020).

Os autores afirmaram que modelos expositivos, os quais o professor transmite oralmente o conteúdo, utilizando basicamente a lousa, cadernos e livros, o que fazia muito mais sentido quando a escola era a principal fonte de conhecimento e acesso à informação. Com a disseminação da *internet* e o acesso a esta por dispositivos móveis, a escola deixou de ser esse único local de acesso ao conhecimento. Assim, as tecnologias digitais ampliaram as possibilidades e os locais de se construir conhecimento, dando espaço a modalidade híbrida, que propõe um aprendizado presencial mesclado com o aprendizado *on-line*, apoiado nas tecnologias e na *internet* (TREVISANI; CORREA, 2020).

A partir disso, os autores elaboraram uma aula utilizando o modelo de Rotação por Estações para uma turma de 24 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede privada do Estado de São Paulo, explorando o conteúdo de retas em Geometria Analítica. A sala de aula foi organizada em quatro estações diferentes com duração de 25 minutos cada, assim, a turma foi dividida em quatro grupos para que cada um trabalhasse simultaneamente em cada estação (TREVISANI; CORREA, 2020).

A aula iniciou com a explicação do professor sobre cada estação, sobre a atividade que constituía, e o que era esperado que os alunos fizessem ou entregassem ao final de cada uma. Todas essas informações tinham como objetivo conscientizar o aluno sobre as atividades a serem realizadas, assim, eles poderiam focar naquilo que o professor estaria avaliando. De acordo com Trevisani e Corrêa (2020, p. 55) “Isso ajuda no desenvolvimento da autonomia dos alunos, pois eles conseguem compreender sozinhos o que é esperado deles, se organizando para realizar o que foi solicitado.” Os autores reforçam que o desenvolvimento da autonomia é uma das competências trazidas pela BNCC (BRASIL, 2017b).

A primeira estação continha três vídeos e um exercício já resolvido sobre a distância de um ponto à reta. Os alunos deveriam estudar esses materiais individualmente e, em seguida, se reunirem em grupo para resolverem uma atividade. Essa estação tinha o objetivo de desenvolver as competências de autonomia, comunicação, argumentação e empatia, além da compreensão do conteúdo (TREVISANI; CORREA, 2020).

A segunda estação era composta por atividades da plataforma Khan Academy[8] sobre todos os tópicos englobados no ensino de retas pela Geometria Analítica, exceto a distância entre dois pontos, que era o assunto da primeira estação. Por conta da necessidade do acesso a plataforma, essa estação foi realizada no laboratório de informática onde os alunos acessaram as suas contas e já encontraram automaticamente as atividades a serem realizadas, devido ao

[8] Khan Academy é uma plataforma gratuita que disponibiliza diversos conteúdos de matemática por meio de vídeos, exercícios com resoluções e dicas para os alunos, coletando dados de acertos e erros em todas as questões que os alunos resolvem nela. (TREVISANI, CORRÊA, 2020 apud KHAN, 2013).

professor já ter recomendado tais atividades nas suas contas individuais. Nessa estação, além do conhecimento dos conteúdos, a turma desenvolveu as competências de conhecimento, de cultura digital e da autonomia (TREVISANI; CORREA, 2020).

Na terceira estação, cada grupo deveria produzir vídeos explicando os conceitos de Retas em Geometria Analítica que haviam sido estudados. Para a produção dos vídeos, os grupos poderiam utilizar outros espaços da escola como a biblioteca, o pátio, entre outros, desde que voltassem para a sala ao final do tempo da estação. Após a elaboração, eles deveriam postar os vídeos em um grupo fechado de uma rede social, em que os outros grupos deveriam assistir aos vídeos e comentar sobre a teoria apresentada. O objetivo dessa estação era produzir vídeos de revisão e fazer com que os alunos recordassem, refletissem e discutissem sobre os conteúdos. Assim, foi estimulado o desenvolvimento das competências de cultura digital, de argumentação e de comunicação, o pensamento científico, a criatividade e a empatia (TREVISANI; CORREA, 2020).

A quarta estação era composta de um problema aberto sobre o conteúdo da aula. Esse problema deveria ser resolvido em grupo e uma única resposta entregue ao professor. Para a correção foram considerados aspectos como a produção do grupo, a resolução apresentada e com a clareza de raciocínio. Nessa estação, os alunos desenvolveram a autonomia, a empatia, a colaboração, a argumentação, a comunicação e o conhecimento acumulado nas outras estações (TREVISANI; CORREA, 2020).

Dessa forma, os autores consideram relevante a utilização de modelos sustentados do Ensino Híbrido, em especial, a Rotação por Estações, para o desenvolvimento dos conteúdos curriculares e das competências gerais contempladas pela BNCC (BRASIL, 2017b). Além disso, eles esperam que novas pesquisas sejam realizadas, utilizando o modelo de Rotações por Estações ou em qualquer outro modelo do Ensino Híbrido, sendo ampliadas para outras áreas do conhecimento (TREVISANI; CORREA, 2020).

### 2.4.5 Blended Learning: Uma Experiência Sobre a Implantação de Disciplinas na Modalidade EAD em uma IES

Diante do reconhecimento da necessidade de diferentes metodologias no ensino, o artigo considera as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) elementos essenciais para essa inovação, especialmente por serem facilitadoras da comunicação, da interação e da disponibilização de informações (HALLAL *et al*., 2014).

Os autores observaram que as TIC oferecem diversas potencialidades ao ensino presencial, mas destacam que para a Educação à Distância (EaD) essas são indispensáveis dado que, a definição desta resulta "[...] da união entre tecnologias de informação e comunicação e conteúdos instrucionais [...]" (HALLAL *et al.*, 2014, p. 3).

Assim, para a construção de um ensino à distância em que o aluno seja capaz de desenvolver competências, habilidades e hábitos de estudo, sem a ajuda integral de um professor no momento da aula, mas disponibilizando de professores orientadores e tutores, torna-se necessária a utilização de um sistema de gestão de aprendizagem (*Learning Management Systems* – LMS) (HALLAL *et al*., 2014).

Os Sistemas de Gestão de Aprendizagem são *softwares* ou plataformas que servem para o desenvolvimento, disponibilização e armazenamento de materiais; disponibilização de cursos; realização de testes e avaliações; registro e monitoração do desempenho dos alunos; comunicação; entre muitas outras funcionalidades. Ou seja, o LMS tem o objetivo de apoiar o ensino e a aprendizagem tanto de forma virtual como semipresencial, que também é conhecido como *Blending* ou *B-Learning* (HALLAL *et al*., 2014).

O Ensino Híbrido (Blended Learning) é fundamentado em diversos princípios comuns a EaD, tais como o respeito às necessidades individuais e ao ritmo de aprendizado do aluno, a possibilidade de estudo e revisão dos conteúdos de forma mais conveniente e o desenvolvimento de um aprendizado mais autônomo. De forma semelhante ao Ensino Híbrido, "[...] na educação à distância, é essencial que o aluno seja o construtor do seu conhecimento, buscando constantemente e construtivamente informações que apoiam a sua evolução." (HALLAL *et al.*, 2014, p. 6).

Diante disso, tornou-se justificável o investimento por parte das instituições de ensino superior no Ensino Híbrido, apoiado em Sistemas de Gestão de Aprendizagem, como a plataforma Moodle. Assim sendo, a Universidade Tecnológica Federal do Paraná desenvolveu as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral 1, e Geometria Analítica e Álgebra Linear de acordo com a modalidade híbrida, como cursos ofertados a aqueles que não foram aprovados. A escolha dessas duas disciplinas teve como motivo os altos índices de reprovação e a pouca oferta de vagas, resultando em números expressivos de alunos remanescentes (HALLAL *et al*., 2014).

Ambas as disciplinas foram ofertadas na plataforma Moodle, dispondo de conteúdos para leitura e estudo, atividades de interação por meio de lista de exercícios e videoaulas, além de fóruns e uma ferramenta de bate-papo (HALLAL *et al*., 2014).

Para avaliação dos materiais disponibilizados foi realizado um teste com 75 alunos da universidade, incluindo aqueles que foram aprovados e reprovados, em que estes acessaram a plataforma, testaram os recursos disponíveis, fizeram comentários e, ao final, responderam a um questionário sobre a experiência (HALLAL *et al*., 2014).

Nesse teste, os alunos destacaram a importância de um material que incentivasse a autonomia, elogiaram as videoaulas disponibilizadas e enfatizaram a relevância dos exercícios de fixação e das listas de exercícios especialmente pela correção automática efetuada pela plataforma. Além disso, a maioria deles reconheceu a importância das aulas presenciais para tirar as dúvidas tanto do conteúdo, quanto da resolução de exercícios. Enfatizando, assim, o êxito em experiências educacionais apoiadas tanto em atividades *on-line* como em atividades presenciais (HALLAL *et al*., 2014).

A partir das análises dos trabalhos correlatos acima foi elaborado o Quadro 6 com o objetivo de sintetizar as semelhanças e diferenças de cada pesquisa descrita com esta monografia. Em seguida, será feita uma breve análise das informações neste contidas.

Quadro 6 – Semelhanças e diferenças dos trabalhos correlatos

| Título | Autor (ano) | Semelhanças | Diferenças |
|---|---|---|---|
| **Proposta para a abordagem de Geometria Analítica via Ensino Híbrido** | Silva (2017) | O público-alvo: 3ª. série do Ensino Médio. Utilização do modelo de Rotação por Estações, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e do *software* GeoGebra. | Conteúdos abordados: distância entre dois pontos e equação da circunferência. Estações com ordem definida. Aplicação das atividades elaboradas. |
| **O Ensino de Matemática e o** | Bellotto (2019) | O público-alvo: 3ª. série do Ensino | O público-alvo também ser o 9º. ano do Ensino |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **processo de construção da autonomia do aluno através das Metodologias Ativas e Híbridas** | | Médio. Utilização do modelo de Rotação por Estações, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e do *software* GeoGebra. | Fundamental. Aplicação das atividades elaboradas. Utilização dos modelos de Rotação Individual, Sala de Aula Invertida e Laboratório Rotacional, de forma combinada. Conteúdos abordados: história da Geometria Analítica, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta, baricentro de um triângulo, estudo da circunferência. Utilização da plataforma Google Classroom. |
| **Geometria Analítica no Ensino Superior: uma proposta de Ensino Híbrido** | Carpes, *et al.* (2018) | Estudo das equações da reta (paramétrica e reduzida) e posições relativas entre essas. Utilização do *software* GeoGebra e do modelo de Rotação por Estações. | O público-alvo ser o Ensino Superior. Conteúdos abordados: estudo da equação da reta (vetorial e simétrica), a equação do plano, posições e distâncias relativas entre pontos, retas e planos. Utilização da plataforma Moodle. Aplicação das atividades elaboradas. |
| **Ensino Híbrido e o desenvolvimento de competências gerais da Base Nacional Comum Curricular** | Trevisani e Corrêa (2020) | Análise da Base Nacional Comum Curricular. Utilização do modelo de Rotação por Estações e estudo das equações da reta. | O público-alvo: 2ª. série do Ensino Médio. Utilização da plataforma Khan Academy. Conteúdos abordados: distância entre dois pontos e estudo da reta e do *software* GeoGebra. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Blended Learning: uma experiência sobre a implantação de disciplinas na modalidade EAD em uma IES** | Hallal *et al.* (2014) | Utilização do Ensino Híbrido no Ensino de Geometria Analítica. | O público-alvo: Ensino Superior. Utilização do Ensino à Distância (EaD), do Sistema de Gestão de Aprendizagem e da plataforma Moodle. |

Fonte: Elaboração própria.

De acordo com o Quadro 6, nota-se que o público-alvo como sendo a 3ª. série do Ensino Médio está presente em dois dos cinco trabalhos. Assim, percebe-se que o artigo escrito por Trevisani e Corrêa (2020) baseia-se na Base Nacional Comum Curricular, mas os autores trabalham o conteúdo de Geometria Analítica na 2ª. série do Ensino Médio, o que é contrário a determinação do documento. A pesquisa desenvolvida por Bellotto (2019) também foi direcionada às turmas do 9º. ano do Ensino Fundamental. E, os artigos escritos por Carpes *et al.* (2018) e Hallal *et al.* (2014) têm como público alvo o Ensino Superior.

Outra diferença entre os trabalhos correlatos é que desses, nenhum é de caráter monográfico. Os trabalhos de Bellotto (2019) e de Silva (2017) são dissertações do Programa Nacional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e os outros dois trabalhos são artigos.

Apenas o trabalho desenvolvido por Hallal *et al.* (2014) não utiliza o modelo de Rotação por Estações, fato reforça a afirmativa feita por Christensen, Horn, Staker (2015) de que os modelos de Rotação são mais atrativos para professores. Da mesma forma que a combinação dos modelos do Ensino Híbrido feita por Bellotto (2019) coincide com a sugestão dos autores Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) de que os modelos de Ensino Híbrido não têm uma hierarquia entre si e que podem ser utilizados de forma misturada, mesclada, fazendo referência à definição apresentada da modalidade.

Nota-se que o *software* GeoGebra está presente em três dos cinco trabalhos descritos e que, em dois deles, o programa é utilizado de forma combinada à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. De acordo com Bellotto (2019, p. 92) “O uso de um *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra possibilitou a interação dos educandos, no intuito destes fazerem comparações entre representações geométricas e algébricas no estudo [...]”

Destaca-se também que em todos os trabalhos relacionados há diferenças entre os conteúdos abordados, sugerindo que não há pesquisas já realizadas com o mesmo recorte temático dentro da Geometria Analítica como esta.

# 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos desta monografia, os quais abordam as principais características da pesquisa e estão divididos em: (i) metodologia de pesquisa, (ii) os instrumentos de coleta de dados e (iii) a descrição da proposta didática que detalha as atividades elaboradas.

## 3.1 Metodologia de Pesquisa

Buscando atender ao objetivo geral: identificar a contribuição de uma proposta didática, por meio da Rotação por Estações na compreensão das representações das equações da reta, esta monografia se caracteriza como uma pesquisa qualitativa.

De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa é aquela que não se importa com as quantificações numéricas e sim com um maior entendimento de um grupo social, de uma organização, ou seja, aspectos que não podem ser quantificados. Esse tipo de pesquisa preocupa-se em tentar explicar o porquê das coisas.

Para Prodanov e Freitas (2013, p. 70), a pesquisa qualitativa baseia-se na interpretação de fenômenos e atribuição de significados, e por não utilizar métodos e técnicas quantitativas como o centro da pesquisa, o foco da sua abordagem é o processo e seus significados. Os autores afirmam que “Os dados coletados nessas pesquisas são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada. Preocupa-se muito mais com o processo do que com o produto.”

Já para Guerra (2014), na abordagem qualitativa o pesquisador não se preocupa com representações numéricas nem generalizações estatísticas, mas sim com a compreensão dos fenômenos estudados. Dessa forma, nesse tipo de pesquisa, há a interpretação e explicação do pesquisador. Para a autora,

> [...] na pesquisa qualitativa, o importante é a objetivação, pois durante a investigação científica é preciso reconhecer a complexidade do objeto de estudo, rever criticamente as teorias sobre o tema, estabelecer conceitos e teorias relevantes, usar técnicas de coleta de dados adequadas e, por fim, analisar todo o material de forma específica e contextualizada. (MINAYO, 2008 apud GUERRA, 2014, p. 12).

Além de caracterizar-se como uma pesquisa qualitativa, esta monografia apresenta fortes aspectos das pesquisas do tipo intervenção pedagógica, as quais podem ser entendidas como aquelas que tem como objetivo a implementação de mudanças, inovações para desenvolver melhorias e novas descobertas nos processos de ensino e de aprendizagem, como também a avaliação dos efeitos dessas mudanças (DAMIANI, *et al*., 2013).

Por conta da pandemia do Coronavírus, da realidade do Ensino *on-line* nas escolas e da metodologia do Ensino Híbrido, que parte do pressuposto de aulas presencias (por ser essa união entre o ensino presencial e o ensino *on-line*), não houve a possibilidade de aplicação das atividades propostas e observação dos resultados dessas. Esses aspectos são fundamentais para este tipo de pesquisa, pois como afirma Damiani *et al.* (2013, p. 59) “Nas intervenções, a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis, sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes.”

Assim sendo, são aquelas pesquisas que geram novas experiências, observam os resultados e assim, as propõem. Elas são aplicadas com pessoas e situações da realidade, contando com a descrição do pesquisador nos seus resultados. Damiani *et al.* (2013, p.59) acrescentam que “[...] nas intervenções, a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis, sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes”.

Posto isto, esta pesquisa tem o intuito de produzir mudanças, apresentar soluções para um problema, dialogar com um referencial teórico e possibilitar a produção de conhecimento. Todos esses aspectos fazem parte das pesquisas de intervenção pedagógica apresentadas por Damiani *et al*. (2013), entretanto este trabalho monográfico desqualifica-se dessa metodologia pela falta do caráter de aplicação.

Esta monografia também se caracteriza como pesquisa exploratória, definida por Gil (2008) como as que buscam uma maior familiaridade com o tema, aprimorando ideias, construindo hipóteses, descobrindo intuições, ou seja, tornando o tema mais explícito.

Já para Prodanov e Freitas (2013), a pesquisa exploratória tem como intuito disponibilizar mais informações, possibilitando o seu delineamento e a formulação de hipóteses. Os autores afirmam que essas, em muitos casos, envolvem questões como: o levantamento bibliográfico, o diálogo com pessoas que tem experiência prática com o problema pesquisado e a análise de exemplos que promovem a compreensão.

Sendo assim, o presente trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, com algumas características do tipo intervenção pedagógica e realizada de forma exploratória.

## 3.2 Instrumentos de Coleta de Dados

Devido ao caráter qualitativo da pesquisa, esta utilizará para a de coleta de dados os seguintes instrumentos: (i) questionário a ser respondido pelos professores participantes do teste exploratório; (ii) registro das respostas e comentários desses professores no arquivo das atividades.

Gil (2008) define o questionário como uma técnica de investigação constituída por uma série de questões as quais algumas pessoas são submetidas com o objetivo de reunir determinadas informações como crenças, conhecimentos, valores, sentimentos, expectativas, temores, etc. Dessa forma, "[...] as respostas a essas questões é que irão proporcionar os dados requeridos para descrever as características da população pesquisada ou testar as hipóteses que foram construídas durante o planejamento da pesquisa." (GIL, 2008, p. 121).

Dentre as diversas vantagens da utilização desse instrumento é possível citar a obtenção de respostas rápidas e precisas; a liberdade e segurança fornecida ao respondente, devido ao anonimato; menor risco de distorção dos resultados, dada a não influência do pesquisador; dá-se mais tempo para que seja respondido e em um horário mais confortável; uniformidade das respostas obtidas; dentre outros (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

O questionário elaborado por meio do Google Forms, disponível no Apêndice A, conta de perguntas abertas, fechadas e mistas. As perguntas abertas são aquelas que o informante pode responder livremente, possibilitando uma ampla liberdade de resposta (GERHARDT; SILVEIRA, 2009; GIL, 2008). Alguns exemplos de perguntas abertas são as questões do tipo "Explique um pouco da sua resposta anterior" que constam na terceira seção do questionário.

As questões fechadas são aquelas em que é solicitado escolher uma opção dentre as disponibilizadas em uma lista, assinalando aquela que melhor corresponder a resposta desejada. Essas perguntas são comumente utilizadas devido a uniformidade conferida às respostas e à facilidade do seu processamento (GERHARDT; SILVEIRA, 2009; GIL, 2008). Alguns exemplos desse tipo de pergunta são aquelas em que as respostas possíveis são apenas "sim" ou "não", ou como na oitava pergunta (Figura 22) que consta na segunda seção do questionário em que os informantes deveriam escolher, para cada afirmação, a resposta que considerassem mais adequada.

Figura 22 – Oitava pergunta do questionário

Assinale, para cada afirmação, a coluna que considera adequada. *

| | Concordo totalmente | Concordo parcialmente | Não concordo nem discordo | Discordo parcialmente | Discordo totalmente |
|---|---|---|---|---|---|
| A utilização do Ensino Híbrido é uma boa alternativa para o Ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A rotação por estações é uma boa alternativa para o Ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A utilização de tecnologias digitais ajuda na compreensão dos conteúdos de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A utilização do GeoGebra auxilia no ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

Fonte: Elaboração própria.

Gil (2008) afirma que as perguntas fechadas trazem o risco de não incluir todas as opções de resposta relevantes para aquela pergunta. Logo, no questionário elaborado, também há algumas questões mistas que, de acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 70) "[...] são aquelas em que, dentro de uma lista predeterminada, há um item aberto, por exemplo, 'outros'." Um exemplo é a trigésima primeira pergunta do questionário, que está localizada na terceira seção, em que os professores são questionados quanto à relevância do *applet*[9] e do vídeo disponibilizados na estação amarela e que, dentre as opções disponíveis, havia a opção "outro", utilizada por um dos professores respondentes para sinalizar um erro por meio de um Qr Code,

[9] São programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML (DEITEL, H.; DEITEL, P., 2003). Estes recursos, em geral, visam adicionar interatividade a aplicações Web.

o qual direcionava para um dos *applet* disponibilizados.

Além das respostas dos professores obtidas pelo questionário, eles também enviaram sugestões por outros meios como arquivos de texto (Word) ou, ainda, comentários e anotações nos próprios arquivos disponibilizados, os quais foram considerados, também, como parte dos dados coletados por esta pesquisa.

### 3.3 Elaboração da Proposta Didática

A proposta didática foi elaborada visando a aplicação em uma turma da 3ª série do Ensino Médio, uma vez que o conteúdo de Geometria Analítica está previsto para esta série (BRASIL, 2017b). Apesar disso, pode ser utilizada em outras etapas no Ensino Médio ou na disciplina de Geometria Analítica no Ensino Superior.

De acordo com o analisado anteriormente nos Documentos Oficiais brasileiros, a proposta didática tem o objetivo de estimular o “pensar matematicamente”, definido pela OCEM (BRASIL, 2006). Por isso, esta proposta busca desenvolver a compreensão do significado geométrico e algébrico da equação de uma reta, superando os métodos tradicionais de memorização e exercícios repetitivos de aplicação de fórmulas, valorizando o raciocínio, as explicações e as deduções.

Para que houvesse uma melhor adequação da proposta aos livros didáticos utilizados em sala pelos professores da rede pública, foram analisadas as abordagens realizadas de cada equação da reta nos livros selecionados no Guia Digital do PNLD (BRASIL, 2018). Nessa análise, ficou evidente a priorização das equações geral e reduzida e, principalmente, da manipulação algébrica envolvendo-as. Já as equações segmentária e paramétrica, poucos são os livros que as estudam e, os que o fazem, trazem um estudo mais sucinto, em alguns casos, inclusive, desprovido de sentido geométrico.

De acordo com Duval (2012), é necessária ao aprendizado de Matemática a utilização de diferentes representações. Apesar disso, o próprio autor evidencia que as atividades cognitivas de formação e de tratamento muitas vezes são priorizadas no ensino, mas a atividade de conversão desempenha um papel essencial no aprendizado, não podendo ser negligenciada.

Levando em conta os argumentos apresentados acima, a proposta didática tem como objetivo apresentar as equações da reta propostas pela Geometria Analítica de forma a valorizar todas as equações em diferentes registros de representação, dando ênfase ao “pensar matemática” e buscando superar os mecanismos de repetição e memorização.

Diante do exposto, a proposta didática, então, é dividida em três partes: uma atividade inicial, a rotação nas estações e uma atividade final. A proposta didática foi elaborada para aplicação em dois momentos de duas horas/aula cada. Em um primeiro encontro, seria explicado o que é a rotação e como deveriam ser feitas as atividades, além disso, os alunos fariam a atividade inicial e rotacionariam nas duas primeiras estações, ao passo que no segundo encontro, fariam as duas últimas estações e a atividade final. Em ambos os encontros, o professor deve ficar atento as dúvidas que possam surgir e pronto para assumir a posição de mediador das atividades, auxiliando-os e orientando conforme necessário.

Como a proposta objetiva o estudo das equações da reta, há alguns conhecimentos da Geometria Analítica que precisam ser previamente estudados, para isso, sugere-se a utilização de videoaulas para revisão dos seguintes conteúdos: representação de pontos e coordenadas no eixo cartesiano, inclinação e coeficiente angular, cálculo do coeficiente angular a partir de dois pontos e a condição de alinhamento de três pontos.

Vale ressaltar que o modelo de Rotação por Estações, proporciona que o professor possa estar mais próximo aos grupos, garantindo o acompanhamento dos que precisam de mais atenção (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015). Além disso, o professor é visto como um mediador, dando espaço para que o aluno seja o protagonista do seu próprio aprendizado, portanto, sugere-se que o docente faça o mínimo de intervenções possíveis, apenas auxiliando-os quando solicitado (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015). O Ensino Híbrido também propõe que os alunos trabalhem de forma colaborativa, assim, sugere-se que a turma seja dividida em quatro grupos, visando tanto essa interação entre eles como o bom funcionamento da rotação entre as quatro estações.

Nas seções seguintes, são descritas cada uma das etapas da proposta didática, levando em consideração todas as questões já apontadas previamente. Destaca-se que toda a proposta está disponível no Apêndice B.

### 3.3.1 Atividade Inicial

A atividade inicial tem como objetivo provocar os alunos a pensarem na posição relativa entre duas retas e nos diferentes formatos da equação. Além disso, permitirá, também, um diagnóstico para verificar se eles já possuem algum conhecimento sobre o conteúdo a ser abordado ou ainda não, visto que a proposta didática pode ser utilizada tanto para um primeiro contato da turma com as equações da reta, bem como um material complementar à abordagem dos livros didáticos.

A atividade inicial consiste em uma questão da prova do Enem[10], adaptada pela pesquisadora com o intuito de adequá-la melhor aos conteúdos a serem abordados nesta pesquisa (Apêndice B). A escolha de uma questão desse exame ocorreu pelo fato da 3ª série do Ensino Médio ser a etapa em que os alunos são submetidos a esse tipo de avaliação.

Essa questão solicita a determinação da equação de uma reta perpendicular dada por $y = \frac{1}{2}x + 4$. Para resolvê-la, o aluno utiliza diversos conceitos que serão trabalhos nas estações como a perpendicularidade entre retas, a determinação de uma reta a partir de pontos e do seu coeficiente angular e a manipulação algébrica entre os diferentes formatos da equação de uma reta, tendo em vista que cada alternativa disponível é apresentada em um formato diferente.

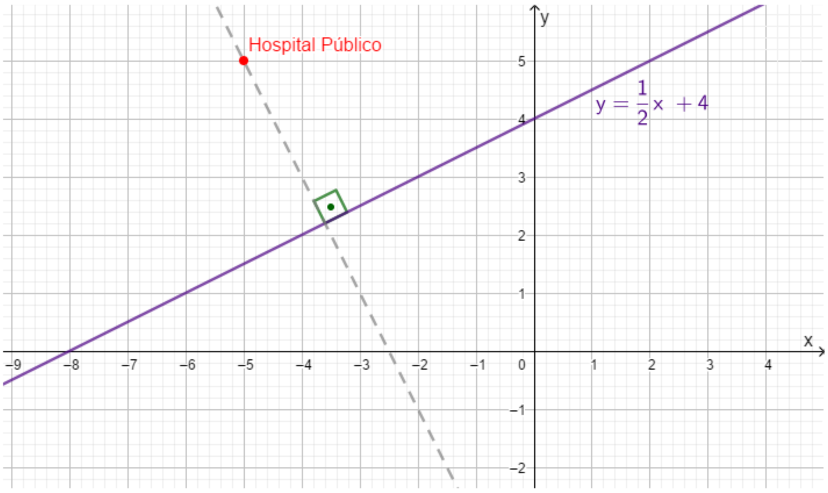
Outro ponto a destacar é a contextualização feita, pois, apesar do exercício utilizar de diversos conceitos matemáticos bastante abstratos, a questão traz esses conceitos de forma contextualizada, ou seja, aborda as informações matemáticas contidas em um contexto comum a vida dos alunos, como a posição entre ruas de uma cidade, como na Figura 23.

[10] Enem - Exame Nacional do Ensino Médio.

Figura 23 – Questão do ENEM adaptada para a atividade inicial

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

Imagem 1 – Plano de coordenadas cartesianas que representa a cidade




Fonte: Elaboração própria.

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista a construção de uma nova rua de modo que a distância entre hospital e o metrô fosse a menor possível.

Para atender ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso poderia ser satisfeito se a nova rua fosse construída de modo perpendicular ao metrô, garantindo assim, a menor distância. Dessa forma, a equação da reta dessa nova rua será:

Fonte: Elaboração própria.

### 3.3.2 Estações

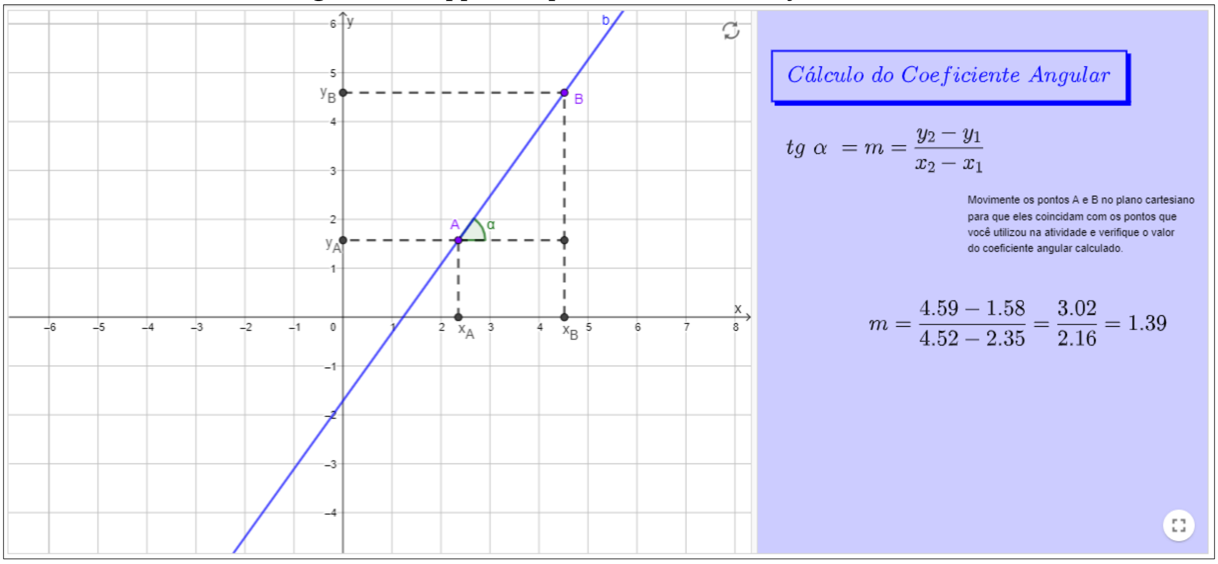
A rotação será realizada em torno de quatro estações nomeadas por cores, sendo que cada uma delas apresenta uma apostila de atividades com objetivos distintos. É importante ressaltar que, de acordo com a Rotação por Estações, estas são independentes entre si, em outras palavras, não há uma ordem a ser seguida na rotação, assim, os grupos de alunos são convidados a escolherem a ordem pela qual irão rotacionar, de modo que ao final da rotação, todos tenham realizado as atividades de todas as estações.

Todas as estações estão divididas em partes, tendo, cada uma, um determinado objetivo. Apesar dessa organização, será possível perceber que essas etapas estarão intimamente conectadas, pois, a todo momento, serão feitas relações às etapas anteriores. A expectativa é que, ao final de cada estação, os alunos sejam capazes de relacionar cada uma das partes, formando, então, seu conhecimento. As atividades das estações estão presentes no Apêndice B e, a seguir, seguirão, em ordem alfabética, os detalhes das estações e suas respectivas atividades.

A **estação amarela** tem como objetivo relacionar as equações reduzidas de duas retas com as posições que estas assumem no plano, por exemplo, quando duas retas forem paralelas, elas terão o mesmo coeficiente angular e coeficientes lineares distintos. A denominada PARTE I dessa estação é um estudo do coeficiente angular, então a partir de uma breve explicação em texto, é solicitado que os alunos calculem os coeficientes angulares de quatro pares de retas (um par de retas paralelas, dois pares de retas perpendiculares e um par de retas concorrentes não perpendiculares), utilizando a fórmula explicitada. Neste momento, é extremamente importante que eles identifiquem corretamente os pontos pertencentes aos gráficos das retas e calculem esses coeficientes angulares também de forma correta, por isso, é ofertado um *applet* para a verificação e correção desses resultados, como na Figura 24.

O *applet* (Figura 24) é disponibilizado por meio de um Qr Code, dessa forma, caso sejam utilizados dispositivos móveis como *smartphones* e *tablets*, será possível fazer a leitura desses códigos. Caso sejam utilizados computadores de mesa ou *notebooks*, basta que o professor disponibilize o *link* de acesso antes da rotação nas estações. É válido ressaltar que, mesmo que o *applet* traga uma pequena orientação da movimentação a ser feita nele, o professor deve estar disponível para auxiliar os alunos no acesso e manuseio desse tipo de ferramenta, caso seja necessário. Tais orientações são válidas para todos os *applets* em todas as estações.

Figura 24 – *Applet* disponibilizado na estação amarela




Fonte: Elaboração própria.

O objetivo dessa primeira parte é instigar os alunos a levantarem conjecturas ao perceber que nos casos das retas perpendiculares, os coeficientes angulares darão resultados com o mesmo algarismo, mas um será o oposto do inverso do outro, enquanto no caso das retas paralelas, os coeficientes angulares serão iguais.

Na PARTE II são explicitadas as posições relativas entre retas, utilizando os registros geométrico e em língua natural. O objetivo aqui é, por meio de uma figura e de um texto explicativo, em seguida, nomear cada uma das posições entre retas no plano. Na PARTE III, é solicitado que os alunos completem um quadro informando o valor calculado do coeficiente angular na PARTE I e a posição das retas informada na PARTE II, como na Figura 25. Assim, fica perceptível que o objetivo da PARTE III é relacionar a primeira com a segunda. É importante destacar que, nessa estação amarela, até a PARTE III, estará sendo associada a posição relativa apenas com o coeficiente angular, a partir da próxima parte que será introduzida a equação da reta.

Figura 25 – PARTE III da estação amarela

**PARTE III – Relação entre o coeficiente angular e a posição relativa**

Complete a tabela abaixo com os coeficientes angulares determinados em cada uma das alternativas na **PARTE I** e as posições relativas correspondentes que foram estabelecidas na **PARTE II**.

| Alternativa | Coeficientes angulares | | Posição relativa |
|---|---|---|---|
| a) | | | |
| b) | | | |
| c) | | | |
| d) | | | |

Fonte: Elaboração própria.

Já na PARTE IV, é apresentada a equação reduzida da reta, utilizando a formação de um registro identificável (quadro com a a equação), como mencionado por Duval (2012). O registro geométrico (gráfico) e o registro em língua natural (texto). Os pares de retas dados na PARTE I serão aproveitados para solicitar aos alunos as determinações de suas equações reduzidas, sendo que, como a equação reduzida utiliza apenas o valor do coeficiente angular e da interseção da reta com o eixo das ordenadas, nesta parte, basta os alunos identificarem a interseção com o eixo, tendo em vista que já haviam determinado o coeficiente angular na PARTE I. O intuito da quinta parte é instigar o aluno a produzir conjecturas entre a equação reduzida e as posições relativas ao realizar a conversão entre o registro geométrico e o registro algébrico.

A PARTE V, tem como objetivo explicitar a relação entre as posições e a equação reduzida, dessa forma, os alunos deverão assistir um vídeo sobre esta relação, disponibilizado por meio de um QR Code. Em seguida, é solicitado que eles registrem a sua percepção desta relação e, ao final da estação, pede-se que os alunos registrem no plano cartesiano e de forma algébrica duas equações da reta em sua forma reduzida e a suas posições relativas, de acordo com a Figura 26.

Figura 26 – PARTE V da estação amarela

**PARTE V – Relação entre a equação reduzida e as posições relativas**

Agora que você já conhece a forma reduzida da equação de uma reta e as posições que duas retas podem assumir no plano cartesiano, escaneie o *QR Code* e assista o vídeo que sintetiza a relação entre esse formato da equação de uma reta e as posições relativas entre retas. E, em seguida, responda as perguntas.

Qual relação pode ser estabelecida entre cada uma das posições e seus coeficientes? Explique o que ocorre em cada um dos coeficientes da equação reduzida em cada posição que as retas podem assumir.

Escolha uma das posições relativas entre retas e determine duas equações reduzidas correspondentes a essa posição e as desenhe no plano cartesiano abaixo. Não esqueça de indicar a posição entre elas e quais são as suas equações!

Fonte: Elaboração própria.

A **estação azul** tem por objetivo estudar a equação paramétrica da reta e relacioná-la com a equação geral. De forma similar aos livros L1 e L7 (analisados no capítulo 2), a PARTE I dessa estação inicia-se com uma questão contextualizada na qual são dadas as rotas de três aviões representadas por equações paramétricas, em que o parâmetro t representa o tempo após a decolagem. Assim, é solicitado aos alunos que determinem a posição de cada um dos aviões uma hora após a sua decolagem, como na Figura 27. O objetivo dessa primeira atividade é familiarizar o aluno com essa equação e instigá-lo a perceber que ao substituir um valor no parâmetro $t$, obtém-se uma coordenada para o $x$ e outra para o $y$. Além disso, a relação entre o parâmetro e as coordenadas $x$ e $y$ é revelada logo em seguida com uma breve explicação em texto sobre a equação paramétrica.

Figura 27 – Atividade e explicação da equação paramétrica na PARTE I da estação azul

Abaixo estão as equações que descrevem as rotas dos aviões de acordo com o tempo $t$ (em horas) após a decolagem.

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

Determine as coordenadas $(x, y)$ que indicam a posição de cada um dos aviões 1 hora após a sua decolagem.

As equações anteriores estão relacionando as coordenadas $(x, y)$ em função de uma terceira variável chamada **parâmetro $(t)$**. Nesse caso, de acordo com a variação do parâmetro, no conjunto dos números naturais, os valores de $x$ e de $y$ também vão variando, ou seja, cada valor do parâmetro corresponde a um ponto $(x, y)$ da reta.

Por essas equações expressarem as coordenadas $x$ e $y$ em função de um parâmetro qualquer (que aqui chamaremos de $\lambda$), essa equação da reta é conhecida como:

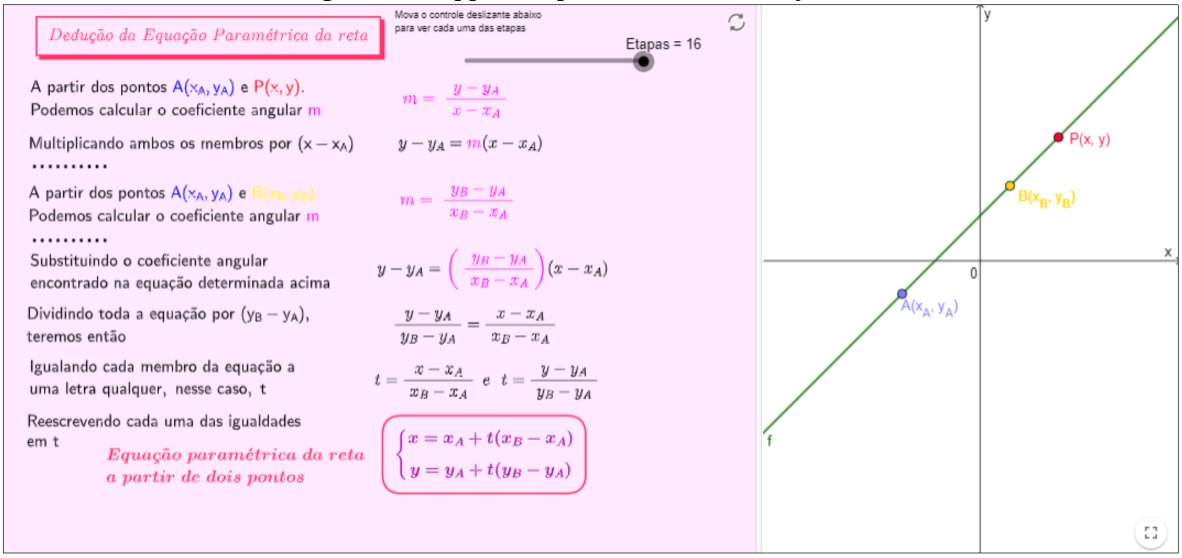
$$\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g\ (\lambda) \end{cases}$$

Equação Paramétrica da Reta

Fonte: Elaboração própria.

A PARTE II, tem por objetivo deduzir a fórmula da equação paramétrica e compreender sua representação geométrica, para isso, é apresentada uma dedução da equação de forma generalizada a partir de dois pontos dados. Para que essa dedução seja apresentada de forma mais dinâmica, é disponibilizado um *applet* (Figura 28), por meio de um QR Code que, ao manipular um controle deslizante, os alunos podem ver cada uma das etapas dessa dedução de forma gradativa.

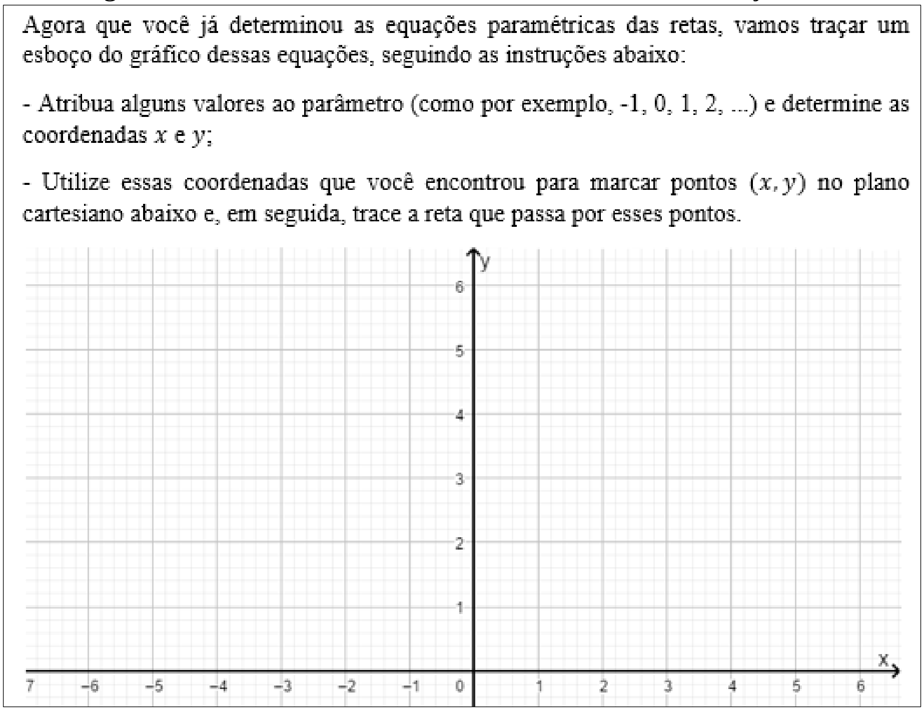
Figura 28 – *Applet* disponibilizado na estação azul




Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, é solicitado que sejam determinadas as equações paramétricas a partir de dois pontos dados. Ainda na PARTE II, é solicitado que os alunos atribuam valores ao parâmetro de uma das equações determinadas e esbocem o gráfico dessa, como na Figura 29. Uma observação dessa segunda parte é que os alunos fazem a conversão entre as duas representações que eles mesmos determinaram.

Figura 29 – Atividade de conversão da PARTE II na estação azul




Fonte: Elaboração própria.

Já na PARTE III, o propósito é estabelecer a relação entre a equação paramétrica e a equação geral. Assim, é apresentada a manipulação algébrica da equação paramétrica para a equação geral e o registro algébrico identificável desta (DUVAL, 2012). Em seguida, é solicitado aos os alunos que realizem essa mesma manipulação com as equações paramétricas antes determinadas (PARTE II), contemplando, assim, a atividade cognitiva de tratamento. Na PARTE IV, são feitos alguns questionamentos a fim de que esses registrem as suas conclusões em relação à equação paramétrica da reta e a sua relação com a equação geral, como na Figura 30.

Figura 30 – PARTE IV da estação azul

**PARTE IV – Conclusões**

O que foi possível entender sobre a equação paramétrica?

________________________________________

________________________________________

________________________________________

É possível perceber alguma relação entre as equações geral e paramétrica? Justifique.

________________________________________

________________________________________

________________________________________

Fonte: Elaboração própria.

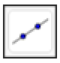
A **estação verde** tem por objetivo estudar a equação segmentária da reta e sua relação com a equação geral. Na PARTE I, são apresentados alguns comandos do GeoGebra para que, a partir deles os alunos marquem alguns pontos dados, determinem as retas que passam por estes pontos e registrem as equações fornecidas pelo *software* (Figura 31).

É importante destacar que o Ensino Híbrido, em especial a Rotação por Estações, pressupõe a utilização de diferentes materiais, dessa forma, diferentemente das outras estações, na estação verde pretende-se que seja utilizado o *software* GeoGebra em dispositivos como computadores ou *notebooks* ou ainda o GeoGebra *on-line* (e não em dispositivos móveis como *smartphones* ou *tablets*). Para isso, o professor precisa apenas estar atento a configuração “padrão” da forma da reta no GeoGebra, assim, caso o formato da equação a ser exibido não seja o da forma geral como $ax + by + c = 0$, ele deve alterá-lo.

Figura 31 – PARTE I da estação verde

**PARTE I – Introdução à equação geral**

Abra o *software* GeoGebra e, em seguida, com a ferramenta “ponto”  marque os pontos A = (1, 4) e B = (2, 2).

Com a ferramenta “reta”  selecionada, clique no ponto A e no ponto B para determinar a reta que passa por esses pontos. Observe a Janela de Álgebra no lado esquerdo da tela, qual a equação dessa reta foi determinada pelo *software*?

____________________________________________________________

Faça o mesmo procedimento e escreva as equações encontradas a partir dos pontos:

a) C = (2, 4) e D = (1, 3)

____________________________________________________________

Fonte: Elaboração própria.

Após o registro das equações, os alunos são questionados se conseguem perceber algum padrão nelas, de acordo com a Figura 32, visto que o GeoGebra as fornece na forma geral. Logo, o objetivo dessa pergunta é fazer com que eles levantem algumas conjecturas quanto a equação geral.

Figura 32 – Questionamento ao final da PARTE I da estação verde

Após encontrar todas as equações com o auxílio do GeoGebra, você consegue perceber algum padrão no formato das equações da reta?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Fonte: Elaboração própria.

Mesmo que esse padrão não seja percebido, a PARTE II tem o objetivo de esclarecê-lo, e, para isso, é apresentada por meio de um texto, a dedução da equação geral da reta a partir da condição de alinhamento de três pontos e, em seguida, é solicitado aos alunos que utilizem a matriz para determinar a equação geral a partir de algum par de pontos dado na PARTE I. Ao passo que, na PARTE III é introduzido o estudo da equação segmentária por meio de um texto e do quadro com a sua forma generalizada após a manipulação a partir da equação geral. Assim, a estação apresenta a manipulação algébrica da equação geral para a equação segmentária da reta e solicita aos alunos que a reproduzam, como na Figura33.

Figura 33 – Manipulação algébrica da PARTE III da estação verde

**PARTE III – manipulação da geral para a segmentária**

Agora que você já conhece a equação geral da reta, vamos fazer algumas manipulações pra chegarmos a um novo resultado. A partir da equação

$$ax + by = c$$

Vamos dividir todos os termos da equação por $c$

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = \frac{c}{c}$$

Como $\frac{c}{c} = 1$, temos então:

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = 1$$

Agora, vamos reescrever essa equação fazendo a manipulação da multiplicação para uma divisão de frações de forma que:

$$\frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$$

Equação Segmentária da Reta

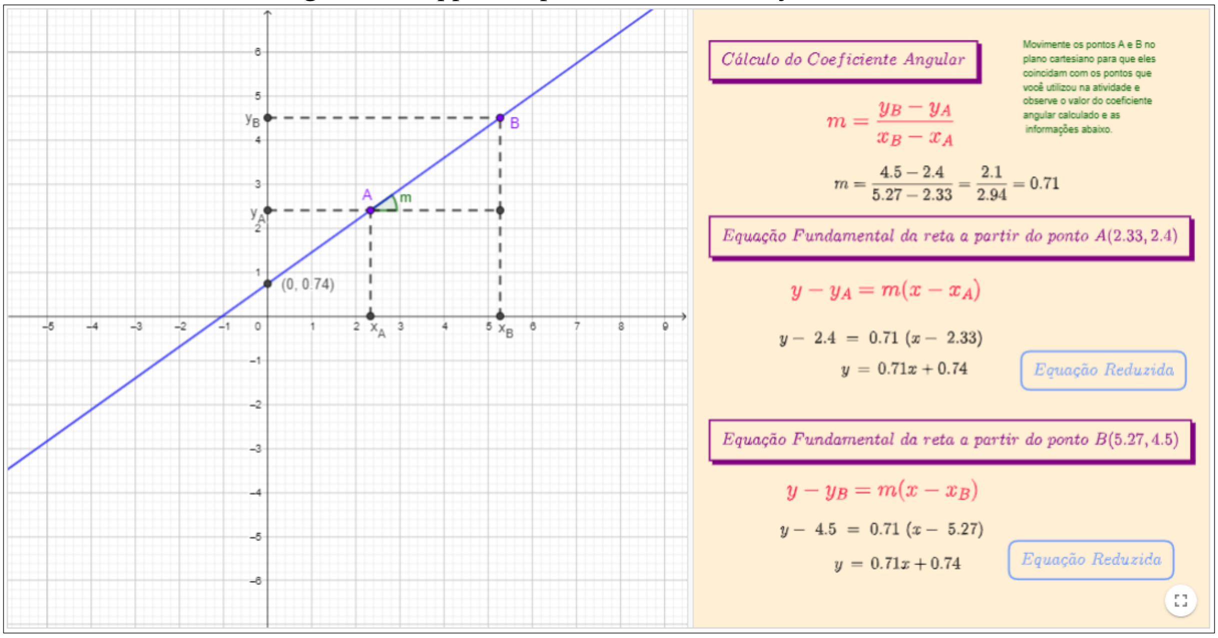
Agora é a sua vez! Determine a equação segmentária a partir da equação geral de, pelo menos, uma das retas da **PARTE I**.

Fonte: Elaboração própria.

A PARTE IV solicita que os alunos registrem a equação segmentária por eles determinada anteriormente em um plano cartesiano. Após este esboço do gráfico, há alguns questionamentos para que eles registrem as suas percepções entre a equação segmentária e a interseção da reta com os eixos coordenados. Independentemente de terem percebido corretamente esta relação ou não, em seguida, é explicada sobre a equação segmentária da reta, utilizando o registro algébrico (gráfico), o registro em língua natural (texto) e a formação de uma representação identificável (quadro azul com a equação) (DUVAL, 2012). Na PARTE V, é solicitado que os alunos registrem as suas percepções quanto a relação entre a equação geral e a segmentária.

Por último, a **estação vermelha** que tem como objetivo estabelecer a relação entre as equações reduzida, fundamental e geral. A PARTE I traz um breve estudo do coeficiente angular, por meio de uma figura e de um texto explicativo, para que, a partir do seu cálculo, seja determinada a equação fundamental da reta. Em seguida, são fornecidas algumas retas no plano para que seja feita a conversão da representação geométrica da reta para a equação fundamental. Como estes resultados serão utilizados nas partes seguintes, é fornecido um *applet*, como na Figura 34, por meio de um QR Code para que os resultados sejam verificados.

Figura 34 – *Applet* disponibilizado na estação vermelha




Fonte: Elaboração própria.

Na PARTE II, é apresentada a transformação (manipulação algébrica) entre a equação fundamental e a equação reduzida e é solicitado aos alunos que realizem essa manipulação com as equações fundamentais determinadas na PARTE I, de acordo com a Figura 35.

Figura 35 – Manipulação algébrica na estação vermelha

**PARTE II – Transformação da equação fundamental para a reduzida**

Agora que você já determinou as equações fundamentais de cada uma das retas e conferiu os seus resultados no *applet*, vamos tentar "resolver" a equação fundamental da reta.

No *applet*, logo abaixo da equação na forma ponto - inclinação, havia esta mesma equação em outro formato, mais reduzido. Vamos então manipular as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d) para chegarmos a este novo formato.

Perceba que, quando temos uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, podemos começar a "resolver" essa equação fazendo:

- Distributiva do coeficiente angular $m$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- E, em seguida, organizar essa equação de forma que o $y$ permaneça "sozinho" no primeiro membro.

Tente fazer agora com as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d). Caso precise, utilize o *applet* para conferir seus resultados.

OBS: o aplicativo GeoGebra tem alguns erros de aproximação nas operações com números decimais, então, alguns resultados podem não aparecer exatamente iguais.

Fonte: Elaboração própria.

Na PARTE III, é apresentada a mesma manipulação da PARTE II, só que com um exemplo numérico e, em seguida, é apresentado o formato da equação reduzida da reta, tendo em vista que na parte anterior, os alunos apenas manipulariam a equação. Na PARTE IV, é exibida a manipulação algébrica, por meio de texto, da equação reduzida para a equação geral e esta é apresentada. Para deixar essa relação entre a equação geral e a equação reduzida bem explicita, é disponibilizado um vídeo do Khan Academy Brasil por meio de um QR Code.

A PARTE V tem como objetivo finalizar a estação e coletar as percepções do aluno quanto ao conteúdo estudado, iniciando-se com um questionamento, pois no vídeo, é feita a transformação da equação reduzida para a equação geral, portanto, é perguntado se ele saberia como fazer de forma contrária, da equação geral para a equação reduzida. Em seguida, há um plano cartesiano e é solicitado aos alunos que esbocem o gráfico de três equações da reta que, apesar de apresentadas de formas diferentes, são todas representações algébricas da mesma reta, como na Figura 36. Após o esboço do gráfico há o questionamento sobre a relação entre as equações: fundamental, reduzida e geral.

Figura 36 – Recorte da PARTE V da estação vermelha

**PARTE V – Conclusões**

O vídeo fala da transformação da equação reduzida para a equação geral. Você consegue pensar em uma maneira de fazer o processo contrário? Da equação geral para a equação reduzida da reta? Pense em uma equação no formato $3x + 2y = 6$ e tente manipula-la para chegar ao formato $y = mx + n$.

Lembre-se que os números $m$ e $n$ são variáveis, ou seja, eles podem assumir qualquer número real.

Utilize o plano cartesiano abaixo e esboce o gráfico das seguintes equações:

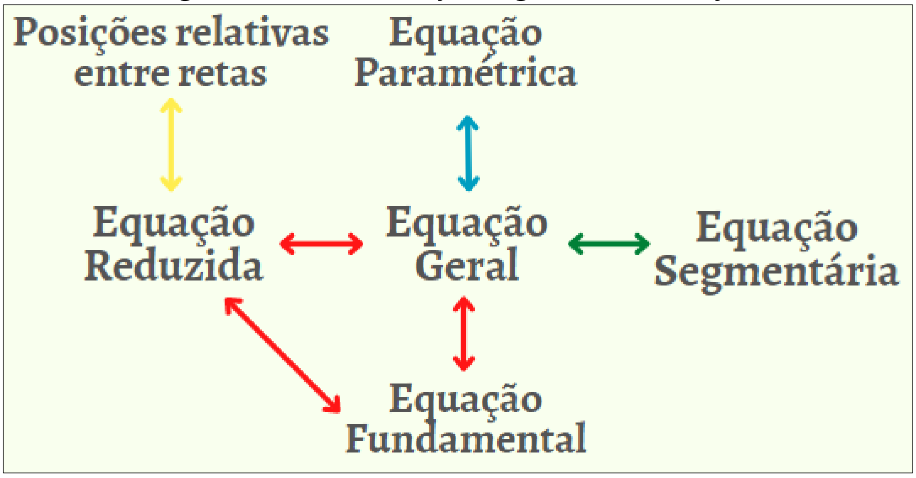
a) $3x - 2y = -6$ b) $y = 1{,}5x + 3$ c) $y - 6 = 1{,}5(x - 2)$

Fonte: Elaboração própria.

Um ponto importante a ser observado é que em cada estação há o estudo de pelo menos uma equação da reta, como por exemplo, a estação amarela, enquanto nas demais, a manipulação algébrica é exemplificada entre pelo menos duas equações diferentes. Essas foram propositalmente assim organizadas tendo o objetivo de que, ao final da rotação, os alunos tenham conhecido a manipulação algébrica entre todas as equações, mesmo que de forma indireta, como é possível notar no esquema representado na Figura 37. Perceba que as setas utilizadas na Figura 37 são coloridas de acordo com a estação em que é feita essa relação.

Outro aspecto a ser observado é que, por exemplo, não há em nenhuma atividade proposta a apresentação da manipulação algébrica diretamente entre as equações paramétrica e reduzida. Mas, apesar disso, a estação azul aborda a manipulação entre as equações paramétricas e gerais, e a estação amarela, entre a equação geral e a equação reduzida.

Figura 37 – Transformações algébricas das estações




Fonte: Elaboração própria.

Nota-se também que todas as estações contemplam diversas atividades cognitivas, uma vez, em todas, há a presença de algum tipo de atividade de conversão, seja entre registros algébrico-geométrico, como entre numérico-algébrico; também há a presença de manipulações algébricas e a formação de registros identificáveis, buscando satisfazer a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que afirma a importância de diversos registros no aprendizado de Matemática (DUVAL, 2012).

De acordo com o modelo de Rotação por Estações, as atividades elaboradas não possuem uma ordem para serem realizadas (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015). Dessa forma, como sugere-se que a turma seja dividida em quatro grupos (mesmo número de estações), sempre haverá um grupo que estará iniciando as atividades em cada uma das estações, por conta disso, as estações foram elaboradas para que os grupos não tenham dificuldades em iniciar as atividades e, ao longo da rotação, estas devem tornar-se cada vez mais simples, devido ao acúmulo de conhecimentos sobre o assunto.

### 3.3.3 Atividade Final

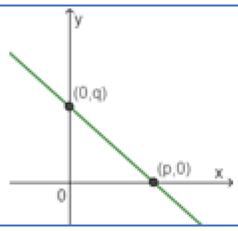
Após a Rotação nas Estações, os alunos devem realizar uma última atividade com o objetivo de reunir e sintetizar as informações estudadas nas estações, a qual também estará organizada em partes. A PARTE I é composta de um “quadro resumo”, como na Figura 38, que deve ser preenchido com a representação algébrica de cada equação (espera-se que de forma generalizada) e com as suas respectivas descrições. Neste momento, eles devem ser encorajados a interagir com os colegas de outros grupos para completar as informações e, caso essa interação não seja suficiente, o professor deve auxiliá-los.

Figura 38 – PARTE I da atividade final

**PARTE I – Resumo das equações**

Durante as estações, você estudou **maneiras diferentes de se escrever** a mesma coisa, **a equação de uma reta!** Sendo que cada equação tem a sua particularidade, ou seja, cada equação têm as suas vantagens.

Agora que você já fez um estudo sobre cada um desses formatos, vamos completar o quadro resumo abaixo, que sintetiza as equações de uma reta.

| Equação | Formato | Descrição |
|---|---|---|
| **Fundamental** | | |
| **Geral** | | Equação em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta. |
| **Reduzida** | | |
| **Paramétrica** | $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ | |
| **Segmentária** | |   |

Fonte: Elaboração própria.

Na PARTE II da atividade final há a síntese das estações, determinando de forma mais evidente qual relação foi estabelecida em cada uma delas, enquanto na PARTE III a finalidade é complementar a estação vermelha e auxiliar os alunos a realizar a PARTE IV, a qual possui uma pergunta sobre a manipulação algébrica da equação reduzida para a equação geral, e, como a estação supracitada não esclarece sobre este ponto, a atividade final o fará. Visto que a PARTE IV é composta de exercícios de vestibulares que utilizam os conhecidos adquiridos ao longo da proposta didática e a maioria desses exercícios exigirá exatamente esta manipulação algébrica.

# 4 TESTE EXPLORATÓRIO

Diante da impossibilidade de atividades presenciais devido à pandemia do Coronavírus, o teste exploratório foi realizado de forma *on-line,* durante o mês de junho de 2021. Assim, cinco professores da Educação Básica foram convidados para analisar e avaliar as atividades elaboradas, com o objetivo de identificar falhas e propor sugestões para a melhoria dessas. A escolha desses professores se deu de acordo com a familiaridade com a pesquisa científica e proximidade com o público-alvo da pesquisa. As atividades foram disponibilizadas por meio de pastas no Google Drive, tendo, cada professor, a sua própria pasta, garantindo, assim, que não acessassem comentários dos demais nos outros arquivos, tal caráter confidencial tem como objetivo impedir que as observações de um influenciassem em outro.

Dentre os cinco professores convidados, apenas um não pôde analisar as atividades. Dessa forma, serão apresentadas as respostas e sugestões dos quatro docentes que se dispuseram a participar do teste exploratório. Para manter o anonimato, eles serão aqui chamados de professor A, professor B, professor C e professor D.

Como alguns deles poderiam não conhecer a modalidade Ensino Híbrido e, consequentemente, a Rotação por Estações, foi elaborado pela pesquisadora uma breve explicação em texto sobre o Ensino Híbrido, a Rotação por Estações, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e sobre os objetivos de cada atividade e de cada estação (Figura 39), com a finalidade de contextualizar todos os professores sobre a proposta didática elaborada, antes de eles a avaliarem. Vale ressaltar que a explicação elaborada completa está disponível no Apêndice C.

Figura 39 – Explicação da proposta didática elaborada


Fonte: Elaboração própria.

Ademais da explicação da proposta didática, também foi elaborado um questionário por meio do Google Forms, que está disponível no Apêndice A, com o propósito de coletar algumas informações destes professores, como a atuação na Educação Básica, o conhecimento e utilização do Ensino Híbrido e das tecnologias digitais, as opiniões e sugestões das atividades e a possibilidade de aplicação da proposta didática por eles.

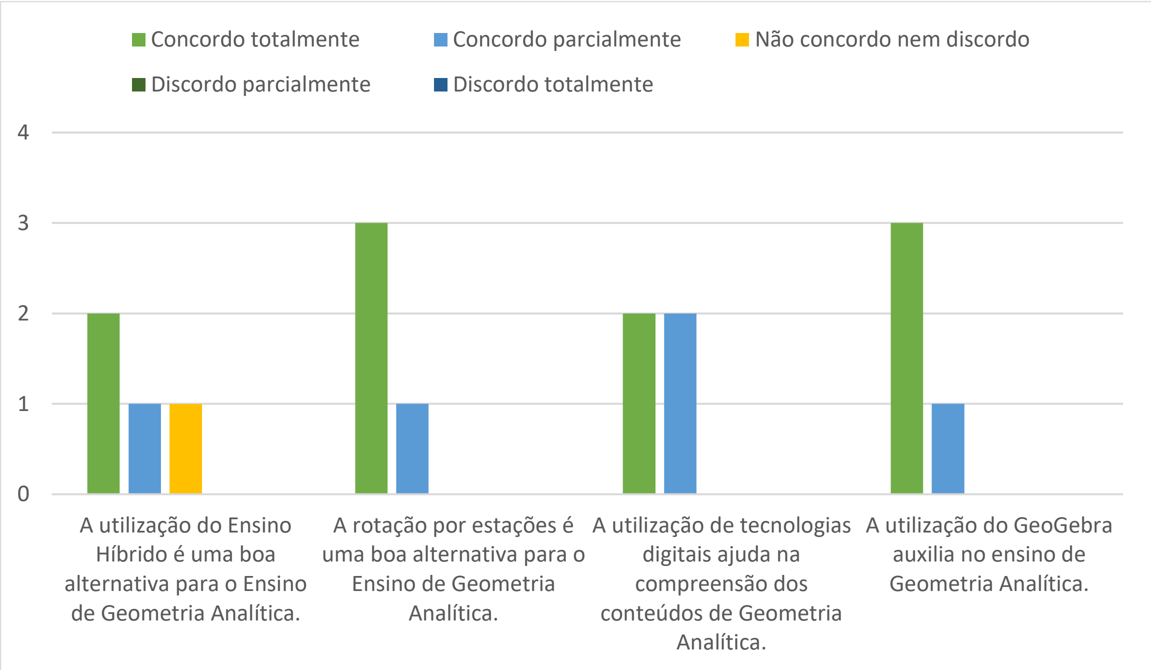
Além de terem respondido o questionário, os docentes também enviaram as suas observações, análises, questionamentos e sugestões por outros formatos. Os professores A e C enviaram um arquivo de texto e os professores B e D fizeram comentários nos próprios arquivos das atividades disponibilizados. A seguir, serão apresentados os dados coletados por meio desse teste exploratório, organizados por cada seção do questionário.

A seção 1 do questionário tinha como objetivo coletar algumas informações pessoais como o nome e a atuação na Educação Básica. De acordo com as respostas obtidas, apenas o professor D não está atualmente trabalhando na Educação Básica, pois atua no Ensino Técnico Profissionalizante. Já os outros professores, trabalham no Ensino Fundamental – Anos Finais, o professor B também atua no Ensino Médio e o professor A, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, no Ensino Médio e no Ensino Superior. Apesar disso, todos já trabalharam com turmas de Ensino Médio, especificamente com turmas da 3ª. série, que são o público-alvo da proposta didática aqui apresentada, apenas o professor B nunca atuou com essa etapa.

Já a seção 2 coletava algumas opiniões dos professores participantes sobre o Ensino Híbrido, sobre a Rotação por Estações, sobre a utilização de tecnologias digitais e sobre o *software* GeoGebra, e, em resumo, todos os professores responderam que já conheciam o Ensino Híbrido e o modelo de Rotação por Estações, sendo que: o professor A respondeu que já utilizou o Ensino Híbrido com o modelo de Rotação por Estações, o professor C respondeu que já o utilizou com outros modelos e o professor B enviou uma consideração afirmando que conhece o Ensino Híbrido, mas nunca utilizou, já que não havia essa opção dentre as disponíveis no questionário, reforçando a concepção de Gil (2008) que as perguntas fechadas podem não conter todas as opções de resposta, enquanto o professor D não respondeu a essa pergunta.

Em relação as afirmativas feitas na pergunta seguinte do questionário, a qual se refere à oitava pergunta desta mesma seção, estão apresentadas, a seguir, as respostas coletadas, de acordo com o Gráfico 1.

Gráfico 1 – Respostas da oitava pergunta do questionário




Fonte: Elaboração própria.

Como é possível perceber no Gráfico 1, a maioria das respostas foram favoráveis a utilização do Ensino Híbrido, do modelo de Rotação por Estações, das tecnologias digitais e do *software* GeoGebra. A primeira afirmativa foi a única em que um dos respondentes (professor D) não concordou totalmente ou parcialmente com a aplicação do Ensino Híbrido, tal resposta pode ser justificada pelo fato que esta modalidade vem ganhando cada vez mais espaço nas pesquisas embora muitos professores ainda não tenham tido a oportunidade de experiencia-la, como afirma Silva (2017) que as pesquisas relacionadas ao Ensino Híbrido ainda são recentes apesar de muitos professores já utilizarem as tecnologias digitais para promover atividades *on-lines* em suas aulas.

Ainda de acordo com o Gráfico 1, a aplicação da Rotação por Estações, a utilização de tecnologias digitais e do *software* GeoGebra obtiveram respostas mais positivas, nas quais todos os professores concordaram em algum nível.

Quanto a utilização das tecnologias digitais e das metodologias ativas, que é a pergunta seguinte dessa mesma seção do questionário, o professor A afirmou já ter utilizado ambas enquanto os outros professores responderam que já utilizaram apenas tecnologias.

De acordo com as respostas obtidas na seção 2, é notável que todos os professores conhecem o Ensino Híbrido, mesmo que de formas diferentes, e, por todos já terem utilizado as tecnologias digitais, entende-se que eles conhecem as vantagens e limitações dessas, podendo aplicar seus conhecimentos na análise e avaliação das atividades.

A seção 3 do questionário teve o objetivo de coletar as opiniões a respeito das atividades e das estações elaboradas. Quanto à atividade inicial, os professores A e D responderam que consideram que esta cumprirá com o seu objetivo, o professor A comentou que “O aluno/a não só associará o conteúdo a realidade como também deverá se utilizar dos seus conhecimentos, no caso, as várias formas de se representar uma reta, para resolver a questão.” De acordo com a fala do professor, percebe-se que a atividade inicial está de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017b), pois estimula os processos de reflexão e abstração, incentivando o raciocínio criativo, dedutivo e analítico.

Os outros dois professores responderam que talvez a atividade inicial cumpra com o seu objetivo, sendo que o B comentou: “Dependendo do ano que for aplicado, os alunos podem ter dificuldades em perceber que todas as alternativas representam uma reta.” Esse tipo de dúvida a ser levantada por eles faz parte do objetivo da atividade inicial, que é fazê-los pensar e questionar sobre o conteúdo. Além disso, de acordo com Duval (2012) é apenas pela utilização de diferentes representações que os alunos terão uma apreensão conceitual, para que haja a *noesis* (conceituação) são necessárias várias *semioses* (representação). Já o professor C afirmou não ter compreendido o objetivo da atividade, apesar de este ter sido explicitado na explicação da proposta didática elaborada pela pesquisadora.

Em relação à **estação verde**, todos os professores consideram que esta cumprirá seu objetivo, visto que o professor A comentou: "Acredito que a referida estação cumpre o objetivo proposto, porém é necessário que se faça uma correção na parte IV. Mais especificamente: - O número que divide o y na equação da reta é igual à ORDENADA do ponto em que a reta intersecta o eixo y.”. E realmente há um erro de digitação na PARTE IV dessa estação, pois, estava escrito “O número que divide o $y$ na equação da reta é igual à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo $y$.” mas, na verdade, o número que divide o y é igual à ordenada do ponto, como o professor B havia salientado. Dessa forma, a sugestão foi aceita e a modificação foi feita.

Já professor B respondeu no questionário que “As etapas parecem bem estruturadas e com passos relativamente simples de seguir.”. Além disso, nos comentários feitos no arquivo da estação, ele também destacou pequenos erros de formatação e digitação (incluindo o que foi destacado pelo professor A) que foram alterados. E, ainda, sugeriu alterar o título da PARTE III de “manipulação da geral para a segmentária” para “manipulação da equação geral para a equação segmentária”, ou seja, ele recomendou adicionar a palavra “equação” para que o texto fique mais claro. Essa sugestão também foi aceita e a estação foi modificada.

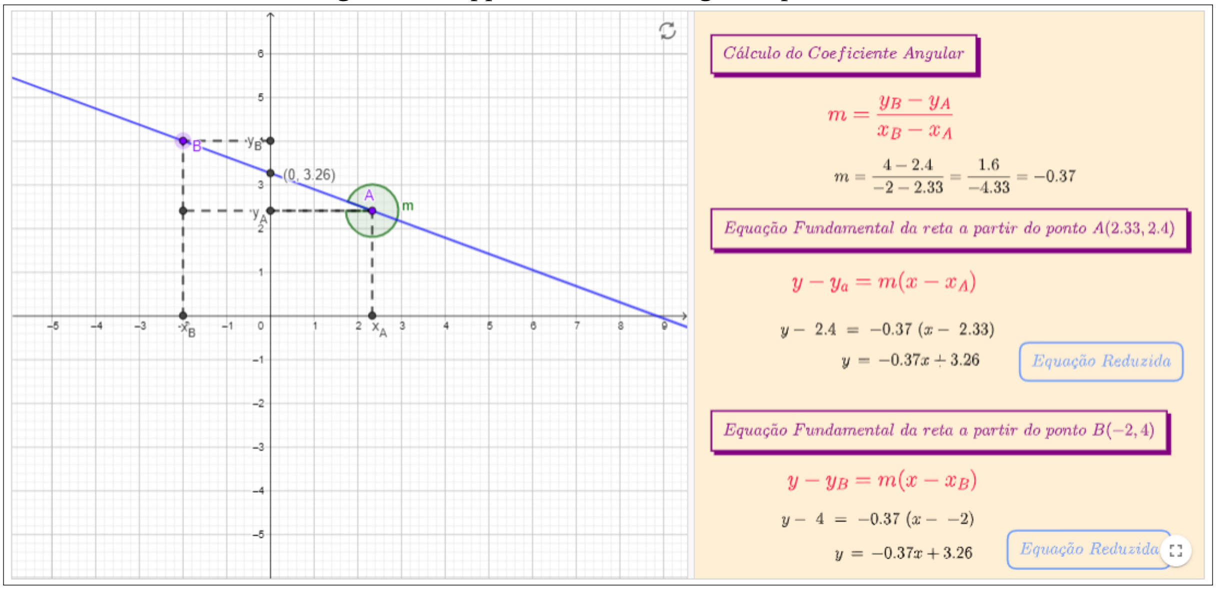
A pergunta seguinte do questionário era sobre as possíveis dificuldades na manipulação do *software* GeoGebra, que é solicitado na PARTE I. Nesta pergunta, apenas o professor D respondeu que talvez os alunos tivessem dificuldades e sugeriu que poderia ser solicitado que eles explorassem um pouco o GeoGebra antes da atividade. Sendo esse um *software* muito intuitivo e tendo na estação a especificação das duas únicas ferramentas que o aluno precisará usar, não será necessário o domínio da ferramenta para que o objetivo seja alcançado, entende-se que não há necessidade dessa exploração.

Reiterando essa ideia, Silva (2014, p. 165) apresenta como um dos resultados positivos obtidos da sua pesquisa foi o deleite que os alunos participantes da aplicação tiveram ao usar o *software* GeoGebra, especialmente por este ter sido reconhecido pela sua fácil manipulação e por melhorar o entendimento da Geometria Analítica.

Dando sequência as perguntas do questionário, apenas o professor B respondeu que os alunos podem ter dificuldades nessa estação, mais especificamente na visualização da equação segmentária da reta, mas ele não justificou a sua opinião. O professor C não fez considerações quanto a essa estação.

Em relação à **estação vermelha**, todos os professores consideram que esta cumprirá o seu objetivo. O professor A comentou que “Acredito que a estação cumpre o objetivo proposto, mas é necessário ajustar o *Applet* para coeficientes angulares negativos. O ângulo de referência está sendo o replemento ao invés do suplemento em relação ao eixo X.”. De fato, ao manipular os pontos de forma que a inclinação da reta fique negativa, o *applet* mostra o ângulo replementar em relação ao eixo $x$ (Figura 40), o que apresenta um erro de programação das suas funções. Dessa forma, a sugestão de alteração foi acatada e o *applet* ajustado.

Figura 40 – *Applet* exibindo o ângulo replementar




Fonte: Elaboração própria.

Ainda em relação as justificativas dos professores quanto à estação vermelha cumprir o seu objetivo, o professor B comentou que nessa estação “São as representações com manipulações mais simples, então acredito que os alunos conseguirão alcançar o objetivo proposto.”. Essa fala do professor indica que a estação está de acordo com o esperado pela BNCC (BRASIL, 2017b) de que a passagem entre as representações deve ser feita com fluidez e maleabilidade, desenvolvendo o raciocínio dos alunos.

Já o professor D justificou a sua resposta afirmando que seria pelo fato de ser trabalhado com a investigação e a descoberta das equações. Essas características são importantes devido à orientação fornecida pela OCEM (2006) e pela crítica ao ensino de Geometria Analítica exposto por Domingos (2017), buscando, assim, uma aprendizagem que afaste a mecanização e aplicação direta de formas e desenvolva a habilidade de “pensar matematicamente”.

Ao serem questionados sobre as possíveis dificuldades dos alunos em alguma parte dessa estação, os professores C e D responderam “não”, enquanto o professor B respondeu “sim”, mas apenas justificou que essa dificuldade seria na generalização final, sem informar o porquê.

Já o professor A respondeu “talvez” e justificou a sua resposta da seguinte forma: “Em determinado momento na teoria, fala-se em manter um dos membros da equação igual a zero, contudo, no exemplo que segue e, na sequência, com a formalização da teoria, o que foi citado no texto não aparece, já que nenhum dos membros foi igualado a zero. Outra observação é que o vídeo da Khan Academy utiliza alguns termos que não são citados durante a exposição da teoria como forma padrão ou forma canônica.” A primeira observação do professor, refere-se a PARTE IV, em que realmente o texto apresentado não está de acordo com os exemplos, assim, essa sugestão foi acatada e a estação foi modificada. A segunda observação é sobre o vídeo disponibilizado, feita no arquivo de texto enviado pelo professor A, o qual questiona se não seria melhor a própria pesquisadora elaborar os vídeos para que ficassem de acordo com a teoria. De acordo com a proposta do Ensino Híbrido, o ensino deve ser mesclado, misturado, dessa forma, é muito importante que os alunos tenham contato com diferentes materiais, preparados por diversos profissionais, com diferentes linguagens, pois, em uma mesma sala de aula eles têm as mais diversas formas de aprender. Em concordância, Silva (2017, p. 76) afirma que os alunos

> [...] não são fieis a um único ambiente de aprendizagem, alguns deles pesquisam, aprendem e estudam em mais de um ambiente. Portanto cabe ao professor direcionar esse estudo, filtrando as plataformas de aprendizado e deixando passar pelo filtro aquelas que favorecem a construção do conhecimento do aluno. Essa postura docente vai ao encontro da proposta híbrida de ensino, pois mescla “o melhor dos dois mundos” [...]

Em relação ao termos utilizados no vídeo que não são citados na estação, como o formato da equação da reta é o mesmo e manipulação algébrica feita está de acordo com a teoria, essa linguagem matemática que o autor do vídeo utiliza pode ser entendida como um ganho no aprendizado do aluno. Sendo assim, considera-se que o vídeo cumpre com o objetivo proposto.

A pergunta seguinte do questionário refere-se à relevância do *applet* e do vídeo disponibilizados e as respostas dividiram opiniões: os professores C e D responderam que ambos são relevantes, o professor A respondeu que apenas o *applet* é relevante (provavelmente devido as críticas já citadas em relação ao vídeo) e o professor B respondeu que apenas o vídeo é relevante.

A resposta obtida do professor B provavelmente justifica-se pelo comentário feito no arquivo da estação, afirmando ter tido dificuldade em posicionar os pontos ao abrir o *applet* no *smartphone* e, por conta disso, considerou a movimentação difícil e o *applet* não funcional. Apesar dessa experiência por parte do professor B, testes foram realizados nos *applets* para verificar a sua funcionalidade em telas menores como a de *smartphones* e, apesar de funcionar melhor em telas maiores, também é possível movimentar e posicionar os pontos em telas menores.

Ainda em relação ao *applet*, o professor C comentou no arquivo de texto enviado que, a partir do QR Code disponibilizado, apenas foi apresentado na tela uma reta e que não havia conseguido visualizar as outras, mas o objetivo do *applet* era exatamente este: apresentar uma única reta (um único registro geométrico) e diferentes formas da equação associadas para esta mesma reta.

Além das sugestões e observações já descritas acima, ainda sobre a estação verde, o professor A fez algumas pequenas sugestões de ortografia e digitação que foram alteradas e também sugeriu alterar o enunciado da PARTE V, em que este sugere que seja "Represente no plano cartesiano abaixo os gráficos das seguintes equações" ao invés de "Utilize o plano cartesiano abaixo e esboce o gráfico do gráfico das seguintes equações". Essa sugestão foi considerada e a atividade da estação foi alterada.

Já o professor B, sugeriu que na PARTE I, ao deduzir a equação fundamental a partir do coeficiente angular, a palavra "cancelando" fosse alterada por "dividindo", considera-se que esta alteração seja de extrema relevância devido ao "cancelamento" não ser uma operação matemática e a divisão sim, logo, essa alteração foi realizada na estação. Esse professor também questionou a apresentação da equação fundamental da reta, pois na PARTE I a equação é apresentada como $(x - x_A)m = y - y_A$ e na PARTE II como $y - y_A = m(x - x_A)$. Por tratar-se de uma igualdade, a ordem em que os membros são apresentados não altera o resultado da equação, considera-se que essa sugestão seja por questões estéticas, logo, esta alteração não foi realizada. Ademais, as outras questões levantadas por este professor e pelo professor D sobre esta estação foram pequenos erros de digitação, ortografia e formatação que foram alterados.

Em relação a **estação azul**, os professores A, C e D consideram que esta cumpre o seu objetivo, enquanto o professor B afirmou "Não acredito que os alunos conseguirão ver relação entre as duas equações propostas, apesar de achar que eles não terão problemas em trabalhar com elas separadamente.", e, além disso, não justificou o porquê da sua opinião, mas o trabalho separado entre as equações da reta é um aspecto muito criticado no estudo deste conteúdo pois, conforme o Guia Digital (BRASIL, 2018), cada uma das equações da reta é apresentada separadamente e sem explorar a sua relação, o que torna o aprendizado de Geometria Analítica ainda mais fragmentado.

Já o professor A justificou a sua resposta afirmando que “Acredito que a estação cumpre a proposta de forma adequada. No caso do *Applet* sugiro que os elementos do mesmo sejam fixados no GeoGebra, para um melhor manuseio dos alunos.”. Consideração essa que é de grande pertinência devido ao movimento necessário com o controle deslizante para visualização das informações, logo, a sugestão foi considerada e o ajuste realizado.

A pergunta seguinte do questionário era sobre as possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar na estação denominada azul e apenas o professor B considerou que elas podem vir a acontecer nas conclusões finais, mas não justificou a sua observação.

Quanto a relevância do *applet*, os professores A, C e D o consideraram muito relevante. Apesar da avaliação e do elogio feito pelo professor C, ele afirmou ter o considerado pequeno ao ser visualizado na tela do celular. Conforme já mencionado, os *applets* são de melhor visualização e manuseio em telas maiores, mas, apesar disso, estes também têm as suas funcionalidades aptas às telas menores.

Já o professor B considerou o *applet* um pouco irrelevante, mas a relevância deste se dá pela percepção feita após a análise dos livros didáticos do PNLD. Dentre os livros que abordam a equação paramétrica, nenhum deles o fazem de forma dedutiva, apenas apresentam essa forma da equação a partir de algum exercício ou exemplo contextualizado. Apesar disso, as OCEM (BRASIL, 2006, p. 76) consideram “[...] importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação.”. Dessa forma, buscando incrementar a abordagem dos livros didáticos e atender a determinação dos documentos oficiais, entende-se que é muito pertinente que seja abordada a dedução dessa equação, mas de acordo com a modalidade híbrida, isso deve ser feito de forma mais dinâmica, justificando, então, a utilização de um *applet* em que, por meio de uma animação, as informações vão sendo apresentadas, afastando-se dos métodos mais tradicionais.

Além das opiniões e sugestões obtidas por meio do questionário, o professor B sugeriu que, no segundo parágrafo de explicação da equação, ao final da PARTE I seja colocado como lemos a letra grega $\lambda$. E, realmente alguns alunos podem não conhecer esse símbolo, tendo em vista que a sua utilização não é comum nos materiais analisados. Ainda nesse mesmo parágrafo, o professor D, sugeriu retirar a palavra “aqui”, e ambas as sugestões foram consideradas e alteradas na estação.

O professor D recomendou também que na PARTE II fossem utilizados pontos com coordenadas negativas nos itens a) ou c), de forma que os pontos a serem utilizados estivessem localizados em todos os quadrantes, e não apenas nos 1º e 3º quadrantes, assim, os pontos também foram modificados. Além disso, ele sugeriu que no quadro azul utilizado, para dar destaque ao formato da equação estudado, fosse modificado da seguinte forma: “Deixar o formato da equação dentro da caixa em destaque e colocar uma seta ao lado indicando que essa é a equação da reta. E não colocar uma abaixo da outra.”. Tal sugestão não foi considerada por estar mais voltada para a estética da estação, assim, não apresentaria melhorias significativas ao aprendizado do aluno.

Ele também sugeriu que, na frase logo após o quadro azul na PARTE III, as palavras “Equação da reta” fossem retiradas, por já estarem dentro do quadro. Essa modificação foi feita, resultando então “Em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta.”

Por fim, o professor D levantou o questionamento quanto aos enunciados das perguntas feitas na PARTE V. Como os alunos estarão divididos em grupos no momento da realização dessas atividades, ele sugeriu que fosse retirada a palavra “você” dos enunciados, para não dar a ideia de uma resposta individualizada e sim, de um trabalho realizado em grupo, sugerindo que as perguntas fossem reescritas da seguinte forma: “O que foi possível entender sobre a equação paramétrica? Como ela funciona?” ou “O que vocês entenderam sobre a equação paramétrica? Como ela funciona?”. Essa adequação dos enunciados escritos no singular para o plural reforça a ideia do trabalho colaborativo, um dos principais pontos da abordagem do Ensino Híbrido (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Da mesma forma, o professor sugeriu que a última pergunta tivesse o enunciado alterado para “É possível perceber alguma relação entre as equações geral e paramétrica? Justifique.” Dessa forma, os enunciados foram alterados em todas as estações devido à pertinência da observação feita. Ademais, as outras questões levantadas pelos professores foram pequenos erros de digitação, ortografia e formatação que também foram ajustados.

Em relação a **estação amarela**, os professores B, C e D consideram que ela cumprirá com o seu objetivo, o professor C justificou a sua resposta afirmando que “São padrões simples de serem notados, então acredito que os alunos conseguirão acompanhar bem a atividade proposta”. Essa fala do professor relaciona-se com uma das grandes competências para o Ensino Médio propostas pelo PCN+ (BRASIL, 2002): a de investigação e compreensão pois, o documento espera que o ensino desenvolva nos alunos essa habilidade de identificação de padrões em situações análogas para o desenvolvimento de propriedades e/ou regras.

Já o professor A respondeu que talvez a estação atinja o seu objetivo justificando que “O *applet* é um recurso essencial para a dinamização e fixação da teoria, já que "dá vida" ao conteúdo, porém quando tentei acessá-lo, a página apresentou erro”. Esse tipo de comentário se faz muito útil ao trabalho pois, de acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) não basta que a tecnologia seja inserida no processo de ensino, é necessário que ela seja realmente funcional, neste caso, é necessário que seja feita a correção dos possíveis erros de configuração dos *applets* e dos QR Codes para que esses possam ser acessados.

Quanto as possíveis dificuldades nessa estação, todos os professores responderam que consideram que os alunos irão responder as atividades sem dificuldades. Ao serem questionados em relação ao *applet* e ao vídeo, os professores C e D consideraram que ambos são relevantes, o professor A considerou apenas o *applet* relevante e o professor B utilizou da alternativa “outra opção” para apontar o erro nos QR Codes.

Em relação ao vídeo o professor A sugeriu novamente que o vídeo fosse elaborado pela própria pesquisadora, mas de acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 98) o professor “[...] é o intermediário entre o aluno e a informação, e cabe a esse profissional compartilhar as diferentes formas de obter informação, entre elas a leitura de livros e artigos na internet, assistindo a um vídeo, realizando exercícios e experimentos.”. Dessa forma, entende-se que é interessante para o aprendizado que o professor oferte bons materiais disponíveis na internet.

Já o professor C comentou que “O vídeo está bem didático, mas talvez fosse mais interessante escolher algum de um canal maior para passar mais credibilidade.” Embora a credibilidade das informações a serem disponibilizadas aos alunos seja de enorme importância, entende-se que o conteúdo do vídeo é mais relevante que o canal em que este foi postado e como o vídeo selecionado está de acordo com a teoria, como ressaltado pelo professor em suas próprias palavras, essa sugestão não foi realizada. Trevisani e Corrêa (2020) reiteram essa ideia ao afirmarem que uma aula híbrida deve integrar o *on-line* com o presencial de forma que esses se complementem e que estejam conectados com o objetivo central da aula, ou seja, o importante é que o vídeo disponibilizado esteja de acordo com os objetivos da estação.

Além das sugestões coletadas pelo questionário, o professor D sugeriu que, na PARTE I, fosse mantida uma única ordem de apresentação das informações pois nesta, inicialmente está escrito $m = tg\ \alpha$ e, na mesma página, também está $tg\ \alpha = m$. Por ser uma igualdade, entende-se que a ordem de apresentação dos membros é indiferente, podendo então tanto apresentá-los na mesma ordem ou em ordens diferentes.

Ainda sobre a PARTE I, o professor B considerou que os exemplos b) e d) estão muito parecidos. Como as retas desses itens são perpendiculares entre si, o padrão a ser percebido é que o valor do coeficiente angular de uma reta é o oposto do inverso do valor do coeficiente angular da outra reta. Devido a percepção desse padrão entre os coeficientes angulares pode não ser tão simples como das retas em outras posições, justifica-se, então, a utilização de dois exemplos parecidos.

Já na PARTE II, este mesmo comentou que a figura utilizada para apresentar as posições relativas entre retas estava um pouco embaçada. Além disso, este também fez algumas sugestões em relação as palavras sublinhadas no texto logo abaixo da figura. Ele sugeriu que fosse mudado o destaque das palavras “não possuem pontos” para apenas o “não”, justificando que o atual destaque pode dar a ideia de que a reta não tem pontos. Também foi recomendado que fosse mudado o destaque de “apenas um ponto” para “apenas um ponto em comum”, sublinhando toda a sentença para que não pareça que a reta é apenas um ponto. Essas sugestões foram consideradas e alteradas.

Tanto na PARTE III como na PARTE V, o professor B sugeriu que no título da seção da estação fossem adicionadas as palavras “entre as retas”, ficando então, respectivamente, “Relação entre o coeficiente angular e a posição relativa entre as retas” e “Relação entre a equação reduzida e as posições relativas entre as retas”. Ainda na PARTE III, ele questionou se no quadro a ser preenchido não seria melhor que fossem utilizados outros valores e não os determinados na PARTE I. Considera-se que utilização dos mesmos valores dá a oportunidade ao aluno de relacionar o nome da posição com a representação geométrica dessa, além de trazer uma maior relação entre as partes da mesma estação. Ademais, as outras questões levantadas pelos professores foram pequenos erros de digitação, ortografia e formatação.

Em relação a **atividade final**, os professores A, C e D consideram que esta cumprirá o seu objetivo e o professor B respondeu talvez. O professor A comentou “Acredito que sim, mas senti falta de mais questões contextualizadas.”. E, realmente, o trabalho com questões contextualizadas é muito importante dito que este é a terceira grande competência para o Ensino Médio que os PCN+ (BRASIL, 2002) esperam que sejam desenvolvidas.

O professor B explicou a sua opinião devido que "Vai depender de como for o desempenho deles durante as estações. As questões propostas também podem gerar dúvidas dado o grau de dificuldade em algumas delas.". E, de fato, os alunos podem vir a ter dificuldades nos exercícios propostos, dessa forma, o professor precisa estar a todo momento atento e próximo aos alunos para ajudá-los como mediador da sua aprendizagem, quando necessário (BACICH; TANZI NETO: TREVISANI, 2015).

Já o professor C comentou que "É uma atividade muito importante visto que poderá verificar por meio das atividades propostas a aprendizagem dos temas propostos em cada estação.". Essa fala do professor mostra que as estações estão de acordo com o que é o proposto por esse modelo do Ensino Híbrido pois, apesar de essas serem não sequencias, precisam ter essa integração para que ao final da aula o aluno tenha a oportunidade de integrar todo esse conhecimento (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

O professor D comentou que "Além do resumo feito na parte inicial da atividade ao final são apresentadas questões de vestibular, ou seja, os alunos já terão um resumo para o vestibular e aplicações dos conteúdos estudados.". Além dessas opiniões coletadas pelo questionário, apenas o professor A fez algumas considerações. Na PARTE IV, este destacou o fato de que a terceira questão foi adaptada, mas não foi indicado no enunciado, o que foi corrigido.

Na quarta e última seção do questionário, eram feitas algumas perguntas mais gerais sobre a possível utilização da proposta didática elaborada pelos professores que participaram do teste exploratório. Assim, os professores A, C e D responderam que usariam a proposta didática com suas turmas e o professor B respondeu talvez.

O professor A comentou que "Com certeza, a proposta traz o tema das equações da reta de uma forma dinâmica e interativa.". Já o professor C comentou que "As atividades estão bem elaboradas, de fácil compreensão e bem atrativas". Com essas falas dos professores, percebe-se que a proposta didática está de acordo com a modalidade híbrida e com a superação das críticas ao ensino de Geometria Analítica exposta por Domingos (2018) e Silva (2014).

Já o professor B justificou a sua opinião afirmando que "A atividade é bastante extensa e dependendo do calendário escolar não seria viável.". O professor D também comentou que "A atividade está maravilhosa, mas demanda tempo para aplicar, programando dá aplicar sim.". A partir dessas duas declarações dos professores percebemos que há um elemento complicador que é o tempo de aplicação necessário para atividades desse tipo (o que é maior do que seria utilizado para a explicação do conteúdo em aulas tradicionais), mas em compensação, estas trazem uma proposta diferente de conversão entre os registros, autonomia do aluno e utilização das tecnologias digitais de forma integrada. Em concordância, Bellotto (2019, p. 97) destaca após a aplicação de suas atividades que:

> Ressalta-se que as combinações metodológicas ativas/híbridas, desenvolvidas no contexto da prática escolar onde foi realizada a pesquisa, não podem ser vistas como sequências a serem reproduzidas em todas as aulas de Matemática, tampouco como algo “engessado” para ser seguido pelos educadores. Todavia podem ser vistas como uma exitosa experiência para a situação em que foi aplicada, podendo servir como orientação em planejamentos e atividades que venham ao encontro de abordagens pedagógicas que possam ser aplicadas/reaplicadas e adaptadas por educadores em quaisquer situações de ensino e aprendizagem.

Ao serem questionados se fariam alguma modificação nas atividades para aplicá-las, apenas o professor C respondeu que não as faria, enquanto os outros responderam talvez. O professor A justificou que faria “as alterações já sugeridas por este. Já o professor B comentou que “Talvez seja necessário reduzir a quantidade de etapas e exercícios.”, provavelmente devido a sua resposta anteriormente explicitada sobre a extensão das atividades e o tempo de aplicação.

Já o professor D comentou que “Diminuiria um pouco, mas cada parte é importante. É um caso a ser pensado, infelizmente trabalhamos contra o tempo em sala de aula e com as dificuldades de cada turma. Mas acho de grande importância trabalharmos atividades como essa pelo menos uma vez no ano letivo com a turma.”. Essa fala do professor relaciona-se com a afirmação feita por Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) em que estes afirmam que o professor tem em suas mãos o poder de simplesmente aceitar que o sistema educacional está defasado ou propor-se a ser um agente ativo nessas mudanças.

A última pergunta do questionário tinha o objetivo de coletar sugestões dos professores em relação a toda a proposta, mas todas as sugestões ali coletadas já foram descritas de forma mais detalhada acima.

De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), um professor que escolhe o Ensino Híbrido precisa conhecer, testar, analisar, avaliar e reavaliar a sua prática, dessa forma, foi de extrema relevância para a pesquisa todas as sugestões, correções, questionamentos e observações obtidas pelos professores, pois permitiu o melhoramento dos pontos que eram necessários que se fizessem algumas alterações e também o questionar da pesquisadora em relação a algumas escolhas feitas, revisitando os objetivos determinados para que todas as atividades propostas e as ferramentas utilizadas estivessem de acordo com a finalidade da estação e da proposta didática como um todo.

Todas as sugestões que foram acatadas e alteradas podem ser vistas no Apêndice D, que conta com a proposta didática modificada após a realização do teste exploratório. Destaca-se que, como a atividade inicial não teve sugestões ou modificações a serem realizadas, neste apêndice contará apenas as estações e atividade inicial.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da percepção de que a sociedade está se tornando cada vez mais tecnológica, entende-se a importância de se repensar e de se renovar algumas práticas. Este fato tem ainda mais ênfase ao serem analisadas as diversas dificuldades as quais os alunos têm apresentado na aprendizagem da Matemática. De acordo com o que foi discutido nesta pesquisa, essas dificuldades são ainda mais graves em relação à Geometria Analítica, pois nesta área da Matemática, muitas vezes há uma abordagem mecanizada e desconexa de sentido.

A partir da problemática apresentada, foi determinado como objetivo geral desta pesquisa: identificar a contribuição de uma proposta didática, por meio da Rotação por Estações na compreensão das representações das equações da reta. Compreende-se que a utilização de uma modalidade de ensino que mescle a aprendizagem presencial com a aprendizagem *on-line*, com o auxílio das tecnologias digitais, pode ser uma boa alternativa para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Geometria Analítica, em especial, para o conteúdo das equações da reta.

Buscando atender a esse objetivo geral, elaborou-se uma proposta didática utilizando o modelo de Rotação por Estações para o estudo das equações da reta. Para o seu desenvolvimento foi necessário, inicialmente, fazer um estudo mais profundo sobre cada uma das equações da reta a serem abordadas na pesquisa, analisando as suas demonstrações e as relações entre as que eram possíveis de serem estabelecidas, atingindo, então, o primeiro objetivo específico desta pesquisa.

Ainda no estudo para o desenvolvimento da proposta, foi realizada uma análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD, tendo em vista o público-alvo da proposta ser a 3ª. série do Ensino Médio. Nessa análise, ficou evidente o privilégio concedido às equações geral, reduzida e fundamental, especialmente ao trabalho de manipulação algébrica entre essas, indicando então que seria necessário que as atividades elaboradas tivessem uma abordagem diferente: equilibrando as representações algébrica e geométrica e buscando desenvolver um estudo mais aprofundado da equação paramétrica e da equação segmentária.

Levando em consideração o segundo objetivo específico, foi feita uma análise sobre a modalidade do Ensino Híbrido e sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na qual foi possível verificar que o Ensino Híbrido propõe que o aluno seja o protagonista do seu próprio aprendizado, valorizando a sua autonomia e o desenvolvimento de uma atitude mais ativa em sala de aula, dentre outros aspectos. Ou seja, a ideia dessa modalidade de ensino vai ao encontro das necessidades identificadas para o ensino da Geometria Analítica. Verificou-se também que, particularmente, o modelo de Rotação por Estações aponta para uma aprendizagem muito mais dinâmica e colaborativa, possibilitando a organização do conteúdo em diferentes ambientes de trabalho, com diversas ferramentas e atividades.

Já a Teoria dos Registros de Representação Semiótica possibilitou a percepção da importância de não apenas identificar uma representação e transformá-la dentro de um mesmo registro, mas de que, para um verdadeiro aprendizado e para o desenvolvimento das atividades cognitivas da Matemática, é necessário que o aluno também converta essas informações entre diferentes registros. O que é possibilitado pelo caráter de união entre a Álgebra e a Geometria desse ramo da Matemática estudado.

Ainda buscando atender ao segundo objetivo específico, realizou-se uma busca na base de dados da CAPES e no Google Acadêmico sobre outras pesquisas que utilizaram o Ensino Híbrido no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica. Constatou-se, então, que a maioria dos trabalhos encontrados utilizam o modelo de Rotação por Estações e o *software* GeoGebra, devido a possibilitar uma maior relação entre a Álgebra e a Geometria de forma dinâmica, instantânea e de fácil manuseio, vantagens que vão de encontro ao ensino da Geometria Analítica por meio do Ensino Híbrido.

Assim, foram elaboradas quatro estações, tendo em vista o modelo de Rotação por Estações para o ensino das equações da reta da Geometria Analítica, com a utilização de videoaulas do YouTube Edu e de *applets* no *software* GeoGebra.

A partir das atividades elaboradas, foi realizado um teste exploratório *on-line*, com professores da Educação Básica, para identificar possíveis erros, falhas e correções necessárias, além de coletar suas opiniões, observações e sugestões.

Por meio deste, foi possível perceber que a atividade inicial dividiu opiniões: metade dos professores consideram que ela cumprirá o seu objetivo e a outra metade não tem tanta certeza. As estações, como um todo, precisavam de alguns ajustes de formatação, digitação e ortografia, alguns QR Codes não estavam devidamente configurados para serem escaneados, alguns *applets* precisavam de ajustes, dentre outros aspectos. Já a atividade final estava bem organizada, mas os exercícios disponibilizados estavam descontextualizados, representando, assim, uma melhoria necessária.

De forma geral, o teste exploratório foi muito enriquecedor para o aprimoramento dos *applets* e da proposta didática em si. Assim, foi atingido o terceiro objetivo específico que, pelas atividades elaboradas e pelas análises feitas, especialmente no teste exploratório, foi possível refletir sobre a importância da utilização de diversos recursos e representações no estudo das equações da reta.

Portanto, de acordo com as análises feitas, tornou-se possível responder à questão de pesquisa, reconhecendo que a modalidade híbrida pode propor um ensino das diferentes representações das equações da reta muito mais diversificado, reflexivo e ativo para o aluno, em especial se utilizado o modelo de Rotação por Estações, segundo a percepção dos professores participantes do teste exploratório.

Para futuras pesquisas com esta mesma temática, sugere-se que sejam aplicadas às atividades, devido à impossibilidade de isto ter acontecido por causa da pandemia do Coronavírus. Sugere-se também que sejam utilizados outros modelos do Ensino Híbrido para o ensino de outros tópicos no ensino de retas pela Geometria Analítica, ensino da circunferência e das cônicas.

Portanto, esta monografia propôs a análise da importância da utilização de diversos registros de representação no ensino das equações da reta, com ênfase na conversão desses. Além do emprego de modelos de ensino sustentados, que não rompem com a estrutura física e curricular da escola, como o modelo de Rotação por Estações, incentivando a inserção de atividades *on-line*, por meio das tecnologias digitais, juntamente com as atividades presenciais.

Este trabalho contribuiu muito para a formação acadêmica e profissional da pesquisadora, tendo em vista ter proporcionado um aprendizado sobre a pesquisa científica, sobre a importância da utilização de diferentes registros de representação e diversas ferramentas, como as atividades por meio das tecnologias no Ensino da Matemática. Espera-se, então, que esta pesquisa motive os professores e todos os envolvidos com o processo de ensino e de aprendizagem a refletirem sobre a importância dos pontos discutidos e a promoverem mudanças em direção a um ensino de Matemática cada vez mais exitoso para os nossos alunos.

## REFERÊNCIAS


ALENCAR, A. C. **História da Matemática no Livro Didático de Matemática:** Práticas Discursivas. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. **Ensino Híbrido**: Personalização e tecnologia na educação. [S.l.]: Pensa, 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. – São Paulo: Edições 70, 2016.

BALESTRI, R. **Matemática:** Interação e Tecnologia. 2. ed. 3. v. São Paulo: Leya, 2016.

BELLOTTO, V. B. **O Ensino de Matemática e o Processo de Construção da Autonomia do Aluno Através das Metodologias Ativas e Híbridas**. Dissertação (mestrado), Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017a.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017b.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2018. Matemática: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/busca-geral/318-programas-e-acoes-1921564125/pnld-439702797/12391-pnld. Acesso em 13 abr. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (parte III). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 2. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL, P. C. N.; MÉDIO, E. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, p. 32, 2002.

CARDOSO, F. C**. O Ensino da Geometria Analítica em um Curso de Licenciatura em Matemática**: uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica. Dissertação (mestrado) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, Rio Grande do Sul, 2014.

CARPES, P. P. G. *et al.* Geometria Analítica no Ensino Superior: Uma Proposta de Ensino Híbrido. **REDIN – Revista Educacional Interdisciplinar**. Seminário Internacional de Educação, Tecnologia e Sociedade. v. 7. n. 1. p. 1-11, 2018.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática**: 3º ano. São Paulo: SM, 2016.

CHRISTENSEN, C.; HORN, M.; STAKER, H. **Ensino Híbrido**: uma Inovação Disruptiva? Uma Introdução à teoria dos híbridos. 2013. Disponível em: https: //www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf. Acesso em: 16 jan. 2019.

CHRISTENSEN, C.; HORN, M.; STAKER, H. **Blended**: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822/3074. Acesso em: 16 nov. 2019.

DAMM, R. F. Registros de representação. In.: 3. ed. São Paulo: EDUC, cap. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução, p. 167 – 188, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações: 3º ano, 3. ed. v. 3. São Paulo: Ática, 2016.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **Java, como programar**. Tradução de Carlos Arthur Lang Lisboa. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

DELGADO, J.; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96 - 112, 2011.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 - 297, 2012.

DUVAL, R. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? Tradução de Méricles T. Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2009, p.11-33.

DOMINGOS, C. M. **Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio:** uma experiência com coordenadas e cálculo de distâncias no plano e no espaço. 2017. 194 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

FARIA, R. R. de; SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. **A transformabilidade dos registros de representação semiótica no ensino de equações de reta**. REVEMAT, v. 7, n. 2, p. 53-68, 2012.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo – SP: Atlas, 2008. Disponível em: https://ayanrafael.files.wordpress.com/2011/08/gil-a-c-mc3a9todos-etc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf. Acesso em: 08 jul. 2021.

GUERRA, E. L. A. **Manual de Pesquisa Qualitativa**. 2014. Disponível em: encurtador.com.br/sW469. Acesso em 03 ago. 2020.

HALLAL, R. *et al*. **Blended Learning:** uma experiência sobre a implantação de disciplinas na modalidade EAD em uma IES. Simpósio Internacional de Educação a Distância (SIED-EnPED). Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), 2014. Disponível em: http://www.sied-enped2014.ead.ufscar.br/ojs/index.php/2014/article/view/712. Acesso em 27 nov. 2021.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 7: Geometria Analítica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática:** Ciências e Aplicações: 3º ano. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção PROFMAT).

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1, 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões Com a Matemática**. 3. ed. v. 3. São Paulo: Moderna, 2016.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 3. ed. v. 3. São Paulo: Moderna, 2016.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico:** Métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2013. Editora Novo Hamburgo 2. Ed. Disponível em:http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-538f3aef538/Ebook%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf. Acesso em: 23 dez. 2019.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica**: repensando a formação inicial docente em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP, 2005.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHIEHL, E. P. **Uma Abordagem Híbrida no Processo de Ensino aprendizagem de Geometria Analítica para a Terceira Série do Ensino Médio por meio de um Modelo de Rotação por Estações**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias – PPGECMT) - Centro de Ciências Tecnológicas – CCT, Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Joinville, 2018.

SILVA, D. D. **O GeoGebra como Ferramenta de Ensino em Geometria Analítica:** Ensinando com as Tecnologias. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) - Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Campus Universitário do Araguaia, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças – MT, 2015.

SILVA, R. dos S. **Estudo da reta em Geometria Analítica**: uma proposta de atividades para o Ensino médio a partir de conversões de Registros de Representação Semiótica com o uso do software GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC – SP. 2014.

SILVA, S. R. L. da. **Proposta Para a Abordagem de Geometria Analítica Via Ensino Híbrido**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, RJ, 2017.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Para Compreender o Mundo**: 3º ano. São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, J. R. de. GARCIA, J. da S. R. **Contato Matemático**: 3º ano. São Paulo: FTD, 2016.

TREVISANI, F. M.; CORRÊA, Y. Ensino Híbrido e o desenvolvimento de competências gerais da Base Nacional Comum Curricular. **Revista Prâksis**. Novo Hamburgo, a. 17, n. 2, mai./ago, p. 42-62, 2020.

XOTESLEM, W. V. **Personalização do Ensino de Matemática na Perspectiva do Ensino Híbrido**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2018.

# APÊNDICES

# **APÊNDICE A** – QUESTIONÁRIO

# Questionário de avaliação das atividades

Este questionário tem o objetivo de coletar as opiniões e/ou sugestões a respeito das atividades elaboradas (atividade inicial, estações e atividade final). Os dados coletados por meio deste questionário serão utilizados de forma anônima para fins da monografia intitulada "Rotação por Estações e Geometria Analítica: um estudo sobre as equações da reta" promovida por Giullia Gomes Faes, aluna da Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro, sob orientação da Profª Me. Pâmella de Alvarenga Souza e coorientação da Profª Me. Paula Eveline da Silva dos Santos.

**giulliagfaes@gmail.com** (não partilhado) Mudar de conta

*Obrigatório

Nome: *

A sua resposta

Você, atualmente, está atuando na Educação Básica? *

- ◯ Sim.
- ◯ Não.

Se a resposta da pergunta anterior for sim, em qual(is) nível(is) de Ensino?

- ☐ Ensino Fundamental - Anos Iniciais
- ☐ Ensino Fundamental - Anos Finais
- ☐ Ensino Médio
- ☐ Ensino Superior
- ☐ Pós Graduação
- ☐ Outra:

Você atua ou já atuou com turmas de Ensino Médio? *

- Sim.
- Não.

Caso a resposta da pergunta anterior tenha sido sim, em qual série?

- 1ª série do Ensino Médio
- 2ª série do Ensino Médio
- 3ª série do Ensino Médio

Seguinte Limpar formulário

# Questionário de avaliação das atividades

**giulliagfaes@gmail.com** (não partilhado) Mudar de conta

*Obrigatório

Ensino Híbrido, Rotação por Estações e utilização de tecnologias

Você já conhecia o Ensino Híbrido e o modelo de Rotação por Estações? *

- ◯ Sim.
- ◯ Não.

Caso a resposta da pergunta anterior tenha sido sim, você já utilizou o Ensino Híbrido e/ou o modelo de Rotação por Estações?

- ◯ Já utilizei o Ensino Híbrido apenas com o modelo de Rotação por Estações.
- ◯ Já utilizei o Ensino Híbrido com o modelo de Rotação por Estações e outros modelos.
- ◯ Já utilizei o Ensino Híbrido apenas com outros modelos.

Assinale, para cada afirmação, a coluna que considera adequada. *

| | Concordo totalmente | Concordo parcialmente | Não concordo nem discordo | Discordo parcialmente | Discordo totalmente |
|---|---|---|---|---|---|
| A utilização do Ensino Híbrido é uma boa alternativa para o Ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A rotação por estações é uma boa alternativa para o Ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A utilização de tecnologias digitais ajuda na compreensão dos conteúdos de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| A utilização do GeoGebra auxilia no ensino de Geometria Analítica. | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

Você já utilizou metodologias ativas e/ou tecnologias nas suas aulas? *

- Sim, já utilizei ambas.
- Sim, já utilizei apenas tecnologias.
- Sim, já utilizei apenas metodologias ativas.
- Nunca utilizei metodologias ativas nem tecnologias.

Anterior Seguinte Limpar formulário

# Questionário de avaliação das atividades

**giulliagfaes@gmail.com** (não partilhado) Mudar de conta

*Obrigatório

Sobre as atividades elaboradas

Todas as perguntas do tipo "Explique um pouco sobre" são opcionais, fique a vontade para respondê-las ou não.

Em relação a atividade inicial, você acredita que esta cumprirá com o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Quanto a estação verde, que trabalha as equações segmentária e geral, você acredita que esta cumprirá o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Você acredita que os alunos terão dificuldades na manipulação do software GeoGebra ou na percepção do padrão na Parte I da estação verde? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Você acredita que os alunos terão dificuldades em alguma outra parte da estação verde? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Quanto a estação vermelha, que trabalha as equações fundamental, reduzida e geral, você acredita que esta cumprirá o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Você acredita que os alunos terão dificuldades em alguma parte da estação vermelha? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Quanto ao applet e ao vídeo disponibilizados através de QR Codes na estação vermelha, assinale a alternativa que melhor expressa a sua opinião. *

- Ambos são relevantes.
- Apenas o applet é relevante.
- Apenas o vídeo é relevante
- Ambos são irrelevantes.
- Outra:

Quanto a estação azul, que trabalha as equações paramétrica e geral, você acredita que esta cumprirá o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Você acredita que os alunos terão dificuldades em alguma parte da estação azul? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Quanto ao applet, disponibilizado através de QR Code na estação azul, assinale a alternativa que melhor expressa a sua opinião. *

- O applet é muito relevante.
- O applet é um pouco relevante
- O applet é um pouco irrelevante
- O applet é muito irrelevante.
- Outra:

Quanto a estação amarela, que trabalha a equação reduzida e as posições relativas entre retas, você acredita que esta cumprirá o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Você acredita que os alunos terão dificuldades em alguma parte da estação amarela? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Quanto ao applet e ao vídeo disponibilizados através de QR Codes na estação amarela, assinale a alternativa que melhor expressa a sua opinião. *

- Ambos são relevantes.
- Apenas o applet é relevante.
- Apenas o vídeo é relevante
- Ambos são irrelevantes.
- Outra:

Em relação a atividade final, você acredita que esta cumprirá com o seu objetivo? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez, explique um pouco sobre.

A sua resposta

Anterior Seguinte Limpar formulário

# Questionário de avaliação das atividades

**giulliagfaes@gmail.com** (não partilhado) Mudar de conta

*Obrigatório

Utilização das atividades e sugestões

Você utilizaria as atividades elaboradas em sala para o ensino das equações da reta? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Explique um pouco da sua resposta anterior.

A sua resposta

Você faria alguma modificação nas atividades para aplicá-las? *

- Sim.
- Não.
- Talvez.

Caso a sua resposta tenha sido sim ou talvez. Explique um pouco sobre.

A sua resposta

Você tem alguma sugestão sobre as atividades?

A sua resposta

Anterior Seguinte Limpar formulário

# Questionário de avaliação das atividades

**giulliagfaes@gmail.com** (não partilhado) Mudar de conta

Obrigada!

As suas opiniões e/ou sugestões serão de grande auxílio para a pesquisa! Obrigada por responder!
Giullia Gomes Faes

Anterior Submeter Limpar formulário

Nunca envie palavras-passe através dos Google Forms.

**APÊNDICE B** – PROPOSTA DIDÁTICA ELABORADA

## Apêndice B.1 – Atividade Inicial

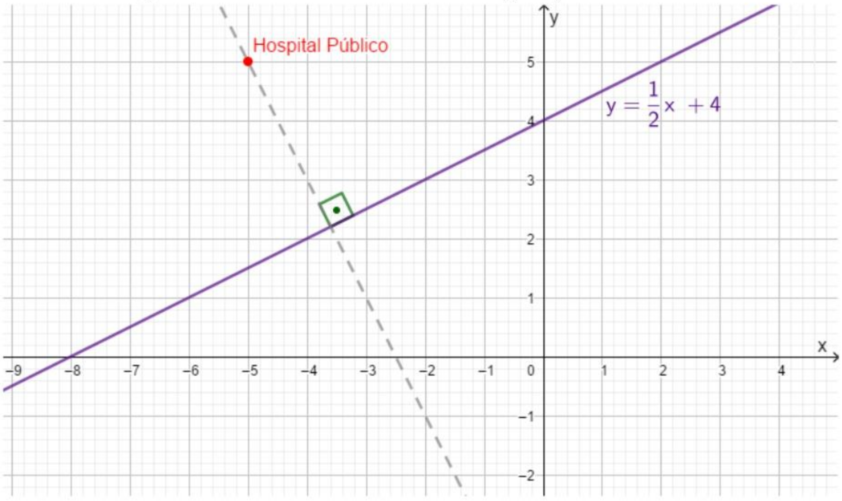
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_________________________________________ Data:___ /___ /____

### (ENEM 2011- Adaptado)

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

Imagem 1 – Plano de coordenadas cartesianas que representa a cidade




Fonte: Elaboração própria.

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista a construção de uma nova rua de modo que a distância entre hospital e o metrô fosse a menor possível.

Para atender ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso poderia ser satisfeito se a nova rua fosse construída de modo perpendicular ao metrô, garantindo assim, a menor distância. Dessa forma, a equação da reta dessa nova rua será:

a) $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 5)$

b) $y = 2x + 15$

c) $x - 2y + 15 = 0$

d) $-\frac{y}{5} - \frac{2x}{5} = 1$

e) $\begin{cases} x = 1t \\ y = 4 + 0{,}5t \end{cases}$

## Apêndice B.2 – Estação Amarela

matemática LICENCIATURA DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS INSTITUTO FEDERAL Fluminense Campus Campos Centro MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

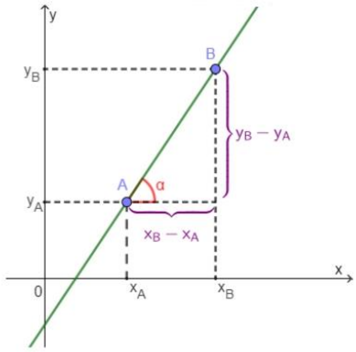
Identificação:__________________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I – Coeficiente Angular

A medida do ângulo $\alpha$ indicado na figura 1 abaixo é chamado de **inclinação da reta** e chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta, não vertical, o número $m$ expresso por: [1]

$$\boxed{m = tg\,\alpha}$$

Figura 1 – Cálculo do coeficiente angular




Fonte: Elaboração própria

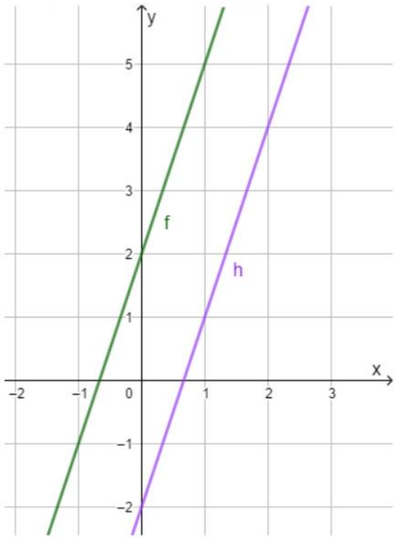
Quando não sabemos a medida desse ângulo de inclinação, mas conhecemos dois pontos pertencentes a esta reta, podemos calcular o coeficiente angular pelas coordenadas dos pontos. Então, seja os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, o coeficiente angular é dado por: [1]

$$\boxed{tg\,\alpha = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

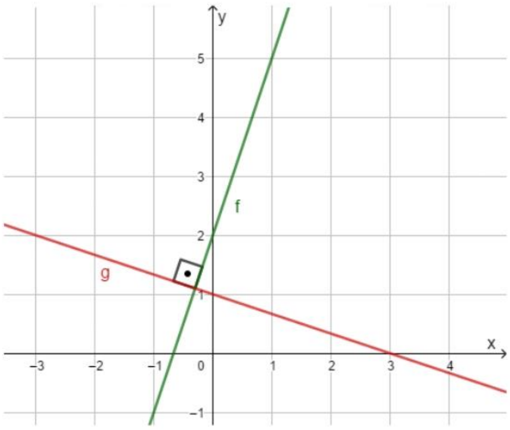
[1] LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2. ed. v.3. São Paulo: Moderna, 2013.

A partir das retas dadas em cada item, determine dois pontos pertencentes a cada uma delas e calcule os seus respectivos coeficientes angulares.

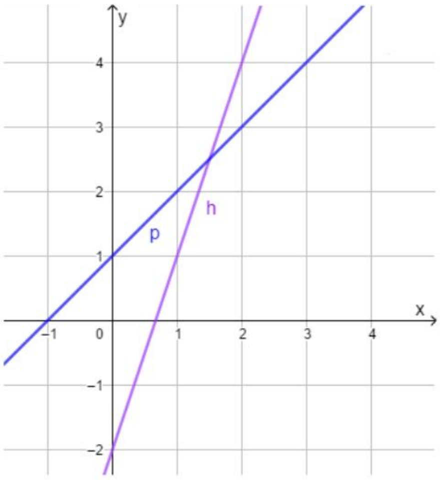
a)



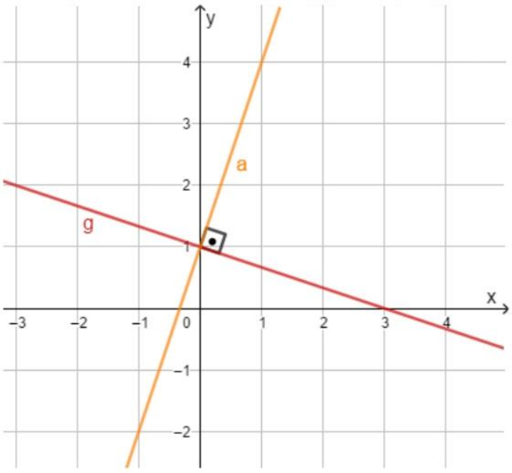

b)



c)




d)



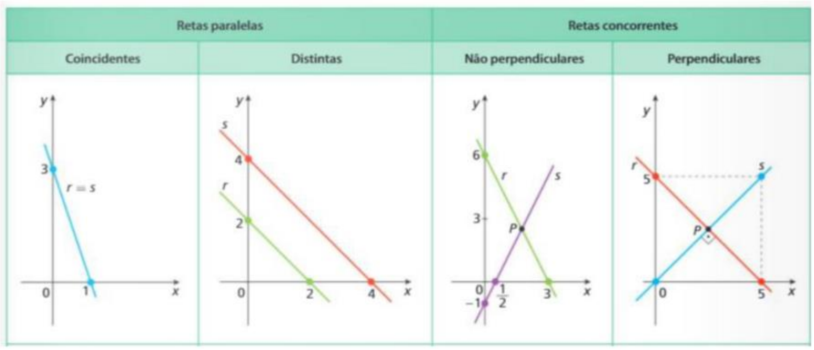

Para efeitos de verificação dos resultados, manipule o *applet* “Coeficiente Angular”[2] movimentando os pontos A e B para que estes coincidam com os pontos que você utilizou.

[2] Adaptado de https://www.geogebra.org/m/C62SMR3s. Acesso em 17 set. 2020.

## PARTE II – posições relativas entre retas

Duas retas $r$ e $s$ quaisquer do plano cartesiano podem ser classificadas em paralelas coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular das retas concorrentes.

Figura 2 – Posições relativas entre retas




Fonte: Adaptado - Leonardo (2016)

- Retas paralelas coincidentes: representam no plano cartesiano uma mesma reta pois possuem todos os pontos em comum.
- Retas paralelas distintas: não possuem pontos em comum.
- Retas concorrentes: as retas possuem apenas um ponto em comum, o ponto de interseção entre elas. As coordenadas do ponto de interseção satisfazem ambas as retas.
- Retas concorrentes perpendiculares: são um caso particular das retas concorrentes em que a intersecção entre as retas forma um ângulo reto (90°).

## PARTE III – Relação entre o coeficiente angular e a posição relativa

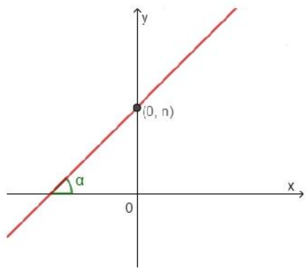
Complete a tabela abaixo com os coeficientes angulares determinados em cada uma das alternativas na **PARTE I** e as posições relativas correspondentes que foram estabelecidas na **PARTE II**.

| Alternativa | Coeficientes angulares | | Posição relativa |
|---|---|---|---|
| a) | | | |
| b) | | | |
| c) | | | |
| d) | | | |

## PARTE IV – Equação reduzida

O cálculo do coeficiente angular de uma reta é uma ferramenta especialmente proveitosa quando relacionamos a equação reduzida pois, nesse formato da equação de uma reta, utilizamos de forma imediata essa declividade da reta e o intercepto da mesma no eixo y. Observe a imagem:

Figura 3 – Reta que intercepta o eixo y no ponto (0, n)




Fonte: Elaboração própria

Assim, a equação da reta que relaciona diretamente o coeficiente angular $m$ e o intercepto $n$ no eixo y é:

$$y = mx + n$$

Equação Reduzida da Reta

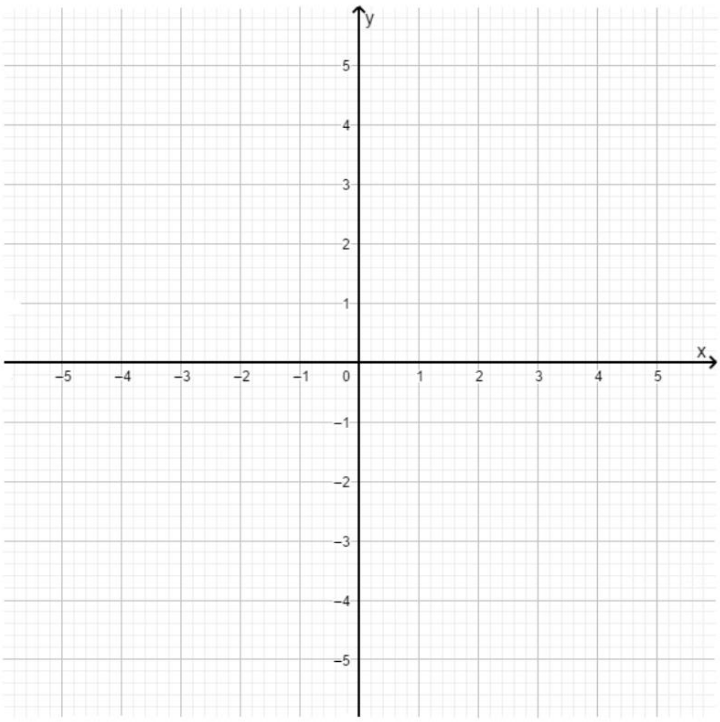
Agora, determine a equação reduzida de cada uma das retas dadas na **PARTE I.**

## PARTE V – Relação entre a equação reduzida e as posições relativas

Agora que você já conhece a forma reduzida da equação de uma reta e as posições que duas retas podem assumir no plano cartesiano, escaneie o *QR Code* e assista o vídeo que sintetiza a relação entre esse formato da equação de uma reta e as posições relativas entre retas. E, em seguida, responda as perguntas.

Qual relação pode ser estabelecida entre cada uma das posições e seus coeficientes? Explique o que ocorre em cada um dos coeficientes da equação reduzida em cada posição que as retas podem assumir.

Escolha uma das posições relativas entre retas e determine duas equações reduzidas correspondentes a essa posição e as desenhe no plano cartesiano abaixo. Não esqueça de indicar a posição entre elas e quais são as suas equações!



# Apêndice B.3 – Estação Azul

matematica LICENCIATURA | DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS | INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO | PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

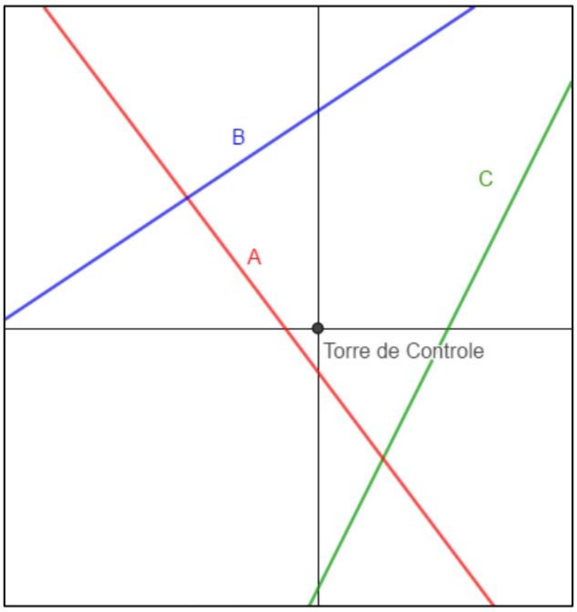
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_________________________________________ Data:___ /___ /___

## PARTE I

Marcos trabalha no Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro. Sua função é controlar o tráfico aéreo na região próxima ao aeroporto onde, devido ao grande número de decolagens e aterrisagens, o risco de colisão é muito maior. Durante um único turno de trabalho, Marcos deve analisar centenas de trajetórias percorridas pelos aeroplanos que aparecem na tela do radar, à sua frente. Se os cursos de dois aviões se aproximam perigosamente, Marcos deve avisar a um deles para alterar a sua rota. Para desempenhar sua tarefa com sucesso, Marcos necessita conhecer com precisão, a rota percorrida por cada aeroplano e o instante em que os aviões passam por cada ponto deste percurso.[1] A tela do radar com que Marcos trabalha monitora uma área de 3600 $km^2$ ao redor do aeroporto e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região com a torre de controle na origem e as rotas dos aviões A, B e C, conforme mostra o gráfico abaixo.

Imagem 1 – Tela do radar de monitoramento das rotas dos aviões




Fonte: Elaboração própria

[1]Adaptado de http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap91.html. Acesso em 25 set. 2020.

Abaixo estão as equações que descrevem as rotas dos aviões de acordo com o tempo $t$ (em horas) após a decolagem.

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

Determine as coordenadas $(x, y)$ que indicam a posição de cada um dos aviões 1 hora após a sua decolagem.

As equações anteriores estão relacionando as coordenadas $(x, y)$ em função de uma terceira variável chamada **parâmetro $(t)$**. Nesse caso, de acordo com a variação do parâmetro, no conjunto dos números naturais, os valores de $x$ e de $y$ também vão variando, ou seja, cada valor do parâmetro corresponde a um ponto $(x, y)$ da reta.

Por essas equações expressarem as coordenadas $x$ e $y$ em função de um parâmetro qualquer (que aqui chamaremos de $\lambda$), essa equação da reta é conhecida como:

$$\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$$

Equação Paramétrica da Reta

## PARTE II – Dedução da equação

Como toda equação de uma reta, é possível determinar a equação paramétrica da reta a partir de dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes a esta reta de forma que:

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \end{cases}$$

Equação Paramétrica a Partir de Dois Pontos

Para compreender melhor essa maneira de escrever a equação de uma reta, escaneio o *QR Code* ao lado para visualizar o *applet* “Dedução da Eq. Paramétrica” no GeoGebra. Após abrir o *applet*, movimente o controle deslizante na parte de cima da tela para visualizar cada uma das etapas.

Agora é a sua vez, escolha uma letra (exceto as letras $x$ e $y$) para ser o parâmetro e determine as equações paramétricas da reta a partir dos pontos dados.

a) $A(1, 3)$ e $B(3, 4)$

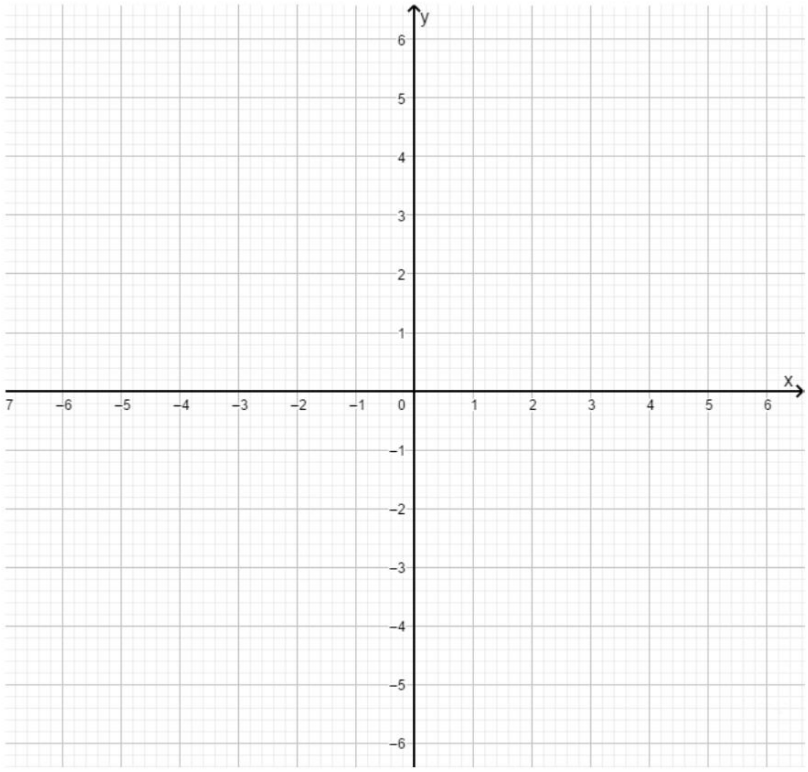
b) $C(-2, -1)$ e $B(3, 0)$

c) $D(3, 2)$ e $D(5, 4)$

Agora que você já determinou as equações paramétricas das retas, vamos traçar um esboço do gráfico dessas equações, seguindo as instruções abaixo:

- Atribua alguns valores ao parâmetro (como por exemplo, -1, 0, 1, 2, ...) e determine as coordenadas $x$ e $y$;

- Utilize essas coordenadas que você encontrou para marcar pontos $(x, y)$ no plano cartesiano abaixo e, em seguida, trace a reta que passa por esses pontos.




## PARTE III – Transformação da paramétrica na geral

Já aprendemos que a equação paramétrica da reta não relaciona as coordenadas $(x, y)$ diretamente, mas sim, por meio de uma terceira variável chamada parâmetro.

Mas, como podemos fazer para transformar uma equação paramétrica em outro formato de equação, mais usual, que relacione diretamente as coordenadas $(x, y)$?

Isto é bem simples de fazer, basta "eliminarmos" o parâmetro da seguinte forma:

- Vamos utilizar a equação paramétrica $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ como exemplo.

- Escolha uma das equações e isole o parâmetro em um dos membros:

$$y = 7 + t \Rightarrow y - 7 = t$$

- Agora que o parâmetro já está isolado, basta substituí-lo na outra equação:

$$x = 5 + 2t \Rightarrow x = 5 + 2(y - 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 + 2y - 14 \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2y = -9$$

Sempre que fizermos esse passo em uma equação paramétrica encontraremos equações no seguinte formato:

$$ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Equação da reta em que que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta.

Agora, faça o mesmo processo nas equações paramétricas que você determinou na **PARTE II** e determine as equações gerais:

**PARTE IV – Conclusões finais**

O que você entendeu sobre a equação paramétrica? Como ela funciona?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

O que você percebeu em relação as equações geral e paramétrica? Há alguma relação que se pode estabelecer entre as duas equações?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

# Apêndice B.4 – Estação Verde

Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_________________________________________ Data:___ /___ /___

## PARTE I – Introdução à equação geral

Abra o *software* GeoGebra e, em seguida, com a ferramenta “ponto” marque os pontos A (1, 4) e B (2, 2).

Com a ferramenta “reta” selecionada, clique no ponto A e no ponto B para determinar a reta que passa por esses pontos. Observe a Janela de Álgebra no lado esquerdo da tela, qual a equação dessa reta foi determinada pelo *software*?

______________________________________________________________________

Faça o mesmo procedimento e escreva as equações encontradas a partir dos pontos:

a) C (2, 4) e D (1, 3)

______________________________________________________________________

b) E (-1, -6) e F (-2, -8)

______________________________________________________________________

c) G (6, -2) e H (9, -4)

______________________________________________________________________

Após encontrar todas as equações com o auxílio do GeoGebra, você consegue perceber algum padrão no formato das equações da reta?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## PARTE II – Equação geral

Todas as retas do plano estão associadas a uma equação. Uma das formas de determinar essas equações é utilizando dois pontos A $(x_1, y_1)$ e B $(x_2, y_2)$, que determinam esta reta, e um ponto genérico P$(x, y)$ localizado sobre a mesma. A partir da condição de alinhamento de três pontos, o determinante das coordenadas destes pontos resulta na seguinte igualdade: [1]

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante: $x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_1y - x_2y_1 = 0$

Colocando $x$ e $y$ em evidência: $x\underbrace{(y_1 + y_2)}_{a} + y\underbrace{(-x_1 - x_2)}_{b} - \underbrace{(-x_1y_2 + x_2y_1)}_{c} = 0$

Fazendo $(y_1 + y_2) = a$; $(-x_1 - x_2) = b$ e $(-x_1y_2 + x_2y_1) = c$, temos:

$$ax + by - c = 0 \Rightarrow ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Agora, escolha dois pontos de alguma das retas da **PARTE I**, calcule o determinante e verifique se a reta encontrada na **PARTE I** é a mesma reta encontrada por meio do determinante:

[1] Silva (2015).

## PARTE III – manipulação da geral para a segmentária

Agora que você já conhece a equação geral da reta, vamos fazer algumas manipulações pra chegarmos a um novo resultado. A partir da equação

$$ax + by = c$$

Vamos dividir todos os termos da equação por $c$

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = \frac{c}{c}$$

Como $\frac{c}{c} = 1$, temos então:

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = 1$$

Agora, vamos reescrever essa equação fazendo a manipulação da multiplicação para uma divisão de frações de forma que:

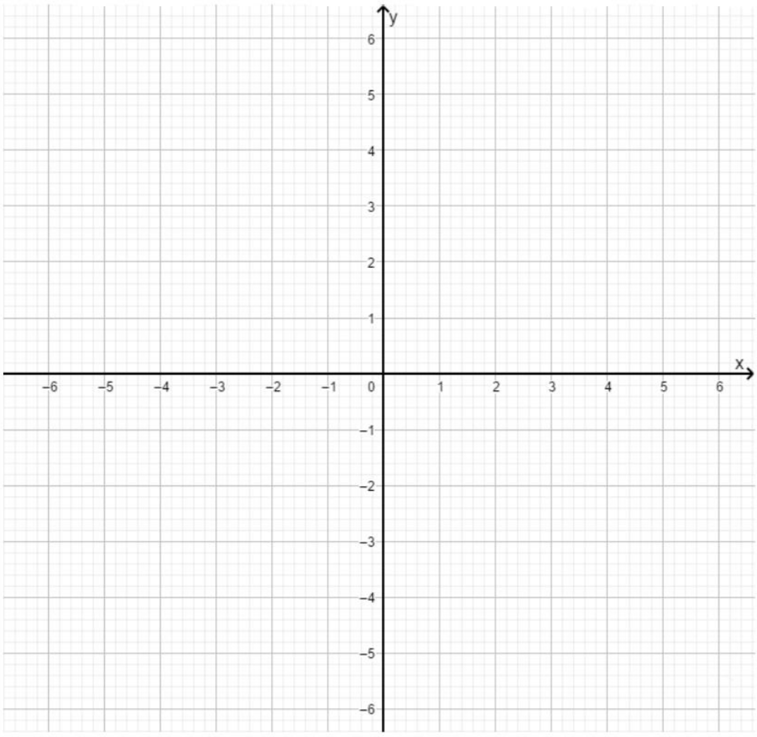
$$\frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$$

Equação Segmentária da Reta

Agora é a sua vez! Determine a equação segmentária a partir da equação geral de, pelo menos, uma das retas da **PARTE I**.

## PARTE IV – Equação segmentária

Agora que você já tem pelo menos uma equação da reta na forma segmentária, utilize a malha quadriculada abaixo para fazer um esboço do gráfico. E, Em seguida, responda à pergunta com o que você percebeu.




Analise os denominadores (parte de baixo da fração) da equação segmentária que você determinou na **PARTE III** e os pontos que a reta intercepta os eixos $x$ e $y$. O que você consegue perceber? Há algo em comum?

Caso você ainda não tenha percebido, a particularidade da equação segmentária é que a sua equação é determinada a partir dos pontos de interseção da reta com os eixos $x$ e $y$ de forma que:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

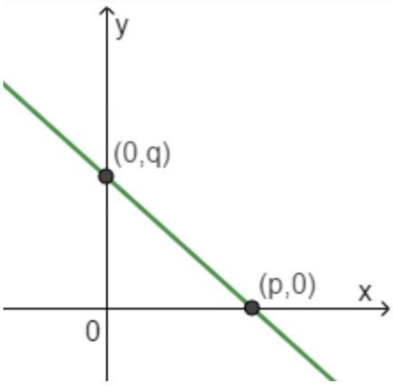
Equação Segmentária da Reta

- O número que divide o $x$ na equação da reta é igual à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo $x$.

- O número que divide o $y$ na equação da reta é igual à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo $y$.

- O segundo membro da equação é igual a 1.[2]

Perceba essas características na imagem abaixo:




[2] IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciências e aplicações. 9. ed. v. 3. São Paulo: Saraiva, 2017.

**PARTE V –generalizações finais**

O que você percebeu em relação as equações geral e segmentária? Há alguma relação que se pode estabelecer entre as duas equações?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

## Apêndice B.5 – Estação Vermelha

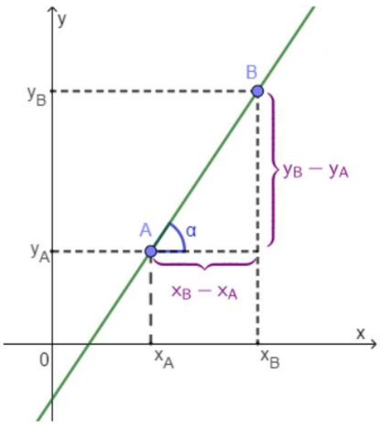
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:__________________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I – Coeficiente Angular

Toda reta não vertical do plano cartesiano possui um coeficiente angular (mesmo que este seja nulo, igual a zero). Este coeficiente angular $m$ mede a variação entre as coordenadas $x$ e $y$ de uma reta. Então, a partir de dois pontos pertencentes a esta reta, podemos calcular essa variação.

Figura 1 – Cálculo do coeficiente angular




$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Fonte: Elaboração própria

Agora, vamos utilizar desse cálculo do coeficiente angular para determinar a equação de uma reta.

Seja uma reta $r$ do plano com um ponto $A(x_A, y_A)$ conhecido. Para calcularmos o coeficiente angular dessa reta, precisamos de pelo menos dois pontos, então, vamos utilizar um ponto genérico $P(x, y)$ que pertença a essa reta. Assim, teremos:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

Multiplicando ambos os membros por $(x - x_A)$:

$$(x - x_A) \cdot m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Cancelando o $(x - x_A)$ do denominador com o que está multiplicando a fração, ficamos com:

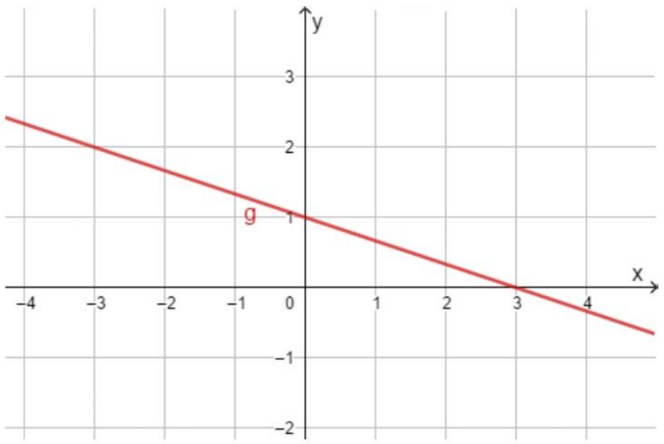
$$(x - x_A) \cdot m = y - y_A$$

Equação Fundamental da Reta

Essa equação da reta também é conhecida como a **forma ponto – inclinação** da equação de uma reta pois esta é a equação generalizada de uma reta se forem conhecidos a sua inclinação $(m)$ e um ponto $A(x_A, y_A)$ pertencente a esta reta.

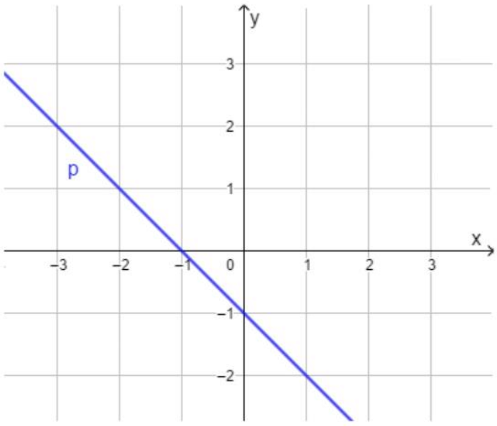
A partir da reta dada em cada item, escolha dois pontos pertencentes a esta reta, calcule o seu coeficiente angular. Em seguida, determine a equação fundamental dessa reta utilizando um ponto pertencente a reta e um ponto genérico $P(x, y)$.

a)

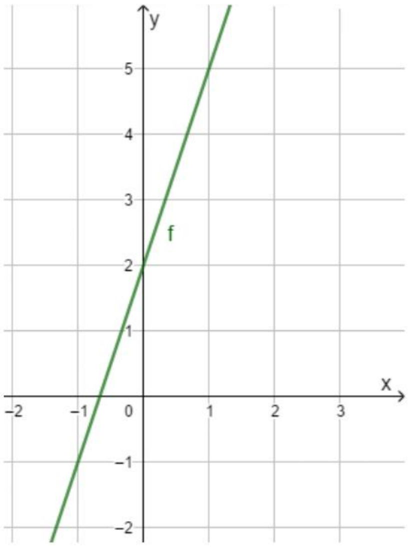


matemática LICENCIATURA DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

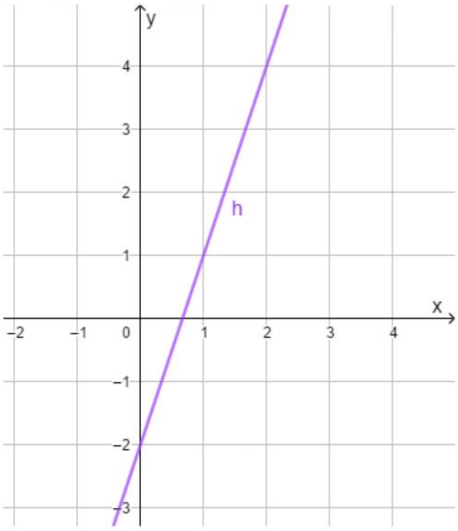
b)




c)



d)




Escaneie o QR Code ao lado para conferir os resultados no applet do GeoGebra “Coeficiente Angular e Eq. Fundamental e Reduzida”.

## PARTE II – Transformação da equação fundamental para a reduzida

Agora que você já determinou as equações fundamentais de cada uma das retas e conferiu os seus resultados no *applet*, vamos tentar “resolver” a equação fundamental da reta.

No *applet*, logo abaixo da equação na forma ponto - inclinação, havia esta mesma equação em outro formato, mais reduzido. Vamos então manipular as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d) para chegarmos a este novo formato.

Perceba que, quando temos uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, podemos começar a “resolver” essa equação fazendo:

- Distributiva do coeficiente angular $m$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- E, em seguida, organizar essa equação de forma que o $y$ permaneça "sozinho" no primeiro membro.

Tente fazer agora com as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d). Caso precise, utilize o *applet* para conferir seus resultados.

OBS: o aplicativo GeoGebra tem alguns erros de aproximação nas operações com números decimais, então, alguns resultados podem não aparecer exatamente iguais.

## PARTE III – Equação Reduzida

Quando temos uma equação na sua forma ponto – inclinação e tentamos "resolver" esta equação, ficamos com:

$$y - 3 = -2(x - 4)$$

Ou seja, temos uma reta que passa pelo ponto $(4, 3)$ e tem coeficiente angular $m = -2$.

Ao fazermos a distributiva do $m = -2$, teremos:

$$y - 3 = -2x + 8$$

$$y = -2x + 8 + 3$$

$$y = -2x + 11$$

Perceba que, ao fazer essa manipulação nas equações, elas têm o formato

$$y = mx + n$$

Equação Reduzida da Reta

Neste formato da equação reduzida, temos de imediato o coeficiente angular $m$ e o intercepto da reta no eixo y, que é no ponto $(0, n)$.

## PARTE IV – Transformação da reduzida para a geral

Na **PARTE III**, foi apresentada a equação reduzida da reta, que é conhecida pela variável $y$ isolada em um dos membros.

Agora, se fizermos uma simples manipulação, mantendo um dos membros igual a zero, teremos outro formato da equação da reta. Observe abaixo:

Equação reduzida: $y = -2x + 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x + y = 11$$

As equações nesse formato são conhecidas como:

$$ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Para compreender melhor essa manipulação entre a equação reduzida e a equação geral, escaneie o QR Code abaixo assista o vídeo da Khan Academy Brasil.

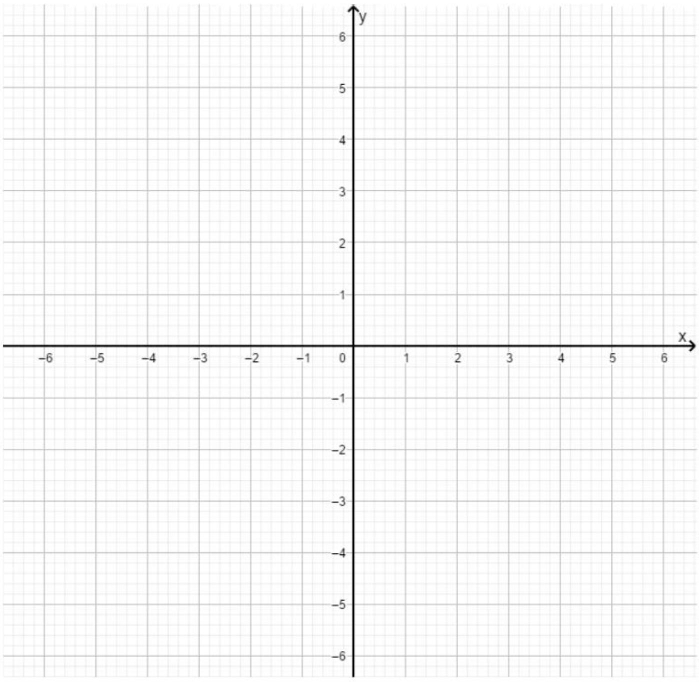
## PARTE V – Conclusões finais

O vídeo fala da transformação da equação reduzida para a equação geral. Você consegue pensar em uma maneira de fazer o processo contrário? Da equação geral para a equação reduzida da reta? Pense em uma equação no formato $3x + 2y = 6$ e tente manipula-la para chegar ao formato $y = mx + n$.

Lembre-se que os números $m$, $n$ são variáveis, ou seja, eles podem assumir qualquer número real.

Utilize o plano cartesiano abaixo e esboce o gráfico do gráfico das seguintes equações:

a) $3x - 2y = -6$ b) $y = 1{,}5x + 3$ c) $y - 6 = 1{,}5(x - 2)$



matemática LICENCIATURA DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Após estas atividades, o que você percebeu em relação as equações: fundamental, reduzida e geral? Há algum tipo de relação entre elas que você consegue estabelecer?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

# Apêndice B.6 – Atividade Final

INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

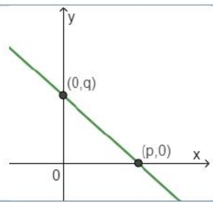
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:__________________________________________ Data:___ /___ /___

## PARTE I – Resumo das equações

Durante as estações, você estudou **maneiras diferentes de se escrever** a mesma coisa, **a equação de uma reta!** Sendo que cada equação tem a sua particularidade, ou seja, cada equação têm as suas vantagens.

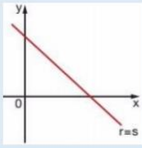
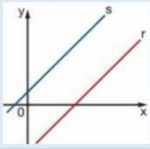
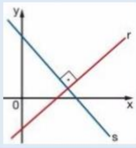
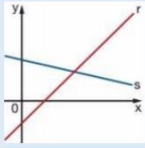
Agora que você já fez um estudo sobre cada um desses formatos, vamos completar o quadro resumo abaixo, que sintetiza as equações de uma reta.

| Equação | Formato | Descrição |
|---|---|---|
| **Fundamental** | | |
| **Geral** | | Equação em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta. |
| **Reduzida** | | |
| **Paramétrica** | $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ | |
| **Segmentária** | |  |

## PARTE II – Síntese das estações

Em cada uma das estações, além de ter estudado as diferentes formas de se representar a equação de uma reta, você também estudou algumas relações entre elas.

Na estação amarela, foi apresentada a relação entre a equação reduzida e as posições relativas entre retas.

| **Posições relativas entre retas de equações reduzidas** <br> $r: y = m_1x + n_1$ <br> $s: y = m_2x + n_2$ | | | |
|---|---|---|---|
| **Paralelas** | | **Concorrentes** | |
| Coincidentes | Distintas | Perpendiculares | Não perpendiculares |
|   |   |   |   |
| | | | |

Na estação azul, a relação estabelecida entre equações da reta foi:

| Equação paramétrica | → | Equação geral |
|---|---|---|
| $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ | $\Rightarrow$ | $ax + by = c$ |
| $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ | $\Rightarrow$ | $x - 2y = -5$ |

Na estação verde, a relação estabelecida entre equações da reta foi:

| Equação geral | → | Equação segmentária |
|---|---|---|
| $ax + by = c$ | $\Rightarrow$ | $\dfrac{x}{\frac{c}{a}} + \dfrac{y}{\frac{c}{b}} = 1$ |
| $2x + 3y = 6$ | $\Rightarrow$ | $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$ |

Na estação vermelha, as relações estabelecidas entre equações da reta foram:

| Equação fundamental | → | Equação reduzida | → | Equação geral |
|---|---|---|---|---|
| $y - y_A = m(x - x_A)$ | $\Rightarrow$ | $y = mx + n$ | $\Rightarrow$ | $ax + by = c$ |
| $y - 5 = 3(x - 1)$ | $\Rightarrow$ | $y = 3x + 2$ | $\Rightarrow$ | $3x - y = -2$ |

## PARTE III – Transformação da geral para a reduzida

Uma importante manipulação entre diferentes equações da reta que ainda precisamos estudar é da equação geral para a equação reduzida. Esta transformação pode ser feita da seguinte maneira:

A partir da equação geral, $ax + by = c$

Isolamos o $by$ em um dos membros: $by = -ax + c$

Dividimos a equação por $y$:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

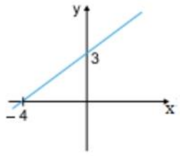
Assim, determinamos uma equação reduzida da reta $y = mx + n$ tal que o coeficiente angular $m = -\frac{a}{b}$ e a interseção com o eixo y, $n = \frac{c}{b}$.

Vamos agora fazer a mesma manipulação utilizando a equação: $4x + 5y = -2$.

Agora, você já tem as informações necessárias para fazer transformações entre quaisquer formatos da equação de uma reta!

## PARTE IV - Exercícios

**Questão 1** - (Cesgranrio) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:




a) $3x + 4y - 12 = 0$

b) $3x - 4y + 12 = 0$

c) $4x + 3y + 12 = 0$

d) $4x - 3y - 12 = 0$

e) $4x - 3y + 12 = 0$

**Questão 2** – (Ufes) Dados no plano cartesiano os pontos $A(-2, 1)$ e $B(0, 2)$, determine:

a) uma equação da reta que passa por $A$ e $B$;

b) uma equação da reta que passa por $A$ e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

**Questão 3** – (UEM 2018) Considerando as retas $r: x - y = 1$, $s: 2x - 2y - 4 = 0$ e $t: y = \ -x + 3$, assinale o que for correto.

01) As retas $s$ e $t$ são perpendiculares.

02) As retas $s$ e $r$ se interceptam em um único ponto.

04) O ponto (4, 3) pertence à reta $r$, mas não pertence às outras retas.

08) As retas $r$ e $t$ são perpendiculares.

16) As retas $s$ e $r$ têm o mesmo coeficiente angular.

**Questão 4** – (UNIOESTE) Os valores de $k$ para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são

a) 3 e -2

b) −1 e 1.

c) 1 e −1.

d) −2 e 2.

e) 2 e −2.

**Questão 5** – (UEM – Adaptado) Em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, considere três retas: $r_1$ a reta que contém os pontos (2,0) e (0,2); $r_2$ dada por sua equação na forma segmentária $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$; $r_3$ $ax + y - 4 = 0$, em que $a$ é algum número real. Em relação ao exposto, assinale o que for correto.

01) Se $a = \frac{8}{3}$ então as três retas se interceptam em um mesmo ponto.

02) As retas $r_1$ e $r_2$ são perpendiculares.

04) A reta de equação 2x + 2y = 8 é coincidente a reta $r_2$ e paralela a reta $r_1$.

08) Não existe número real $a$ de modo que as retas $r_2$ e $r_3$ sejam paralelas.

**Questão 6** – (UEL) A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$.

Essa trajetória determina uma reta:

a) que contém os pontos (3;9) e (-2;6)

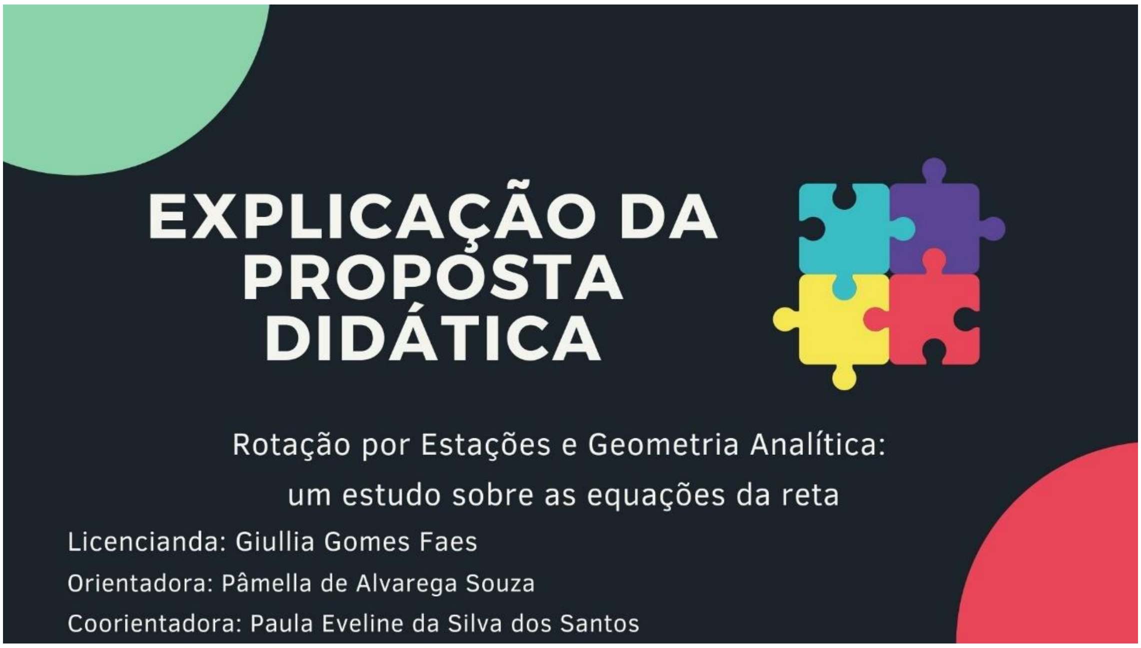
b) paralela à reta de equação 6x - 2y – 1 = 0

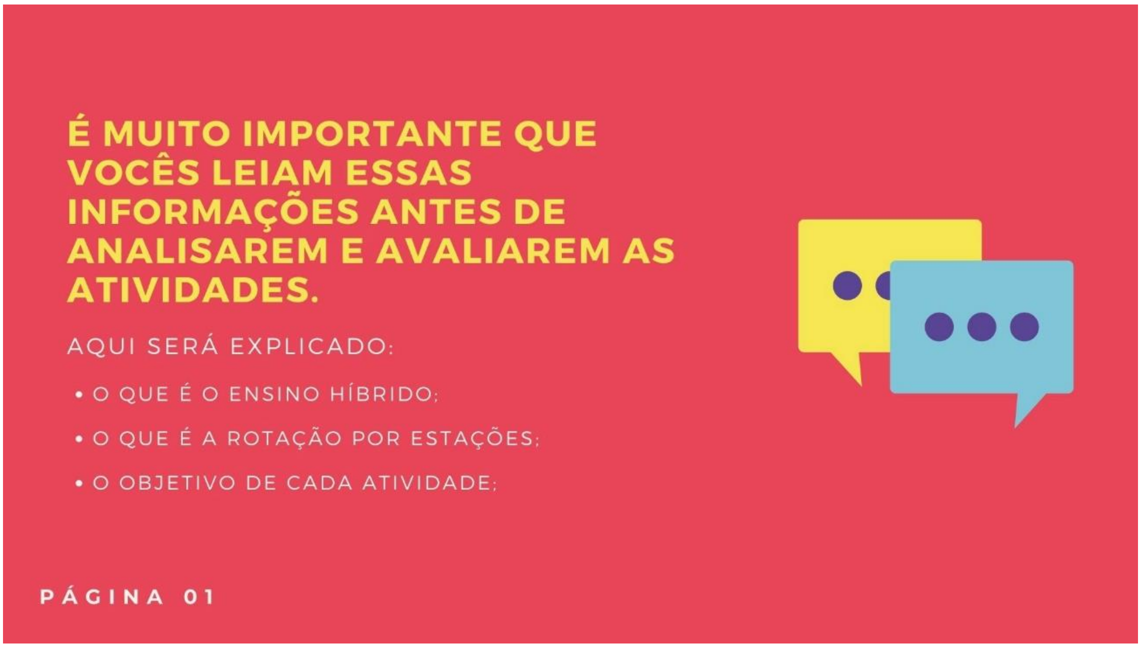
c) perpendicular à reta de equação 3x - y + 1 = 0

d) que contém os pontos (1;3) e (7;3)

e) perpendicular à reta de equação 5x – y = 0

**APÊNDICE C** – EXPLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA


EXPLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA
Rotação por Estações e Geometria Analítica:
um estudo sobre as equações da reta
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Pâmella de Alvarega Souza
Coorientadora: Paula Eveline da Silva dos Santos


É MUITO IMPORTANTE QUE VOCÊS LEIAM ESSAS INFORMAÇÕES ANTES DE ANALISAREM E AVALIAREM AS ATIVIDADES.
AQUI SERÁ EXPLICADO:
• O QUE É O ENSINO HÍBRIDO;
• O QUE É A ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES;
• O OBJETIVO DE CADA ATIVIDADE;
PÁGINA 01

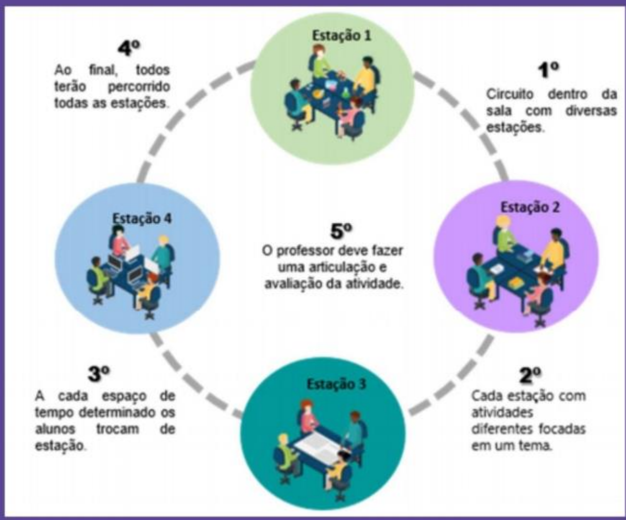

AS ATIVIDADES ESTÃO BASEADAS EM
ENSINO HÍBRIDO
ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
PARA O ENSINO DAS EQUAÇÕES DA RETA
DA GEOMETRIA ANALÍTICA
PÁGINA 02


O QUE É O ENSINO HÍBRIDO
É uma modalidade que combina o ensino presencial com o ensino *online*, por meio das tecnologias.
É o melhor dos dois mundos!
Ensino Híbrido = Ensino Presencial + Ensino por meio das Tecnologias
PÁGINA 03
(BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015)


O QUE É A ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES
É um modelo do Ensino Híbrido.
A sala de aula é organizada em estações de trabalho, utilizando de diversos recursos (computadores, celulares, tables, régua, etc).
Os alunos são divididos em grupos, e os grupos rotacionam entre essas estações de trabalho.
PÁGINA 04
(BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015)


O QUE É A ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES
As estações desenvolvidas são independentes e integradas.
Independentes porque não há uma ordem determinada, cada grupo pode seguir a ordem que desejar.
Integradas porque todas funcionam em conjunto para que, ao final da rotação, todos os alunos tenham estudado todo o conteúdo.
PÁGINA 05
(BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015)

## A ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES FUNCIONA BASICAMENTE ASSIM:




PÁGINA 06

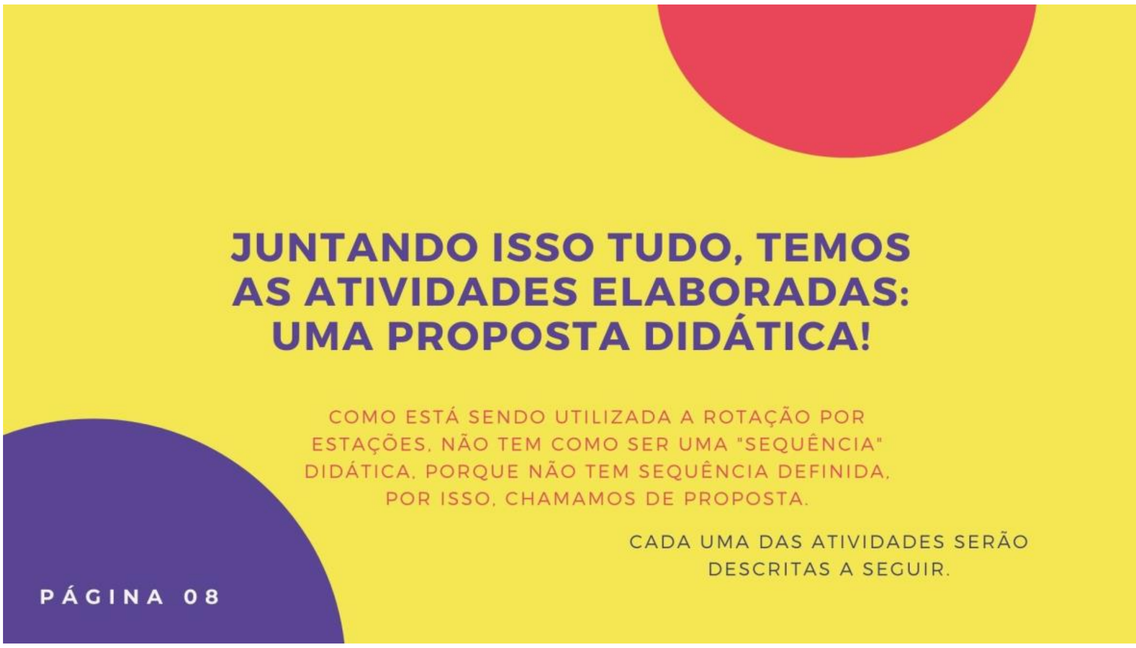
**(ALCANTARA, 2020)**

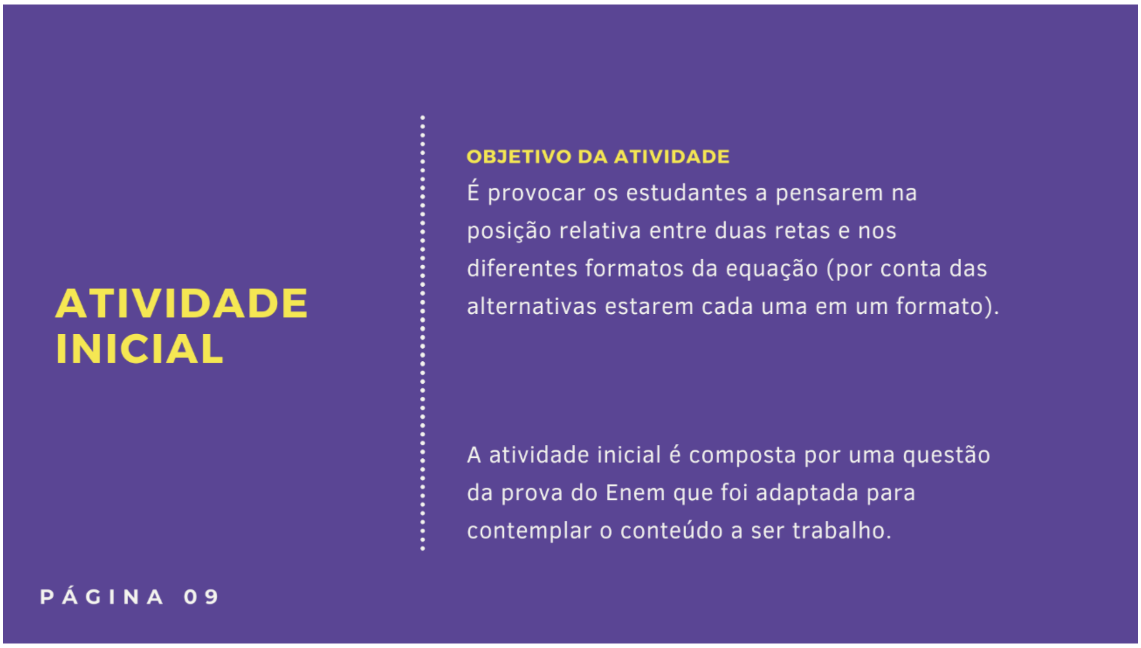
## REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

- É uma teoria que busca apresentar o mesmo objeto matemático por diferentes representações (algébrica, geométrica, em língua natural, etc).
- O autor Raymond Duval afirma que, para haver uma aprendizagem efetiva, o aluno deve reconhecer o mesmo objeto em, pelo menos, duas representações diferentes.
- Essa teoria sustenta o ensino da Geometria Analítica.

PÁGINA 07

**(DUVAL, 2012)**


JUNTANDO ISSO TUDO, TEMOS AS ATIVIDADES ELABORADAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA!
COMO ESTÁ SENDO UTILIZADA A ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES, NÃO TEM COMO SER UMA "SEQUÊNCIA" DIDÁTICA, PORQUE NÃO TEM SEQUÊNCIA DEFINIDA, POR ISSO, CHAMAMOS DE PROPOSTA.
CADA UMA DAS ATIVIDADES SERÃO DESCRITAS A SEGUIR.
PÁGINA 08


ATIVIDADE INICIAL
OBJETIVO DA ATIVIDADE
É provocar os estudantes a pensarem na posição relativa entre duas retas e nos diferentes formatos da equação (por conta das alternativas estarem cada uma em um formato).
A atividade inicial é composta por uma questão da prova do Enem que foi adaptada para contemplar o conteúdo a ser trabalho.
PÁGINA 09

# ESTAÇÃO AZUL: EQUAÇÕES PARAMÉTRICA E GERAL

**OBJETIVO DA ESTAÇÃO**

Estudar a equação paramétrica da reta, relacionando-a a equação geral.

**FERRAMENTAS NECESSÁRIAS**

*Smartphone* ou tablet com acesso à internet para leitura do QR Code que dá acesso ao *applet*[1].

1 *Applets* são *softwares* menores que executam atividades dentro de um programa maior, nesse caso, dentro do *software* GeoGebra.

PÁGINA 10

# ESTAÇÃO AMARELA: EQUAÇÃO REDUZIDA E POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

**OBJETIVO DA ESTAÇÃO**

Estudar as posições relativas entre duas retas no plano, relacionando essas posições com a equação reduzida da reta.

**FERRAMENTAS NECESSÁRIAS**

Régua para o esboço do gráfico; e *smartphone* ou tablet com acesso à internet para leitura dos QR Codes que dão acesso a um vídeo no YouTube e ao *applet*.

PÁGINA 11

## ESTAÇÃO VERMELHA: EQUAÇÕES FUNDAMENTAL, GERAL E REDUZIDA

**OBJETIVO DA ESTAÇÃO**

Estudar as equações fundamental, reduzida e geral, de forma que ao final dessa o aluno conheça essas três equações e manipule-as algebricamente, além de fazer a conversão entre as representações algébrica e geométrica das retas.

**FERRAMENTAS NECESSÁRIAS**

Régua para o esboço do gráfico; e *smartphone* ou tablet com acesso à internet para leitura do QR Code que dá acesso ao *applet*.

PÁGINA 12

## ESTAÇÃO VERDE: EQUAÇÕES SEGMENTÁRIA E GERAL

**OBJETIVO DA ESTAÇÃO**

Estudar as formas geral e segmentária da equação de uma reta, de forma que os alunos manipulem algebricamente entre essas equações e represente-as no plano cartesiano.

**FERRAMENTAS NECESSÁRIAS**

Régua para o esboço no plano e um computador com acesso a internet ou aplicativo do GeoGebra.

PÁGINA 13

# ATIVIDADE FINAL

**OBJETIVO DA ATIVIDADE**

Sintetizar todos os formatos das equações apresentados e o que foi estudado em cada estação.

Após todos os grupos terem passado por todas as estações, os alunos devem responder a essa atividade final.

Além disso, os alunos devem responder a algumas questões de vestibular que utilizam os conhecimentos estudados.

PÁGINA 14

## OBRIGADA!

APÓS LER ESSAS INFORMAÇÕES, VOCÊ JÁ TERÁ ENTENDIDO UM POUCO DA PROPOSTA E JÁ PODE ANALISAR AS ATIVIDADES ELABORADAS.
NÃO SE ESQUEÇA DE RESPONDER AO QUESTIONÁRIO, APÓS A SUA ANÁLISE, PARA QUE POSSAMOS COLETAR MELHOR AS SUAS OPINIÕES E/OU SUGESTÕES.

PÁGINA 15

## REFERÊNCIAS

ALCANTARA, E. F. S. Inovação e renovação acadêmica: guia prático de utilização de metodologias e técnicas ativas. Volta Redonda, RJ: FERP, 2020. Disponível em: http://www2.ugb.edu.br/Arquivossite/Editora/pdfdoc/Guia_De_Metodologias_Ativas.pdf. Acesso em 20 jun. 2021.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. Ensino Híbrido: Personalização e tecnologia na educação. [S.l.]: Pensa, 2015.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles T. Moretti. REVEMAT, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 - 297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em 20 jun. 2021.

**APÊNDICE D** – PROPOSTA DIDÁTICA MODIFICADA APÓS O TESTE EXPLORATÓRIO

## Apêndice D.1 – Estação Amarela

Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

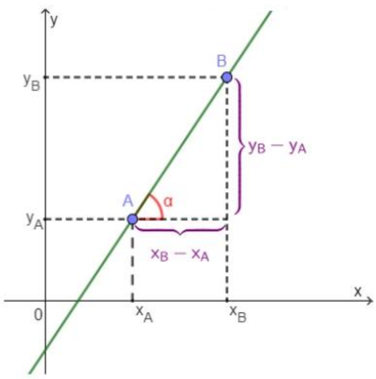
Identificação:__________________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I – Coeficiente Angular

A medida do ângulo $\alpha$ indicado na figura 1 abaixo é chamado de **inclinação da reta** e chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta, não vertical, o número $m$ expresso por: [1]

$$\boxed{m = tg\ \alpha}$$

Figura 1 – Cálculo do coeficiente angular




Fonte: Elaboração própria

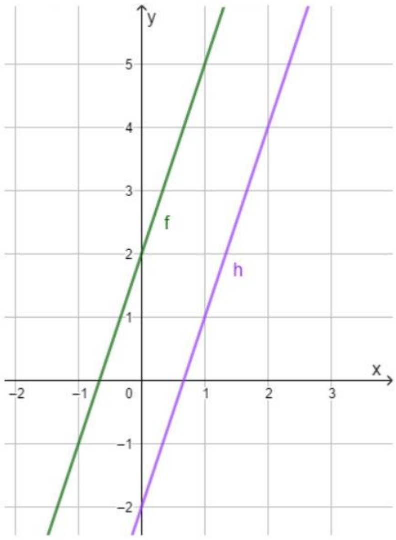
Quando não sabemos a medida desse ângulo de inclinação, mas conhecemos dois pontos pertencentes a esta reta, podemos calcular o coeficiente angular pelas coordenadas dos pontos. Então, seja os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, o coeficiente angular é dado por: [1]

$$\boxed{tg\ \alpha = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

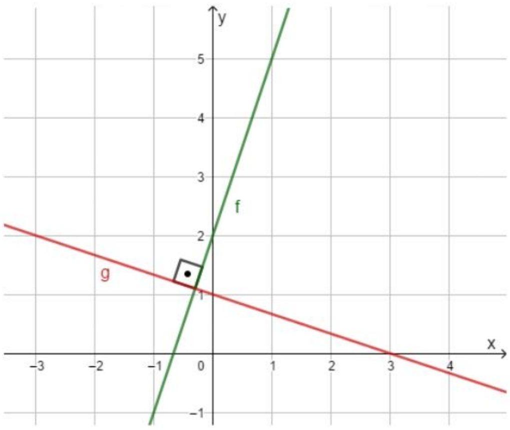
[1] LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2. ed. v.3. São Paulo: Moderna, 2013.

A partir das retas dadas em cada item, determine dois pontos pertencentes a cada uma delas e calcule os seus respectivos coeficientes angulares.

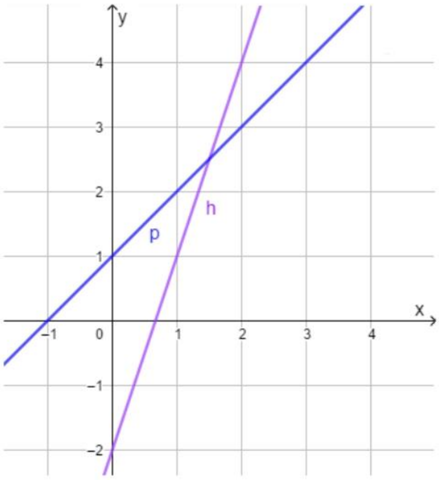
a)



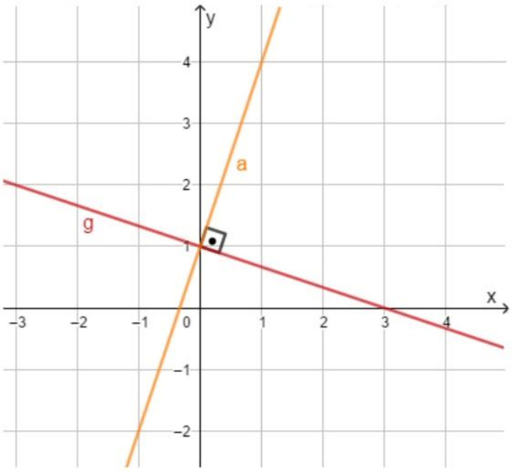

b)



c)




d)



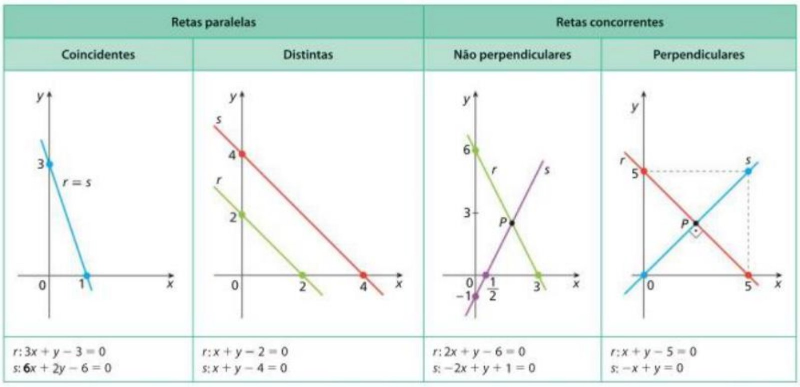

Para efeitos de verificação dos resultados, manipule o *applet* “Coeficiente Angular”[2] movimentando os pontos A e B para que estes coincidam com os pontos que você utilizou.

[2] Adaptado de https://www.geogebra.org/m/C62SMR3s. Acesso em 17 set. 2020.

## PARTE II – posições relativas entre retas

Duas retas $r$ e $s$ quaisquer do plano cartesiano podem ser classificadas em paralelas coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular das retas concorrentes.

Figura 2 – Posições relativas entre retas




Fonte: Adaptado - Leonardo (2016)

- Retas paralelas coincidentes: representam no plano cartesiano uma mesma reta, pois possuem todos os pontos em comum.
- Retas paralelas distintas: não possuem pontos em comum.
- Retas concorrentes: as retas possuem apenas um ponto em comum, o ponto de interseção entre elas. As coordenadas do ponto de interseção satisfazem ambas as retas.
- Retas concorrentes perpendiculares: são um caso particular das retas concorrentes em que a intersecção entre as retas forma um ângulo reto (90°).

**PARTE III – Relação entre o coeficiente angular e a posição relativa entre retas**

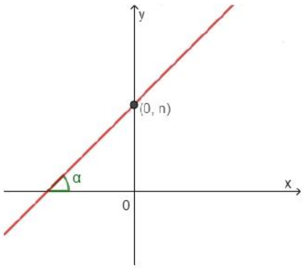
Complete a tabela abaixo com os coeficientes angulares determinados em cada uma das alternativas na **PARTE I** e as posições relativas correspondentes que foram estabelecidas na **PARTE II**.

| Alternativa | Coeficientes angulares | | Posição relativa |
|---|---|---|---|
| a) | | | |
| b) | | | |
| c) | | | |
| d) | | | |

**PARTE IV – Equação reduzida**

O cálculo do coeficiente angular de uma reta é uma ferramenta especialmente proveitosa quando relacionamos a equação reduzida, pois nesse formato da equação de uma reta, utilizamos de forma imediata essa declividade da reta e o intersecto da mesma no eixo y. Observe a imagem:

Figura 3 – Reta que intersecta o eixo y no ponto (0, n)




Fonte: Elaboração própria

Assim, a equação da reta que relaciona diretamente o coeficiente angular $m$ e o intersecto $n$ no eixo y é:

$$y = mx + n$$

Equação Reduzida da Reta

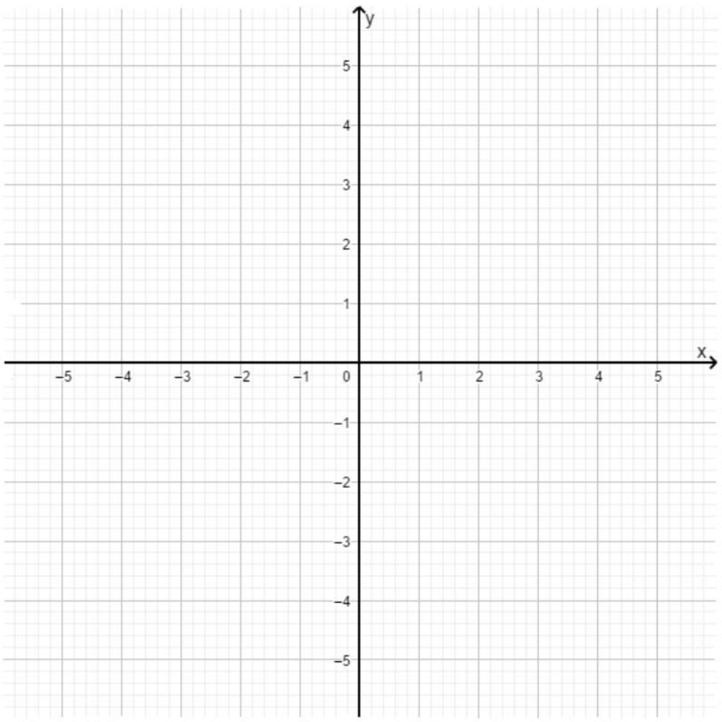
Agora, determine a equação reduzida de cada uma das retas dadas na **PARTE I.**

## PARTE V – Relação entre a equação reduzida e as posições relativas entre retas

Agora que você já conhece a forma reduzida da equação de uma reta e as posições que duas retas podem assumir no plano cartesiano, escaneie o *QR Code* e assista o vídeo que sintetiza a relação entre esse formato da equação de uma reta e as posições relativas entre retas. E, em seguida, responda as perguntas.

Qual relação pode ser estabelecida entre cada uma das posições e seus coeficientes? Explique o que ocorre em cada um dos coeficientes da equação reduzida em cada posição que as retas podem assumir.

Escolha uma das posições relativas entre retas e determine duas equações reduzidas correspondentes a essa posição e as desenhe no plano cartesiano abaixo. Não se esqueça de indicar a posição entre elas e quais são as suas equações!



## Apêndice D.2 – Estação Azul

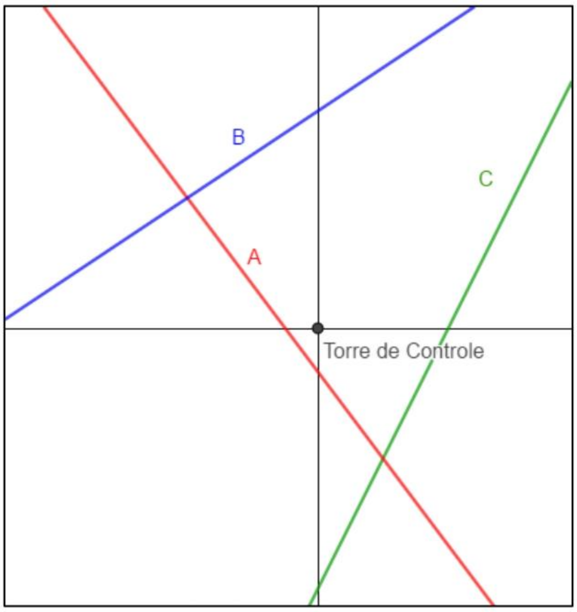
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_________________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I

Marcos trabalha no Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro. Sua função é controlar o tráfego aéreo na região próxima ao aeroporto onde, devido ao grande número de decolagens e aterrissagens, o risco de colisão é muito maior. Durante um único turno de trabalho, Marcos deve analisar centenas de trajetórias percorridas pelos aeroplanos que aparecem na tela do radar à sua frente. Se os cursos de dois aviões se aproximam perigosamente, Marcos deve avisar a um deles para alterar a sua rota. Para desempenhar sua tarefa com sucesso, Marcos necessita conhecer com precisão, a rota percorrida por cada aeroplano e o instante em que os aviões passam por cada ponto deste percurso.[1] A tela do radar com que Marcos trabalha monitora uma área de 3600 $km^2$ ao redor do aeroporto e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região com a torre de controle na origem e as rotas dos aviões A, B e C, conforme mostra a Figura 1 abaixo.

Figura 1 – Tela do radar de monitoramento das rotas dos aviões




Fonte: Elaboração própria

[1]Adaptado de http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap91.html. Acesso em 25 set. 2020.

Abaixo estão as equações que descrevem as rotas dos aviões de acordo com o tempo $t$ (em horas) após a decolagem.

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

Determine as coordenadas $(x, y)$ que indicam a posição de cada um dos aviões 1 hora após a sua decolagem.

As equações anteriores estão relacionando as coordenadas $(x, y)$ em função de uma terceira variável chamada **parâmetro $(t)$**. Nesse caso, de acordo com a variação do parâmetro, no conjunto dos números naturais, os valores de $x$ e de $y$ também vão variando, ou seja, cada valor do parâmetro corresponde a um ponto $(x, y)$ da reta.

Por essas equações expressarem as coordenadas $x$ e $y$ em função de um parâmetro qualquer, que chamaremos de $\lambda$ (letra grega lâmbida), essa equação da reta é conhecida como:

$$\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g\ (\lambda) \end{cases}$$

Equação Paramétrica da Reta

## PARTE II – Dedução da equação

Como toda equação de uma reta, é possível determinar a equação paramétrica da reta a partir de dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, pertencentes a esta reta de forma que:

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \end{cases}$$

Equação Paramétrica a Partir de Dois Pontos

Para compreender melhor essa maneira de escrever a equação de uma reta, escaneie o *QR Code* ao lado para visualizar o *applet* “Dedução da Eq. Paramétrica” no GeoGebra. Após abrir o *applet*, movimente o controle deslizante na parte de cima da tela para visualizar cada uma das etapas.

Agora é a sua vez, escolha uma letra (exceto as letras $x$ e $y$) para ser o parâmetro e determine as equações paramétricas da reta a partir dos pontos dados.

a) $A(1, 3)$ e $B(-3, 4)$

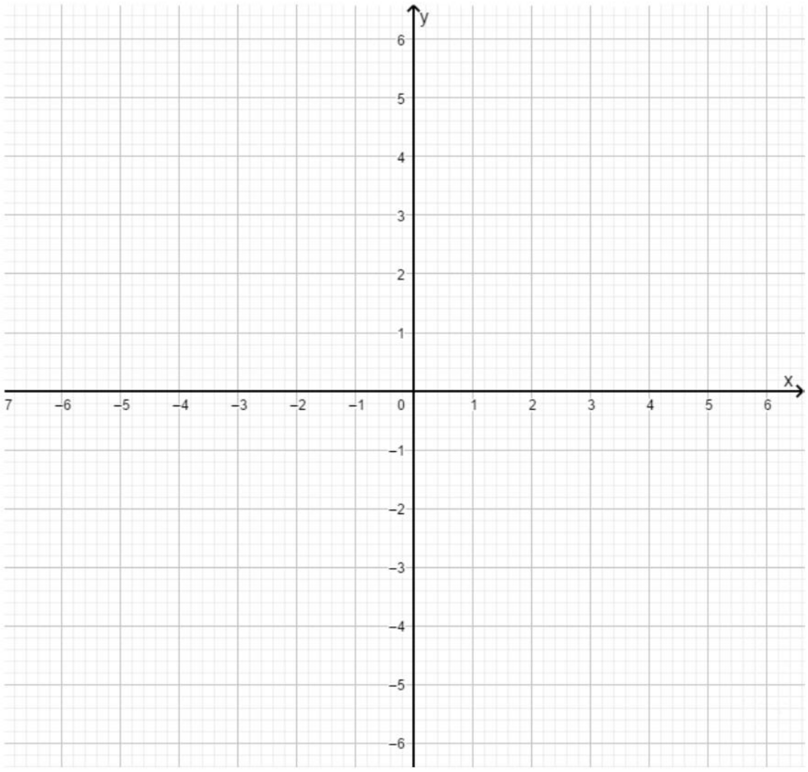
b) $C(-2, -1)$ e $B(3, 0)$

c) $D(3, -2)$ e $D(5, 4)$

Agora que você já determinou as equações paramétricas das retas, vamos traçar um esboço do gráfico dessas equações, seguindo as instruções abaixo:

- Atribua alguns valores ao parâmetro (como por exemplo, -1, 0, 1, 2, ...) e determine as coordenadas $x$ e $y$;

- Utilize essas coordenadas que você encontrou para marcar pontos $(x, y)$ no plano cartesiano abaixo e, em seguida, trace a reta que passa por esses pontos.




## PARTE III – Transformação da paramétrica na geral

Já aprendemos que a equação paramétrica da reta não relaciona as coordenadas $(x, y)$ diretamente, mas sim, por meio de uma terceira variável chamada parâmetro.

Mas, como podemos fazer para transformar uma equação paramétrica em outro formato de equação, mais usual, que relacione diretamente as coordenadas $(x, y)$?

Isto é bem simples de fazer, basta "eliminarmos" o parâmetro da seguinte forma:

- Vamos utilizar a equação paramétrica $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ como exemplo.

- Escolha uma das equações e isole o parâmetro em um dos membros:

$$y = 7 + t \Rightarrow y - 7 = t$$

- Agora que o parâmetro já está isolado, basta substitui-lo na outra equação:

$$x = 5 + 2t \Rightarrow x = 5 + 2(y - 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 + 2y - 14 \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2y = -9$$

Sempre que fizermos esse passo em uma equação paramétrica encontraremos equações no seguinte formato:

$$ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Equação da reta em que que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta.

Agora, faça o mesmo processo nas equações paramétricas que você determinou na **PARTE II** e determine as equações gerais:

**PARTE IV – Conclusões**

O que foi possível entender sobre a equação paramétrica?

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

É possível perceber alguma relação entre as equações geral e paramétrica? Justifique.

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

## Apêndice D.3 – Estação Verde

Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_______________________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I – Introdução à equação geral

Abra o *software* GeoGebra e, em seguida, com a ferramenta "ponto" marque os pontos A = (1, 4) e B = (2, 2).

Com a ferramenta "reta" selecionada, clique no ponto A e no ponto B para determinar a reta que passa por esses pontos. Observe a Janela de Álgebra no lado esquerdo da tela, qual a equação dessa reta foi determinada pelo *software*?

________________________________________________________________________

Faça o mesmo procedimento e escreva as equações encontradas a partir dos pontos:

a) C = (2, 4) e D = (1, 3)

________________________________________________________________________

b) E = (-1, -6) e F = (-2, -8)

________________________________________________________________________

c) G = (6, -2) e H = (9, -4)

________________________________________________________________________

Após encontrar todas as equações com o auxílio do GeoGebra, você consegue perceber algum padrão no formato das equações da reta?

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

## PARTE II – Equação geral

Todas as retas do plano estão associadas a uma equação. Uma das formas de determinar essas equações é utilizando dois pontos A = $(x_1, y_1)$ e B = $(x_2, y_2)$, que determinam esta reta, e um ponto genérico P = $(x, y)$ localizado sobre a mesma. A partir da condição de alinhamento de três pontos, o determinante das coordenadas destes pontos resulta na seguinte igualdade: [1]

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante: $x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_1y - x_2y_1 = 0$

Colocando $x$ e $y$ em evidência: $x\underbrace{(y_1 + y_2)}_{a} + y\underbrace{(-x_1 - x_2)}_{b} - \underbrace{(-x_1y_2 + x_2y_1)}_{c} = 0$

Fazendo $(y_1 + y_2) = a$; $(-x_1 - x_2) = b$ e $(-x_1y_2 + x_2y_1) = c$, temos:

$$ax + by - c = 0 \Rightarrow ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Agora, escolha dois pontos de alguma das retas da **PARTE I**, calcule o determinante e verifique se a reta encontrada na **PARTE I** é a mesma reta encontrada por meio do determinante:

[1] Silva (2015).

## PARTE III – manipulação da equação geral para a equação segmentária

Agora que você já conhece a equação geral da reta, vamos fazer algumas manipulações pra chegarmos a um novo resultado. A partir da equação

$$ax + by = c$$

Vamos dividir todos os termos da equação por $c$

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = \frac{c}{c}$$

Como $\frac{c}{c} = 1$, temos então:

$$\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c} \cdot y = 1$$

Agora, vamos reescrever essa equação fazendo a manipulação da multiplicação para uma divisão de frações de forma que:

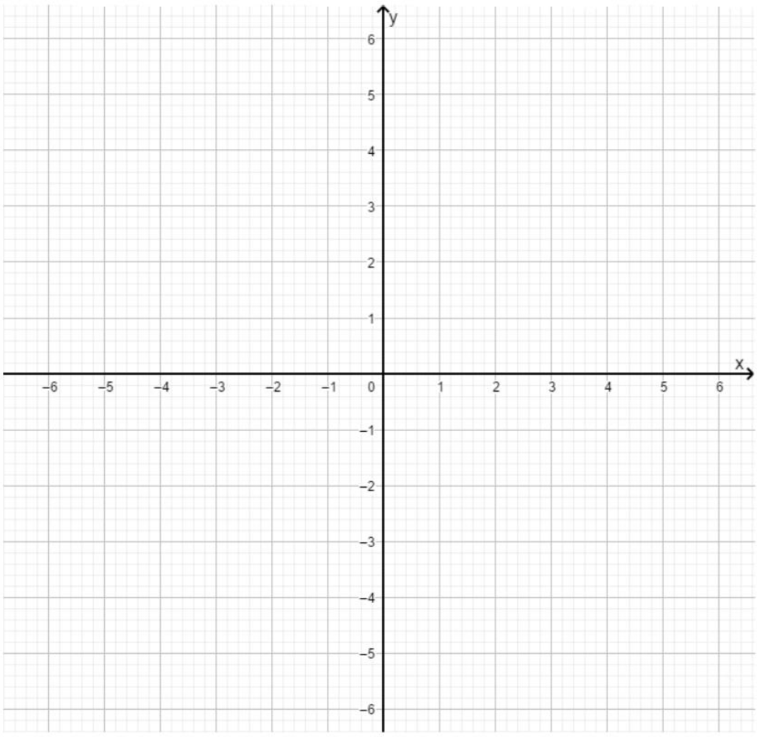
$$\frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$$

Equação Segmentária da Reta

Agora é a sua vez! Determine a equação segmentária a partir da equação geral de, pelo menos, uma das retas da **PARTE I**.

## PARTE IV – Equação segmentária

Agora que você já tem pelo menos uma equação da reta na forma segmentária, utilize a malha quadriculada abaixo para fazer um esboço do gráfico. E, em seguida, responda à pergunta com o que você percebeu.




Analise os denominadores (parte de baixo da fração) da equação segmentária que você determinou na **PARTE III** e os pontos que a reta intercepta os eixos $x$ e $y$. O que você consegue perceber? Há algo em comum?

Caso você ainda não tenha percebido, a particularidade da equação segmentária é que a sua equação é determinada a partir dos pontos de interseção da reta com os eixos $x$ e $y$ de forma que:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

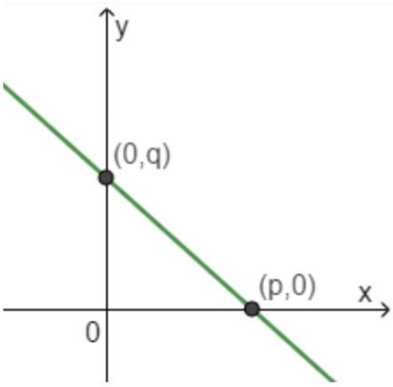
Equação Segmentária da Reta

- O número que divide o $x$ na equação da reta é igual à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo $x$.

- O número que divide o $y$ na equação da reta é igual à ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo $y$.

- O segundo membro da equação é igual a 1.[2]

Perceba essas características na imagem abaixo:




[2] IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciências e aplicações. 9. ed. v. 3. São Paulo: Saraiva, 2017.

**PARTE V – Conclusão**

O que é possível perceber em relação as equações geral e segmentária? Há alguma relação que se pode estabelecer entre as duas equações?

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

## Apêndice D.4 – Estação Vermelha

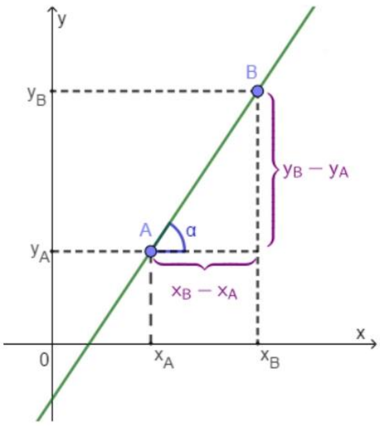
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_______________________________________ Data:___ /___ /___

### PARTE I – Coeficiente Angular

Toda reta não vertical do plano cartesiano possui um coeficiente angular (mesmo que este seja nulo, igual a zero). Este coeficiente angular $m$ mede a variação entre as coordenadas $x$ e $y$ de uma reta. Então, a partir de dois pontos pertencentes a esta reta, podemos calcular essa variação.

Figura 1 – Cálculo do coeficiente angular




$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Fonte: Elaboração própria

Agora, vamos utilizar desse cálculo do coeficiente angular para determinar a equação de uma reta.

Seja uma reta $r$ do plano com um ponto $A = (x_A, y_A)$ conhecido. Para calcularmos o coeficiente angular dessa reta, precisamos de pelo menos dois pontos, então, vamos utilizar um ponto genérico $P = (x, y)$ que pertença a essa reta. Assim, teremos:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

Multiplicando ambos os membros por $(x - x_A)$:

$$(x - x_A) \cdot m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Dividindo o $(x - x_A)$ do denominador com o que está multiplicando a fração, ficamos com:

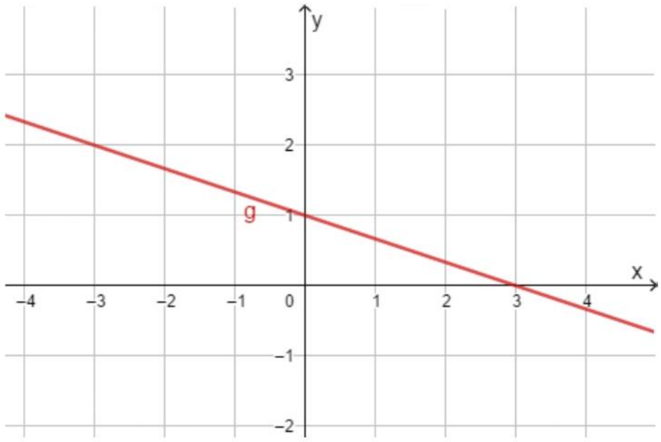
$$(x - x_A) \cdot m = y - y_A$$

Equação Fundamental da Reta

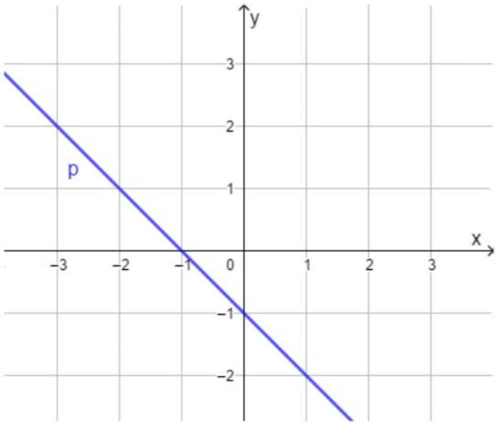
Essa equação da reta também é conhecida como a **forma ponto–inclinação** da equação de uma reta pois esta é a equação generalizada de uma reta se forem conhecidos a sua inclinação $(m)$ e um ponto $A = (x_A, y_A)$ pertencente a esta reta.

A partir da reta dada em cada item, escolha dois pontos pertencentes a esta reta, calcule o seu coeficiente angular. Em seguida, determine a equação fundamental dessa reta utilizando um ponto pertencente a reta e um ponto genérico $P = (x, y)$.

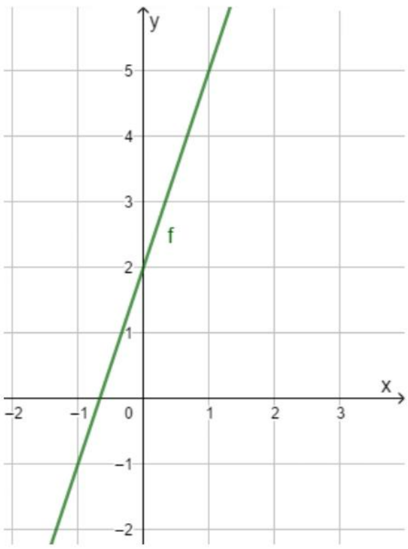
a)



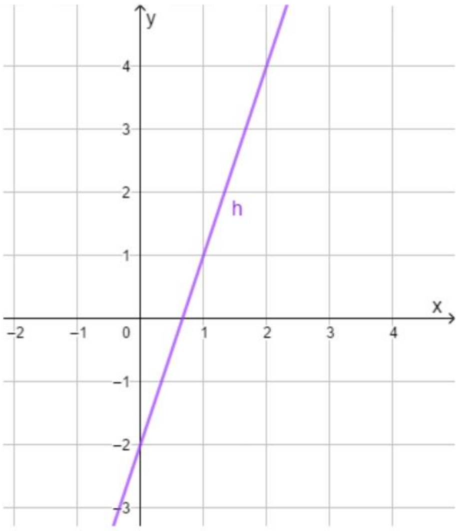
b)




c)



d)




Escaneie o QR Code ao lado para conferir os resultados no applet do GeoGebra "Coeficiente Angular e Eq. Fundamental e Reduzida".

## PARTE II – Transformação da equação fundamental para a reduzida

Agora que você já determinou as equações fundamentais de cada uma das retas e conferiu os seus resultados no *applet*, vamos tentar "resolver" a equação fundamental da reta.

No *applet*, logo abaixo da equação na forma ponto - inclinação, havia esta mesma equação em outro formato, mais reduzido. Vamos então manipular as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d) para chegarmos a este novo formato.

Perceba que, quando temos uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, podemos começar a "resolver" essa equação fazendo:

- Distributiva do coeficiente angular $m$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- E, em seguida, organizar essa equação de forma que o $y$ permaneça "sozinho" no primeiro membro.

Tente fazer agora com as equações fundamentais que você determinou nos itens a), b), c) e d). Caso precise, utilize o *applet* para conferir seus resultados.

OBS: o aplicativo GeoGebra tem alguns erros de aproximação nas operações com números decimais, então, alguns resultados podem não aparecer exatamente iguais.

## PARTE III – Equação Reduzida

Quando temos uma equação na sua forma ponto – inclinação e tentamos "resolver" esta equação, ficamos com:

$$y - 3 = -2(x - 4)$$

Ou seja, temos uma reta que passa pelo ponto $(4, 3)$ e tem coeficiente angular $m = -2$.

Ao fazermos a distributiva do $m = -2$, teremos:

$$y - 3 = -2x + 8$$

$$y = -2x + 8 + 3$$

$$y = -2x + 11$$

Perceba que, ao fazer essa manipulação nas equações, elas têm o formato

$$y = mx + n$$

Equação Reduzida da Reta

Neste formato da equação reduzida, temos de imediato o coeficiente angular $m$ e o intercepto da reta no eixo y, que é no ponto $(0, n)$.

## PARTE IV – Transformação da reduzida para a geral

Na **PARTE III**, foi apresentada a equação reduzida da reta, que é conhecida pela variável $y$ isolada em um dos membros.

Agora, se fizermos uma simples manipulação, mantendo as variáveis $x$ e $y$ em um mesmo membro, teremos outro formato da equação da reta. Observe abaixo:

Equação reduzida: $y = -2x + 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x + y = 11$$

As equações nesse formato são conhecidas como:

$$ax + by = c$$

Equação Geral da Reta

Para compreender melhor essa manipulação entre a equação reduzida e a equação geral, escaneie o QR Code abaixo assista o vídeo da Khan Academy Brasil.

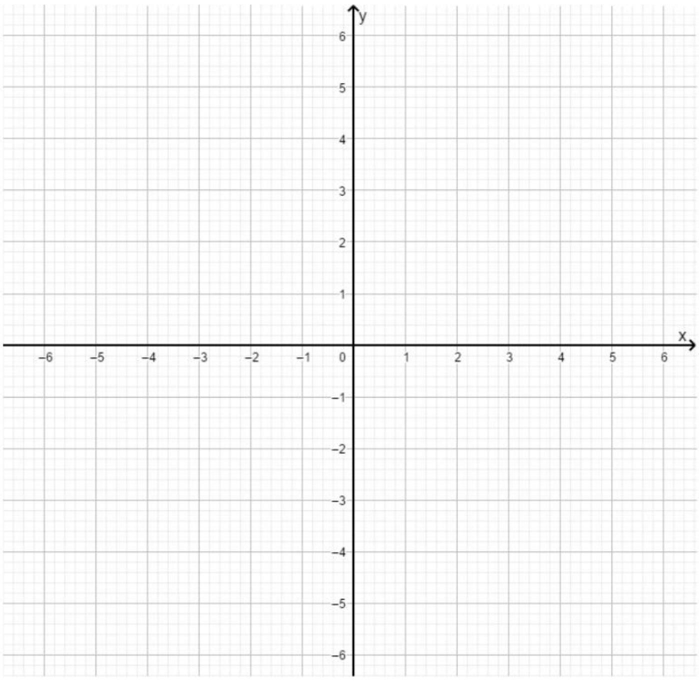
## PARTE V – Conclusões

O vídeo fala da transformação da equação reduzida para a equação geral. Você consegue pensar em uma maneira de fazer o processo contrário? Da equação geral para a equação reduzida da reta? Pense em uma equação no formato $3x + 2y = 6$ e tente manipula-la para chegar ao formato $y = mx + n$.

Lembre-se que os números $m$ e $n$ são variáveis, ou seja, eles podem assumir qualquer número real.

Represente, no plano cartesiano abaixo, os gráficos das seguintes equações.

a) $3x - 2y = -6$ b) $y = 1{,}5x + 3$ c) $y - 6 = 1{,}5(x - 2)$



Após estas atividades, o que é possível perceber em relação as equações: fundamental, reduzida e geral? Há algum tipo de relação entre elas que se consegue estabelecer?

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

# Apêndice D.5 – Atividade Final

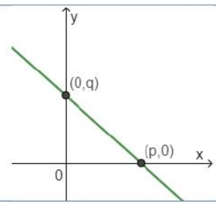
Licencianda: Giullia Gomes Faes
Orientadora: Me. Pâmella de Alvarenga Souza

Identificação:_________________________________________ Data:___ /___ /___

## PARTE I – Resumo das equações

Durante as estações, você estudou **maneiras diferentes de se escrever** a mesma coisa, **a equação de uma reta!** Sendo que cada equação tem a sua particularidade, ou seja, cada equação têm as suas vantagens.

Agora que você já fez um estudo sobre cada um desses formatos, vamos completar o quadro resumo abaixo, que sintetiza as equações de uma reta.

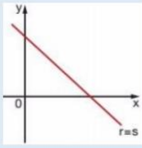
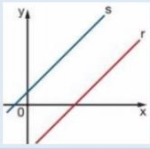
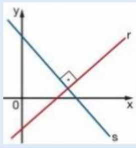
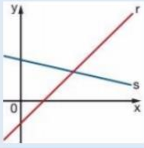
| Equação | Formato | Descrição |
|---|---|---|
| **Fundamental** | | |
| **Geral** | | Equação em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $(x, y)$ representa um ponto genérico da reta. |
| **Reduzida** | | |
| **Paramétrica** | $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ | |
| **Segmentária** | |  |

INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro — DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

## PARTE II – Síntese das estações

Em cada uma das estações, além de ter estudado as diferentes formas de se representar a equação de uma reta, você também estudou algumas relações entre elas.

Na estação amarela, foi apresentada a relação entre a equação reduzida e as posições relativas entre retas.

| **Posições relativas entre retas de equações reduzidas** $r: y = m_1x + n_1$ $s: y = m_2x + n_2$ | | | |
|---|---|---|---|
| **Paralelas** | | **Concorrentes** | |
| Coincidentes | Distintas | Perpendiculares | Não perpendiculares |
|   |   |   |   |
| | | | |

Na estação azul, a relação estabelecida entre equações da reta foi:

| Equação paramétrica | $\rightarrow$ | Equação geral |
|---|---|---|
| $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ | $\Rightarrow$ | $ax + by = c$ |
| $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ | $\Rightarrow$ | $x - 2y = -5$ |

Na estação verde, a relação estabelecida entre equações da reta foi:

| Equação geral | $\rightarrow$ | Equação segmentária |
|---|---|---|
| $ax + by = c$ | $\Rightarrow$ | $\frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$ |
| $2x + 3y = 6$ | $\Rightarrow$ | $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ |

Na estação vermelha, as relações estabelecidas entre equações da reta foram:

| Equação fundamental | → | Equação reduzida | → | Equação geral |
|---|---|---|---|---|
| $y - y_A = m(x - x_A)$ | $\Rightarrow$ | $y = mx + n$ | $\Rightarrow$ | $ax + by = c$ |
| $y - 5 = 3(x - 1)$ | $\Rightarrow$ | $y = 3x + 2$ | $\Rightarrow$ | $3x - y = -2$ |

## PARTE III – Transformação da geral para a reduzida

Uma importante manipulação entre diferentes equações da reta que ainda precisamos estudar é da equação geral para a equação reduzida. Esta transformação pode ser feita da seguinte maneira:

A partir da equação geral, $ax + by = c$

Isolamos o $by$ em um dos membros: $by = -ax + c$

Dividimos a equação por $y$:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

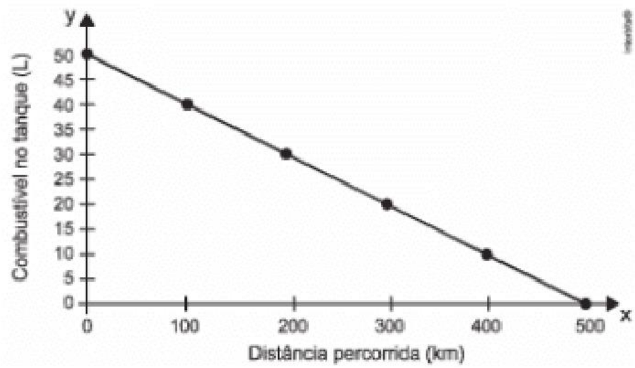
Assim, determinamos uma equação reduzida da reta $y = mx + n$ tal que o coeficiente angular $m = -\frac{a}{b}$ e a interseção com o eixo y, $n = \frac{c}{b}$.

Vamos agora fazer a mesma manipulação utilizando a equação: $4x + 5y = -2$.

Agora, você já tem as informações necessárias para fazer transformações entre quaisquer formatos da equação de uma reta!

## PARTE IV - Exercícios

**Questão 1** - (Enem PPL 2018 - Adaptada) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).




A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

a) $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 0$

b) $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 1$

c) $\frac{x}{500} + \frac{y}{50} = 0$

d) $\frac{x}{500} + \frac{y}{50} = 1$

e) $\frac{x}{50} + \frac{y}{500} = 1$

**Questão 2** – (UEM 2018 - Adaptada) Considerando as retas $r: x - y = 1$, $s: 2x - 2y - 4 = 0$ e $t: y = -x + 3$, assinale o que for correto.

01) As retas $s$ e $t$ são perpendiculares.

02) As retas $s$ e $r$ se interceptam em um único ponto.

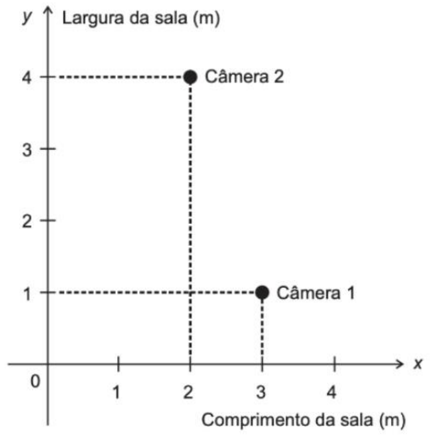
04) O ponto (4, 3) pertence à reta $r$, mas não pertence às outras retas.

08) As retas $r$ e $t$ são perpendiculares.

16) As retas $s$ e $r$ têm o mesmo coeficiente angular.

**Questão 3** – (ENEM PPL – 2019 - Adaptada) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada numa posição em que, a reta que passará por essa terceira câmera, será paralela a reta que passa pelas coordenadas das câmeras 1 e 2. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.




(ii) cinco relações entre as coordenadas $(x, y)$ da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$$R_1: y = x;\ R_2: y = -3x + 5; R_3: y = 3x + 10; R_4: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}; R_5: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera. A relação escolhida pelo instalador foi a

a) $R_1$.

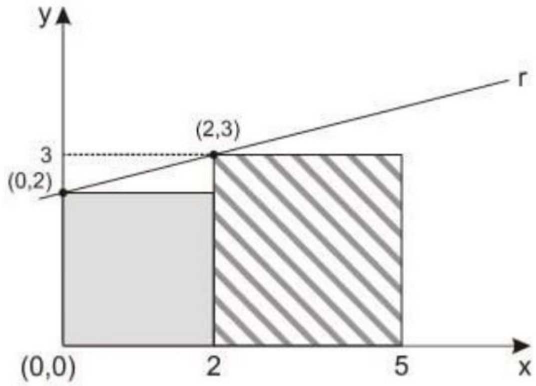
b) $R_2$.

c) $R_3$.

d) $R_4$.

e) $R_5$

**Questão 4** – (UFPR – 2012 – Adaptada) Na figura acima estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:




Fonte: **Blog do Enem**. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/geometria-analitica-matematica-enem/. Acesso em 12 jul. 2021.

a) $x - 2y = -4$

b) $4x - 9y = 0$

c) $2x + 3y = -1$

d) $x + y = 3$

e) $2x - y = 3$

**Questão 5** – (UEL) A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$.

Essa trajetória determina uma reta:

a) que contém os pontos (3;9) e (-2;6)

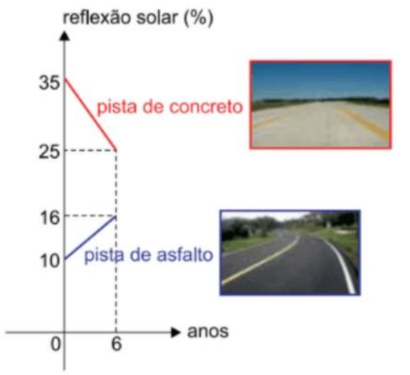
b) paralela à reta de equação 6x - 2y – 1 = 0

c) perpendicular à reta de equação 3x - y + 1 = 0

d) que contém os pontos (1;3) e (7;3)

e) perpendicular à reta de equação 5x – y = 0

**Questão 6** – (UNESP 2018 – Adaptada) Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.




(www.epa.gov. Adaptado.)

Sendo mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, das duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, assinale a alterativa correta:

a) A equação fundamental da reta que representa a pista de concreto é $y - 35 = -\frac{5}{2}(x - 6)$.

b) A equação fundamental da reta que representa a pista de asfalto é $y - 16 = (x - 6)$.

c) A equação reduzida da reta que representa a pista de asfalto é $y = x - 26$.

d) A equação geral da reta que representa a pista de asfalto é $y - x = 26$.

e) A equação geral da reta que representa a pista de concreto é $3y + 5x = -45$.