MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IGOR PESSANHA MENEZES
QUÉREN RIBEIRO MIGUEL DOS SANTOS

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA: Uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Campos dos Goytacazes/ RJ
Setembro – 2022.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IGOR PESSANHA MENEZES
QUÉREN RIBEIRO MIGUEL DOS SANTOS

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA: Uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Me. Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Campos dos Goytacazes/RJ
Setembro – 2022.1

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

M543r

Menezes , Igor Pessanha
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA: Uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica / Igor Pessanha Menezes , Quéren Ribeiro Miguel dos Santos - 2022.
178 f.: il. color.

Orientador: Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2022.

1. Gráficos de funções . 2. Domínio. 3. Conjunto imagem. 4. Funções definidas por mais de uma sentença. 5. Intervenção pedagógica. I. Santos, Quéren Ribeiro Miguel dos . II. Silva, Cleuber Eduardo do Nascimento , orient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFFcom os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
RUA DOUTOR SIQUEIRA, 273, PARQUE DOM BOSCO, CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ, CEP 28030130
Fone: (22) 2726-2903, (22) 2726-2906

PARECER CACLMCC/DAESLCC/DIRESLCC/DGCCENTRO/REIT/IFFLU N° 9

24 de novembro de 2022

IGOR PESSANHA MENEZES

QUÉREN RIBEIRO MIGUEL DOS SANTOS

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA: Uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense campus Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 03 de Outubro de 2022.

Banca Examinadora:

____

Prof ª. Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática Aplicada – UFRJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

____

Prof. Leandro Sopeletto Carreiro
Mestre em Matemática – UENF/RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

____

Cleuber Eduardo do Nascimento Silva (orientador)
Mestre em Matemática – UFRJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

RESUMO

A significação dos elementos constituintes de funções, como o domínio e conjunto imagem, é, por vezes, pouco discutida em fase escolar. A compreensão da construção de gráficos de funções descontínuas depende de uma análise dos intervalos de domínio e conjunto imagem. Desse modo, o estudo de funções definidas por mais de uma sentença deve dar ênfase a estes elementos, visto que, por muitas vezes, elas são descontínuas. Sob essa óptica, o presente trabalho tem por objetivo geral investigar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença. Para alcançar-se este objetivo, foi realizada uma pesquisa de caráter qualitativo, do tipo intervenção pedagógica, tendo como participantes 14 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino, localizada no município de Campos dos Goytacazes/RJ. Este público-alvo foi escolhido pelo fato dos autores julgarem ser necessário, para se obter êxito na pesquisa, que os alunos já tivessem estudado, ao menos, funções do tipo afim, conteúdo tematizado no primeiro ano do Ensino Médio. A pesquisa foi fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. A sequência didática elaborada para a intervenção pedagógica foi aplicada ao longo de quatro encontros, havendo, ainda, um questionário final, respondido pelo público-alvo no último encontro. Buscou-se elaborar atividades nas quais os alunos pudessem representar um mesmo objeto matemático por mais de um registro semiótico. Os dados foram coletados a partir das respostas fornecidas às atividades propostas da sequência didática, das observações feitas pelos autores deste trabalho no decorrer da intervenção pedagógica e do questionário final. Antes de se realizar a intervenção pedagógica, todos materiais produzidos foram submetidos a um teste exploratório, para que fossem feitas reformulações de acordo com as sugestões conferidas pelos participantes do teste. Considerando o bom desempenho da turma, de modo geral, na realização das atividades propostas, além das repostas verificadas no questionário final, foi possível concluir que a aprendizagem sobre os elementos de funções é favorecida ao se desenvolver uma sequência didática sobre funções definidas por mais de uma sentença apoiada à TRRS.

Palavras-chave: Gráficos de funções. Domínio. Conjunto imagem. Funções definidas por mais de uma sentença. Intervenção pedagógica.

ABSTRACT

The meaning of the constituent elements of functions, such as the domain and image set, is sometimes little discussed at school. The understanding of the construction of graphs of discontinuous functions depends on an analysis of the domain and image set intervals. Thus, the study of functions defined by more than one sentence should emphasize these elements, since they are often discontinuous. From this perspective, the present work has the general objective to investigate the contributions of a didactic sequence based on the Theory of Semiotic Representation Registers for the study of graphs of functions defined by more than one sentence. To achieve this objective, a qualitative research was carried out, of the pedagogical intervention type, with 14 students from the second year of high school from a state school located in the municipality of Campos dos Goytacazes/RJ. This target audience was chosen because the authors considered it necessary, in order to be successful in the research, that the students had already studied, at least, functions of the similar type, thematic content in the first year of High School. Raymond Duval based the research on the Theory of Semiotic Representation Registers (TSRR). The didactic sequence developed for the pedagogical intervention was applied over four meetings, with a final questionnaire, answered by the target audience at the last meeting. We sought to develop activities in which students could represent the same mathematical object by more than one semiotic register. Data were collected from the answers provided to the proposed activities of the didactic sequence, from the observations made by the authors of this work during the pedagogical intervention and from the final questionnaire. Before carrying out the pedagogical intervention, all materials produced were submitted to an exploratory test, so that reformulations could be made according to the suggestions given by the test participants. Considering the good performance of the class, in general, in carrying out the proposed activities, in addition to the answers verified in the final questionnaire, it was possible to conclude that learning about the elements of functions is favored when developing a didactic sequence on functions defined by more than a judgment supported by the TSRR.

Keywords: Function graphs. Domain. Image set. Functions defined by more than one sentence. Pedagogical intervention.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática faz parte da história da humanidade, sendo uma área de conhecimento fortemente utilizada no cotidiano das pessoas em diversas atividades, das mais simples às mais complexas. Nesse sentido, sua presença na educação escolar se faz cada vez mais necessária para produção de novos saberes e progresso científico (SILVA; LAZZARIN, 2018).

Dentre os conceitos fundamentais da Matemática, destaca-se o de função (LIMA, 2007). Ponte (1990, p. 3) afirma que "O conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda Matemática", salientando que seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem (PONTE, 1990).

Nessa perspectiva, função é um dos conteúdos mais abordados na fase escolar, vista a importância que o currículo dá ao mesmo (XAVIER NETO, 2015). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), esclarece que o aluno deve ser capaz de compreender função como um tipo de relação de dependência unívoca entre duas variáveis, identificando domínio e imagem, além de registrar as representações numérica, gráfica e algébrica (BRASIL, 2018).

Souza (2016, p. 13), afirma que o estudo de função se faz necessário para "[...] analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependência e generalizar", cabendo ao professor mostrar aos alunos que esse conceito vai além de uma simples manipulação algébrica, havendo várias possibilidades de aplicação, tanto na Matemática quanto em outras áreas de conhecimento. Silva e Lazzarin (2018), acrescentam que o estudo de funções é essencial para os alunos do Ensino Médio, pois o principal objetivo nesta fase é desenvolver a capacidade em lidar com fenômenos da realidade.

Dentre os tipos de função, destacam-se as funções definidas por mais de uma sentença. Segundo Xavier Neto (2015, p. 23), "[...] o conceito de função de várias sentenças é importante, pois possibilita expressar matematicamente muitos fenômenos que se relacionam com variáveis".

Salientando a importância do ensino das funções definidas por mais de uma sentença, a BNCC traz a seguinte habilidade que deve ser desenvolvida pelo aluno ao estudar esse tipo de função:

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 539).

Ainda que seja um dos assuntos mais desenvolvidos na fase escolar, boa parte dos alunos possui dificuldades na compreensão dos conceitos de função. Essas dificuldades vêm sendo amplamente relatadas e difundidas ao longo dos anos por diferentes pesquisadores como Sierpinska (1992), Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), Oliveira (1997), Oliveira (2007) e Souza (2016). De acordo com Sierpinska (1992),

> Os estudantes têm tido dificuldades em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais de relações, em interpretar gráficos, em manipular símbolos relacionados à funções como por exemplo: $f(x)$, $x \rightarrow y$, sen (x+1), etc. A linguagem utilizada em relação às funções não ajuda. Assim: "$f(x)$" serve tanto para o nome da função quanto para o valor da função f no ponto x. Em situações espontâneas, os estudantes utilizam um simbolismo e uma linguagem diferentes. (SIERPINSKA, 1992, p. 25, tradução nossa).

Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) também notaram dificuldades dos alunos em relação às funções, para localizar imagens nos eixos em representações gráficas e na forma algébrica, para distinguir imagem e o contradomínio, além de, muitas vezes, os alunos ignorarem o domínio e o contradomínio ao traçarem o gráfico de uma função. Esses autores ainda ressaltam que os alunos apresentam maiores dificuldades em certos tipos de funções, como as que são representadas por gráficos desconexos e as funções definidas por mais de uma sentença, destacando que "[...] o conceito de função definida por secções e de gráficos desconexos é bastante importante especialmente para aqueles que irão prosseguir com a matemática, [...] merecendo, portanto, mais atenção no currículo" (MARKOVITS, EYLON, BRUCKHEIMER, 1995, p. 63).

Dentre os obstáculos existentes no ensino de função, Oliveira (2006, p. 24) menciona que os alunos apresentam dificuldades no "[...] registro da representação gráfica, na mudança de um registro para o outro, na compreensão do domínio e contradomínio, na construção de uma tabela de valores numéricos e na notação matemática".

Segundo Oliveira (1997), as dificuldades acerca de funções definidas por mais de uma sentença se evidenciam a partir do momento em que os alunos são solicitados a representar a função graficamente e a identificar o domínio.

De acordo com todas as dificuldades apresentadas anteriormente, seja sobre função de modo geral ou em casos específicos, como o de funções definidas por várias sentenças, é importante voltar a atenção para os diferentes tipos de representação de funções. Na aprendizagem matemática, duas características devem ser levadas em conta: i) a importância primordial das representações semióticas e; ii) a grande variedade de representações semióticas utilizadas. Para que a aprendizagem matemática seja favorecida, se faz necessário mobilizar, ao menos, dois registros de representação (DUVAL, 2003).

Segundo a BNCC, na Matemática é possível verificar a importância das variadas representações “[...] uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas” (BRASIL, 2018, p. 529). O uso de diferentes registros semióticos é, em muitas situações, indispensável para a compreensão e resolução de uma atividade. Assim, os alunos devem conhecer diversos registros de representação e coordená-los para modelar diferentes situações, utilizando a representação mais adequada (BRASIL, 2018).

> Para a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. (BRASIL, 2018, p. 538).

É importante destacar que a conversão de registros nem sempre é tarefa simples, porém se faz necessária para a compreensão do objeto matemático estudado, uma vez que uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2018). Dentro desse contexto, Souza (2016), afirma que, muitas vezes, os alunos têm acesso a várias representações de uma função, mas não se apresenta uma conexão entre elas.

A motivação para essa pesquisa se deu a partir de uma situação vivenciada por um dos autores deste trabalho ao cursar o componente curricular Fundamentos de Matemática I, no 1.º período da Licenciatura em Matemática. Ao realizar uma atividade avaliativa em que se pedia o esboço do gráfico de uma função real, dados o domínio e o conjunto imagem, a turma, quase que em sua totalidade, não soube construir um gráfico que representasse corretamente os intervalos expostos no enunciado.

Tendo em vista os aspectos destacados anteriormente e o contexto em que a abordagem de funções se insere, a seguinte questão de pesquisa foi formulada: Quais as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença?

Para responder a questão de pesquisa, foi traçado o seguinte objetivo geral: Investigar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença.

Para alcançar-se este objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica favorece a aprendizagem de funções definidas por mais de uma sentença;
- Verificar as contribuições de uma sequência de atividades baseadas nos registros de representação semiótica para viabilizar o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença;
- Proporcionar reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem dos elementos de funções, com ênfase para o domínio e o conjunto imagem, por meio de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença.

Este trabalho é composto por quatro capítulos. O primeiro expõe a introdução, que apresenta a justificativa, motivação, questão de pesquisa e objetivos geral e específicos. O segundo trata do referencial teórico adotado, discutindo a representação gráfica de funções, as funções definidas por mais de uma sentença, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e apresentando os trabalhos relacionados. O terceiro apresenta os aspectos metodológicos, tais como o tipo de pesquisa que será realizado, os instrumentos de coleta de dados, as etapas da pesquisa, a elaboração da sequência didática e a elaboração do questionário final. O quarto, exibe os resultados obtidos na pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica deste trabalho. Ele está dividido em quatro seções: i) Representação gráfica de funções ii) Funções definidas por mais de uma sentença; iii) Teoria dos Registros de Representação Semiótica e; iv) Trabalhos relacionados.

2.1 Representação gráfica de funções

Ao se falar em estudo de funções, Siqueira e Beust (2008) destacam a viabilidade de se iniciar o assunto a partir de representações na forma gráfica, o que geralmente não é feito; na maioria das vezes introduz-se função por meio de representações na forma algébrica (SIQUEIRA, BEUST, 2008). Os autores argumentam que esta viabilidade se deve ao fato da representação gráfica ser mais visual, "[...] o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência são dados simultaneamente e, assim, tem-se uma visão imediata do comportamento da função" (SIQUEIRA; BEUST, p.47, 2008).

Siqueira e Beust (2008) citam dois pré-requisitos para o estudo de funções:

1- Dar destaque aos gráficos que se instituem como um meio de representar as funções;

2- Apresentar o plano cartesiano, antes da construção e interpretação de gráficos cartesianos.

De acordo com Siqueira e Beust (2008), um dos motivos para os alunos apresentarem dificuldade em compreender função é o fato de sua definição envolver muitos conceitos: "A definição de função, conforme é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos: domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência" (SIQUEIRA; BEUST, p. 46, 2008).

Dentre estes conceitos, Oliveira (2006) aponta que os alunos apresentam dificuldades em reconhecer o domínio e contradomínio, não compreendendo as atribuições destes numa função. "Em muitos problemas, a função é a lei, em que os alunos ignoram o domínio e o contradomínio e, às vezes, nem os especificam, embora tenham sido solicitados" (SIQUEIRA; BEUST, p. 51, 2008).

É de suma importância que o professor, no ensino de função, analise a capacidade do aluno em localizar o domínio e a imagem em representações gráficas, pois, na maioria das vezes, os alunos identificam incorretamente estes elementos no gráfico da função (SIQUEIRA; BEUST, 2008).

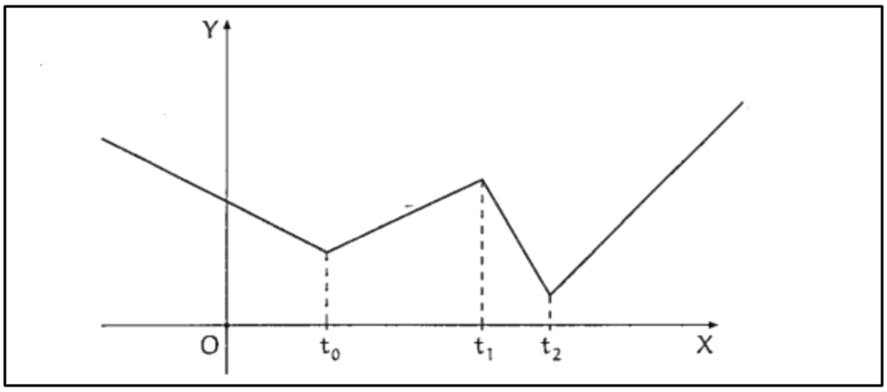
A respeito das construções e análises de gráficos de funções, segundo Oliveira (2006), há evidências de que os alunos possuam poucas habilidades para lidar com estes, havendo também uma dependência da construção de tabelas para seu esboço. Sobre a dificuldade em representar graficamente uma função, Simões (1995) afirma que

> [...] o ensino das funções em geral, não enfatiza a conversão da representação gráfica à representação algébrica. Em consequência, inúmeros estudos mostram as dificuldades dos alunos na leitura e interpretação das representações gráficas cartesianas, seja com as funções lineares ou afins ou com as funções do 2º grau. (SIMÕES, 1995, p. 37).

É importante trabalhar com funções que se relacionam tanto aos acontecimentos cotidianos como também às diversas áreas da matemática. Estas funções geralmente são definidas por mais de uma sentença e possuem um traçado poligonal. As funções poligonais (Figura 1) são definidas ao se combinar os valores absolutos de funções afim (LIMA *et al.*, 2006).

> Diz-se que f: R → R é uma função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < ... < t_n$, tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i. Equivalentemente, podemos dizer que uma função f: R → R é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal. (LIMA *et al.*, 2006, p. 103).

Figura 1 – Gráfico de uma função poligonal



Fonte: LIMA *et al.*, 2006, p. 103.

As afirmações de Simões (1995), Oliveira (2006) e Siqueira; Beust (2008), atestam que os alunos, em geral, desconhecem o significado do domínio e imagem, não compreendendo o que estes representam numa função e como se relacionam às características gráficas. Além disso, Oliveira (2006) relata que os alunos, geralmente, veem as funções definidas por mais de uma sentença como mais de uma função, justamente pela descontinuidade que estas geralmente apresentam. Portanto, os autores da presente pesquisa escolheram dar destaque às funções definidas por mais de uma sentença, visto que a abordagem deste tipo de função deve ser enfática na análise dos intervalos de domínio e de conjunto imagem.

2.2 Funções definidas por mais de uma sentença

As funções definidas por mais de uma sentença compreendem um importante assunto do Ensino Médio, por poderem expressar acontecimentos cotidianos (BRASIL, 2018). O estudo de função de uma variável real definida por mais de uma sentença é visto no primeiro ano do Ensino Médio, porém, seu conceito, por vezes, acaba sendo esquecido nos anos posteriores (XAVIER NETO, 2016).

Iezzi e Murakami (2013, p. 159), definem função de várias sentenças da seguinte forma: "Uma função *f* pode ser definida por várias sentenças abertas cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da *f*".

Gonçalves e Allevato (2018), destacam que trabalhar com funções definidas por mais de uma sentença viabiliza o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções de maneira geral, visto que elas permitem a manipulação de vários tipos de funções, tais como: funções afins, quadráticas, exponenciais e modulares.

Para Xavier Neto (2016, p. 86), "[...] o conceito de função de uma variável real com várias sentenças obviamente está relacionado ao de função e não pode ser tratado de maneira dissociada dele". Em concordância com esta afirmação, Rossini (2006, p. 5) destaca que "[...] as funções definidas por mais de uma sentença tiveram um papel importante na história do conceito de função" (ROSSINI apud XAVIER NETO, 2016, p. 87).

Os autores da presente pesquisa escolheram utilizar as funções definidas por mais de uma sentença pelo fato de muitas vezes os alunos terem a errada concepção de que toda função é linear (MARKOVITS *et al.*, 1995, p. 60).

Para que se tenha uma efetiva compreensão acerca de funções definidas por mais de uma sentença e de seus elementos, esta pesquisa se apoia à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

2.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida por Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação (MACHADO, 2009). A noção de representação foi introduzida por Piaget, em estudos relacionados à representação mental (1924-1926), especificamente sobre *A Representação do mundo da criança*. Num segundo momento, como representação interna ou computacional (1955-1960) e, por fim, como representação semiótica, nas últimas décadas (DUVAL, 2009, p. 30).

Semiótica, palavra de origem grega, "[...] denomina a ciência dos signos ou a ciência de todas as linguagens" (ALMEIDA, 2015, p. 33). Esta ciência foi fundamentada por três modelos de análise dos signos. Dois estão ligados à gênese da semiótica como disciplina: o de Peirce, nos Estados Unidos (1890-1910), e o de Saussure, em Genebra, tendo como pedra fundamental a publicação da obra que apresentou o método de análise estrutural, em 1916. O terceiro modelo é apresentado em dois artigos de Frege, que ganharam destaque pela crítica feita por Bertrand Russell, em 1905. Todos os trabalhos posteriores relacionados à semiótica advém das colaborações desses três autores (DUVAL, 2011, p. 28).

Mesmo que cada modelo tenha sua contribuição, "[...] nenhum deles é suficiente para esclarecer o funcionamento semicognitivo do pensamento e das atividades matemáticas" (ALMEIDA, 2015, p. 33). Nesse sentido, para Duval (2011, p. 36), as questões diretrizes que estruturam os três modelos deveriam ser escritas das seguintes formas:

1. Quais processos de discriminação permitem reconhecer as unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma expressão ou em uma representação semiótica?

2. Em função de quais critérios podemos classificar todos os tipos de representações utilizáveis em Matemática e no ensino de Matemática?

3. Quais são os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em Matemática?

Para elaborar um modelo de análise que permita evidenciar as causas das dificuldades comumente observadas na aprendizagem matemática, além de descrever os processos de compreensão, é necessário responder a essas três questões anteriores (DUVAL, 2011).

A TRRS abrange a aprendizagem em várias ciências, mas, em especial, em matemática, na qual se propõe uma efetiva intervenção (FERRAZ, 2008). Em muitas áreas de conhecimento, se pode ter acesso ao objeto estudado observando-o diretamente ou indiretamente (DUVAL, 2012). Entretanto, a observação na matemática ocorre por meio de suas diferentes representações, tais como gráficos, figuras, escrita algébrica, natural, entre outras (PASA, 2017).

> São representações semióticas utilizadas para representar objetos/conteúdos/conceitos matemáticos: língua natural, escrita numérica (fracionária, decimal, binária), escrita algébrica, gráficos cartesianos, entre outras, pois podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico. (SOARES, 2007, p. 25).

Pode-se considerar registro de representação, “[...] um sistema semiótico que potencializa a comunicação, objetivação e o tratamento” (SOARES, 2007, p. 27). É de suma importância apresentar um objeto matemático por meio de suas inúmeras representações semióticas (DUVAL, 2012). Duval (2012) define representação semiótica como

> [...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012, p. 269).

Para Duval (2009), não há a possibilidade de estudar fatos relativos ao conhecimento sem valer-se da noção de representação: “[...] não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2009, p. 29). As representações semióticas desempenham um papel além do de transmissão; elas são necessárias para que haja a atividade matemática (DUVAL, 2009).

Ao iniciar a aprendizagem de determinado conteúdo, pode haver uma confusão entre o objeto e suas representações semióticas. Por isso, é importante recorrer aos inúmeros registros para que não haja essa confusão (DUVAL, 2012). Nesse sentido, Damm (2012) salienta que

> Em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações. Os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. (DAMM apud MACHADO, 2012, p. 167).

Desse modo, Duval (2003) cita dois tipos de registros e quatro tipos de representações, como mostra o Quadro 1:

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

CLASSIFICAÇÃO	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis	▪ Língua Natural; ▪ Associações verbais (conceituais); ▪ Formas de raciocinar: Argumentação a partir de observações, de crenças; Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	▪ Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3); ▪ Apreensão operatória e não somente perceptiva; ▪ Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são, principalmente, algoritmos	Sistemas de escritas: ▪ Numéricas (binária, decimal, fracionária, etc.); ▪ Algébrica; ▪ Simbólicas (línguas formais).	Gráficos cartesianos: ▪ Mudanças de sistemas de Coordenadas; ▪ Interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14.

É importante destacar que nem todos os sistemas semióticos existentes cumprem as três atividades cognitivas inerentes a toda representação (DUVAL, 2009). Essas atividades são,

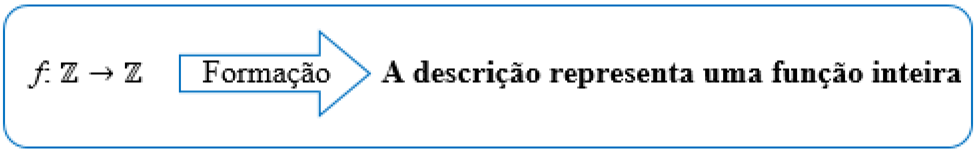
> Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 36 e 37).

Pode-se citar como exemplos de sistemas semióticos que permitem essas três atividades cognitivas fundamentais: a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, entre outras (DUVAL, 2009).

Para Duval (2009), a percepção ou a produção de uma representação semiótica chama-se *semíosis* e o que está ligado a atividade intelectual como entendimento teórico de um objeto é chamado de *noésis*. Duval (2009), afirma que existem três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis*, são elas: formação, tratamento e conversão.

Compreende-se por **formação** de uma representação semiótica (Figura 2) "[...] recurso a um (ou a muitos) signo(s) para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para se substituir essa atenção" (DUVAL, 2009, p. 54 e 55).

Figura 2 – Exemplo de formação



Fonte: Elaboração própria.

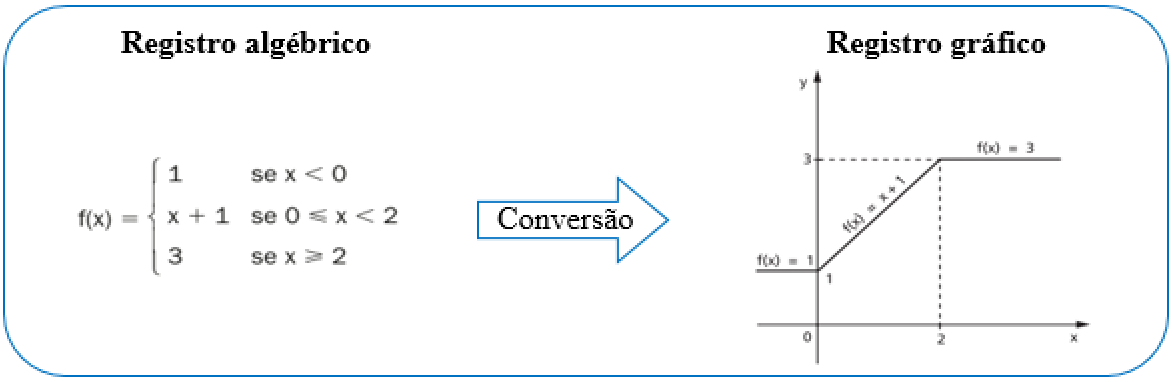
O **tratamento** de uma representação semiótica (Figura 3) pode-se considerar como sendo "a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas" (DUVAL, 2009, p. 56 e 57). Ou seja, o tratamento é um tipo de **transformação interna**, aquela que ocorre num mesmo registro de representação (DUVAL, 2009).

Figura 3 – Exemplo de tratamento

Fonte: Elaboração própria.

A **conversão** de uma representação semiótica (Figura 4) consiste em "transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro" (DUVAL, 2009, p. 58). A conversão é um tipo de **transformação externa**, que faz passar de um registro a outro (DUVAL 2009).

Figura 4 – Exemplo de conversão



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com Duval (2009), é importante saber diferenciar as três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis*, “[...] tanto para análise cognitiva das tarefas quanto para a das condições de uma aprendizagem conceitual” (DUVAL, 2009, p. 61).

Além disso, Duval (2009) afirma que a conversão das representações é uma atividade cognitiva fundamental da *semiósis* tão importante para a aprendizagem matemática quanto as outras (formação e transformação), pois ela possibilita a coordenação dos registros de representação. Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), os alunos devem

> Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. Fazer as conversões de uma linguagem para outra, selecionando a melhor representação para determinado problema. (BRASIL, 2002, p. 114).

Pode-se representar um objeto matemático de diferentes maneiras (CARVALHO; ÂNGELO; MELO, 2017). A título de exemplo, tem-se o conceito de função, que possui diversas representações, “tais como diagramas, gráficos, expressões algébricas, língua natural e tabelas, tendo cada uma delas algumas vantagens e limitações de acordo com as características que destacam” (CARVALHO; ÂNGELO; MELO, 2017, p. 118).

Para Henriques e Almouloud (2006), “A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. A coordenação aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem” (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 470).

Duval (2012) ressalta que para se ter a compreensão plena de um conceito, se faz necessária a coordenação de ao menos dois registros de representação. Porém, por haver uma falta de conhecimento das regras de correspondências semióticas, essa mobilização não é algo natural (MUNIZ, 2019). A condição para a compreensão em matemática é dada pela articulação dos diferentes registros de representação (DUVAL, 2003).

> É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o "enclausuramento" de cada registro. Ora, por que tantas abordagens didáticas são conduzidas como se a condição inversa fosse evidente? [...] Descartar a importância da pluralidade dos registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo ou que seus conteúdos respectivos se deixam perceber uns nos outros como por transparência! (DUVAL, 2003, p. 22-23).

Do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão é aquela que conduz aos mecanismos implícitos à compreensão (DUVAL, 2009). "Uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e compreensão" (DUVAL, 2009, p. 63).

Em toda atividade de conversão, a sua natureza cognitiva pode ser observada em dois tipos de fenômenos: "a) as variações de congruência e não-congruência; b) a heterogeneidade dos sentidos de conversão" (DUVAL, 2003, p. 19). Para analisar essa atividade, deve-se comparar a representação no registro inicial à representação no registro terminal. Duas situações podem ocorrer:

> Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (DUVAL, 2003, p. 19).

Ao se inverter os sentidos da conversão, partindo do registro definido como terminal para o registro definido como inicial, deve-se considerar a heterogeneidade dos sentidos de conversão. "Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão" (DUVAL, 2003, p. 20).

A análise da atividade de conversão envolve a comparação da representação no registro de partida com a representação no registro de chegada e isso envolve dois fenômenos — o da congruência e o da não-congruência. Para verificar o fenômeno de congruência, Duval (2009, p. 68-69) aponta três critérios:

1. **Correspondência semântica entre as unidades significantes das representações**: correspondência um a um – para cada elemento simples no registro de saída, há um elemento simples no registro de chegada;

2. **Unicidade semântica terminal**: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada;

3. **Conservação da ordem das unidades significantes**: mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

Se o registro de representação atender a esses três critérios, tem-se um fenômeno de congruência; considerando apenas alguns dos critérios ou nenhum, ocorre o fenômeno de não congruência. "Se o registro de representação de chegada não transparecer de forma espontânea o registro de partida, consideraremos que a conversão é não congruente" (GINEZ; PIRES, 2021, p. 7).

> Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente. (DUVAL, 2012, p. 283-284).

A respeito das dificuldades dos alunos em efetuar o registro da representação gráfica de funções, Duval (2011) esclarece que não se deve procurar a razão para estas nos conceitos matemáticos de funções, mas sim na correspondência semiótica e não-congruência entre os registros de representação gráfica e algébrica. O nível de congruência é definido de acordo com os critérios acima. Nesse sentido, Duval (2010, p. 138) esclarece que:

1. Todo e qualquer ensinamento deve se ater aos casos de congruência (correspondência entre o início das unidades de desempenho e os da representação de chegada; isso parece tão imediato que ele se assemelha com codificação), enquanto que uma ligeira variação na representação de partida pode fazer a conversão incongruente, e criar um bloqueio.

2. As conversões são sempre solicitadas na mesma direção, ou apenas invertidas de modo que já não há qualquer reconhecimento pelo aluno. Um exemplo clássico que ilustra essa razão é a passagem dos gráficos cartesianos para as escritas algébricas.

No ensino de matemática, geralmente há um sentido de conversão privilegiado, por se ter a ideia de que o treinamento feito num sentido treinará automaticamente a conversão no outro sentido. Em casos onde há congruência entre as representações, os exemplos propostos aos alunos são escolhidos instintivamente. Porém, esses casos, infelizmente, não são os mais frequentes (DUVAL, 2009). Para Duval (2011), há uma falta de conhecimento das regras de correspondência por parte dos alunos, argumentando que isso se deve ao fato da passagem da equação para a representação gráfica ser mais trabalhada do que a obtenção da lei algébrica a partir do gráfico.

> De fato, o ensino e mesmo certos estudos didáticos, atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que é a passagem inversa que traz problema [...]. Pelo fato de não se considerar as regras semióticas de correspondência, as representações gráficas tornam-se representações obscuras para a maioria dos alunos do *seconde* e para além desse nível. (DUVAL, 2011, p. 97-98).

Duval (2011), ainda destaca que a abordagem "ponto a ponto", que geralmente é utilizada para introduzir o estudo de representação gráfica de funções, não é adequada, significando um obstáculo no processo de aprendizagem. Esse tipo de abordagem utiliza a marcação de pontos no plano cartesiano, dados pares ordenados, limitando-se a alguns valores, já que os exemplos utilizados são, em geral, números inteiros para o valor das abscissas. Esse fato prejudica a compreensão do significado de uma função de domínio real (PASA, 2017).

Para Duval (2011), a abordagem de "interpretação global de propriedades figurais" seria a mais adequada a utilizar no estudo de gráficos e na conversão de um registro para o outro. Nessa abordagem, as análises são feitas de acordo com apresentações de mudanças no conjunto "traçado/eixos", que, por consequência, leva a uma mudança na lei algébrica da função em questão. Dessa forma, pode-se ter uma análise global das características e propriedades das funções. Para o autor,

> [...] isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de representação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica". (DUVAL, 2011, p. 99).

A unidade significativa de um gráfico não é dada por pontos encontrados pertencentes à curva, mas sim pelos seus valores visuais, como a sua posição em relação aos eixos, sua forma, entre outros (DUVAL, 2011, p. 109). “Assim, cada registro gráfico de uma função polinomial tem diversas qualidades visuais que devem ser discriminadas pelo aluno e, só assim, o aluno será capaz de *ler* o que o registro gráfico *diz*” (ALMEIDA, 2015, p. 40).

Em relação ao desempenho dos alunos nas atividades matemáticas, Duval (2003) argumenta que nem sempre o que pode ser considerado um acerto ou erro do ponto de vista matemático, terá algum valor do ponto de vista cognitivo. Os acertos, do ponto de vista cognitivo, não são determinados por cada item separadamente, mas sim pelo reagrupamento desses itens.

> Assim, um aluno que consiga reconhecer em um gráfico somente uma de duas retas correspondentes às equações y = x e y = -x, ou às equações y = 2x e y = x + 2 não está ainda no ponto de discriminar o que elas representam. Um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo. (DUVAL, 2003, p. 27).

Para favorecer o bom desempenho dos alunos nas atividades matemáticas, Duval (2009) esclarece que ao se tratar da articulação entre dois ou mais registros de um objeto matemático, duas condições devem ser respeitadas: a sequência de atividades deve ser formada por tarefas que contemplem os dois sentidos da conversão e; para cada sentido da conversão as tarefas devem comportar casos de congruência e “[...] *casos mais ou menos complexos de não-congruência*” (DUVAL, 2003, p. 27).

Os casos “mais ou menos complexos de não-congruência” estão presentes não apenas na tradução matemática dos registros em linguagem natural, mas também na conversão entre a escrita algébrica e sua representação gráfica. As dificuldades ligadas à não-congruência podem ainda ser agravadas pelo desconhecimento de um dos registros (DUVAL, 2009).

> A atividade conceitual não pode, então, mais ser isolada da atividade semiótica porque a *compreensão conceitual aparece ligada à descoberta de uma invariância entre representações semioticamente heterogêneas*. (DUVAL, 2011, p. 83).

Os autores deste trabalho veem a TRRS como uma fundamentação teórica consonante com os objetivos da pesquisa, já que sua proposta de intervenção no estudo de gráfico de funções se aproxima muito à ideia exposta pela questão de prova motivadora desta pesquisa. Além disso, os trabalhos que apresentaram uma sequência didática baseada na TRRS obtiveram bons resultados, revelando que a referida teoria pode colaborar para reduzir as dificuldades dos alunos na construção e compreensão de conceitos matemáticos.

2.4 Trabalhos relacionados

No dia 17 de junho de 2021, foi realizada uma pesquisa bibliográfica para obtenção de trabalhos relacionados ao tema. Essa busca teve por objetivo verificar as colaborações que determinados trabalhos trouxeram para o estudo de funções, sobretudo das definidas por várias sentenças, utilizando a mudança de registros de representação, com destaque para a construção e análise de seus gráficos. As bases utilizadas foram o Google Acadêmico e o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Na primeira busca, no Google Acadêmico, foi utilizada a *string* “funções definidas por mais de uma sentença” AND “ensino médio”. Como os resultados encontrados foram vastos, utilizou-se um filtro de busca para refinar a pesquisa. O período de publicação dos trabalhos foi restringido aos últimos 5 anos, de 2016 a 2021, restando, dessa forma, 20 trabalhos.

Na segunda busca, no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, foi utilizada a *string* “função” AND “teoria dos registros de representação semiótica”. Foram obtidos 37 trabalhos. Para manter o padrão de pesquisa, o período de publicação foi igualmente reduzido para os últimos 5 anos, sendo retornados 10 trabalhos.

Após a leitura destes trabalhos, tendo em vista os critérios de exclusão adotados para escolha (Quadro 2), apenas três passaram a figurar como trabalhos relacionados ao tema desta pesquisa (Quadro 3).

Quadro 2 – Critérios de exclusão

Não apresentar uma sequência didática
Não mobilizar ao menos dois registros de representação
Não explicar a construção de gráficos de função afim

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 3 – Trabalhos relacionados ao tema

ID	Título	Autor (ano)	Tipo
1T	Ensino de funções definidas por mais de uma sentença: uma experiência com o *software* GeoGebra	Amorim; Lourenço; Medeiros; Souza (2020)	Artigo
2T	O ensino de função pela perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica apoiado por tecnologias digitais	Muniz (2019)	Dissertação
3T	Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças	Xavier Neto (2016)	Dissertação

Fonte: Elaboração própria.

2.4.1 Ensino de funções definidas por mais de uma sentença: uma experiência com o *software* GeoGebra

O artigo dos autores Frank Victor Amorim, Albérico Texeira Canário de Souza, Emanuel Gomes Lourenço e Elthon John Rodrigues de Medeiros, teve por objetivo a aplicação de uma sequência didática para "[...] introduzir os conceitos de funções definidas por mais de uma sentença" (AMORIM *et al.*, 2020, p.47).

A metodologia de ensino foi embasada na Investigação Matemática de Ponte (2010), em que se elaborou uma sequência didática de atividades para o estudo de funções definidas por mais de uma sentença, utilizando o *software* GeoGebra. Essas atividades abordaram as seguintes temáticas: noção de função afim e esboço de gráficos no plano cartesiano.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, concluindo que, com o auxílio das Tecnologias Digitais, os alunos tendem a apresentar um melhor aprendizado. Dos 34 alunos participantes da sequência didática, 28 conseguiram perceber generalizações e conjecturar resultados. Os outros 6 alunos contaram com um auxílio direcionado, já que apresentaram maiores dificuldades no manuseio do *software*.

2.4.2 O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais

A dissertação de mestrado da autora Rafaela dos Santos Souza Muniz objetivou “[...] investigar se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função Afim no contexto do Ensino Fundamental II” (MUNIZ, 2019, p. 23).

Nesse sentido, a metodologia de ensino adotada fica evidente: a teoria dos Registros de Representação Semiótica aliada ao uso das Tecnologias Digitais, tendo caráter investigativo.

Os alunos apresentaram um bom desempenho nas atividades selecionadas para a construção do conhecimento acerca de funções afins, em que, novamente, o uso do *software* GeoGebra desponta como um recurso facilitador do processo de aprendizagem dos estudantes. Muniz (2019), ainda destaca que as situações vivenciadas por ela durante a aplicação da sequência revelaram a importância de se explorar a transição entre os registros de representação semiótica, sendo a conversão fundamental para compreensão do conceito de função.

2.4.3 Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças

A dissertação de mestrado do autor Armênio Lannes Xavier Neto teve por objetivo “[...] investigar de que maneira o processo de transformação do artefato função de uma variável real com várias sentenças em instrumento por meio dos registros de representação semiótica teve influência no desenvolvimento cognitivo e aprendizagem dos alunos” (XAVIER NETO, 2016, p. 67).

A metodologia de ensino se apoia na Engenharia didática de Artigue, construída em quatro fases. São elas: análise preliminar, concepção e análise a *priori* das situações didáticas; experimentação; análise a *posteriori* e; avaliação. Pode-se dizer que este trabalho tem atributos de uma sequência didática, visto que conta com a aplicação de atividades a uma turma e análise detalhada das respostas dos alunos. Neste trabalho, também foi utilizado o GeoGebra para auxiliar a construção das respostas dos alunos. Porém, o uso de *softwares* não é um dos objetos principais de estudo.

Tendo em vista o objetivo geral e o tema do trabalho, as respostas dos alunos foram examinadas separadamente, concluindo que “[...] a Gênese instrumental se deu por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização na elaboração dos instrumentos utilizados nas ações desenvolvidas nas atividades dos alunos” (XAVIER NETO, 2016, p. 143). Além disso, Xavier Neto (2016) ressalta que a mobilização entre os registros de representação semiótico algébrico e gráfico viabilizou, ao público-alvo, uma melhor compreensão acerca da construção dos gráficos de funções definidas por mais de uma sentença.

2.4.4 Analogia entre os trabalhos relacionados e a presente pesquisa

A seguir, o Quadro 4 mostra as principais semelhanças e diferenças entre os trabalhos descritos anteriormente e esta pesquisa.

Quadro 4 – Semelhanças e diferenças

ID	Semelhanças	Diferenças
1T	Propôs o ensino de funções definidas por mais de uma sentença como principal objeto de estudo.	Apesar de apresentar mais de dois registros de representação, não utilizou a teoria dos registros de representação semiótica como fundamentação teórica do trabalho.
2T	Propôs a sequência didática com base na teoria dos registros de representação semiótica.	O público-alvo foi uma turma de Ensino Fundamental, utilizando apenas funções do tipo afim.
3T	Propôs o ensino de funções definidas por mais de uma sentença aliada aos registros de representação semiótica, em que a mudança de registro foi fortemente empregada e evidenciada.	A dissertação objetivou verificar de que maneira ocorre a Gênese Instrumental acerca do assunto de funções definidas por mais de uma sentença, se apoiando na Engenharia Didática.

Fonte: Elaboração própria.

Além das diferenças expostas acima, os três trabalhos apresentaram o uso de tecnologias digitais, em que o GeoGebra foi *software* utilizado para auxiliar no desenvolvimento das atividades da sequência.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Buscando esclarecer a escolha dos caminhos metodológicos adotados nesta pesquisa, evidencia-se, novamente, o objetivo geral deste trabalho: Investigar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria de Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença.

Para responder a questão de pesquisa, foi proposta uma intervenção pedagógica que viabilizasse uma melhor compreensão dos elementos de uma função, especialmente o domínio e o conjunto imagem. Buscou-se estruturar uma sequência didática fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica que, a partir da construção e análise de gráficos de funções, os alunos pudessem identificar e dar significados ao domínio e ao conjunto imagem da representação em questão. As funções definidas por mais de uma sentença foram escolhidas como objeto de estudo por serem, muitas vezes, descontínuas, em que a identificação do domínio e do conjunto imagem depende da compreensão do que esses conjuntos de fato representam.

Esta pesquisa foi realizada num colégio da rede estadual de ensino, situado na cidade de Campos dos Goytacazes/RJ. A escolha da referida escola se deu pelo fato de um dos autores já conhecer a professora de matemática do Ensino Médio, e também por nela ter atuado como residente, por meio do Programa de Residência Pedagógica. Os alunos do segundo ano do Ensino Médio foram escolhidos para constituírem o público-alvo, visto que função é um conteúdo que se aborda formalmente a partir do primeiro ano. Os sujeitos da pesquisa constituíram-se de 14 alunos de mesma faixa etária (15 a 17 anos), todos de uma mesma turma. Os autores da presente pesquisa julgaram ser necessário que os alunos já tivessem estudado ao menos função do tipo afim para alcançar o objetivo geral do trabalho.

A presente pesquisa é de caráter qualitativo, tendo por objetivo geral verificar como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica contribui para a aprendizagem do aluno no estudo de gráficos de funções, especialmente os das definidas por mais de uma sentença, além de propor uma intervenção pedagógica para conceder significados aos elementos de funções, a partir da análise de seus gráficos.

As pesquisas na área da Educação Matemática estão utilizando cada vez mais a abordagem qualitativa (BICUDO, 2012). De acordo com Silveira e Córdova (2009, p. 31), “A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.".

Para Damiani *et al*. (2013), pesquisas do tipo intervenção pedagógica

> [...] são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências. (DAMIANI *et al.*, 2013, p. 58).

De acordo com uma pesquisa feita por Damiani *et al.* (2013), ao avaliarem os efeitos da intervenção pedagógica, perceberam que esse tipo de pesquisa propiciou uma aprendizagem construtivista aos universitários participantes do trabalho. Sendo assim, "As pesquisas do tipo intervenção pedagógica são aplicadas, ou seja, têm como finalidade contribuir para a solução de problemas práticos" (DAMIANI *et al.*, 2013, p. 58).

Neste capítulo, disserta-se a respeito da metodologia da pesquisa, sendo dividido em duas seções, descritas das seguintes formas: i) Instrumentos de coleta de dados e; ii) Etapas da Pesquisa.

3.1 Instrumentos de coleta de dados

Os instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa foram: 1) respostas obtidas nas apostilas da sequência didática, especialmente na última, a qual os alunos resolveram todas questões sem intervenção dos autores; 2) observações feitas em sala de aula no decorrer da aplicação e; 3) questionário final.

As anotações e as respostas dadas pelos alunos nas atividades da sequência didática foram analisadas, buscando compreender a percepção dos estudantes acerca dos conteúdos e conceitos apresentados. De acordo com Teixeira (2003), "A análise de dados é o processo de formação de sentido além dos dados, e esta formação se dá consolidando, limitando e interpretando o que as pessoas disseram e o que o pesquisador viu e leu, isto é, o processo de formação de significado" (TEIXEIRA, 2003, p. 191 e 192).

Por meio da participação dos alunos no decorrer da intervenção pedagógica, os autores desta pesquisa puderam observar se a turma, de maneira geral, estava compreendendo os assuntos tematizados. A observação direciona os sentidos para captar coisas ao redor (GERHARDT *et al.*, 2009). “Ela consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar. A técnica da observação desempenha importante papel no contexto da descoberta e obriga o investigador a ter um contato mais próximo com o objeto de estudo” (GERHARDT *et al.*, 2009, p. 74).

O questionário final teve por objetivo permitir que os alunos participantes da intervenção pedagógica avaliassem a sequência didática, bem como identificar se estes conseguiram compreender os conteúdos expostos por meio dos materiais elaborados, além de revelar a aprovação da turma em relação à prática dos autores enquanto tutores. Sua elaboração e objetivos estão descritos na seção seguinte.

De acordo com Gerhardt *et al.*, “O questionário é um instrumento de coleta de dados constituído por uma série ordenada de perguntas que devem ser respondidas por escrito pelo informante, sem a presença do pesquisador” (GERHARDT *et al.*, 2009, p. 69). Ao utilizar esse tipo de coleta de dados, se tem inúmeras vantagens, como por exemplo, obter respostas com riqueza de dados (GERHARDT *et al.*, 2009).

3.2 Etapas da Pesquisa

A pesquisa foi dividida nas seguintes etapas: i) revisão bibliográfica; ii) aprofundamento dos estudos; iii) elaboração da sequência didática; iv) elaboração do questionário final; v) realização do teste exploratório dos materiais elaborados; vi) realização da intervenção pedagógica; vii) discussão dos dados coletados na pesquisa e; viii) escrita monográfica.

A revisão bibliográfica, presente no segundo capítulo desta monografia, foi realizada com o objetivo de buscar publicações científicas relacionadas ao tema deste trabalho, sustentando o desenvolvimento das ações da presente pesquisa.

Para aprofundar os estudos sobre gráficos de funções definidas por mais de uma sentença, apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, foram adotados também outros autores como referência: Damm (2002), Soares (2007), Almeida (2015), Xavier Neto (2016), Pasa (2017), Muniz (2019) e Amorim *et al.* (2020).

Os resultados e discussões dos dados coletados na pesquisa estão detalhados no quarto capítulo. As demais etapas estão expostas nas subseções seguintes.

3.2.1 Elaboração da Sequência Didática

Para Zabala (1998, p.18), sequência didática é “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. A sequência didática utilizada na presente pesquisa é composta por um conjunto de atividades imbricadas umas às outras, propiciando um aprendizado gradual, não suprimindo etapas necessárias para se atingir os objetivos do presente Trabalho de Conclusão de Curso.

Tendo em vista a seguinte questão de pesquisa a ser respondida “Quais as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença?”, foi elaborada uma sequência didática composta por quatro encontros: i) Conjuntos numéricos e intervalos reais (APÊNDICE B); ii) Introdução à função (APÊNDICE C); iii) Função afim e função definida por mais uma sentença (APÊNDICE D) e; iv) Domínio, imagem e construção gráfica de funções (APÊNDICE E).

Todas as aulas e atividades da sequência contaram com diferentes tipos de registros de representação semiótica de um mesmo objeto ou conceito, pois “[...] é através das representações semióticas, que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano” (DAMM, 2012, p. 177).

As apostilas da sequência didática foram desenvolvidas com base nos autores Iezzi; Murakami (2013) e Alves; Guedes; Silva (2018), sendo os conceitos e definições matemáticas retirados de seus livros didáticos. Estas obras estão mencionadas no Plano de Intervenção Pedagógica (APÊNDICE H) e na seção de referências desta monografia. A seguir, estão descritos os objetivos de cada apostila de aula.

Conjuntos numéricos e intervalos reais - Aula I

A primeira apostila é composta por duas seções, em que a primeira trata de conjuntos numéricos e a segunda se refere a intervalos reais. Todas as atividades são acompanhadas de uma breve explicação presente no material sobre o conteúdo em questão, para que o aluno possa relembrá-lo ou aprendê-lo, caso não o tenha visto. Os objetivos desta aula são:

I) Reconhecer os conjuntos numéricos e suas possíveis representações;
II) Compreender a representação dos subconjuntos dos números reais;
III) Representar intervalos abertos, fechados, semiabertos e lineares, utilizando outras possíveis formas de representações de intervalos;
IV) Efetuar a conversão de registros de representação.

A primeira seção pretende atingir os seguintes objetivos:

(i) Identificar conjuntos numéricos;

(ii) Representar conjuntos e subconjuntos numéricos.

A sequência didática será iniciada com a definição de conjunto dos números naturais. Em seguida, os autores da pesquisa irão destacar um exemplo de subconjunto dos números naturais, o qual também estará presente na apostila (Figura 5), descrito em língua natural. Para este primeiro exemplo de subconjunto, os licenciandos mostrarão duas representações no quadro: representação por descrição dos elementos e representação por meio de uma propriedade. Os alunos, por sua vez, deverão escolher uma das maneiras de representar o subconjunto dado como exemplo e registrar na linha de resposta localizada imediatamente abaixo.

Figura 5 – Conjunto e subconjunto dos números naturais

1.1. Conjunto dos Números Naturais (N)

O conjunto dos números naturais é formado pelos números de contagem e o zero. Este conjunto pode ser representado da seguinte forma:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

1.3.1.1. Subconjunto dos números Naturais

Exemplo: Conjunto dos números naturais menores do que 10.

R:____.

Fonte: Elaboração própria.

As definições de conjuntos e seus respectivos exemplos sobre subconjunto dos números inteiros (Figura 6), racionais (Figura 7) e reais (Figura 8) também serão apresentadas da mesma forma dos números naturais, para que o os objetivos (i) e (ii) sejam atingidos.

Figura 6 – Conjunto e subconjunto dos números inteiros

1.2. Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é uma ampliação dos números naturais, sendo composto pela união dos números naturais com os respectivos números simétricos.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

1.2.1. Subconjunto dos números Inteiros

Exemplo: Conjunto dos números inteiros maiores do que - 4 e menores ou iguais a 3.

R:____.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 7 – Conjunto e subconjunto dos números racionais

1.3. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de fração. Contém o conjunto dos números inteiros que, por sua vez, contém os números naturais. Os números que podem ser escritos na forma de fração são: números inteiros, decimais finitos e dízimas periódicas. Os elementos deste conjunto podem ser representados da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

1.3.1. Subconjunto dos números Racionais

Exemplo: Conjunto dos números racionais maiores do que $-\frac{1}{4}$.

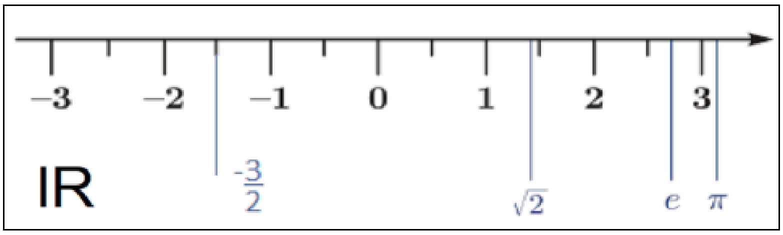
R:____.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 8 – Conjunto e subconjunto dos números reais

1.4. Conjunto dos números reais (IR)

O conjunto dos números reais é dado pela união dos números racionais com os números irracionais. Assim, a união de todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais constitui o conjunto dos números reais. Os números reais podem ser representados por infinitos pontos que formam uma reta numérica infinita:



Fonte: https://www.wikiwand.com/pt/N%C3%BAmero_real.

1.4.1. Subconjunto dos números Reais

Exemplo: Conjunto dos números reais entre -10 e 10.

R:____.

Fonte: Elaboração própria.

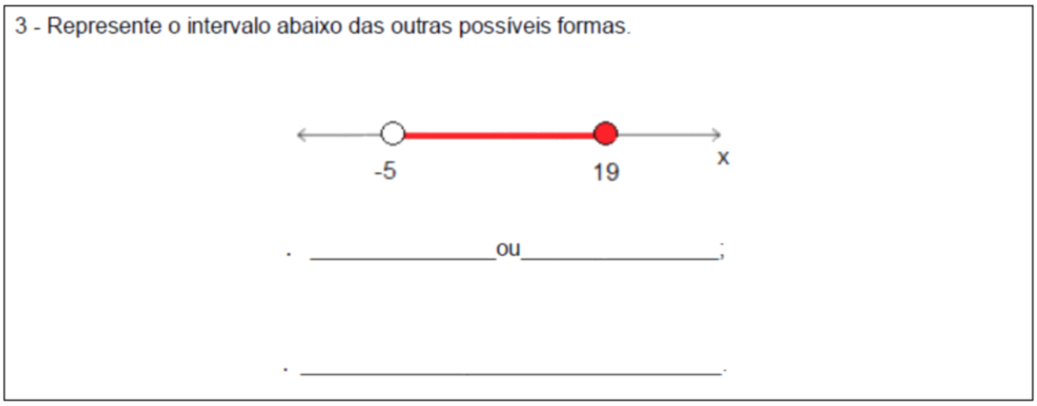
A segunda seção foi elaborada para abordar a temática intervalos reais, tendo os seguintes objetivos:

(i) Identificar os tipos de Intervalos Reais;

(ii) Efetuar a conversão de registros.

O desenvolvimento de intervalos reais se dará com apresentação de intervalo aberto, intervalo fechado, intervalo semiaberto à direita (fechado à esquerda e aberto à direita), intervalo semiaberto à esquerda (fechado à direita e aberto à esquerda), intervalos lineares e suas possíveis representações, pretendendo atingir o objetivo (i). Ao final da explicação sobre cada tipo de intervalo real, os alunos farão um exercício (Figura 9) que, a partir da representação de determinado intervalo dado, deve-se registrar outras possíveis formas de representação, contemplando a conversão de registros, sendo este o objetivo (ii).

Figura 9 – Campos para representação de um intervalo real dado de outras formas



Fonte: Elaboração própria.

Introdução à função - Aula II

A segunda apostila é composta por 4 seções, sendo elas: 1. Plano Cartesiano; 2. Domínio e Imagem; 3. Função; 4. Exercício. Os objetivos desta aula são:

I) Marcar pares ordenados no plano cartesiano;
II) Identificar domínio e imagem de relações;
III) Compreender função como uma relação de dependência unívoca entre duas variáveis;
IV) Efetuar a conversão da língua natural para a escrita algébrica;
V) Utilizar diferentes representações para um mesmo objeto/conceito.

A segunda aula da sequência didática será iniciada com o jogo “Cada um no seu lugar” (Figura 10), que funcionará da seguinte forma:

1) Serão formadas duplas de alunos;
2) Cada dupla receberá um dado cúbico;
3) Em cada dupla formada um aluno será identificado como x e outro como y;
4) Cada integrante da dupla deverá lançar o dado por seis vezes e anotar os números obtidos numa tabela de 6 linhas e 2 colunas, em que as linhas representam as jogadas e as colunas representam os alunos da dupla formada, descritos como x e y;
5) Após os alunos efetuarem as jogadas e as registrarem na tabela, eles deverão fazer a conversão desses pares ordenados para o registro gráfico a partir de marcações no plano cartesiano.

Figura 10 – Jogo “Cada um no seu lugar”

1.1.2. Jogo “Cada um no seu lugar”

No jogo “Cada um no seu lugar”, cada integrante da dupla deve lançar o dado seis vezes e registrar na tabela abaixo os valores obtidos. Um componente da dupla será o “X” e o outro o “Y”. Quem for o “X”, lançará o dado primeiro por seis vezes consecutivas e registrará cada valor obtido na coluna do “x”. Em seguida, quem for o “Y”, lançará o dado também por seis vezes e registrará cada valor obtido na coluna do “y”.

JOGADAS	x	y
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		

Fonte: Elaboração própria.

Os objetivos para o jogo “Cada um no seu lugar” são:

(i) Efetuar a conversão de registros de representação;

(ii) Identificar o domínio e conjunto imagem de uma relação.

Na segunda seção, valendo-se também do jogo, os conceitos de domínio e imagem serão apresentados, em que os valores obtidos para x constituirão o domínio e os de y, a imagem (Figura 11). Vale destacar que neste momento será trabalhado o conceito de domínio e de imagem de uma relação qualquer, podendo esta ser classificada como função ou não, a depender dos valores obtidos nos lançamentos. Para que o objetivo (i) seja atingido, os alunos irão identificar o domínio (Figura 11, item 2.1) e o conjunto imagem (Figura 11, item 2.2) da relação obtida a partir do jogo e representá-los por meio de chaves, descrevendo seus elementos.

Figura 11 - Domínio e imagem de relações

2. Domínio e Imagem

2.1. Domínio

Seja J a relação de X em Y do jogo acima. Chama-se **domínio de J** o conjunto D formado por todos os primeiros elementos (x) dos pares ordenados pertencentes à relação J (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\, y, y \in Y \mid (x, y) \in J$$

a) No jogo acima, qual é o domínio da relação J? Represente o conjunto D por meio de chaves.

R:____

2.2. Imagem

Seja J a relação de X em Y do jogo acima. Chama-se **imagem de J** o conjunto Im de todos os segundos elementos (y) dos pares ordenados pertencentes à relação J (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

$$y \in Im \Leftrightarrow \exists\, x, x \in Y \mid (x, y) \in J$$

b) No jogo acima, qual é a Imagem da relação J? Represente o conjunto Im por meio de chaves.

R:____

Fonte: Elaboração própria.

A terceira seção trata de funções, tendo por objetivos:

(i) Definir função;

(ii) Identificar se as relações representam função;

(iii) Apresentar função como um “máquina”;

(iv) Abordar domínio e conjunto imagem de uma função;

(v) Efetuar mudanças de registros de representação.

A terceira seção será introduzida com a definição de função (Figura 12). Em seguida, os alunos farão uma atividade investigativa (Figura 13), onde eles irão classificar se as relações representam ou não funções. O objetivo dessa atividade é identificar se realmente a definição de função foi compreendida.

Figura 12 – Definição de Função

3. Função

3.1. Definição de Função

Dados dois conjuntos não vazios, a função **f** de um conjunto A para um conjunto B é uma relação entre elementos de A e elementos de B, em que cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018). Notação:

$$f: A \rightarrow B \text{ (} f \text{ é uma função de } A \text{ em } B\text{)}$$

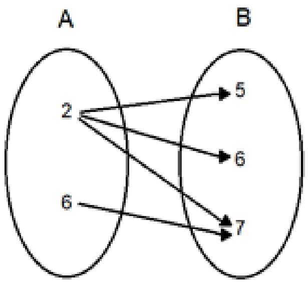
$$x \rightarrow y = f(x) \text{ (lei de associação)}$$

Fonte: Elaboração própria.

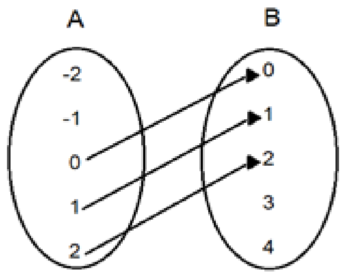
Figura 13 - Exercício para classificar relações como funções ou não

I) Assinale a(s) alternativa(s) que representa(m) função(ões). Nas relações não marcadas, indique o que pode ser alterado para torná-las funções.

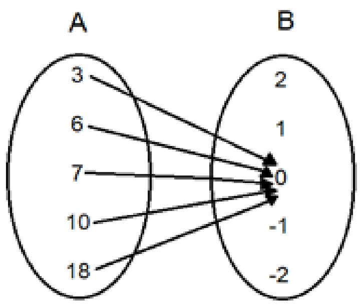
(1)



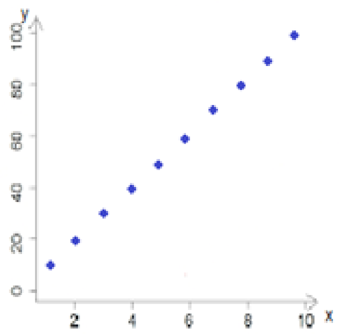
(2)



(3)



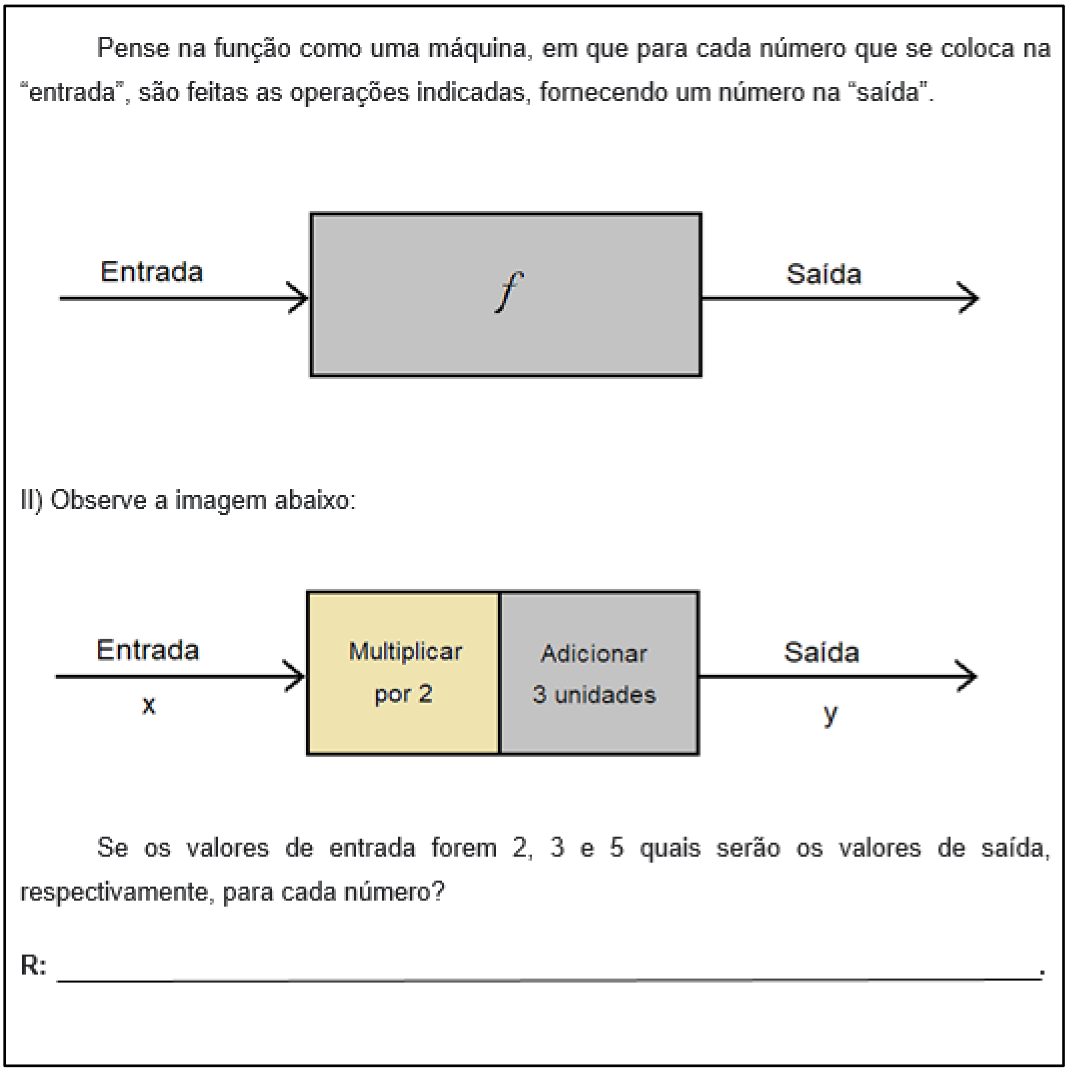
(4)



Fonte: Elaboração própria.

Função também será apresentada como um objeto operador, descrito como uma "máquina”, e os alunos farão uma atividade que números são transformados ao se efetuar as operações indicadas (Figura 14).

Figura 14 – Apresentação de função como uma “máquina”


Pense na função como uma máquina, em que para cada número que se coloca na “entrada”, são feitas as operações indicadas, fornecendo um número na “saída”.

II) Observe a imagem abaixo:

Se os valores de entrada forem 2, 3 e 5 quais serão os valores de saída, respectivamente, para cada número?

R: ____.

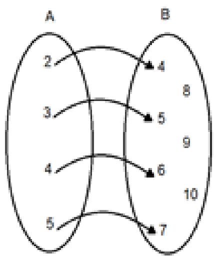
Fonte: Elaboração própria.

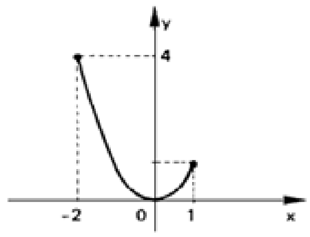
Dando continuidade ao conteúdo, o domínio (Figura 15), contradomínio (Figura 16) e imagem (Figura 17) serão novamente destacados. Desta vez, estes elementos serão evidenciados em funções representadas por diagramas de flechas e gráficos de função. Além disso, em relação às temáticas de domínio e conjunto imagem, os alunos realizarão uma atividade com propósito de identificar o domínio (Figura 15, item I) e o conjunto imagem (Figura 17, item I) a partir da representação gráfica.

Figura 15 – Definição de domínio da função

3.2. Domínio da função: D(f)

Def.: Seja f uma função de A em B ($f: A \to B$). Chamamos de domínio de f (**D(f)**) todos os elementos do conjunto A, que são os valores de x (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).



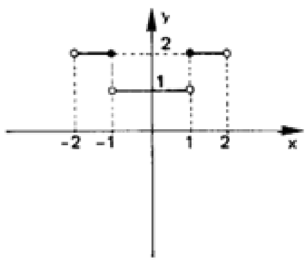


D(f) = {2, 3, 4, 5}

D(f) = {x ∈ IR | -2 ≤ x ≤ 1}

Domínio = conjunto de partida

I) Qual é o domínio da função representada pelo gráfico abaixo?



R:____.

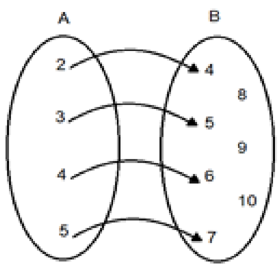
Fonte: Elaboração própria.

Figura 16 – Definição de contradomínio da função

3. Contradomínio e Conjunto Imagem da função

3.3.1. Contradomínio: CD(f)

Def.: Seja f uma função de A em B ($f: A \to B$). Chamamos de contradomínio CD de f todos os elementos de B (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).



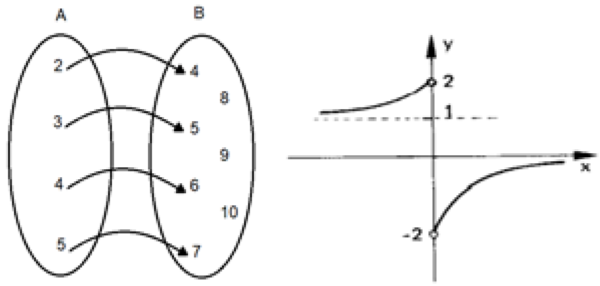
CD(f) = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Fonte: Elaboração própria.

Figura 17 – Definição de Conjunto Imagem da função

3.3.2. Conjunto Imagem da função: Im(f)

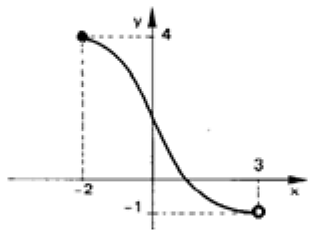
Def.: Seja f uma função de A em B (f: A → B). Chamamos de imagem de f (**Im(f)**) o conjunto dos valores que y pode assumir, de modo que cada valor de x em A esteja relacionado a um único valor de y em B (GUEDES; SILVA; ALVES, 2018).



Im(f) = {4, 5, 6, 7}   Im(f) = {y ∈ R | -2 < y < 0 ou 1 < y < 2}

A imagem é um subconjunto do contradomínio

I) Qual é o conjunto imagem da função representada pelo gráfico abaixo?

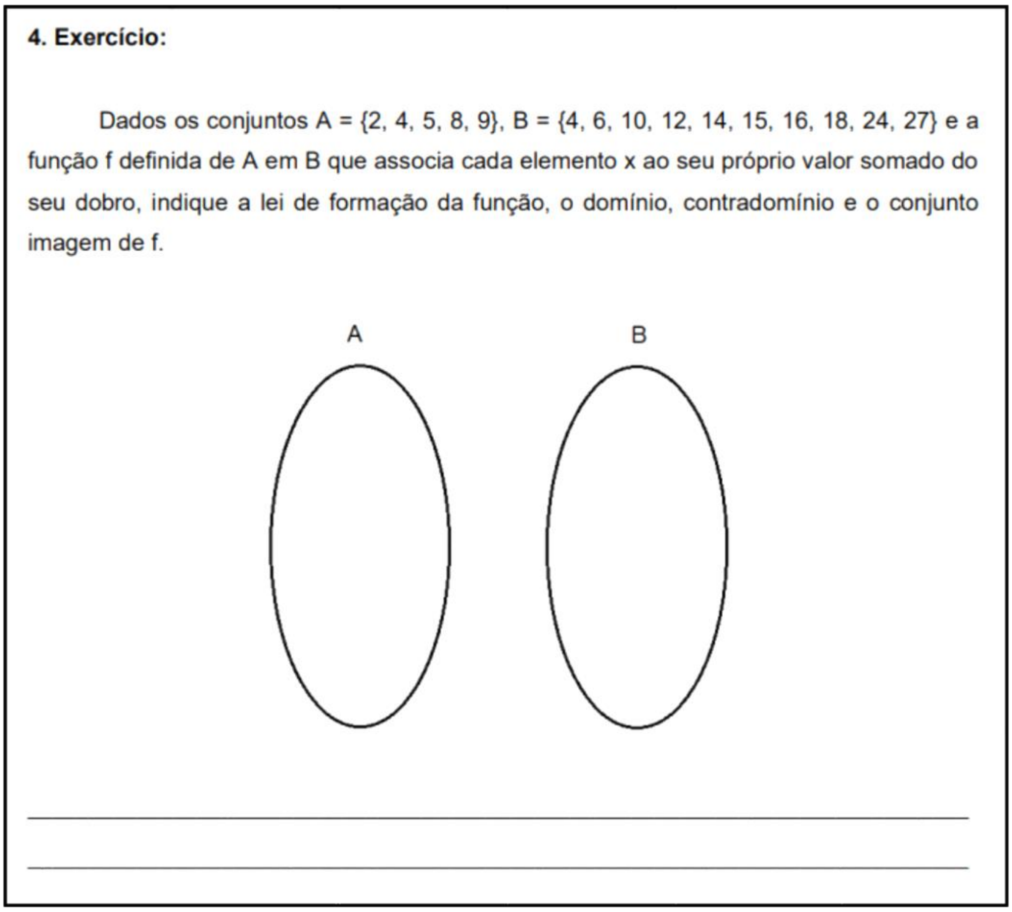


R: ____.

Fonte: Elaboração própria.

A quarta e última seção é composta por um exercício final (Figura 18) para praticar todos os conteúdos abordados na Aula II. A questão envolve a interpretação de uma lei de função afim, a representação da relação por diagrama e a identificação dos elementos constituintes do domínio, contradomínio e da imagem. O objetivo da questão é trabalhar a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico (lei de formação) e, posteriormente, para a representação por diagrama de flechas. A partir do diagrama, os alunos poderão identificar mais facilmente os elementos do domínio, contradomínio e do conjunto imagem.

Figura 18 – Exercício final da Apostila II



4. Exercício:

Dados os conjuntos A = {2, 4, 5, 8, 9}, B = {4, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 24, 27} e a função f definida de A em B que associa cada elemento x ao seu próprio valor somado do seu dobro, indique a lei de formação da função, o domínio, contradomínio e o conjunto imagem de f.

Fonte: Elaboração própria.

Função afim e função definida por mais de uma sentença - Aula III

A terceira apostila é composta por duas seções, uma referente à função afim e a outra sobre função definida por mais de uma sentença.

Os objetivos dessa aula são:

I) Compreender a definição de função afim;
II) Classificar, a partir de um problema dado, a função como discreta ou contínua;
III) Compreender a definição de função definida por mais de uma sentença;
IV) Construir, a partir da lei de formação, gráficos de funções do primeiro grau;
V) Determinar, a partir de gráficos de funções, as sentenças que compõem a lei de formação.

Para iniciar a primeira seção da apostila III, será definida formalmente função Afim, a ser tematizada a partir de um problema que associa determinadas quantidades de pacotes de pão ao valor a ser pago pelo cliente (Figura 19). A partir desta relação, os alunos deverão obter a lei de formação da função, construir o gráfico e identificar o domínio e a imagem, compreendendo a restrição para o domínio da função, caso se use apenas uma sentença para a situação descrita.

Figura 19 – Definição de Função Afim e situação problema.

1. Função afim

1.1. Definição

Função polinomial do 1º grau ou função afim é toda função cuja lei de formação tem forma f(x) = ax + b, com a ≠ 0, em que **a** é chamado de coeficiente angular e **b** coeficiente linear da função (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).

Problema 1: Na padaria de seu José, um pacote de pão fatiado custa R$ 3,00. Durante a pandemia, seu José passou a trabalhar apenas com entrega. Por ser uma padaria localizada num pequeno bairro da cidade, as entregas custam apenas R$ 1,00 para a freguesia local. Não há entregas para fora do bairro. Dadas estas informações:

Fonte: Elaboração própria.

O item a) pede que o aluno complete a tabela, na primeira coluna com quantidades **x** de pacotes de pão e na segunda coluna, com valor total **y** a ser pago pelo cliente em função da quantidade de pacotes comprada (Figura 20).

Figura 20 – Item a) do Problema 1

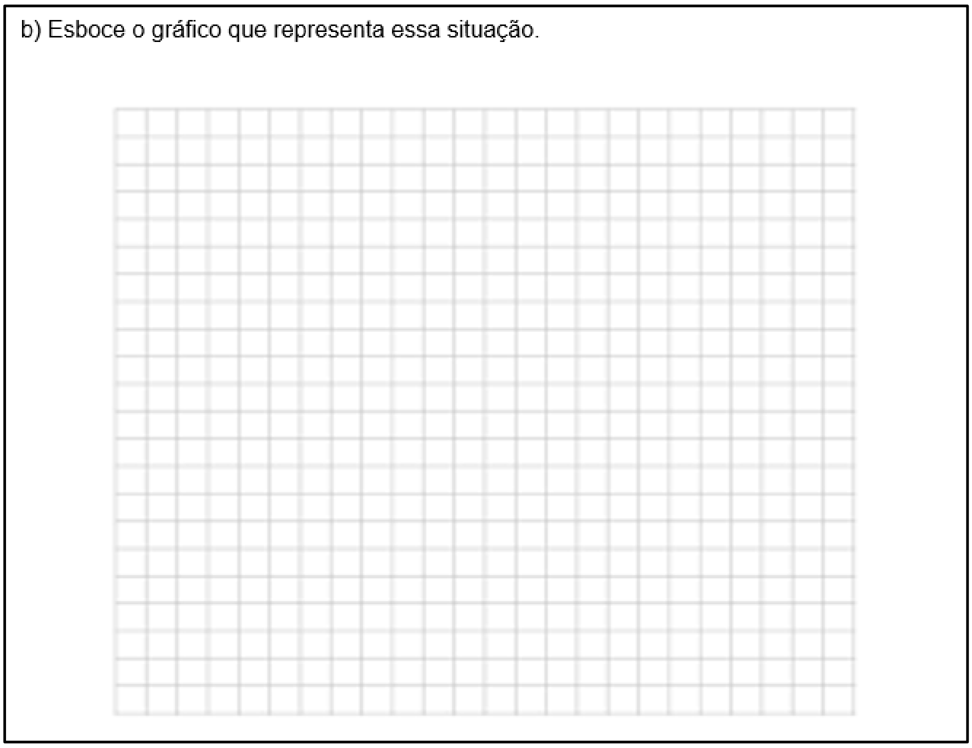
a) Preencha a tabela abaixo que relaciona a quantidade **x** de pacotes de pão com o valor total **y** a ser pago pelo cliente.

Quantidade (x)	Valor total (y)

Fonte: Elaboração própria.

O item (b) solicita ao aluno esboçar o gráfico que representa a situação problema. A partir dos pares ordenados registrados na tabela, os alunos deverão marcar pontos no plano cartesiano, a ser construído na malha quadriculada presente no material (Figura 21).

Figura 21 – Item b) do Problema 1


b) Esboce o gráfico que representa essa situação.

Fonte: Elaboração própria.

No item c) (Figura 22), o aluno terá que identificar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem. Com isso, a turma poderá perceber que todos os elementos do domínio possuem uma imagem única.

Figura 22 – Item c) do Problema 1

c) Qual é o domínio, contradomínio e conjunto imagem desta relação?

____

Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, será possível responder prontamente ao item d) (Figura 23), já que relação contempla os requisitos para ser classificada como função. Este item objetiva fazer com que o aluno perceba que funções podem ser também representadas por gráficos discretos.

Figura 23 – Item d) do Problema 1

d) Esta relação pode ser considerada função? Por quê?

Fonte: Elaboração própria.

O item e) (Figura 24) solicita ao aluno efetuar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico (lei da função).

Figura 24 – Item e) do Problema 1

e) Qual é a lei algébrica que associa a quantidade de pacotes de pão ao valor total?

Fonte: Elaboração própria.

O item f) (Figura 25) objetiva constatar se os alunos compreenderão a restrição para o domínio da função, caso se use apenas uma sentença para a situação descrita. Ou o aluno deve considerar N* como domínio da função, ou considerar N como domínio e determinar outra sentença para quando *x* assumir o valor zero.

Figura 25 – Item f) do Problema 1

f) Esta lei serve para qualquer quantidade de pacotes de pão? Por quê?

Fonte: Elaboração própria.

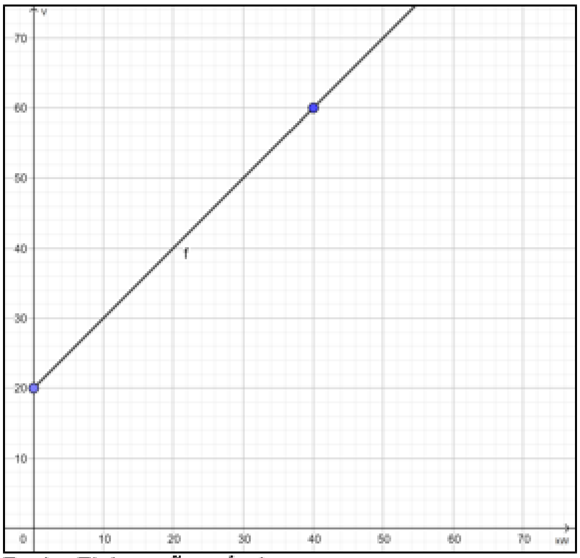
Depois da turma responder ao Problema 1, será apresentada outra situação contextualizada (Problema 2), ainda sobre a temática “Função Afim”. Essa segunda situação problema trata do valor a ser pago por uma conta de luz em função de quilowatts consumidos. O aluno responderá a dois itens, dada representação gráfica da função em questão (Figura 26).

O item a) pede a lei da função, que deve ser descoberta por meio do processo de conversão entre as representações gráfica a algébrica.

No item b), o aluno terá que identificar o domínio e o conjunto imagem a partir da representação gráfica dada.

Figura 26 – Problema 2

Problema 2: Observe o gráfico abaixo que representa o valor (V) a ser pago mensalmente por uma conta de luz, em função de quilowatts (kW) consumidos:



Fonte: Elaboração própria.

a) Qual a lei de formação da função representada pelo gráfico?

___

b) Qual é o domínio e conjunto imagem da função?

___

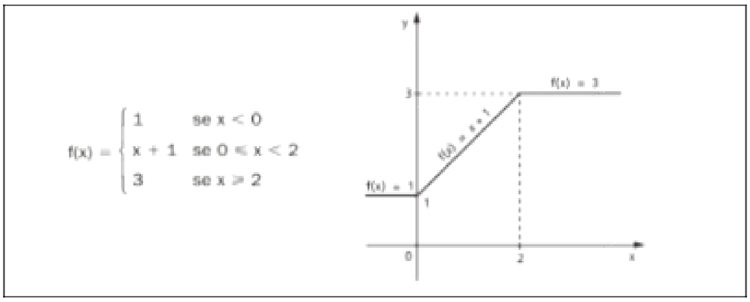
Fonte: Elaboração própria.

Na segunda seção, inicialmente é dada a definição de função definida por mais de uma sentença, em conjunto com uma representação gráfica de uma função, acompanhada das sentenças que constituem sua lei de formação (Figura 27).

Figura 27 – Definição e exemplo de função de várias sentenças

2. Função definida por mais de uma sentença

"Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais está ligada a um domínio D contido no domínio da função." (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 184). Exemplo:



Fonte: IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 184.

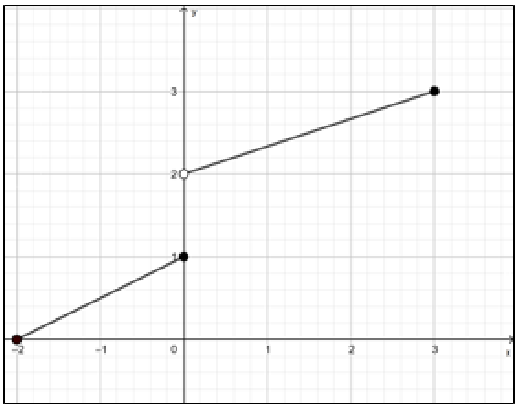
Fonte: Elaboração própria.

Logo após, será abordada a identificação de domínio e conjunto imagem de funções definidas por mais de uma sentença a partir de sua representação gráfica (Figura 28). Por seguinte, haverá três atividades investigativas.

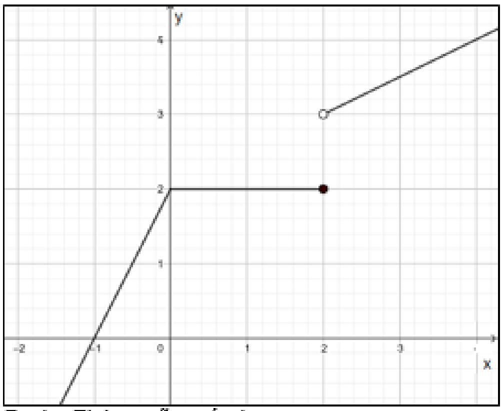
Figura 28 – Domínio e imagem de funções definidas por mais de uma sentença

2.1. Identificando Domínio e Conjunto Imagem

O domínio e o conjunto imagem de uma função definida por mais de uma sentença são dados pela união dos domínios e imagens de cada sentença. Observe:



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

D(f) = [-2 , 3] ; Im(f) = [0 , 1] U] 2 , 3]

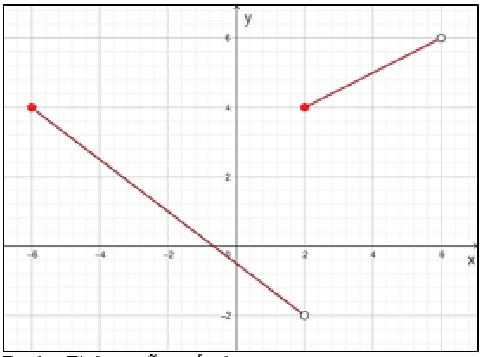
D(g) = ℝ ; Im(g) =] -∞ , 2] U] 3 , +∞ [

Fonte: Elaboração própria.

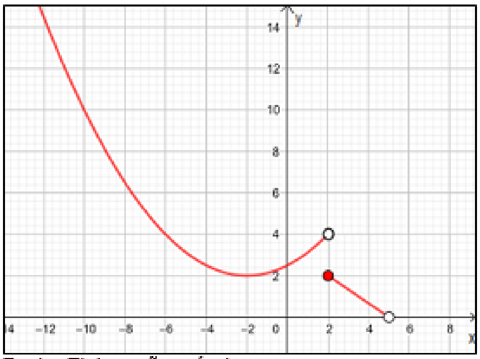
A primeira atividade (Figura 29), tem por objetivo trabalhar a identificação do domínio e conjunto imagem a partir do gráfico da função definida por mais de uma sentença

Figura 29 – Exercício 1 da Apostila III

1- Identifique o domínio e o conjunto imagem dos gráficos abaixo:



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

D(f) =

D(g) =

Im(f) =

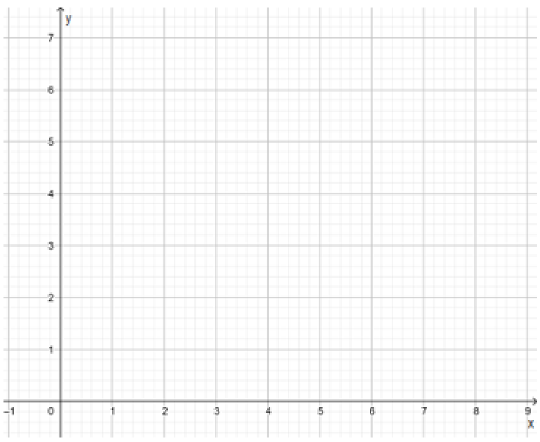
Im(g) =

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda atividade (Figura 30), os alunos deverão fazer o esboço gráfico de uma função definida por mais de uma sentença dados apenas os intervalos de domínio e o conjunto imagem.

Figura 30 – Atividade 2 da apostila III

2- Esboce o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [0 , 6] e cuja imagem é o conjunto [0 , 4] U [5 , 7].



Fonte: Elaboração própria.

Nesta atividade, há infinitas possibilidades de construção gráfica. Essa questão objetiva fazer com que os alunos aprendam a esboçar um gráfico de função que respeite os intervalos de domínio e de imagem expostos pelo enunciado.

Os autores da pesquisa realizarão um procedimento para facilitar o entendimento da construção gráfica, pois espera-se que os alunos apresentem dificuldades para concluir esta atividade sozinhos. O passo a passo consiste em:

a) Marcar sobre o eixo x o intervalo de domínio;

b) Marcar sobre o eixo y os intervalos de conjunto imagem;

c) Efetuar o esboço respeitando apenas estes intervalos, observando a marcação nos eixos x e y;

d) Representar as extremidades dos intervalos fechados por bolinhas fechadas no plano cartesiano;

e) Evidenciar que o esboço realizado até o momento representa uma relação que não é função;

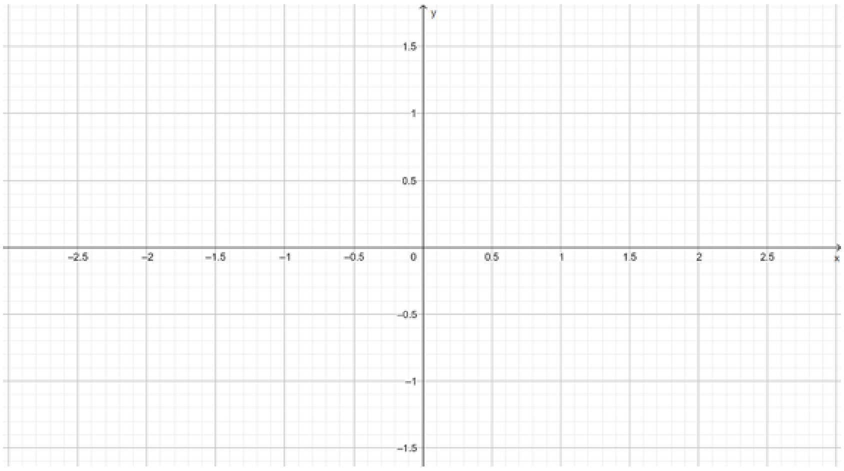
f) Fazer uma mudança no traçado do gráfico, tornando a relação função e respeitando os intervalos de domínio e imagem.

A terceira atividade (Figura 31) propõe o esboço do gráfico da função por meio do processo de conversão, dada a lei algébrica de formação da função definida por mais de uma sentença. Como a função apresenta domínio real, para o registro gráfico, o aluno deverá determinar ao menos dois pares ordenados para cada sentença. Essa questão objetiva trabalhar a conversão do registro algébrico para o gráfico.

Figura 31 – Esboço de um gráfico de função a partir das sentenças da lei de formação

3- Construa o gráfico da função definida por mais de uma sentença abaixo, explicitando seu domínio e conjunto imagem.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 + x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$



Fonte: Elaboração própria.

Para a conclusão da segunda seção, o Problema 3 (Figura 32), composto por três itens, será utilizado para contextualizar tudo que foi apresentado ao decorrer da aula III.

Figura 32 – Problema 3 da Aposltila III

Problema 3: Um piloto realiza um teste de segurança num veículo durante 1 minuto, procedendo da seguinte forma:

- Nos 10 primeiros segundos, acelera até atingir 40 km/h, mantendo esta velocidade até os 20 segundos;
- Em seguida, acelera até 120 km/h, percebendo que atinge esta velocidade aos 30 segundos de teste;
- Posteriormente, reduz a velocidade, atingindo, aos 40 segundos, 80 km/h;
- Mantém a velocidade a 80 km/h até o final do teste.

Obs.: O veículo possui um dispositivo que mantém constante a aceleração imposta pelo piloto.

Fonte: Elaboração própria.

Para responder ao item a), o aluno terá que interpretar a situação dada em língua natural e converter para o registro gráfico. Os demais itens serão resolvidos a partir do item a).

Figura 33 – Item a) do Problema 3

a) Esboce o gráfico **v** (Km/h) **x** **t** (s).

Fonte: Elaboração própria.

O item a) (Figura 33) objetiva desenvolver a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico.

Já o item b) (Figura 34) tem por objetivo exercitar a identificação do domínio e conjunto imagem a partir da representação gráfica.

Figura 34 – Item b) do Problema 3

b) Dê os intervalos do domínio e do conjunto imagem expostos no gráfico.

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, o item c) (Figura 35) objetiva reforçar o processo de conversão do registro gráfico para o algébrico, pois de acordo com Duval (2009), é nesse sentido de conversão que os alunos apresentam maiores dificuldades.

Figura 35 – Item c) do Problema 3

c) Identifique as sentenças que compõem a lei de formação desta função.

R:

Fonte: Elaboração própria.

Nesta apostila, a conversão de registros será trabalhada de três maneiras: registro gráfico para registro algébrico; registro algébrico para registro gráfico e; registro em língua natural para registro gráfico e, em seguida, para registro algébrico (Problema 3).

Domínio, Imagem e Construção gráfica de função - Aula IV

Esta última apostila é composta apenas por questões, sendo utilizada para avaliação da aprendizagem. Há seis atividades que remetem todos os conteúdos trabalhado nas aulas anteriores. Para esta aula, os objetivos são:

I) Reconhecer o gráfico de uma função a partir de suas sentenças;
II) Relacionar o tipo de gráfico (discreto ou contínuo) ao domínio da função;
III) Identificar os elementos que tornam duas funções iguais;
IV) Esboçar o gráfico a partir da lei de formação de função;
V) Determinar um gráfico de função a partir dos intervalos de domínio e de conjunto imagem.

A primeira questão (Figura 36) objetiva:

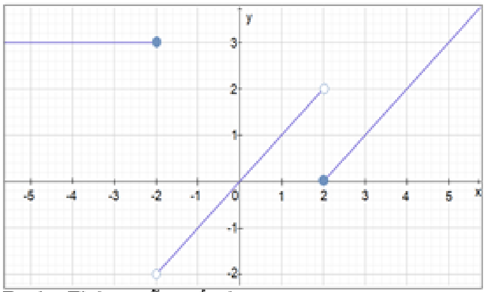
(i) Identificar a representação gráfica da função definida por mais de uma sentença;

(ii) Efetuar a mudança do registro algébrico para o gráfico.

Figura 36 – Questão 1 da apostila IV

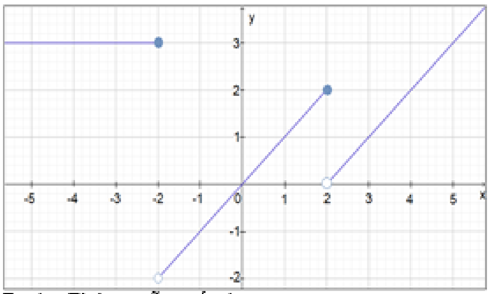
1 - Considere a função f definida pela lei f(x) = $\begin{cases} 3, se\ x < 2 \\ x, se\ -2 \leq x < 2 \\ x-2, se\ x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa que representa o gráfico da função f.

(a)



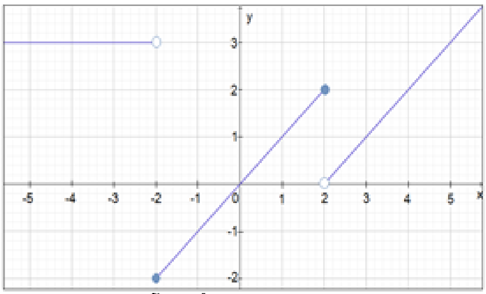
Fonte: Elaboração própria.

(b)



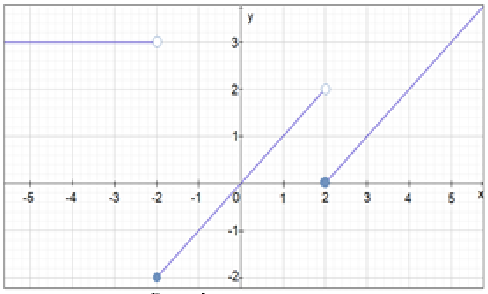
Fonte: Elaboração própria.

(c)



Fonte: Elaboração própria.

(d)



Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

A questão fornece a lei da função **f** definida por mais de uma sentença e solicita ao aluno marcar a representação gráfica correspondente à função. Há quatro alternativas, apenas uma fornece a reposta correta. Os gráficos se diferem apenas pelo tipo de intervalo representado para cada sentença (aberto ou fechado), bastando o aluno analisar as desigualdades presentes na lei algébrica de formação e associar cada uma das sentenças a cada parte do gráfico.

A segunda questão (Figura 28) tem por objetivos:

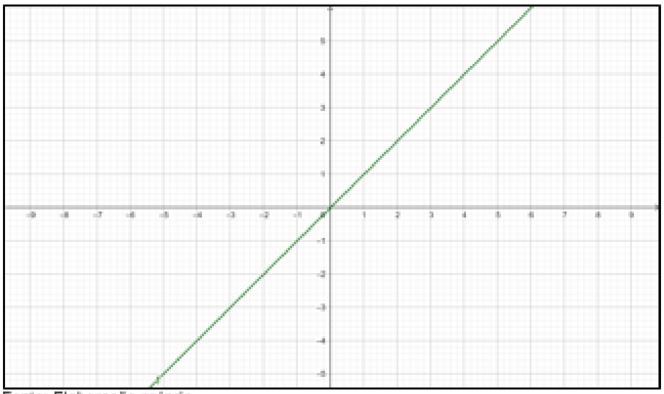
(i) Identificar o domínio da função;

(ii) Compreender a diferença entre as representações gráficas.

Figura 37 – Questão 2 da apostila IV

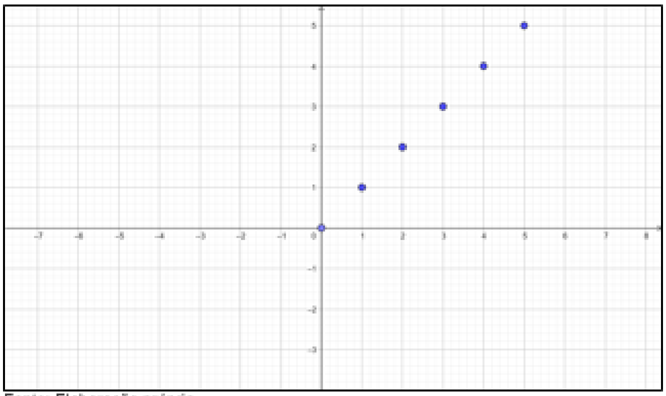
2- Observe os gráficos representados abaixo das funções **f** e **g**, que possuem as mesmas leis de formação **f(x) = x** e **g(x) = x**:

Gráfico 1



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 2



Fonte: Elaboração própria.

As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

____

____

Fonte: Elaboração própria.

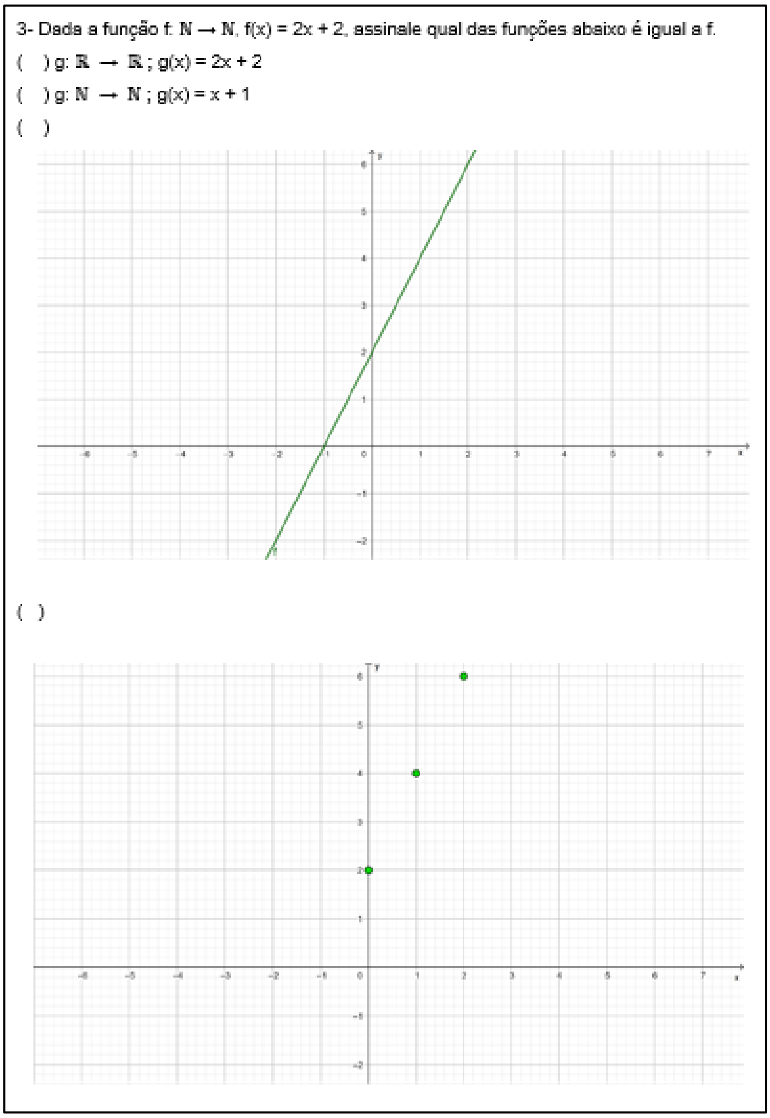
A questão traz duas representações gráficas de uma mesma lei de função e pergunta o que difere uma representação da outra. O aluno precisará observar que um gráfico representa uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o outro representa uma função de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ou seja, o que difere as representações gráficas dessas funções que apresentam uma mesma lei algébrica de formação são seus domínios e suas imagens.

A terceira questão (Figura 38) pretende contemplar os seguintes objetivos:

(i) Identificar o que torna duas funções iguais;

(ii) Efetuar a mudança do registro algébrico para o gráfico.

Figura 38 – Questão 3 da apostila IV



Fonte: Elaboração própria.

A questão pede que seja assinalada a alternativa que apresenta uma função igual a f: ℕ → ℕ, representada algebricamente (f(x) = 2x + 2). Dentre as quatro alternativas, só uma está correta. As duas primeiras alternativas estão no mesmo registro de representação (registro algébrico, lei de formação da função) e as duas últimas alternativas em outro registro (registro gráfico). Como a primeira e a segunda alternativas estão no mesmo registro de representação, será mais fácil identificar que elas não representam uma função exatamente igual a f, já que a primeira apresenta uma função definida de ℝ → ℝ e a segunda representa uma função que possui a lei algébrica diferente.

Portanto, restará analisar as duas últimas alternativas. Observando ambos os gráficos, será necessário compreender as interferências do domínio e do contradomínio em seus esboços.

A penúltima alternativa apresenta uma função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o que a torna diferente da função exposta pelo enunciado. A última alternativa apresenta uma função de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, restando o aluno verificar se o gráfico possui a mesma lei algébrica de formação, sendo esta a resposta correta.

A quarta questão (Figura 39) objetiva:

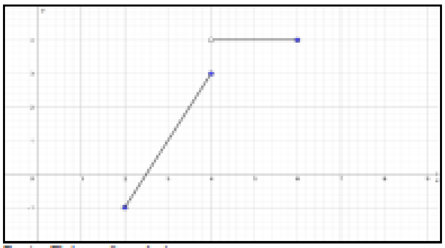
(i) Identificar o domínio e conjunto imagem;

(ii) Representar o domínio e conjunto imagem.

Figura 39 – Questão 4 da apostila IV

4- Determine o domínio e o conjunto imagem das funções representadas pelos gráficos abaixo:

a)



Fonte: Elaboração própria.

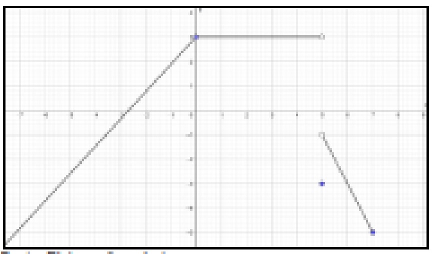
R:____

b)

Fonte: Elaboração própria.

R:____

c)



Fonte: Elaboração própria.

R:____

Fonte: Elaboração própria.

A quarta questão é composta por três itens. Em cada item há uma representação gráfica de função, tendo o aluno que identificar o domínio e o conjunto imagem e representá-los no campo abaixo. Para resolução do problema, o aluno deverá pensar numa sobreposição dos gráficos nos eixos x e y, revelando, assim, o domínio e a imagem, respectivamente.

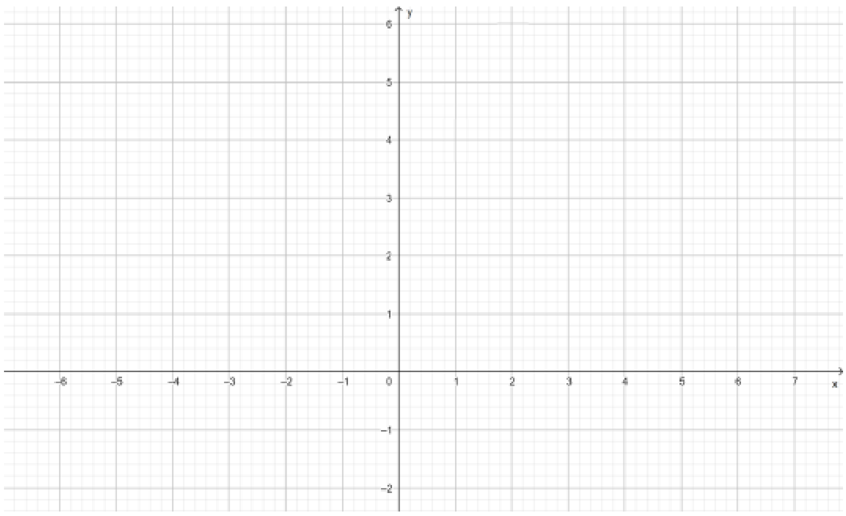
A quinta questão (Figura 40) propõe os seguintes objetivos:

(i) Esboçar o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença;

(ii) Efetuar a conversão de registros.

Figura 40 – Questão 5 da apostila IV

5- Esboce o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f(x) = $\begin{cases} -x, se\ x < -2 \\ 2, se\ -2 \leq x \leq 3 \\ x - 1, se\ x > 3 \end{cases}$.



Fonte: Elaboração própria

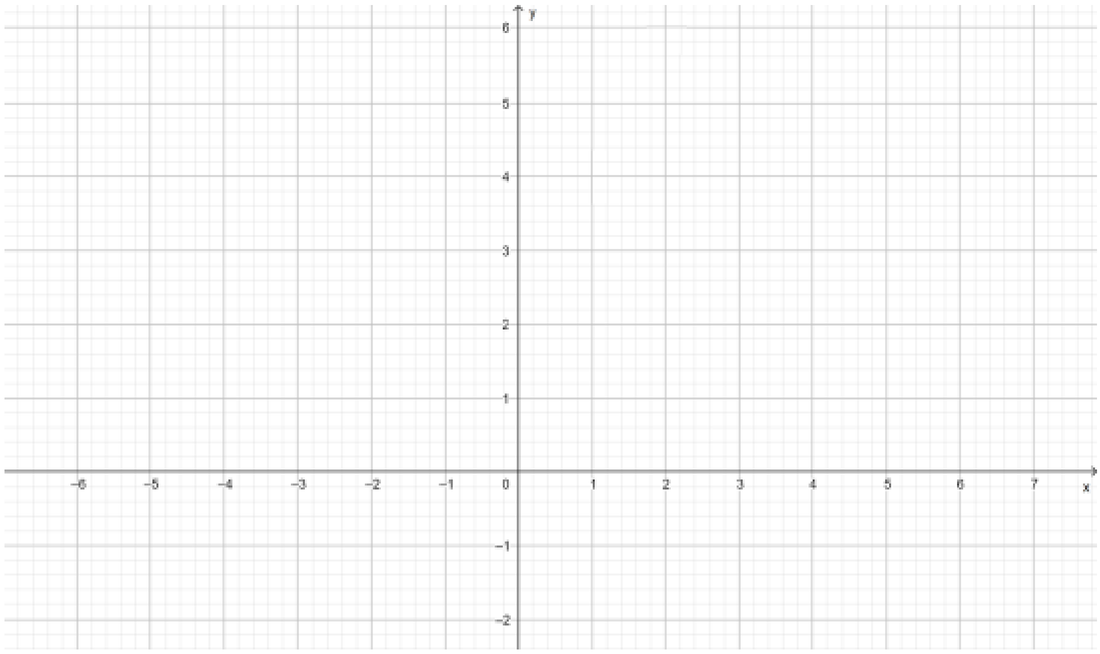
A quinta questão solicita ao aluno construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença, dada a lei algébrica de formação, composta por três sentenças. Para construir o gráfico da função, será necessário determinar ao menos dois pares ordenados referentes a cada sentença, já que a representação será formada por retas, pelo fato de cada sentença ser função do tipo afim ou constante, além estar definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A sexta questão (Figura 41) tem por objetivo:

(i) Esboçar o gráfico de uma função real a partir do domínio e do conjunto imagem dado.

Figura 41 – Questão 6 da apostila IV

6- Esboce o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [-6 , 7] e cuja imagem é o conjunto [-2 , 3] U [4 , 6].



Fonte: Elaboração própria.

A sexta e última questão solicita a construção gráfica da função a partir dos intervalos de domínio e de conjunto imagem. O aluno deverá pensar num esboço gráfico que não apenas respeite os intervalos expostos pelo enunciado, mas também que se classifique como função. Para isso, o aluno deverá se lembrar do passo a passo apresentado na aula anterior para construção do gráfico.

3.2.2 Elaboração do Questionário Final

Para a coleta de dados, além da análise das respostas obtidas na sequência didática e observação da turma, foi produzido o “Questionário Final” (APÊNDICE F), para que o público-alvo concedesse avaliações referentes à sequência didática, na primeira seção, e à atuação dos autores da pesquisa enquanto tutores, na segunda seção.

A primeira seção é composta por sete itens, dentre os quais dois dependem das respostas dadas aos itens que os antecedem e há um outro para sugestões de modificações na sequência.

O primeiro item é uma pergunta fechada, objetivando identificar se a turma possuiu dificuldades em compreender algum conteúdo tematizado. Caso o aluno tenha marcado “sim”, ele deverá registrar no item 1.1.1 as suas dificuldades (Figura 42).

Figura 42 – Itens 1.1 e 1.1.1 do Questionário Final

1. Avaliação da Sequência Didática

1.1. Você teve dificuldades para compreender algum conteúdo que foi abordado?

( ) Sim
( ) Não

1.1.1. Caso sua resposta tenha sido “Sim” à pergunta anterior, informe quais foram as suas dificuldades.

____

____

____

____

Fonte: Elaboração própria.

O item 1.2 (Figura 43) é uma pergunta fechada que objetiva verificar se as aulas ministradas contribuíram para o aprendizado da turma. Em seguida, no item 1.3 (Figura 44), é solicitado ao aluno destacar em que sentido as aulas da sequência didática contribuíram ou deixaram de contribuir para seu aprendizado (Figura 44).

Figura 43 – Item 1.2 do Questionário Final

1.2. As aulas ministradas contribuíram para o seu aprendizado?

( ) Sim
( ) Não

Fonte: Elaboração própria.

Figura 44 – Item 1.3 do Questionário Final

1.3. Destaque em que sentido a sequência didática contribuiu ou deixou de contribuir para o seu aprendizado.

____

____

____

____

Fonte: Elaboração própria.

Os itens 1.4 e 1.4.1 são perguntas fechadas, que objetivam identificar se os alunos apresentavam dificuldades nos conteúdos abordados antes da aplicação da sequência. Caso o aluno marque a opção “sim”, ele deverá responder se as dificuldades foram sanadas totalmente, parcialmente ou se não foram sanadas (Figura 45).

Figura 45 – Itens 1.4 e 1.4.1 do Questionário Final

1.4. Em relação aos conteúdos que foram abordados, você apresentava alguma dificuldade anteriormente à aplicação da sequência?

( ) Sim
( ) Não

1.4.1. Caso sua resposta tenha sido “Sim” à pergunta anterior, essa dificuldade foi sanada?

( ) Totalmente
( ) Parcialmente
( ) Não foi sanada

Fonte: Elaboração própria.

O item 1.5 (Figura 46) é uma pergunta aberta que objetiva obter sugestões dos alunos em relação à sequência didática.

Figura 46 – Item 1.5 do Questionário Final

1.5. Caso haja algo que queira sugerir para a sequência, fique à vontade para anotar abaixo.

Fonte: Elaboração própria.

A segunda seção é composta por três itens, dentre os quais um depende da resposta fornecida ao item antecedente, havendo também um item para sugestões nas atuações dos autores.

O item 2.1 é uma pergunta fechada que objetiva verificar se as explicações feitas pelos autores foram claras e suficientes para o aprendizado da turma. Em seguida, no item 2.1.1, os alunos que tiverem marcado a opção “Em partes” ou a opção “Não” deverão registrar o que não ficou claro e/ou insuficientemente abordado no decorrer da aplicação da sequência didática (Figura 47).

Figura 47 – Itens 2.1 e 2.1.1 do Questionário Final

2. Avaliação dos Licenciandos

2.1. Você considera que as explicações feitas pelos licenciandos foram claras e suficientes?

( ) Sim
( ) Em partes
( ) Não

2.1.1. Caso sua resposta tenha sido “Em partes” ou “Não”, discrimine o que não ficou claro e/ou insuficientemente abordado para você.

Fonte: Elaboração própria.

O item 2.2 (Figura 48), último item do Questionário Final, é uma pergunta aberta que deixa os alunos livres para escreverem aos autores, contribuindo com sugestões, fazendo comentários, críticas, elogios e etc.

Figura 48 – Item 2.2 do Questionário Final

2.2. Se houver algo que queira escrever para os professores em formação (sugestões, críticas, elogios), fique à vontade para anotar abaixo.

Fonte: Elaboração própria.

Também foi elaborado o Termo de Consentimento (APÊNDICE A), a ser preenchido pela turma, permitindo aos autores deste trabalho utilizarem na pesquisa as respostas obtidas em todos os instrumentos de coleta de dados.

3.2.3 Realização do Teste Exploratório

Para o Teste Exploratório, o público alvo foi composto pelos alunos da Licenciatura em Matemática matriculados no componente curricular TCC III, do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos-Centro. No dia 08 de março de 2022, foi enviado um e-mail para estes licenciandos, quatorze no total, contendo o Termo de Consentimento (APÊNDICE A), as quatro apostilas da sequência didática (APÊNDICES B, C, D, E) e o Questionário Final (APÊNDICE F).

As respostas e considerações dos participantes do Teste Exploratório sobre os referidos materiais foram relatadas no "Questionário – Teste Exploratório" (APÊNDICE G), elaborado na plataforma *Google Forms*[1] para tal registro, a ser acessado por meio de um *link*, presente no mesmo e-mail enviado. A data limite estabelecida para o retorno foi 11 de março de 2022.

[1] O Google Forms, disponível em www.google.com/forms, é uma ferramenta que permite coletar e organizar informações por meio de formulários *on-line*.

Após o término do prazo para o envio das respostas, os dados coletados foram examinados, para que pudessem ser realizadas as devidas correções nos materiais. Vale ressaltar que dos quatorze convidados, somente sete concluíram o teste exploratório. As respostas e considerações fornecidas por estes participantes encontram-se na quarta seção deste trabalho.

3.2.4 Realização da Intervenção Pedagógica

As atividades da sequência didática e o questionário final, destacados nas subseções anteriores, serão respondidos em ao menos dois encontros por alunos de um Colégio Estadual, localizado na cidade de Campos dos Goytacazes. Como exposto anteriormente, os alunos do segundo ano do Ensino Médio foram escolhidos para elencar o público alvo da intervenção pedagógica, pelo fato dos autores julgarem ser necessário que a turma já tivesse visto o conteúdo de funções de maneira geral, mesmo que superficialmente. Os pesquisadores acreditam que, dessa forma, a construção do conhecimento acerca dos elementos de funções, a serem verificados a partir de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença, será favorecida.

É importante destacar que as apostilas referentes às Aulas I, II e III serão respondidas em conjunto com a turma, em que os autores darão explicações sobre as definições e conceitos e, posteriormente, os alunos concluirão cada exercício sozinhos. Em seguida, as questões serão corrigidas no quadro. Porém, os autores irão solicitar aos alunos manterem suas respostas e anotações iniciais.

A aplicação da quarta apostila se diferirá das demais, pois não haverá explicações prévias à resolução das atividades pela turma. Os alunos responderão as questões com base no conhecimento construído nos encontros antecedentes. Por haver a pretensão de realizar uma discussão e explicação das questões desta última apostila, após seu recolhimento, os autores preferem classificar o encontro também como aula, e não apenas como um encontro para a realização de uma atividade final.

De acordo com a professora da turma de aplicação, quatorze alunos participarão da intervenção pedagógica. Espera-se que os participantes contribuam para o presente Trabalho de Conclusão de modo que seja possível responder à seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença?

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

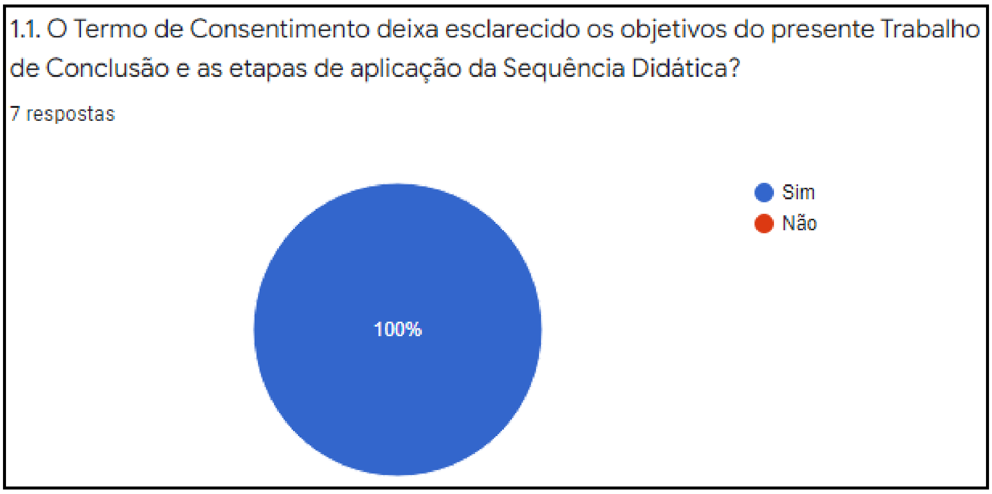
4.1 Teste Exploratório

A seguir, estão evidenciadas as respostas e resultados obtidos no Teste Exploratório.

O questionário (APÊNDICE G) utilizado para o registro das considerações dos participantes do teste, elaborado no *Google Forms*, foi composto por três seções.

A primeira seção conteve apenas uma pergunta sobre o Termo de Consentimento, documento a ser assinado pelos alunos participantes da intervenção pedagógica, permitindo a utilização das respostas na pesquisa. Os sete participantes do Teste Exploratório responderam que o Termo de Consentimento deixou esclarecido os objetivos do presente Trabalho de Conclusão e as etapas de aplicação da sequência didática (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Questão 1.1 do Teste Exploratório sobre Termo de Consentimento



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Porém, no campo localizado imediatamente abaixo, reservado para sugestões, dois participantes fizeram as seguintes ressalvas, sendo elas acatadas:

- *"Explicitar, no cronograma, o tempo de aplicação de cada atividade.";*

- *"No termo de consentimento senti falta da definição do público-alvo e dar cores padronizadas dos e-mails de contato."*

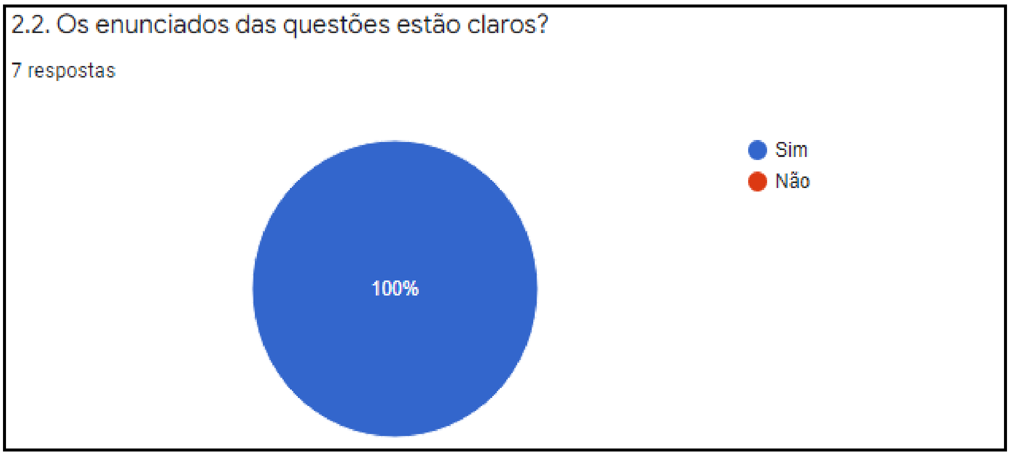
A segunda seção se referiu à sequência didática. Em resposta à primeira pergunta, todos os sete participantes concordaram que a sequência estava de acordo com os objetivos do trabalho (Gráfico 2). Não houve ressalvas no campo seguinte, destinado às sugestões.

Gráfico 2 – Questão 2.1 do Teste Exploratório sobre a Sequência Didática

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão da segunda seção, apesar dos sete participantes acreditarem que os enunciados das questões estavam claros (Gráfico 3), foram dadas sugestões em relação a edição da Aula I, tais como utilizar maior espaçamento entre os campos de respostas e cores iguais dos intervalos reais representados por retas. Estas sugestões também foram acatadas.

Gráfico 3 – Questão 2.2 do Teste Exploratório sobre os enunciados das questões

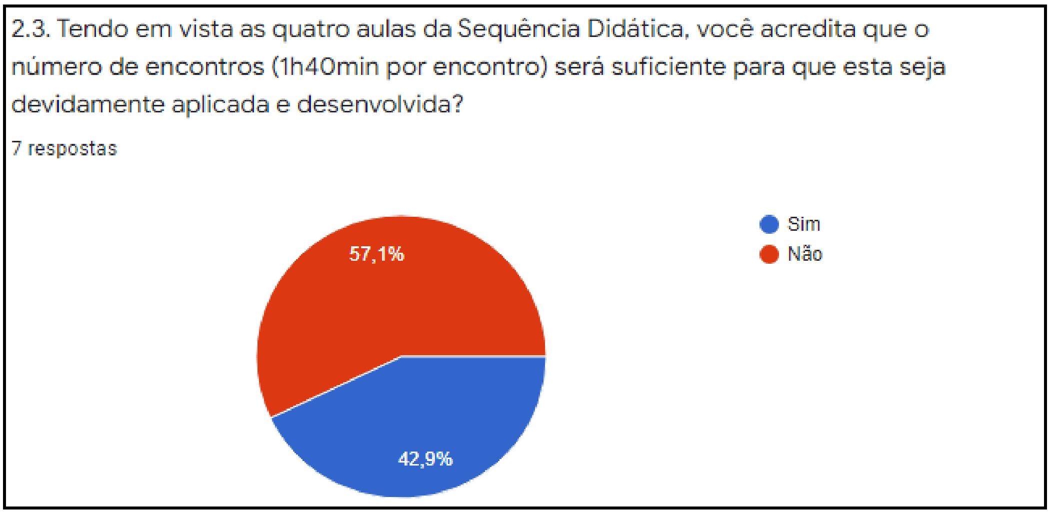


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ainda na segunda seção, foi feita uma pergunta relacionada à duração da aplicação da sequência. Os participantes dividiram opinião sobre quantidade de encontros (Gráfico 4).

Quatro dentre os sete respondentes julgaram ser necessário ao menos um encontro para a aplicação de cada aula, ou seja, quatro encontros, já que a sequência didática foi dividida em quatro aulas.

Gráfico 4 – Questão 2.3 do Teste Exploratório sobre a quantidade de encontros

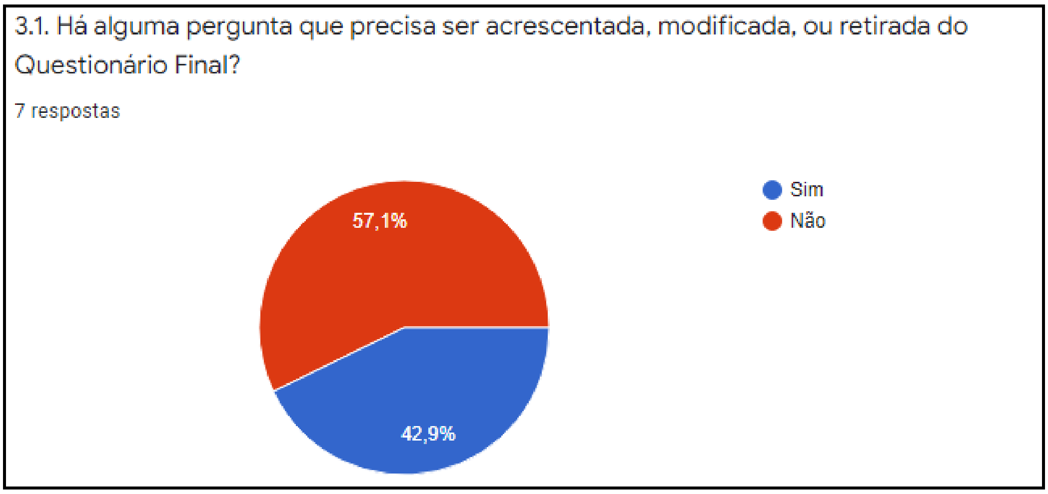


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em conversas com a professora da turma de aplicação, ficou decidido que, a princípio, seriam feitos dois encontros. Caso faltasse tempo, seria combinado um ou mais encontros extras, em datas a definir com a turma. Dessa forma, foi adicionado ao cronograma presente no Termo de Consentimento, "Encontro(s) extraordinário(s)", sem data pré-determinada.

A terceira seção se referiu ao Questionário Final, contendo apenas uma pergunta sobre a necessidade de modificações nesse material. Quatro licenciandos julgaram ser necessário fazer algumas modificações no Questionário Final (Gráfico 5).

Gráfico 5 – Questão 3.1 do Teste Exploratório sobre o Questionário Final



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois participantes anotaram as seguintes sugestões:

- *“No item 1.1.1 pedir para os alunos evidenciarem quais foram as dificuldades.”;*

- *“Vocês perguntam no item 1.2 se as aulas ministradas contribuíram para o aprendizado, mas não deixa um espaço para escrever sobre isso. É importante que quem respondeu "sim" diga em que sentido aquilo foi bom e quem respondeu "não" também justifique o porquê.”.*

Os autores julgaram que estes seriam questionamentos importantes a se fazer. Portanto, perguntas nesse sentido foram acrescentadas ao Questionário Final.

A quarta e última seção foi composta por uma pergunta aberta, que deixava os participantes livres para dar sugestões ou acrescentar algo que não estivesse evidenciado nas seções anteriores. Não houve sugestões extras, apenas elogios ao material produzido.

4.2 Aplicação da Sequência Didática

Esta seção exibe a aplicação da sequência didática, em ordem cronológica, evidenciando a atuação dos professores e os procedimentos metodológicos realizados, havendo algumas diferenças entre o planejamento e a execução destes. Algumas respostas dos alunos foram destacadas, porém a análise dos resultados da intervenção pedagógica e as observações estão devidamente relatadas na seção seguinte (Observação).

Diferentemente do planejado, a sequência foi aplicada no decorrer de quatro encontros, cada um com duração de 100 minutos, sendo necessários dois encontros extraordinários. No Quadro 5, estão evidenciadas as datas dos encontros e as atividades realizadas.

Para manter o sigilo de identidade dos sujeitos da pesquisa, estes foram descritos como A1, A2, A3, ..., A14. Essa identificação dos alunos se deu a partir da disposição destes em sala, observada pelos autores no primeiro encontro. Por exemplo, o aluno A2, ocupava o segundo lugar na fileira da direita, olhando do quadro em direção ao fundo da sala.

Como a professora cedeu seus tempos de aula, todos os 14 alunos estiveram presentes nos encontros destinados à intervenção pedagógica. Porém, o aluno A13 pediu para ser liberado mais cedo no segundo e terceiro encontros.

Quadro 5 – Datas dos encontros e atividades realizadas

Atividades desenvolvidas	Data do Encontro	Duração
Preenchimento do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	22/03/2022	10 min
Aplicação da Aula I da sequência didática	22/03/2022	90 min
Aplicação da Aula II da sequência didática	24/03/2022	100 min
Aplicação da Aula III da sequência didática	29/03/2022	100 min
Aplicação da Aula IV da sequência didática	31/03/2022	80 min
Aplicação do Questionário Final	31/03/2022	20 min

Fonte: Elaboração própria

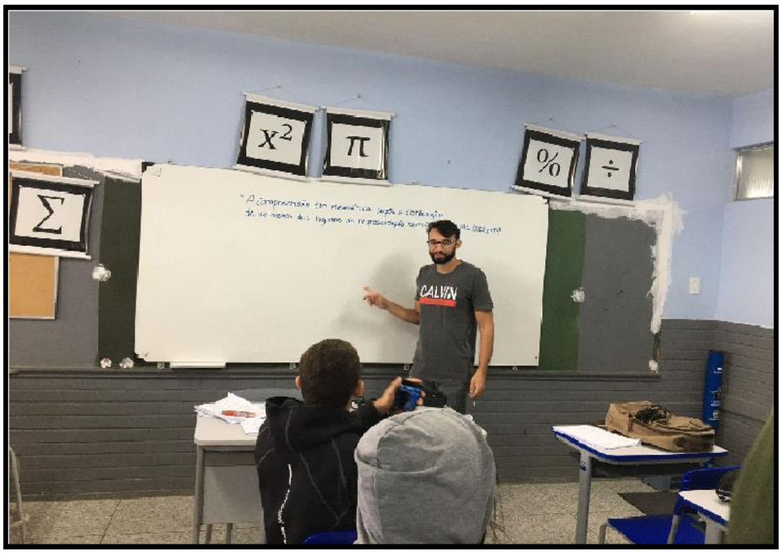
Primeiro encontro – 22 de março de 2022

O primeiro encontro contou com a presença dos quatorze alunos. Os conteúdos abordados foram conjuntos numéricos e intervalos reais. Esta aula objetivou relembrar esses assuntos, visto que seria necessário compreendê-los para fazer análises nos gráficos e leis algébricas de funções.

Antes de dar início à primeira aula da intervenção pedagógica, os autores apresentaram-se à turma. Em seguida, foi entregue o “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” (APÊNDICE A) para que os quatorze alunos presentes assinassem, permitindo a utilização de suas respostas na presente pesquisa. Logo após, foi distribuída a primeira apostila da sequência didática, sobre conjuntos numéricos e intervalos.

Para explicar o tema da pesquisa, a Teoria dos Registros de Representação foi evidenciada (Figura 49). Os autores utilizaram a seguinte frase do autor Raymond Duval para fundamentar e explicitar os objetivos das aulas: “A compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.” (DUVAL, 2003, p. 15).

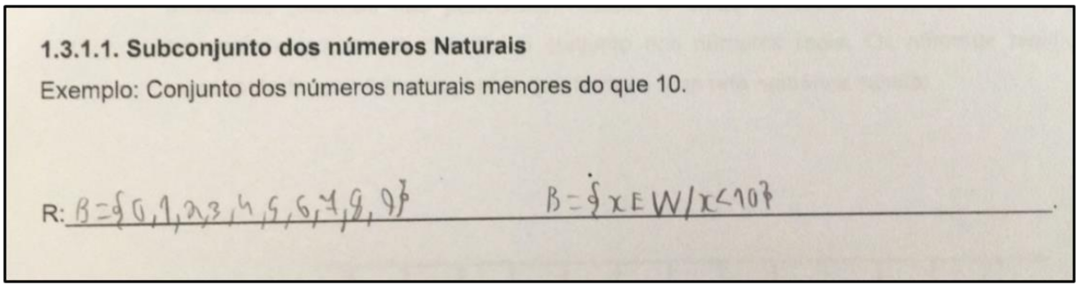
Figura 49 – Exposição da Teoria dos Registros de Representação



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Seguindo a primeira apostila (APÊNDICE B), conjuntos numéricos foi o assunto introdutório. Inicialmente, perguntou-se aos alunos se eles lembravam os conjuntos numéricos e as formas de representá-los. Nenhum aluno se lembrou de todos os conjuntos numéricos, tampouco de suas formas de representação. A partir daí, foi apresentado o conjunto dos números naturais e sua definição. Logo em seguida, os pesquisadores expuseram um exemplo de subconjunto dos números naturais presente em apostila, pedindo para os alunos copiarem a resposta para esse primeiro exemplo (Figura 50), objetivando destacar algumas formas de representações existentes para conjuntos e subconjuntos.

Figura 50 – Exemplo de subconjunto dos números naturais, resposta de A13



1.3.1.1. Subconjunto dos números Naturais

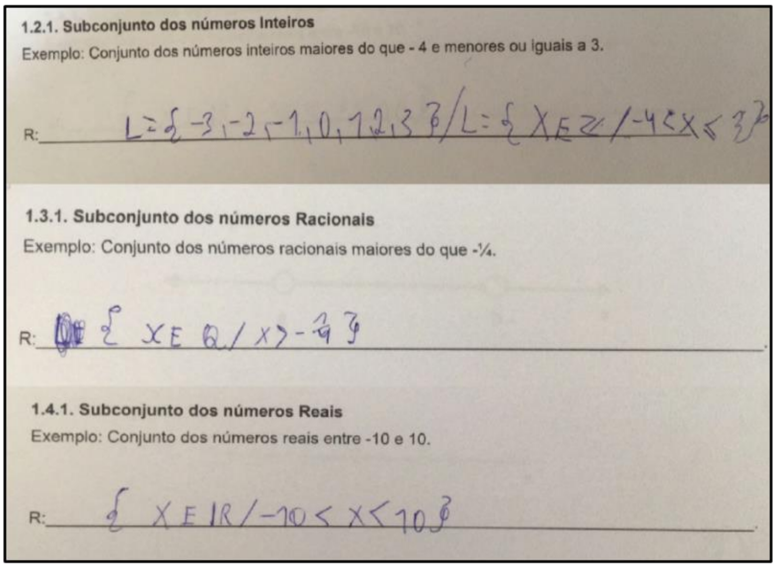
Exemplo: Conjunto dos números naturais menores do que 10.

R: $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $B=\{x \in \mathbb{N} / x<10\}$.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dando prosseguimento à aula, abordou-se sobre conjuntos dos números Inteiros, Racionais e Reais, em que para cada um desses conjuntos foi dado um exemplo de subconjunto (Figura 51), solicitando à turma representá-los. Dessa vez, os alunos ficaram livres pra escolher o tipo de representação mais adequado.

Figura 51 – Subconjuntos dos números Inteiros, Racionais e Reais, resposta de A4


1.2.1. Subconjunto dos números Inteiros

Exemplo: Conjunto dos números inteiros maiores do que - 4 e menores ou iguais a 3.

R: $L = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} / L = \{x \in \mathbb{Z} / -4 < x \leq 3\}$

1.3.1. Subconjunto dos números Racionais

Exemplo: Conjunto dos números racionais maiores do que -¼.

R: $\{x \in \mathbb{Q} / x > -\frac{1}{4}\}$

1.4.1. Subconjunto dos números Reais

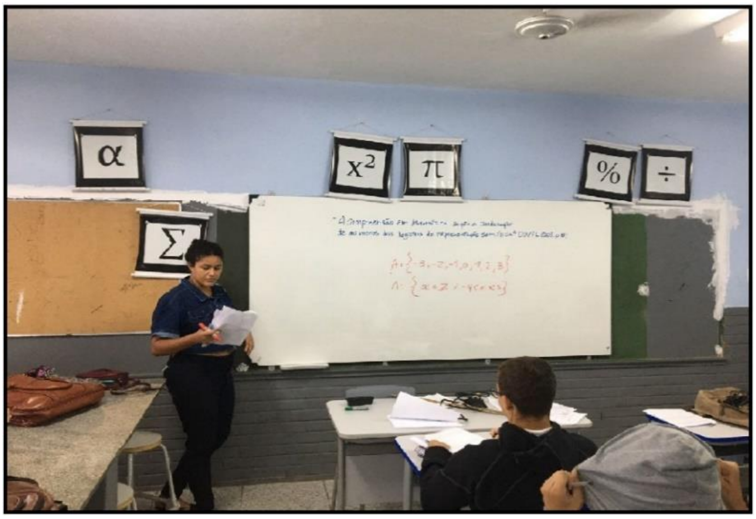
Exemplo: Conjunto dos números reais entre -10 e 10.

R: $\{x \in \mathbb{R} / -10 < x < 10\}$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os números irracionais não foram apresentados em forma de conjunto na apostila, porém, eles foram mencionados em aula pelos autores. Após os alunos tentarem responder aos itens, foram destacadas no quadro as representações de todos os exemplos dados de subconjuntos (Figura 52).

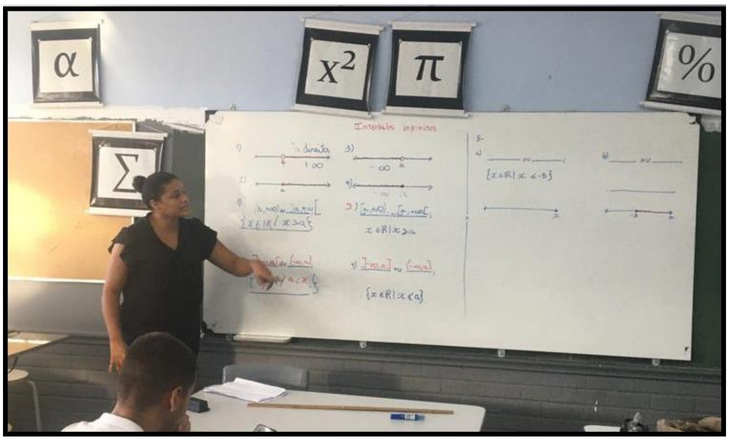
Figura 52 – Correção do exemplo de subconjunto dos números inteiros



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a apresentação de um exemplo de subconjunto dos números reais, foi iniciado o conteúdo de Intervalos Reais. Os intervalos foram explicados na seguinte ordem: intervalo aberto, intervalo fechado, intevalo aberto à direita, intervalo aberto à esquerda e intervalos lineares, descritos na apostila como “intervalos infinitos” (Figura 53), apresentando-se também seus diferentes tipos representação.

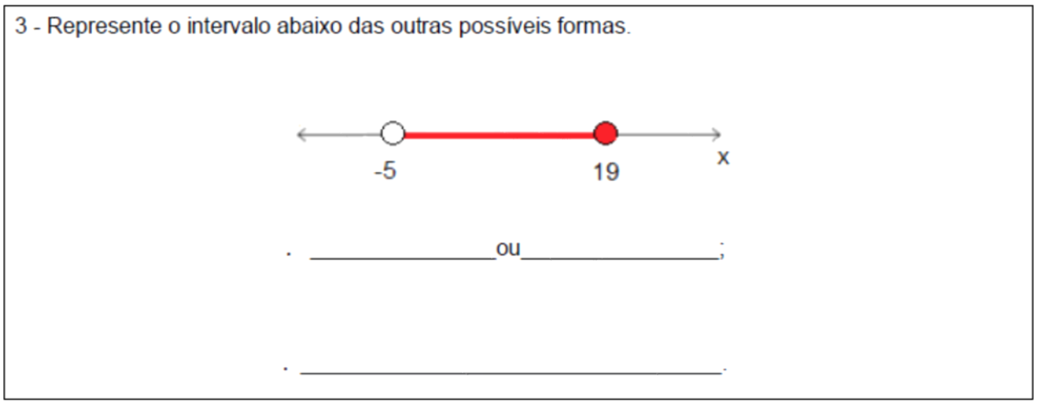
Figura 53 – Explicação de intervalos lineares



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final da explicação sobre determinado tipo de intervalo e destaque para suas formas de representação, os alunos responderam questões que solicitavam outros tipos de representação de um intervalo dado (Figuras 54 e 55), presentes na segunda seção da Apostila II, referente a intervalos reais. Houve um exercício para cada tipo de intervalo apresentado.

Figura 54 – Campos para representação de um intervalo real dado de outras formas



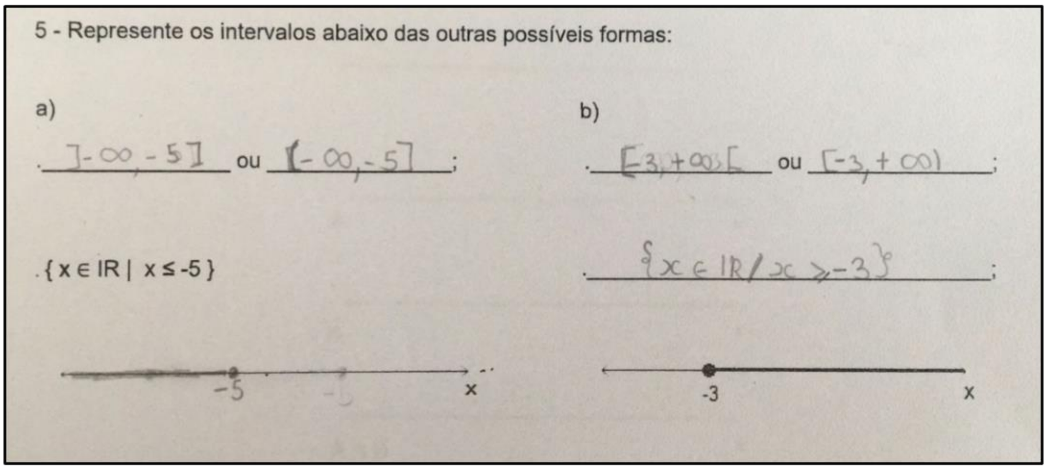
3 - Represente o intervalo abaixo das outras possíveis formas.

. ______________ou______________;

. ______________________________.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 55 – Diferentes representações de um intervalo linear dado, resposta de A9



Fonte: Protocolo de pesquisa.

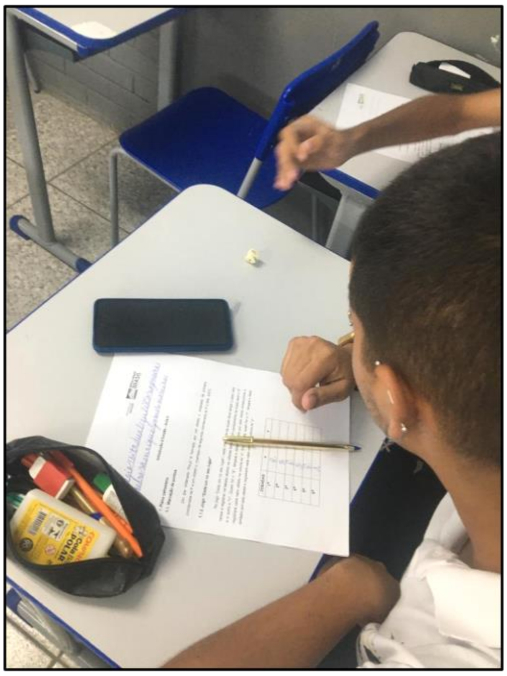
Nesse momento, contemplou-se os processos de formação e conversão de registros, destacados pela TRRS. Ao final de cada atividade, após um tempo estipulado em aproximadamente 5 minutos para os alunos as realizarem, foram feitas as correções destas no quadro.

Segundo encontro – 24 de março de 2022

O segundo encontro contou com a presença dos 14 alunos. Porém, o aluno A13 pediu para ser liberado mais cedo. Nesta aula, abordou-se função.

Antes de iniciar a Aula II, foi entregue a apostila sobre função (APÊNDICE C). Em seguida, os pesquisadores pediram para os alunos formarem duplas. Em todas as duplas formadas, um integrante foi identificado como *x* e o outro como *y*. Por seguinte, foram distribuídos dados cúbicos, um para cada dupla, para que o jogo “Cada um no seu lugar” pudesse ser realizado. Cada integrante da dupla lançou o dado por seis vezes e preencheu a tabela com os valores encontrados (Figura 56).

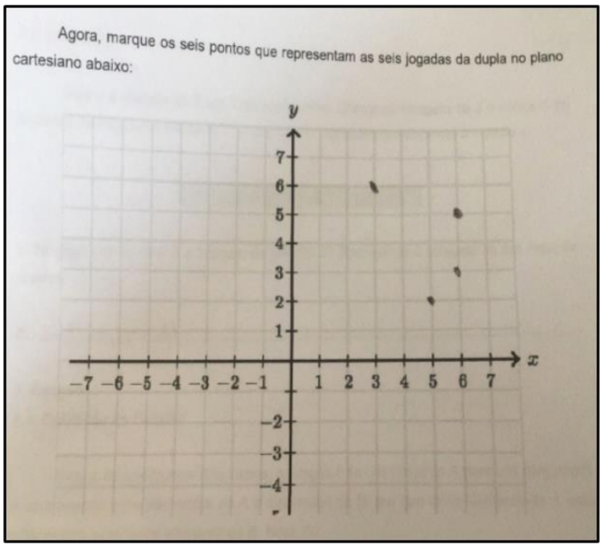
Figura 56 – Dupla de alunos executando o jogo “Cada um no seu lugar”



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os pares ordenados formados pelos lançamentos de cada dupla foram marcados no plano cartesiano presente em suas apostilas (Figura 57).

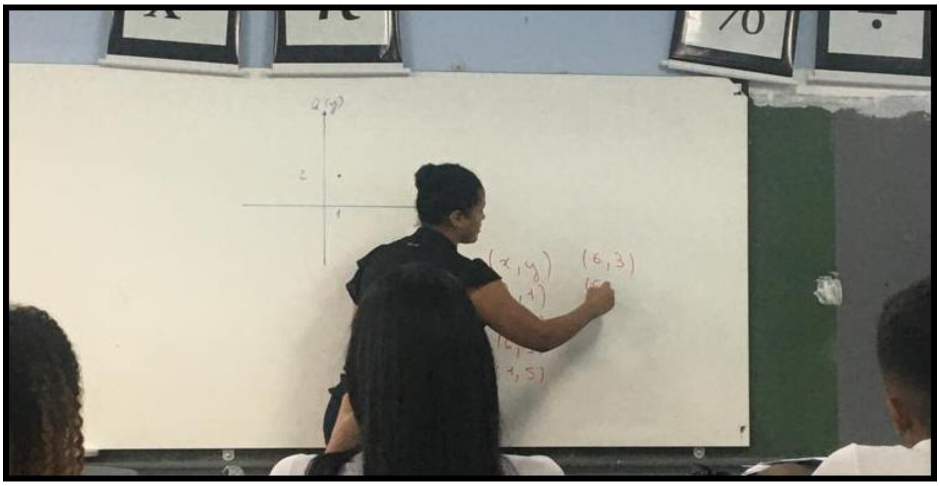
Figura 57 – Representação das jogadas no plano cartesiano feita por A7



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, os pesquisadores foram ao quadro e pediram para que cada dupla falasse um de seus pares ordenados obtidos na jogada. Dessa forma, por haver sete duplas, foram anotados sete pares ordenados pela autora Quéren (Figura 58), os quais foram marcados num plano cartesiano construído na lousa.

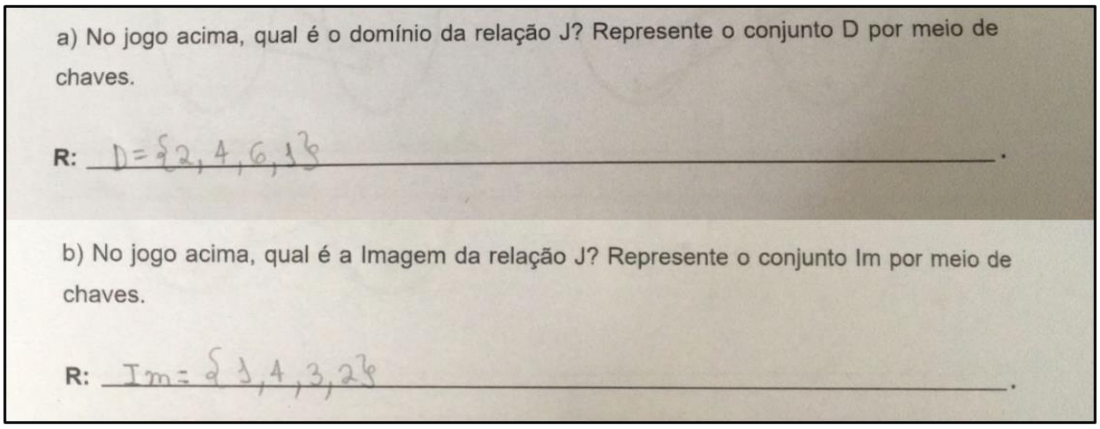
Figura 58 – Marcação de pontos no plano cartesiano



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi apresentado aos alunos o conceito de domínio e a imagem de relações a partir do jogo "Cada um no seu lugar". Os valores anotados na coluna x foram identificados como o domínio, e os valores da coluna y identificados como imagem (Figura 59)

Figura 59 – Identificação do domínio e da imagem obtida no jogo feita por A9



a) No jogo acima, qual é o domínio da relação J? Represente o conjunto D por meio de chaves.

R: D={2, 4, 6, 1}.

b) No jogo acima, qual é a Imagem da relação J? Represente o conjunto Im por meio de chaves.

R: Im= {1, 4, 3, 2}.

Fonte: Protocolo de Pesquisa.

O jogo contemplou a conversão de registros por duas vezes. A primeira mudança de registro se deu a partir dos pares ordenados descritos numericamente na tabela para o registro gráfico. Para efetuar a segunda conversão, o aluno poderia utilizar a tabela ou gráfico para descrever os elementos do domínio e da imagem.

Dando continuidade à aula, após os alunos terminarem as atividades sobre domínio e conjunto imagem, os autores destacaram e explicaram a definição formal de função (Figura 60). Foi exposto que para uma relação ser classificada como função, cada elemento *x* do conjunto de partida (domínio da função) precisaria estar associado a um único elemento *y* do conjunto de chegada (contradomínio da função).

Figura 60 – Definição de função

3. Função

3.1. Definição de Função

Dados dois conjuntos não vazios, a função **f** de um conjunto A para um conjunto B é uma relação entre elementos de A e elementos de B, em que cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018). Notação:

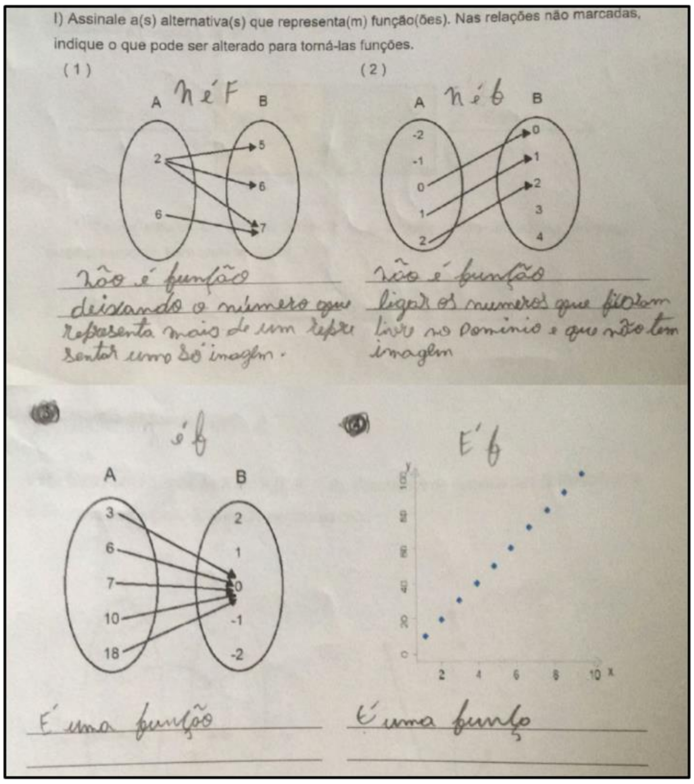
$$f: A \rightarrow B \text{ (}\mathbf{f}\text{ é uma função de } A \text{ em } B\text{)}$$

$$x \rightarrow y = f(x) \text{ (lei de associação)}$$

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, dadas as explicações sobre as características de uma função, duas questões foram respondidas. Na primeira questão, os alunos deveriam assinalar quais alternativas representavam funções, apresentando possíveis mudanças às que não fossem, a fim de torná-las funções (Figura 61).

Figura 61 – Classificação das relações como funções ou não, resposta de A1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

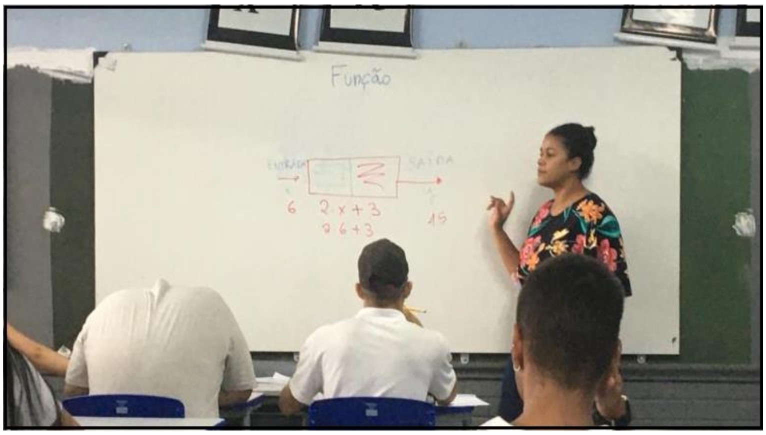
Após o término do tempo estipulado em aproximadamente 10 minutos, foi feita a correção no quadro pelos pesquisadores (Figura 62). O autor Igor procedeu perguntando à turma se cada relação se classificava ou não como função, pedindo as justificativas. O último item foi explicado mais detalhadamente, evidenciando que para todo valor *x* do domínio havia um único correspondente *y* no contradomínio, o que caracterizava a relação como função.

Figura 62 – Identificação de funções

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão (Figura 63), a autora Quéren apresentou função aos alunos como uma “máquina”, na qual são feitas as operações matemáticas pré-determinadas, em que para cada valor de entrada haveria um único valor de saída. Foram dados três valores de entrada e pedidos os seus respectivos valores de saída aos alunos.

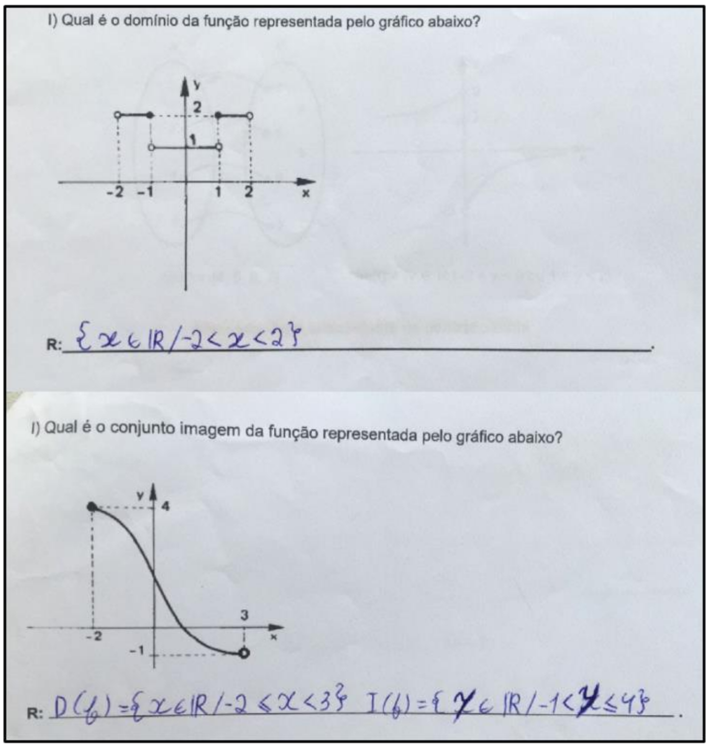
Figura 63 – Apresentação de função como uma "máquina"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, domínio, contradomínio e conjunto imagem de função foram conceituados. Logo após a estas definições, os alunos responderam às atividades, uma relacionada ao domínio e outra ao conjunto imagem. Foi dado o registro gráfico e, por meio do processo de conversão, foram anotadas as formas algébricas do domínio e do conjunto imagem (Figura 64).

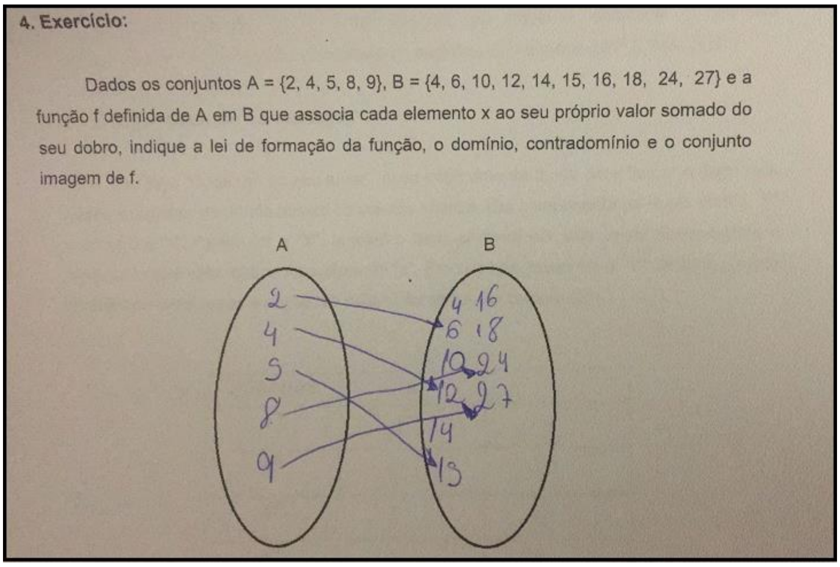
Figura 64 – Obtenção do domínio e da imagem a partir dos gráficos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como desfecho, a aula contou com um exercício (Figura 65) que envolveu tudo o que fora abordado na apostila. Foi estipulado um tempo de 10 minutos para que os alunos pudessem resolvê-lo. Em sequência, o exercício foi corrigido no quadro.

Figura 65 – Exercício final



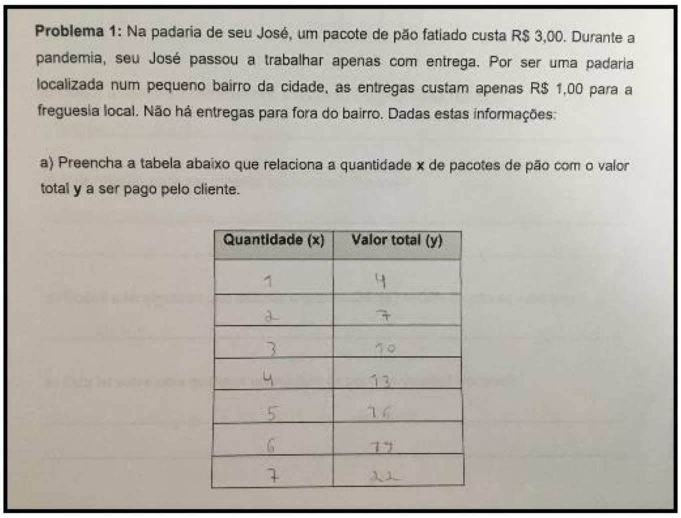
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Terceiro encontro – 29 de março de 2022

O terceiro encontro foi dedicado à Aula III, que tratou sobre função afim e função definida por mais de uma sentença. Todos os quatorze alunos estiveram presentes, porém, novamente o aluno A13 pediu para ser liberado mais cedo. Após receberem a apostila, a aula foi iniciada com a explicação da definição de função afim.

Este conceito foi exemplificado por meio do "Problema 1" (Figura 66), no qual os alunos preencheram uma tabela que relacionou a quantidade *x* de pacotes de pães com o valor *y* a ser pago pelo cliente, havendo um custo fixo de entrega. Além disso, os alunos esboçaram gráfico desta situação, identificando o domínio e o conjunto imagem da relação (Figura 67).

Figura 66 – Problema 1, resposta de A5



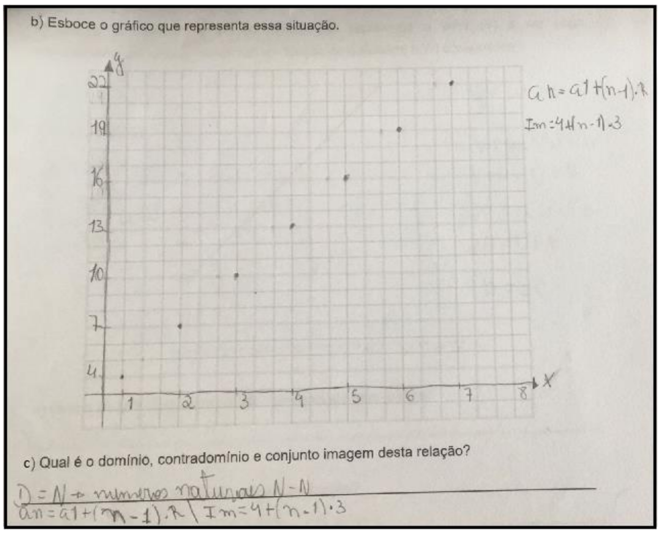
Problema 1: Na padaria de seu José, um pacote de pão fatiado custa R$ 3,00. Durante a pandemia, seu José passou a trabalhar apenas com entrega. Por ser uma padaria localizada num pequeno bairro da cidade, as entregas custam apenas R$ 1,00 para a freguesia local. Não há entregas para fora do bairro. Dadas estas informações:

a) Preencha a tabela abaixo que relaciona a quantidade **x** de pacotes de pão com o valor total **y** a ser pago pelo cliente.

Quantidade (x)	Valor total (y)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22

Fonte: Protocolo de pesquisa.

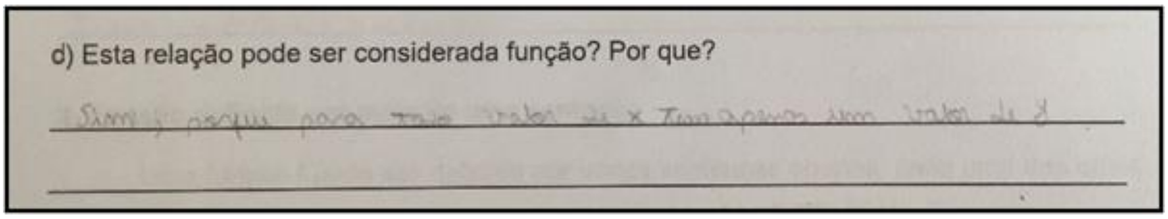
Figura 67 – Esboço do gráfico do Problema 1 feito por A10



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para verificar se a relação se classificava como função, a construção gráfica foi destacada, em que os alunos puderam notar que para cada quantidade de pacotes de pão, havia apenas um valor a ser pago correspondente (Figura 68).

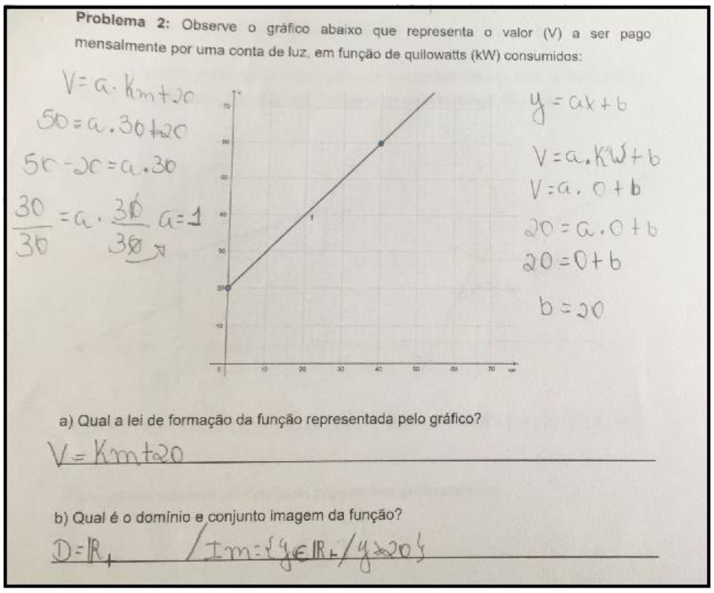
Figura 68 – Classificação da relação como função, resposta de A5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No “Problema 2”, observando-se o gráfico que relaciona o valor (v) a ser pago mensalmente em função de quilowatts (kW) consumidos, os alunos responderam a dois itens que pediam, respectivamente, a lei de formação da função e o domínio e conjunto imagem (Figura 69).

Figura 69 – Problema 2, resposta de A10



Fonte: Protocolo de pesquisa.

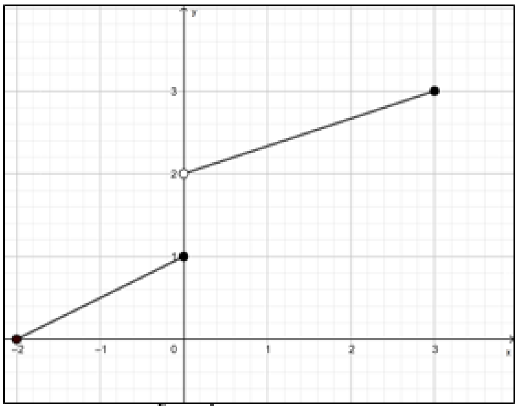
Para a obtenção da lei de formação, foi explicado aos alunos que eles deveriam escolher dois pontos no plano cartesiano pertencentes ao gráfico dado. Dessa forma, os pares ordenados foram substituídos na lei de formação geral de função afim $y = ax + b$ e, posteriormente, por meio de um sistema, foram encontrados os valores dos coeficientes *a* e *b*. Ainda foi evidenciado que para se achar o valor do coeficiente linear *b*, bastava verificar onde a função intersecta o eixo *y*, pois aquele ponto corresponde ao par ordenado (0, *y*), em que sua substituição na lei geral de formação revela de imediato o valor de *b*.

Após o desenvolvimento do "Problema 2", partindo de uma breve conceituação, iniciou-se o conteúdo de funções definidas por mais de uma sentença. Em sequência, o domínio e o conjunto imagem desse tipo de função foram destacados por meio de dois gráficos como exemplos (Figura 70).

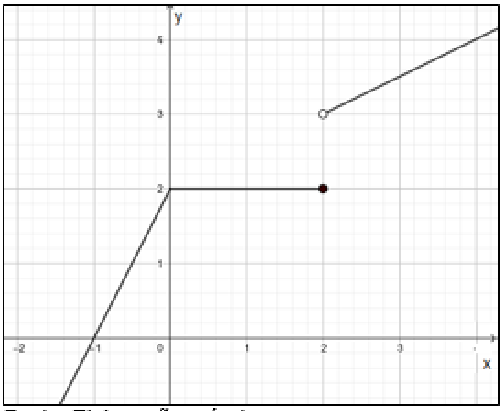
Figura 70 – Domínio e imagem de funções de várias sentenças

2.1. Identificando Domínio e Conjunto Imagem

O domínio e o conjunto imagem de uma função definida por mais de uma sentença são dados pela união dos domínios e imagens de cada sentença. Observe:



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

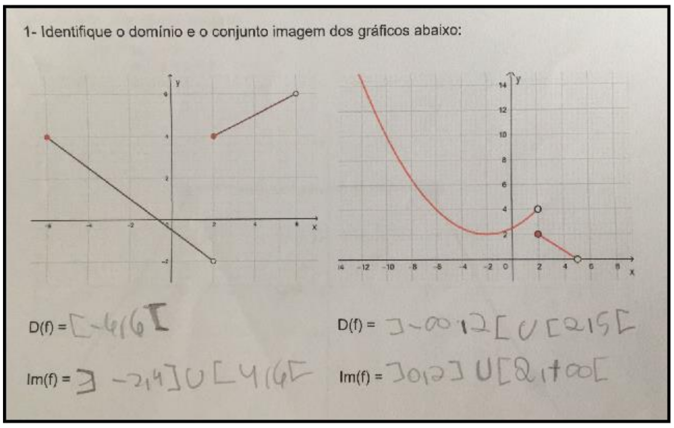
D(f) = [-2 , 3] ; Im(f) = [0 , 1] U] 2 , 3]

D(g) = ℝ ; Im(g) =] -∞ , 2] U] 3 , +∞ [

Fonte: Elaboração própria.

Nesse momento, foi exposto que o conjunto imagem pode ser dado por uma união de intervalos, a depender do gráfico da função. Por seguinte, para reforçar os conteúdos tematizados na aula, os alunos realizaram três atividades sobre funções definidas por mais de uma sentença. A primeira (Figura 71), consistia em identificar o domínio e o conjunto imagem observando o gráfico da função. Para isso, foi explicado aos alunos que eles deveriam imaginar uma sobreposição do gráfico nos eixos *x* e *y*.

Figura 71 – Identificação de domínio e imagem de funções de mais de uma sentença

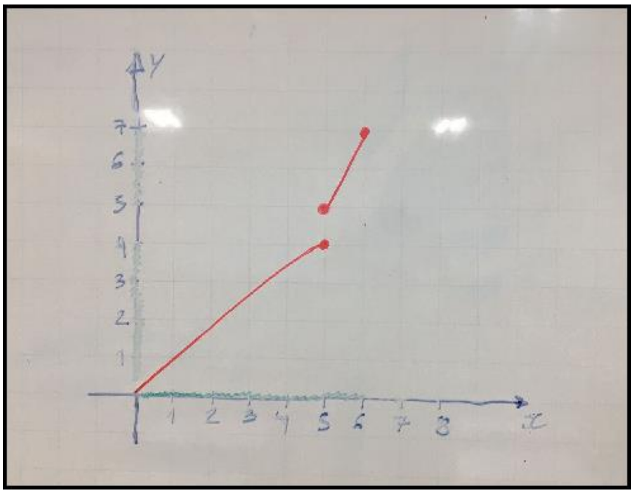


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão, os alunos deveriam esboçar um gráfico de função, dados apenas o domínio e o conjunto imagem. Para isso, foi efetuado um procedimento com vistas a facilitar a construção de um gráfico que contemplasse os requisitos presentes no enunciado: ser função, definida de reais para reais, e conter os intervalos de domínio e imagem com extremos fechados.

Marcou-se sobre os eixos *x* e *y* o domínio e a imagem, respectivamente. Em seguida, foi feito o esboço do gráfico. Porém, como os dois intervalos do conjunto imagem possuíam os dois extremos fechados, a construção (Figura 72) não representava uma função, por haver um mesmo valor do domínio associado a duas imagens diferentes.

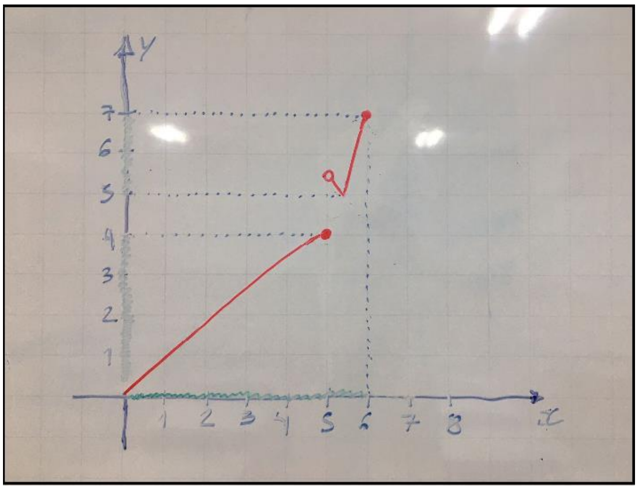
Figura 72 – Esboço gráfico de uma relação que não é função



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Portanto, uma nova construção foi feita, em que o gráfico passou a se caracterizar como função, havendo apenas uma imagem para cada valor do domínio (Figura 73).

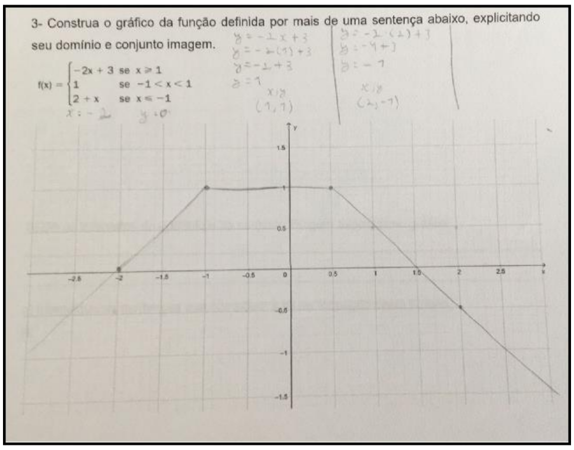
Figura 73 – Construção de um gráfico de função



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na terceira questão, os alunos deveriam construir um gráfico de função definida por mais de uma sentença a partir da lei de formação dada. Para isso, eles escolheram dois valores para *x* a serem substituídos em cada sentença, respeitando-se os intervalos de existência estabelecidos. A partir dos pares ordenados encontrados, os alunos esboçaram o gráfico (Figura 74).

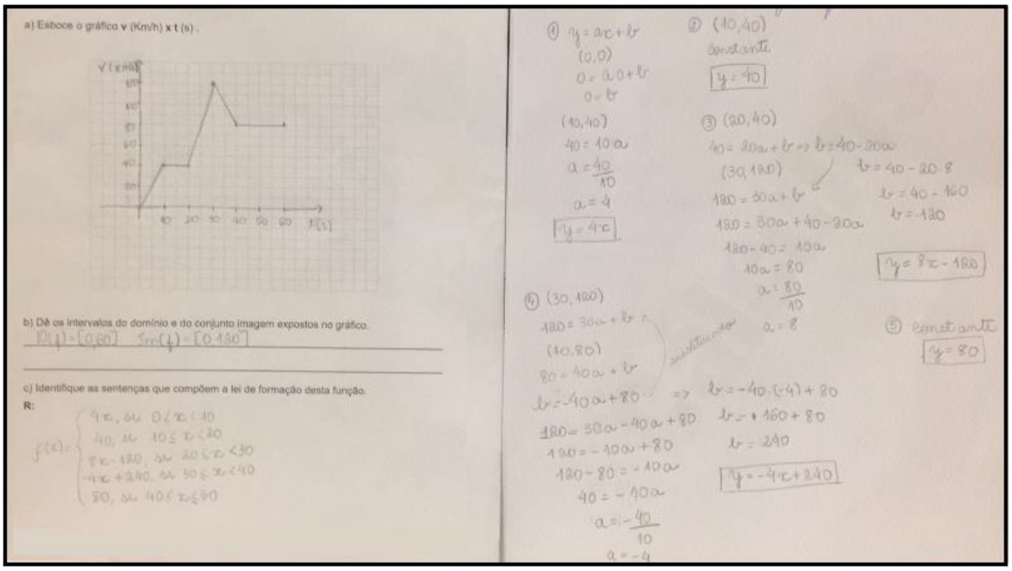
Figura 74 – Gráfico esboçado a partir da lei algébrica por A6



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como desfecho, a apostila trouxe o "Problema 3". O problema consistiu em registrar inicialmente a representação gráfica de um teste de segurança realizado num veículo, durante 1 minuto. O aluno deveria construir o gráfico relacionando o tempo de teste à velocidade adquirida pelo veículo, valendo-se das informações registradas em língua natural. Em seguida, após a construção do gráfico, foram determinadas as sentenças constituintes da lei de formação da função, o domínio e a imagem (Figura 75). Essa questão foi desenvolvida para pôr em prática todos os assuntos tematizados nesta terceira apostila.

Figura 75 – Resolução do Problema 3, resposta de A8



Fonte: Protocolo de pesquisa.

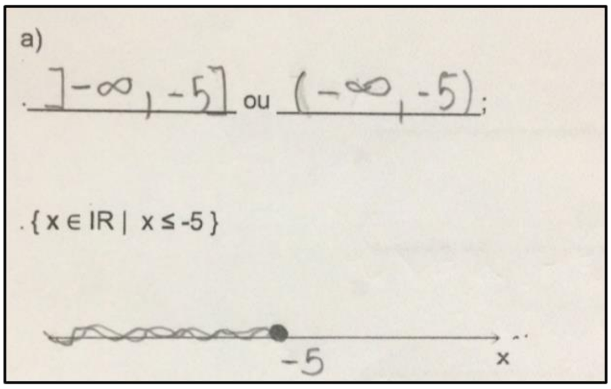
Quarto Encontro – 31 de março de 2022

O quarto e último encontro foi direcionado a uma avaliação da aprendizagem, feita a partir das questões presentes na apostila da Aula IV. Após o término do tempo estipulado para o desenvolvimento das respostas, as apostilas dos alunos foram recolhidas pelos autores e as questões discutidas e corrigidas. As respostas dos alunos estão destacadas na seção seguinte.

4.3 Observação

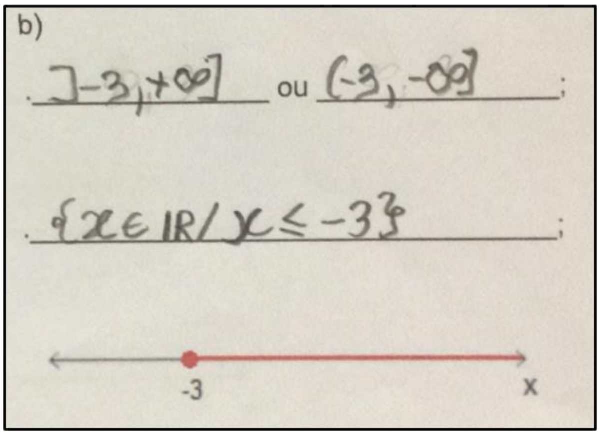
Na primeira aula, as únicas dificuldades estiveram relacionadas às atividades sobre intervalos reais. Os alunos A6 e A11 se confundiram ao utilizar os parênteses para os intervalos abertos e fechados. Estes alunos utilizaram parenteses para representar extremos fechados dos intervalos (Figuras 76 e 77), tratando-se de um erro de formação. A formação é “[...] recurso a um (ou a muitos) signo(s) para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para se substituir essa atenção” (DUVAL, 2009, p. 54 e 55). Em relação às mudanças de registros de representação, viabilizadas pelos processos de conversão, a turma não apresentou dificuldades, indo ao encontro da afirmação de Duval: “Uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e compreensão” (DUVAL, 2009, p. 63).

Figura 76 – Erro do aluno A6



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 77 – Erro do aluno A11



Fonte: Protocolo de pesquisa.

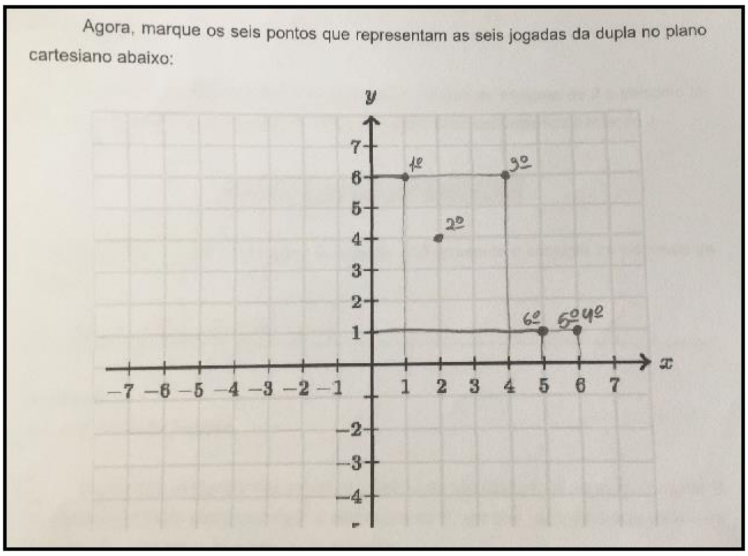
Na aula sobre introdução à função, realizada no segundo encontro, não houve dificuldades no jogo “Cada um no seu lugar”. Todos os alunos conseguiram efetuar a conversão da representação numérica dos pares ordenados, dispostos em tabela (Figura 78), para pontos no plano cartesiano. (Figura 79). Os autores da pesquisa perceberam que essa conversão foi de grande importância para que os alunos entendessem o conceito de domínio e conjunto imagem de uma relação. De acordo com a BNCC, a conversão entre registros se faz necessária para a compreensão do objeto matemático estudado, uma vez que uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2018).

Figura 78 – Jogadas dos alunos A1 e A7 representadas em tabela

JOGADAS	x	y
1ª	1	6
2ª	2	4
3ª	4	6
4ª	6	1
5ª	6	1
6ª	5	1

Fonte: Protocolo de pesquisa.

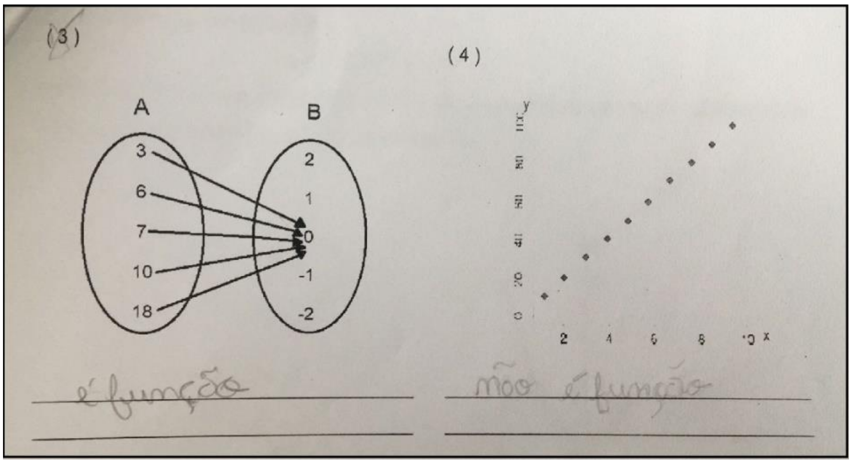
Figura 79 – Jogadas dos alunos A1 e A7 representadas no plano cartesiano



Fonte: Protocolo de pesquisa.

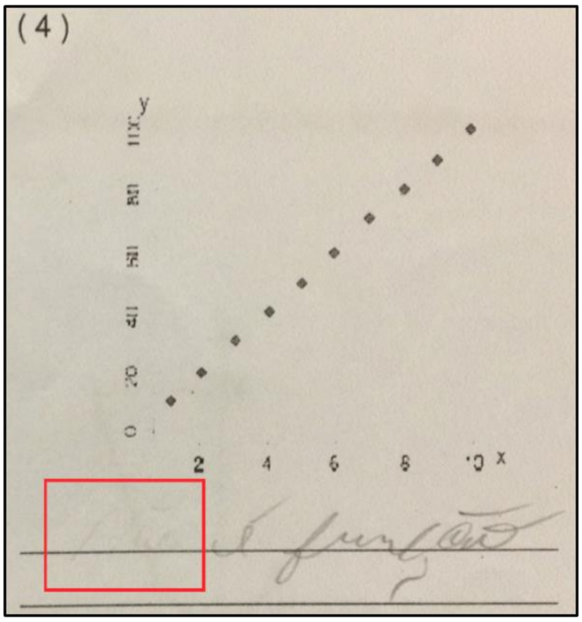
Na questão que consistiu em classificar as representações como funções ou não, doze alunos conseguiram responder a atividade proposta por completo. Os alunos A9 e A11 possuíram dificuldades para interpretar o último item, por não saberem que uma função pode ser representada por um gráfico discreto (Figuras 80 e 81). Oliveira (2006) aponta que os alunos apresentam dificuldades em reconhecer o domínio e contradomínio, não compreendendo as atribuições destes numa função. O aluno A4, após as explicações dos pesquisadores, apagou sua resposta. Porém, é possível observar que este inicialmente havia desclassificado a relação como função (Figura 81).

Figura 80 – Gráfico discreto desclassificado como função pelo aluno A9



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 81 – Gráfico discreto inicialmente desclassificado como função pelo aluno A4

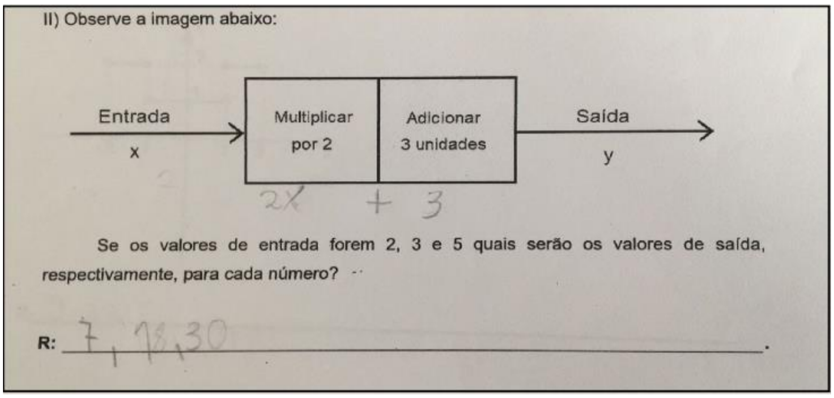


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os autores, ao indagarem à turma sobre a classificação desta representação, foram surpreendidos pela resposta do aluno A1, pois ele forneceu prontamente o argumento esperado: "É função porque todos os valores de *x* têm apenas uma imagem".

Na apresentação da função como um operador, que para facilitar a linguagem foi definida como uma "máquina", foi observado que o aluno A9 efetuou a conversão para o registro algébrico corretamente, porém errou ao efetuar os cálculo dos valores de saída (valores de *y*) referentes aos valores de entrada (valores de *x*) iguais a 3 e a 5, ocorrendo um erro relacionado à interpretação dos signos matemáticos de soma e multiplicação (Figura 82). É provável que para esses dois valores ele tenha interpretado o sinal de soma como um sinal de multiplicação.

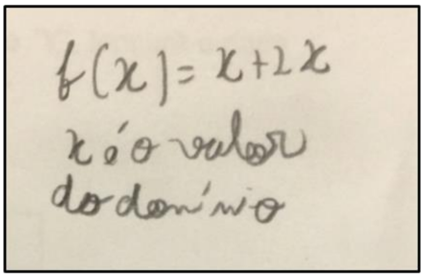
Figura 82 – Valores de saída equivocados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

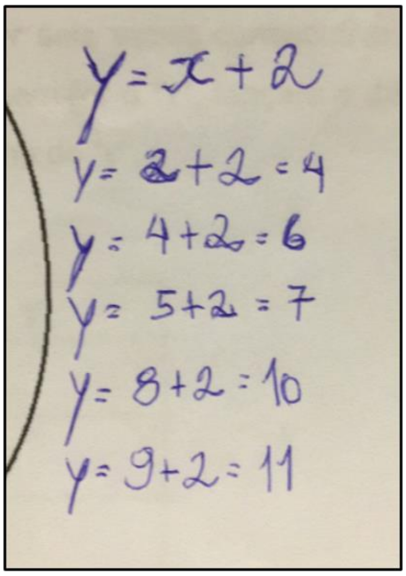
Ainda sobre o segundo encontro, no exercício final que reunia todo o conteúdo abordado no material "Aula II", apenas os alunos A1, A5, A8 e A13 conseguiram identificar a lei algébrica de associação registrada em língua natural (Figura 83), significando, portanto, uma dificuldade de conversão por parte da turma em geral, ao haver um *caso de não-congruência* entre as representações semióticas (Figura 84). Posteriormente, a lei foi apresentada e discutida com a turma.

Figura 83 – Conversão da língua natural para escrita algébrica feita pelo aluno A13



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 84 – Erro de conversão para escrita algébrica do aluno A14



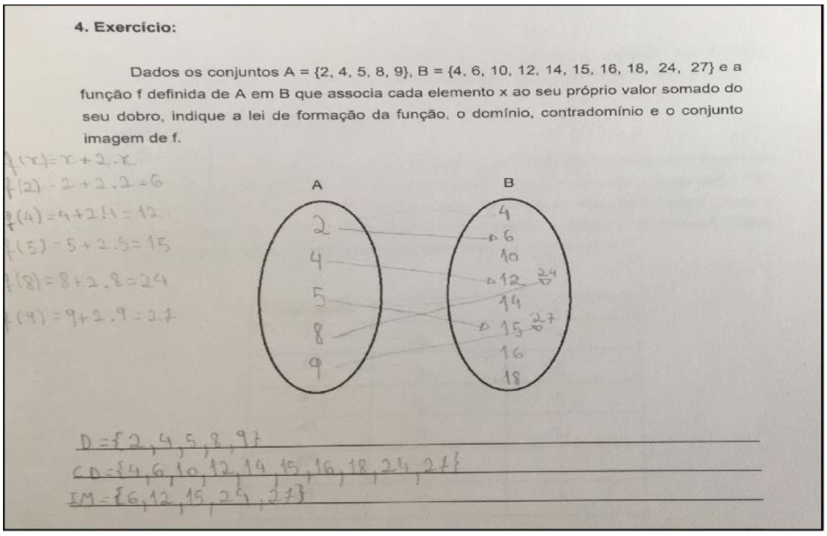
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nessa última atividade, para que os alunos conseguissem encontrar a lei algébrica, por meio do processo de conversão, eles teriam que efetuar a mudança do registro em linguagem natural para o registro algébrico $y = x + 2.x$. A questão dizia que "cada elemento x estava associado ao seu próprio valor somado do seu dobro". O termo dobro está ligada a dois signos: o numeral 2 e o símbolo da multiplicação ".", dessa forma, o critério de correspondência semântica dos elementos significantes não foi cumprido por A14.

De acordo com a análise feita pelos autores da pesquisa em relação a esta última atividade da Apostila II, a maioria dos alunos não conseguiu indicar a lei de formação pedida na questão e consequentemente, identificar corretamente o domínio e o conjunto imagem da função. Desse modo, quando não há congruência entre duas representações, os alunos possuem grandes dificuldades em efetuar a conversão entre os registros semióticos, assim como foi exposto por Duval (2009).

Em seguida, todo o exercício foi resolvido no quadro. O aluno A5 foi o único a conseguir concluir o exercício por completo anteriormente à correção (Figura 85).

Figura 85 – Resposta do aluno A5 ao exercício final da Aula II



4. Exercício:

Dados os conjuntos A = {2, 4, 5, 8, 9}, B = {4, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 24, 27} e a função f definida de A em B que associa cada elemento x ao seu próprio valor somado do seu dobro, indique a lei de formação da função, o domínio, contradomínio e o conjunto imagem de f.

f(x) = x + 2.x
f(2) = 2 + 2.2 = 6
f(4) = 4 + 2.4 = 12
f(5) = 5 + 2.5 = 15
f(8) = 8 + 2.8 = 24
f(9) = 9 + 2.9 = 27

A: 2, 4, 5, 8, 9
B: 4, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 24, 27

D = {2, 4, 5, 8, 9}
CD = {4, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 24, 27}
IM = {6, 12, 15, 24, 27}

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No terceiro encontro, sobre função afim e função definida por mais de uma sentença, foram observadas respostas distintas no item f) do “Problema 1” (Figura 86). Nos itens anteriores, os alunos não possuíram dificuldades.

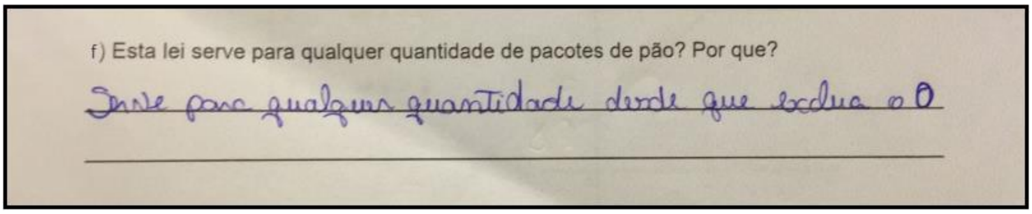
Figura 86 – Problema 1 da apostila referente à Aula III

Problema 1: Na padaria de seu José, um pacote de pão fatiado custa R$ 3,00. Durante a pandemia, seu José passou a trabalhar apenas com entrega. Por ser uma padaria localizada num pequeno bairro da cidade, as entregas custam apenas R$ 1,00 para a freguesia local. Não há entregas para fora do bairro. Dadas estas informações:

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O aluno A3, assim como a maioria, disse que a lei servia para qualquer quantidade de pacotes de pão, desde que o zero não pertencesse ao domínio da função (Figura 87).

Figura 87 – Resposta dada pelo aluno A3 ao item f) do Problema 1



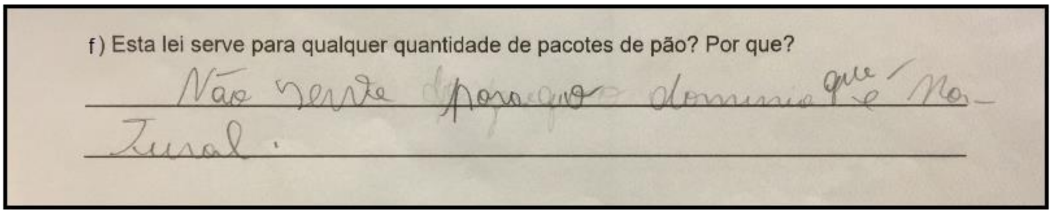
f) Esta lei serve para qualquer quantidade de pacotes de pão? Por que?

Serve para qualquer quantidade desde que exclua o 0

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O aluno A4 julgou que, sendo o domínio natural, a lei não serve para qualquer quantidade de pacotes de pão (Figura 88), pois, dessa forma, o zero faria parte do domínio. Nesse caso, utilizando a lei de formação $y = 3x + 1$, mesmo que não se comprasse algum pacote de pão, o cliente teria que pagar R$ 1,00.

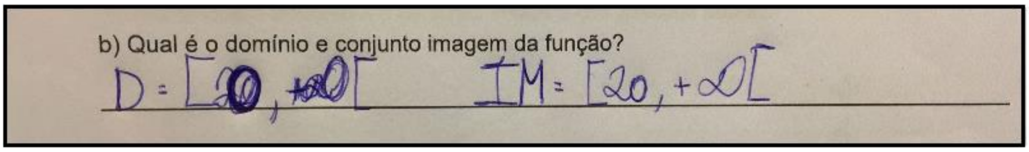
Figura 88 – Resposta dada pelo aluno A4 ao item f) do Problema 1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

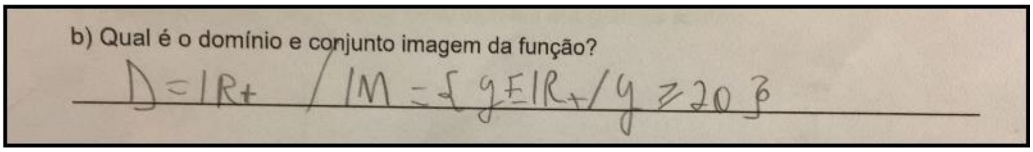
No “Problema 2”, no item a), o processo para a descoberta da lei de formação da função foi apresentado à turma, pois nenhum deles se lembrava como efetuar a conversão gráfica para algébrica. Já no item b), enquanto onze alunos representaram o domínio e a imagem por meio de colchetes - a exemplo tem-se a resposta de A14 (Figura 89) - três utilizaram a representação por meio de uma propriedade, sendo estes os alunos A4 (Figura 90), A5 (Figura 91) e A8 (Figura 92). Todos os alunos acertaram este último item.

Figura 89 – Representação do aluno A14 por meio de colchetes



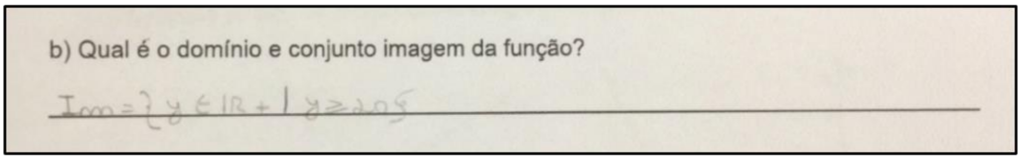
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 90 – Representação do aluno A4 por meio de uma propriedade



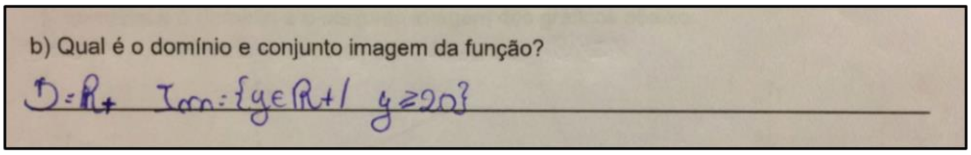
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 91 – Representação do aluno A5 por meio de uma propriedade



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 92 – Representação do aluno A8 por meio de uma propriedade



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em função definida por mais de uma sentença, os gráficos foram construídos no quadro pelos licenciandos. Para o esboço do gráfico de função a partir dos intervalos de domínio e de conjunto imagem, foi apresentado um passo a passo para efetuar esse registro, em que os alunos participaram deste processo de construção a partir de indagações feitas a eles, tais como:

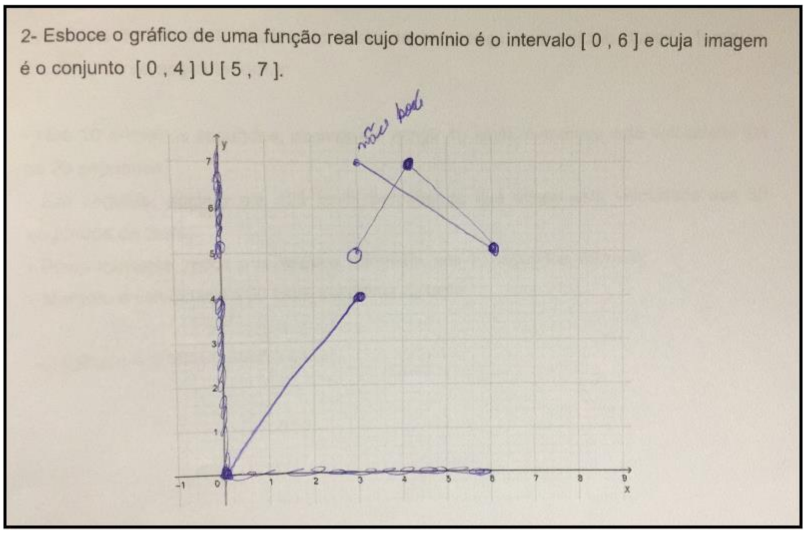
- O domínio corresponde a qual eixo?

- Pode haver "saltos" no domínio? E na imagem?

- O que pode ser feito pra tornar o gráfico função?

Em seguida, foi dada uma possibilidade de construção pelo aluno A6 (Figura 93). Vale ressaltar que o aluno esboçou o gráfico de acordo com o passo a passo explicado. Porém, por ter utilizado caneta, não foi possível apagar a parte construída anteriormente.

Figura 93 – Possibilidade de construção dada pelo aluno A6



Fonte: Protocolo de pesquisa.

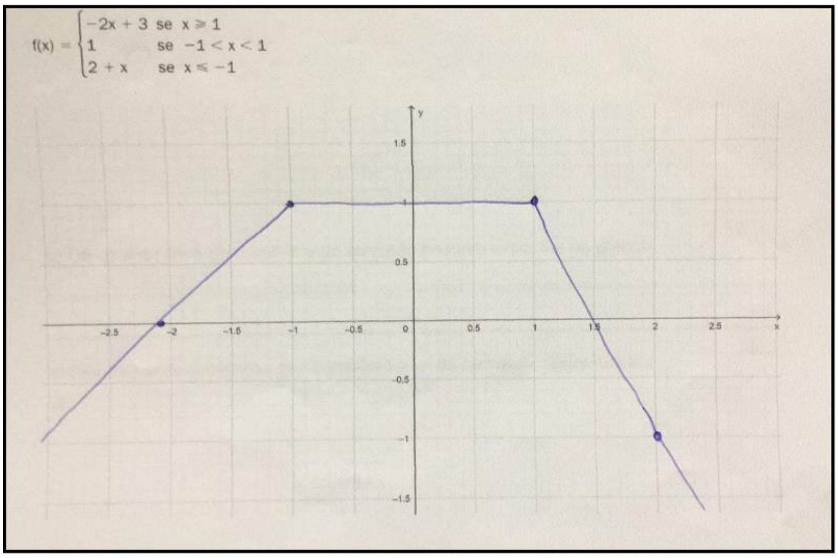
Na construção do gráfico por meio da lei algébrica de associação (Figura 94), os alunos deram suas contribuições de mesma forma, a partir de questionamentos feitos a eles, tais como:

- O gráfico será discreto ou contínuo?

- Quantos pares ordenados são necessários para construir uma parte do gráfico, dada por uma sentença?

- Em qual intervalo de domínio o gráfico é constante?

Figura 94 – Esboço do aluno A6 a partir da lei algébrica.

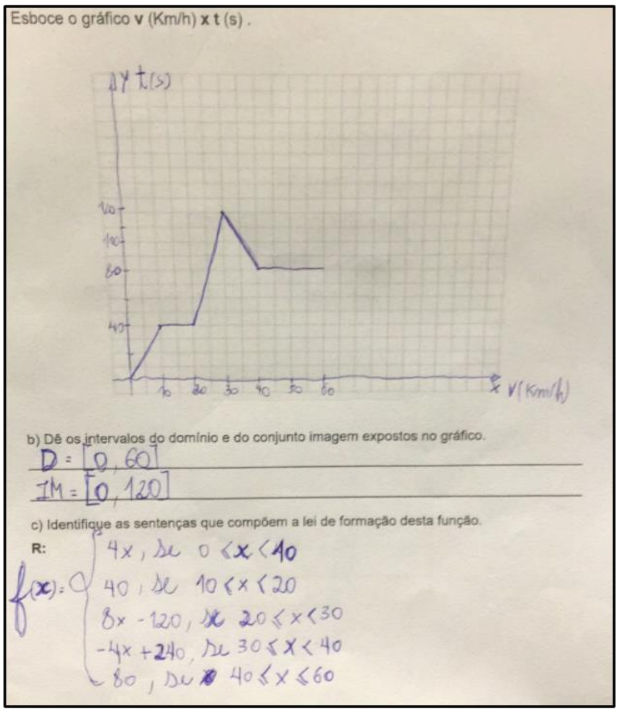


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No “Problema 3”, os alunos puderam exercitar todo o conteúdo presente na apostila. A construção gráfica, partindo da leitura da situação, foi concluída por todos que permaneceram em aula.

As dificuldades no "Problema 3” emergiram no momento da mudança do registro gráfico para o algébrico, o que já era esperado, pois de acordo com Duval (2011), isso se deve ao fato de a passagem da equação para a representação gráfica ser mais trabalhada do que a obtenção da lei algébrica a partir do gráfico. Aos poucos, os alunos relembravam que as sentenças da lei algébrica de associação dependeriam de, pelo menos, dois pares ordenados para serem descobertas, e que a parte constante do gráfico é dada por uma sentença constituída apenas por um número. Porém, nenhum aluno conseguiu concluir a atividade por completo. Os pesquisadores mostraram no quadro como deveria ser feito o item c) desta questão. O aluno A14 concluiu os itens a) e b) corretamente e copiou as sentenças constituintes da lei de formação, em resposta ao item c) (Figura 95).

Figura 95 – Problema 3 resolvido pelo aluno A14

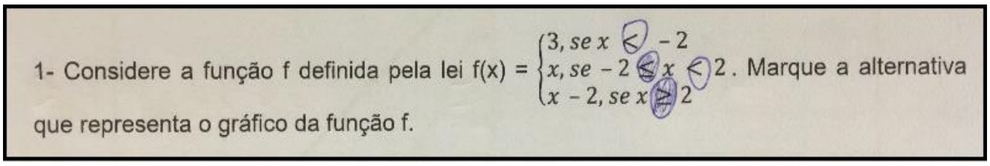


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No quarto e último encontro, os alunos realizaram todas as atividades da Apostila IV (APÊNDICE E) sozinhos, para que pudesse ser feita a avaliação da aprendizagem pelos autores.

Na primeira questão, os alunos tiveram que efetuar a mudança do registro algébrico para o registro gráfico por meio do processo de conversão. Treze alunos assinalaram a resposta correta. O aluno A3 observou que bastava analisar os sinais de desigualdades presentes em cada sentença para descobrir o gráfico que representava a lei algébrica dada (Figura 96).

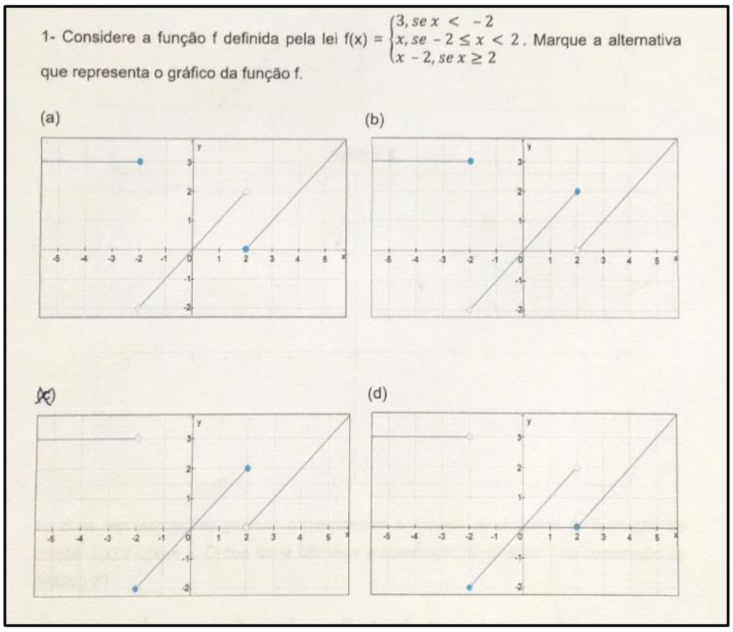
Figura 96 – Desigualdades destacadas por A3


1- Considere a função f definida pela lei $f(x) = \begin{cases} 3, se\ x < -2 \\ x, se\ -2 \leq x < 2 \\ x-2, se\ x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa que representa o gráfico da função f.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas o aluno A13 marcou a opção incorreta (Figura 97). De acordo com a alternativa assinalada, pode-se concluir que o aluno não apenas cometeu um erro de conversão, mas também um erro de formação, visto que se observasse as desigualdades presentes em cada sentença, ele chegaria à conclusão de que um mesmo tipo de bolinha não pode representar duas coisas diferentes. Vale destacar que A13 pediu para ser liberado mais cedo no segundo e no terceiro encontro.

Figura 97 – Questão 1 da apostila IV: alternativa incorreta assinalada por A13



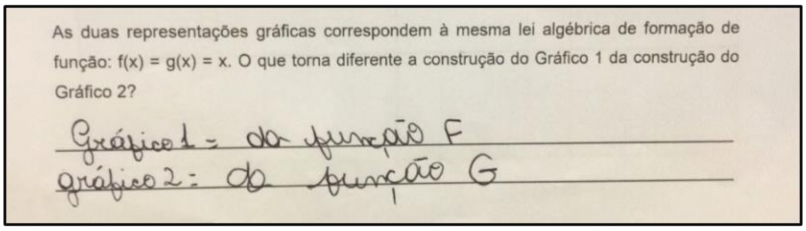
1- Considere a função f definida pela lei $f(x) = \begin{cases} 3, se\ x < -2 \\ x, se\ -2 \leq x < 2 \\ x-2, se\ x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa que representa o gráfico da função f.

(a) (b) (c) (d)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda questão, cinco alunos – A2 (Figura 98), A3 (Figura 99), A7 (Figura 100), A10 (Figura 101) e A13 (Figura 102) – não conseguiram identificar o que tornou diferente a construção dos gráficos, visto que estes possuíam a mesma lei algébrica de formação.

Figura 98 – Erro de formação do aluno A2

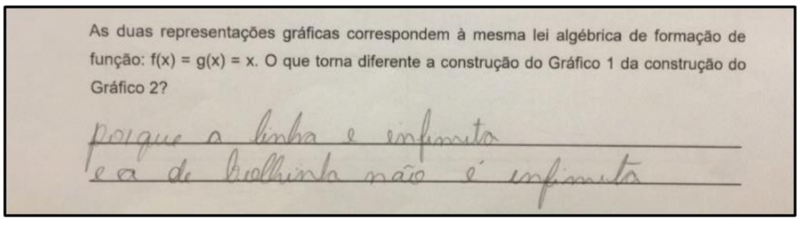


As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

Gráfico 1 - da função F
gráfico 2: da função G

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 99 – Erro de formação do aluno A3

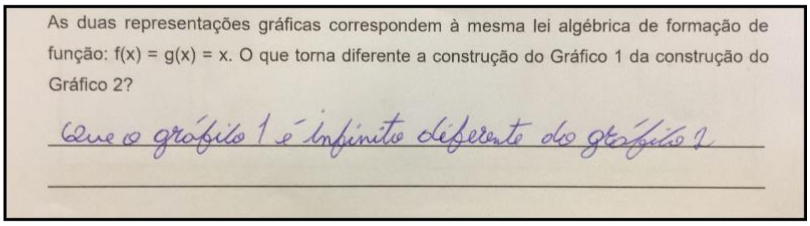


As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

porque a linha e infinita
e a da bolinha não é infinita

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 100 – Erro de formação do aluno A7

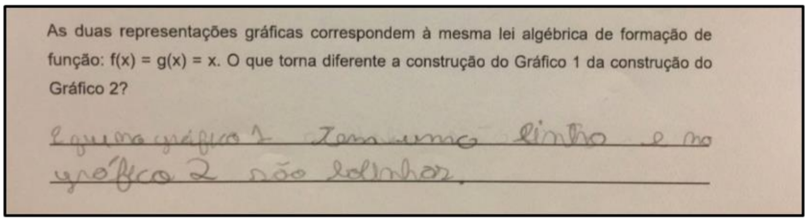


As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

Que o gráfico 1 é infinito diferente do gráfico 2

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 101 – Erro de formação do aluno A10

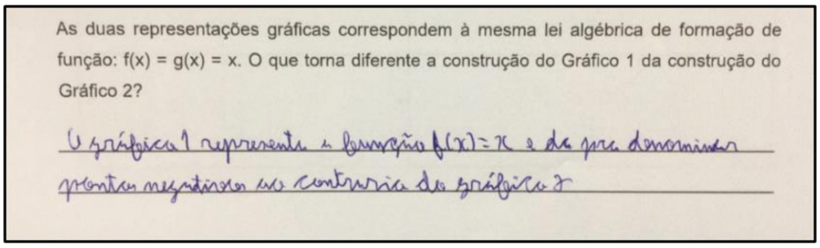


As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

E que no gráfico 1 tem uma linha e no gráfico 2 são bolinhas.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 102 – Erro de formação do aluno A13



As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

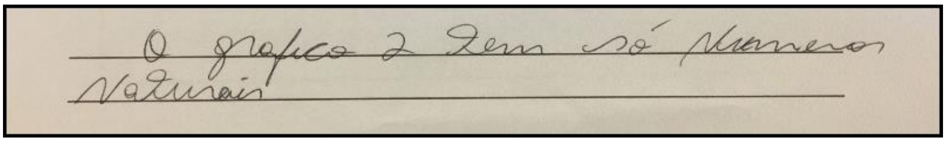
O gráfico 1 representa a função f(x)=x e da pra denominar pontos negativos ao contrario do gráfico 2

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A partir das análises das respostas dos alunos, considerando que as duas representações de uma mesma função estavam num mesmo tipo de registro representação (gráfico), identificou-se um problema já mencionado por Oliveira (2006), que destaca que os alunos apresentam dificuldades na compreensão do domínio de função. Essa dificuldade também foi constatada por Siqueira e Beust (2008), que afirmam que “em muitos problemas, a função é a lei, em que os alunos ignoram o domínio e o contradomínio e, às vezes, nem os especificam, embora tenham sido solicitados.” (SIQUEIRA; BEUST, 2008, p. 51).

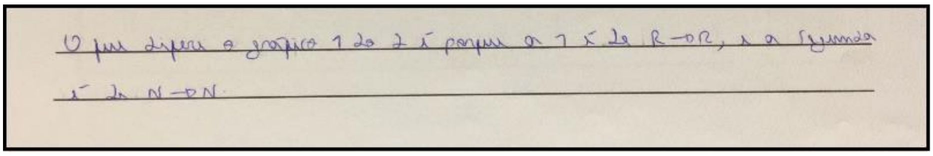
Várias respostas foram dadas no sentido de que os gráficos se diferiram por apresentarem domínios distintos. Nove alunos responderam corretamente a questão. Como exemplo, temos as respostas dos alunos A4 (Figura 103), A5 (Figura 104), A8 (Figura 105) e A9 (Figura 106). Isso mostra que quando o aluno compreende o domínio de uma função, ele consegue dar significados ao tipo de traçado do gráfico, sendo este um dos obstáculos citados por Oliveira (2006) existentes no ensino de função.

Figura 103 – Resposta do aluno A4 sobre as diferenças entre as representações gráficas



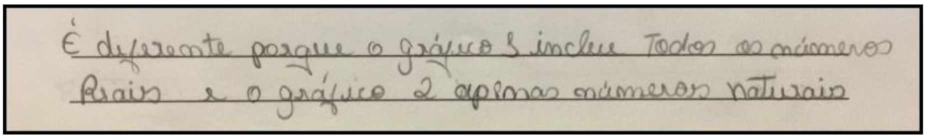
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 104 – Resposta do aluno A5 sobre as diferenças entre as representações gráficas



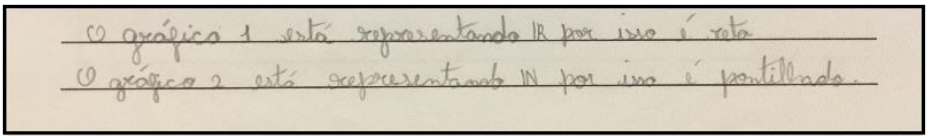
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 105 – Resposta do aluno A8 sobre as diferenças entre as representações gráficas



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 106 – Resposta do aluno A9 sobre as diferenças entre as representações gráficas



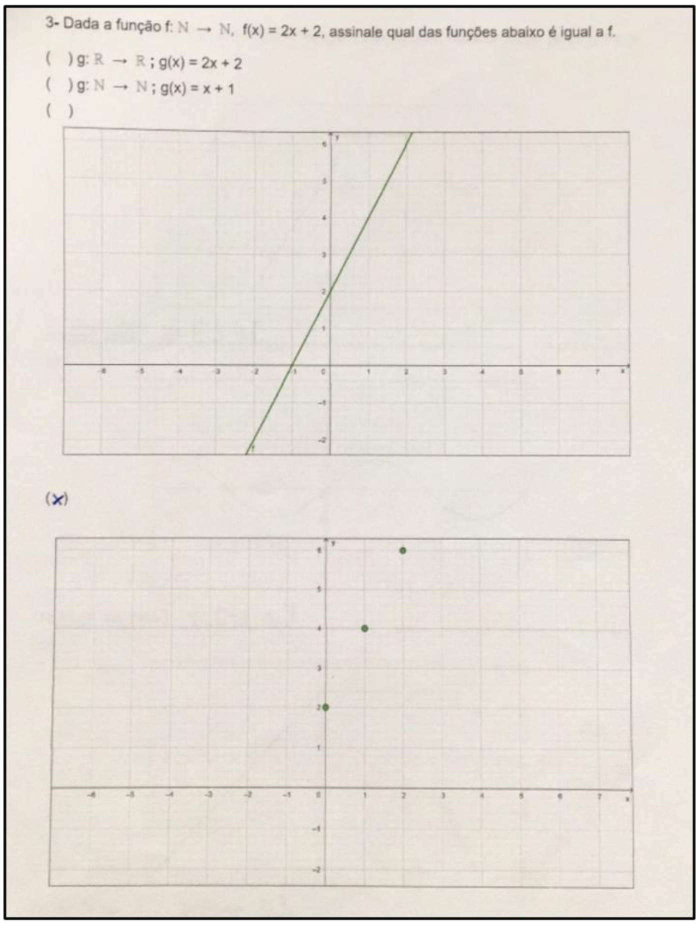
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na terceira questão, o aluno A3 não compreendeu o que foi solicitado, perguntando o que era para ser feito. Em seguida, os autores explicaram que, a partir da função *f* dada, os alunos deveriam assinalar a representação de uma função *g* exatamente igual a *f*. Analisando o domínio e a lei algébrica de associação, os alunos deveriam marcar a última alternativa.

Por eliminação, os alunos chegaram à conclusão que a resposta seria ou a alternativa c) ou alternativa d), já que nas alternativas anteriores as funções estavam definidas num mesmo registro de representação, o que permitia observar claramente as diferenças existentes (Figura 107). Dez alunos marcaram a alternativa correta, a qual apresentava um gráfico discreto, de domínio e imagem naturais. Quatro alunos marcaram a alternativa c, a qual apresentava um gráfico contínuo, sendo a função definida de reais para reais. Isso significou um erro de formação e de *reconhecimento*.

De acordo com Duval (2009), mesmo que as atividades de pesquisa e resolução de problemas sejam importantes tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve subestimar outro tipo de atividade fundamental: “o reconhecimento, isto é, a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais.” (DUVAL, 2009, p. 28).

Figura 107 – Questão 3 da Apostila IV: resposta de A8

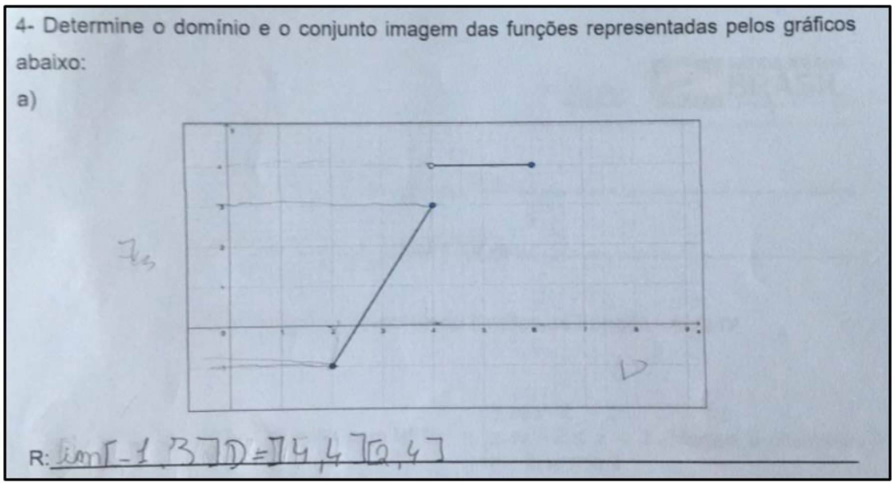


Fonte: Protocolo de pesquisa.

A quarta questão solicitou que os alunos determinassem o domínio e o conjunto imagem a partir da representação gráfica da função. Sete alunos conseguiram responder corretamente a todos os itens dessa questão. Os outros sete alunos erraram pelo menos parte de algum item. A título de exemplo, foram destacados os erros dos alunos A11 (Figura 108) e A4 (Figura 109).

O aluno A11, em resposta ao item a), esqueceu de unir à imagem o valor 4. Já no domínio, além de começar do intervalo mais à direita, é provável que tenha se confundido ao anotar o número 4 por duas vezes, ao invés do número 6.

Figura 108 – Questão 4 da Apostila IV: resposta de A11 ao item a)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

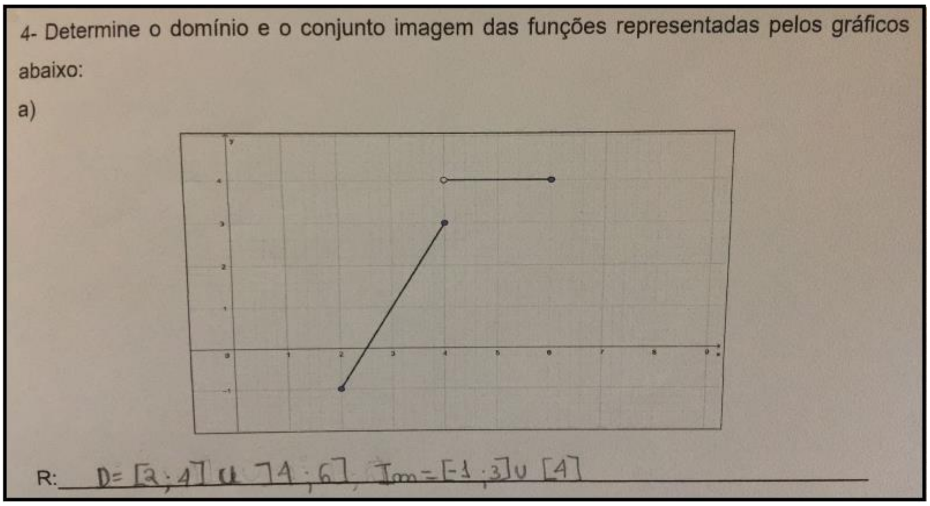
Já o aluno A4, anotou alguns valores que se aproximavam da curva do gráfico (Figura 109). Apenas o zero pertencia à função. Além disso, não disse se estes valores pertenciam ao domínio ou à imagem da função. Em sua resposta, identificam-se erros de conversão e formação.

Figura 109 – Questão 4 da Apostila IV: resposta de A4 ao item b)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

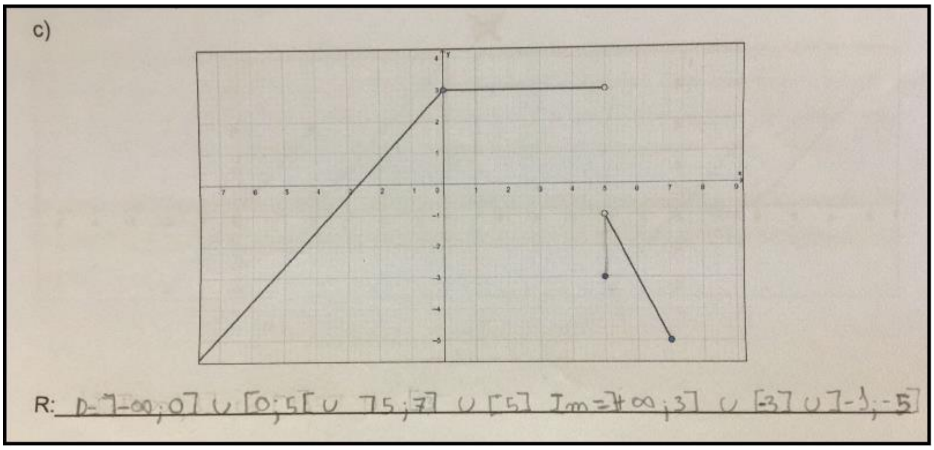
Ainda em relação à Questão 4, nos itens **a** e **c**, o aluno A9 expressou o domínio por uma união de intervalos (Figuras 110 e 111), enquanto o aluno A5 representou por apenas um intervalo (Figuras 112 e 113). As duas formas de representação poderiam ser utilizadas para o domínio. Já para a imagem, no item **a**, seria necessário utilizar a união de intervalos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é importante que o aluno seja capaz de identificar o domínio e imagem de funções (BRASIL, 2018).

Figura 110 – Resposta do aluno A9 ao item 4-a) da Aula IV



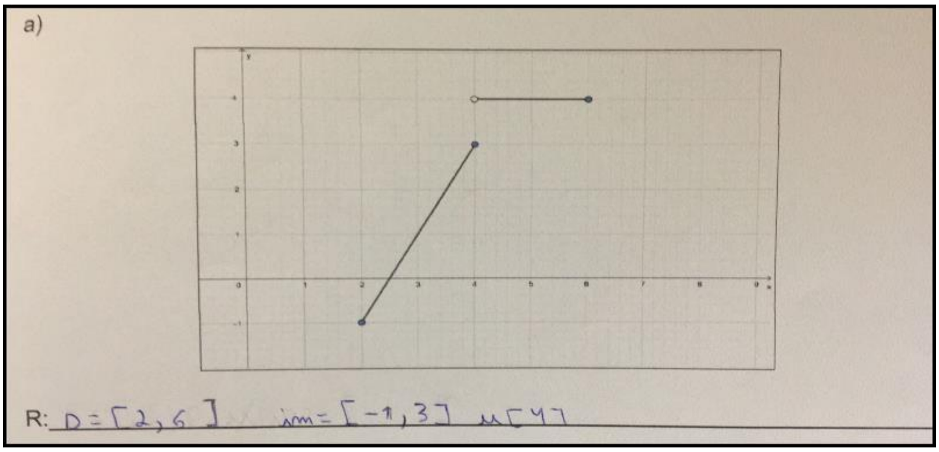
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 111 – Resposta do aluno A9 ao item 4-c) da Aula IV



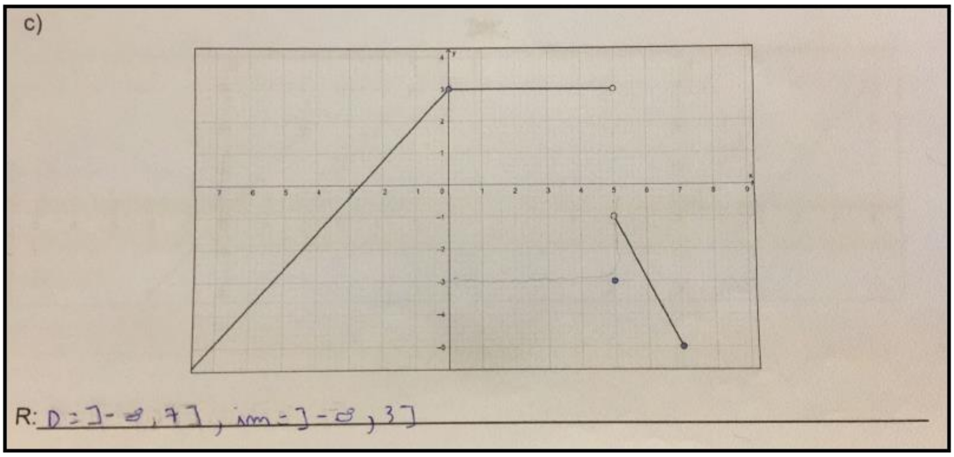
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 112 – Resposta do aluno A5 ao item 4-a) da Aula IV



Fonte: Protocolo de pesquisa.

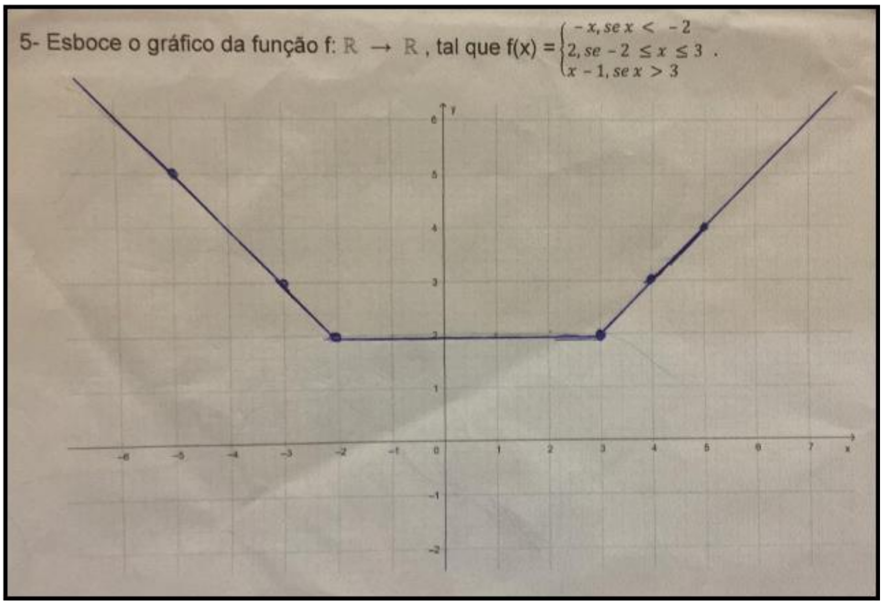
Figura 113 – Resposta do aluno A5 ao item 4-c) da Aula IV



Fonte: Protocolo de pesquisa.

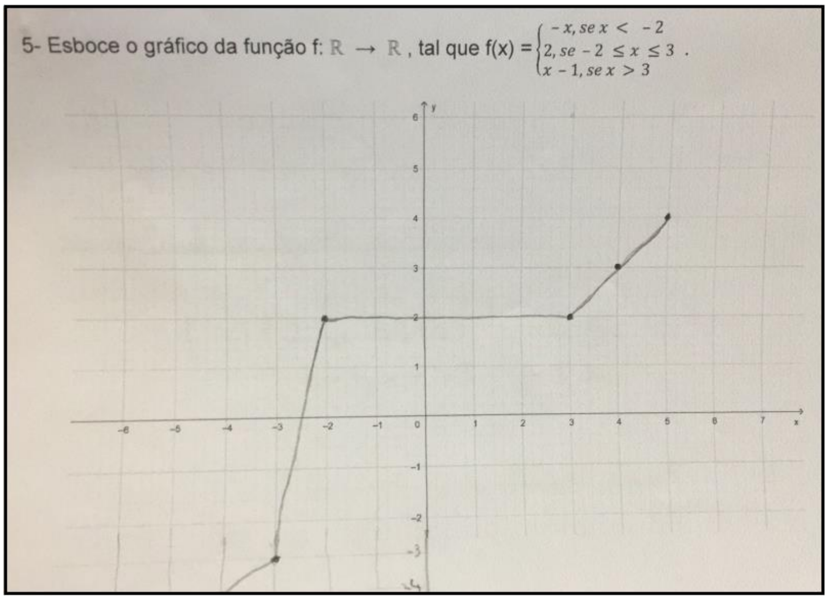
A quinta questão solicitou que os alunos construíssem o gráfico de uma função dada a sua lei algébrica, composta por três sentenças. Portanto, havia apenas uma possibilidade de esboço, pois a função estava determinada. Metade da turma (sete alunos) conseguiu esboçar corretamente o gráfico da função. Como exemplo, temos as construções dos alunos A5 e A8. O aluno A8 construiu corretamente o gráfico da função (Figura 114), mostrando que conseguiu efetuar com êxito a mudança de registros, enquanto o aluno A5 errou o esboço do gráfico (Figura 115). Duval (2009) afirma que a conversão das representações é uma atividade cognitiva fundamental da *semiósis* tão importante para a aprendizagem matemática quanto as outras (formação e transformação), pois ela possibilita a coordenação dos registros de representação.

Figura 114 – Esboço realizado pelo aluno A8



Fonte: Protocolo de pesquisa.

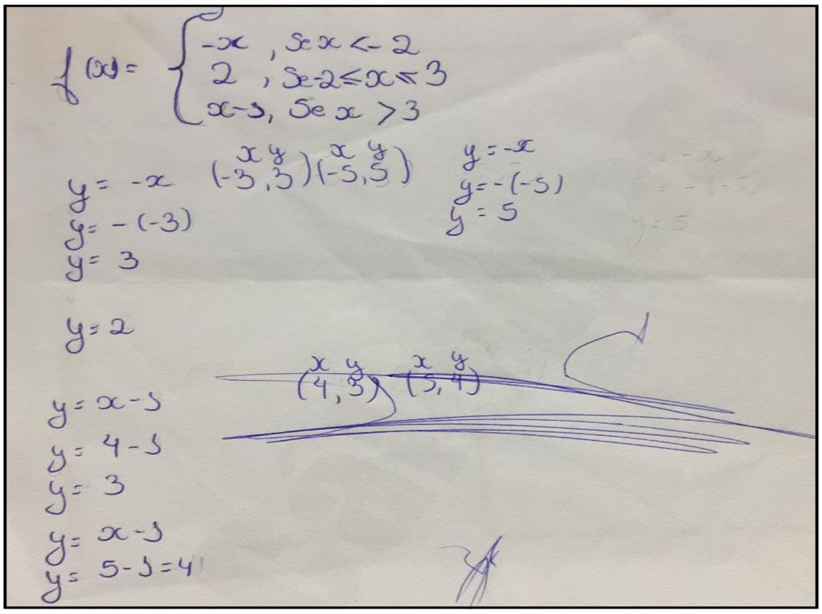
Figura 115 – Esboço realizado pelo aluno A5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

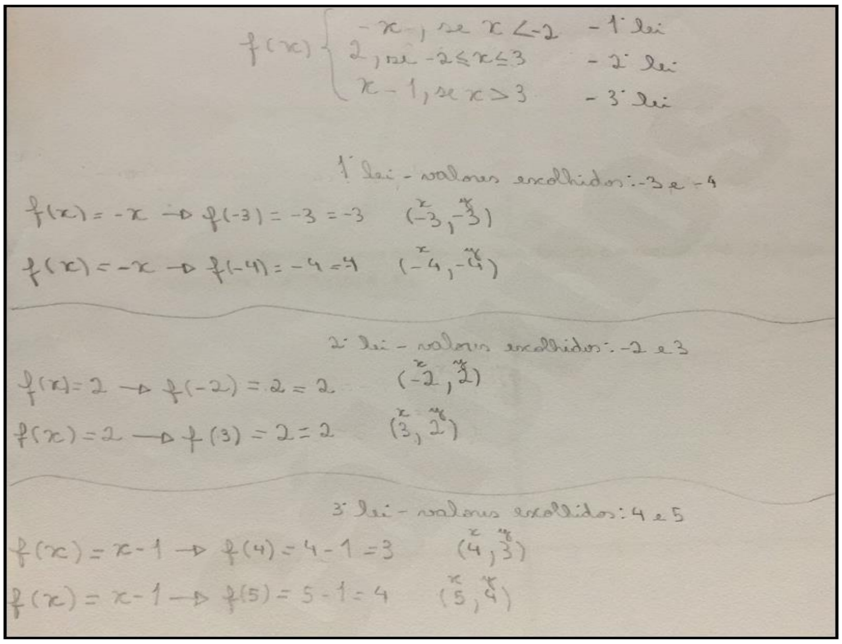
Os alunos A5 e A8 encontraram pares ordenados de acordo com cada sentença, vislumbrando esboçar o gráfico. O aluno A8 efetuou corretamente os processos necessários para a conversão de registros (Figura 116). O esboço equivocado feito pelo aluno A5, deve-se a um erro de tratamento (Figura 117). Ao utilizar os valores -3 e -4 para *x*, o aluno A5 não observou que o valor para *f(x)* seria igual ao oposto dos valores escolhidos para *x*, visto que esta primeira sentença era dada por *f(x) = -x*. Por isso, construiu o gráfico de forma errada.

Figura 116 – Pares ordenados encontrados pelo aluno A8



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 117 – Pares ordenados encontrados pelo aluno A5


$f(x) \begin{cases} -x, \text{ se } x < -2 & -1^a \text{ lei} \\ 2, \text{ se } -2 \leq x \leq 3 & -2^a \text{ lei} \\ x-1, \text{ se } x > 3 & -3^a \text{ lei} \end{cases}$

1ª lei - valores escolhidos: -3 e -4

$f(x) = -x \rightarrow f(-3) = -3 = -3 \quad (-3, -3)$

$f(x) = -x \rightarrow f(-4) = -4 = 4 \quad (-4, -4)$

2ª lei - valores escolhidos: -2 e 3

$f(x) = 2 \rightarrow f(-2) = 2 = 2 \quad (-2, 2)$

$f(x) = 2 \rightarrow f(3) = 2 = 2 \quad (3, 2)$

3ª lei - valores escolhidos: 4 e 5

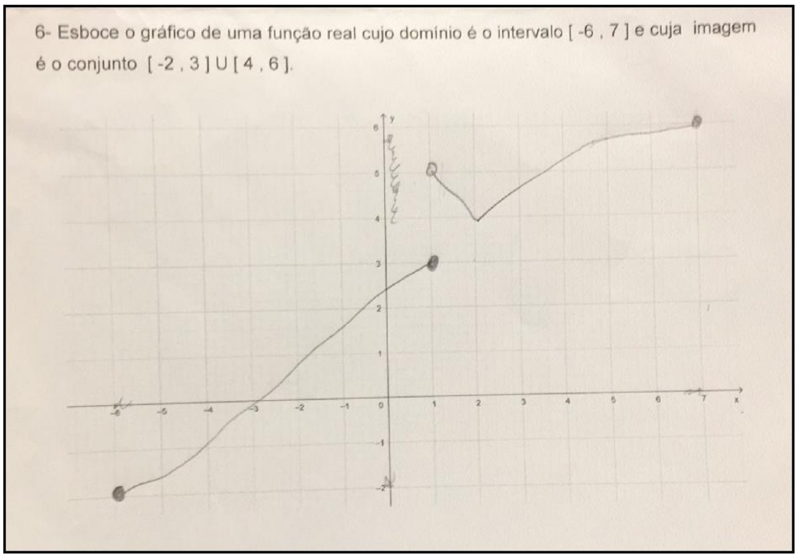
$f(x) = x-1 \rightarrow f(4) = 4-1 = 3 \quad (4, 3)$

$f(x) = x-1 \rightarrow f(5) = 5-1 = 4 \quad (5, 4)$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

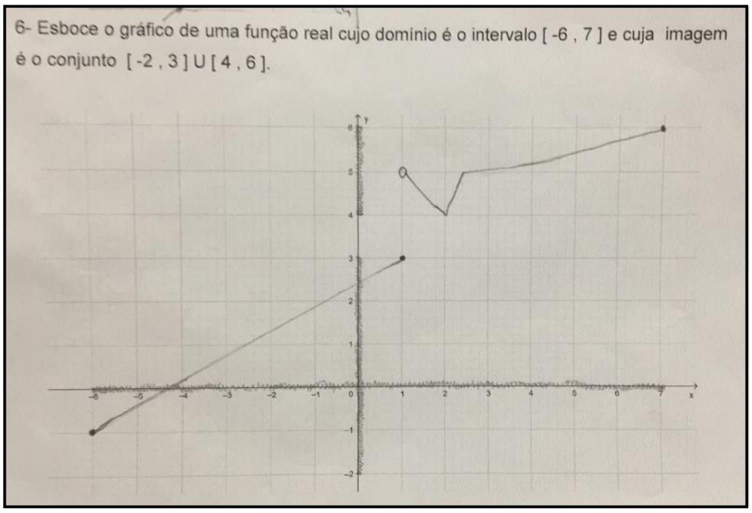
Na última questão, na qual deveria ser construído um gráfico de função que contivesse os intervalos de domínio e de imagem expostos no enunciado, os alunos, como esperado, forneceram diferentes soluções. A seguir, podem ser observados quatro tipos de esboço corretos, dos alunos A3 (Figura 118), A5 (Figura 119), A8 (Figura 120) e A10 (Figura 121). Observando as construções desta última questão, os autores chegaram à conclusão de que oito alunos conseguiram realizar o registro da representação gráfica, a conversão entre os registros e compreender domínio e conjunto imagem em questão.

Figura 118 – Esboço feito pelo aluno A3



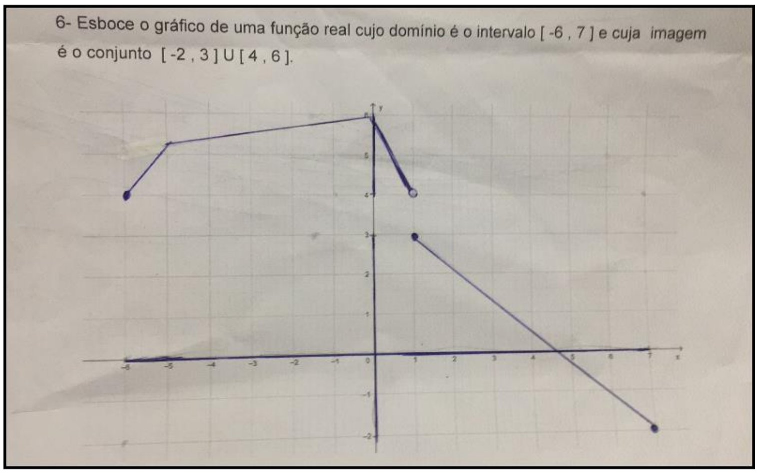
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 119 – Esboço feito pelo aluno A5



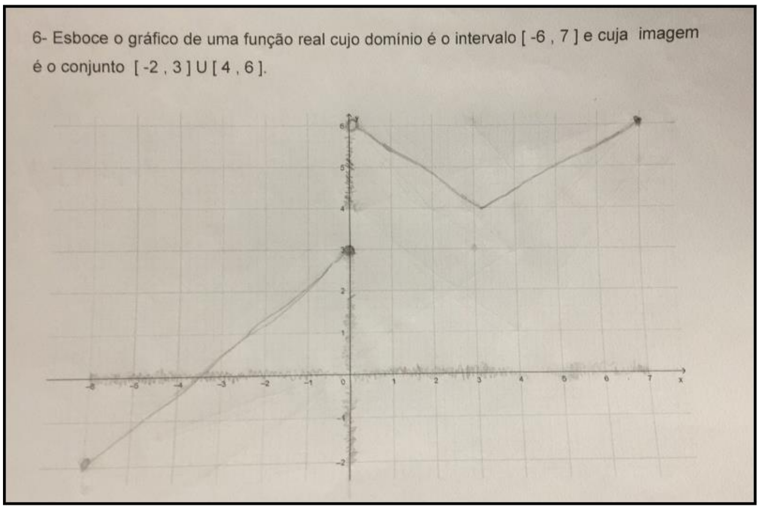
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 120 – Esboço feito pelo aluno A8



Fonte: Protocolo de pesquisa.

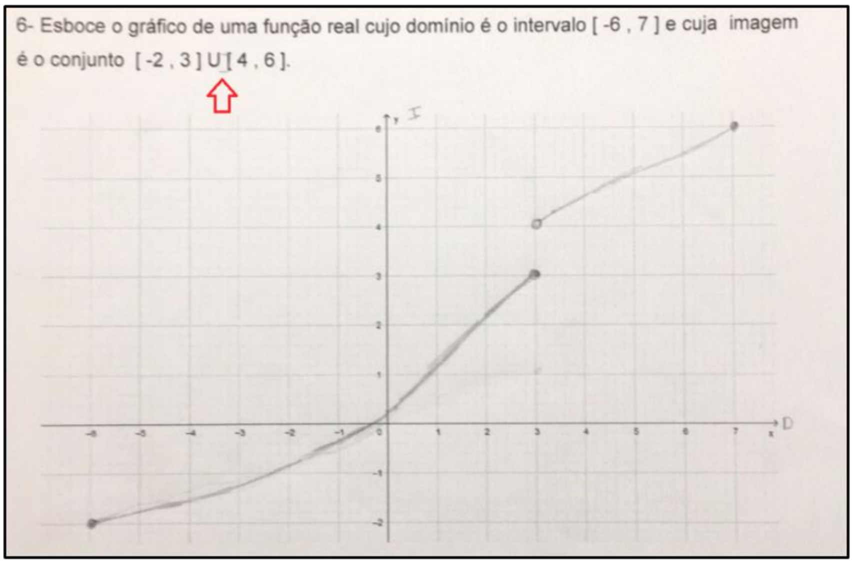
Figura 121 – Esboço feito pelo aluno A10



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como exemplo de erros para esta última questão da Apostila IV, temos as construções dos alunos A6 e A11. O aluno A6 esboçou um gráfico que conteve o intervalo de domínio expresso no enunciado. Porém, em relação à imagem dada, não conseguiu esboçar um gráfico que contivesse ambos os extremos fechados dos intervalos (Figura 122). Por não compreender como poderia ser feito o esboço de acordo com os intervalos do conjunto imagem, A6 "corrigiu" o enunciado da questão, anotando um extremo do intervalo como aberto.

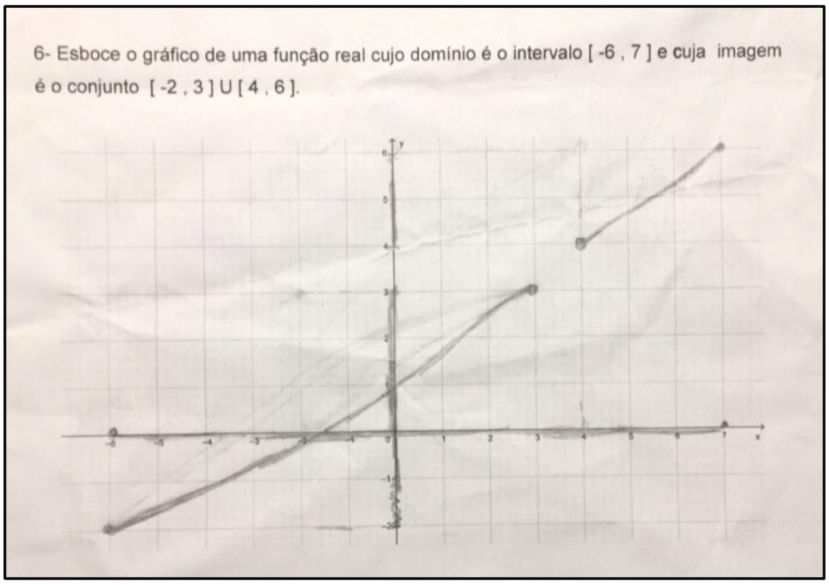
Figura 122 – Construção gráfica de A6; mudança no intervalo do conjunto imagem



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Já o aluno A11 esboçou um gráfico que conteve os intervalos do conjunto imagem dados na questão. Para o domínio, A11 deixou um "salto" no intervalo] 3 , 4 [(Figura 123).

Figura 123 – Construção gráfica de A11; "salto" no intervalo definido para o domínio



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pode-se perceber que o erro de A11 se assemelha muito ao erro cometido por A6. Ambos compreenderam que não poderia haver um mesmo elemento do domínio contendo imagens distintas. Porém, nenhum deles conseguiu pensar numa construção que respeitasse os intervalos de domínio e conjunto imagem expressos pelo enunciado.

Nesta aula IV, apenas o aluno A13 apresentou um desempenho ruim. Isso se deveu ao fato deste aluno não acompanhar as aulas de acordo com o planejado. Os outros treze alunos conseguiram acertar 50% ou mais das questões propostas. Depois de recolhida a atividade final, a turma teve a oportunidade de compreender os erros cometidos a partir das observações e correções feitas pelos pesquisadores. Abaixo estão contabilizados os erros e acertos cometidos pelos alunos (Quadro 6).

Quadro 6 – Percentual de acertos dos alunos nas questões da Apostila IV

QUESTÕES	**TOTAL DE ACERTOS**	**TOTAL DE ERROS**	**PERCENTUAL DE ACERTOS**
1ª	**13** – A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12 e A14	**1** – A13	Aproximadamente 93%
2ª	**9** – A1, A4, A5, A6, A8, A9, A11, A12 e A14	**5** – A2, A3, A7, A10 e A13	Aproximadamente 64%
3ª	**10** – A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A12	**4** – A1, A2, A13 e A14	Aproximadamente 71%
4ª	**7** – A1, A3, A5, A6, A8, A9 e A14	**7** – A2, A4, A7, A10, A11, A12, A13	50%
5ª	**7** – A1, A2, A4, A5, A7, A8 e A14	**7** – A3, A6, A9, A1, A11, A12 e A13	50%
6ª	**8** – A1, A2, A3, A5, A8, A10, A12 e A14	**4** – A4, A6, A11 e A13	Aproximadamente 57%

Fonte: Elaboração própria.

A fim de categorizar os erros cometidos nas questões desta última apostila, estes foram separados por classes de acordo com Cury (2008), sendo elas:

Classe A) Erros relacionados às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009).

Classe B) Erros relacionados à identificação de domínio e imagem de uma função.

Classe C) Erros relacionados à representação de domínio e imagem de função.

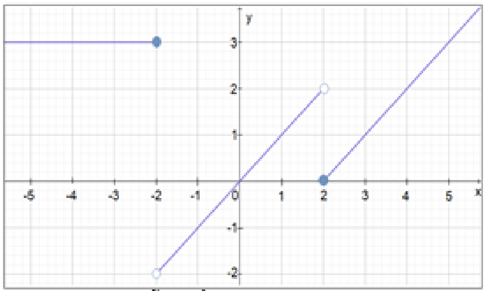
Classe D) Erros relacionados à construção gráfica que não representa uma função.

A Questão 1 (Figura 124), composta por quatro alternativas, sendo somente uma correta, buscou avaliar se o aluno saberia identificar a representação gráfica de uma função definida por mais de uma sentença, efetuando a mudança do registro algébrico para o gráfico por meio do processo de conversão.

Figura 124 – Questão 1 da apostila IV

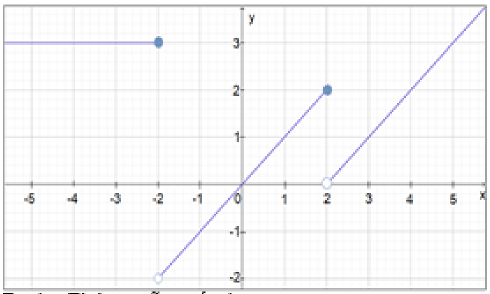
1 - Considere a função f definida pela lei f(x) = $\begin{cases} 3, se\ x < 2 \\ x, se\ \ -2 \leq x < 2 \\ x-2, se\ x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa que representa o gráfico da função f.

(a)



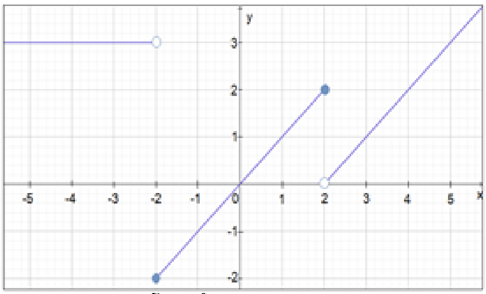
Fonte: Elaboração própria.

(b)



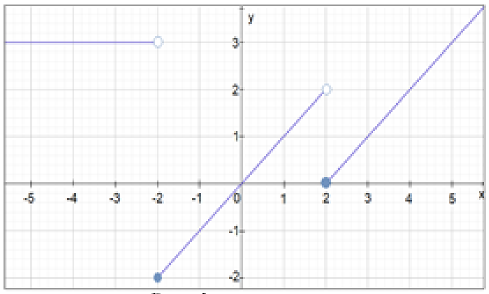
Fonte: Elaboração própria.

(c)



Fonte: Elaboração própria.

(d)



Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

Nela foi possível identificar uma classe de erro, que será detalhada a seguir:

Classe A), que está relacionada às respostas erradas no que concerne às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009).

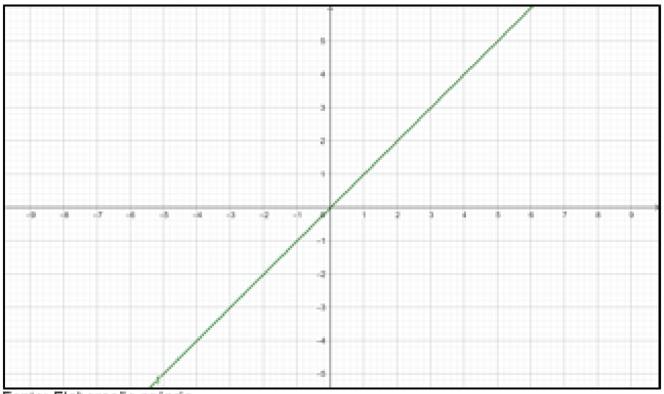
Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, somente o aluno A3 errou essa questão. Nota-se que o erro cometido pelo aluno A3 não foi somente efetuar a conversão incorretamente – há também um erro de formação, relacionado aos significados dos símbolos matemáticos ≤, ≥, < e >.

A Questão 2 (Figura 125) buscou avaliar se o aluno conseguiria identificar o domínio da função, dada sua representação gráfica e diferenciar funções com a mesma lei de formação a partir do domínio.

Figura 125 – Questão 2 da apostila IV

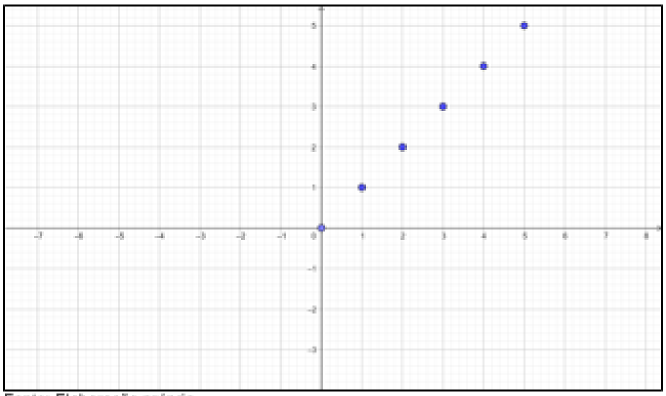
2- Observe os gráficos representados abaixo das funções **f** e **g**, que possuem as mesmas leis de formação **f(x) = x** e **g(x) = x**:

Gráfico 1



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 2



Fonte: Elaboração própria.

As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

____

____

Fonte: Elaboração própria.

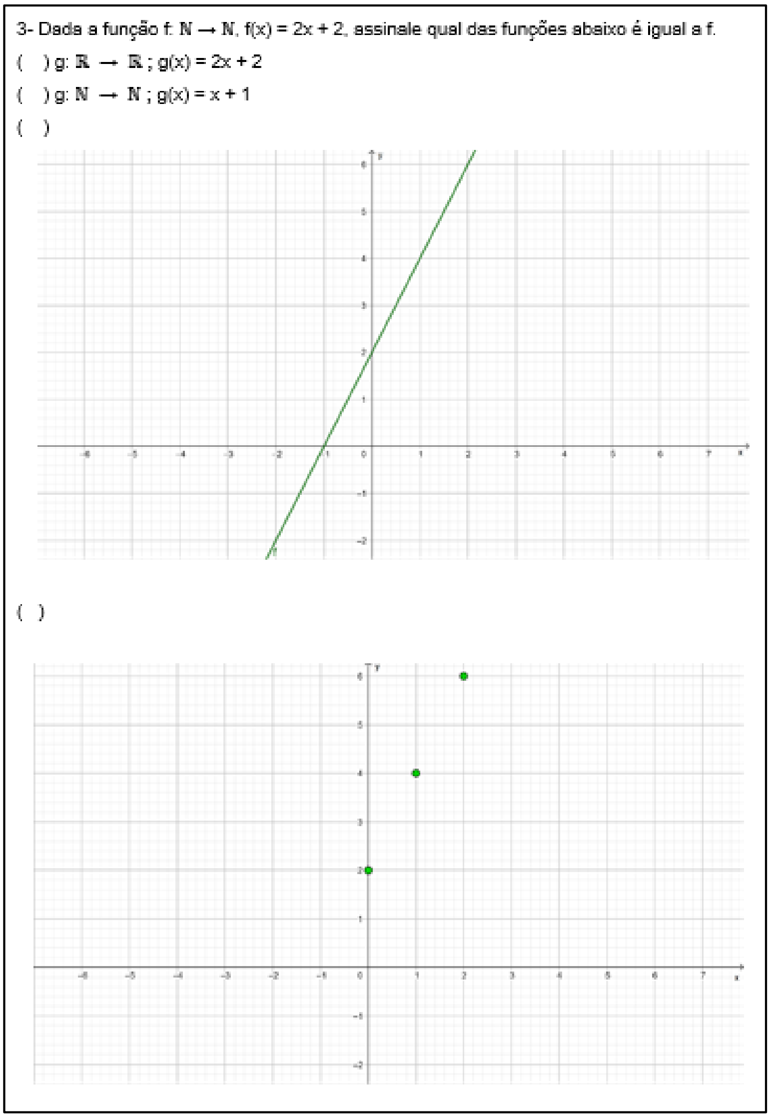
Nela foi possível identificar uma classe de erro, que será detalhada a seguir:

Classe A), que está relacionada às respostas erradas no que concerne às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009).

Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, cinco (A2, A3, A7, A10 e A13) erraram a questão. Eles não conseguiram identificar o que tornou diferente a construção dos gráficos, visto que, estes possuíam a mesma lei algébrica de formação. O que ocorreu foi um erro de formação, pois uma representação gráfica descrevia uma função real e a outra uma função natural.

A Questão 3 (Figura 126) buscou avaliar se o aluno saberia identificar o que torna duas funções iguais, além de efetuar a mudança do registro algébrico para o gráfico por meio do processo de conversão.

Figura 126 – Questão 3 da apostila IV



Fonte: Elaboração própria.

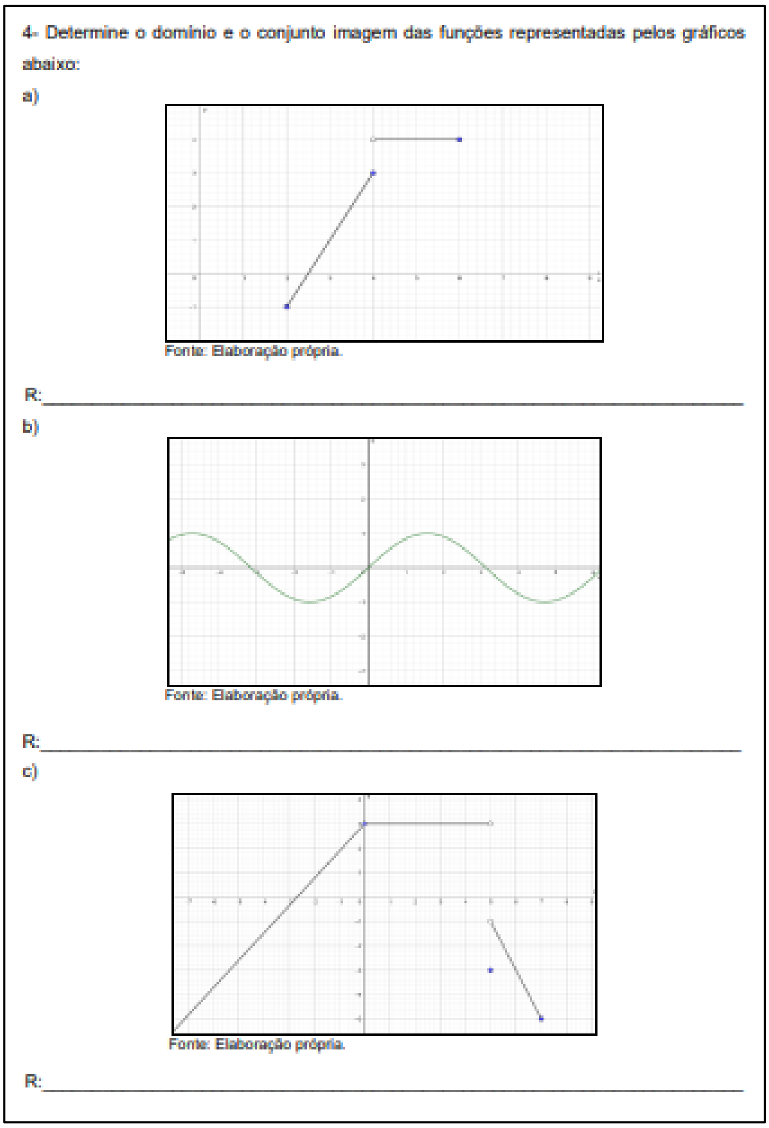
Nela foi possível identificar uma classe de erro, que será detalhada a seguir:

Classe A), que está relacionada com as respostas erradas no que concerne às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009).

Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, quatro (A1, A2, A13 e A14) erraram a questão. O erro identificado foi de formação, visto que a representação gráfica assinalada por estes estudantes representava uma função real, e o enunciado da questão a apresentava a descrição de uma função natural.

A Questão 4 (Figura 127), composta por três itens, buscou avaliar se o aluno saberia identificar o domínio e conjunto imagem de funções e representar estes elementos.

Figura 127– Questão 4 da apostila IV


4- Determine o domínio e o conjunto imagem das funções representadas pelos gráficos abaixo:

a)

Fonte: Elaboração própria.

R:____

b)

Fonte: Elaboração própria.

R:____

c)

Fonte: Elaboração própria.

R:____

Fonte: Elaboração própria.

Nela foi possível identificar duas classes de erro, que serão detalhadas a seguir:

Classe B), que está relacionada às respostas erradas no que concerne à identificação de domínio e imagem de uma função.

Classe C), que está relacionada às respostas erradas no que concerne à representação de domínio e imagem de função.

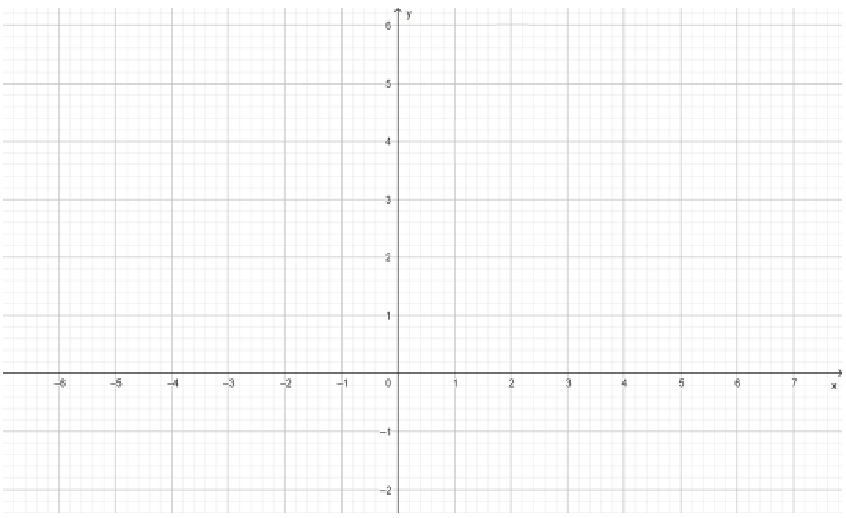
Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, sete erraram pelo menos parte de algum item da quarta questão; desses sete alunos, quatro (A2, A4, A7 e A12) apresentaram erros em Classe B. Esses alunos identificaram incorretamente o domínio e/ou o conjunto imagem de pelo menos uma das funções representadas graficamente.

Os outros três (A11, A10 e A13) apresentaram erros em Classe C, por representarem incorretamente o domínio e/ou o conjunto imagem de pelo menos uma das funções expostas.

A Questão 5 (Figura 128) buscou avaliar se o aluno saberia esboçar o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença e efetuar a mudança de um registro de representação para o outro.

Figura 128 – Questão 5 da apostila IV

5- Esboce o gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f(x) = $\begin{cases} -x, se\ x < -2 \\ 2, se\ -2 \leq x \leq 3 \\ x-1, se\ x > 3 \end{cases}$.



Fonte: Elaboração própria.

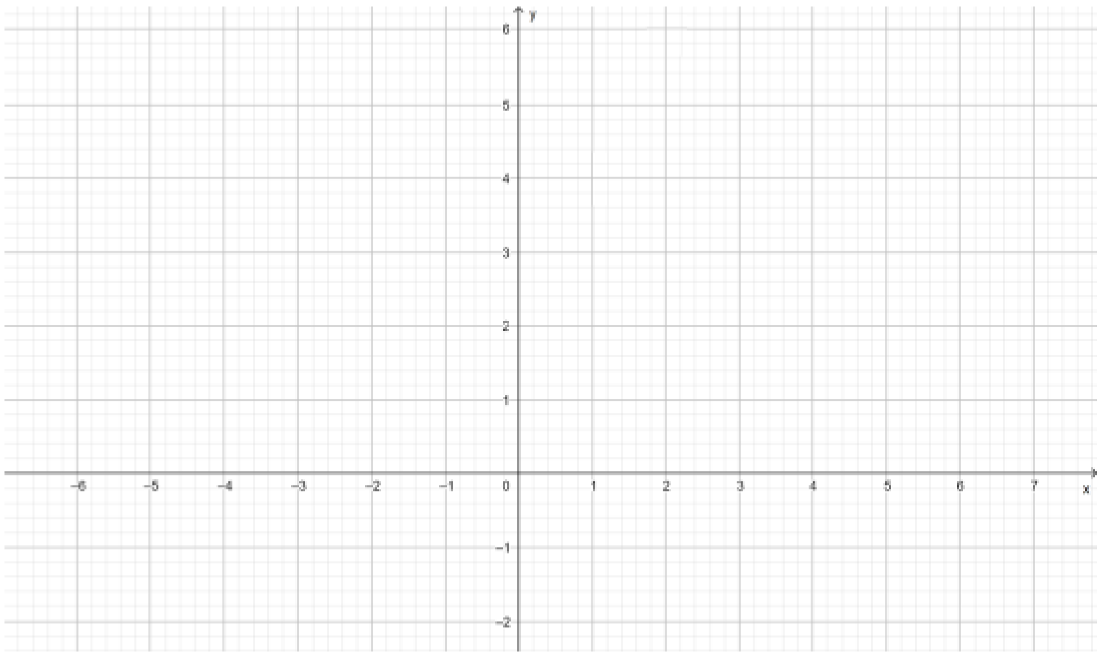
Nela foi possível identificar uma classe de erro, que será detalhada a seguir:

Classe A), que está relacionada às respostas erradas no que concerne às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009). Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, sete (A1, A2, A13 e A14) erraram a questão. A conversão de registros efetuada incorretamente se deu por erros de tratamento das sentenças da lei algébrica de formação da função.

A Questão 6 (Figura 129) buscou avaliar se o aluno saberia esboçar o gráfico de uma função real a partir do domínio e do conjunto imagem dado.

Figura 129 – Questão 6 da apostila IV

6- Esboce o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [-6 , 7] e cuja imagem é o conjunto [-2 , 3] U [4 , 6].



Fonte: Elaboração própria.

Nela foi possível identificar duas classes de erro, que serão detalhadas a seguir:

Classe A), que está relacionada às respostas erradas no que concerne às três atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (formação, tratamento e conversão), descritas por Duval (2009).

Classe D), que está relacionada às respostas erradas no que concerne à construção gráfica que não representa uma função.

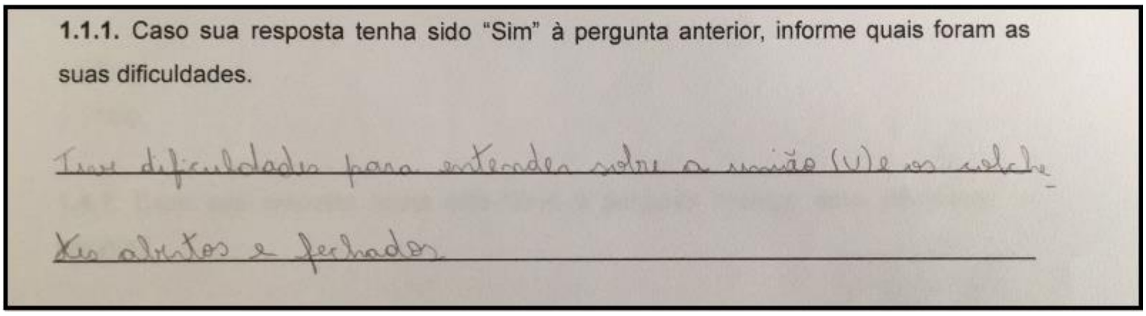
Dos quatorze alunos participantes da pesquisa, quatro (A4, A6, A11 e A13) erraram a questão. O erro cometido por estes alunos foi efetuar a conversão de registros incorretamente, por não respeitarem os intervalos de domínio e de conjunto imagem, além de esboçar gráficos que não representam função, por haver elementos do domínio sem imagem.

4.4 Questionário Final

Posteriormente ao debate e à correção de todas as questões da Aula IV, os alunos responderam ao Questionário Final. As perguntas objetivaram identificar se a intervenção pedagógica realizada contribuiu para o aprendizado da turma.

Na primeira pergunta, a maior parte da turma respondeu que não possui dificuldades para compreender os conteúdos abordados. Apenas o aluno A9 evidenciou suas dificuldades (Figura 129).

Figura 130 – Dificuldades do aluno A9

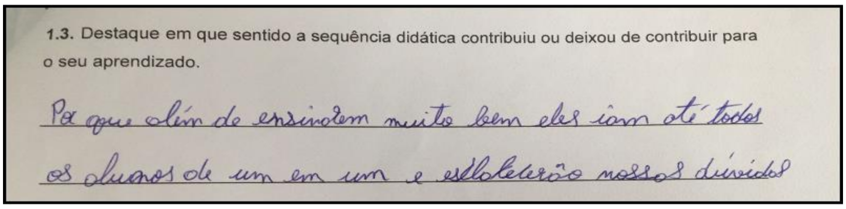

1.1.1. Caso sua resposta tenha sido "Sim" à pergunta anterior, informe quais foram as suas dificuldades.

Tive dificuldades para entender sobre a união (U) e os colchetes abertos e fechados

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Todos os alunos responderam que as atividades aplicadas contribuíram para a aprendizagem. Porém, ao serem solicitados a destacarem em que sentido a sequência didática contribuiu ou deixou de contribuir com a aprendizagem, poucas respostas foram dadas. Apenas o aluno A7 (Figura 130) e o aluno A5 (Figura 131) retornaram, fornecendo as seguintes respostas:

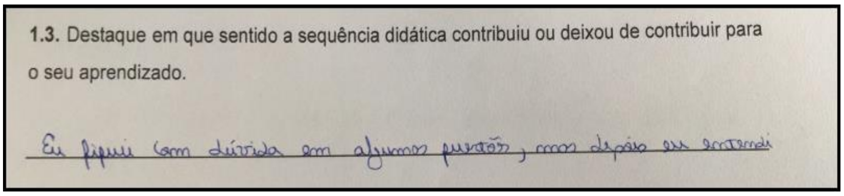
Figura 131 – Resposta do aluno A7 ao item 1.3 do Questionário Final


1.3. Destaque em que sentido a sequência didática contribuiu ou deixou de contribuir para o seu aprendizado.

Por que além de ensinarem muito bem eles iam até todos os alunos de um em um e esclarecerão nossas dúvidas

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 132 – Resposta do aluno A5 ao item 1.3 do Questionário Final



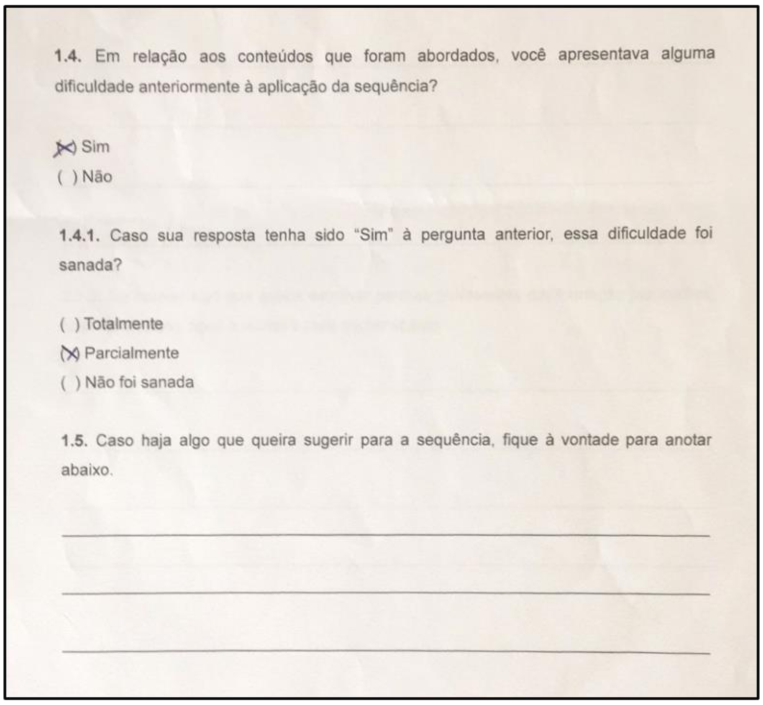
1.3. Destaque em que sentido a sequência didática contribuiu ou deixou de contribuir para o seu aprendizado.

Eu fiquei com dúvida em alguns pontos, mas depois eu entendi

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Sobre as dificuldades existentes previamente à intervenção pedagógica em relação aos conteúdos abordados, nove alunos responderam que estas foram totalmente sanadas e os outros cinco alunos responderam que estas foram parcialmente sanadas. Em seguida, não houve sugestões para a sequência didática (Figura 132).

Figura 133 – Resposta do aluno A8 em relação às dificuldades nos conteúdos abordados



1.4. Em relação aos conteúdos que foram abordados, você apresentava alguma dificuldade anteriormente à aplicação da sequência?

(X) Sim
( ) Não

1.4.1. Caso sua resposta tenha sido "Sim" à pergunta anterior, essa dificuldade foi sanada?

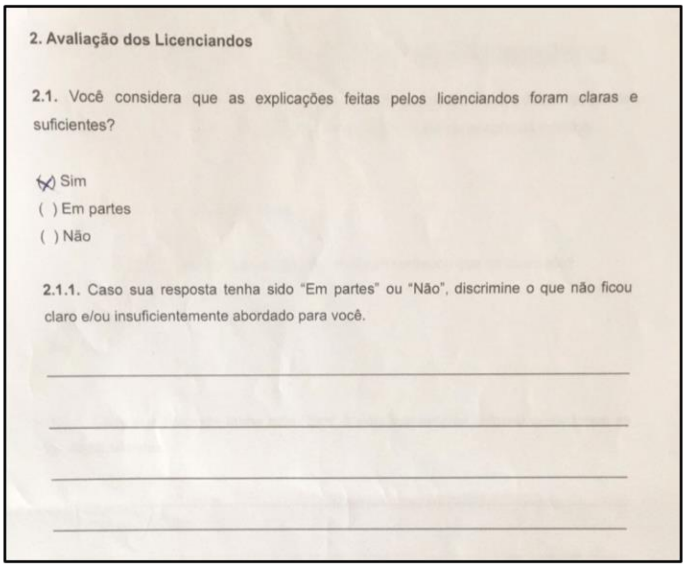
( ) Totalmente
(X) Parcialmente
( ) Não foi sanada

1.5. Caso haja algo que queira sugerir para a sequência, fique à vontade para anotar abaixo.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na seção de avaliação dos licenciandos (Figura 133), em resposta à primeira pergunta, todos os alunos julgaram que as explicações feitas acerca dos conteúdos tematizados foram claras e suficientes.

Figura 134 – Resposta do aluno A8 em relação às explicações dos licenciandos



2. Avaliação dos Licenciandos

2.1. Você considera que as explicações feitas pelos licenciandos foram claras e suficientes?

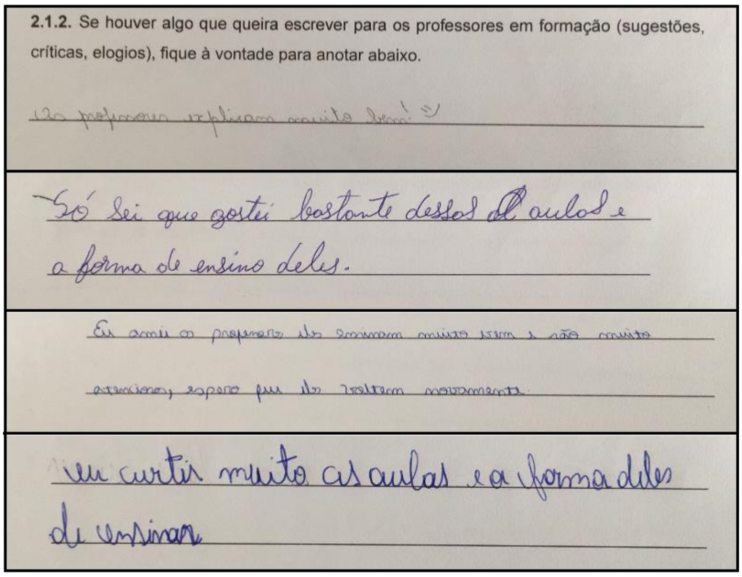
(X) Sim
( ) Em partes
( ) Não

2.1.1. Caso sua resposta tenha sido "Em partes" ou "Não", discrimine o que não ficou claro e/ou insuficientemente abordado para você.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na parte de sugestões aos professores em formação, última pergunta deste questionário, os alunos conferiram apenas elogios às atuações dos autores desta pesquisa (Figura 134).

Figura 135 – Considerações finais dos alunos



2.1.2. Se houver algo que queira escrever para os professores em formação (sugestões, críticas, elogios), fique à vontade para anotar abaixo.

Os professores explicaram muito bem! :)

Só sei que gostei bastante dessas ~~de~~ aulas e a forma de ensino deles.

Eu amei os professores eles ensinaram muito bem e são muito atenciosos, espero que eles voltem novamente.

eu curti muito as aulas e a forma deles de ensinar

Fonte: Protocolo de pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente Trabalho de Conclusão propôs verificar, numa turma do segundo ano do Ensino Médio, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode contribuir para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença.

Tendo em vista a proposta do trabalho, para que fosse alcançado o objetivo geral desta pesquisa – investigar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença, foram definidos três objetivos específicos.

Para atingir o primeiro objetivo específico – investigar se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica favorece a aprendizagem de funções definidas por mais de uma sentença – aprofundou-se os estudos sobre o ensino de funções apoiado à TRRS. Nos estudos sobre a TRRS, verificou-se que esta teoria abrange a aprendizagem em diversas ciências, contudo, na matemática é que se apresenta uma efetiva intervenção. Além disso, as representações semióticas são utilizadas para objetos/conteúdos/conceitos matemáticos, sendo de suma importância apresentar um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros. Ainda na fase de planejamento, elaborou-se uma sequência didática e um questionário final, sendo realizado um teste exploratório com os materiais produzidos, objetivando aprimorá-los.

As respostas dos alunos e observações feitas no decorrer da intervenção pedagógica contemplaram o segundo objetivo específico: verificar as contribuições de uma sequência de atividades baseadas nos registros de representação semiótica para viabilizar o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença. Todas as atividades foram elaboradas vislumbrando mobilizar os diferentes registros de representação semiótica, nas quais um objeto/conteúdo/conceito matemático foi apresentado por meio das suas diversas representações semióticas. Considerando o bom rendimento dos alunos nas questões propostas, foi possível constatar a relevância de elaborar atividades matemáticas que utilizem os diversos registros de representação trabalhando a conversão entre eles em diferentes sentidos.

Vale destacar que as abordagens feitas no decorrer da aplicação da sequência partiram dos conceitos iniciais de conjuntos numéricos, função e função afim, para se chegar à funções definidas por mais de uma sentença, favorecendo a construção do conhecimento de forma gradual, preocupando-se em evidenciar a importância de estudar todos estes assuntos.

Após a intervenção pedagógica, para alcançar-se o terceiro objetivo específico – proporcionar reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem dos elementos de funções, com ênfase para o domínio e o conjunto imagem, por meio de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença – foram analisadas as respostas coletadas na sequência didática, no questionário final, além das observações feitas nos encontros.

A partir da análise dos dados levantados e das observações dos autores no momento da intervenção pedagógica, foi possível responder à questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença?

Levando-se em conta o bom desempenho dos alunos na realização das atividades propostas e as repostas presentes no questionário final, foi possível verificar que, ao se elaborar uma sequência didática baseada na TRRS para o estudo de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença, os alunos, em geral, conseguem mais facilmente compreender os significados do domínio e do conjunto imagem no esboço gráfico. Tendo em vista a questão de prova motivadora da pesquisa, cuja resposta correta foi apresentada por apenas um estudante dentre mais de 30 alunos do 1º período da Licenciatura em Matemática, pode se considerar que o rendimento da turma de aplicação foi surpreendente, pois 8 alunos dentre 14 apresentaram um esboço gráfico correto.

Diante do exposto, os autores da pesquisa observaram que a sequência de atividades baseada na TRRS: i) favoreceu a compreensão do conteúdo; ii) proporcionou a utilização de mais de mais de um tipo de representação de um mesmo objeto matemático; iii) concedeu significados ao domínio e ao conjunto imagem de funções; iv) viabilizou a construção de gráficos de funções definidas por mais sentença; v) promoveu reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem dos elementos de funções, por meio das funções definidas por mais de uma sentença. Estas conclusões só foram obtidas devido ao uso dos instrumentos de coleta de dados adotados na pesquisa, mencionados sistematicamente no decorrer desta monografia.

O presente Trabalho de Conclusão foi de grande valor para os autores, visto que estes transformaram uma de suas dificuldades num objeto de estudo. Para o prosseguimento do trabalho no futuro, os autores sugerem que sejam tematizadas funções de outros tipos, como quadráticas, modulares, exponenciais, etc., além de aliar recursos tecnológicos digitais à intervenção pedagógica, quando for possível e viável, para que a compreensão de funções e de seus elementos seja ainda mais favorecida.

É importante esclarecer que as tecnologias digitais não foram empregadas, pelo fato dos autores quererem desenvolver uma sequência didática aplicável em qualquer escola e para alunos de qualquer classe social. Nem toda instituição de ensino conta com recursos tecnológicos digitais. Nem todo aluno possui aparelhos eletrônicos, como celular e computador. Além disso, o material produzido apresenta um pequeno custo financeiro para ser aplicado.

Espera-se que esta pesquisa mostre o quão importante é a utilização das diversas representações semióticas para o estudo de funções e significação de seus elementos, especialmente do domínio e do conjunto imagem, viabilizada pelas funções definidas por mais de uma sentença. Ademais, os autores desejam que este trabalho possa contribuir para futuras pesquisas e, sobretudo, para uma abordagem diversificada em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. M. F. B. **Registros de representação semióticas no estudo de polinômios usando aplicativos em *tablets***. 2015. 213 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: (PDF) REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE POLINÔMIOS USANDO APLICATIVOS EM TABLETS (researchgate.net). Acesso em: 19 ago. 2022.

ALVES; GUEDES; SILVA. **Sistema de ensino pH**: apostila ensino médio. Frentes 1ª série. Exatas. Caderno 2. 1ª ed. São Paulo: SOMOS Sistemas de Ensino, 2018.

AMORIM, F. V.; LOURENÇO, E. G.; MEDEIROS, E. J. R.; SOUZA, A. T. C. Ensino de funções definidas por mais de uma sentença, uma experiência com o Software GeoGebra. **Série Educar:** Matemática Tecnologia Educação Profissional, Belo Horizonte, v. 34, p. 46-52 , 2020. Disponível em: https://www.poisson.com.br/livros/serie_educar/volume34/Educar_vol34.pdf#page=46. Acesso em: 19 ago. 2022.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia** (RBECT), vol. 5, n. 2, p. 15-25 , mai./ago. 2012. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185/840. Acesso em: 19 ago. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

CARVALHO, L. P.; ANJOS, J. A. L. dos; MELO, S. B. de. Considerações sobre uma avaliação diagnóstica do conceito de função à luz da teoria dos registros de representações semióticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática,** v. 12, n. 2, p. 116–132, 2017.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 1. Ed. 1. Reimp. 116p.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012.

DAMIANI, M. F.; ROCHEFORT, R. S.; CASTRO, R.F.; DARIZ, M. R.; PINHEIRO, S. S. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**. Pelotas, n. 45, p. 57 – 67, mai./ago. 2013. Disponível em:

https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822. Acesso em: 19 ago. 2022.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In:. 5. ed. Campinas: Papirus, 2003. cap. 1, p. 11–33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. *Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique*. Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (Amazônia), v. 6, n. 12, p. 127–143, jan./jun. 2010.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** (Revemat), v. 7, n. 2, p. 96 –112, 2011. Título original: Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794. Acesso em: Acesso em: 19 ago. 2022.

DUVAL, R.. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** (Revemat), v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Título original: *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465. Acesso em: 19 ago. 2022.

FERRAZ, A. G. **Esboço do gráfico de função:** um estudo semiótico. Orientadora: Verônica Ferreira. 2008. 164 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4020. Acesso em: 19 ago. 2022.

GERHARDT, T. E. *et al*. Estrutura do projeto de pesquisa. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

GINEZ, P. C.; PIRES, R. F. Fenômeno de congruência e não congruência sobre a Função Exponencial no Caderno do Professor do estado de São Paulo. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, p. eo21022, 12 abr. 2021. Disponível em: http://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/487. Acesso em: 19 ago. 2022.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **A resolução de problemas como proposta metodológica para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças**. Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino - Universidade Estadual do Norte do Paraná Cornélio Procópio, v. 2, n. 2, p. 27-47, 2018. Disponível em; http://seer.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/1457/708. Acesso em: 19 ago. 2022.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior**: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. Ciênc. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?format=pdf&lang=pt . Acesso em: 19 ago. 2022.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar**, Volume 1, Funções, São Paulo: Editora Atual, 9ª Edição, 2013.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. **Dificuldades dos alunos com o conceito de função**. 1995. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p. 49-69. Disponível em: https://docplayer.com.br/154301679-Dificuldades-dos-alunos-com-o-conceito-de-funcao.html. Acesso em: 19 ago. 2022.

MUNIZ, R. S. S. **O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais**. 2019. 245 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro UENF, Campos dos Goytacazes, 2019. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2020/02/170460538_RAFAELA_DOS_SANTOS_SOUZA_MUNIZ.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades na construção de gráficos de funções**. 2006. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16119/1/FranciscoCO.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** Uma abordagem do processo ensino- aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11176/1/dissertacao_nanci_oliveira.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

PASA, B. C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio:** por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Orientador: Méricles Thadeu Moretti. 2017. 311 f. Tese (Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017 . Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/187061/PECT0347-T.pdf?sequence=-1 &isAllowed=y. Acesso em: 19 ago. 2022.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4473/1/90%20Ponte%20EM%2015.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função**. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte UFRN, Natal, 2000.

SELAU, B.; HAMMES L. J.; GRITTI, S. M. O mestrado profissional em educação e a repercussão dos relatórios crítico-reflexivos à luz de Paulo Freire. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 25, n. 47, p. 137-151, set./dez. 2016. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/download/4576/2858/. Acesso em: 19 ago. 2022.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. *In*: Dubinsky & Harel (Ed.). The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy, **M. A. A. Notes**, v. 25, p. 25 - 58, 1992. Disponível em: https://www.academia.edu/5091752/On_understanding_the_notion_of_function. Acesso em: 19 ago. 2022.

SILVA, B. H. P. **ANÁLISE DE ERROS:** O QUE PODEMOS APRENDER COM AS RESPOSTAS DE INGRESSANTES EM UM CURSO DE MATEMÁTICA?. Trabalho de conclusão de curso. Uberlândia, MG, 2019.

SILVA, D. S.; LAZZARIN, J. R. Funções: construindo conceitos a partir da análise gráfica. **Revista Ciências Exatas e Naturais** (RCEN), v. 20, n. 1 , p. 91-103, jan./jun. 2018. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/article/view/5088/pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

SILVEIRA, D. T; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica**.** In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa.** 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

SIMÕES, M. H. P. **Uma seqüência para o ensino/aprendizagem de função do 2º grau**. 1995. 254f. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1995.

SIQUEIRA, D. A.; BEUST, A. C. **O ensino de funções através da interpretação gráfica**. Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 45-66, 2008.

SOARES, M. A. S. **Os números racionais e os registros de representação semiótica:** análise de planejamento das séries finais do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, UNIJUI/RS, 2007. Disponível em: https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/370/Maria%20Arlita%20Soares.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 ago. 2022.

SOUZA, A. A. **Obstáculos epistemológicos do conceito de função na transição do Ensino Médio para o superior**. Tese (Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2072_Anderson%20Almeida%20de%20Souza.pdf. Acesso em: 19 ago. 2022.

TEIXEIRA, E. B. **A Análise de Dados na Pesquisa Científica:** importância e desafios em estudos organizacionais. Editora Unijuí, 2003. p. 191-192 . Disponível em : https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/desenvolvimentoemquestao/article/view/84/41&ved=2ahUKEwiJmeqU-PrxAhW

Vq5UCHWS9Ai8QFjAFegQIIRAC&usg=AOvVaw0MzuNge-TP1E3oki1o1lTO. Acesso em: 19 ago. 2022.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças**. 2016. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18765/2/Armenio%20Lannes%20Xavier%20Neto.pdf Acesso em: 19 ago. 2022.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Prezado(a) aluno(a), este formulário se refere à participação no Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Representação gráfica de funções definidas por mais de uma sentença: uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica” dos autores Igor Pessanha Menezes e Quéren Ribeiro Miguel dos Santos, alunos da Licenciatura em Matemática do IFFluminense campus Campos Centro, orientados pelo professor mestre Cleuber Eduardo do Nascimento Silva. Esta pesquisa tem por objetivo verificar os conhecimentos de alunos do 2.º ano do Ensino Médio acerca de funções e apresentar uma sequência didática que viabilize a compreensão dos estudantes sobre este conteúdo, com enfoque na análise e construção de gráficos de funções definidas por mais de uma sentença, apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Sua participação nesta pesquisa é voluntária, não havendo gastos ou ganhos financeiros de sua parte. Todas as informações que permitam identificá-lo(a) serão omitidas e sua identidade mantida em sigilo na publicação dos resultados finais deste trabalho. Esclarecemos, ainda, que a pesquisa é de caráter estritamente acadêmico. Desde já, agradecemos sua colaboração e nos colocamos à disposição para o esclarecimento de quaisquer dúvidas referentes à pesquisa. E-mails para contato: igoroprof@gmail.com, qsantos.ribeiro@gmail.com, cleuber.silva30@gmail.com.

Nome:

___

E-mail:

___

Cronograma das atividades:

1º encontro - 22/03/2022	Termo de consentimento (5 min) Aplicação da sequência - Aula 1 (45 min) Aplicação da sequência - Aula 2 (50 min)
2° encontro - 24/03/2022	Aplicação da sequência - Aula 3 (45 min) Aplicação da sequência - Aula 4 (45 min) Aplicação do questionário final (10 min)
Encontro(s) extraordinário(s) - a definir data(s) com a turma	Atividades pendentes

Termo de Consentimento:

(   ) Estou ciente das datas das aulas e atividades, as quais desejo participar.

(   ) Não desejo participar.

Você autoriza a utilização das suas respostas no nosso trabalho de pesquisa?

(   ) Sim.

(   ) Não.

Campos dos Goytacazes, ______ de ________________ de _________.

____

Assinatura do aluno

APÊNDICE B – AULA I

Escola: ____

Aluno(a):____

Conjuntos Numéricos e Intervalos Reais - Aula I

1. Conjuntos Numéricos

1.1. Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é formado pelos números de contagem e o zero. Este conjunto pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ... \}$$

1.3.1.1. Subconjunto dos números Naturais

Exemplo: Conjunto dos números naturais menores do que 10.

R:____.

1.2. Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é uma ampliação dos números naturais, sendo composto pela união dos números naturais com os respectivos números simétricos.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

1.2.1. Subconjunto dos números Inteiros

Exemplo: Conjunto dos números inteiros maiores do que - 4 e menores ou iguais a 3.

R:____.

1.3. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de fração. Contém o conjunto dos números inteiros que, por sua vez, contém os números naturais. Os números que podem ser escritos na forma de fração são: números inteiros, decimais finitos e dízimas periódicas. Os elementos deste conjunto podem ser representados da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

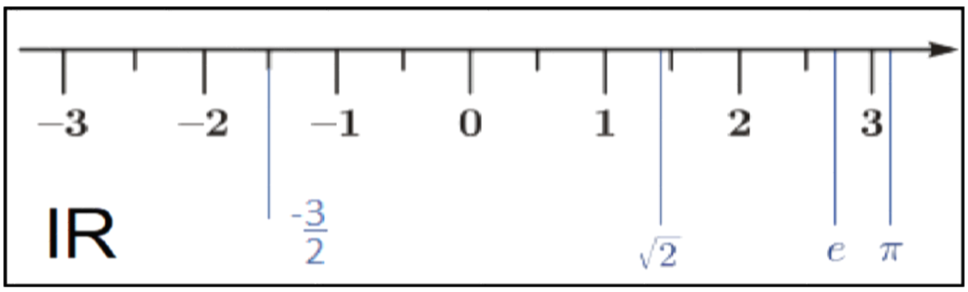
1.3.1. Subconjunto dos números Racionais

Exemplo: Conjunto dos números racionais maiores do que $-\frac{1}{4}$.

R:____.

1.4. Conjunto dos números reais (IR)

O conjunto dos números reais é dado pela união dos números racionais com os números irracionais (~~dízimas não periódicas~~). Assim, a união de todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais constitui o conjunto dos números reais. Os números reais podem ser representados por infinitos pontos que formam uma reta numérica infinita:



Fonte: https://www.wikiwand.com/pt/N%C3%BAmero_real.

1.4.1. Subconjunto dos números Reais

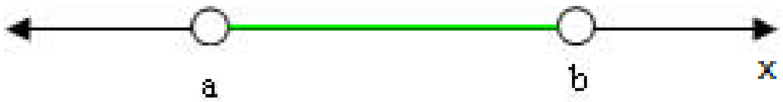
Exemplo: Conjunto dos números reais entre -10 e 10.

R:____.

2. Intervalos Reais

Os subconjuntos dos números Reais determinados por desigualdades são chamados de Intervalos Reais. Existem cinco tipos de intervalos: intervalo aberto, intervalo fechado, intervalo semiaberto à direita (fechado à esquerda e aberto à direita), intervalo semiaberto à esquerda (fechado à direita e aberto à esquerda) e intervalos lineares (“intervalos infinitos”).

2.1. Intervalo aberto



Os valores extremos **a** e **b** não pertencem ao intervalo. Outras formas de representação desse intervalo:

.] a , b [ou (a , b);

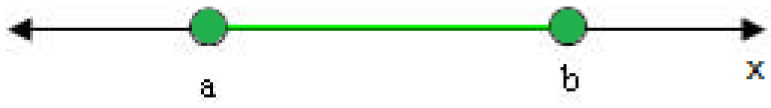
. {x ∈ IR | a < x < b }.

1 - Represente o intervalo abaixo de todas as outras possíveis formas:

. {x ∈ IR | 2 < x < 5};

. ______________ou_______________;

2.2. Intervalo fechado



Os valores extremos **a** e **b** pertencem ao intervalo. Outras formas de representação desse intervalo:

. [a , b];

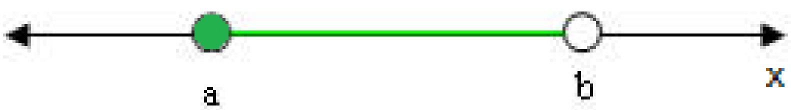
. {x ∈ IR | a ≤ x ≤ b }.

2 - Represente o intervalo abaixo de todas as outras possíveis formas.

. [- 3 , 7];

. ______________________________;

2.3. Intervalo aberto à direita



Apenas o valor extremo **a** pertence ao intervalo. Outras formas de representação desse intervalo:

. ______________ou_______________;

. _________________________________.

3 - Represente o intervalo abaixo das outras possíveis formas.

. ________________ou_________________;

. ____________________________________.

2.4. Intervalo aberto à esquerda

Apenas o valor extremo **b** pertence ao intervalo. Outras formas de representação desse intervalo:

. ________________ou________________;

. __________________________________.

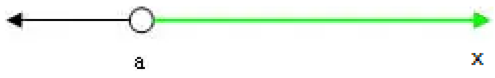
4 - Represente o intervalo abaixo das outras possíveis formas:

.] -3/2 , 5/2]   ou   (-3/2 , 5/2];

. __________________________________;

2.5. Intervalos Lineares ("Intervalos Infinitos")

1)



2)

3)

4)

Há apenas um valor extremo, podendo este pertencer ou não ao intervalo. Outras formas de representação dos intervalos:

1)

. $(a, +\infty)$ ou ______________________;

.________________________________.

2)

.________________ ou ________________;

. $\{ x \in IR \mid x < a \}$

3)

. $[a, +\infty)$ ou ______________________;

.________________________________.

4)

.________________ ou ________________;

. $\{ x \in IR \mid x \leq a \}$

5 - Represente os intervalos abaixo das outras possíveis formas:

a)

.________________ ou ________________;

. $\{ x \in IR \mid x \leq -5 \}$

b)

.________________ ou ________________;

.__________________________________;

APÊNDICE C – AULA II

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Escola: ____

Aluno(a):____

Introdução à função - Aula II

1. Plano cartesiano

1.1. Marcação de pontos

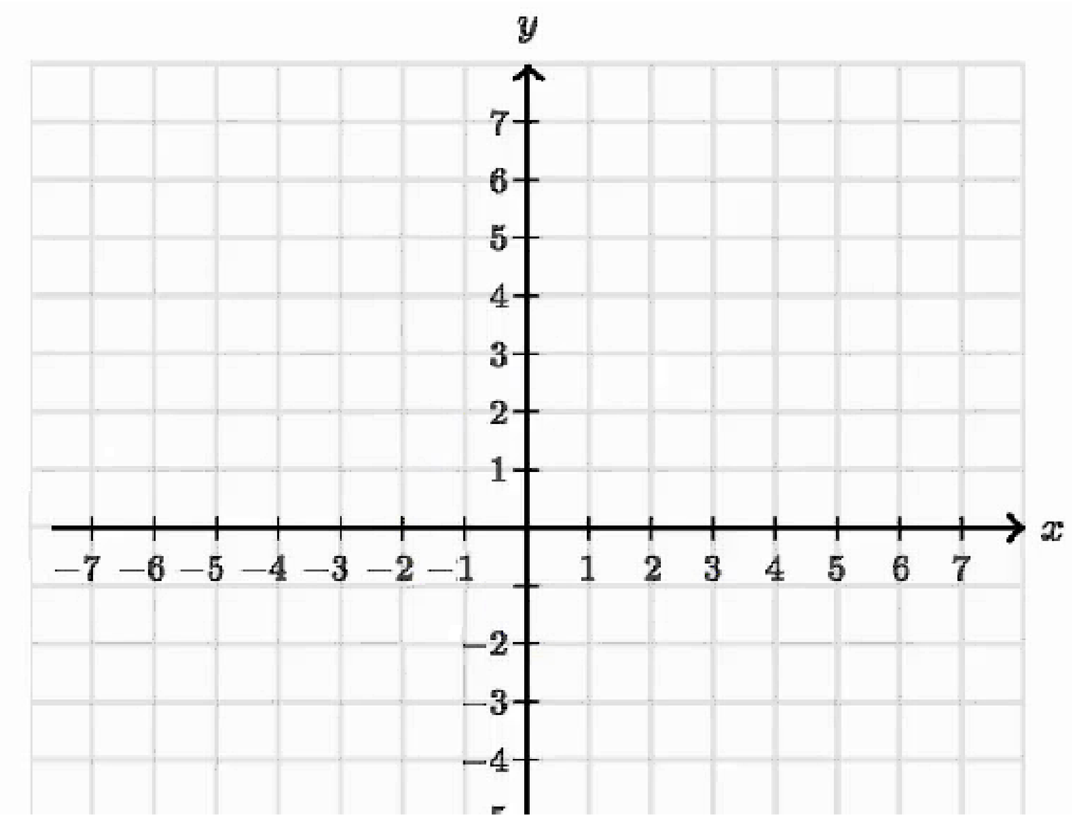
Um par ordenado P(x,y) é formado por um objeto x, chamado de primeira coordenada de P e um objeto y, chamado de segunda coordenada de P (LIMA, 2007).

1.1.2. Jogo “Cada um no seu lugar”

No jogo “Cada um no seu lugar”, cada integrante da dupla deve lançar o dado seis vezes e registrar na tabela abaixo os valores obtidos. Um componente da dupla será o “X” e o outro o “Y”. Quem for o “X”, lançará o dado primeiro por seis vezes consecutivas e registrará cada valor obtido na coluna do “x”. Em seguida, quem for o “Y”, lançará o dado também por seis vezes e registrará cada valor obtido na coluna do “y”.

JOGADAS	x	y
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		

Agora, marque os seis pontos que representam as seis jogadas da dupla no plano cartesiano abaixo:



Obs.: Cada ponto é formado pelas coordenas x e y (P(x,y)).

2. Domínio e Imagem

2.1. Domínio

Seja J a relação de X em Y do jogo acima. Chama-se **domínio de J** o conjunto D formado por todos os primeiros elementos (x) dos pares ordenados pertencentes à relação J (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\, y, y \in Y \mid (x, y) \in J$$

a) No jogo acima, qual é o domínio da relação J? Represente o conjunto D por meio de chaves.

R: ____.

2.2. Imagem

Seja J a relação de X em Y do jogo acima. Chama-se **imagem de J** o conjunto Im de todos os segundos elementos (y) dos pares ordenados pertencentes à relação J (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

$$y \in \mathrm{Im} \iff \exists\, x, x \in Y \mid (x, y) \in J$$

b) No jogo acima, qual é a Imagem da relação J? Represente o conjunto Im por meio de chaves.

R: ____.

3. Função

3.1. Definição de Função

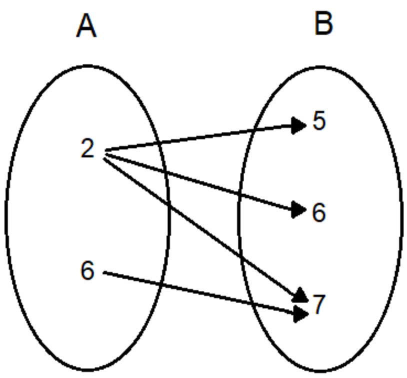
Dados dois conjuntos não vazios, a função **f** de um conjunto A para um conjunto B é uma relação entre elementos de A e elementos de B, em que cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018). Notação:

$f: A \to B$ (**f** é uma função de A em B)

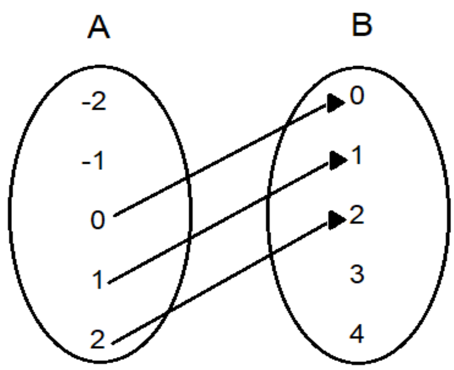
$x \to y = f(x)$ (lei de associação)

I) Assinale a(s) alternativa(s) que representa(m) função(ões). Nas relações não marcadas, indique o que pode ser alterado para torná-las funções.

(1)



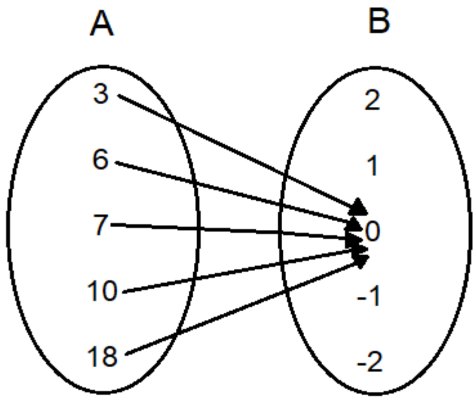
(2)



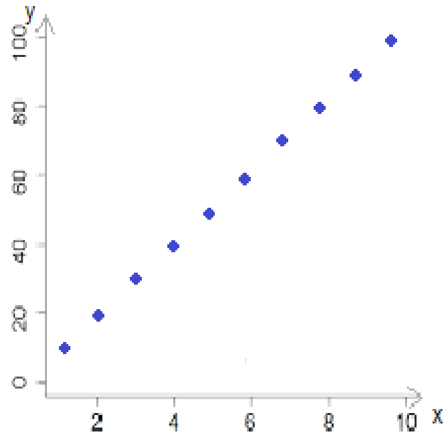
______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

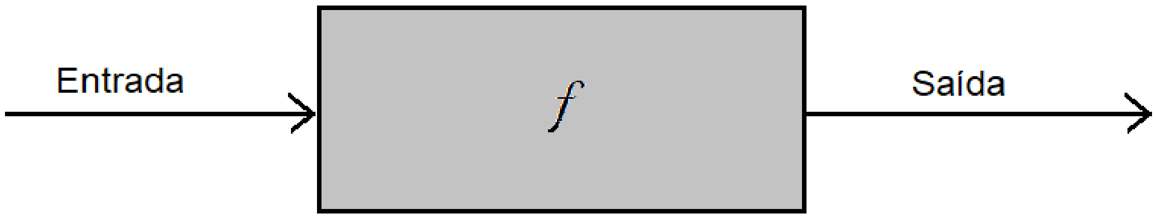
(3)



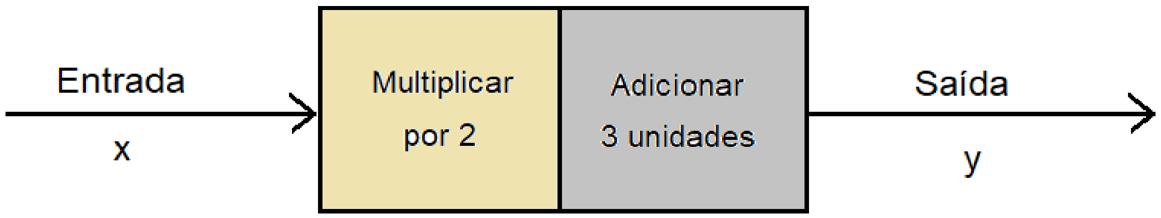
(4)



Pense na função como uma máquina, em que para cada número que se coloca na “entrada”, são feitas as operações indicadas, fornecendo um número na “saída”.



II) Observe a imagem abaixo:

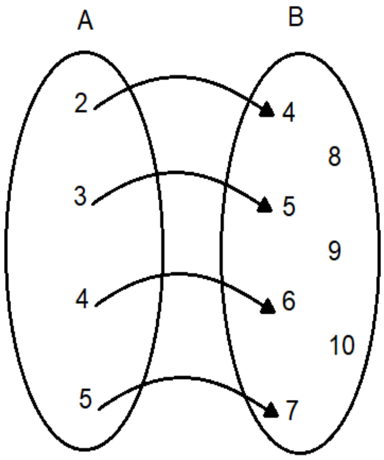


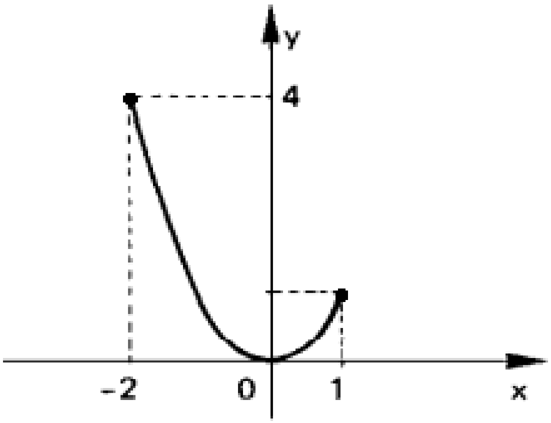
Se os valores de entrada forem 2, 3 e 5 quais serão os valores de saída, respectivamente, para cada número?

R: ____.

3.2. Domínio da função: D(f)

Def.: Seja f uma função de A em B (f: A → B). Chamamos de domínio de f (**D(f)**) todos os elementos do conjunto A, que são os valores de x (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).



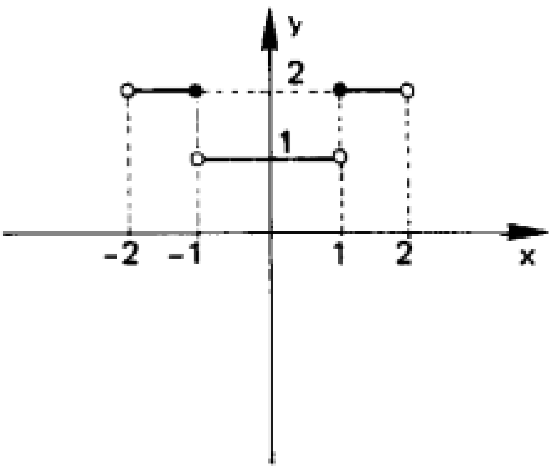


D(f) = {2, 3, 4, 5}

D(f) = {x ∈ IR | -2 ≤ x ≤ 1}

Domínio = conjunto de partida

I) Qual é o domínio da função representada pelo gráfico abaixo?

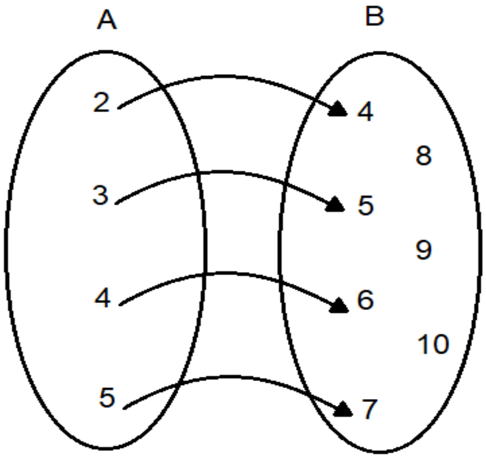


R:____.

3. Contradomínio e Conjunto Imagem da função

3.3.1. Contradomínio: CD(f)

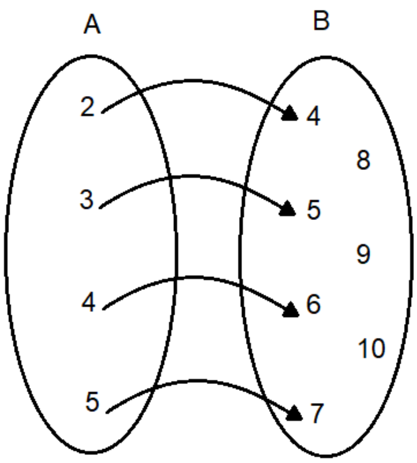
Def.: Seja f uma função de A em B (f: A → B). Chamamos de contradomínio CD de f todos os elementos de B (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).

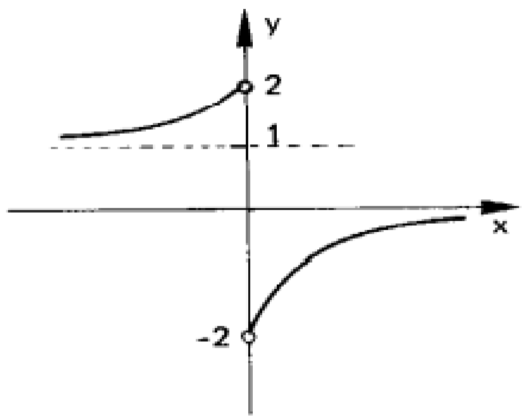


CD(f) = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

3.3.2. Conjunto Imagem da função: Im(f)

Def.: Seja f uma função de A em B (f: A → B). Chamamos de imagem de f (**Im(f)**) o conjunto dos valores que y pode assumir, de modo que cada valor de x em A esteja relacionado a um único valor de y em B (GUEDES; SILVA; ALVES, 2018).



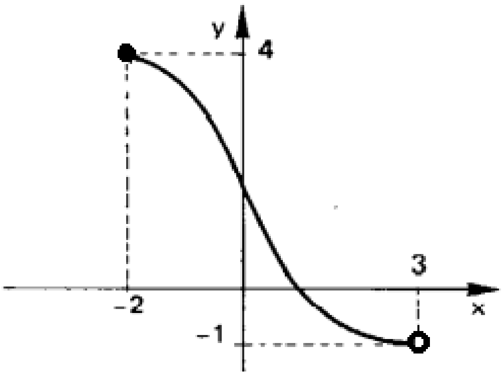


Im(f) = {4, 5, 6, 7}

Im(f) = {$y \in R$ | $-2 < y < 0$ ou $1 < y < 2$}

A imagem é um subconjunto do contradomínio

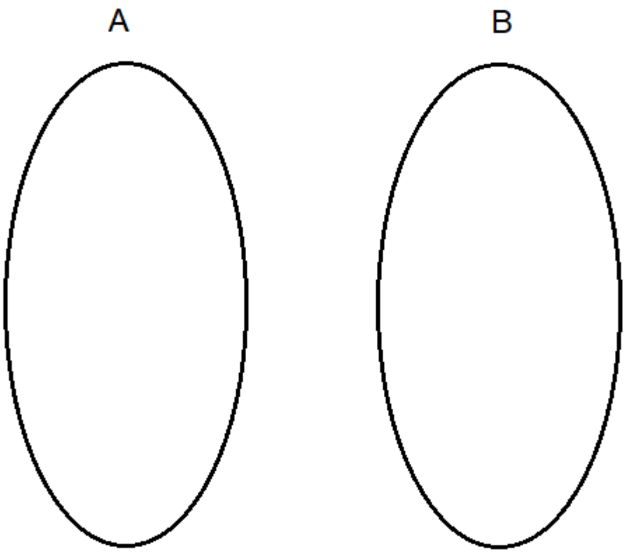
I) Qual é o conjunto imagem da função representada pelo gráfico abaixo?



R: ____.

4. Exercício:

Dados os conjuntos A = {2, 4, 5, 8, 9}, B = {4, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 24, 27} e a função f definida de A em B que associa cada elemento x ao seu próprio valor somado do seu dobro, indique a lei de formação da função, o domínio, contradomínio e o conjunto imagem de f.



____

____

____

____

APÊNDICE D – AULA III

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Escola: ____

Aluno(a):____

Função afim e função definida por mais de uma sentença - Aula III

1. Função afim

1.1. Definição

Função polinomial do 1º grau ou função afim é toda função cuja lei de formação tem forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, em que **a** é chamado de coeficiente angular e **b** coeficiente linear da função (ALVES; GUEDES; SILVA, 2018).

Problema 1: Na padaria de seu José, um pacote de pão fatiado custa R$ 3,00. Durante a pandemia, seu José passou a trabalhar apenas com entrega. Por ser uma padaria localizada num pequeno bairro da cidade, as entregas custam apenas R$ 1,00 para a freguesia local. Não há entregas para fora do bairro. Dadas estas informações:

a) Preencha a tabela abaixo que relaciona a quantidade **x** de pacotes de pão com o valor total **y** a ser pago pelo cliente.

Quantidade (x)	Valor total (y)

b) Esboce o gráfico que representa essa situação.

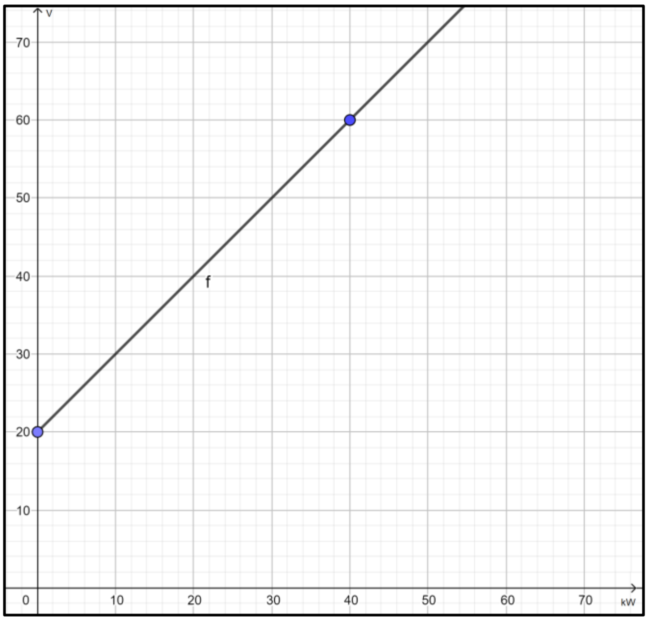
c) Qual é o domínio, contradomínio e conjunto imagem desta relação?

d) Esta relação pode ser considerada função? Por quê?

e) Qual é a lei algébrica que associa a quantidade de pacotes de pão ao valor total?

f) Esta lei serve para qualquer quantidade de pacotes de pão? Por quê?

Problema 2: Observe o gráfico abaixo que representa o valor (V) a ser pago mensalmente por uma conta de luz, em função de quilowatts (kW) consumidos:



Fonte: Elaboração própria.

a) Qual a lei de formação da função representada pelo gráfico?

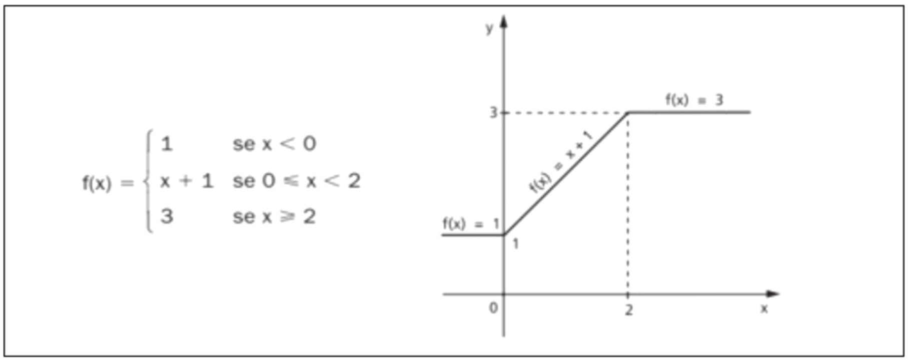
---

b) Qual é o domínio e conjunto imagem da função?

---

2. Função definida por mais de uma sentença

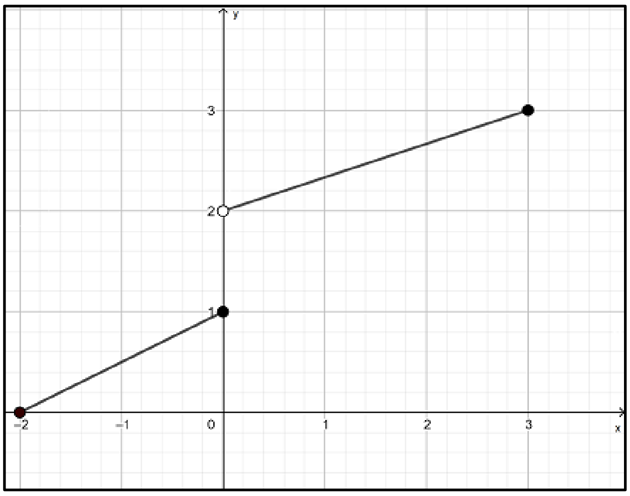
“Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais está ligada a um domínio D contido no domínio da função.” (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 184). Exemplo:



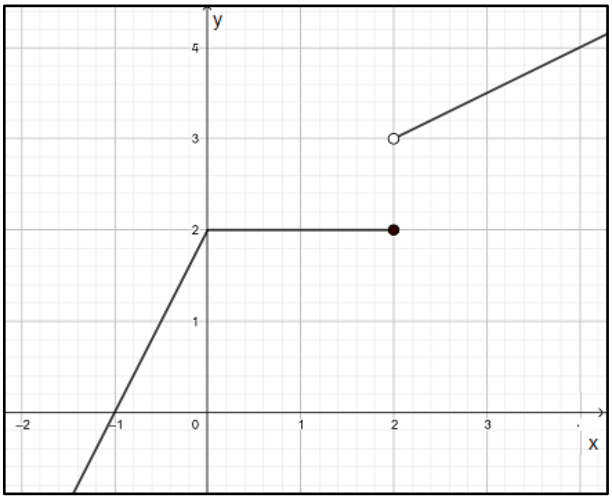
Fonte: IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 184.

2.1. Identificando Domínio e Conjunto Imagem

O domínio e o conjunto imagem de uma função definida por mais de uma sentença são dados pela união dos domínios e imagens de cada sentença. Observe:



Fonte: Elaboração própria.

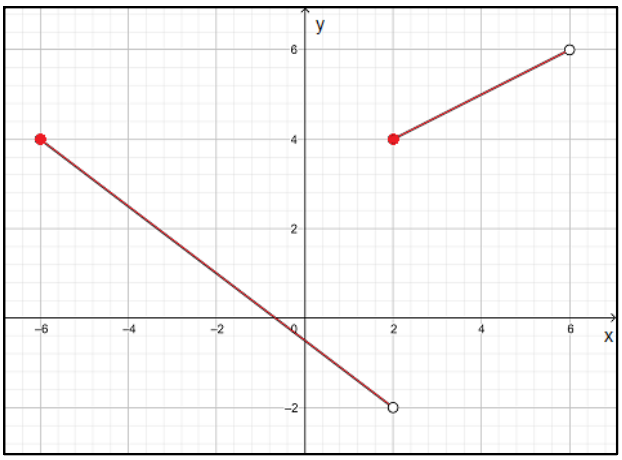


Fonte: Elaboração própria.

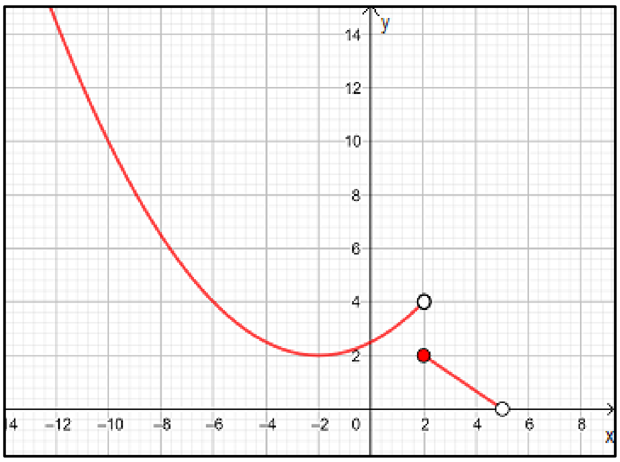
D(f) = [-2 , 3] ; Im(f) = [0 , 1] U] 2 , 3]

D(g) = ℝ ; Im(g) =] -∞ , 2] U] 3 , +∞ [

1- Identifique o domínio e o conjunto imagem dos gráficos abaixo:



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

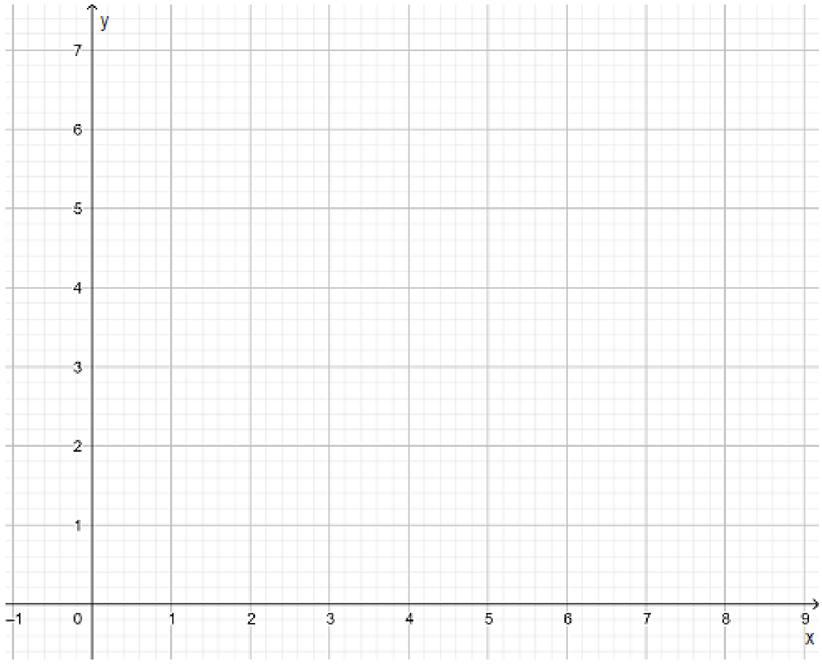
D(f) =

Im(f) =

D(g) =

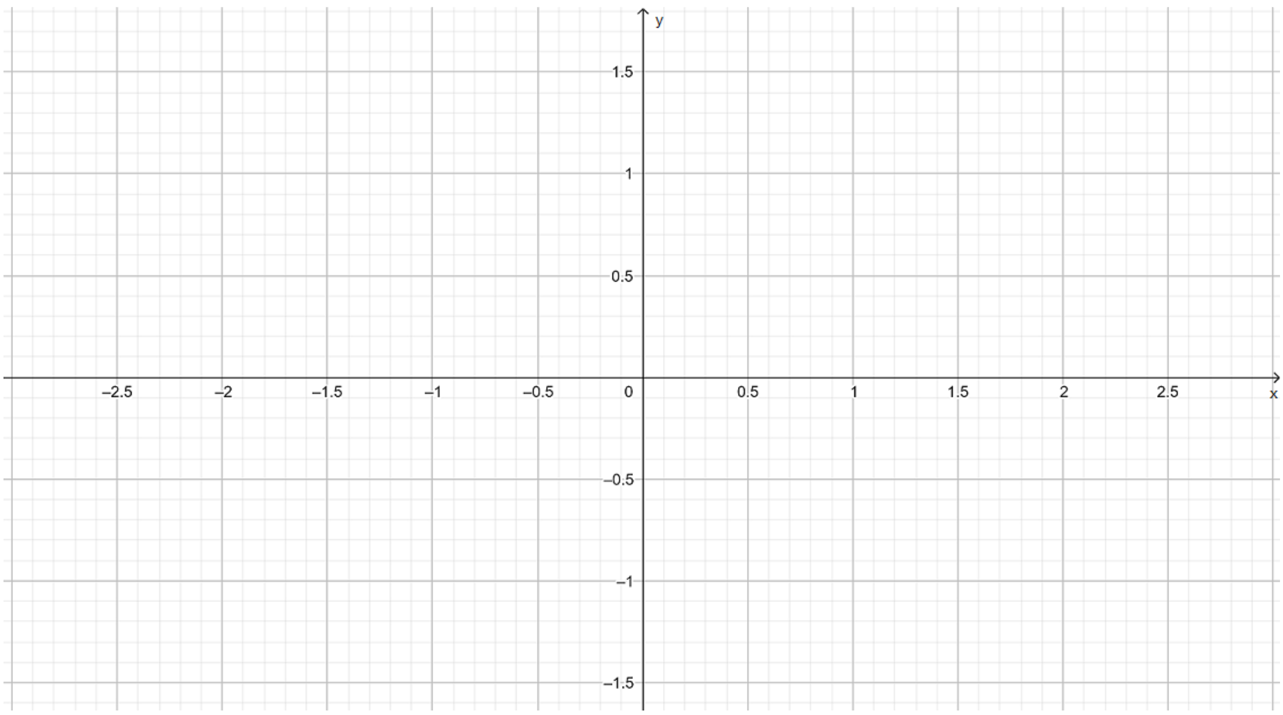
Im(g) =

2- Esboce o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [0 , 6] e cuja imagem é o conjunto [0 , 4] U [5 , 7].



3- Construa o gráfico da função definida por mais de uma sentença abaixo, explicitando seu domínio e conjunto imagem.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 + x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$



Problema 3: Um piloto realiza um teste de segurança num veículo durante 1 minuto, procedendo da seguinte forma:

- Nos 10 primeiros segundos, acelera até atingir 40 km/h, mantendo esta velocidade até os 20 segundos;
- Em seguida, acelera até 120 km/h, percebendo que atinge esta velocidade aos 30 segundos de teste;
- Posteriormente, reduz a velocidade, atingindo, aos 40 segundos, 80 km/h;
- Mantém a velocidade a 80 km/h até o final do teste.

Obs.: O veículo possui um dispositivo que mantém constante a aceleração imposta pelo piloto.

a) Esboce o gráfico **v** (Km/h) **x t** (s).

b) Dê os intervalos do domínio e do conjunto imagem expostos no gráfico.

c) Identifique as sentenças que compõem a lei de formação desta função.

R:

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Escola: ____

Aluno(a):____

APÊNDICE E – AULA IV

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

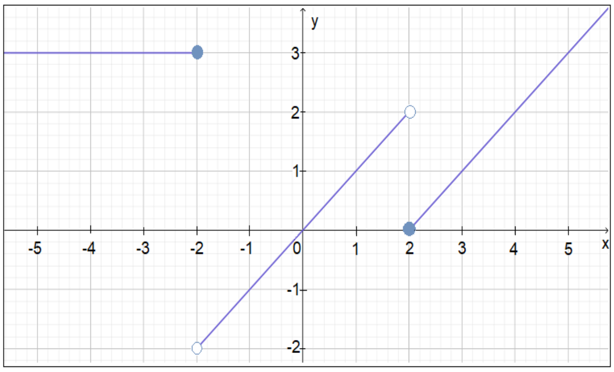
Escola: ____

Aluno(a):____

Domínio, Imagem e Construção Gráfica de Função - Aula IV

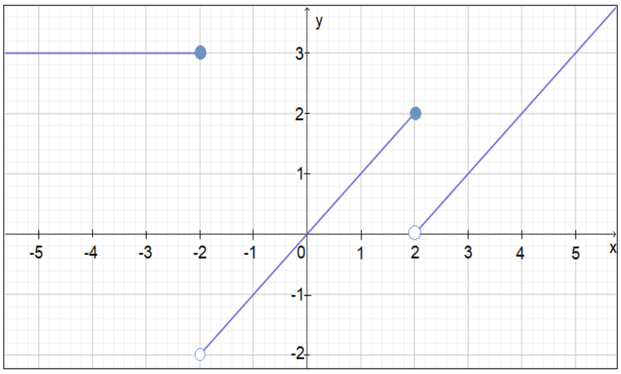
1 - Considere a função f definida pela lei f(x) = $\begin{cases} 3, se\ x < 2 \\ x, se\ -2 \le x < 2 \\ x-2, se\ x \ge 2 \end{cases}$. Marque a alternativa que representa o gráfico da função f.

(a)



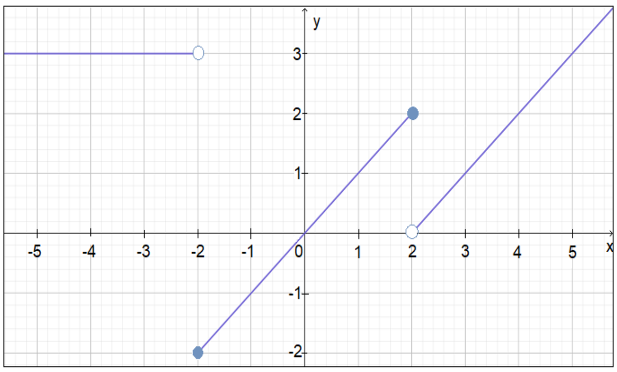
Fonte: Elaboração própria.

(b)



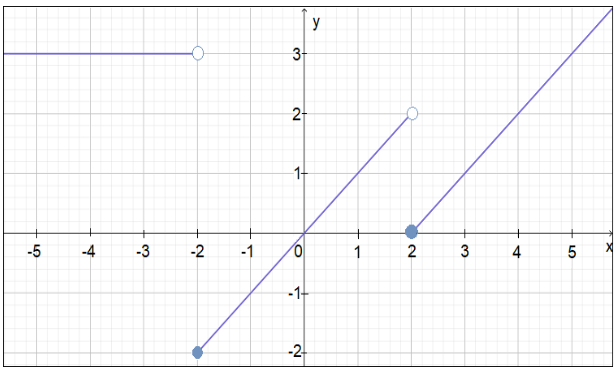
Fonte: Elaboração própria.

(c)



Fonte: Elaboração própria.

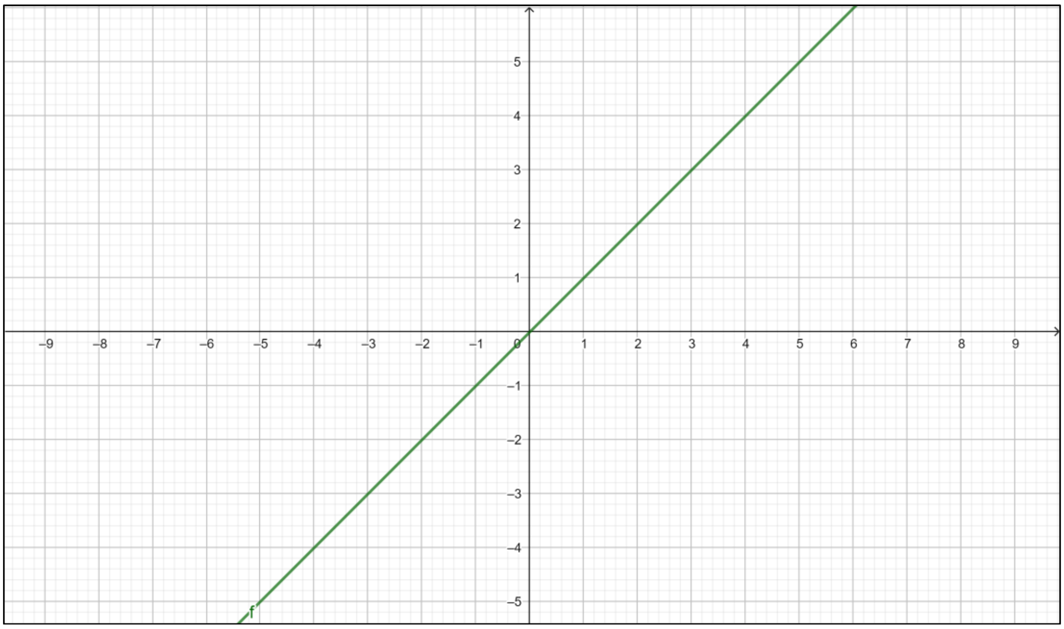
(d)



Fonte: Elaboração própria.

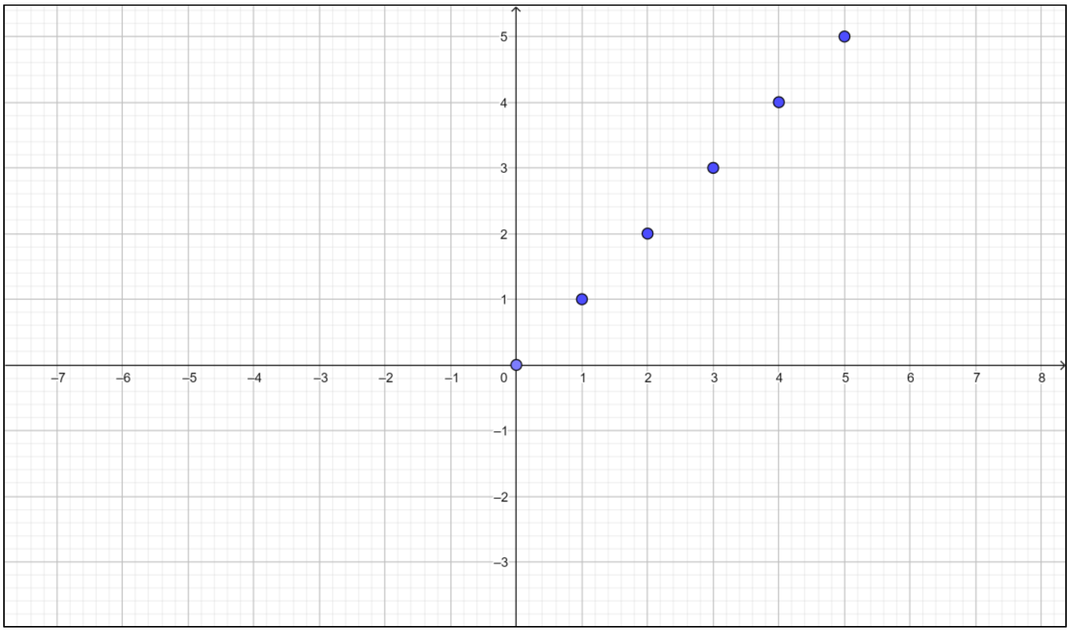
2- Observe os gráficos representados abaixo das funções **f** e **g**, que possuem as mesmas leis de formação **f(x) = x** e **g(x) = x**:

Gráfico 1



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 2



Fonte: Elaboração própria.

As duas representações gráficas correspondem à mesma lei algébrica de formação de função: f(x) = g(x) = x. O que torna diferente a construção do Gráfico 1 da construção do Gráfico 2?

____

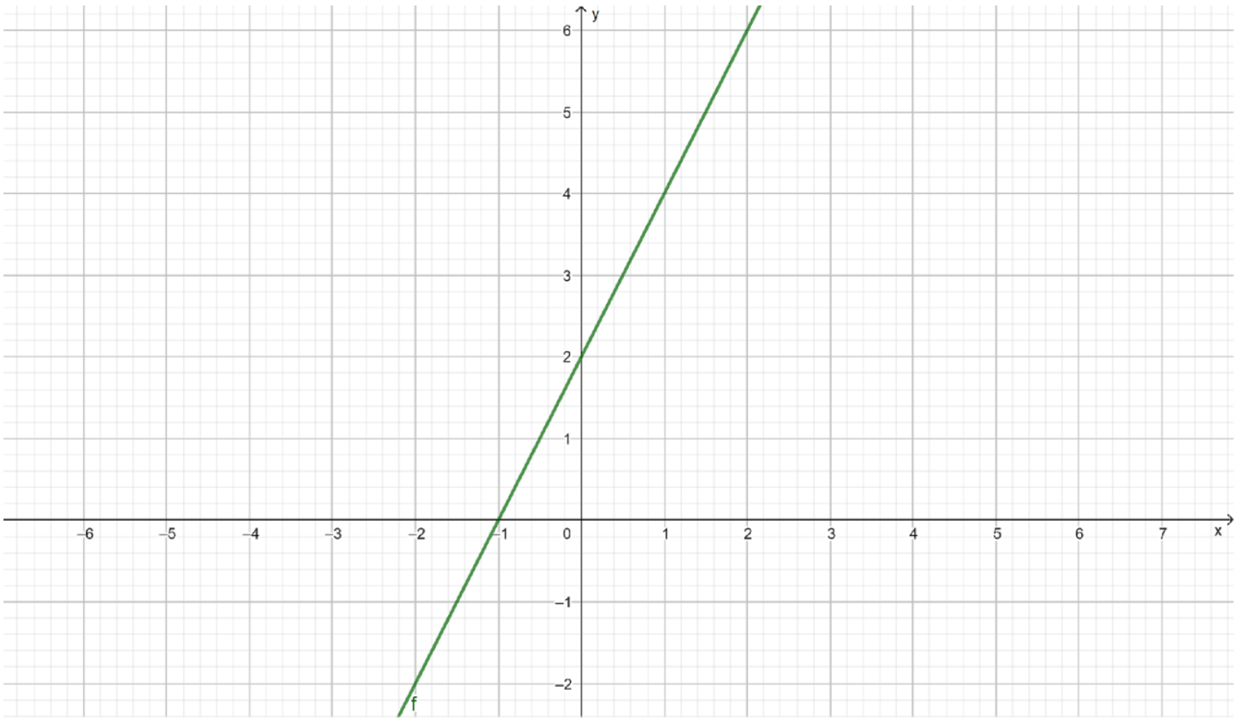
____

3- Dada a função f: ℕ → ℕ, f(x) = 2x + 2, assinale qual das funções abaixo é igual a f.

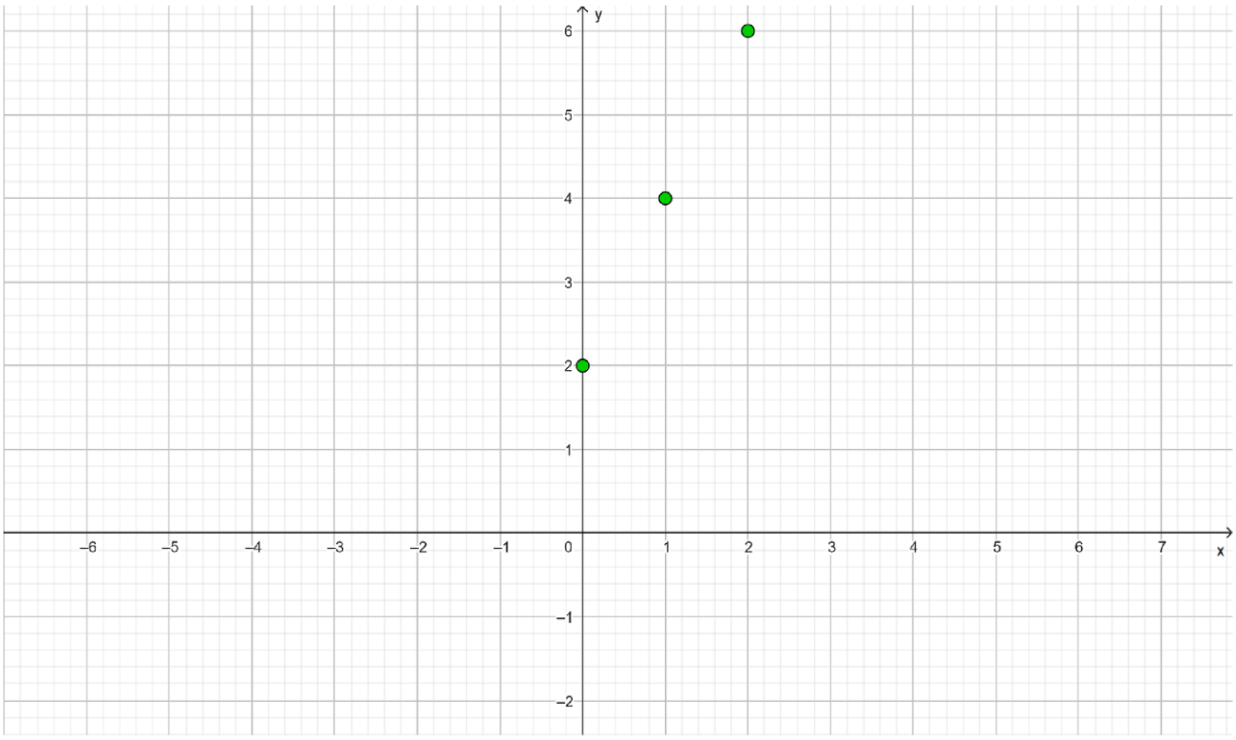
(   ) g: ℝ → ℝ ; g(x) = 2x + 2

(   ) g: ℕ → ℕ ; g(x) = x + 1

(   )

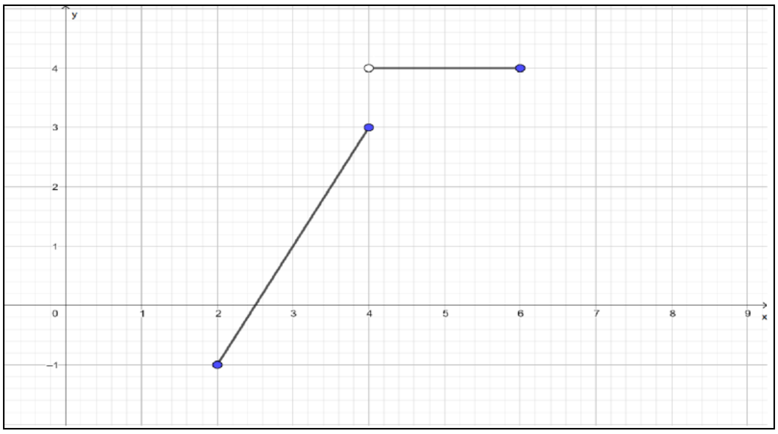


(   )



4- Determine o domínio e o conjunto imagem das funções representadas pelos gráficos abaixo:

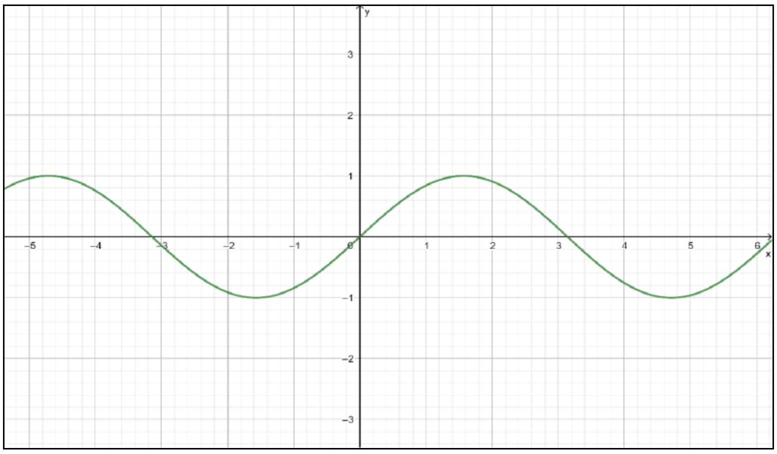
a)



Fonte: Elaboração própria.

R:____

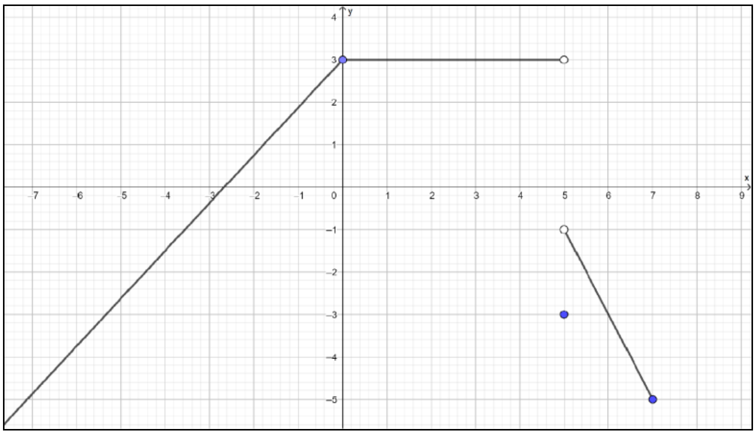
b)



Fonte: Elaboração própria.

R:____

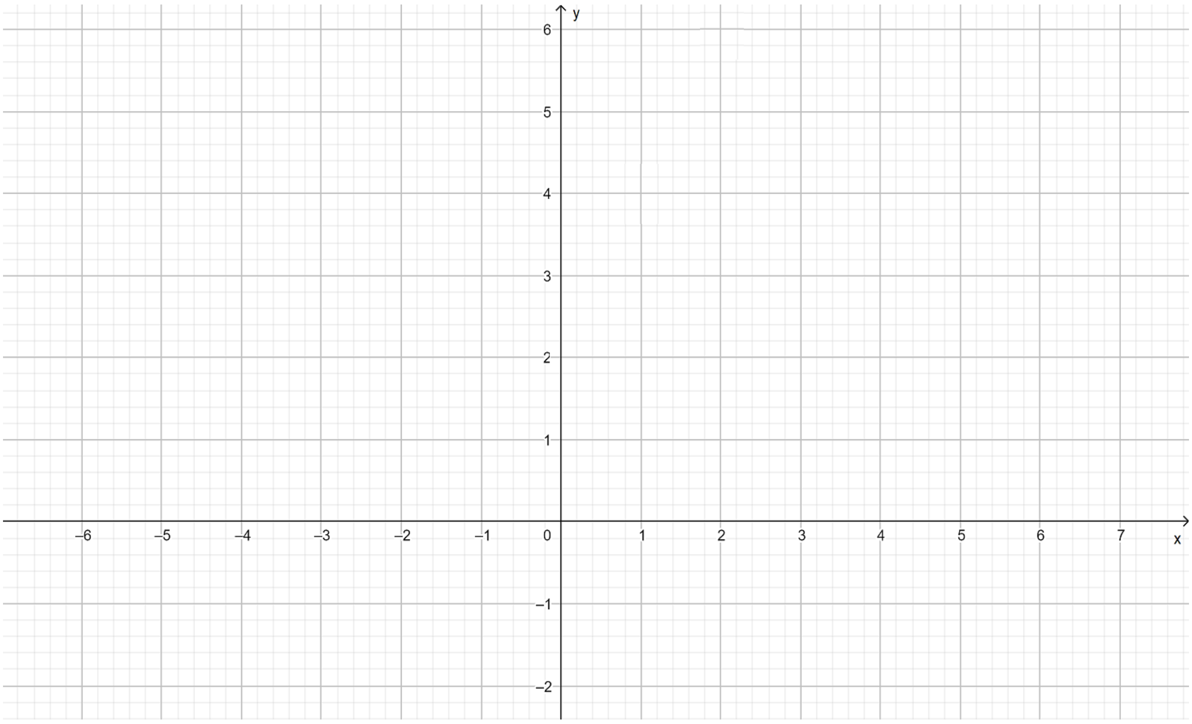
c)



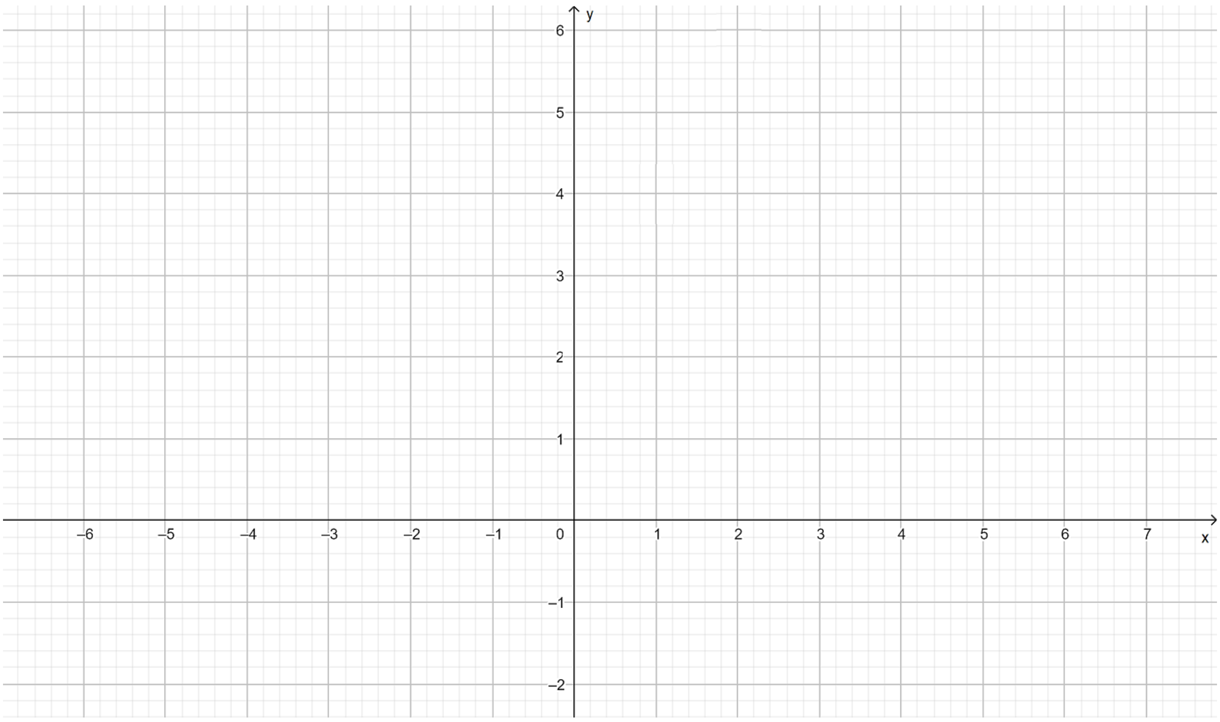
Fonte: Elaboração própria.

R:____

5- Esboce o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f(x) = $\begin{cases} -x, se\ x < -2 \\ 2, se\ -2 \leq x \leq 3 \\ x-1, se\ x > 3 \end{cases}$.



6- Esboce o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [-6 , 7] e cuja imagem é o conjunto [-2 , 3] U [4 , 6].



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Escola: ____

Aluno(a):____

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO FINAL

Questionário Final - TCC de Matemática

Este questionário tem por objetivo avaliar a proposta didática e o desempenho dos licenciandos autores deste trabalho no decorrer da aplicação da sequência didática.

1. Avaliação da Sequência Didática

1.1. Você teve dificuldades para compreender algum conteúdo que foi abordado?

( ) Sim
( ) Não

1.1.1. Caso sua resposta tenha sido "Sim" à pergunta anterior, informe quais foram as suas dificuldades.

1.2. As aulas ministradas contribuíram para o seu aprendizado?

( ) Sim
( ) Não

1.3. Destaque em que sentido a sequência didática contribuiu ou deixou de contribuir para o seu aprendizado.

1.4. Em relação aos conteúdos que foram abordados, você apresentava alguma dificuldade anteriormente à aplicação da sequência?

( ) Sim
( ) Não

1.4.1. Caso sua resposta tenha sido "Sim" à pergunta anterior, essa dificuldade foi sanada?

( ) Totalmente
( ) Parcialmente
( ) Não foi sanada

1.5. Caso haja algo que queira sugerir para a sequência, fique à vontade para anotar abaixo.

2. Avaliação dos Licenciandos

2.1. Você considera que as explicações feitas pelos licenciandos foram claras e suficientes?

( ) Sim
( ) Em partes
( ) Não

2.1.1. Caso sua resposta tenha sido "Em partes" ou "Não", discrimine o que não ficou claro e/ou insuficientemente abordado para você.

____

____

____

____

2.2. Se houver algo que queira escrever para os professores em formação (sugestões, críticas, elogios), fique à vontade para anotar abaixo.

____

____

____

____

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO DO TESTE EXPLORATÓRIO

Questionário - Teste exploratório

Este formulário é referente ao Teste Exploratório do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA: Uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, dos autores Igor Pessanha Menezes e Quéren Ribeiro Miguel dos Santos, orientados pelo professor mestre Cleuber Eduardo do Nascimento Silva. Seu objetivo é permitir que os alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro, matriculados no componente curricular de TCC II, registrem suas avaliações e considerações acerca dos materiais desenvolvidos para a Intervenção Pedagógica, sendo esta uma das etapas da referida pesquisa.

*Obrigatório

1. E-mail *

2. Nome completo *

3. Matrícula *

1. Termo de Consentimento

Esta seção tem por objetivo avaliar o Termo de Consentimento que será assinado pelos alunos que irão participar da aplicação da Sequência Didática.

4. 1.1. O Termo de Consentimento deixa esclarecido os objetivos do presente Trabalho de Conclusão e as etapas de aplicação da Sequência Didática? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. 1.1.1. Caso você tenha respondido "Não" à pergunta acima, relate o que o Termo de Consentimento deve deixar melhor esclarecido.

2. Sequência Didática

Esta seção tem por objetivo avaliar a sequência didática e o tempo disponível para sua aplicação.

6. 2.1. A Sequência Didática está devidamente elaborada, de acordo com os objetivos do trabalho? *

   Marcar apenas uma oval.

   - Sim
   - Não

7. 2.1.1. Caso você tenha respondido "Não" à pergunta acima, fale sobre o que deve ser melhorado ou mudado na sequência para que se possa atingir objetivo do trabalho.

8. 2.2. Os enunciados das questões estão claros? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. 2.2.1. Caso você tenha respondido "Não" à pergunta acima, aponte qual(ais) questão(ões) não tinha(m) o(s) enunciado(s) claro(s) e forneça uma possível solução.

10. 2.3. Tendo em vista as quatro aulas da Sequência Didática, você acredita que o número de encontros (1h40min por encontro) será suficiente para que esta seja devidamente aplicada e desenvolvida? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

11. 2.3.1. Caso você tenha respondido "Não" à pergunta acima, informe quantos encontros você julga serem necessários.

3. Questionário Final

Esta seção tem por objetivo avaliar as perguntas do questionário final

12. 3.1. Há alguma pergunta que precisa ser acrescentada, modificada, ou retirada * do Questionário Final?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

13. 3.1.1. Caso você tenha respondido "Sim" à pergunta anterior, indique qual pergunta deve ser acrescentada, modificada, ou retirada do Questionário Final.

4. Sugestões

Demais sugestões.

14. Esta área é livre para sugestões referentes aos Questionários e à Sequência Didática.

APÊNDICE H – PLANO DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

PLANO – INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Encontros

DATA: 22/03/2022 - **Duração de 100min**

DATA: 24/03/2022 - **Duração de 100min**

DATA: 29/03/2022 - **Duração de 100min**

DATA: 31/03/2022 - **Duração de 100min**

TURNO: Tarde

UNIDADE TEMÁTICA	Funções definidas por mais de uma sentença
NÚMERO DE ENCONTROS	4 encontros
OBJETIVOS DA AULA 1	V) Reconhecer os conjuntos numéricos e suas possíveis representações; VI) Compreender a representação dos subconjuntos dos números Reais; VII) Representar intervalos abertos, fechados, semiabertos e lineares, utilizando todas as possíveis formas de representações de intervalos; VIII) Efetuar mudanças de registros de representação.
OBJETIVOS DA AULA 2	(iii) Marcar pares ordenados no plano cartesiano; (iv) Identificar domínio e imagem de relações; (v) Compreender função como uma relação de dependência unívoca entre duas variáveis; (vi) Efetuar a conversão da língua natural para a escrita algébrica; (vii) Utilizar diferentes representações para um mesmo objeto/conceito.
OBJETIVOS DA AULA 3	VI) Compreender a definição de função afim; VII) Classificar, a partir de um problema dado, a função como discreta ou contínua; VIII) Compreender a definição de função definida por mais de uma sentença; IX) Construir, a partir da lei de formação, gráficos de funções do primeiro grau; X) Determinar, a partir de gráficos de funções, as sentenças que compõem a lei de formação.
OBJETIVOS DA AULA 4	VI) Reconhecer o gráfico de uma função a partir de suas sentenças; VII) Relacionar o tipo de gráfico (discreto ou contínuo) ao domínio da função; VIII) Identificar os elementos que tornam duas funções iguais; IX) Esboçar o gráfico a partir da lei de formação de função; X) Determinar um gráfico de função a partir dos intervalos de domínio e de conjunto imagem.

APLICAÇÃO DA AULA 1	• Apresentação dos autores à turma; • Explicar e solicitar que os alunos preencham o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido; • Explicar o tema da pesquisa e seus objetivos a partir de uma frase de Raymond Duval; • Entregar apostila referente à aula; • Definir e explicar o Conjunto dos Números Naturais; • Mostrar as possíveis representações de um conjunto finito de números a partir de um exemplo de subconjunto dos Números Naturais; • Definir e explicar o Conjunto dos Números Inteiros; • Solicitar aos alunos representarem o exemplo dado de um subconjunto do Conjunto dos Números Inteiros; • Definir e explicar o Conjunto dos Números Racionais; • Solicitar aos alunos representarem o exemplo dado de um subconjunto do Conjunto dos Números Racionais; • Comentar sobre o Conjunto dos Números Irracionais; • Definir e explicar o Conjuntos dos Números Reais; • Exemplo de subconjunto do Conjunto dos Números Reais; • Introduzir Intervalos Reais; • Abordar intervalo aberto e suas possíveis representações; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre intervalo aberto; • Abordar intervalo fechado e suas possíveis representações; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre intervalo fechado; • Abordar intervalo aberto à direita e suas possíveis representações; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre intervalo aberto à direita; • Abordar intervalo aberto à esquerda e suas possíveis representações; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre intervalo aberto à esquerda; • Abordar intervalo infinito e suas possíveis representações; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre intervalos lineares.
APLICAÇÃO DA AULA 2	• Entregar apostila referente à aula; • Pedir para os alunos formarem duplas; • Entregar dados cúbicos, um para cada dupla; • Explicar como será desenvolvido o jogo “Cada um em seu lugar”; • Definir domínio de uma relação a partir do jogo “Cada um no seu lugar”; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre o domínio do jogo; • Definir imagem de uma relação a partir do jogo “Cada um no seu lugar”; • Solicitar aos alunos fazerem atividade sobre a imagem do jogo; • Definir Função; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade inicial sobre Função; • Definir domínio de uma Função; • Destacar o domínio de uma função a partir de dois exemplos; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre domínio de uma função e, posteriormente, corrigi-la no quadro; • Definir contradomínio de uma função; • Destacar contradomínio de uma função a partir de um exemplo; • Definir conjunto imagem de uma função; • Destacar o conjunto imagem de uma função a partir de dois exemplos; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade sobre conjunto imagem de uma função e, posteriormente, corrigi-la no quadro;

	• Solicitar aos alunos fazerem o último exercício da apostila, que pede a lei da função, o domínio, contradomínio e o conjunto Imagem da função e, posteriormente, corrigi-la no quadro.
APLICAÇÃO DA AULA 3	• Entregar apostila referente à aula; • Definir Função Afim; • Solicitar aos alunos fazerem cada item relacionado ao Problema 1; • Corrigir no quadro todos os itens do Problema 1; • Solicitar aos alunos fazerem cada item relacionado ao Problema 2; • Corrigir no quadro todos os itens do Problema 2; • Definir função definida por mais de uma sentença; • Explicar para os alunos como identificar o domínio e o conjunto imagem de uma função definida por mais de uma sentença por meio de exemplos; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade 1 sobre domínio e conjunto imagem dos gráficos dados; • Corrigir no quadro a atividade 1; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade 2 sobre esboço de gráfico a partir do domínio e do conjunto imagem fornecidos; • Corrigir no quadro a atividade 2; • Solicitar aos alunos fazerem a atividade 3 sobre esboço de gráfico a partir da lei algébrica de formação fornecida; • Corrigir no quadro a atividade 3; • Solicitar aos alunos fazerem cada item relacionado ao Problema 3; • Corrigir no quadro todos os itens do Problema 3.
APLICAÇÃO DA AULA 4	• Entregar a apostila composta somente por atividades; • Explicar o caráter deste último material da sequência didática, que funcionará como uma avaliação da aprendizagem; • Recolher as apostilas; • Apresentar à turma a solução de cada questão; • Entregar o Questionário Final, explicando os objetivos deste material; • Recolher os questionários preenchidos pelos alunos; • Encerrar a intervenção pedagógica.
RECURSOS DIDÁTICOS	• Quadro, piloto, apagador; • Dados cúbicos; • Apostilas das aulas impressas;
AVALIAÇÃO	A avaliação será feita por meio da análise das respostas fornecidas pelos alunos nas atividades propostas e no questionário final, além das observações feitas pelos autores em sala.
BIBLIOGRAFIA	MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e funções. Volume 1. 9ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2009. ALVES; GUEDES; SILVA. Sistema de ensino pH: apostila ensino médio. Frentes 1ª série. Exatas. Caderno 2. 1ª ed. São Paulo: SOMOS Sistemas de Ensino, 2018.