MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS PAULO DIAS NASCIMENTO

UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ESTUDO DOS CONJUNTOS INFINITOS NO ENSINO MÉDIO

Campos dos Goytacazes/ RJ
Outubro – 2022.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS PAULO DIAS NASCIMENTO

UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ESTUDO DOS CONJUNTOS INFINITOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Paula Eveline da Silva dos Santos

Campos dos Goytacazes/RJ
Outubro – 2022.1

Biblioteca
CIP - Catalogação na Publicação

N185096
0909981
910p

Nascimento , Marcos Paulo Dias
UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ESTUDO DOS CONJUNTOS INFINITOS NO ENSINO MÉDIO / Marcos Paulo Dias Nascimento - 2022.
95 f.: il. color.

Orientadora: Paula Eveline da Silva dos Santos

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Anton Dakitsch, RJ, 2022.
Referências: f. 66 a 68.

1. Conjuntos Infinitos. 2. Investigação Matemática. 3. Ensino Médio. I. Eveline da Silva dos Santos, Paula, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MARCOS PAULO DIAS NASCIMENTO

UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ESTUDO DOS CONJUNTOS INFINITOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 04 **de** Novembro **de 2022.**

Banca Examinadora:

Carla Antunes F.

Carla Antunes Fontes (examinadora)
Me. em Matemática Aplicada / UFRJ / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Larissa Console de Oliveira

Larissa Console de Oliveira (examinadora)
Me. em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Paula Eveline da Silva dos Santos

Paula Eveline da Silva dos Santos (Orientadora)
Me. em Matemática / UENF / RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Dedico este trabalho de conclusão de curso a todos meus familiares, vivos ou não, e aos meus educadores que me auxiliaram nesta jornada que é a graduação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, em especial ao meu pai, que fez de tudo por mim e me deu todo o suporte que eu precisei durante toda a minha vida escolar e durante a graduação para que eu me dedicasse ao máximo aos meus estudos e formação profissional.

Agradeço, e muito, com todo meu carinho e admiração, à minha orientadora, Paula, por toda a paciência, carinho, apoio, por me acolher nos momentos difíceis, pelas sugestões concedidas nesse caminho, por estar sempre ao meu lado me dando força, auxiliando-me no processo de escrita desse trabalho e, principalmente, por não ter desistido de mim, sempre tentando me colocar para cima, estimulando sempre a dar o meu melhor em cada reunião.

Agradeço também a todos os educadores que de alguma forma contribuíram para essa pesquisa e para a minha formação, em especial às professoras Carla Fontes e Larissa Console por aceitarem o convite para a compor a banca da defesa, por todas as considerações e aprendizado.

Agradeço também à minha psicóloga, pelo excelente trabalho e por ter me auxiliado em momentos tão difíceis e complicados ao longo de toda a graduação, sempre me fazendo buscar equilíbrio e não desistir das minhas escolhas.

A todos vocês, o meu mais sincero carinho e gratidão. Muito agradecido por tudo!

Esses comportamentos são eternos? Algum dia teve um começo e algum dia terá um fim? Outra questão fundamental que fez e faz o homem pensar sobre o infinito de um ponto de vista amplo é a consciência da morte e a busca de uma explicação para o sentido da vida. Não podendo driblar a certeza da finitude da vida de cada indivíduo na Terra, a humanidade precisa acreditar em algo que seja eterno como um espírito, uma energia que não tenha fim. Tem início assim, com questões filosóficas, as primeiras investidas dos pensadores na obtenção de ideias sobre o infinito. Mas, vamos fixar neste estudo, o conhecimento acumulado a respeito do conceito de infinito na Matemática, que substancialmente trata de números, conjuntos e padrões.

Tatiana de Souza de Lima dos Santos

RESUMO

Com o pensamento de que os estudos na Educação Básica, em muitas escolas, se não todas, utilizam o conceito do infinito sem de fato explicá-lo para os estudantes, simplesmente comentando que é algo que nunca tem fim, buscou-se com este trabalho responder a seguinte pergunta: “Qual a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio?”. A fim de respondê-la, elaborou-se o objetivo geral: “Investigar a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio”. O presente trabalho caracteriza-se como: pesquisa exploratória com uma abordagem qualitativa. Tendo como base as leituras do referencial teórico e documentos norteadores da Educação Brasileira, criou-se uma proposta de atividades investigativas que foi organizada em 5 partes. Com intuito de aperfeiçoar a proposição, contou-se com o apoio de 9 educadores de Matemática, que por meio do Questionário de Aprimoramento da Proposta Didática (Questionário 1), deixaram seus comentários, críticas e propostas de alterações. Já o Questionário de Percepção dos Educadores (Questionário 2), realizado após as modificações na proposta, teve o intuito de obter as percepções e opiniões desses educadores a respeito dos resultados esperados com uma possível aplicação e saber se eles pensariam de realizar alguma adaptação. Após análise das respostas do segundo questionário, notou-se que abordar os Conjuntos Infinitos por meio de atividades investigativas foi considerado bem assertivo, por poder minimizar os erros causados pela falta da noção do conceito de infinito e por estimular um estudante mais participativo e curioso, mostrando que temas complexos podem ser aplicados para o Ensino Médio, de maneira mais simples, mas com o raciocínio correto.

Palavras-chave: Conjuntos Infinitos. Investigação Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

With the thought that the studies in Basic Education, in several schools, if not all of them, it's used the concept of infinite without in fact explaining to the students, simply commenting that it is something that has never an end, it was sought to answer to the following question with this work : "What's the educators' perception of Math in respect of a didactic investigative proposal about Infinite Sets in High School". The present work is characterized as: Exploratory research with a qualitative. Having as base the reading of theoretical referential and guiding documents from Brazilian Education, it was created a proposal of investigative activities, organized in 5 parts. With the purpose of improving the proposition, which received support from 9 Math educators that through the Questionnaire for Improvement of Didactic Proposal (Questionnaire 1), have left their comments, criticism, and alteration proposals. While the Educators' Perception Questionnaire (Questionnaire 2), made after the modifications of the proposal, had the purpose of obtaining the perceptions and opinions of these educators about the expected results with a possible application and knowing if they think about making some adjustment. After analysing the answers of the second questionnaire, it was noticed that approaching the Infinite Sets by the means of investigative activities was considered well assertive, because it could minimize the mistakes caused by the cluelessness about the concept of infinite and by stimulating a more participative and curious student, showing that complex themes can be applied in High School, in a simpler way, but with the correct mindset.

Keywords: Infinite Sets. Math Investigation. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio, de acordo com Almeida (2015), ocorre recorrentemente, de forma a apenas revisar os conceitos. Essa revisão não é suficiente para fazer o estudante relembrar o conteúdo ou aprender, pois, muitas vezes, não são abordados com o rigor e o formalismo necessários no Ensino Fundamental.

Desde o início dos estudos do Ensino Fundamental, o conceito de infinito está presente em algumas definições. Por exemplo, na Geometria, diz-se que em uma reta existem infinitos pontos e que em um plano existem infinitas retas, logo também existem infinitos pontos. O conceito de infinito também é estudado por meio dos números racionais que possuem representação decimal infinita e no estudo dos números irracionais; além dos Conjuntos Numéricos, mas sem de fato formalizar o termo “matematicamente”. Essas são apenas algumas situações entre tantas outras na Matemática em que o infinito está presente. No entanto, em uma pesquisa feita por Espírito Santo (2019), em alguns livros didáticos nacionais, nada foi encontrado a respeito desse conteúdo. Apesar da complexidade dos assuntos de finitude e infinitude, que exigem muita abstração, os seus conceitos básicos estão presentes em conceitos básicos da Matemática, sendo os principais Conjuntos Numéricos e Funções, podendo assim ser compreendidos, entendidos e explicados ao estudante do Ensino Médio desde seu primeiro ano (CAMARGO, 2020).

Sendo assim, viu-se a necessidade de procurar nos documentos norteadores da educação as orientações para estes conteúdos e as habilidades que devem ser desenvolvidas nos estudantes.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), encontra-se as habilidades esperadas pelo estudante de 1º ano do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de conjuntos:

> Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”. (BRASIL, 2018, p. 279).

Tal habilidade será de suma importância, pois inicia a compreensão de algumas relações entre dois conjuntos, que podem se dar por meio das funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Segundo Espírito Santo (2019), o desenvolvimento e compreensão dos conceitos dessas funções é importantíssimo para trabalhar a relação entre os Conjuntos Infinitos. Além disso, a autora também afirma que este estudo cumpre um dos objetivos presentes na Matemática, de desenvolver a abstração dos estudantes.

O educando pode se sentir instigado ao ouvir que Conjuntos Infinitos diferentes podem possuir mesma cardinalidade, como o caso do Conjunto dos Números Naturais quando comparado com o Conjunto dos Números Inteiros ou Racionais, ou ainda serem de cardinalidade diferentes, como o caso destes conjuntos quando comparados com o Conjunto dos Números Reais. Outro exemplo pode ser o comentário do estudo das casas decimais de π, que já chegaram em mais de um bilhão de caracteres sem que se forme um período (BRASIL, 1998).

Com a ideia de motivar os estudantes, este trabalho irá contar com a Metodologia de Investigação Matemática para a elaboração de uma proposta didática, pois esta metodologia pode aproximar os conhecimentos científicos dos conhecimentos matemáticos, a fim de despertar maior interesse dos estudantes e com isso fomentar o debate na sala de aula, tornando-a mais enriquecedora para os estudantes e para os educadores (VIEIRA, 2012).

Vale ressaltar que se adotou neste trabalho a definição de Investigação Matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2020, p.13, 20):

> Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. [...]. Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado.

A motivação para este trabalho se deu pela afinidade do autor quanto aos conteúdos estudados em Conjuntos Numéricos, Funções e uma curiosidade sobre os Conjuntos Infinitos.

Destaca-se que o objetivo inicial deste trabalho era elaborar uma proposta didática investigativa e analisar as possíveis contribuições dela para o estudo dos Conjuntos Infinitos em uma turma de 2º ano de Ensino Médio. No entanto, devido a pandemia de Covid-19, o ensino remoto foi implantado de diferentes maneiras nas escolas brasileiras. Desse modo, houve o receio, por parte deste pesquisador e orientadora, em experimentar proposta para uma turma regular em um momento de retomada gradual ao ensino presencial. À vista disso, mudaram-se os planos e optou-se por buscar a opinião de educadores de Matemática em relação à proposta didática elaborada.

Diante do exposto, foi formulada a seguinte questão de pesquisa: Qual a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio?

Para solucionar tal questão, traçou-se o seguinte objetivo geral: Investigar a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio.

Para atingir tal objetivo, definiu-se os seguintes objetivos específicos:

● Identificar as contribuições de uma pesquisa sobre o desenvolvimento histórico da noção do infinito para o estudo dos Conjuntos Infinitos no Ensino Médio;

● Investigar potencialidades e dificuldades de utilizar atividades investigativas para o estudo de Conjuntos Infinitos;

● Evidenciar a importância da compreensão dos Conjuntos Infinitos para diversos conteúdos.

Este trabalho estrutura-se em cinco capítulos, sendo estes, na seguinte ordem: Introdução, Revisão de Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões e Considerações Finais.

O primeiro, refere-se a esta introdução, que apresenta a justificativa, motivação, questão de pesquisa e objetivos geral e específicos. O segundo, trata do referencial teórico adotado, abordando aspectos sobre Funções Bijetivas e Conjuntos Infinitos, Investigação Matemática e Trabalhos Relacionados. No terceiro, apresentam-se os procedimentos metodológicos, em que é descrito o tipo de pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e um detalhamento da proposta didática elaborada. Já no quarto capítulo, são expostas e esclarecidas as alterações realizadas no material após a aplicação do Questionário de Aprimoramento da Proposta Didática (Questionário 1) e do Questionário de Percepção dos Educadores (Questionário 2) realizados com educadores de Matemática que foram convidados para analisar a proposta didática investigativa e dar suas opiniões e sugestões. O quinto capítulo é reservado para que sejam feitas as considerações finais sobre a pesquisa realizada.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta o aporte teórico que estrutura esta pesquisa. O capítulo está dividido em três partes: (i) Funções Bijetivas e Conjuntos Infinitos, em que é feito um breve relato acerca da história do infinito e também uma discussão sobre o ensino das Funções Bijetivas e dos Conjuntos Numéricos na Educação Básica, conteúdos importantes para o estudo dos Conjuntos Infinitos; (ii) Investigação Matemática, em que será exposta a metodologia utilizada para a elaboração das atividades; (iii) Trabalhos relacionados, pesquisas realizadas para identificação de trabalhos relacionados ao tema deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

2.1 Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas

2.1.1 Um breve relato da história do infinito

Segundo Lopes (2011), a Matemática atual faz uso do conceito de Conjunto Infinito a todo momento, e isso se deve ao fato de que ele está presente em quase todos os assuntos matemáticos. Apesar de atualmente parecer natural, até pouco menos de um século, os conceitos e noções do infinito eram pouco estruturados e aprofundados, pois iam contra a lógica da época, percorrendo um longo caminho de tabus e esquecimento.

O Infinito, segundo Amadei (2005) é um tema que desde a Grécia Antiga, se não antes, vem intrigando e aguçando debates na humanidade. Mas como e quando o tema começou a aparecer na Matemática? Segundo se tem relatos, o debate iniciou-se com a descoberta da existência das grandezas incomensuráveis. Tal descoberta se deu pela procura dos geômetras gregos de encontrarem uma unidade de medida comum para todas as grandezas. Essa descoberta, segundo Amadei (2005), trouxe à tona duas concepções, a respeito do infinito, que se contradiziam:

> [...] a concepção continuísta que considera o número, o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis ao infinito e a concepção atomista que preconiza a existência de elementos primeiros indivisíveis. Para Zenão essas duas concepções são geradoras de impasses. (AMADEI, 2005, p. 27)

Os Gregos, ainda conforme Amadei (2005), em especial os filósofos e os matemáticos, desde Pitágoras à Zenão, Eudóxio e Arquimedes, foram os responsáveis por realizarem estudos aprofundados a respeito do tema por diversas descobertas em relação ao conceito de infinito. Infelizmente, pela complexidade do tema e por ser conhecido como “horror” da Matemática, o assunto só voltou a ser estudado e desenvolvido novamente cerca de dois mil anos depois, por Galileu Galilei (1564 - 1642) e Bernard Bolzano (1781 - 1848).

Segundo Amadei (2005), um feito formidável de Galileu Galilei foi concluir que diferentemente dos conjuntos finitos, no conjunto infinito nem sempre o todo é maior que suas partes.

Em conformidade com Sampaio (2009), outros matemáticos como Bernard Bolzano, Bernhard Riemann e Karl Weierstrass foram importantes para o desenvolvimento de outras áreas da Matemática que enriqueceram os debates a respeito do infinito e de números infinitesimais. Tais debates e descobertas foram cruciais para que o alemão Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) pudesse revolucionar a Matemática com suas descobertas a respeito dos Conjuntos Infinitos. Consoante Sampaio (2009), Cantor aceitou

> [...] o infinito actual e desenvolveu uma teoria que explicava os diferentes conjuntos infinitos, a teoria dos números cardinais transfinitos baseada num tratamento matemático do infinito actual. (SAMPAIO, 2009, p. 217).

De acordo com Lopes (2011), Cantor estabeleceu a Teoria dos Conjuntos como uma disciplina que influenciou toda a Matemática, em especial a Análise Matemática. Mesmo com tamanho impacto, a sociedade científica relutou para aceitação da construção dos Reais de Cantor pelo fato dele pressupor a existência de sequências infinitas.

O autor ainda afirma que dizer que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade significa dizer que eles são equipotentes. Se um conjunto é finito, seus números cardinais são associados aos números naturais. Mas, se um conjunto é infinito, seus cardinais são associados aos transfinitos, sendo o menor deles chamado de Aleph Zero ($\aleph_0$), destinado aos conjuntos com a mesma cardinalidade que o Conjunto dos Números Naturais. Segundo Lopes (2011, p. 30):

> Ao provar que o conjunto dos subconjuntos de um conjunto A (conjunto das partes de A) tem potência maior que o próprio conjunto, Cantor também provou que existem infinitos números transfinitos além de “c” (continuum) dos números reais (ou dos pontos de uma reta). Dessa forma, o conjunto das partes de R, P (R) é um terceiro; o conjunto das partes de P (R), P (P (R)), um quarto, e assim infinitamente, chegando-

> se à conclusão que da mesma forma que existem infinitos naturais (cardinais dos conjuntos finitos), também existem infinitos transfinitos (cardinais de conjuntos infinitos).

Como pode-se perceber com a leitura acima, Cantor, com suas descobertas, mesmo que não reconhecidas enquanto vivia, mudou totalmente os paradigmas da Matemática e abriu novas fronteiras para serem exploradas e desenvolvidas através das sólidas bases que ele nos trouxe nos campos de análise de conjuntos, funções e outros elementos que têm caráter contínuo na Matemática, além de áreas das ciências, que não se sustentariam usando os conjuntos dos números reais em seus cálculos (KAWANO, 2007).

2.1.2 O Ensino de Funções Bijetivas e Conjuntos Numéricos

O Ensino Médio é o momento de consolidar conceitos da Matemática escolar já tratados no Ensino Fundamental. Tais conceitos dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade (BRASIL, 2006). Neste trabalho, pretende-se fazer uso dos conhecimentos desenvolvidos pelo estudante ao longo do seu aprendizado dos conteúdos de Conjuntos Numéricos e Funções Bijetivas no Ensino Médio. Estes conceitos serão usados como base para compreensão do conteúdo dos Conjuntos Infinitos por meio de uma perspectiva investigativa.

Para realizar tal abordagem, viu-se a necessidade de refletir sobre a aprendizagem e percepção dos estudantes, utilizando a metodologia de investigação como estratégia de ensino do conteúdo de Conjuntos Infinitos. Foi necessário buscar a importância da compreensão do conteúdo e como esta pode agregar ao desenvolvimento do estudante.

Para Espírito Santo (2019) o infinito é algo que está presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, quando iniciamos a aprendizagem da contagem, noções básicas de Geometria, observações noturnas, o céu estrelado, entre outros exemplos. Apesar disso, constatou-se que este conceito não é trabalhado como deveria na Educação Básica (ESPÍRITO SANTO, 2019).

De acordo com Lopes (2011), devido ao conceito de número estar profundamente ligado ao processo de contagem, até o sexto ano do Ensino Fundamental, os estudantes têm maior contato com os números naturais. Desse modo, a criança fica frente à noção de infinito potencial, pois se depara com a ideia de "somar mais um e mais um", e assim sucessivamente. Ainda no caso das frações, essas são apresentadas como relação parte-todo e só posteriormente são apresentadas aos estudantes como números racionais (LOPES, 2011).

Além disso, Lopes (2011) também relata uma experiência com uma turma de 7º. ano, em que foi possível perceber que, ao se depararem com os números racionais, os estudantes ficam sem compreender como entre dois números racionais quaisquer existem outros infinitos números racionais. Ressaltam afirmações como: “Mas esse espaço tem começo e fim, como pode ter infinitos números? Não cabe, professor". Tais falas fizeram com que se notasse que, mesmo o infinito sendo algo comum a eles, tais conceitos não foram trabalhados ou sequer apresentados aos estudantes. Trabalhando essas noções, ele percebeu uma melhora na aceitação dos estudantes, mas com relação ao infinito em um espaço limitado ainda mostravam resistência. Isso está de acordo com a história da Matemática, onde até mesmo na sociedade científica Matemática/Física tais conceitos apresentavam a mesma dificuldade em sua aceitação (LOPES, 2011).

Em relação ao ensino dos Conjuntos Numéricos, Souza (2017) afirma que toda a Matemática atual tem como base os conceitos de conjuntos, porém, tal conteúdo tem sido apenas classificado por suas características, sem apresentar justificativa e visto de forma descontinuada. Um exemplo disso, são os livros utilizados nas escolas brasileiras que trazem afirmações como: “se o número tem tal característica chama-se de natural, se tem outra característica é racional e assim por diante” (SOUZA, 2017, p. 12).

Como exemplo, tem-se Mariano e Matos (2013) que asseguram que os Números Inteiros, quando não ensinados na Educação Básica com a atenção necessária, podem gerar problemas nas habilidades matemáticas do estudante. Essa possível deficiência pode vir a prejudicar a compreensão de diversas áreas do conhecimento, pois segundo Leão (2014, p.1):

> As aplicações da teoria dos conjuntos à solução de questões relativa à estruturas algébricas de vários tipos de conjuntos e as questões relativas às suas propriedades operatórias abriram novos rumos para os matemáticos, ressaltando, entre outras aplicações, a extensão dos conceitos de medida e de integral, a introdução das noções de espaço abstrato, definido como conjuntos de elementos com dadas propriedades, e bem assim notáveis inovações no campo da integração e no do estudo das funções examinadas à luz da correspondência entre conjuntos.

Tal configuração acaba, por muitas vezes, desmotivando os estudantes por não saberem onde utilizar aquele conhecimento (CURZEL, 2012). Essa desmotivação ou desinteresse pode estar relacionado à falta de autonomia do estudante. Pois, quando apresentada uma abordagem que faz com que eles sejam ativos à exploração do conhecimento, de modo não repetitivo, tem maior empenho com o estudo (TAPIA; FITA, 2006 apud CURZEL, 2012).

Já em relação ao ensino das Funções Bijetivas, encontra-se na BNCC (BRASIL, 2018, p. 317) o objetivo de desenvolver nos estudantes a habilidade de "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis." Apesar disso, Bargas (2020, p. 80) realizou uma pesquisa nos livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, e constatou que "a ideia de se exibir a relação entre as noções de função injetiva, bijetiva e sobrejetiva com a determinação do número cardinal de um conjunto é mencionada apenas em [5] como uma curiosidade." Vale ressaltar que [1][5] é como o autor se refere a um livro dentro de todos os que foram analisados por ele. Além disso, Bargas (2020) ainda conclui que:

> [...] toda a teoria inicial desenvolvida por Cantor a fim de compreender e expandir a noção de infinito se assenta no conceito de função. Todas as definições, teoremas e demonstrações fundamentam-se, em última análise, no emprego de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Até mesmo resultados mais profundos como o Teorema de Cantor, que permite vislumbrar a existência de infinitos números transfinitos, utilizam em suas demonstrações e enunciados estas funções. (BARGAS, 2020, p. 102).

Conforme Delfino (2015) pode ser interessante mostrar aos estudantes que existem infinitos de tamanhos distintos. E por existirem diferentes tamanhos, irão existir diferentes cardinalidades, assim como ocorre nos conjuntos finitos que possuem quantidades diferentes de elementos. Delfino (2015) aponta que trabalhar com a cardinalidade de conjuntos infinitos é complexo, pois a comparação entre as cardinalidades entre os conjuntos infinitos será diferente da dos conjuntos finitos, visto que todos os conjuntos infinitos possuem infinitos elementos. Assume-se, então, que o Conjunto dos Números Naturais é o de menor cardinalidade e que todo conjunto infinito que possuir a mesma potência que ele terá a mesma cardinalidade. Para ilustrar isso, é necessário domínio dos conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções. Com esses conceitos bem compreendidos, pode-se, facilmente, mostrar que o

---

[1] Dante, L. R. Matemática: contexto e aplicações., 3 ed., vol. 1. Ática, São Paulo

Conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números Inteiros possuem a mesma cardinalidade (DELFINO, 2015).

Diante disso, optou-se por fazer uma proposta de atividade investigativa de conjuntos infinitos, utilizando os conceitos de Funções Bijetivas e o Conjuntos dos Números Naturais e Inteiros para uma turma do 2º. ano do Ensino Médio.

2.2 Investigação Matemática

Para os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), a Investigação Matemática é um processo de identificação das propriedades e das relações existentes entre dois objetos matemáticos. Tal processo pode ser levado para a sala de aula e colaborar com o desenvolvimento de um estudante mais participativo, pois são trabalhadas as habilidades de argumentação, debate, formulação de questões, hipóteses, investigações, realizações de demonstrações, refutações junto aos seus colegas e educadores, entre outras habilidades essenciais para o indivíduo. Para que isso ocorra, é necessária uma participação mais efetiva, ao invés de apenas estudantes observadores (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2020).

Pode-se dizer que a Investigação Matemática divide-se em quatro etapas, sendo elas: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulações; justificação e avaliação. A composição de cada etapa pode ser vista no Quadro 1.

Quadro 1 - Etapas de uma Investigação

Exploração e formulação de questões	● Reconhecer uma situação problemática; ● Explorar a situação problemática; ● Formular questões.
Conjecturas	● Organizar dados; ● Formular conjecturas e fazer afirmações a respeito delas.
Testes e reformulação	● Realizar testes; ● Refinar a(as) conjectura(as).
Justificação e avaliação	● Justificar a(as) conjectura(as); ● Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, p. 20).

De acordo com Vieira (2012), a Investigação Matemática é uma metodologia que possibilita ao estudante se tornar mais ativo na sala de aula, sendo, em parte, responsável pelo desenvolvimento do seu conhecimento no decorrer das aulas. Essa possibilidade, junto aos incentivos corretos, faz com que o estudante deixe de ser apenas um ouvinte de uma "palestra" ministrada pelo educador e consiga desenvolver o seu conhecimento através dos debates com seus colegas.

Constatou-se que a investigação é uma habilidade presente em três documentos norteadores da educação básica brasileira, sendo eles: a BNCC (BRASIL, 2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000). Eles ressaltam a importância do desenvolvimento dessas habilidades que não são importantes apenas na área da Matemática, mas também para o dia a dia de cada indivíduo, como também de outras áreas do conhecimento, conforme mencionado a seguir na BNCC como uma das competências gerais da Educação Básica:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9)

Ainda na BNCC, o processo da Investigação Matemática é visto como um privilégio da atividade matemática, pois abrange uma grande gama de habilidades e competências de uma única vez, em uma única atividade. Essas habilidades em comum são: "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo." (BRASIL, 2018, p. 267). Além disso, destaca-se a competência específica 5, que diz:

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais",

> incluindo a demonstração de algumas proposições. (BRASIL, 2018, p. 540)

Posteriormente à leitura da BNCC, foi feita a pesquisa nos PCN (Introdução e Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental), e constatou-se que a investigação é um dos objetivos a serem desenvolvidos nos estudantes. Responsabilidade essa que fica a cargo da escola e do educador, que possuem papel de estimular o debate, a investigação e questionamento, de modo que supere o ensino convencional, que ocorre de maneira passiva e, muitas das vezes, de memorização das classificações e definições (BRASIL, 1998). Para cumprir essa responsabilidade, os educadores precisam propor atividades que estimulem e exijam do estudante uma postura condizente, valorizando a qualidade do aprendizado e a criatividade na resolução de uma mesma questão. Os PCN afirmam que, muitas das vezes, esses conhecimentos são trazidos de forma tradicional e que em muitas ocasiões não fazem sentido algum para o estudante (BRASIL,1998). Além disso, os PCN destacam a importância do estudante saber que é capaz de desenvolver seu conhecimento matemático e compreender o mundo à sua volta a partir desses conhecimentos (BRASIL, 1998). Para tanto, é necessário que o educando saiba:

> Aprender a conhecer, que pressupõe saber selecionar, acessar e integrar os elementos de uma cultura geral, suficientemente extensa e básica, com o trabalho em profundidade de alguns assuntos, com espírito investigativo e visão crítica; em resumo, significa ser capaz de aprender a aprender ao longo de toda a vida" (BRASIL,1998, p. 62).

Para alcançar esse ideal, os PCN definiram como objetivo:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas." (BRASIL, 1998, p. 47).

Objetivo esse, que será mais aprofundado no Ensino Médio, segundo os PCNEM (2000), nos quais encontrou-se as competências e habilidades de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, da importância de "Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções." (BRASIL, 2000, p. 12).

Ainda nos PCNEM, é visto como importante, também, aproximar o educando de atividades investigativas com o intuito de produzir conhecimentos, bens e serviços. Além do desenvolvimento de capacidades tão importantes como: abstração, análise e compreensão de fatos matemáticos, interpretação da própria realidade, investigação, raciocínio em todas as suas vertentes e resolução de problemas de qualquer tipo, também é enfatizado que a interdisciplinaridade pode ser uma ferramenta valiosa para enriquecer as atividades, de forma a possibilitar novos debates e análises das situações (BRASIL, 2000).

Encontrou-se também a competência de âmbito geral de investigação e compreensão, que “[...] é marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências” (BRASIL, 2000, p. 114), conforme ilustrado no Quadro 2.

Quadro 2 - Investigação e Compreensões de âmbito geral

Investigação e compreensão
Estratégias para enfrentamento de situações-problema Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.
Interações, relações e funções; invariantes e transformações Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações; identificar regularidades, invariantes e transformações.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.
Modelos explicativos e representativos Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.
Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.

Fonte: (BRASIL, 2000, p. 30).

No âmbito específico da Matemática, a Investigação e a Compreensão têm o objetivo de identificar as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para solucionar um problema em questão. Com isso, faz-se com que o estudante seja capaz de identificar informações importantes para solucionar um problema, identificar as relações existentes no problema e elaborar possíveis estratégias para solucioná-lo, e reconhecer os conteúdos matemáticos envolvidos no mesmo (BRASIL, 2000).

Com essas competências, é esperado que o educando seja capaz de realizar reflexões críticas a partir da leitura de informações e interpretar seus significados (BRASIL, 2000). Para que isso seja possível, o educador, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), que vier a ministrar uma aula investigativa, tem a função de regulador, cabendo-lhe decidir quando intervir para que a aula e os estudantes tenham o maior rendimento possível, ou seja, o educador necessita realizar algumas funções durante a investigação. Essas funções são: “[...] desafiar o aluno, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2020, p. 46).

Essas funções mencionadas anteriormente, foram divididas em quatro etapas, sendo elas: Arranque, Desenvolvimento do trabalho, Discussão da investigação e Comprovação. O arranque é visto como etapa primordial do processo, pois nela é definida o quanto a turma irá se empenhar na atividade e ter a clareza daquilo que se espera deles, sendo responsabilidade do educador realizar o esclarecimento necessário e ser capaz de instigar seus estudantes com o desafio. Já o desenvolvimento do trabalho, é feito com o educador observando o desempenho dos seus estudantes e oferecendo ajuda quando necessário; vale ressaltar que o educador não fará afirmações, mas sim auxiliará o raciocínio dos estudantes com certos questionamentos, fazendo-os refletir sobre as hipóteses formuladas por eles mesmos. Já na discussão da investigação, o educador estimula o debate entre os estudantes, pedindo para que eles compartilhem seus raciocínios e observações com a turma, feito este que irá fomentar a investigação e este mesmo momento pode ser aproveitado pelo educador para explorar e aprofundar as hipóteses feitas pelos estudantes (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2020).

2.3 Trabalhos Relacionados

No dia 14 de Junho de 2021, foi realizada uma pesquisa nos portais Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Catálogos de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Google

Acadêmico. Essa consulta teve o objetivo de encontrar trabalhos relacionados com a temática dessa pesquisa.

Sendo assim, foi utilizada a seguinte *string* de busca “Conjuntos Numéricos” AND “Infinitos”, em cada um dos portais mencionados. Encontrou-se como resultado 133 trabalhos da BDTD, 19.399 trabalhos do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e 1280 trabalhos do Google Acadêmico. Para selecionar melhor esses trabalhos, na pesquisa foram utilizados os procedimentos descritos nos Quadro 3, Quadro 4 e Quadro 5.

A primeira pesquisa foi realizada no portal BDTD e os procedimentos se encontram no Quadro 3.

Quadro 3 - Filtros utilizados na BDTD

Filtros utilizados	Resposta da pesquisa
Busca: Conjuntos Numéricos + Infinitos	133
Data de publicação: 2016 - 2021	37
Idioma: Apenas português	32
Assunto: Cardinalidade	3

Fonte: Elaboração própria.

Após a leitura dos resumos dos três trabalhos da BDTD, selecionou-se um único trabalho devido à sua organização, objetivo, atenção em detalhar as propriedades, definições e axiomas de cada um dos conjuntos. Além disso, destaca-se a apresentação de um capítulo sobre Conjunto Infinito e Finito e suas características, evidenciando como pode ser feita a abordagem dos Conjuntos Infinitos para turmas de Ensino Médio.

No Quadro 4, são apresentados os filtros utilizados para refinar a busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.

Quadro 4 - Filtros utilizados no CAPES

Filtros utilizados	Resposta da pesquisa
Busca: Conjuntos Numéricos + Infinitos	19.399
Data de publicação: 2016 - 2021	5000
Grande Área do conhecimento: ciências exatas e da terra	1417

Área do conhecimento: Matemática	343
Área de concentração: Ensino da Matemática	58

Fonte: Elaboração própria.

Dos 58 resultados obtidos, leu-se seus títulos e houve a percepção de que apenas 13 trabalhos tinham relação com o objetivo desta pesquisa. Portanto, desses 13 trabalhos foram lidos seus resumos e um teve destaque, devido ao seu trabalho aprofundar a noção histórica de contagem e senso numérico, que são de extrema importância para a área da Matemática, em especial a de Conjuntos Numéricos e Conjuntos Infinitos. Sendo assim, este foi selecionado como um dos trabalhos relacionados.

E por último, apresentam-se os filtros utilizados para refinar a busca no Google Acadêmico (Quadro 5).

Quadro 5 - Filtros utilizados no Google Acadêmico

Filtros utilizados	Resultado da pesquisa
“Conjuntos Numéricos” + “Infinitos”	1280
Data de publicação: 2016 - 2021	521
Idioma: Apenas português	292
“Conjuntos Numéricos” + “Infinitos” + “Educação Básica”	142
Data de publicação: 2018 - 2021	85

Fonte: Elaboração própria.

Dos 85 resultados obtidos, apenas os quinze primeiros trabalhos eram relacionados com a Matemática, os demais possuíam seu título relacionado com outra área do conhecimento. Foi realizada a leitura dos resumos dos 15 trabalhos para então ser feita a seleção do que mais se aproximava com essa pesquisa.

Nas seções a seguir, serão apresentados os três trabalhos selecionados contendo uma breve descrição de cada um deles, bem como as possíveis semelhanças e diferenças com a presente pesquisa.

2.3.1 Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao Ensino Médio

O trabalho de dissertação de mestrado, feito por Camargo (2020), tem por finalidade apresentar como a Matemática aborda o conceito de infinito utilizando conceitos de funções bijetivas e propor uma sequência de cinco atividades para auxiliar o educador a estimular seus estudantes de uma forma inovadora. É importante ressaltar que, anteriormente ao início das atividades, para melhor compreensão do conceito de infinito, o trabalho busca explorar e fortalecer as definições do conceito de função, visto que essa definição é fundamental para a compreensão do conceito de infinito.

A primeira atividade foi realizada para registrar o conhecimento/noção dos alunos com relação ao infinito e gerar interesse neles. A segunda atividade, a fim de explorar a noção de contagem. Na terceira atividade, foi apresentado o conceito de função. A quarta atividade discutiu a noção de conjunto finito e conjunto infinito, além de falar da cardinalidade e dos conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis. Já na quinta atividade, comparou a cardinalidade dos conjuntos numéricos.

O trabalho foi aplicado para alunos da primeira série do Ensino Médio em duas escolas diferentes, sendo uma particular e uma pública. O autor concluiu que na escola particular os estudantes mostraram-se mais interessados e tiveram mais facilidade com relação a compreensão do conteúdo. A metodologia utilizada foi de investigação, na qual as atividades eram utilizadas como ferramenta para atrair e aguçar a curiosidade dos educandos e, posteriormente, vinha o conceito/definição.

Através desse trabalho, pode-se perceber semelhanças quando Camargo (2020) expõe alguns conteúdos em que o conceito de infinito está presente, na intenção de elaborar um material para que se possa compreender as principais ideias e concepções de finitude e infinitude que existem na Matemática, além de suas implicações. Assim como, a apresentação de conceitos que são requisitos mínimos, como: Operações de Conjuntos, Funções e Conjuntos Numéricos e a utilização da metodologia investigativa na elaboração das questões. Suas diferenças se dão pela pouca ênfase dada às funções bijetivas, o público-alvo, a aplicação para uma turma e a forma como a atividade foi elaborada, compreendendo que a primeira realizada com os educadores foi inspiradora, pois consta a perspectiva de dois educadores, sendo um de escola particular e outro de escola pública, de cada disciplina da Educação Básica.

2.3.2 A percepção de alunos do 1º. ano do Ensino Médio sobre a importância e aplicações de conteúdos matemáticos relacionados à aprendizagem dos conjuntos numéricos

O objetivo desta dissertação de mestrado, elaborado por Souza (2017), é destacar a percepção dos alunos do 1º. ano do Ensino Médio sobre a importância e aplicações de conteúdos matemáticos relacionando à aprendizagem dos conjuntos numéricos. Para alcançar tal objetivo, o autor contou com uma abordagem de inter-relação entre a Teoria da Aprendizagem Significativa e o Método da Engenharia Didática. No capítulo I, foi abordado o processo de contagem e senso numérico utilizado e desenvolvido pelas principais civilizações. No capítulo II, é feita uma abordagem do ensino de numeração. Já no capítulo III, é explicada a metodologia utilizada na dissertação, além de esclarecer o porquê de utilizar dois questionários na pesquisa, sua formulação e como ocorreu o desenrolar da aplicação e da análise dos questionários. Nessa pesquisa realizada com a turma, foi apresentado, com auxílio de recurso midiático, o filme "A história do número um" e, após seu término, foi entregue um questionário. Em seguida, realizou-se uma conversa informal com os estudantes explicando a temática da pesquisa e entregou-se a segunda parte do questionário. A primeira parte do questionário serviu para evidenciar aos estudantes a história do filme e sua correlação com a história das civilizações. E a segunda parte do questionário buscava observar o impacto do filme na percepção dos estudantes com cada um dos conteúdos trabalhados com eles.

A semelhança com essa pesquisa é a motivação de fazer com que os estudantes consigam perceber como a compreensão de conteúdos ligados a Conjuntos Numéricos pode influenciar outras áreas do conhecimento. No trabalho em questão, Souza (2018) desenvolve em seu estudo e mostra a importância destes conteúdos no dia a dia, enquanto neste presente trabalho mostra como sua compreensão afeta os estudos de conjuntos infinitos e, por consequência, todos os assuntos que utilizam o conceito de infinito. Além disso, outra diferença entre o presente trabalho e esse de Souza é o desenvolvimento dos conceitos de senso numérico e por não ter feito proposta didática.

2.3.3 Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas: Uma abordagem na Educação Básica

A dissertação de mestrado elaborada por Espírito Santo (2019) tem o objetivo de formalizar a definição de Conjuntos Infinitos na Educação Básica através do conceito de função bijetiva. Para alcançar tal objetivo, a autora realizou uma pesquisa nos livros didáticos nacionais, a fim de averiguar a existência ou não do tema Conjuntos Infinitos neles, e apresentou de forma rigorosa a fundamentação dos conceitos de conjuntos e função.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a investigação, em que as atividades elaboradas pela autora tiveram o objetivo de construir os conceitos de Conjuntos Infinitos junto aos estudantes. Tal sequência não foi aplicada, porém a autora deixou bem claro o objetivo de cada questão. A sequência didática foi elaborada com quatro atividades, sendo a primeira a realização da brincadeira dança da cadeira, fazendo com que os educandos percebessem o que aconteceria para x números de cadeiras, de modo a compreender o que seriam funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. A segunda atividade foi realizada para que os alunos percebessem que para Conjuntos Finitos com números de elementos distintos não ocorre a bijeção. A terceira atividade foi a formalização da definição de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva. E a quarta atividade fez com que o aluno compreendesse que para Conjuntos Infinitos, era possível estabelecer uma relação entre o todo e determinadas partes. Ao fim, a autora teve como conclusão que existe uma ausência, em quase todos os livros analisados, da abordagem sobre o Conjunto Infinito.

O trabalho de Espírito Santo (2019) tem sua semelhança com esse, por trabalhar com uma turma do Ensino Médio, e utilizar a BNCC e os PCN para demonstrar a importância de estudar conjuntos numéricos e o conceito de infinito, além da elaboração de uma sequência didática investigativa. Vale ressaltar que algumas de suas atividades serviram de inspiração para a elaboração de algumas atividades da presente pesquisa. A diferença se deve pela forma como infinito é trabalhado, sendo essa apenas a exibição e compreensão da definição, pela realização de uma investigação em alguns livros didáticos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No corpo deste capítulo encontra-se a caracterização dos procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento deste TCC.

3.1 Caracterização da Pesquisa

Conforme foi mencionado na introdução, existiu a necessidade de alterar o objetivo geral da pesquisa que era “Avaliar as possíveis contribuições de uma abordagem investigativa para o estudo dos Conjuntos Infinitos”. Essa modificação ocorreu após a realização de um questionário de teste exploratório com educadores de Matemática e tinha o objetivo de aprimorar a proposta didática para ser aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Com a mudança do objetivo, a proposta não foi experimentada em uma turma do 2º. ano do Ensino Médio, pois os estudantes estavam retornando ao ensino presencial e tinha o receio dos educadores não disponibilizarem suas turmas, devido ao semestre letivo estar mais corrido e tal proposta abordar um conteúdo que não constava no currículo da Educação Básica. Diante disso, aproveitou-se o questionário teste exploratório e o transformou no Questionário 1 com o objetivo de aprimorar a proposta didática para, posteriormente, coletar as percepções dos educadores de Matemática a respeito da proposta didática.

Para melhor entendimento dos Procedimentos Metodológicos da pesquisa, é importante relembrar o objetivo deste trabalho que é: “Investigar a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio”.

Esta pesquisa se classifica como exploratória com uma abordagem qualitativa. A pesquisa qualitativa, segundo Gerhardt e Silveira (2009), almeja aprofundar a compreensão de um grupo social. Para alcançar tal objetivo, ela permite, por meio de suas características, analisar acontecimentos, descrever as ações, compreender e explicar. As autoras definem a pesquisa exploratória como a reunião de estudos já realizados a respeito do tema, feito por meio das leituras ou análises de trabalhos ou entrevistas a pessoas que abordam/já abordaram o tema a ser estudado (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

A junção dessas duas pesquisas, mencionadas no parágrafo anterior, auxilia o pesquisador a ter uma boa base para a compreensão daquilo que se tem feito e como melhorar a sua prática pelas experiências vivenciadas por outras pessoas, tomando-as como referências e incentivo para a sua prática pedagógica.

Com isso, esta pesquisa busca elaborar uma proposta de atividades que venham a auxiliar na melhoria do ensino de Funções Bijetivas e da noção básica de Conjuntos Infinitos. Salienta-se que as Funções Bijetivas são requisitos para conseguir compreender os Conjuntos Infinitos e realizar suas comparações.

Para corroborar esta pesquisa, foi realizada uma análise das respostas dos Questionários 1 e 2, respondidos por educadores de Matemática selecionados, que atuam ou já atuaram no Ensino Médio. Para isso, foram enviados os questionários e a proposta didática, com o intuito de coletar suas opiniões e sugestões.

O Questionário 1 teve como objetivo o aprimoramento da proposta didática, através da análise de cada um dos educadores. Com o intuito de verificar a compreensão de cada questão, se elas cumpriam seu objetivo específico, se era adequada ao público-alvo, e se o passo a passo dos itens auxiliava, de modo eficaz, a compreensão do estudante. O Questionário 2 teve como objetivo obter a percepção de cada um dos educadores a respeito da importância da temática deste trabalho, bem como se eles poderiam vir a utilizar a atividade e, em caso afirmativo, se iriam realizar alguma adaptação para sua aplicação.

O questionário, segundo Gil (2021), é de suma importância para reunir dados de uma determinada área, e para que ele tenha êxito é necessário que faça com que as pessoas se sintam motivadas a responder às questões, que seja de fácil entendimento e compreensão, não seja constrangedor, não faça com que a pessoa se sinta ameaçada ao responder às questões e garanta o anonimato daqueles que responderam.

A pesquisa está dividida nas seguintes etapas: I) Revisão Bibliográfica; II) Aprofundar os estudos sobre Conjuntos Infinitos e sobre a Investigação Matemática; III) Elaborar a proposta investigativa; IV) Elaborar o Questionário 1; V) Análise dos dados obtidos no Questionário 1 e correção da proposta didática. VI) Elaborar o Questionário 2 VII) Análise dos dados obtidos no Questionário 2.

Vale ressaltar que essas atividades foram elaboradas de forma que possam ser aplicadas tanto de modo presencial quanto remoto.

3.2 Detalhamento da proposta didática

Os estudantes no Ensino Fundamental estudam diversas áreas da Matemática que auxiliam o desenvolvimento de capacidades fundamentais, tais como abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas, investigação, análise e compreensão de dados que são requisitos básicos em grande parte, senão em todas as partes, do futuro acadêmico, profissional e pessoal de cada indivíduo (BRASIL, 2000).

Com base nisso, o objetivo das atividades investigativas, aqui descritas, foi colaborar com o estudo de conteúdos que necessitem de uma melhor noção do infinito utilizando o estudo de Funções Bijetivas.

O educador que se interessar poderá ou não fazer alterações de modo a satisfazer seus objetivos, adequando-as aos diversos contextos em que atua. Buscou-se trabalhar o tema de modo que os estudantes investiguem, elaborem estratégias de resolução, discutam com os colegas e socializem suas respostas. É importante que o educador fique atento ao debate que seus estudantes estiverem realizando para estimular os mais relevantes. Além disso, oriente os estudantes que estiverem com dificuldade estimulando-os a realizarem reflexões pertinentes para que todos tenham o melhor proveito possível da atividade. Desse modo, vale ressaltar que as atividades visam possibilitar que os estudantes desenvolvam a sua capacidade de raciocínio e abstração.

Destaca-se que algumas atividades foram encontradas prontas em trabalhos acadêmicos e foram adaptadas de modo a atingir os objetivos deste trabalho. As referências estão apresentadas no arquivo que contém a proposta didática completa (Apêndice A).

A proposta didática foi dividida em 5 partes, são elas: Parte 1 – Requisitos, Parte 2 - Trabalhando a Bijeção, Parte 3 - Trabalhando com a Bijeção no Conjunto dos Números Naturais, Parte 4 - Trabalhando com a Bijeção dos números naturais com os números inteiros e Parte 5 - Conjuntos Não-Enumeráveis.

Essa proposta foi planejada de modo a ser realizada em grupos, formados por 3 ou 4 estudantes. A intenção é fazer com que se sintam encorajados a debater e construir uma linha de raciocínio junto a seus colegas de grupo e, posteriormente, com a turma no decorrer de cada Parte da proposta investigativa. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2020, p. 25):

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos

> grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Após a formação dos grupos, o educador deve entregar a apostila e iniciar a explicação dos requisitos. Posteriormente, inicia-se a fase da investigação realizada nas Partes 2, 3, 4 e 5. O educador deve iniciar a explicação da Parte 2 e disponibilizar um tempo para os estudantes realizarem a mesma. Após esse tempo, deve ocorrer a socialização das respostas e, assim, iniciar a próxima Parte, repetindo esse processo.

Destaca-se que o educador precisa auxiliar os estudantes quando houver necessidade, mas sempre de modo a estimular o raciocínio e a investigação. Vale ressaltar que o educador tem papel fundamental nas aulas de investigação, pois é sua função orientar o estudante do significado de investigar e ensiná-lo o processo de investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2020).

A seguir, serão descritas detalhadamente cada parte da proposta didática.

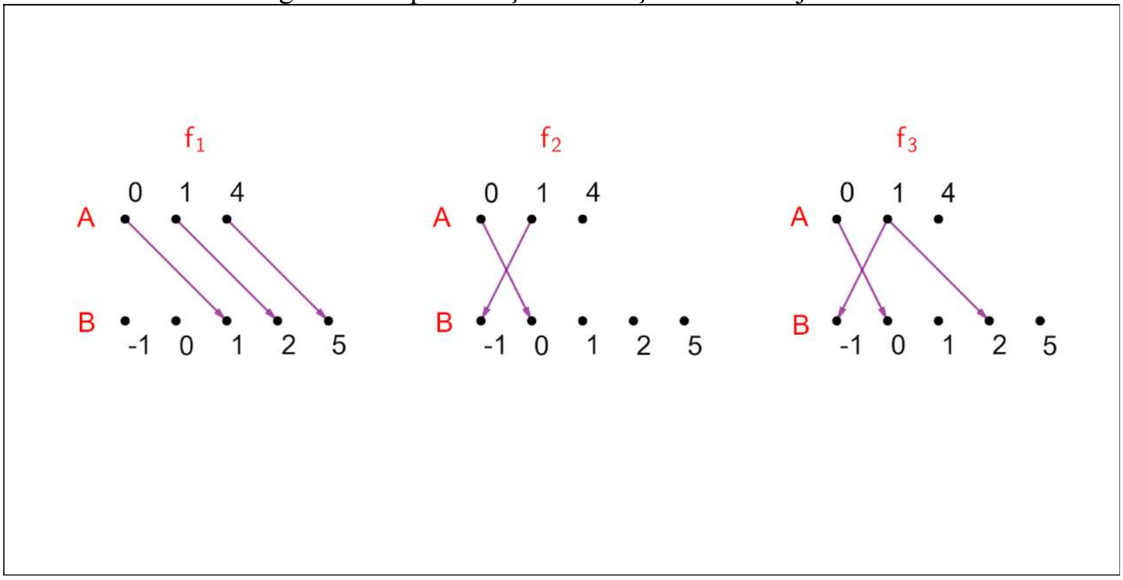
- Parte 1 – Requisitos

Esta etapa tem por objetivo fazer com que o estudante relembre algumas definições necessárias para a realização das questões propostas. São elas: definição de função, definição de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

Sugere-se, antes de iniciar as atividades, que o educador indague os discentes a respeito do infinito para gerar curiosidade e deixá-los mais motivados e interessados com a proposta. Destaca-se que essa parte foi idealiza para ser trabalhada de forma expositiva pelo educador junto aos estudantes, aproveitando essa etapa para sanar possíveis dúvidas.

Vale ressaltar que é de extrema importância a utilização da representação pictórica nas relações entre os conjuntos, que contribuirá para a realização da Parte 3 (Figura 1).

Figura 1 - Representação da relação entre Conjuntos



Fonte: Adaptado de Souza e Garcia (2016, p. 48).

Essa representação é importante, pelo fato de que o diagrama de Venn não contempla Conjuntos Infinitos, dessa forma, foi preciso encontrar uma maneira para ilustrar conjuntos infinitos usando algo comum aos estudantes, por exemplo, a representação pictórica. Esse termo pode ser definido como: representação visual ou por imagens. A diferença das representações se dá pelo fato de poder trabalhar com Conjuntos Infinitos e Finitos, além de usar os pontos para representar os elementos. Essa noção será importante nas Partes 3, 4 e 5, nas quais serão trabalhados os Conjuntos Infinitos.

- Parte 2 - Trabalhando a bijeção

Após a explicação da Parte 1, sugere-se que o educador solicite aos estudantes que iniciem a resolução das atividades da Parte 2 com seus colegas do grupo, dando um tempo de 10 minutos e estimulando e debate entre eles. Ao término desse tempo, sugere-se que o educador debata com os estudantes a fim de sanar dúvidas e socializar as respostas.

Esta parte tem por objetivo fazer com que o estudante reconheça e classifique as situações apresentadas. Desse modo, mesmo que de forma implícita, o conceito de bijeção estará presente em uma situação cotidiana. Na Figura 2, apresenta-se o enunciado da questão 1.

Figura 2- Questão da dança das cadeiras

1) (ESPÍRITO SANTO, 2019 - adaptada) Existe uma brincadeira chamada Dança das Cadeiras. Ela é feita da seguinte forma: faz-se uma roda de cadeiras e outra de pessoas, sendo que o número de cadeiras deve ser sempre um a menos do que o número de pessoas. Toca-se uma música. Quando a música parar, todos devem sentar-se em alguma cadeira que esteja vazia, ou seja, não pode haver mais de uma pessoa em uma mesma cadeira. Aquela pessoa que não conseguir se sentar, sai do jogo e retira-se mais uma cadeira. Será o vencedor quem se sentar quando restar uma única cadeira. Suponhamos que temos um grupo com **6 crianças** para a brincadeira da dança das cadeiras. Responda:

Fonte: Adaptado de Espírito Santo, 2019.

Nesta questão, são realizadas perguntas para estimular o raciocínio do estudante em situações diferentes em termos de quantidade de pessoas e de cadeiras. Posteriormente, pergunta-se, em itens separados, se em alguma situação ocorre a relação de injetividade e sobrejetividade e, no último item, questiona-se a existência de alguma relação bijetiva. Em todos os itens foi requisitado que o estudante explique seu raciocínio.

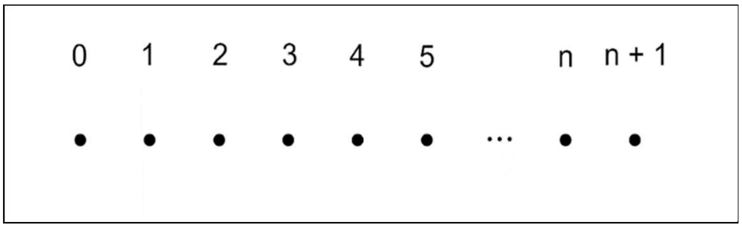
Após o término da questão 1, dança das cadeiras, é iniciada a segunda e última questão dessa parte, na qual são expostos ao aluno dois conjuntos finitos, denominados conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6, \ldots, 20\}$

Nos itens da questão é perguntado qual conjunto possui o maior número de elementos; se existe uma relação de bijeção $f: A \rightarrow B$ e se existe uma relação de bijeção de $f: B \rightarrow A$. Em seguida, cria-se uma relação com a questão 1, questionando se existe uma relação de bijeção entre o número de pessoas e o número de cadeiras. No último item, pergunta-se: “Com base nas respostas dos itens “b”, “c” e “d”, desta questão, o que se pode observar a respeito das relações entre o número de elementos do domínio e do contradomínio das funções bijetivas?”. Essa pergunta tem como objetivo fazer com que o estudante perceba que a relação bijetiva é uma relação que é válida para ambos os sentidos, ou seja, se $f: A \rightarrow B$ é bijetiva então $f: B \rightarrow A$ também será bijetiva.

- Parte 3 - Trabalhando com a Bijeção no Conjuntos dos Números Naturais

Nessa parte, conforme mencionado anteriormente, são iniciadas as questões com os Conjuntos Infinitos. Antes dos estudantes iniciarem a realização dessa etapa com o tempo recomendado de 20 minutos, o educador deve apresentar os exemplos de representação pictórica de Conjuntos Infinitos disponíveis na proposta. Essas representações utilizam o mesmo raciocínio das figuras da Parte 1 (Figura 3).

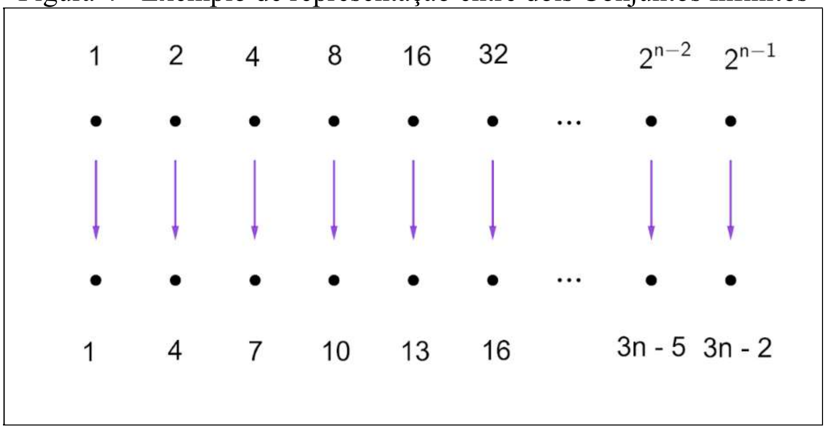
Figura 3 - Exemplo de representação para o Conjunto dos Números Naturais



Fonte: Elaboração própria.

Na figura 4, mostra como pode ser ilustrada a relação entre dois conjuntos infinitos.

Figura 4 - Exemplo de representação entre dois Conjuntos Infinitos



Fonte: Elaboração própria.

Para criar as ligações entre dois Conjuntos Infinitos, então, basta criar duas "linhas" de sequências de pontos e traçar as setas entre as relações obtidas por meio da lei da função. Essa visualização pretende facilitar o raciocínio nas próximas questões. Feito isso, é solicitada a resolução da questão 3, cujo enunciado está presente na Figura 5.

Figura 5 - Enunciado da Questão 3

3) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjuntos dos Números Naturais Pares ($\mathbb{N}_p$), considere a função definida da seguinte forma f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$ tal que f(x) = 2x.

Fonte: Elaboração própria.

É questionado então, em subitens, se o número de elementos do Conjunto dos Números Naturais é maior que o número de elementos do Conjunto dos Números Naturais Pares. Em seguida, é solicitado que os estudantes ilustrem a relação entre os dois conjuntos conforme foi exemplificado. Logo após, eles devem classificar a relação entre esses dois conjuntos entre injetiva, sobrejetiva ou bijetiva; e pede-se novamente para comparar o número de elementos de cada conjunto dizendo se um é maior que o outro.

A questão 4 está com seu enunciado apresentado na Figura 6.

Figura 6 - Enunciado da Questão 4

4) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjunto dos Números Ímpares ($\mathbb{N}_i$), considere a função definida da seguinte forma

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_i$, tal que $f(x) = 2x + 1$.

Fonte: Elaboração própria.

São realizadas as mesmas indagações da questão 3. Questiona-se, em subitens, se o número de elementos do Conjunto dos Números Naturais é maior que o número de elementos do Conjunto dos Números Naturais Ímpares; é solicitado para ilustrar a relação entre os dois conjuntos conforme foi exemplificado; classificar a relação entre esses dois conjuntos como injetiva, sobrejetiva ou bijetiva; e pede-se novamente para comparar o número de elementos de cada conjunto dizendo se um é maior que o outro.

E a última atividade desta parte é a questão 5, cujo enunciado encontra-se na Figura 7.

Figura 7 - Enunciado da Questão 6

5) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjunto dos Números que são Potências de 10 (10^0, 10^1, 10^2, … , 10^n), para todo $n \in \mathbb{N}$. O que pode-se dizer em relação ao número de elementos destes dois conjuntos? Justifique.

Fonte: Elaboração própria.

Nessa questão, diferente das outras, questiona-se ao estudante de forma direta, sem o auxílio dos subitens, se existe bijeção entre o Conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números que são Potências de 10.

A questão 5 foi construída dessa forma, pois considera-se que as duas questões anteriores servem de base para que o estudante investigue as relações existentes entre os conjuntos e assim construa o raciocínio necessário para sua conclusão. Servindo assim, para verificar se o estudante consegue repetir o processo executado nas questões 3 e 4, sem a necessidade do passo a passo.

- Parte 4 - Trabalhando com a Bijeção dos naturais com os inteiros

Posteriormente a socialização das respostas da Parte 3, o educador disponibilizará um tempo sugerido de 20 minutos para realização das atividades.

Essa parte é composta por apenas uma questão com 6 subitens. Nesta questão, pretende-se estabelecer relações entre o Conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números Inteiros. Desse modo, pede-se para que o estudante ilustre a relação entre o Conjunto dos Números Inteiros Negativos e o Conjunto dos Números Inteiros Positivos; defina a lei de função da aplicação do Conjunto dos Números Inteiros Negativos em relação ao Conjunto dos Números Inteiros Positivos; ao final o estudante deve verificar se a relação é bijetiva. Posterior a isso, inicia-se o questionamento da relação entre o Conjunto dos Números Inteiros e o Conjunto dos Números Naturais com a sugestão de que ele organize os elementos da seguinte maneira: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, …\}$. Em seguida, eles devem ilustrar a relação entre os conjuntos, usando como base os exemplos que foram apresentados na Parte 3. A partir da lei de função dada, ilustrar a relação entre os dois conjuntos; o que pode ser concluído em relação ao número de elementos do Conjunto dos Números Inteiros e Conjunto dos Números Naturais.

Com esses questionamentos, pretende-se que os estudantes percebam que, apesar de parecer logicamente que um infinito é menor ou maior que o outro, eles podem conter o mesmo número de elementos.

Sugere-se, que após o tempo de resolução, o educador socialize as repostas com os estudantes.

- Parte 5 - Conjuntos Não-Enumeráveis

Esta parte foi planejada para ser realizada de forma expositiva e ser lida/explicada junto a turma. Dessa forma, deve ser apresentado e explicado o conceito de Cardinalidade, Enumerabilidade e o de Não-Enumerabilidade. Posteriormente, o estudante será questionado na questão 7 se existem Conjuntos Infinitos maiores que outros Conjuntos Infinitos.

Após a resposta dos discentes, existe a intenção de que o estudante assista ao vídeo disponível no *QR code* que consta na questão 8 e realize um comentário do que foi compreendido. Vale ressaltar que, após a Parte 5, tem uma parte denominada: Curiosidades para os estudantes interessados no aprofundamento do assunto. Essas curiosidades são dois vídeos: o primeiro, intitulado de "*O paradoxo do Hotel Infinito";* e o segundo, "*O que é o infinito? Uma explicação curta",* disponibilizados em *QR Code*.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e analisados os dados obtidos por meio dos dois questionários.

4.1 Resultados do Questionário 1

Com o intuito de aprimorar as atividades investigativas, foi enviado, para os educadores selecionados, um *e-mail* com o *link* do Questionário 1, elaborado pelo Formulário *Google*, e o arquivo digital da atividade investigativa. O *e-mail* foi enviado, no dia 13 de dezembro de 2021, para os 13 educadores escolhidos, que atuam ou já atuaram no Ensino Médio de escolas públicas ou privadas. Desses 13, obteve-se as respostas e as análises de 9 educadores, os quais foram identificados como E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 e E_9. No Quadro 6, encontra-se a caracterização destes educadores.

Quadro 6 – Caracterização dos Educadores

Educador	**Tempo de Formação (em anos)**	**Rede de Ensino que atua ou atuou no Ensino Médio**	**Tempo de atuação no Ensino Médio (em anos)**	**Atualmente, leciona para turmas do Ensino Médio?**	**Tempo afastado do Ensino Médio (em anos)**
E_1		Pública Federal		Não	
E_2	34	Pública Federal	18	Não	14
E_3	12	Pública Estadual e Municipal	11	Sim	-
E_4	6	Privada	1	Sim	-
E_5	13	Pública Federal	13	Sim	-
E_6	17	Pública Federal	3	Não	14
E_7	7	Privada	6	Sim	-
E_8	17	Pública Federal	10	Não	4
E_9	9	Privada	9	Sim	-

Fonte: Elaboração própria.

Os educadores tiveram liberdade para enviar as respostas de diferentes formas, como no próprio Questionário, por meio de comentários no arquivo da atividade investigativa ou em um arquivo de texto.

Como as atividades foram divididas em partes, a análise das respostas dos educadores também foi feita por partes, sendo elas: Parte 1, Parte 2, Parte 3, Parte 4 e Parte 5.

A **Parte 1** foi a que teve mais observações e comentários. Esta é composta pelo estudo dos requisitos dessa atividade: Definição de Função, Representação de Função, Funções Injetivas, Funções Sobrejetivas e Funções Bijetivas.

Os educadores E_1, E_2, E_4, E_8 sugeriram a reescrita das definições de Função, Função Sobrejetiva e Contradomínio. Em especial, o educador E_1 sugeriu que as definições fossem referenciadas, então, após análise, foram aceitas as sugestões. Para alteração das definições, usou-se o livro dos autores Iezzi e Murakami (2013). Na Figura 8, encontra-se a definição de função utilizada na proposta.

Figura 8 - Definição de Função

1) Definição de Função (IEZZI, MURAKAMI, 2013)

Dados dois conjuntos A e B, ambos contidos no Conjunto dos Números Reais e não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A,\ \exists|\ y \in B|\ (x, y) \in f)}$$

Considerando uma função $f: A \rightarrow B$, definida pela lei $f(x) = x$, temos que:

- Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
- Contradomínio (CD) é o conjunto de todos os elementos do conjunto B.
- Chamamos de imagem o conjunto Im dos elementos y pertencente a B para os quais existe x pertencente a A tal que (x, y) pertence a f; portanto: imagem é subconjunto do contradomínio.

Fonte: Elaboração própria.

Além disso, E_1, E_2 e E_8 alertaram a importância de reescrever a noção intuitiva de função, pois ela tratava apenas como a ideia de um mecanismo. Sugestão essa que também foi aceita, porém, posteriormente, retirou-se essa parte, pois, percebeu-se que não era necessário abordar isso de forma direta.

Os educadores E_1 e E_2 sugeriram a utilização de definições utilizando produtos cartesianos, porém considera-se que eles não eram necessários para a atividade desenvolvida, já que o tratamento das resoluções das questões propostas, nessa atividade, se dá por outra abordagem.

Além disso, foram realizados comentários para ajuste de formatação do arquivo da atividade.

Também foram feitos comentários sobre as figuras utilizadas nesta parte, por exemplo, colocar borda nas figuras e ajustar alguns exemplos, pois tinham dois casos que a relação não era função. Ainda, foi questionado por E_2, se existia a necessidade de mencionar a contra positiva da definição de função injetiva, tal sugestão foi aceita retirou-se a contra positiva.

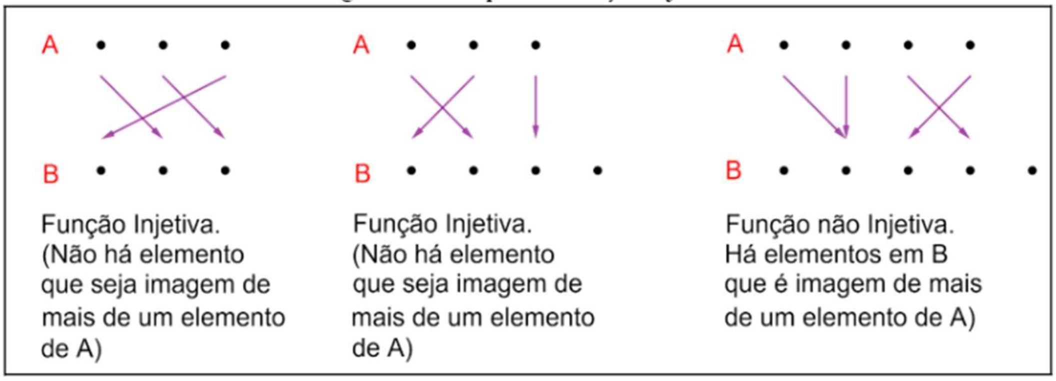
Nas Figuras 9 e 10 são apresentadas as mudanças feitas na definição injetiva e das figuras.

Figura 9 - Definição de Função Injetiva (antes)

- Função Injetiva (IEZZI, MURAKAMI, 2013): Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim:

$$\boxed{f \text{ é injetiva quando } x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B}$$

Figura 2 - Exemplos de Função Injetiva



Fonte: Adaptado de Dante (2016, p. 62).

Fonte: Elaboração própria.

Figura 10 - Definição de Função Injetiva (depois)

- **Função Injetiva (IEZZI, MURAKAMI, 2013): Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim:**

$$\boxed{f \text{ é injetiva quando } x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B}$$

Figura 2 - Exemplos de Função Injetiva

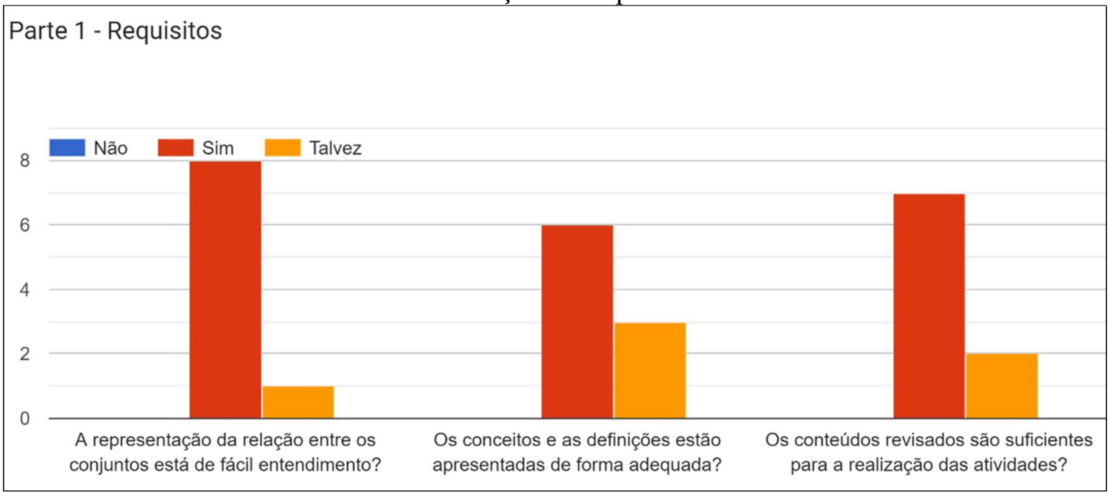
Fonte: Adaptado de Dante (2016, p. 62).

Fonte: Elaboração própria.

Outra sugestão aceita, realizada por E_1, foi de recordar aos estudantes que o número zero é par, mas não é positivo nem negativo. Essa observação foi aceita, mas deve ser realizada na forma de comentário com a turma ao longo da explicação. E_1 também sugere deixar espaços em branco nas definições para que o estudante pense e complete junto com o educador. Essa sugestão, apesar de muito interessante, não foi aceita, pois entende-se que, para a turma alvo do trabalho, essas definições seriam estudos de revisão, logo da forma como estão sendo apresentadas, já seria suficiente. Além disso, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), a fase introdutória da investigação não pode se alongar, pois, deve-se tentar manter interesse do estudante e otimizar o tempo da aula para realização da investigação. Caso necessário, o educador pode sanar qualquer dúvida ao longo da atividade.

Apesar da Parte 1 ter tido muitas sugestões e ter sido a com maior quantidade de comentários, não teve nenhuma resposta negativa com relação às perguntas feitas no questionário, conforme podem ser observadas no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Balanço das respostas da Parte 1



Fonte: Elaboração própria.

Com isso, entende-se que a Parte 1 estava adequada assim que as modificações necessárias fossem realizadas.

Na **Parte 2**, que é composta pelo estudo da aplicação da bijeção, E_2 destaca um erro na escrita do enunciado da questão 1 e sugere como poderia ser reescrito o mesmo. O enunciado alterado segue na Figura 11.

Figura 11 - Enunciado da Questão 1

1) (ESPÍRITO SANTO, 2019 - adaptada) Existe uma brincadeira chamada Dança das Cadeiras. Ela é feita da seguinte forma: faz-se uma roda de cadeiras e outra de pessoas, sendo que o número de cadeiras deve ser sempre um a menos do que o número de pessoas. Toca-se uma música. Quando a música parar, todos devem sentar-se em alguma cadeira que esteja vazia, ou seja, não pode haver mais de uma pessoa em uma mesma cadeira. Aquela pessoa que não conseguir se sentar, sai do jogo e retira-se mais uma cadeira. Será o vencedor quem se sentar quando restar uma única cadeira. Suponhamos que temos um grupo com **6 crianças** para a brincadeira da dança das cadeiras. Responda:

Fonte: Elaboração própria.

A alteração foi na frase "Será vencedor quem se sentar quando restar uma única cadeira." A frase anterior gerava ambiguidade, pois expunha que seria vencedor quando só resta uma cadeira, podendo assim gerar confusão devido ao fato de quando restasse uma cadeira ainda tem duas pessoas jogando.

Os educadores E_4 e E_5 destacaram que a letra "c" da questão 1 não era uma função, sugestão essa analisada, verificada e aceita, já que, de fato, a letra "c" não era uma função.

Neste item em questão, era pedido para fazer a relação de 4 cadeiras para um grupo de 6 crianças, sendo que o domínio seriam as cadeiras, ocasionado assim a não classificação como função. Este item foi substituído pela pergunta: “Algumas das funções descritas nos itens “a” e “b” são injetivas? Explique seu raciocínio.”

O educador E_2 comenta a necessidade de mais direcionamento para o estudante no item “e” da questão 2, no qual é solicitado que o estudante escreva a relação entre o número de elementos do domínio e do contradomínio com o objetivo de perceber que na bijeção o domínio e contradomínio terão a mesma quantidade de elementos.

Vieira (2012) afirma que o educador deve estimular o estudante apresentando situações problemas abertas, adequadas ao seu nível escolar, fazendo-o desenvolver habilidades que favoreçam sua reflexão, criação de hipóteses, proporcionar momentos para a comunicação do debate das atividades desenvolvidas e potencializar a dimensão coletiva do trabalho científico.

Além disso, também foram realizadas sugestões de melhoria de escrita, como correção de todos os educadores da palavra “ilustra” para a palavra “ilustre”, erro esse cometido devido ao corretor de texto.

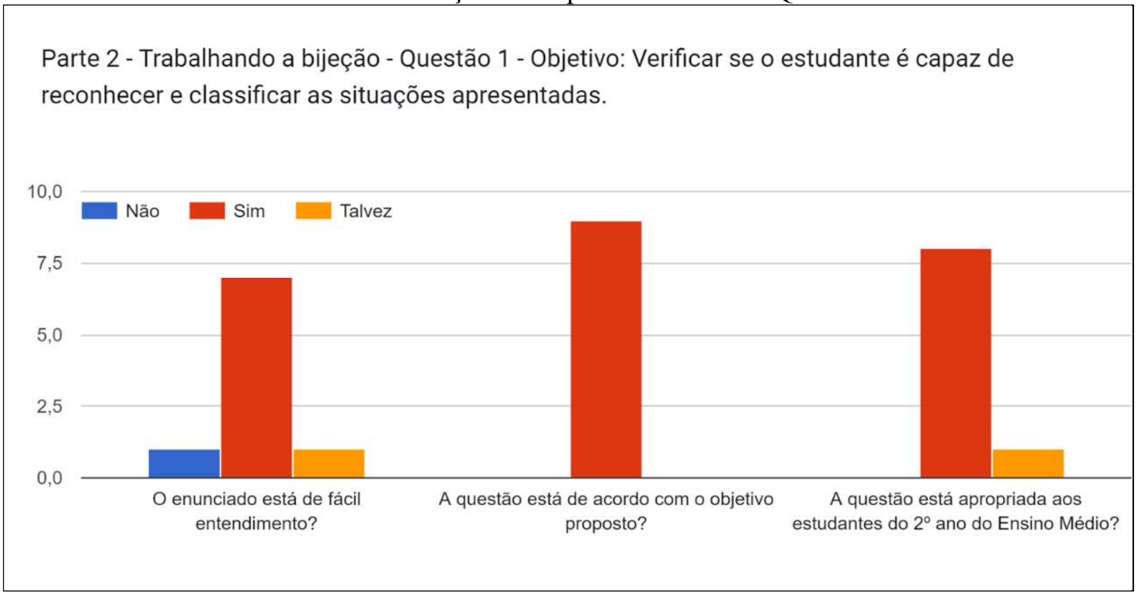
Dois educadores fizeram dois comentários importantes. O primeiro deles foi feito por E_8, que diz entender o objetivo ao pedir aos estudantes que expliquem seus raciocínios, mas fica reflexiva se eles conseguirão realizar o pedido, visto que não estão acostumados com questões para explicar o raciocínio. Este comentário enfatiza a importância do educador fomentar cada vez mais o debate nas suas aulas, desenvolvendo o senso crítico, o raciocínio lógico e a capacidade de se expressar na linguagem de cada disciplina, fato evidenciado por Stuart (2009) apud Vieira (2012) que afirma:

> Na tentativa de solucionar tal problema as habilidades cognitivas e a capacidade de argumentação dos alunos são fomentadas e evidenciadas no momento em que se estabelece a discussão em sala de aula entre aluno e professor e entre os alunos. Essa participação também pode contribuir para uma maior autonomia e responsabilidade dos estudantes, pois elaborar um procedimento e testar hipóteses exige espírito crítico e habilidades de reflexão. (SUART, 2009 apud VIEIRA, 2012, p. 46-47).

O segundo comentário foi realizado por E_9, que fala da importância de verificar o nível da turma, pois na escola que leciona, essas atividades teriam de ser aplicadas na turma do terceiro ano do Ensino Médio. Essa educadora tem a vivência das redes de ensino pública e privada (conforme pode-se observar no Quadro 6), e destaca a defasagem educacional de uma rede de ensino para a outra.

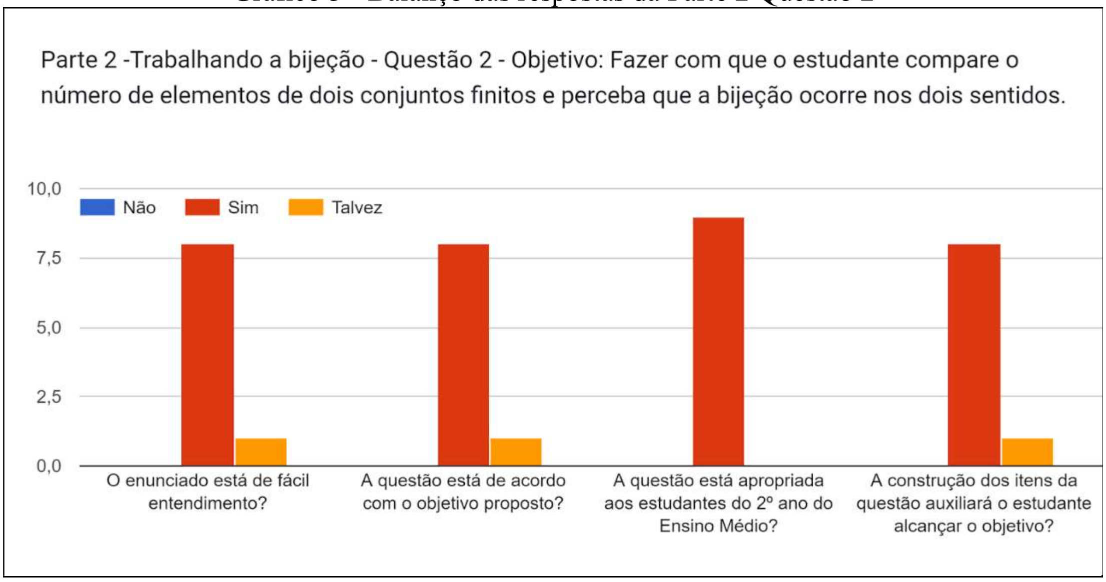
Apesar das mudanças necessárias e da presença de uma resposta negativa, a atividade teve bom índice de aprovação por parte dos educadores, como pode ser observada no Gráfico 2 e no Gráfico 3.

Gráfico 2 - Balanço das respostas da Parte 2 Questão 1



Fonte: Elaboração própria.

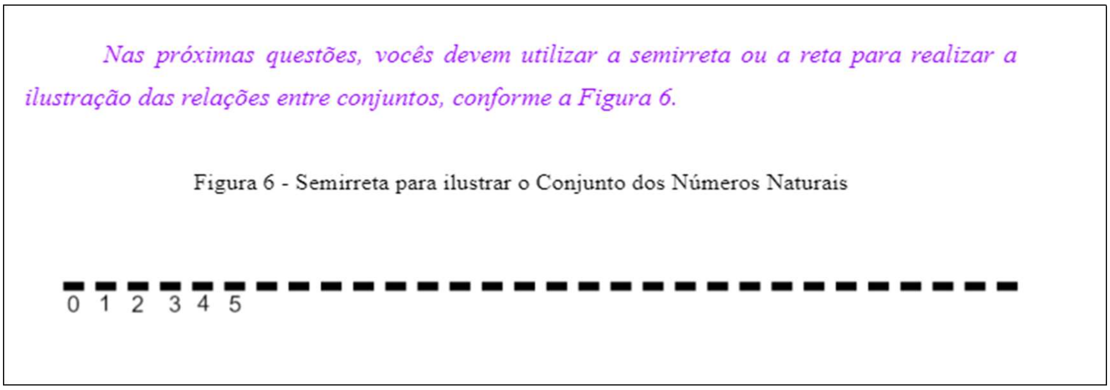
Gráfico 3 - Balanço das respostas da Parte 2 Questão 2



Fonte: Elaboração própria.

A **Parte 3**, que é composta pelo estudo da aplicação da bijeção no Conjunto dos Números Naturais, foram feitos os seguintes apontamentos: nas questões 3 e 4 os educadores E_3, E_4, E_5, E_6 questionam a utilização da semirreta para representar o Conjunto dos Números Naturais (Figura 12).

Figura 12 - Ilustração do Conjunto dos Números Naturais (antes)



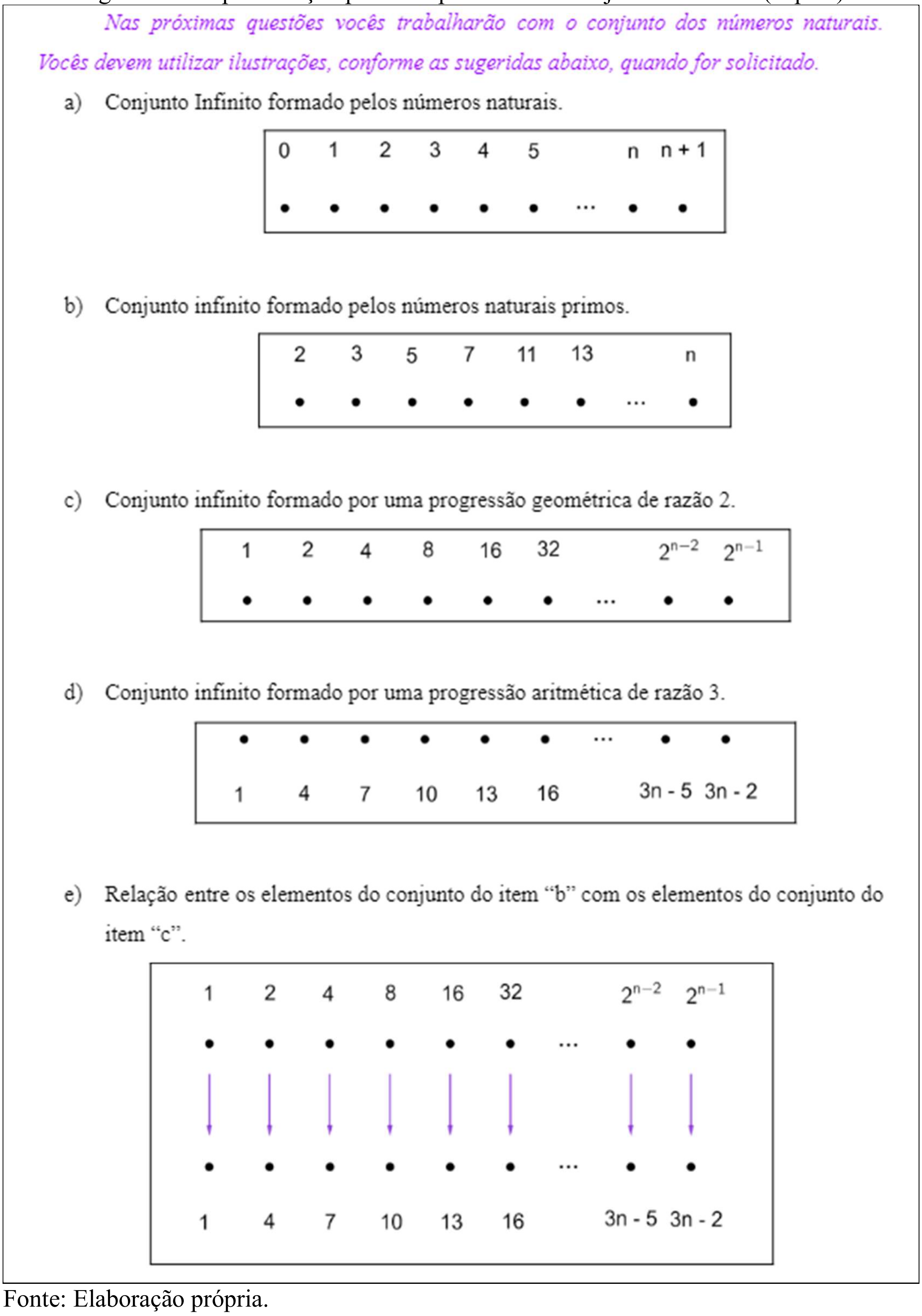
Nas próximas questões, vocês devem utilizar a semirreta ou a reta para realizar a ilustração das relações entre conjuntos, conforme a Figura 6.

Figura 6 - Semirreta para ilustrar o Conjunto dos Números Naturais

Fonte: Elaboração própria.

Entende-se que realmente não era a representação correta para tratar do conjunto, sendo assim, repensou-se a forma de representação e adotou-se uma representação pictórica. Outra sugestão foi o de acrescentar mais exemplos para facilitar a compreensão dos estudantes. Ambas as modificações podem ser observadas na Figura 13.

Figura 13 - Representação pictórica para ilustrar Conjuntos Infinitos (depois)



Fonte: Elaboração própria.

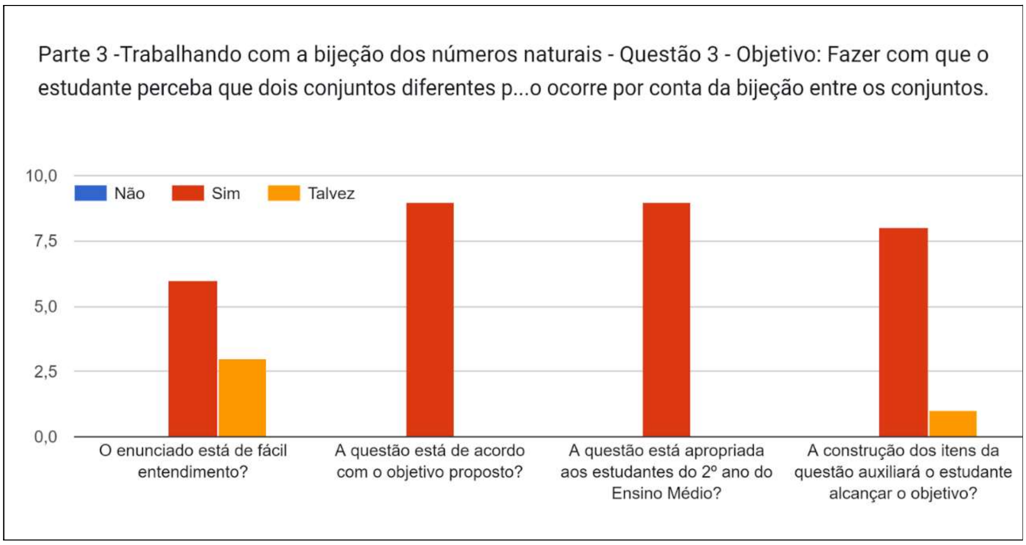
Outra sugestão dada por E_1, E_3, E_4, E_5, E_6 foi a de colocar as classificações das funções escritas para os estudantes entenderem com precisão o tipo de resposta almejada na questão, visto que na versão anterior perguntava-se apenas qual era a classificação e agora pergunta-se se são funções injetivas, sobrejetivas ou bijetivas. Comentário esse que é defendido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) que dizem que em uma atividade investigativa o estudante necessita compreender a natureza da questão para que consiga desenvolver o raciocínio de acordo com a situação que lhe é apresentada.

Já na questão 5, a única sugestão aceita foi dada por E_6, que ressalta a importância de indicar o último elemento como 10 elevado a "n" e indicar que "n" pertence aos naturais. Vale ressaltar que E_2 e E_3 comentaram que a questão pode ser de grande dificuldade para os estudantes. Mas, segundo Vicente (2011) apud Souza (2017):

> As situações-problema, geralmente, têm caráter de desafio. Essa característica estimula o raciocínio lógico, produz a arte de pensar, caracterizando-se diferente dos exercícios convencionais, nos quais basta saber a operação a ser utilizada, que a resolução não demora. (VICENTE, 2011 apud SOUZA, 2017, p. 69 - 70).

Apesar de não possuir nenhuma resposta negativa, teve notória percepção da necessidade de melhoria dos enunciados das questões 3 e 4 da parte 3 devido ao grande número de votos na opção "talvez", como pode-se observar no Gráfico 4.

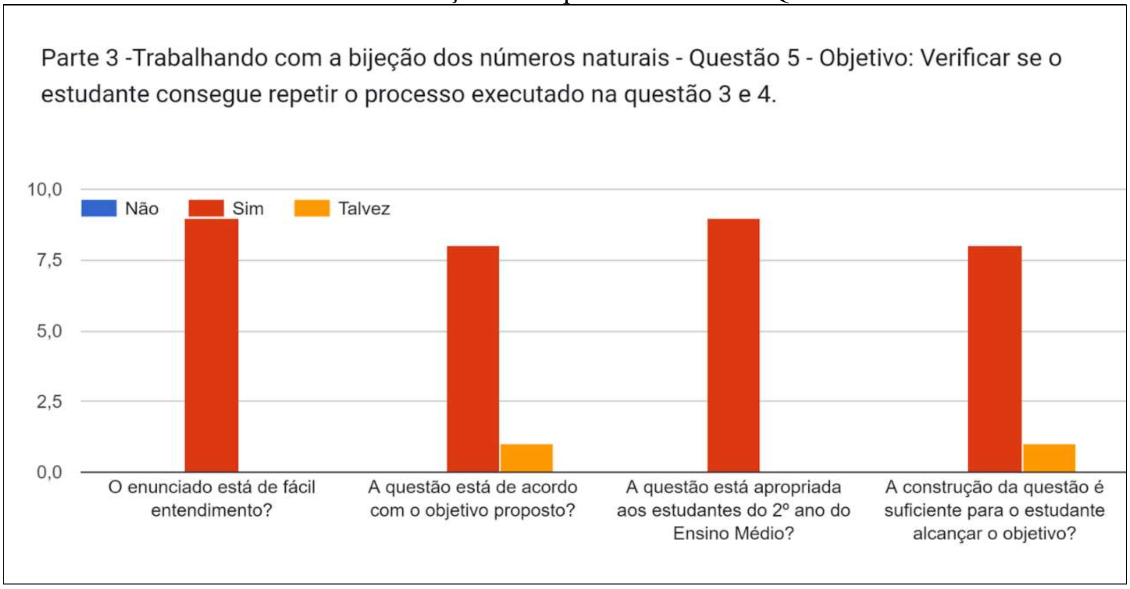
Gráfico 4 - Balanço das respostas da Parte 3 Questão 3 e 4



Fonte: Elaboração própria.

O Gráfico 5 mostra que, apesar da questão exigir maior raciocínio por parte do estudante, teve apenas um educador votando "talvez". Considera-se que a questão tem potencial e está de acordo com o planejado para essa proposta de atividade, sendo necessárias apenas as alterações mencionadas anteriormente.

Gráfico 5 - Balanço das respostas da Parte 3 Questão 5



Fonte: Elaboração própria.

Na **Parte 4**, que é composta pelo estudo da aplicação da bijeção no Conjunto dos Números Inteiros, foram feitos os seguintes apontamentos por E_1, E_3, E_5, E_6 que comentam a dificuldade da questão para os estudantes, pois nesta parte, além do raciocínio com os Conjuntos Infinitos, Conjunto dos Números Naturais e Conjunto dos Números Inteiros, também era pedida a lei de formação da relação entre esses dois conjuntos, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 - Questão 6 (antes)

6) Agora iremos trabalhar comparando o Conjuntos dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) e o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$).

a) Ilustre, por meio de um par de semirretas, a relação entre o Conjunto dos Números Inteiros Negativos ($\mathbb{Z}_-^*$) e o Conjunto dos Números Inteiros Positivos ($\mathbb{Z}_+^*$).

b) Determine a lei da função do item "a".

c) A relação entre $\mathbb{Z}_-^*$ e $\mathbb{Z}_+^*$ é bijetiva?

d) Ilustre, por meio da reta e da semirreta, a relação entre o Conjunto dos Números Inteiros e o Conjunto dos Números Naturais. Sugestão: organize os conjuntos da seguinte maneira:

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

e) Defina uma lei da função para o item "d".

$$f(x) = \left\{ \right.$$

f) O que podemos concluir em relação ao número de elementos de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Fonte: Elaboração própria.

Com essas observações sendo analisadas, percebeu-se a necessidade de alterar parte da questão, substituindo os itens "d" e "e", como pode ser observado na Figura 15 a seguir.

Figura 15 - Questão 6 (depois)

6) Agora iremos trabalhar comparando o Conjuntos dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) e o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$).

a) Ilustre a relação entre o Conjunto dos Números Inteiros Negativos ($\mathbb{Z}_-^*$) e o Conjunto dos Números Inteiros Positivos ($\mathbb{Z}_+^*$).

b) Determine a lei da função da aplicação de $\mathbb{Z}_-^*$ em $\mathbb{Z}_+^*$.

c) A função entre $\mathbb{Z}_-^*$ e $\mathbb{Z}_+^*$ é bijetiva?

____

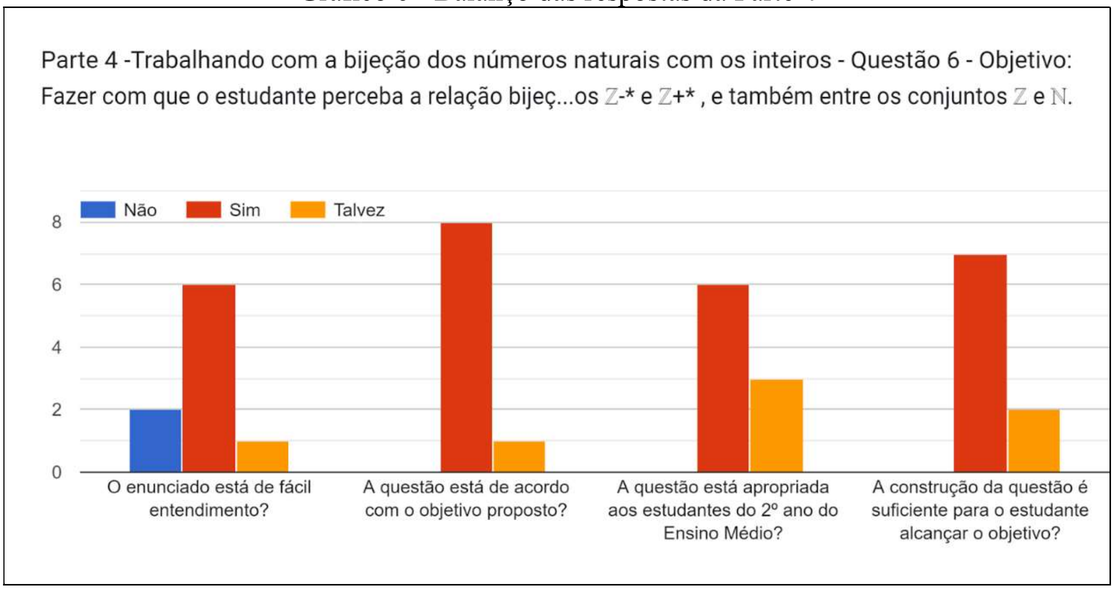
d) Observe a lei de formação $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ apresentada abaixo e a seguir ilustre a relação gerada por essa lei.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ,\text{se } x > 0 \\ -2x & ,\text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Fonte: Elaboração própria.

Com as alterações realizadas, espera-se que as respostas dos educadores que fizeram parte do teste exploratório, por meio dos questionários, mudem para "sim", visto que foram modificados os pontos mais críticos da questão, conforme pode-se observar no Gráfico 6.

Gráfico 6 - Balanço das respostas da Parte 4



Fonte: Elaboração própria.

Já na **Parte 5**, que é composta pelo estudo dos Conjuntos Não-Enumeráveis, foram feitos os seguintes apontamentos: E_3 sugere que sentiu falta de exemplos nessa parte, mas tal sugestão, apesar de ser muito interessante, não foi aceita, devido ao fato dessa parte ter sido planejada para ser realizada junto aos estudantes apenas de forma expositiva para que eles concluam o raciocínio. Ou seja, com a explicação do educador, pretende-se que os estudantes percebam que se a classificação das relações entre qualquer conjunto com o Conjunto dos Números Naturais for uma Função Bijetiva, então esse conjunto qualquer será enumerável e com mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$. Mas, no caso de a relação ser uma função, porém não for uma função bijetiva, este conjunto será não enumerável e possuirá uma cardinalidade diferente de $\mathbb{N}$.

E_1, E_2 e E_6 falaram da necessidade de corrigir as definições de Enumerabilidade, Não-Enumerabilidade e Cardinalidade. Para melhor explicar essa parte, observe a definição anterior que pode ser verificada na Figura 16 e compare com a nova definição que pode ser verificada na Figura 17.

Figura 16 - Definição de Enumerabilidade de Cardinalidade (antes)

Enumerabilidade é a capacidade ou não de se enumerar ou contar tais elementos. Dizemos que um conjunto A, sendo A um conjunto qualquer, é Enumerável se for finito ou se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e esse conjunto A, ou seja, se $\exists$ f: $\mathbb{N} \rightarrow A$. Caso esse conjunto não estabeleça uma correspondência biunívoca ele é dito Não-Enumerável.

Cardinalidade é o termo utilizado para se atribuir quantidade de elementos de um determinado conjunto, ou seja, associar cada elemento de um conjunto a um número natural único e exclusivo. Diz-se que A é um conjunto finito, e que tem n tem elementos, $n \in \mathbb{N}$, quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow A$, para $I_n = \{ 1,2, 3, \dots \} \subset \mathbb{N}$. O número natural n chama-se então o número cardinal do conjunto A. A bijeção $f:I_n \rightarrow X$ chama-se uma contagem dos elementos de A e denotaremos por n(A), o seu número de elementos.

Observação$_1$: Admite-se o conjunto vazio como um conjunto finito, o qual é associado o zero como número de elementos

Observação$_2$: Diz que os conjuntos A e B são (numericamente) equivalentes, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca $f: A \rightarrow B$, ou seja, quando A e B têm o mesmo número cardinal.

Fonte: Elaboração própria.

Considerando a definição com as alterações sugeridas, e com contribuição de E_2 para escrever as novas definições, podem ser vistas na Figura 17.

Figura 17 - Definição de Enumerabilidade de Cardinalidade (depois)

Definição de Enumerabilidade (SILVA, 2016)

Diremos que um conjunto A, sendo A um conjunto qualquer, é Enumerável se for finito ou se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e esse conjunto A, ou seja, se $\exists$ f: $\mathbb{N} \rightarrow A$. Caso esse conjunto não estabeleça uma correspondência biunívoca ele é dito Não-Enumerável.

Definição de Cardinalidade (SILVA, 2016)

É o termo utilizado para se atribuir quantidade de elementos de um determinado conjunto, ou seja, associar cada elemento de um conjunto a um número natural único e exclusivo. Diz-se que A é um conjunto finito, e que tem n elementos, $n \in \mathbb{N}$, quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow A$, para $I_n = \{ 1,2, 3, \dots \} \subset \mathbb{N}$. O número natural n chama-se então o número cardinal do conjunto A. A bijeção $f: I_n \rightarrow X$ chama-se uma contagem dos elementos de A e denotaremos por n(A), o seu número de elementos.

Observação$_1$: Admite-se o conjunto vazio como um conjunto finito, ao qual é associado o zero como número de elementos.

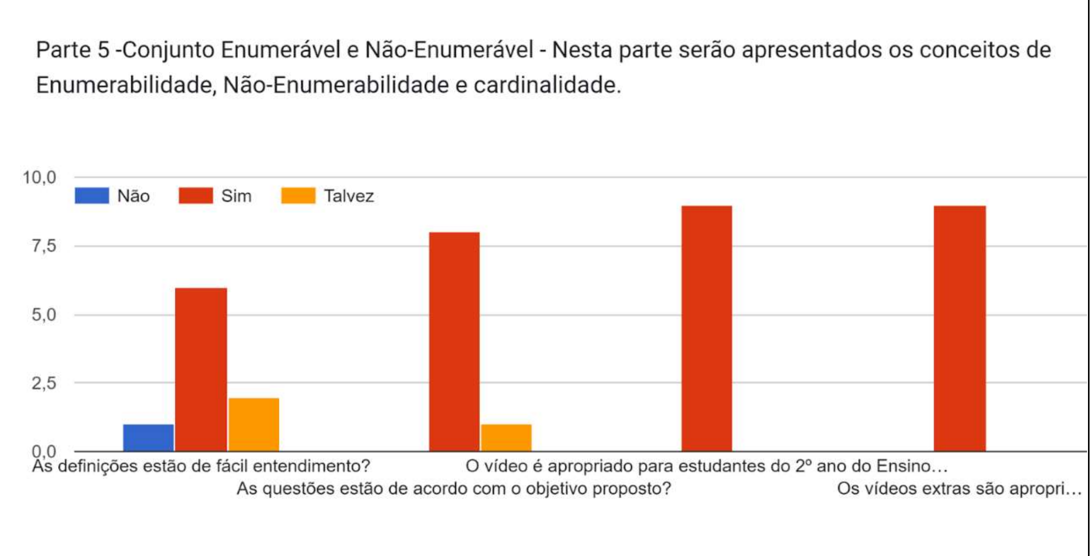
Observação$_2$: Diz-se que os conjuntos A e B são (numericamente) equivalentes, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca $f: A \rightarrow B$, ou seja, quando A e B têm o mesmo número cardinal.

Fonte: Elaboração própria.

Outra observação realizada por E_1 foi a de que nos vídeos o número 0 não foi utilizado como elemento do Conjunto dos Números Naturais, enquanto esta pesquisa está utilizando esse número como elemento do Conjuntos dos Números Naturais. Essa observação foi importante e permitiu refletir a respeito dessa divergência entre as definições utilizadas pelos autores. Observando isso, sugere-se uma explicação aos estudantes que ambas as abordagens estão corretas e isso varia de acordo com os autores usados. Essa explicação é importante para os estudantes perceberem que a Matemática não é tão fechada quanto eles pensam, e que existem divergências dentro dela dependendo dos pensadores que se utilizam como base. Segundo Lima (1991, p. 151): "Incluir ou não o número 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de convivência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in \mathbb{N}$ ou $0 \notin \mathbb{N}$."

Em relação às respostas dos educadores desta parte, percebe-se que a maior parte apoiou a utilização dos vídeos para explicar Cardinalidade e Enumerabilidade e concluir a proposta com a ideia de que existem infinitos de diferentes tamanhos (Gráfico 7)

Gráfico 7 - Balanço das respostas da Parte 5



Fonte: Elaboração própria.

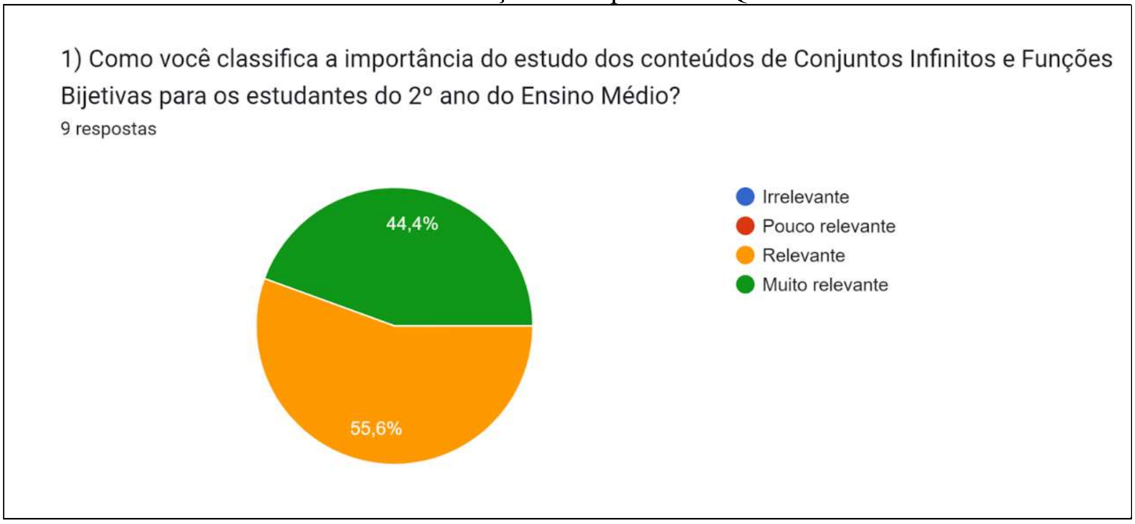
4.2 Resultados do Questionário 2

Com o intuito de verificar as adaptações realizadas na atividade investigativa e coletar as opiniões dos educadores selecionados acerca da proposta finalizada, foi enviado um *e-mail* com o *link* do Questionário 2, elaborado pelo Formulário *Google*, e o arquivo digital da atividade investigativa corrigida. O *e-mail* foi enviado, no dia 20 de Junho de 2022, para os 9 educadores que responderam ao primeiro questionário. A identificação destes educadores será a mesma realizada anteriormente, ou seja, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 e E_9. Os educadores tiveram liberdade para enviar as respostas de diferentes formas, como no próprio questionário e por meio de comentários no arquivo da atividade investigativa.

Diferentemente do outro questionário que foi dividido pelas partes da atividade investigativa, esse foi dividido em 7 perguntas. Sendo assim, nos parágrafos seguintes são apresentadas as sugestões e opiniões coletadas no questionário.

Na primeira pergunta buscava-se obter respostas em relação à classificação dos educadores quanto à importância do estudo de Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas para estudantes do 2º. ano do Ensino Médio. No Gráfico 8, estão as respostas dos educadores para essa questão.

Gráfico 8 - Balanço das respostas da Questão 1



Fonte: Elaboração própria.

Conforme pode-se observar no Gráfico 8, nota-se a importância dos conteúdos para os educadores que atuam ou atuaram com o Ensino Médio. Segundo E_2, é importante que os estudantes não sejam apresentados a noções equivocadas a respeito dos Conjuntos Infinitos. E_3 comenta que:

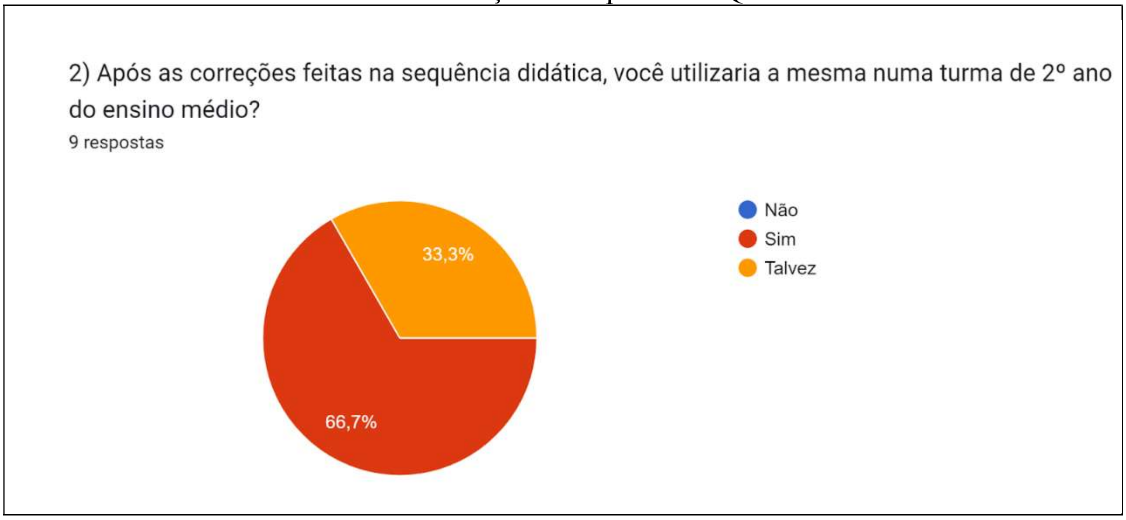
> O conceito de função é um dos mais relevantes temas da Matemática. Sua aplicação é amplamente utilizada tanto em outros temas matemáticos, quanto no dia a dia e em outras áreas do conhecimento. Porém seu estudo, na minha opinião, fica um pouco negligenciado pelo professor, pelo currículo e pelos livros didáticos. Trabalhos que buscam um aprofundamento do estudo de função é sempre bem-vindo e importante para relembrarmos e destacarmos com os alunos todo o potencial desse tema tão importante.

Este comentário de E_3 corrobora Espírito Santo (2019, p. 10) que diz: “Para estudar de forma contundente a noção de conjunto infinito é necessário um conhecimento preliminar bem explorado dos conceitos de conjunto, função, injetividade, sobrejetividade e bijetividade.”

Outros educadores apontam que seria interessante essa abordagem ser realizada no 1º. ano do Ensino Médio por ser o ano que estudam o conteúdo de funções. Todavia, pensou-se no 2º. ano, pois são estudantes que já terão visto a definição de função e por considerá-los mais maduros para uma atividade fora do currículo da disciplina de Matemática. Porém pode ser aplicada em qualquer um dos anos do Ensino Médio.

A segunda pergunta visava saber dos educadores se eles utilizariam a proposta didática elaborada e já corrigida (após o Questionário 1) em uma turma de 2º. ano do Ensino Médio. O Gráfico 9 mostra o percentual das respostas obtidas.

Gráfico 9 - Balanço das respostas da Questão 2

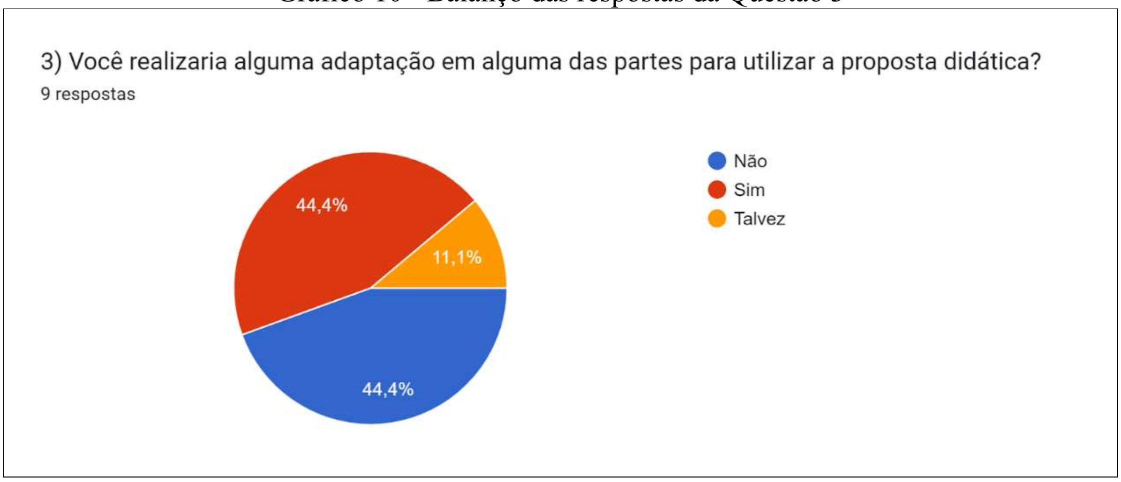


Fonte: Elaboração própria.

Como pode-se verificar no Gráfico 9, nota-se que um terço dos participantes responderam que talvez utilizassem a atividade. Vale salientar que esses educadores são E_1, E_8 e E_9, no qual E_1 realizaria adaptações, E_8 utilizaria em uma turma de 1º. ano, pois considera a ementa do 2º. ano muito extensa e porque os estudantes do 1º. ano estudam Conjuntos e Funções, e o E_9 também utilizaria no 1º. ano do Ensino Médio, mas não explicou a razão.

Com esse raciocínio, a terceira pergunta teve como objetivo saber se os educadores realizariam alguma modificação em uma das 5 partes cuja proposta didática foi dividida. As respostas coletadas foram organizadas de acordo com o Gráfico 10.

Gráfico 10 - Balanço das respostas da Questão 3



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se no Gráfico 10, que quatro dos nove educadores realizariam alterações nessa segunda versão das atividades investigativas. Nos próximos parágrafos referentes a essa pergunta, são comentadas as observações e sugestões mencionadas por eles.

Na Parte 1, foram sugeridas modificações no posicionamento das setas das figuras para que tenham origem no elemento do domínio e término no elemento correspondente no contradomínio. Também foi sugerida a reescrita da frase "Não há elemento que seja imagem de mais de um elemento de A" para "Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A". Além de trocar o conectivo usado de "Não é função, pois existe pelo menos um elemento de A que possui dois correspondentes em B e possui pelo menos um elemento de A que não tem correspondente em B." para "Não é função, pois existe pelo menos um elemento de A que possui dois correspondentes em B. Além disso, possui pelo menos um elemento de A que não tem correspondente em B." Finalizando com a correção da definição, alterando a escrita de "Chamamos de imagem (Im) […]" para "Chamamos de Conjunto Imagem (Im) o conjunto dos elementos [...]".

Já na parte 2, E_1 e E_8 comentam que embora tenham gostado muito do exemplo das danças das cadeiras, alegaram que a definição apresentada não abrange essa questão e que seria melhor repensar em uma outra definição que contemplasse situações para além dos Conjuntos Numéricos. Apesar dessa consideração, a definição não foi modificada, pois acredita-se que apesar de não abranger a relação de objetos, essa relação é de fácil compreensão e, caso haja necessidade, o educador pode intervir. Outro ponto considerado é o de iniciar a investigação com uma atividade com exemplo contextualizado, que pode fazer parte do dia a dia do estudante.

Na parte 3 foram realizados comentários de correção de digitação.

Também, na parte 4, foram realizados comentários quanto a correção de digitação, além do comentário de E_1, que fala que os estudantes podem apresentar dificuldade no item "d' da questão 6 por conta da compreensão do que seja a lei da função e, com isso, sugere acrescentar essa palavra em alguns enunciados anteriores. Contudo, não foi aceito tal sugestão, pelo fato do educador poder intervir caso haja necessidade.

As mudanças sugeridas foram mais relacionadas às escolhas das definições e organização das questões, fazendo com que fosse notado que as sugestões eram mais estruturais do que alteração na proposta em si.

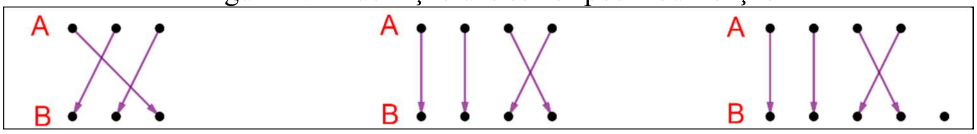
A quarta pergunta teve como objetivo capturar a opinião dos educadores a respeito das ilustrações feitas para os conjuntos numéricos utilizados na proposta, conforme pode ser observado no Gráfico 11.

Gráfico 11 - Balanço das respostas da Questão 4

Fonte: Elaboração própria.

Nota-se que apesar do grande número de sugestões e comentários feitos a respeitos das adaptações, as observações com relação aos gráficos foram de colocar valores para exemplificar melhor para os estudantes e ser mais precavido com a origem e fim de cada uma das setas. A sugestão de alterar as setas foi aceita enquanto a de colocar valores não foi considerada necessária, como pode-se observar na Figura 18.

Figura 18 - Ilustração das setas após modificação

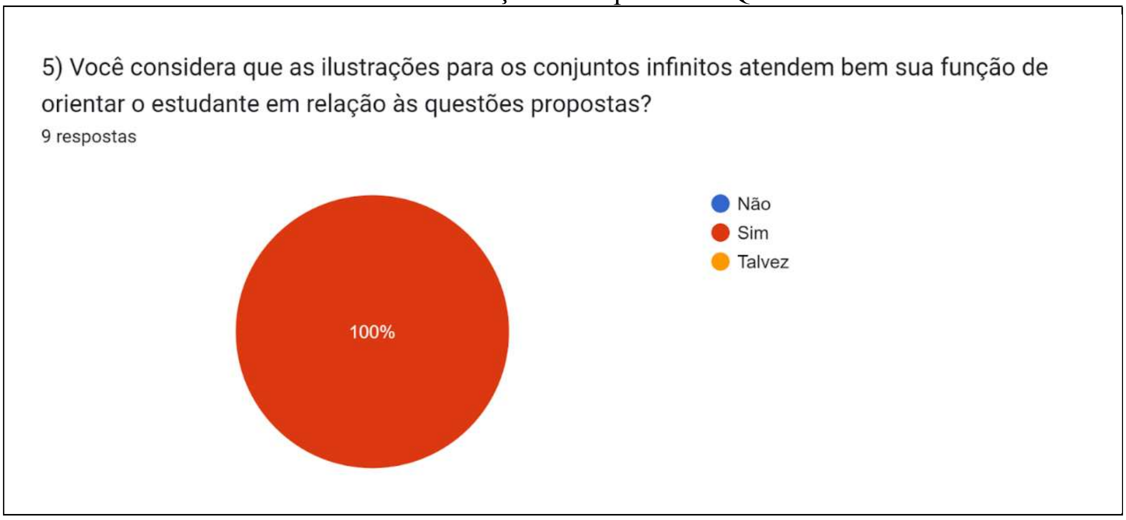


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, E_2, E_3 e E_7 comentam que a representação escolhida é prática e inovadora e que seu uso amplia os conceitos adquiridos. Visto que a relação entre Conjuntos Numéricos na Educação Básica é representada com o diagrama de Venn e essa representação não seria adequado para a explicação dos conceitos apresentados na atividade proposta.

A quinta pergunta obteve o mesmo objetivo da anterior, mas a respeito das ilustrações dos conjuntos numéricos infinitos utilizados na proposta, sendo observado no Gráfico 12.

Gráfico 12 - Balanço das respostas da Questão 5



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se no Gráfico 12, que a escolha das ilustrações dos conjuntos infinitos foi assertiva e que os educadores acreditam que ela cumprirá sua função de orientar os estudantes.

Entende-se que a escolha de não utilizar o diagrama de Venn foi assertiva, pois teve total apoio dos educadores.

Na sexta pergunta, pretendia-se obter a opinião dos educadores sobre o cumprimento do objetivo de formulação de uma proposta de atividade investigativa, como pode ser visto no Gráfico 13.

Gráfico 13 - Balanço das respostas da Questão 6

Fonte: Elaboração própria.

Dado o exposto, verifica-se que os educadores acreditam que as atividades investigativas irão cumprir o papel de estimular o raciocínio e a curiosidade dos estudantes. E para melhor cumprimento desse objetivo E_1 comenta que:

> [...] objetivo de instigar a curiosidade do estudante, acho que no início, deveria haver uma conversa sobre a temática: "um infinito maior do que outro". Uma enquete, uma provocação ou uma mostra de parte dos vídeos que estão ao final da proposta poderiam ser utilizados para este fim.

A ideia de E_1 já tinha sido pensada de ser realizada antes da iniciação da atividade para captar as noções dos estudantes. E o educador, por meio das respostas antes e depois da atividade, ter um comparativo entre a noção inicial e a noção final da turma. Mas optou-se por deixar isso fora da apostila para que cada educador pudesse conduzir o início da aula da maneira que achasse mais adequada, desde que ele estimulasse a curiosidade dos estudantes a respeito do tema.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2020, p. 23):

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

E a fala desses autores vai de acordo com a pergunta 6 e com o objetivo da criação da proposta de atividade.

Por fim, foi deixado um espaço, não obrigatório, para comentários gerais em relação à proposta (Figura 19).

Figura 19 - Comentários gerais do Questionário 2

E_1: Acho a temática bastante diferenciada em relação aos conteúdos que geralmente são estudados com esse público-alvo. As definições apresentadas na Parte 5, em geral, não são vistas, mas o assunto "conjuntos infinitos" desperta o interesse e a curiosidade dos estudantes nesta fase.

E_2: Considero adequada a alunos do EM, aos quais se destina, em termos de linguagem e conteúdos. Usaria, sem dúvida.

E_3: Atividade com tema relevante, atrativa, investigativa e adequada ao nível de ensino proposto. Utilizaria sim em minhas turmas, com boa expectativa de resultado.

E_4: A proposta ficou bastante interessante, com os vídeos sugeridos no final complementando bem o material. É uma sequência coerente e tranquila para ser aplicada com alunos do Ensino Médio.

E_7: Parabéns pela proposta. Eu aprofundaria essas curiosidades que são fascinantes. Mas entendo que estenderia muito. Parabéns mais uma vez e obrigada pelo convite.

E_9: Se fosse possível, poderia passar um vídeo antes da atividade, apenas para começar a abordagem do conteúdo de forma lúdica.

Fonte: Elaboração própria.

Conforme pode ser observado nos comentários e elogios dos educadores na Figura 19, tal estudo é defendido por Delfino (2015) como imprescindível e que pode ser trabalhado desde a Educação Básica, pelo fato do conceito de infinito ser fundamental para o desenvolvimento dos saberes matemáticos, tais como Conjuntos Numéricos, Sequências e Séries Numéricas.

Desse modo, a ideia de aproveitar o estudo de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas para abordar os Conjuntos Infinitos, conteúdo, este, que permeia o imaginário de grande parte dos seres humanos, está corroborando Bargas (2020) que afirma o estudo destes conteúdos na Educação Básica totalmente válido, pois é nesta etapa que os estudantes se deparam com tais conceitos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da evolução da sociedade, cada vez mais nota-se a valorização e a necessidade de cidadãos que possuem um bom poder de abstração, senso crítico, curiosidade em pesquisar e resolver problemas e um bom raciocínio lógico. Essas habilidades podem ser desenvolvidas por meio da Matemática estudada na Educação Básica.

Diane deste contexto e com o intuito de diminuir as dificuldades encontradas pelos estudantes em conteúdos e conceitos que possuem o infinito como objeto de estudo ou parte desse objeto, este trabalho tem como objetivo geral: Investigar a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio.

Buscando atender a este objetivo geral, elaborou-se uma proposta didática utilizando atividades investigativas para estimular a curiosidade, raciocínio e a crítica dos estudantes. Para o seu desenvolvimento foi necessário, inicialmente, elaborar três objetivos específicos. Em relação ao primeiro objetivo específico: "Identificar as contribuições de uma pesquisa sobre o desenvolvimento histórico da noção do infinito para o estudo dos Conjuntos Infinitos no Ensino Médio", foi necessário fazer um estudo mais profundo sobre os conceitos de Função e Conjuntos Infinitos, analisando a melhor forma de estabelecer as relações entre esses conteúdos. Foi realizada uma pesquisa a respeito da história do Infinito, que é um assunto que vem dividindo os matemáticos há milhares de anos. Tendo feito isso, alcançou-se o primeiro objetivo específico dessa pesquisa.

Para o cumprimento do segundo objetivo específico, "Investigar potencialidades e dificuldades de utilizar atividades investigativas para o estudo de Conjuntos Infinitos", criou-se os arquivos de proposta didática e do Questionário 1 e os enviou para um grupo de educadores para realizarem a análise da proposta. A partir da análise, foram feitas sugestões de melhorias e, realizou-se, assim, as correções necessárias.

As respostas do questionário foram de extrema importância para o aprimoramento da proposta da atividade, principalmente, no que diz respeito ao refinamento das definições e formas de representações das relações entre os conjuntos. Foi possível, com essas sugestões, refletir a respeito das diferentes opiniões dos educadores e diferentes realidades de cada turma da rede de ensino, evidenciando o mérito do papel do educador.

Com as correções finalizadas, visando cumprir o terceiro objetivo específico: “Evidenciar a importância da compreensão dos Conjuntos Infinitos para diversos conteúdos”, enviou-se um segundo Questionário e, posteriormente, foi realizado análise das respostas, dos comentários e das sugestões feitas pelos educadores que responderam ao Questionário 1 e o Questionário 2.

Por meio deste segundo Questionário, foi possível perceber que a proposta de atividades investigativas foi aceita por todos os educadores. Mas os mesmos ficaram divididos em relação a realização de modificações na proposta e no público-alvo ao qual foi sugerido, evidenciando a necessidade de os educadores sempre adequarem cada atividade de acordo com seu público.

A partir da análise das respostas desse segundo questionário e o cumprimento dos três objetivos específicos, foi possível responder à questão de pesquisa desse trabalho de conclusão de curso, que é: “Qual a percepção de educadores de Matemática a respeito de uma proposta didática investigativa sobre Conjuntos Infinitos no Ensino Médio?”. Segundo esses educadores, o desenvolvimento desses conceitos no Ensino Médio pode contribuir muito positivamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico, desenvolvimento do raciocínio abstrato e maior probabilidade de sucesso na compreensão dos conteúdos que utilizam as noções de infinito em diversas áreas do conhecimento.

Para futuras pesquisas com essa mesma temática, aconselha-se a aplicação dessa proposta didática em uma turma do 2º. ano do Ensino Médio. Sugere-se também trabalhar com os Conjuntos Infinitos com cardinalidade maior que Aleph zero no Ensino Superior, realizando a explicação e demonstração, como por exemplo, o porquê do Conjunto dos Números Reais ter cardinalidade maior que o Conjunto dos Números Naturais, Inteiros e Racionais e como fazemos para descobrir um Conjunto com cardinalidade maior que Aleph um.

Com isso, essa monografia concluiu que contribuiu para a reflexão a respeito do ensino de Conjuntos Infinitos no Ensino Médio e espera-se que trabalhos futuros possam relatar os resultados dessas atividades, apontando os acertos e as dificuldades encontradas. Dito isso, deseja-se que esta pesquisa incentive todos os envolvidos com o ensino para que a proposta da atividade investigativa possa ser bem aproveitada, sofrendo ou não adaptações, de acordo com cada realidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. B. **Uma revisitação aos conjuntos numéricos no Ensino Médio.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/133662. Acesso em: 17 jul. 2021.

AMADEI, F.L. **O infinito um obstáculo no estudo da matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP,2005. Disponível em: https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/11322/1/dissertacao_flavio_luiz_amadei.pdf. Acesso em: 23 set. 2022

BARGAS, C. L. D. **Uma perspectiva sobre o ensino de funções bijetivas e cardinalidade no ensino médio**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, SP, 2020. Disponível em: https://hdl.handle.net/20.500.12733/1639472. Acesso em: 23 set. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 29 jul. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 01 ago. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponibilidade em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 23 set. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 16 jul. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio: parte III – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 20 ago. 2021.

CAMARGO, B. A. A.. **Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/191355. Acesso:14 jun. 2021.

CURZEL, D. N. **Educação Matemática**: estudo do baixo desempenho em uma escola de Gravataí, RS. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade La Salle-Unilasalle, Canoas, 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/11690/598. Acesso em: 31 jul. de 2021

DAMIANI, M. F. *et al*. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de educação**, n. 45, p. 57-67, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822. Acesso em: 12 ago. 2021.

DELFINO, H. S. **O conceito de infinito**: uma abordagem para a Educação Básica. 2015. 70 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2015. Disponível em: http://www.locus.ufv.br/handle/123456789/8385. Acesso em: 23 set. 2022.

ESPÍRITO SANTO, A. **Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas**: Uma abordagem na Educação Básica. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4292. Acesso em: 14 jun. 2021.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Apostila UAB/UFRGS. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 29 jul. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7 ed. [2. Reimpr.]. São Paulo: Atlas, 2021.

KAWANO, C. Além do Infinito: A batalha filosófica de Georg Cantor para ampliar a fronteira da matemática. **Galileu**, São Paulo, n. 187, fev. 2007. Disponível em: https://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ESD1138-1707,00.html. Acesso em: 27 set. 2022.

LEÃO, A. M. C. **Noções Básicas de Infinitos e Números Cardinais**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Profmat, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7649. Acesso em: 31 jul. 2021.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 3. ed, Rio de Janeiro, SBM, 1991, p.101-114. Disponível em: https://matematicatransformadora.com/wp-content/uploads/2019/04/5-SBM-Elon-Lages-Lima-Meu-Professor-de-Matematica-e-Outras-Hist%C3%B3rias.pdf. Acesso em: 23 set. 2022.

LOPES, S.J. **A noção de infinito em livros didáticos do Ensino Básico**, Dissertação de mestrado, PUC - SP, São Paulo, 2011. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10896/1/Silvio%20Joaquim%20Lopes.pdf. Acesso em: 23 set. 2022.

MARIANO, A. C.S.; MATOS, F. A. de. **O ensino de números inteiros no Ensino Fundamental**. 2013. 19 f. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ. Sociedade Brasileira de Matemática- SBM, 2013. Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC/2011/TCC_Adolfo.pdf. Acesso em: 23 set. 2022.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas em Sala de Aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

SAMPAIO, P. A. da S. R. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2075. Acesso em: 23 set. 2022.

SOUZA, J.V. **A percepção de alunos do 1º ano do ensino médio sobre a importância e aplicações de conteúdos matemáticos relacionando a aprendizagem dos conjuntos numéricos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Rede Nacional, Universidade Federal do Amapá, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5133242. Acesso em: 27 ago. 2021.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. da S. R. **Contato matemática**, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

VIEIRA, F. A. C. **Ensino por investigação e aprendizagem significativa crítica**: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino. 2012. 144 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/102039. Acesso em: 17 jul. 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Proposta didática investigativa

Estas atividades foram elaboradas por Marcos Paulo Dias Nascimento para o desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática do IF Fluminense campus Campos Centro), sob orientação da professora Paula Eveline da Silva dos Santos.

Funções bijetivas e Conjuntos Infinitos

PARTE 1 - Requisitos:

1) Definição de Função (IEZZI, MURAKAMI, 2013)

Dados dois conjuntos A e B, ambos contidos no Conjunto dos Números Reais e não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A, \exists / y \in B / (x, y) \in f)$

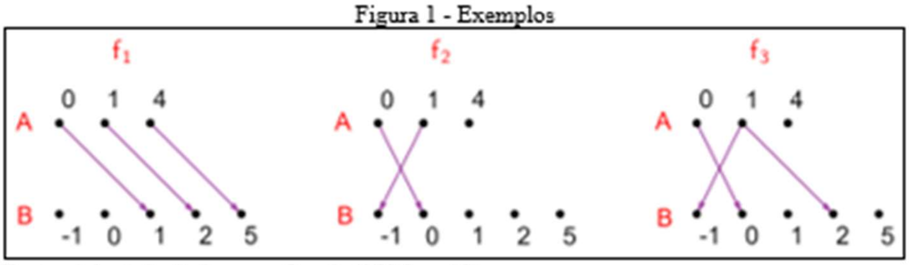
Considerando uma função $f: A \rightarrow B$, definida pela lei $f(x) = x$, temos que:

- Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
- Contradomínio (CD) é o conjunto de todos os elementos do conjunto B.
- Chamamos de Conjunto Imagem (Im) o conjunto dos elementos y pertencente a B para os quais existe x pertencente a A tal que (x, y) pertence a f; portanto: imagem é subconjunto do contradomínio.

Exemplo:

Considere os conjuntos $A = \{0,1,4\}$ e $B = \{-1,0,1,2,5\}$ e os exemplos das relações de A em B:

Figura 1 - Exemplos



Fonte: Adaptado de Souza e Garcia (2016, p. 48).

- f_1 é função, pois cada elemento de A corresponde a um único elemento de B. A lei de formação, neste caso, $f(x) = x + 1$.
- f_2 não é função, pois existe ao menos um elemento de A que não tem correspondente em B.
- f_3 não é função, pois existe pelo menos um elemento de A que possui dois correspondentes em B. Além disso, possui pelo menos um elemento de A que não tem correspondente em B.

2) Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva

- Função Injetiva (IEZZI, MURAKAMI, 2013): Uma função $f: A \to B$ é injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim:

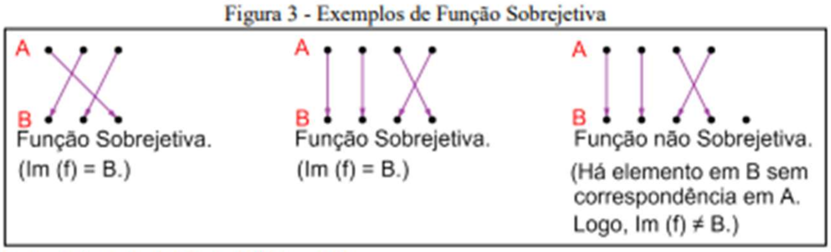
$$f \text{ é injetiva quando } x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B$$

Figura 2 - Exemplos de Função Injetiva

Fonte: Adaptado de Dante (2016, p. 62).

- Função Sobrejetiva (IEZZI, MURAKAMI, 2013): Uma função $f: A \to B$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Ou seja, é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, logo $Im(f) = CD$.

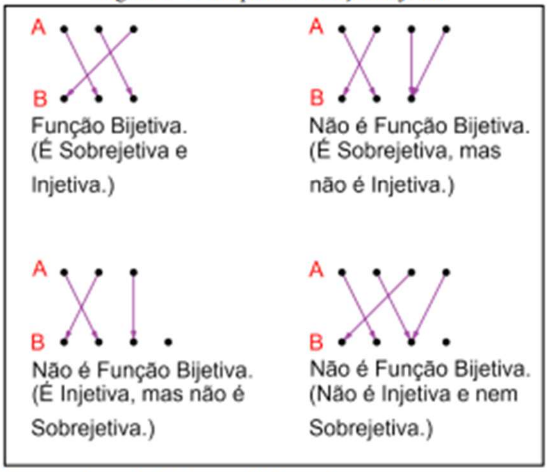
Figura 3 - Exemplos de Função Sobrejetiva



Fonte: Adaptado de Dante (2016, p. 63).

- Função Bijetiva (IEZZI, MURAKAMI, 2013): Uma função $f: A \to B$ é bijetiva se ela for simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre, dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B.

Figura 4 - Exemplos de Função Bijetiva



Fonte: Adaptado de Dante (2016, p. 64).

PARTE 2 - Trabalhando a bijeção

1) (ESPÍRITO SANTO, 2019 - adaptada) Existe uma brincadeira chamada Dança das Cadeiras. Ela é feita da seguinte forma: faz-se uma roda de cadeiras e outra de pessoas, sendo que o número de cadeiras deve ser sempre um a menos do que o número de pessoas. Toca-se uma música. Quando a música parar, todos devem sentar-se em alguma cadeira que esteja vazia, ou seja, não pode haver mais de uma pessoa em uma mesma cadeira. Aquela pessoa que não conseguir se sentar, sai do jogo e retira-se mais uma cadeira. Será o vencedor quem se sentar quando restar uma única cadeira. Suponhamos que temos um grupo com **6 crianças** para a brincadeira da dança das cadeiras. Responda:

   a) O que aconteceria se tivéssemos 7 cadeiras? Considerando a função partindo do conjunto de crianças para o conjunto de cadeiras, ilustre essa relação, conforme os exemplos da Parte 1.

   ____

   b) O que aconteceria se tivéssemos 6 cadeiras? Considerando a função partindo do conjunto de crianças para o conjunto de cadeiras, ilustre essa relação.

   ____

   c) Alguma das funções descritas nos itens "a" e "b" são injetivas? Explique seu raciocínio.

   ____

   ____

   d) Alguma das funções descritas nos itens "a" e "b" são sobrejetivas? Explique seu raciocínio.

   ____

   ____

e) Em algum momento da brincadeira teremos uma bijeção? Qual? Explique seu raciocínio.

____

____

2) (BACCARIN, 2013 - adaptada) Considere os Conjuntos Finitos $A = \{1, 2, 3, \dots , 10\}$ e $B = \{2, 4, 6, \dots , 20\}$.

a) Qual é o conjunto com maior número de elementos?

____

b) É possível construir uma bijeção $f: A \to B$? Ilustre essa relação.

____

c) É possível construir uma bijeção $f: B \to A$? Ilustre essa relação.

____

d) Na questão 1, quando o número de cadeiras for igual ao número de pessoas, será possível fazer a bijeção entre o número de pessoas e o número de cadeiras? Justifique

____

____

e) Com base nas respostas dos itens “b”, “c” e “d”, desta questão, o que se pode observar a respeito das relações entre o número de elementos do domínio e do contradomínio das funções bijetivas?

____

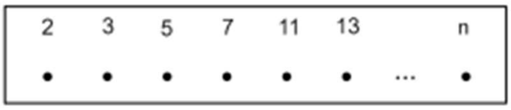
____

PARTE 3 - Trabalhando com a bijeção no Conjuntos dos Números Naturais

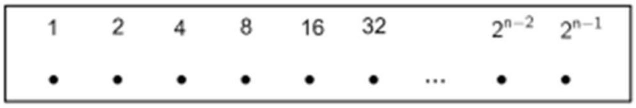
Nas próximas questões vocês trabalharão com o conjunto dos números naturais. Vocês devem utilizar ilustrações, conforme as sugeridas abaixo, quando for solicitado.

a) Conjunto Infinito formado pelos números naturais.

b) Conjunto Infinito formado pelos números naturais primos.

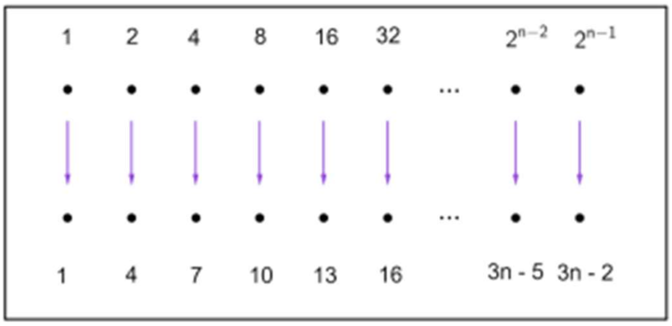


c) Conjunto Infinito formado por uma progressão geométrica de razão 2.



d) Conjunto infinito formado por uma progressão aritmética de razão 3.

e) Relação entre os elementos do conjunto do item "c" com os elementos do conjunto do item "d".



3) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjuntos dos Números Naturais Pares ($\mathbb{N}_p$), considere a função definida da seguinte forma $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$ tal que $f(x) = 2x$.

a) Escreva os cinco primeiros elementos de cada conjunto ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_p$).

____

b) O número de elementos de $\mathbb{N}$ é maior que o número de elementos de $\mathbb{N}_p$? Justifique.

____

c) Ilustre a relação $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_p$.

d) Classifique a relação entre esses dois conjuntos em função injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

____

e) Comparando o número de elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_p$ pode-se dizer que um conjunto é maior do que o outro? Justifique.

____

____

4) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjunto dos Números Naturais Ímpares ($\mathbb{N}_i$), considere a função definida da seguinte forma $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_i$, tal que $f(x) = 2x + 1$.

a) Escreva os cinco primeiros elementos de cada conjunto ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_i$).

____

b) O número de elementos de $\mathbb{N}$ é maior que o número de elementos de $\mathbb{N}_i$? Justifique.

____

c) Ilustre a relação $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_i$.

d) Classifique a relação entre esses dois conjuntos em função injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

____

e) Comparando o número de elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_i$ pode-se dizer que um conjunto é maior do que o outro? Justifique.

____

____

5) Considere o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) e o Conjunto dos Números que são Potências de 10 (10^0, 10^1, 10^2, … , 10^n), para todo $n \in \mathbb{N}$. O que pode-se dizer em relação ao número de elementos destes dois conjuntos? Justifique.

____

____

PARTE 4 - Trabalhando com a bijeção dos naturais com os inteiros

6) Agora iremos trabalhar comparando o Conjuntos dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) e o Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$).

a) Ilustre a relação entre o Conjunto dos Números Inteiros Negativos ($\mathbb{Z}_-^*$) e o Conjunto dos Números Inteiros Positivos ($\mathbb{Z}_+^*$).

b) Determine a lei da função da aplicação de $\mathbb{Z}_-^*$ em $\mathbb{Z}_+^*$.

c) A função entre $\mathbb{Z}_-^*$ e $\mathbb{Z}_+^*$ é bijetiva?

____

d) Observe a lei de formação f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ apresentada abaixo e a seguir ilustre a relação gerada por essa lei.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ,\text{se } x > 0 \\ -2x & ,\text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e) Classifique a relação do item “d” em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

____

f) O que podemos concluir em relação ao número de elementos de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$?

____

PARTE 5 - Conjuntos Não-Enumeráveis

Definição de Enumerabilidade (SILVA, 2016)

Diremos que um conjunto A, sendo A um conjunto qualquer, é Enumerável se for finito ou se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o Conjunto dos Números Naturais e esse conjunto A, ou seja, se $\exists$ f: $\mathbb{N} \rightarrow$ A. Caso esse conjunto não estabeleça uma correspondência biunívoca ele é dito Não-Enumerável.

Definição de Cardinalidade (SILVA, 2016)

É o termo utilizado para se atribuir quantidade de elementos de um determinado conjunto, ou seja, associar cada elemento de um conjunto a um número natural único e exclusivo. Diz-se que A é um conjunto finito, e que tem n elementos, n $\in \mathbb{N}$, quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca f: $I_n \rightarrow$ A, para $I_n = \{ 1,2, 3, \dots \} \subset \mathbb{N}$. O número natural “n” chama-se então o número cardinal do conjunto A. A bijeção f: $I_n \rightarrow$ X chama-se uma contagem dos elementos de A e denotaremos por n(A), o seu número de elementos.

Observação$_1$: Admite-se o conjunto vazio como um conjunto finito, ao qual é associado o zero como número de elementos.

Observação$_2$: Diz-se que os conjuntos A e B são (numericamente) equivalentes, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca f: A → B, ou seja, quando A e B têm o mesmo número cardinal.

7) Na sua opinião existem Conjuntos Infinitos maiores que outros?

____

8) Assista ao vídeo “Infinitos Maiores do que outros?” disponível no Qr Code. Faça um comentário do que você entendeu do vídeo.

____

____

____

CURIOSIDADES

Vídeos extras:

O paradoxo do Hotel Infinito

O que é o infinito? Uma explicação curta

REFERÊNCIAS

BACCARIN, F. L. **Conjuntos Infinitos e suas surpresas**: uma sequência de atividades. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000183036. Acesso em: 25 maio 2022.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

ESPÍRITO SANTO, A. **Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas**: Uma abordagem na Educação Básica. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4292. Acesso em: 25 maio 2022.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**,1: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo : Atual, 2013.

SILVA, W. M. L. **Um estudo sobre infinito:** enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016. Disponível em: http://bdtd.uftm.edu.br/handle/tede/397. Acesso em: 11 maio 2022.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. da S. R. **Contato matemática**, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

APÊNDICE B – Questionário 1

Questionário 1

Desde já, agradeço a sua participação no teste exploratório deste Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Uma proposta investigativa para o estudo dos Conjuntos Infinitos na Educação Básica" de autoria de Marcos Paulo Dias Nascimento e orientação da Prof.ª Me. Paula Eveline.

Público-alvo da pesquisa: 2º ano do Ensino Médio

Questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma abordagem investigativa para o estudo dos Conjuntos Infinitos?
Objetivo geral: Avaliar as possíveis contribuições de uma abordagem investigativa para o estudo dos Conjuntos Infinitos.

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo. Uma cópia de suas respostas será enviada para o seu e-mail como forma de assegurar todas as afirmações aqui relatadas.

d.marcos@gsuite.iff.edu.br Alternar conta

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

Parte 1 - Requisitos *

	Não	Sim	Talvez
A representação da relação entre os conjuntos está de fácil entendimento?	○	○	○
Os conceitos e as definições estão apresentadas de forma adequada?	○	○	○
Os conteúdos revisados são suficientes para a realização das atividades?	○	○	○

3. O espaço a seguir é destinado para comentários.

4. Parte 2 - Trabalhando a bijeção - Questão 1 - Objetivo: Verificar se o estudante é capaz de reconhecer e classificar as situações apresentadas. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?			
A questão está de acordo com o objetivo proposto?			
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?			

5. O espaço a seguir é destinado para comentários.

6. Parte 2 -Trabalhando a bijeção - Questão 2 - Objetivo: Fazer com que o estudante compare o número de elementos de dois conjuntos finitos e perceba que a bijeção ocorre nos dois sentidos. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?	◯	◯	◯
A questão está de acordo com o objetivo proposto?	◯	◯	◯
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	◯	◯	◯
A construção dos itens da questão auxiliará o estudante alcançar o objetivo?	◯	◯	◯

7. O espaço a seguir é destinado para comentários.

8. Parte 3 -Trabalhando com a bijeção dos números naturais - Questão 3 - Objetivo: Fazer com que o estudante perceba que dois conjuntos diferentes podem ter o mesmo número de elementos apesar de não parecer. Além disso, espera-se que ele perceba que isso ocorre por conta da bijeção entre os conjuntos. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?	⬭	⬭	⬭
A questão está de acordo com o objetivo proposto?	⬭	⬭	⬭
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	⬭	⬭	⬭
A construção dos itens da questão auxiliará o estudante alcançar o objetivo?	⬭	⬭	⬭

9. O espaço a seguir é destinado para comentários.

10. Parte 3 -Trabalhando com a bijeção dos números naturais - Questão 4 - Objetivo: Fazer com que o estudante perceba que dois conjuntos diferentes podem ter o mesmo número de elementos apesar de não parecer. Além disso, espera-se que ele perceba que isso ocorre por conta da bijeção entre os conjuntos. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?	⬭	⬭	⬭
A questão está de acordo com o objetivo proposto?	⬭	⬭	⬭
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	⬭	⬭	⬭
A construção dos itens da questão auxiliará o estudante alcançar o objetivo?	⬭	⬭	⬭

11. O espaço a seguir é destinado para comentários.

12. Parte 3 -Trabalhando com a bijeção dos números naturais - Questão 5 - Objetivo: Verificar se o estudante consegue repetir o processo executado na questão 3 e 4. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?	⬭	⬭	⬭
A questão está de acordo com o objetivo proposto?	⬭	⬭	⬭
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	⬭	⬭	⬭
A construção da questão é suficiente para o estudante alcançar o objetivo?	⬭	⬭	⬭

13. O espaço a seguir é destinado para comentários.

____

____

____

____

____

14. Parte 4 -Trabalhando com a bijeção dos números naturais com os inteiros - Questão 6 - Objetivo: Fazer com que o estudante perceba a relação bijeção entre os conjuntos $\mathbb{Z}_-^*$ e $\mathbb{Z}_+^*$, e também entre os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
O enunciado está de fácil entendimento?	⬭	⬭	⬭
A questão está de acordo com o objetivo proposto?	⬭	⬭	⬭
A questão está apropriada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	⬭	⬭	⬭
A construção da questão é suficiente para o estudante alcançar o objetivo?	⬭	⬭	⬭

15. O espaço a seguir é destinado para comentários.

16. Parte 5 -Conjunto Enumerável e Não-Enumerável - Nesta parte serão apresentados os conceitos de Enumerabilidade, Não-Enumerabilidade e cardinalidade. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Não	Sim	Talvez
As definições estão de fácil entendimento?	◯	◯	◯
As questões estão de acordo com o objetivo proposto?	◯	◯	◯
O vídeo é apropriado para estudantes do 2º ano do Ensino Médio?	◯	◯	◯
Os vídeos extras são apropriados para estudantes que tiverem interesse em aprofundar seu conhecimento?	◯	◯	◯

17. O espaço a seguir é destinado para comentários.

APÊNDICE C – Questionário 2

Questionário 2

Desde já eu, Marcos Paulo Dias Nascimento, agradeço a sua participação na segunda etapa do meu Trabalho de Conclusão de Curso.
Devido a alguns acontecimentos no percurso da pesquisa, tive que alterar o objetivo geral do trabalho, visto que não considero viável uma aplicação da sequência didática elaborada nesse momento. Sendo assim, peço a sua participação respondendo às perguntas deste questionário.

Público-alvo da proposta: 2º ano do ensino médio

Questão de pesquisa: Quais as percepções de um grupo de professores de matemática acerca de uma proposta didática investigativa para o estudo de Funções Bijetivas e Conjuntos Infinitos?

Objetivo geral: Analisar as percepções de um grupo de professores de matemática acerca de uma proposta didática investigativa para o estudo de Funções Bijetivas e Conjuntos Infinitos.

Após a apresentação do novo objetivo geral e da nova questão de pesquisa, esclareço que após o primeiro questionário enviado, foram feitas as alterações sugeridas para melhoria da proposta didática. A proposta atualizada encontra-se em anexo no e-mail.

d.marcos@gsuite.iff.edu.br Alternar conta

*Obrigatório

E-mail *

Seu e-mail

1) Como você classifica a importância do estudo dos conteúdos de Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas para os estudantes do 2º ano do Ensino Médio? *

- ◯ Irrelevante
- ◯ Pouco relevante
- ◯ Relevante
- ◯ Muito relevante

3. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

4. 2) Após as correções feitas na sequência didática, você utilizaria a mesma numa turma de 2º ano do ensino médio? *

Marcar apenas uma oval.

- Não
- Sim
- Talvez

5. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

6. 3) Você realizaria alguma adaptação em alguma das partes para utilizar a proposta didática? *

Marcar apenas uma oval.

- Não
- Sim
- Talvez

7. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

8. 4) Como você classificaria as ilustrações feitas para os conjuntos numéricos utilizadas na proposta? *

Marcar apenas uma oval.

- Muito ruim
- Ruim
- Regular
- Bom
- Muito bom

9. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

10. 5) Você considera que as ilustrações para os conjuntos infinitos atendem bem sua função de orientar o estudante em relação às questões propostas? *

Marcar apenas uma oval.

- Não
- Sim
- Talvez

11. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

____
____
____
____
____

12. 6) As atividades foram elaboradas com base em uma proposta investigativa com objetivo de instigar a curiosidade do estudante e estimular o raciocínio. Você considera que a organização da proposta cumpre o papel de atividade investigativa? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Não
- ( ) Sim
- ( ) Talvez

13. Utilize esse espaço caso queira fazer algum comentário da sua resposta.

____
____
____
____
____

14. 7) Utilize esse espaço para comentários gerais em relação à proposta.

____
____
____
____
____