MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISABELA CARDOSO GOMES

MARIA LUIZA TAVARES QUEIROZ

A NOÇÃO DO INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES DOS ALUNOS A PARTIR DOS CONCEITOS DE DÍZIMAS PERIÓDICAS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Campos dos Goytacazes/RJ

Setembro – 2023.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISABELA CARDOSO GOMES

MARIA LUIZA TAVARES QUEIROZ

A NOÇÃO DO INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES DOS ALUNOS A PARTIR DOS CONCEITOS DE DÍZIMAS PERIÓDICAS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Paula Eveline da Silva dos Santos
Coorientadora: Profª. Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes/RJ

Setembro – 2023.1

Biblioteca
CIP - Catalogação na Publicação

G633n

Gomes, Isabela Cardoso
A noção do infinito na educação básica : percepções dos alunos a partir dos conceitos de dízimas periódicas e números irracionais / Isabela Cardoso Gomes, Maria Luiza Tavares Queiroz - 2023.
78 f.: il. color.

Orientadora: Paula Eveline da Silva dos Santos
Coorientadora: Carla Antunes Fontes

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Anton Dakitsch, RJ, 2023.
Referências: f. 69 a 71.

1. Infinito. 2. Obstáculos epistemológicos. 3. Educação Básica. 4. Dízimas periódicas. 5. Números irracionais. I. Queiroz, Maria Luiza Tavares. II. Santos, Paula Eveline da Silva dos, orient. III. Título.III. Fontes, Carla Antunes, coorient. IV. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ISABELA CARDOSO GOMES

MARIA LUIZA TAVARES QUEIROZ

A NOÇÃO DO INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PERCEPÇÕES DOS ALUNOS A PARTIR DOS CONCEITOS DE DÍZIMAS PERIÓDICAS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 20 de setembro de 2023.

Banca Examinadora:

Profª. Ana Paula Rangel de Andrade (Examinadora)
Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade - UCAM - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Profª. Mylane dos Santos Barreto (Examinadora)
Doutora em Cognição e Linguagem - UENF - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Profª. Paula Eveline da Silva dos Santos (Orientadora)
Mestre em Matemática (PROFMAT) – UENF – RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Profª. Carla Antunes Fontes (Coorientadora)
Mestre em Matemática Aplicada / UFRJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS (ISABELA)

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as bênçãos derramadas em minha vida, por ter me sustentado e protegido durante toda essa caminhada.

Aos meus familiares, por todo o amor. Ao meu pai, obrigada por sempre acreditar em mim, por todos os conselhos e encorajamentos. À minha mãe, obrigada por todo o suporte, cada gesto que a senhora fez por mim nunca será esquecido. À minha irmã, obrigada por todas as conversas e por sempre me acalmar em meio ao meu caos. Ao meu namorado, obrigada pelo apoio incondicional, por sempre estar ao meu lado, para me escutar e me lembrar que tudo daria certo.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, por todos os ensinamentos e histórias compartilhadas. Em especial, agradeço às professoras Ana Paula e Mylane, por terem aceitado compor a banca examinadora deste trabalho. Às duas, meus agradecimentos e admiração.

À professora Paula, nossa orientadora, obrigada pela sua dedicação e empenho na elaboração deste trabalho, seu carinho e respeito foram perceptíveis em cada momento. Agradeço também, à professora Carla, nossa coorientadora, você é única e extraordinária, obrigada por ter dividido uma parte do seu tesouro de pensamentos conosco. Às duas, obrigada por todo o apoio, compreensão e amizade.

Às minhas amigas, em especial as que a faculdade me presenteou, por terem me apoiado e ajudado durante toda essa caminhada. A parceria de vocês foi fundamental e tornou esse processo mais leve e apaixonante.

À minha dupla, Luiza, por tudo! Muito obrigada por ter compartilhado o seu encanto pelo infinito comigo. Obrigada por me aceitar, foi uma honra ser sua parceira. Todas as nossas histórias, momentos e risadas serão eternos em minha memória. Este trabalho é fruto de uma linda parceria que levaremos para as nossas vidas.

A todos vocês, a minha gratidão.

AGRADECIMENTOS (MARIA LUIZA)

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e por tornar os meus sonhos reais.

Aos meus pais, por serem o meu suporte durante todo o processo, por me incentivarem e me apoiarem. À minha irmã, por ser meu ponto de equilíbrio e minha parceira da vida, quem torce e sonha os meus sonhos comigo. Sem eles, nada disso seria possível.

Aos meus amigos, que na torcida por minhas conquistas, compreenderam minha ausência física em diversos momentos.

Ao Instituto Federal Fluminense, pela oportunidade de realização deste trabalho e pela realização de um sonho.

Aos amigos e professores da Licenciatura em Matemática, que foram cruciais em todo o percurso.

Em especial, às orientadoras que abraçaram a ideia deste trabalho: à professora Paula Eveline, que me inspirou e foi exemplo para mim até aqui. Foi uma honra ser sua aluna em mais uma etapa da minha vida. À professora Carla, que com tamanha maestria, me ensinou não somente sobre o infinito, mas também sobre a vida. À elas, que seguirão me inspirando, toda a minha gratidão pela parceria, amizade e ensinamentos.

Às professoras Ana Paula e Mylane, que aceitaram compor a banca examinadora do presente trabalho e que foram fundamentais em minha formação docente.

À minha dupla, Isabela, por ser minha parceira neste caminho. Obrigada por dividir este sonho comigo, estando ao meu lado em todos os momentos, tornando tudo mais leve. Sigamos juntas.

Infinitamente, obrigada.

"A questão do infinito agitou sempre as emoções da humanidade…"

David Hilbert

RESUMO

A ideia do infinito apresenta-se como um conceito abstrato e de difícil compreensão desde o seu surgimento. Por séculos, muitos foram os questionamentos sem respostas que impulsionaram discussões acerca desta concepção. A noção do infinito é um conceito importante e pertinente, uma vez que é percebida e trabalhada, mesmo que de forma subliminar, em diferentes conteúdos básicos estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como os conjuntos numéricos e a representação decimal de números reais. Nessa perspectiva, o presente trabalho de conclusão de curso objetiva investigar as interpretações dos alunos da primeira série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais. Para isso, foi estabelecida uma pesquisa de caráter qualitativo e exploratório, a fim de alcançar o objetivo traçado. Na proposta de investigação, utilizou-se um questionário, elaborado como instrumento para a coleta de dados, o qual foi aplicado em turmas da primeira série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Campos dos Goytacazes - RJ. A análise dos dados coletados foi realizada sob os referenciais teóricos pautados, a saber: os obstáculos epistemológicos e o desenvolvimento histórico da noção do infinito. Ao final da pesquisa, concluiu-se que o conceito de infinito é de difícil compreensão para os estudantes, diante das muitas dificuldades percebidas entre os mesmos. Algumas, também observadas ao longo da história do conceito aqui referido, estabelecem-se como obstáculos de origem epistemológica. Outras podem ser resultado da falta de compreensão dos conceitos de dízimas periódicas e números irracionais. Desse modo, considera-se relevante a ampliação da presente pesquisa, com vistas a investigar as possíveis interpretações acerca do infinito apresentadas por outros públicos.

Palavras-chave: Infinito. História do infinito. Obstáculos epistemológicos. Educação Básica. Dízimas periódicas. Números irracionais.

ABSTRACT

The idea of the infinite presents as a abstract concept and with a difficult understanding since your emergence. By centuries, it was made a lot of questions without any answer that caused many discussions about this conception. The infinite understanding is a important concept and relevant, since one time that is noted and worked by differents basics contents established by the Base Nacional Comum Curricular (BNCC). By this perspective, the present work of course conclusion has the objective of investigate the students interpretations from the first year of the high school about the understanding of the infinite that goes through the contents of periodics tithes and irrational numbers. For this, it was established a search of qualitative and exploratory character with the goal to reach the objective proposed. In the proposed investigation, was used a questionary criated as a instrument to the data collection that was applied in some classes of the first year of high school of a State school from the city of Campos dos Goytacazes/RJ. The data analyses collected was realized by the listed theorical referentials: the epistemological obstacles and the historical deveplopment of infinite understanding. In the end of the search, it was clear that the infinite concept has the difficult of understanding by the students in front of a big part of difficulties perceived between the same. Some of this difficulties wich was observed by the hystory past by this referred concept, establishies as obstacles from epistemological origin. With this, it is considered relevant the ampliation of this present search, with many views to investigate the possible interpretations about the infinite presented by other publics.

Key words: Infinite. Infinite history. Epistemological obstacles. Basic education. Periodical tithes. Irrational numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A ideia do infinito é trabalhada implicitamente em diversos tópicos da Matemática por toda a Educação Básica. Esta temática pode ser vista, embora por vezes subentendida, nos conteúdos de dízimas periódicas e conjunto dos números irracionais, respectivamente nos dois últimos anos do Ensino Fundamental (Brasil, 2018).

Os conceitos que envolvem a ideia do infinito proporcionam o desenvolvimento do raciocínio lógico e da abstração, quando estudados conteúdos relacionados ou não ao mundo físico. Mesmo que abstratos, estes conceitos, abordados durante a Educação Básica, auxiliam na construção e no enriquecimento do pensamento matemático do indivíduo (Lopes, 2011).

Contudo, de acordo com Broetto e Santos-Wagner (2019), os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais são abordados com superficialidade durante a Educação Básica, tendo em vista a complexidade de formalização destes conceitos. Esses autores ainda afirmam que, dessa forma, são deixadas de lado possíveis curiosidades a serem despertadas nos alunos, que propiciariam um rico processo de interpretação da ideia do infinito. Evidencia-se, ainda, que o ensino de Matemática para alunos da Educação Básica é um aliado do desenvolvimento de suas capacidades lógicas e críticas, uma vez que o aperfeiçoamento dessas habilidades prepara o aluno para o seu desempenho enquanto cidadão em situações cotidianas (Brasil, 2018).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), o estudo dos números no Ensino Fundamental restringe-se às operações com os naturais e racionais. Já o trabalho com os números reais deixa em segundo plano a abordagem do conceito de número irracional e sua representação decimal.

Além disso, vale ressaltar a falta de espaço no currículo educacional para um abrangente desenvolvimento dos conteúdos que cercam a ideia de infinidade. Em seus estudos, Lopes (2011) reflete a respeito da abordagem da noção do infinito como conteúdo curricular a ser trabalhado durante a Educação Básica.

Diante do exposto, surge a motivação para a escolha do tema do presente trabalho, devido também à forte atração e curiosidade das autoras sobre a ideia do infinito e suas diferentes interpretações. A história do seu surgimento sempre instigou as pesquisadoras e este interesse foi acentuado a partir de leituras e estudos realizados até aqui. Ainda, a participação como ouvintes de um minicurso sobre a temática também foi crucial para a intensificação do desejo de iniciar este trabalho.

Considera-se de extrema valia, uma investigação acerca da abordagem da ideia referida nos anos de escolaridade supracitados, tal como a mesma é introduzida pelos professores e interpretada e desenvolvida pelos alunos, indo ao encontro das ideias apresentadas por Sampaio (2009), em artigo analisado pelas autoras.

Em busca do momento mais adequado à aplicação do questionário para a obtenção dos resultados procurados, optou-se pela 1.ª série do Ensino Médio como público-alvo do presente trabalho, objetivando a garantia de que os alunos tenham estudado os conteúdos em pauta. Atentou-se também para o contexto pandêmico decorrido da epidemia de covid-19, enfrentado pelos alunos nos anos anteriores, que suscitou lacunas na aprendizagem e desenvolvimento destes. Para além, tendo em vista o estudo da reta numérica e seus intervalos como conteúdo previsto para a primeira série do Ensino Médio, consideram-se enriquecedoras as contribuições que a investigação da abordagem deste tópico propiciará ao desenvolvimento da pesquisa.

Assim, a questão de pesquisa que norteia o presente trabalho é: Quais as interpretações dos alunos da primeira série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais?

Visando responder o problema proposto, estabelece-se como objetivo geral investigar as interpretações dos alunos da primeira série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais. Para isso, traçam-se os seguintes objetivos específicos a serem alcançados:

- Identificar os obstáculos epistemológicos que podem surgir no estudo do conceito de infinito;
- Analisar a relação entre a noção de números com representação decimal infinita e os conceitos de infinito potencial e atual;
- Investigar as concepções dos alunos a respeito de dízimas periódicas e números irracionais.

O presente trabalho está dividido nos seguintes capítulos: Introdução, Revisão da Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões e Considerações Finais. No capítulo da Revisão da Literatura são descritos a trajetória histórica e os obstáculos epistemológicos presentes no desenvolvimento do conceito do infinito, além de apresentados trabalhos relacionados com a temática proposta para esta pesquisa. O capítulo de Procedimentos Metodológicos traz a metodologia de pesquisa adotada, o instrumento para coleta de dados e as etapas a serem realizadas. No capítulo de Resultados e Discussões, é feita a análise dos dados coletados na investigação realizada, dialogando com os referenciais teóricos fundamentados. Por fim, o capítulo de Considerações Finais traz as conclusões obtidas diante do percurso de realização do presente trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 O desenvolvimento histórico da noção do infinito

Em sua obra *A Epistemologia*, Gaston Bachelard (2006) cita Broglie (1947), o qual afirma que "Muitas ideias científicas de hoje seriam diferentes se os caminhos seguidos pelo espírito humano para as atingir tivessem sido outros" (Broglie, 1947, p.9 *apud* Bachelard, 2006, p. 203). Diante disso, para a compreensão de como a noção do infinito apresenta-se atualmente, faz-se necessário conhecer, antes, a história de seu surgimento e de alguns fatos ao longo de seu percurso desde então.

De acordo com Lopes (2011), muitas das dificuldades manifestadas no processo de compreensão da ideia do infinito podem ser observadas desde o seu surgimento, considerando a finitude da imaginação e compreensão humanas sobre o que é infinito. A origem dessa ideia deu-se a partir de questionamentos sem respostas que foram precursores de grandes reflexões para a sociedade.

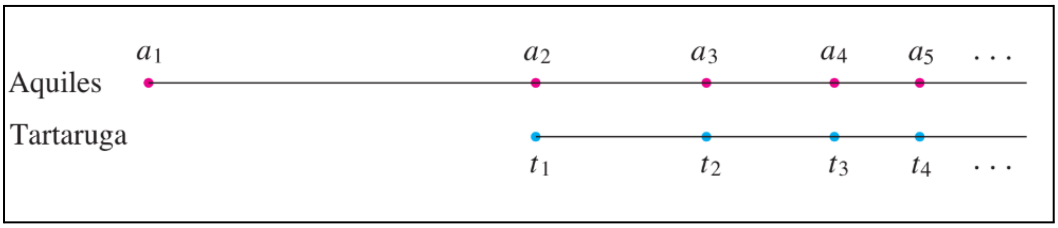
Tendo em vista a abrangência da ideia do infinito, no presente trabalho serão citados alguns importantes nomes para a história do surgimento e desenvolvimento dessa noção.

Desde o início da humanidade, muitas foram as discussões acerca daquilo que não se obtinha resposta. Por exemplo, Lopes (2011) afirma que Santo Agostinho (400 a.C.) refletia sobre a existência do tempo antes mesmo da criação do mundo por Deus. Para ele, Deus haveria criado o tempo e o mundo de forma simultânea. Já para Immanuel Kant (1724-1804), o tempo não seria infinito e nem finito, mas uma ideia sem comprovações concretas, sendo uma compreensão instintiva do entendimento humano (Lopes, 2011). Ainda hoje, discussões são levantadas a respeito de tais questões.

Sampaio (2016) afirma que a ideia do infinito foi observada na Grécia por Zenão de Eléia (450 a.C.), discípulo de Parmênides, através dos seus paradoxos que buscavam comprovar a incoerência dos conceitos de multiplicidade e de divisibilidade. Dois deles foram denominados por Aristóteles como paradoxos de Aquiles e da Dicotomia, e ilustram a ideia do processo de subdivisões infinitas (Sampaio, 2016).

De acordo com Lopes (2011) o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga supõe uma corrida entre os mesmos, onde, possuindo velocidades distintas, Aquiles, sendo o mais veloz, concede vantagem à tartaruga. Dada a largada, a tartaruga inicia o percurso à frente de Aquiles que, por sua vez, busca alcançá-la. Contudo, sempre que Aquiles aproxima-se da tartaruga, a mesma encontra-se em uma nova posição, um pouco mais adiante. Essa situação ocorreria infinitamente, dessa forma seria impossível Aquiles e a tartaruga encontrarem-se juntos numa mesma posição (Lopes, 2011). Na Figura 1, que ilustra o paradoxo, a sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ representa a posição de Aquiles nos instantes 1, 2, 3, $\cdots$. Já $t_1, t_2, t_3, \cdots$ representa a posição da tartaruga nos instantes 1, 2, 3, $\cdots$.

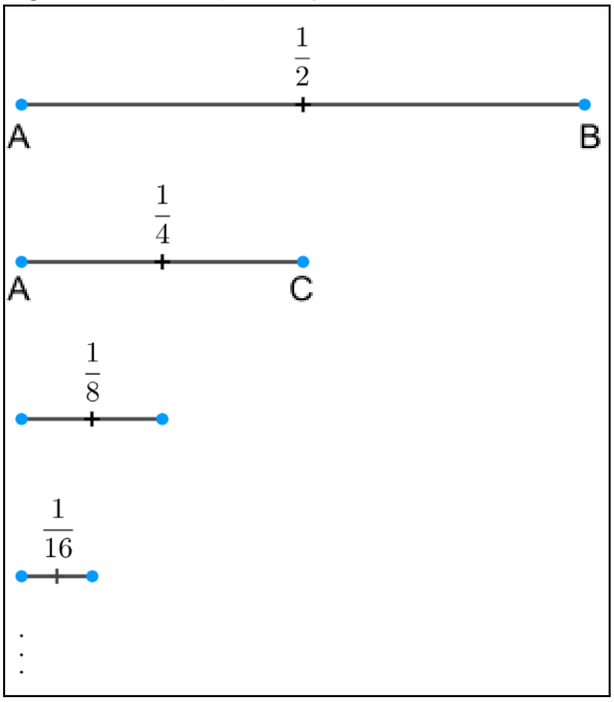
Figura 1 - Ilustração do paradoxo de Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Stewart (2013, p. 4).

Já o paradoxo da Dicotomia ilustra a seguinte situação: dados dois pontos A e B, considera-se que, para percorrer a distância entre os mesmos, é necessário primeiramente alcançar a metade deste caminho, denominado, aqui, como ponto C (Lopes, 2011). É possível, ainda, considerar que partindo de A até C, deve-se percorrer, também, a metade deste caminho (Figura 2). Essa situação, considerando a distância finita entre os pontos iniciais, ocorreria infinitamente (Lopes, 2011).

Figura 2 - Ilustração do paradoxo da Dicotomia



Fonte: Elaboração própria.

Tais paradoxos levados à sociedade científica contrariavam as convicções que os gregos apresentavam até então, dando início ao chamado “horror ao infinito” (Sampaio, 2016). Foi Aristóteles que estudou as escritas a respeito dos paradoxos de Zenão e desenvolveu, assim, os conceitos de infinito potencial e infinito atual, que surgem diante da necessidade de compreensão dos novos pensamentos. Ressalta-se que a ideia de infinito atual não foi aceita pelos gregos (Sampaio, 2016).

Entende-se o infinito potencial como a ideia da contagem, onde há a possibilidade de sempre se somar 1 a um número, sendo este um processo infinito (Lorin, 2018). Já o infinito atual origina-se na concepção de infinitos existentes em espaços limitados, contrariando a compreensão do senso comum, uma vez que este conceito não é visto no mundo real, apenas de forma abstrata na matemática (Lorin, 2018). De acordo com Waldegg:

> O primeiro está associado à ausência de limites ou fronteiras, à falta de conclusão ou término de um processo que se repete ou progride indefinidamente. Sob essa significação, o infinito é, literalmente, o que não tem fim, o que sempre (infinito temporário) pode ser continuado. Este tipo de infinito que denominamos de infinito potencial [...] Na segunda conotação, o infinito é associado com a ideia de totalidade, de completude e unidade. Um processo (potencialmente infinito nas origens) agora é considerado terminado e os limites, alcançados. Essa é a maneira pela qual um matemático pensa hoje acerca do conjunto de todos os números, sem ter a necessidade de nomear ou pensar

> cada um deles individualmente. Este infinito é denominado de infinito atual [...]. (Waldegg, 1996, p. 107-108, *apud* Lorin, 2018, p. 16, tradução do autor).

Segundo Lopes (2011), no campo da matemática, o infinito atual foi abordado inicialmente na Grécia, quando os pitagóricos (VI a.C) se depararam com uma situação bem complexa para a época, por não conseguirem determinar a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado por meio dos números racionais, os quais eram utilizados para expressar e explicar tudo. Para os gregos, esta razão era uma grandeza incomensurável[1], o que levou inclusive à primeira crise conhecida na história da matemática[2]. Foi através de razões desta natureza que os pitagóricos se depararam com os números irracionais (Lopes, 2011).

Contudo, as novas concepções geraram caos na sociedade científica da época. Os matemáticos e a escola platônica embarcaram, assim, numa busca por soluções para o trabalho com os infinitesimais[3] (Sampaio, 2016). De acordo com a mesma autora, foi criado então um método pautado na lógica formal, repleto de rigor nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, no qual era preciso ter conhecimento prévio sobre o resultado a ser demonstrado. Posteriormente, foi chamado de método da exaustão. Tendo em vista as dificuldades enfrentadas em sua formalização, o conceito de infinito deixa de ser tratado na Grécia. Porém, mesmo tendo-o negado, a escola grega deixou contribuições importantes para os estudiosos seguintes (Sampaio, 2016).

Diante das muitas objeções inerentes ao seu conceito, o infinito deixa de ser abordado por um longo período de tempo (Sampaio, 2016) e somente a partir do século XVII retorna ao foco dos estudiosos. Dentre os nomes da época, destacam-se Galileu Galilei (1564 - 1642) e Bernard Bolzano (1781 - 1848), matemáticos importantíssimos que em seus estudos contribuíram com descobertas acerca da natureza do infinito (Amadei, 2005).

Em suas investigações a respeito da infinidade dos números, ao estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos números inteiros positivos e o conjunto dos quadrados perfeitos (este, contido no primeiro conjunto), Galileu Galilei

---

[1] De acordo com Gonçalves e Possani (2010), incomensurabilidade é uma relação entre grandezas não exprimíveis por uma unidade comum.

[2] Alguns autores contestam a existência dessa crise, como Gonçalves e Possani (2010).

[3] Com base na leitura do artigo de Sampaio (2016), compreende-se infinitesimais como os “pequenos pedaços”, que podem ser divididos indefinidamente, como ilustram os paradoxos de Zenão citados no texto.

argumenta serem infinitas as quantidades de números de ambos os conjuntos, refutando a afirmação de Euclides, o qual alega no Livro I dos Elementos, que o todo é sempre maior que uma de suas partes. Dessa forma, Galilei constatou a complexidade de tratar a noção do infinito e, por isso, concluiu que a infinidade seria inerentemente incompreensível (Morris, 1998).

Já Bolzano (1851 *apud* Lorin, 2018), em seu trabalho *Os Paradoxos do Infinito* discute a respeito da introdução do infinito como objeto de estudo em matemática. Para Waldegg (2008 *apud* Lorin, 2018), o contexto da teoria de conjuntos seria o mais adequado para referir-se ao conceito de infinito. Bolzano ainda estabelece relações de correspondência um a um entre conjuntos infinitos e seus subconjuntos próprios na tentativa de afirmar o conceito de conjunto adotado por ele: a de que um conjunto deve ser concebido como um todo, sem qualquer necessidade de se pensar em separado cada elemento (Waldegg, 2008 *apud* Lorin, 2018).

Desse modo, Lorin (2018) destaca que Bolzano deu início aos caminhos para o desenvolvimento da ideia do infinito atual no campo da matemática, propiciando elementos para que o importante matemático do século XIX, Georg Cantor (1845 - 1918) desenvolvesse suas teorias.

Inicialmente, as contribuições de Cantor são estabelecidas num contexto inoportuno para o desenvolvimento da noção do infinito, uma vez que este apresentava-se na sociedade como objeto precursor de grandes controvérsias e negações (Amadei, 2005).

Amadei (2005) retrata que em seus estudos e artigos publicados, Cantor mostrou que a infinidade poderia ser abordada matematicamente de forma mais precisa. Ele desenvolveu o conceito da aritmética dos números transfinitos[4], demonstrando rigorosamente que nem todos os infinitos possuiriam o mesmo “tamanho”. Foi constatado, por exemplo, que o conjunto dos números irracionais possui mais elementos que o conjunto dos números racionais. Contudo, tais concepções foram veementemente rejeitadas por outros matemáticos e estudiosos, visto que confrontavam a intuição e o entendimento humano (Amadei, 2005).

Tendo em vista a forte negação e a não aceitação das descobertas de Cantor por parte da sociedade, o próprio matemático chegou a questionar suas conclusões a respeito dos números transfinitos. Contudo, foi percebido por ele mesmo a

---

[4] Números transfinitos ou cardinais transfinitos foi um sistema criado por Cantor para simbolizar a cardinalidade (o “tamanho”) de conjuntos infinitos (Lorin, 2018).

necessidade de superar toda a rejeição de seus próprios ideais, visto que suas descobertas viabilizariam o desenvolvimento de novas ideias matemáticas importantes (Amadei, 2005).

Georg Cantor demonstrou muito mais do que só o conceito da infinidade. O matemático russo chegou a resultados surpreendentes, como em 1874, quando provou que o número de pontos numa linha era menor que o número de pontos num plano (Morris, 1998).

Contudo, ainda de acordo com Morris (1998), as descobertas de Cantor geraram resistência aos matemáticos da época e somente em 1926 o seu trabalho foi notoriamente aceito com a devida importância, mesmo anos após a sua morte. Os feitos de Cantor foram reconhecidos e estudados pelo matemático alemão David Hilbert, que em concordância aos seus ideais afirmou que ninguém poderia *“nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós”* (Morris, 1998, p. 21).

Diante da apresentação destes recortes do percurso histórico da noção do infinito no presente capítulo, pôde-se perceber que a mesma não se estabeleceu de forma linear, mas, sim, diante de obstáculos e rupturas em seu processo de desenvolvimento. Por isso, supõe-se que os obstáculos presentes no conceito do infinito originaram-se epistemologicamente (D’Amore, 2007).

2.2 Obstáculos epistemológicos

Tendo em vista as muitas dificuldades encontradas para o entendimento da ideia do infinito desde o seu surgimento e ao longo de seu percurso histórico, podem ser observados alguns obstáculos intrínsecos ao seu desenvolvimento. Por isso, a noção do infinito, por si só, apresenta-se como de difícil compreensão para a mente humana. Dessa forma, a presente pesquisa está pautada, também, na teoria dos obstáculos epistemológicos. De acordo com Almouloud, “Os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram, na história, para a compreensão e utilização desses conceitos” (Almouloud, 2007, p. 139).

A teoria dos obstáculos epistemológicos foi inicialmente discutida por Gaston Bachelard em seu livro *A formação do espírito científico*, de 1938, onde ele defende a ideia de que a construção do conhecimento científico não ocorre apenas de forma linear, mas também por meio de obstáculos e rupturas (Lorin, 2018).

Contudo, Bachelard não considerava que a sua teoria aplicava-se ao campo da Matemática, pois, para ele “[...] a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro” (Bachelard, 1996, p. 28).

A concepção de Bachelard a respeito da Matemática como um campo de conhecimento livre de erros e rupturas ainda persiste nos dias atuais. Um fator que exemplifica tal situação são as demonstrações de fatos matemáticos que geram, aos aprendizes de Matemática, a falsa impressão de uma linearidade na construção do conhecimento (Lorin, 2018).

Todavia, influenciado pelas ideias de Gaston Bachelard, o francês Guy Brousseau, a partir da década de 1970, realizou a transposição da teoria dos obstáculos epistemológicos para o campo da Matemática, a qual foi denominada teoria das situações didáticas (Almouloud, 2007).

Lorin (2018) destaca a proposta de divisão de Brousseau para a categorização dos obstáculos existentes na didática da Matemática em três tipos. Para ele, os obstáculos poderiam ser de origem ontogenética, didática ou epistemológica.

Os obstáculos de origem ontogenética decorrem “da individualidade genética de cada indivíduo ou do próprio processo de maturação cognitivo do indivíduo” (Brousseau, 1976 *apud* Lorin, 2018, p. 25). Já os obstáculos de origem didática decorrem de situações didáticas, e os obstáculos epistemológicos, da “resistência do próprio conhecimento matemático” (Brousseau, 1976 *apud* Lorin, 2018, p. 26).

Ainda, à luz dos ideais de Brousseau, Almouloud (2007) afirma que os obstáculos podem ser percebidos na manifestação de erros no processo de construção de um novo conhecimento e também na incapacidade de solucionar certas situações e problemas. Por isso, segundo o autor, o erro pode ser considerado um caminho importante na observação de possíveis obstáculos presentes na interpretação de certos conceitos.

Ressalta-se, para mais, a importância do estudo da ideia de obstáculos no campo da pesquisa em didática da Matemática, uma vez que esta apresenta uma possível correlação entre conhecimentos prévios e o processo de construção de um novo saber, além de ser um caminho para o entendimento da origem e do percurso histórico de um conhecimento (Almouloud, 2007).

Ainda sob os referenciais de Brousseau, Almouloud (2007) destaca que um obstáculo pode ser caracterizado como um conhecimento e não uma falta do mesmo. Este conhecimento pode produzir raciocínios válidos em determinados contextos que, se aplicados fora destes, podem gerar respostas inválidas, do ponto de vista matemático (Almouloud, 2007).

Nesse sentido, Igliori (2008) afirma que algumas relações válidas no conjunto dos números naturais podem apresentar-se como obstáculos no estudo do conjunto dos números racionais. A título de exemplo, o pensamento de que o produto de uma multiplicação sempre será maior ou igual a cada um dos fatores (válido no universo dos números naturais) pode ser considerado como uma verdade absoluta pelos alunos e generalizada para a multiplicação de números não inteiros, a qual nem sempre resultará em produtos maiores do que os fatores (Igliori, 2008).

Vale ressaltar, além disso, que pesquisas em didática da Matemática evidenciam que, ainda nos dias atuais, diversos fatores e concepções, atrelados ao surgimento dos obstáculos epistemológicos, podem ser percebidos nos educandos ao longo dos processos educativos (Almouloud, 2007).

Nesse viés, Almouloud (2007) ainda destaca a presença de obstáculos epistemológicos em alguns tópicos da Matemática. Destes, o autor menciona o infinito e a existente dificuldade de entendimento do mesmo desde o seu surgimento, bem como os percalços presentes em seu desenvolvimento histórico. Almouloud (2007) cita a categorização dos obstáculos observados em relação ao infinito desenvolvida por Sierpinska (1985 *apud* Almouloud, 2007, p. 140), a qual agrupa "[...] sob o título 'Horror infinito' toda uma família de obstáculos, que resultam da recusa dos conjuntos infinitos e se traduzem pela utilização de um leque de meios destinados a evitá-los [...]".

Diante do contexto apresentado, destaca-se a importância de identificar obstáculos que são de origem epistemológica e buscá-los por meio de uma análise histórica e de possíveis vestígios deixados pelo desenvolvimento do conhecimento. Para mais, tais obstáculos também podem ser identificados analisando dificuldades apresentadas quando estudados certos conceitos. Nesse sentido, Almouloud afirma que os estudos relacionados à temática devem:

> a) achar erros recorrentes e mostrar que se agrupam em torno de concepções; b) encontrar obstáculos na história da matemática; c) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizado

> para estabelecer o seu caráter epistemológico (Almouloud, 2007, p. 146).

Além disso, na perspectiva dos estudos de Brousseau, Igliori (2008) aponta a história ou os erros (e dificuldades) dos estudantes como meios viáveis para a pesquisa de obstáculos epistemológicos (ou de possíveis obstáculos). Ainda salienta o confronto entre o erro e a história como um percurso enriquecedor na pesquisa dos obstáculos em Matemática, relacionando as causas de dificuldades apresentadas por estudantes com a gênese do conhecimento.

Em seu trabalho, Lorin (2018) resume alguns episódios históricos[5] que desencadearam obstáculos para a conceituação da noção do infinito ou que ocasionaram rupturas no desenvolvimento de tal conceito. Estes estão apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 - Resumo de episódios históricos

PERSONAGENS HISTÓRICOS	ESPISÓDIOS HISTÓRICOS QUE GERARAM OBSTÁCULOS OU RUPTURAS	CONCEPÇÃO ADOTADA DE INFINITO
ZENÃO	**Criação de paradoxos, como o de Aquiles e a Tartaruga:** Medo e repúdio a processos infinitos.	Infinito potencial
ARISTÓTELES	**O infinito apenas como uma categoria filosófica:** O infinito como qualificador de uma ação; Nega a possibilidade de conceber o infinito em ato; O infinito é sempre ilimitado.	Infinito potencial
EUCLIDES	**Noção comum enunciada nos Elementos:** E o todo (é) maior do que a parte.	Infinito potencial
GALILEI	**Escreve a obra *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*:** Apresenta um paradoxo causado pela tentativa de relacionar números naturais com seus respectivos quadrados perfeitos.	Infinito potencial
BOLZANO	**Apresenta a definição de conjuntos e assume o infinito atual como objeto na matemática**: Estabelece relação intraobjetos, ou seja, estabelece relações biunívocas entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios.	Infinito atual e potencial
CANTOR	**Cria classes de infinito, os transfinitos:** Define enumerabilidade e cardinalidade; Elabora a *Hipótese do Contínuo*; Estabelece bijeção entre objetos de dimensões distintas, causando a famosa frase "eu vejo, mas não acredito".	Infinito atual e potencial

Fonte: Lorin (2018, p. 64).

Dessa forma, objetiva-se, na presente pesquisa, compreender os possíveis obstáculos epistemológicos observados no percurso histórico do conceito do infinito, tais como os obstáculos epistemológicos percebidos em erros apresentados por

[5] Para saber mais a respeito do trabalho de Cantor e suas contribuições, indicada na última linha do Quadro 1, ver Roque e De Carvalho (2012).

alunos quando trabalhadas ideias que envolvam as dízimas periódicas e os números irracionais.

2.3 Trabalhos relacionados

Visando a busca por trabalhos relacionados com a temática proposta neste projeto, foram realizadas pesquisas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

As pesquisas sucedidas no portal de busca ocorreram nos dias 18 e 25 de agosto de 2022 respectivamente. Para a primeira busca, foi utilizada a *string* “infinito” AND “educação básica”, na qual foram retornados 10 trabalhos. Destes, foram selecionados o quinto e o nono pelo critério da análise dos títulos e resumos. Já para a segunda pesquisa, foi utilizada a *string* “conceito de infinito”, tendo em vista a busca por trabalhos com abordagens referentes ao processo histórico do conceito a ser trabalhado. Foram obtidos 9 resultados, e o título do primeiro chamou a atenção por trazer a teoria dos obstáculos epistemológicos e o conceito de infinito.

Nas próximas seções serão apresentados brevemente os três trabalhos selecionados, na ordem descrita acima, por apresentarem temáticas compatíveis com a abordagem que pretende-se realizar no desenvolvimento da presente pesquisa.

2.3.1 Perguntas e histórias sobre o infinito matemático: o que os estudantes da Educação Básica desejam saber acerca da história cultural do infinito?

A dissertação de mestrado de Ana Paula Gonçalves, publicada sob orientação do professor Dr. Ricardo Silva Kubrusly no ano de 2019, tem por objetivo “[...] apresentar caminhos epistemológicos para o trabalho com a História Cultural do Infinito na sala de aula” (Gonçalves, 2019, p. 10).

Para alcançar o objetivo principal de sua pesquisa, a autora realizou, primeiramente, um panorama do conceito de infinito dentro da história da matemática, propiciando diálogos com estudantes e possibilitando o estímulo de sua imaginação por meio de contação de histórias. Ainda, foram realizadas entrevistas com perguntas abertas e fechadas, sendo os participantes, professores da Educação Básica ou do Ensino Superior. Por fim, foram apresentadas as atividades precursoras das indagações e reflexões sobre o infinito e práticas que podem ser repensadas para o trabalho em sala de aula.

O trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica, tendo como objetivo uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados. Em conclusão, a autora destaca a importância de um ambiente escolar que propicie protagonismo aos alunos e liberdade para seus questionamentos e indagações, utilizando-se da metodologia da sala de aula investigativa e laboral. Para isso, Gonçalves (2019) afirma a necessidade de uma reestruturação nos currículos dos cursos de licenciaturas objetivando a formação de profissionais com vistas à essa prática.

Este trabalho aproxima-se da ideia a ser desenvolvida na presente pesquisa por analisar as possibilidades de trabalhar o conceito de infinito perpassando por diferentes tópicos da matemática. Porém, distancia-se pela abrangência da temática e por possuir como público-alvo, também, os profissionais docentes.

2.3.2 A noção de infinito em livros didáticos do Ensino Básico

A dissertação de mestrado em questão foi desenvolvida no ano de 2011 por Joaquim da Silva Lopes, sob orientação da professora Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori. A pesquisa realizada teve como objetivo a análise da abordagem implícita e/ou explícita da noção do infinito em livros didáticos da Educação Básica.

A motivação do trabalho deu-se a partir das vivências do autor em sala de aula, onde foram observadas diferentes situações, no processo de aprendizagem, de questionamentos sobre o infinito.

Inicialmente, Lopes (2011) realizou uma abordagem histórica sobre a ideia do infinito, relacionando-a com as dificuldades encontradas pelos alunos para o entendimento da mesma e enfatizando todo o caminho percorrido para o seu desenvolvimento.

A abordagem adotada pelo autor para a realização do trabalho foi a pesquisa qualitativa. Para a coleta de dados, foi realizada uma pesquisa documental. O procedimento metodológico utilizado para o tratamento dos dados obtidos nos livros didáticos de matemática, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, foi a análise de conteúdo de Bardin.

Diante da pesquisa, foi concluída a importância da compreensão da noção do infinito para o desenvolvimento do raciocínio matemático do indivíduo e da inclusão desta ideia como conteúdo a ser trabalhado no decorrer da Educação Básica.

Em seu trabalho, o autor constatou que a ideia de infinito pode ser percebida em diversas atividades presentes nos livros didáticos, as quais viabilizam possíveis discussões acerca desta noção.

Verificou-se, ainda, que a noção de infinito perpassa boa parte dos conteúdos matemáticos da Educação Básica, mesmo que de maneira implícita e sem apresentar-se como um tópico da grade curricular. Nesse viés, o autor concluiu que a ideia do infinito não deve ser uma temática exclusiva das etapas do Ensino Médio e Superior, mas, também, dos demais segmentos da Educação Básica.

Esta pesquisa relaciona-se com a temática proposta no presente trabalho pois aborda como o infinito é trabalhado em diferentes conteúdos matemáticos e anos de escolaridade. Contudo, objetiva-se, aqui, uma investigação acerca da aprendizagem da noção do infinito por parte dos alunos nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, e não uma análise de livros didáticos.

2.3.3 Relações entre teoremas-em-ação[6] e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito

O trabalho é uma tese de doutorado publicada no ano de 2018 e desenvolvida por José Henrique Lorin, orientado pela professora Dra. Irinéa de Lourdes Batista, tendo como objetivo:

> [...] investigar a relação entre obstáculos epistemológicos, identificados no decorrer da história da conceitualização do infinito enquanto objeto (infinito atual), e os conhecimentos mobilizados por acadêmicos de licenciatura em Matemática em situações relacionadas a este conceito (Lorin, 2018, p. 19).

Esta pesquisa é caracterizada como uma investigação qualitativa, onde utilizou-se como referencial a análise de conteúdo de Bardin para o estudo das respostas fornecidas pelos alunos selecionados. Trata-se, ainda, de um estudo de caso. A coleta de dados foi realizada por meio de entrevistas individuais, nas quais foram apresentadas também propostas de atividades. Participaram da investigação

[6] Teoremas-em-ação são um tipo de invariante operatório definido por Vergnaud (Vergnaud, 1993).

quatro alunos da Licenciatura em Matemática, três em seu último ano de graduação e um recém-graduado, sendo analisados pelo autor os conhecimentos utilizados pelos entrevistados nas discussões referentes às atividades citadas.

A motivação do autor para a realização da pesquisa deu-se a partir de algumas indagações levantadas pelo mesmo, acerca da concepção de infinito em sua dissertação de mestrado.

Inicialmente são apresentados, no texto, os conceitos de obstáculos epistemológicos e campos conceituais. As teorias foram utilizadas como aporte teórico-didático para a pesquisa.

Em seguida, é descrita a trajetória histórica do desenvolvimento da noção de infinito, enfatizando as concepções de infinito potencial e, sobretudo, do atual, relatando os impasses do processo de conceitualização destas ideias, a fim de identificar a existência de obstáculos epistemológicos. A partir disso, foram elaboradas tarefas constituídas de atividades estruturadas com o objetivo de problematizar os obstáculos existentes na compreensão do conceito de infinito.

Por fim, o autor retoma a questão inicial, ao concluir que, de fato, são estabelecidas relações entre os obstáculos epistemológicos do conceito de infinito e os teoremas-em-ação falsos utilizados pelos estudantes analisados.

O trabalho em questão aproxima-se da pesquisa ora desenvolvida por apresentar, também, uma investigação sobre as interpretações dos alunos a respeito da ideia de infinito. Todavia, a tese de Lorin teve como público-alvo alunos do Ensino Superior (curso de Licenciatura em Matemática), e almeja-se uma investigação com alunos da Educação Básica.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão apresentados, em seções, os procedimentos metodológicos adotados para a realização da presente pesquisa, a qual será detalhadamente caracterizada na primeira seção. Já na segunda seção do capítulo, será abordada toda a elaboração do instrumento de coleta de dados, o qual será apresentado em sua versão inicial. Ainda, será descrita a experiência de aplicação do teste exploratório realizado, tal como as significativas contribuições recebidas no mesmo.

3.1 Caracterização da pesquisa

A fim de explicitar os procedimentos metodológicos a serem seguidos, nesta seção serão abordadas as etapas, o tipo de pesquisa tal como sua abordagem, o instrumento para a coleta de dados e o público-alvo do presente trabalho.

Para o alcance da investigação das interpretações dos alunos da 1.ª série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais, dado como objetivo geral, pretende-se realizar o desenvolvimento da pesquisa em sete etapas:

- Revisão bibliográfica;
- Elaboração do questionário;
- Realização do teste exploratório;
- Análise dos dados coletados no teste exploratório e reformulação do questionário, caso necessário;
- Aplicação do questionário;
- Análise dos dados coletados na aplicação do questionário.

Para o desenvolvimento deste trabalho, propõe-se a adoção de uma abordagem qualitativa de caráter exploratório. Assim, procura-se compreender, por meio de uma investigação, o porquê de certos aspectos da realidade a ser analisada. Sobre esta vertente, Silveira e Córdova (2009, p. 31) afirmam que: “A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.”

Tendo como público-alvo do trabalho alunos da 1.ª série do Ensino Médio, planeja-se utilizar o questionário como instrumento para a coleta dos dados pretendidos. De acordo com Gil (2021):

> Pode-se definir questionário como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores [...] Construir um questionário consiste basicamente em traduzir objetivos da pesquisa em questões específicas (Gil, 2021, p. 12).

Contudo, são notórios os desafios de elaborar um bom questionário, em vista do cuidado que se faz necessário neste processo por parte dos pesquisadores. É preciso ainda certificar-se de que os envolvidos estejam motivados em suas participações para responder ao que é perguntado (Gil, 2021). Além disso, o autor afirma que é crucial que as questões estejam claras, de modo que sejam facilmente compreendidas em sua leitura. Necessita-se também propiciar um ambiente de não constrangimento para os participantes. Destacam-se como vantagens da utilização de tal instrumento a garantia de anonimato de resposta e da não exposição dos pesquisados a influências das opiniões do pesquisador (Gil, 2021).

Todavia, vale ressaltar as limitações do uso do questionário como instrumento para a coleta de dados de uma pesquisa. Por vezes, os participantes podem tender a hesitar ou resistir a responder às perguntas propostas, visto que faz-se necessário um tempo para se refletir a respeito do que lhe é questionado, o que demanda atenção e exige tomada de decisão diante de algumas questões (Vieira, 2009).

Contudo, ainda de acordo com Vieira (2009), pesquisadores em diferentes áreas demonstram que a utilização do questionário para a obtenção de dados pode produzir pesquisas de bons níveis.

3.2 Elaboração do instrumento de coleta de dados

A presente seção destina-se à descrição de todo o processo de elaboração do instrumento de coleta de dados.

3.2.1 Versão inicial do questionário

A elaboração do questionário iniciou-se a partir de leituras de trabalhos relacionados com a temática proposta na presente pesquisa. Foram selecionadas e reformuladas algumas questões, a fim de adaptá-las ao presente trabalho, visando o desenvolvimento de questões de fácil interpretação.

O questionário está estruturado em seis questões, das quais cinco são perguntas discursivas e uma elaborada de forma fechada. Na primeira questão (Figura 3), objetiva-se investigar a interpretação dos alunos acerca da ideia do infinito potencial: onde há a possibilidade de sempre se somar 1 a um número, sendo este um processo infinito. Assim, é apresentado um texto referente a um diálogo. Os alunos precisarão analisá-lo para responder a pergunta.

Figura 3 - Questão 1 da versão inicial do questionário

Questão 1 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Leia o texto a seguir e responda:

Dois alunos estavam em uma competição, onde vencia quem falasse o maior número.
— Um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões… —
Disse Juca, com ar de superioridade, iniciando a competição.
A professora aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Zeca falou:
— Mais um!
A turma comemorou a vitória de Zeca.
— Se tivesse dito mais dois, eu ganhava. — lamentou Juca.

Você concorda com Juca? Justifique.

____

____

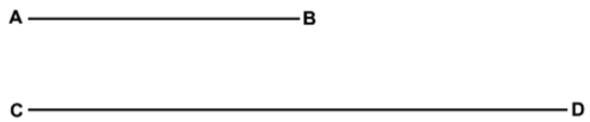
____

Fonte: Elaboração própria a partir de Sampaio (2009).

A segunda questão (Figura 4), dividida nos itens **a** e **b**, apresenta dois segmentos de reta e prevê, respectivamente, investigar a concepção dos alunos acerca do infinito em um espaço limitado (infinito atual) e analisar suas interpretações a respeito da cardinalidade dos conjuntos de pontos que constituem os segmentos.

Figura 4 - Questão 2 da versão inicial do questionário

Questão 2 (LORIN, 2018) - Considere os dois segmentos de reta AB e CD, representados abaixo, e responda às questões:



a) Considerando que o segmento AB é constituído por pontos, para você, a quantidade de pontos em AB é finita (porém muito grande) ou é infinita? Justifique.

____
____
____

b) Se tivesse que comparar a quantidade de pontos do segmento AB com a do segmento CD, você concluiria que CD possui mais pontos que AB? Justifique.

____
____

Fonte: Elaboração própria a partir de Lorin (2018).

A terceira questão (Figura 5) apresenta o resultado de uma soma infinita, e tem por objetivo investigar a percepção do infinito atual a partir do infinito potencial.

Figura 5 - Questão 3 da versão inicial do questionário

Questão 3 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Podemos considerar que a soma 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + … é igual a 200? Justifique.

$$\begin{array}{r} 100 \\ 50 \\ 25 \\ 12{,}5 \\ 6{,}25 \\ 3{,}125 \\ + \quad \vdots \\ \hline 200 \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria a partir de Sampaio (2009).

A Questão 4 (Figuras 6 e 7) apresenta um diálogo entre dois personagens e busca verificar se os alunos reconhecem que a dízima periódica $0,\overline{9}$ é igual a 1 e que não existe o maior número real menor do que 1.

Figura 6 - Questão 4 da versão inicial do questionário

Questão 4 (LORIN, 2018) - Dado o desafio “vence quem é capaz de encontrar o maior número que ‘começa com zero’”, considere o seguinte diálogo e responda os itens a seguir justificando-os:

Fonte: Elaboração própria a partir de Lorin (2018).

Figura 7 - Itens **a** e **b** da Questão 4 da versão inicial do questionário

I.

a) Na sua opinião, existe um vencedor? Se sim, quem seria?

____

____

II.

b) Você considera que o Snoopy está correto?

____

____

Fonte: Elaboração própria.

A quinta questão (Figura 8) objetiva identificar se os alunos entendem os números irracionais como números com infinitas casas decimais e parte decimal aperiódica. Dessa forma, são apresentadas informações a respeito do número pi.

Figura 8 - Questão 5 da versão inicial do questionário

Questão 5. Definida como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, a constante π é um número irracional. A grande evolução no cálculo do seu valor aconteceu a partir do momento em que o computador entrou em cena. Sobre isso, leia o trecho a seguir e responda.

Recentemente, pesquisadores anunciaram ter quebrado um novo recorde de precisão no cálculo de pi, alcançando 62,8 trilhões de dígitos. A descoberta, feita com um supercomputador, levou 108 dias e nove horas, bateu o recorde mundial anterior de 50 trilhões de casas decimais, além de ter sido calculada 3,5 vezes mais rápido.

Fonte: IMPA, 2023.

Você acha que todas as casas decimais do número pi serão conhecidas algum dia? Justifique.

____

____

____

____

Fonte: Elaboração própria.

Já a Questão 6 (Figura 9), dividida em quatro itens, visa investigar a concepção dos alunos acerca do infinito em um espaço limitado (infinito atual), analisar suas compreensões a respeito da infinidade de pontos existentes em uma reta e suas percepções sobre o fato de que uma dízima é maior do que um número com finitas casas decimais. Para isso, os alunos deverão assinalar como verdadeiras ou falsas cada uma das afirmações apresentadas.

Figura 9 - Questão 6 da versão inicial do questionário

Questão 6. Dadas as afirmações a seguir, classifique-as em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) ( ) Todo segmento de reta possui um conjunto infinito de pontos.
b) ( ) Entre dois pontos de uma reta sempre existe outro.
c) ( ) Toda reta possui um conjunto infinito de pontos.
d) ( ) $0,0\overline{9} > 0,09999999999$.

Fonte: Elaboração própria.

Na próxima seção, são apresentadas as modificações realizadas no questionário após o teste exploratório.

3.2.2 Teste exploratório e versão final do questionário

A fim de identificar a necessidade de possíveis alterações no material elaborado, foram destinados dois dias para a realização do teste exploratório, tendo como participantes alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro. Para o público-alvo do teste, optou-se por licenciandos que: (i) não tivessem cursado a disciplina de Análise Matemática (por abordar a temática proposta); (ii) se estivessem cursando, que não tivessem estudado o conteúdo proposto na presente pesquisa e (iii) estivessem envolvidos em pesquisas acadêmicas.

A aplicação do teste ocorreu de forma presencial nos dias 14 e 15 de fevereiro de 2023. No primeiro dia, iniciando às 15h, participaram 11 licenciandos. Já no segundo dia, a aplicação ocorreu no turno noturno, às 18h, na qual estiveram presentes 8 licenciandos. Ambos os encontros tiveram 1 hora de duração.

Fez-se necessária a aplicação do teste em dois dias devido à incompatibilidade de horários entre os licenciandos que demonstraram interesse em participar.

Nestes encontros, o questionário foi apresentado e explicado pelas aplicadoras, que pontuaram também o objetivo geral da pesquisa e o seu público-alvo, alunos da primeira série do Ensino Médio. Foi solicitado que os participantes realizassem uma análise criteriosa das questões e da estrutura do material, sinalizando suas possíveis considerações e sugestões, além de responderem as perguntas.

Os participantes do teste exploratório foram nomeados de P_1 a P_{19} (participante 1 a participante 19). Estes, após finalizadas as aplicações, relataram grande curiosidade acerca da temática trabalhada.

Diante da análise das respostas coletadas, observou-se que uma quantidade significativa de participantes responderam a Questão 1 de forma incorreta e/ou incompleta, e que a pergunta talvez estivesse induzindo a uma determinada resposta. Assim, tornou-se clara a necessidade de reformular o enunciado da questão, visto que o mesmo não evidenciou o objetivo traçado para esta (Figura 10).

Figura 10 - Questão 1 após alteração no enunciado

Questão 1 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Leia o texto a seguir e responda:

Dois alunos estavam em uma competição, onde vencia quem falasse o maior número.
— Um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões… — Disse Juca, com ar de superioridade, iniciando a competição.
A professora aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Zeca falou:
— Mais um!
— Poxa, se tivesse dito mais dois, eu ganhava. — lamentou Juca.

Você acha que pode haver um vencedor nessa competição? Justifique.

Fonte: Elaboração própria.

Para a segunda questão, foi sugerido pelo participante P_9 que fossem modificadas as representações dos segmentos de reta apresentados, adicionando os pontos de suas extremidades. Contudo, a representação de segmentos de reta não prevê o destaque de tais pontos e, por isso, a sugestão não foi acatada.

Já para a terceira questão, a maioria dos participantes sinalizou a sugestão de adicionar linhas para o registro das respostas, a qual foi acatada tendo em vista uma melhor organização do questionário (Figura 11).

Figura 11 - Questão 3 após modificação

Questão 3 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Podemos considerar que a soma 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + … é igual a 200? Justifique.

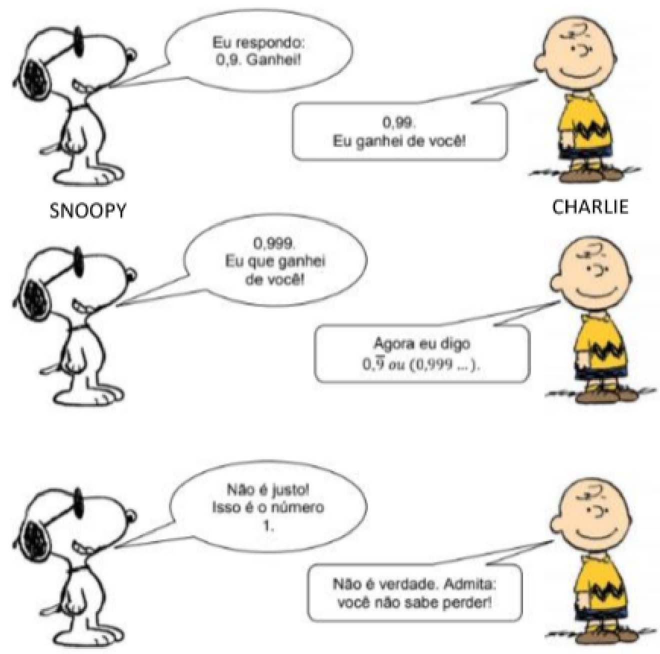
$$\begin{array}{lr} & 100 \\ & 50 \\ & 25 \\ & 12{,}5 \\ & 6{,}25 \\ & 3{,}125 \\ + & \vdots \\ \hline & 200 \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria.

A quarta questão recebeu duas sugestões, também pela maioria dos participantes. Foi sugerido sinalizar os nomes dos personagens apresentados na questão, além de solicitar que os itens **a** e **b** fossem justificados cada um separadamente (Figuras 12 e 13). Ambas as sugestões foram acatadas, tendo em vista as confusões geradas e percebidas durante a aplicação.

Figura 12 - Questão 4 após modificações

Questão 4 (LORIN, 2018) - Dado o desafio “vence quem é capaz de encontrar o maior número que ‘começa com zero’”, considere o seguinte diálogo e responda os itens a seguir:



Fonte: Elaboração própria.

Figura 13 - Itens **a** e **b** da Questão 4 após modificações

a) Na sua opinião, existe um vencedor? Se sim, quem seria? Justifique.

____

____

b) Você considera que o Snoopy está correto? Justifique.

____

____

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, as questões 5 e 6 não receberam sugestões. Os enunciados não ocasionaram dúvidas e ambas foram respondidas por todos os participantes. Contudo, após a aplicação do teste exploratório, foi realizada uma leitura do material de forma minuciosa e observou-se que todas as afirmativas da Questão 6 eram verdadeiras. Por isso, optou-se por modificar o item **d**, alterando o sentido da desigualdade apresentada (Figura 14), de modo a tornar a afirmativa falsa.

Figura 14 - Questão 6 após modificação

Questão 6. Dadas as afirmações a seguir, classifique-as em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) ( ) Todo segmento de reta possui um conjunto infinito de pontos.
b) ( ) Entre dois pontos de uma reta sempre existe outro.
c) ( ) Toda reta possui um conjunto infinito de pontos.
d) ( ) $0{,}0\overline{9} < 0{,}09999999999$.

Fonte: Elaboração própria.

De modo geral, os participantes demonstraram-se entusiasmados e interessados pela temática da pesquisa, solicitando, ao final, o gabarito comentado do questionário.

A versão final do questionário elaborado, tal como o gabarito comentado, encontra-se nos Apêndices A e B, respectivamente.

3.3 Dinâmica da aplicação do questionário

A aplicação do questionário ocorreu no dia 19 de maio de 2023 para três turmas do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino de Campos dos Goytacazes - RJ. A escolha pela escola em questão deu-se tendo em vista sua localização na área central da cidade e sua parceria com a instituição de ensino das pesquisadoras, Instituto Federal Fluminense (IFF). Além disso, uma delas realizou estágio na referida escola e a outra é ex-aluna. Dessa forma, o contato e acesso à escola ocorreu sem quaisquer intercorrências.

Em diálogo direto com a direção e com a coordenação pedagógica da escola, foram disponibilizados os horários semanais das aulas de todos os professores atuantes. Assim, tendo em vista os horários e dias disponíveis, tornou-se mais viável a realização da pesquisa em três turmas da 1.ª série do Ensino Médio de uma mesma docente. Foi realizado o contato com a professora de Matemática responsável pelas mesmas a fim de tratar sobre o momento para a realização da pesquisa, a qual, de forma receptiva e atenciosa, alertou sobre as possíveis dificuldades de seus alunos.

A aplicação do questionário nas três turmas ocorreu num só dia e a professora regente esteve presente em todos os momentos. Inicialmente, em cada turma, as pesquisadoras apresentaram-se e explicaram sobre o trabalho em desenvolvimento, frisando a importância da participação de todos. O questionário foi apresentado e orientou-se que as respostas fossem pessoais. As pesquisadoras não poderiam intervir nas mesmas, nem mesmo explicar o objetivo de cada questão. De modo geral, os alunos foram solícitos às instruções dadas e demonstraram esforço em suas participações.

Durante o momento da aplicação, em todas as turmas, os alunos estavam dispostos em fileiras. Em dados momentos, alguns dos estudantes dialogaram entre eles sobre suas interpretações, além de pontuarem dificuldades para responder o questionário, alegando não saberem as respostas corretas, embora nenhum tenha apresentado dificuldade em interpretar os enunciados das questões. Os alunos solicitaram ajuda das pesquisadoras para responder algumas das questões, o que não ocorreu. Foi explicado aos mesmos que, tendo em vista o objetivo do trabalho, as respostas e interpretações deveriam ser pessoais e sem quaisquer influências das pesquisadoras. Em todas as turmas, os participantes solicitaram o uso de calculadora para solucionarem o cálculo apresentado na terceira questão, o que também não foi autorizado.

Participaram da pesquisa, ao total, sessenta e seis alunos. Na primeira turma, vinte e cinco alunos responderam o questionário e a aplicação durou cinquenta minutos. Já na segunda e terceira turmas, participaram vinte e vinte e um estudantes, respectivamente, e a aplicação durou em média trinta minutos. Contudo, ressalta-se que os dados coletados na primeira turma não puderam ser considerados para o presente trabalho, em decorrência da interferência direta da professora regente no momento da aplicação, o que comprometeu a confiabilidade dos dados coletados. Dessa forma, serão aqui mencionadas apenas duas das turmas participantes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As seções a seguir descrevem o momento da aplicação do instrumento de coleta de dados elaborado, além da análise dos resultados obtidos, à luz do referencial teórico alicerçado para o presente trabalho.

4.1 Análise dos Resultados

Visto que não foram observadas diferenças significativas entre as turmas, os resultados serão aqui analisados de forma conjunta. Assim, temos ao total um quantitativo de quarenta e uma respostas obtidas e as justificativas foram divididas em categorias, as quais serão comentadas após a apresentação dos gráficos referentes a cada uma das questões.

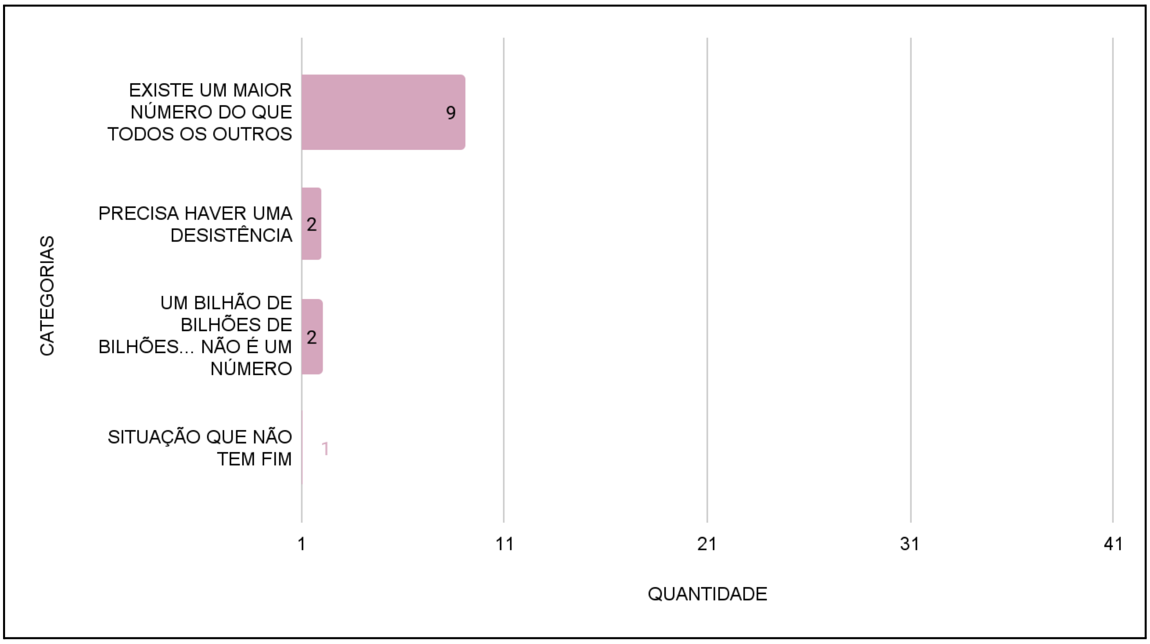
4.1.1 Análise da Questão 1

A primeira questão objetivava investigar as interpretações dos alunos acerca da ideia do infinito potencial: onde há a possibilidade de sempre se somar 1 a um número, sendo este um processo infinito.

A fim de relembrar o enunciado da Questão 1, destaca-se que a mesma apresentava uma competição entre dois personagens em que o vencedor seria quem falasse o maior número. Foi questionado se nessa competição existiria um vencedor. Das respostas obtidas, dezoito alunos responderam "sim", vinte e um responderam "não" e dois "não responderam".

O Gráfico 1 apresenta as categorias das justificativas das respostas afirmativas. Vale ressaltar que quatro alunos não justificaram.

Gráfico 1 - Categorias das justificativas das respostas afirmativas da Questão 1



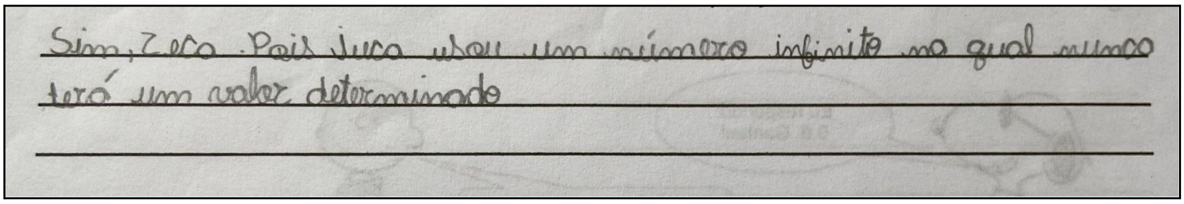
Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que a maioria das justificativas relacionam-se com a ideia de que existe um maior número do que todos os outros, o que possivelmente demonstra que esses alunos não consideram o conjunto dos números infinito. Já os dois alunos que justificaram que seria necessário um dos competidores desistir para haver um vencedor, possivelmente pensaram na infinitude dos números. Logo, suas respostas não foram totalmente equivocadas.

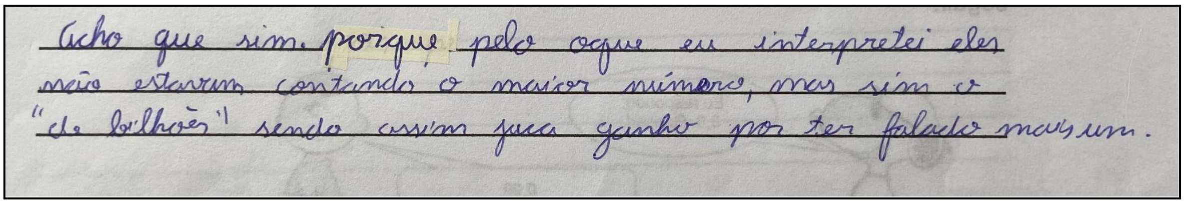
Os dois alunos que não consideraram a expressão “um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões…” como um número de fato e, sim, como uma ideia, propiciaram uma análise enriquecedora acerca de suas interpretações sobre a noção do infinito. Para estes, um número com infinitos algarismos não possui valor exato e determinado. Suas justificativas estão destacadas na Figura 15.

Figura 15 - Respostas dos dois alunos (a) e (b) que consideraram “um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões…” como uma ideia

(a)


Sim, Zeca. Pois Juca usou um número infinito no qual nunca terá um valor determinado

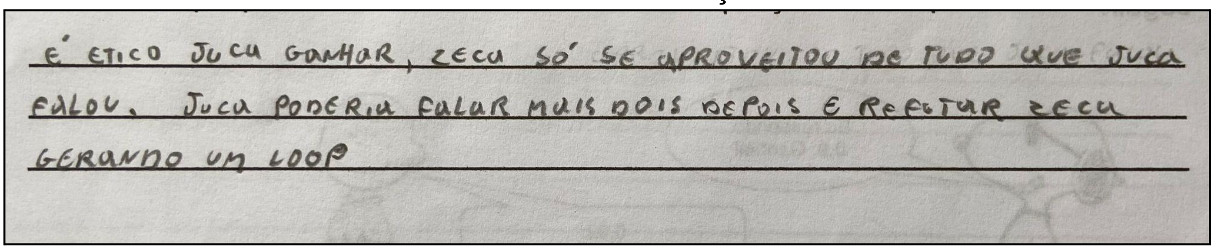
(b)


Acho que sim, porque pelo oque eu interpretei eles não estavam contando o maior número, mas sim o "de bilhões" sendo assim Juca ganho por ter falado mais um.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Já o aluno que justificou sua resposta alegando que os participantes da competição encontravam-se numa situação sem fim utilizou a noção do infinito potencial em seu argumento, na perspectiva de um processo sem conclusão (Waldegg, 1996 *apud* Lorin, 2018). Por isso, considerou-se importante destacar sua justificativa na Figura 16.

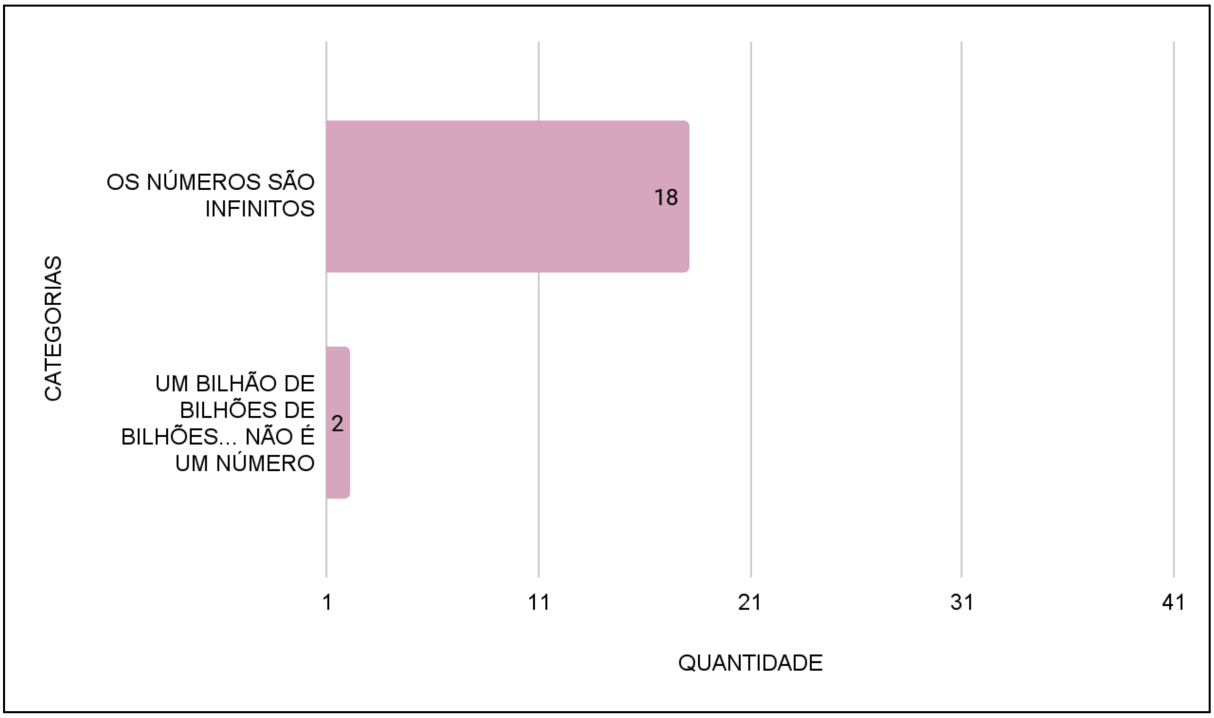
Figura 16 - Justificativa do aluno que alegou que os participantes da competição encontravam-se numa situação sem fim


É ETICO JUCA GANHAR, ZECA SÓ SE APROVEITOU DE TUDO QUE JUCA FALOU. JUCA PODERIA FALAR MAIS DOIS DEPOIS E REFUTAR ZECA GERANDO UM LOOP

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A respeito das respostas negativas para existência de um vencedor na competição, o Gráfico 2 apresenta suas justificativas categorizadas. Destaca-se que um aluno não justificou sua resposta.

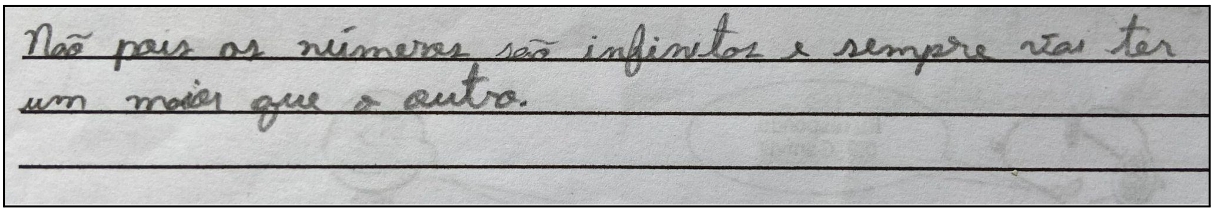
Gráfico 2 - Categorias das justificativas das respostas negativas da Questão 1



Fonte: Elaboração própria.

Entende-se que os dezoito alunos que argumentaram sobre a infinitude dos números possivelmente compreendem a ideia do infinito potencial, considerando poder haver sempre um número sucessor ao maior número citado. Destaca-se a resposta de um desses alunos (Figura 17).

Figura 17 - Resposta de um dos alunos que justificou que os números são infinitos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pode-se concluir que os resultados obtidos nesta questão corroboram com os acontecimentos da história da Matemática, onde o infinito potencial sempre foi mais facilmente aceito, por estar diretamente ligado à ideia de contagem (Lopes, 2011). Segundo Caraça (2017), as mais variadas situações do dia a dia fazem com que as pessoas precisem realizar contagens, o que pode evidenciar a melhor aceitação do infinito potencial.

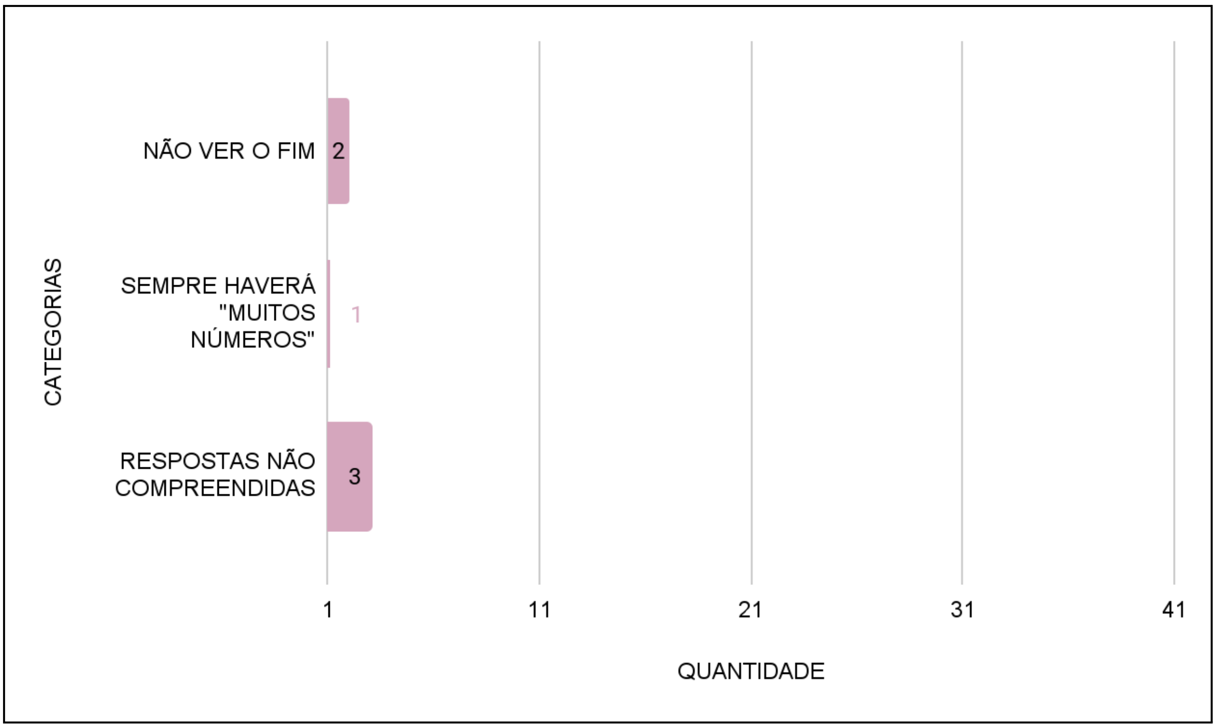
4.1.2 Análise da Questão 2

A segunda questão previa a investigação da concepção dos alunos acerca do infinito em um espaço limitado e análise de suas interpretações a respeito da cardinalidade dos conjuntos de pontos que constituem os segmentos. Esta, apresenta dois segmentos de reta de tamanhos diferentes e solicita que os alunos respondam os itens **a** e **b**.

No item **a**, é perguntado se a quantidade de pontos que constituem o segmento AB é finita ou infinita. Das respostas obtidas, onze alunos responderam que a quantidade é "infinita", vinte e dois responderam ser "finita" e oito "não responderam".

As justificativas dos alunos que responderam sobre o segmento possuir uma quantidade infinita de pontos estão categorizadas no Gráfico 3. Destaca-se que cinco alunos não justificaram suas respostas.

Gráfico 3 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam ser infinita a quantidade de pontos do segmento AB (item **a** da Questão 2)



Fonte: Elaboração própria.

Em relação aos dois alunos que justificaram que a quantidade de pontos do segmento seria infinita por "não ver o fim", considera-se que estes podem ter pensado que "não existe um último ponto" no segmento, ou ainda, aprendido que há infinitos pontos em um segmento de reta, ou trazido para esse contexto sua concepção de reta, que “por definição” é infinita.

Contudo, por meio das justificativas apresentadas, não é possível saber se estes alunos compreendem a ideia do infinito atual, visto que utilizam de um raciocínio que tange a ideia do infinito potencial.

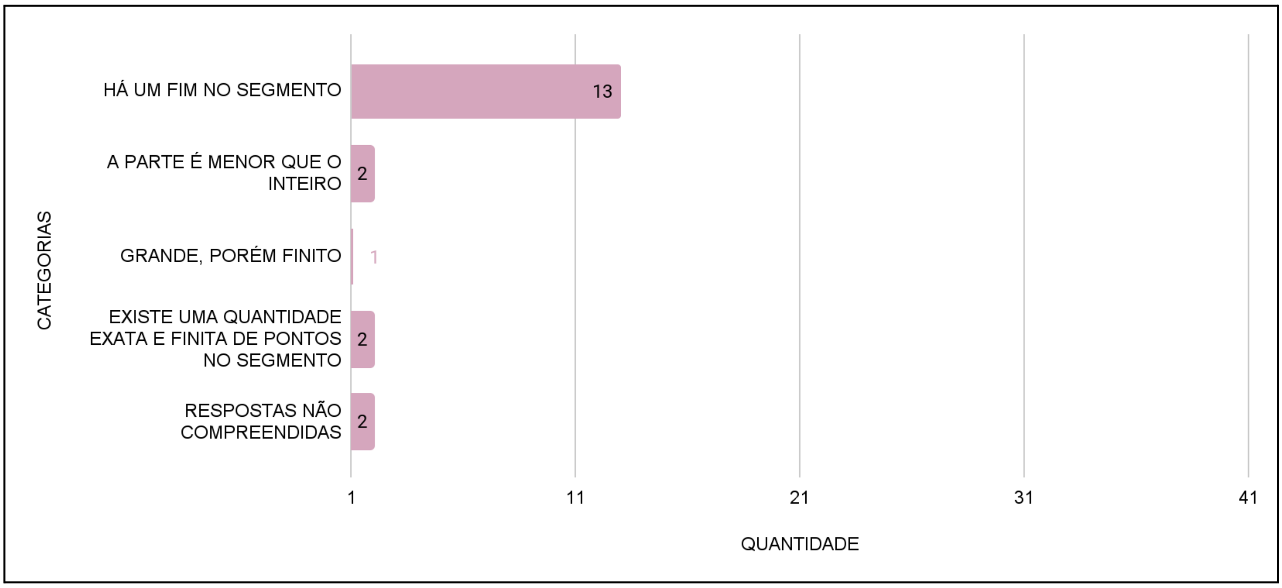
A respeito do aluno que respondeu sobre sempre haver muitos números no segmento, considera-se que este associou a representação a uma reta numérica, visto que a localização de um número real na reta é um conteúdo previsto para o seu ano de escolaridade, estabelecido como uma das habilidades da BNCC (Brasil, 2018). Além disso, pôde ser observado pelas autoras no momento da aplicação que o conteúdo mencionado havia sido trabalhado recentemente com a turma e, portanto, justificaria o fato da associação ter ocorrido.

As três respostas que não foram compreendidas apresentaram as justificativas *“infinito, pois não tem números”*, *“infinito, ele é menor porém tem mais pontos do que os outros”* e *“infinita, ela é menor porém tem mais pontos”*.

De modo geral, apesar dos alunos que aqui estão categorizados afirmarem que há infinitos pontos no segmento de reta, não se pode atestar que compreendem a ideia do infinito atual (espaço limitado), já que em suas justificativas não são utilizados argumentos acerca desta noção, o que objetivava-se analisar neste item. Segundo Lorenzato (2010, p. 39), não se pode garantir que o acerto do aluno decorre do seu pleno aprendizado a respeito de um conceito.

As justificativas dos alunos que responderam sobre o segmento possuir uma quantidade finita de pontos estão categorizadas no Gráfico 4. Ressalta-se que dois alunos não justificaram suas respostas.

Gráfico 4 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam ser finita a quantidade de pontos do segmento AB (item **a** da Questão 2)



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que um número significativo de alunos justificou que o segmento de reta tem um fim, e por isso a sua quantidade de pontos é finita. Entende-se que o infinito atual pode gerar obstáculos na aprendizagem, uma vez que este não é estabelecido naturalmente à compreensão humana. Pode-se entender o infinito atual como um obstáculo de origem ontogenética, o que corrobora com Brousseau (1976 *apud* Lorin, 2018) quando define tais obstáculos como reflexo de limitações do sujeito decorrentes de seu nível de maturidade cognitiva, tendo em vista até mesmo o seu nível de escolaridade.

Os alunos que justificaram que a parte é menor que o inteiro utilizaram como justificativa conceitos matemáticos verdadeiros em conjuntos finitos. Contudo, em conjuntos infinitos esse conceito não pode ser utilizado.

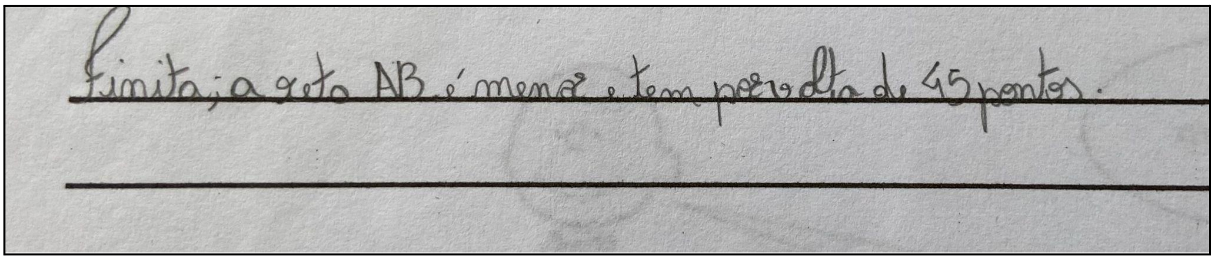
Nesse viés, Lorin (2018, p. 37) destaca, baseado nos ideais de Brousseau que “[...] o erro não advém necessariamente da ignorância do sujeito, mas, sim, de esquemas mobilizados por ele que, em algum momento, teve sucesso na resolução de algum problema”.

Nessa perspectiva, e como já destacado na presente análise, para a justificativa desta questão foram utilizadas ideias válidas para um conjunto finito, as quais não se aplicam aos conjuntos infinitos. Evidencia-se, assim, o conceito da parte-todo de conjuntos infinitos como um obstáculo epistemológico desde o entendimento de sua ideia, visto ser difícil compreender que uma parte de um conjunto infinito também será infinita (Lorin, 2018).

A título de exemplo, pensemos no conjunto dos números naturais e no conjunto dos números quadrados perfeitos. Embora o conjunto dos números quadrados perfeitos esteja contido no conjunto dos números naturais, ambos possuem infinitos elementos (Lorin, 2018).

Em relação às justificativas dos dois alunos que alegaram existir uma quantidade exata e finita de pontos no segmento, estes utilizaram a lógica da medição para analisar a quantidade de pontos do segmento. Para isso, um deles utilizou uma régua, considerando que cada milímetro seria a representação de um ponto do segmento (Figura 18).

Figura 18 - Resposta do aluno que mediu o segmento utilizando uma régua



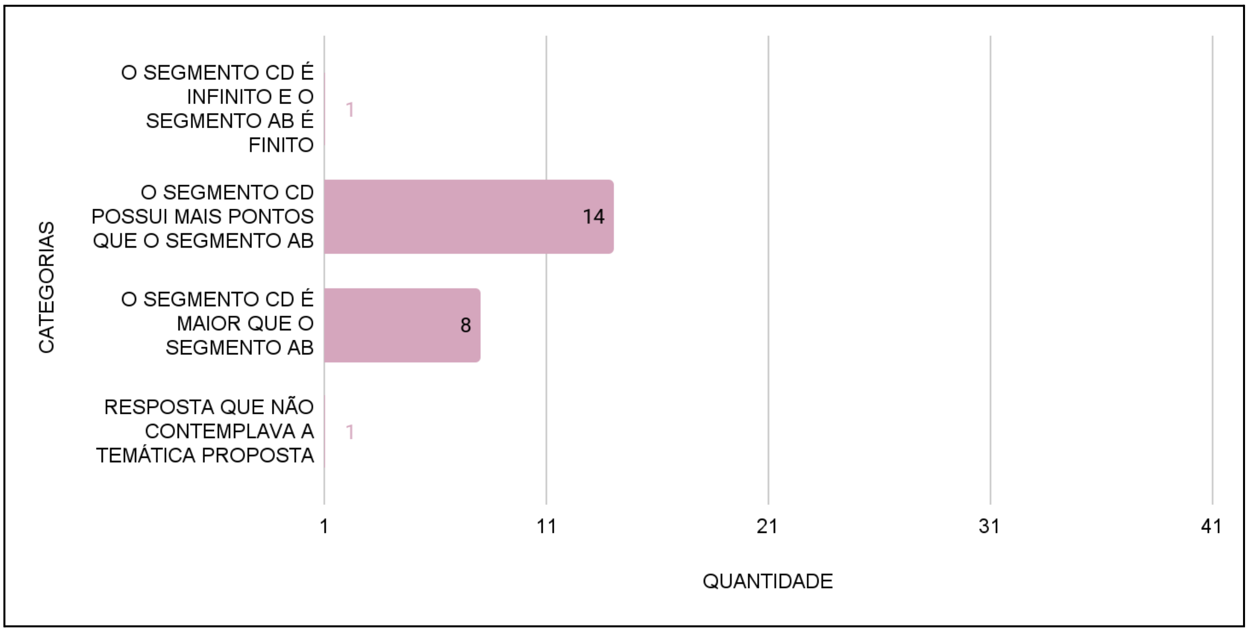
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item **b** da Questão 2 pergunta-se sobre ser possível concluir que um dos segmentos apresentados possui mais pontos que o outro. Das respostas obtidas, vinte e sete alunos responderam de forma “afirmativa”, quatro “negaram" e dez “não responderam”.

Dentre as respostas, algumas das justificativas não abordavam a ideia do infinito. Dessa forma, visto não contribuírem para a presente pesquisa, tais justificativas foram categorizadas como respostas que não contemplavam a temática proposta pela questão.

O Gráfico 5 apresenta as categorias das justificativas dos alunos que alegaram que o segmento CD possuía mais pontos que o segmento AB. Pontua-se que três alunos não justificaram suas respostas.

Gráfico 5 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam que o segmento CD possui mais pontos que o segmento AB (item **b** da Questão 2)

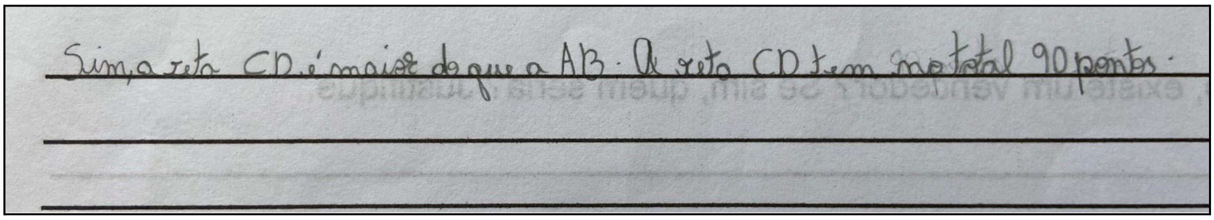


Fonte: Elaboração própria.

Os quatorze alunos que afirmaram que o segmento CD possui mais pontos, se comparado ao segmento AB, *"por ser um segmento maior"*, evidenciaram a dificuldade de compreender a ideia do infinito atual, o qual nunca foi bem aceito na sociedade científica por contrariar o senso comum, como visto no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, onde uma situação ocorreria infinitamente mesmo em um espaço limitado. Sampaio (2016) afirma que por meio dos paradoxos de Zenão iniciou-se a época denominada "horror ao infinito", pois o mesmo argumentou que um segmento de reta de comprimento finito poderia ser dividido em infinitas partes, o que motivou uma discussão entre o infinito atual e potencial por vários séculos.

Dentre os quatorze alunos citados, um utilizou a lógica da medição para comparar a quantidade de pontos dos segmentos. Para isso, recorreu ao uso de uma régua, a qual também foi utilizada pelo mesmo aluno como estratégia para responder ao item **a** da questão. Considera-se que este aluno não compreende a existência de infinitos pontos em um espaço limitado (infinito atual), o que foi reforçado em sua resposta (Figura 19), visto que novamente o mesmo considerou cada milímetro como um ponto do segmento.

Figura 19 - Resposta do aluno que mediu o segmento utilizando uma régua

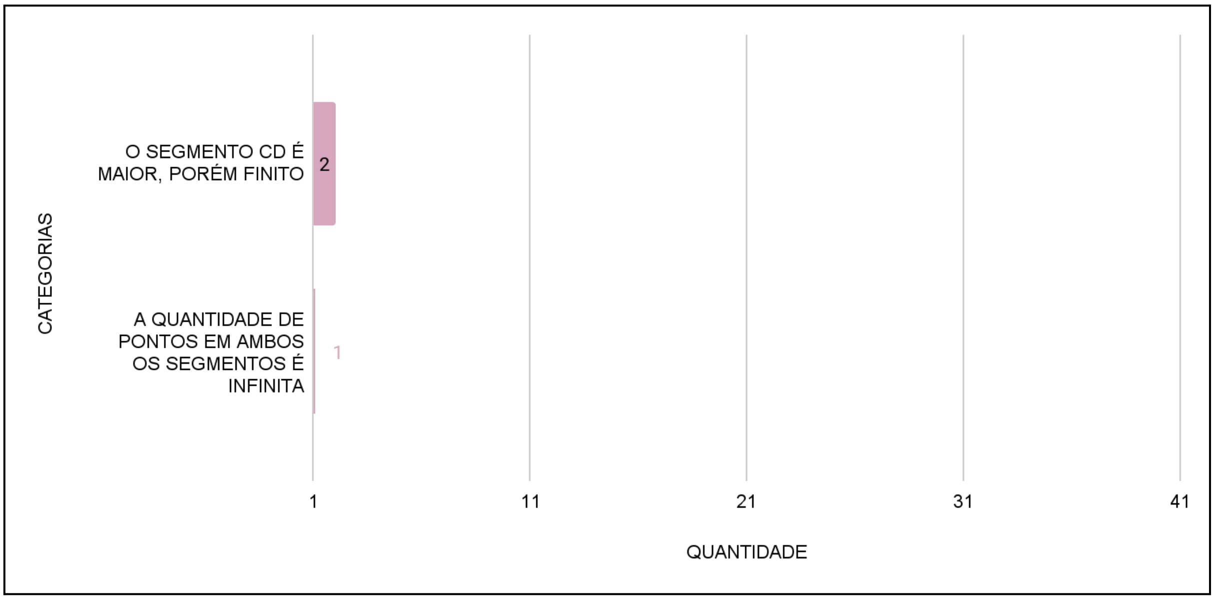


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por fim, a justificativa do aluno que não contemplava a temática proposta, não ia ao encontro do objetivo da questão, visto que o mesmo defendeu a ideia de que a resposta não seria única, mas dependeria de quem representasse os segmentos.

As categorias das respostas dos alunos que alegaram que o segmento CD não possuía mais pontos que o segmento AB estão apresentadas no Gráfico 6. Vale ressaltar que um aluno não justificou a sua resposta.

Gráfico 6 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam que o segmento CD não possui mais pontos que o segmento AB (item **b** da Questão 2)



Fonte: Elaboração própria.

Não foi possível compreender as interpretações dos alunos que justificaram que o segmento é maior, porém finito, pois suas respostas não explicitaram seus pensamentos acerca da quantidade de pontos contidos nos segmentos.

A respeito do aluno que justificou acreditar que as quantidades de pontos em ambos os segmentos são infinitas, considera-se que este entende que, ao tratar-se de conjuntos infinitos, não é possível saber a quantidade de elementos destes, o que não torna possível compará-los.

Em suma, pôde-se observar que uma parte significativa das respostas obtidas no item **a** alegava que a quantidade de pontos do segmento AB seria finita. Já no item **b**, uma grande maioria considerou que o segmento CD possuiria mais pontos do que o segmento AB.

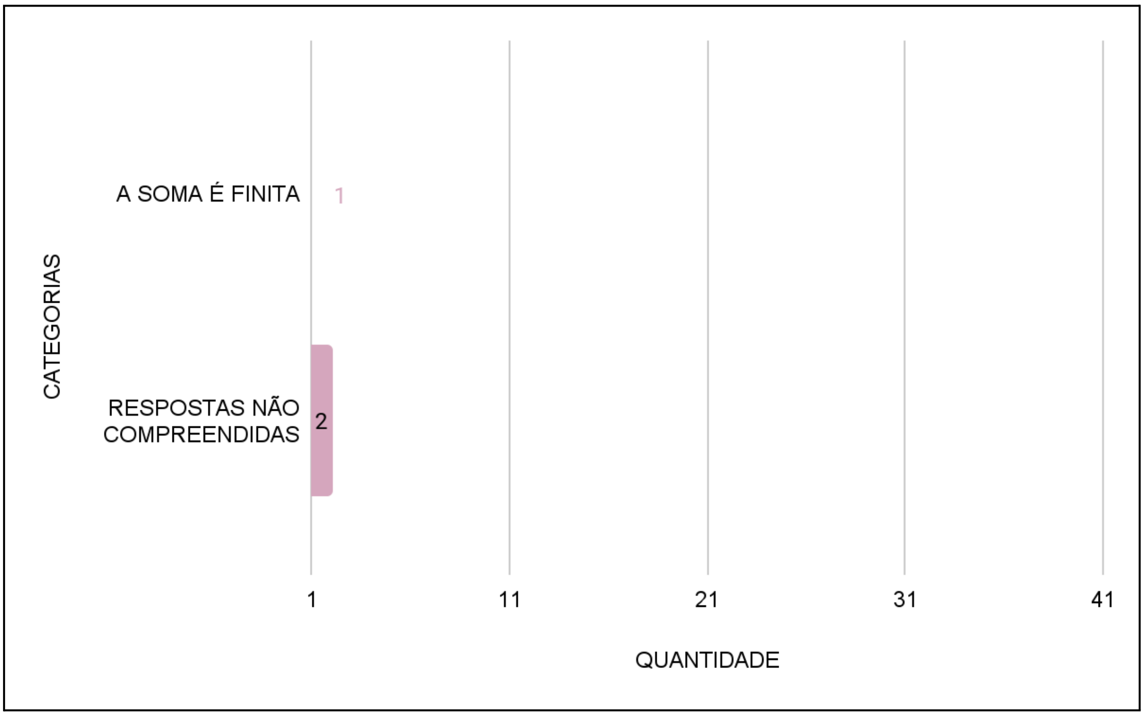
Verificou-se, de modo geral, grande dificuldade por parte dos alunos para a compreensão do conceito do infinito atual, o que objetivava-se nesta questão. Nesse viés, Sampaio (2009) também constatou que alunos de diferentes anos de escolaridade apresentam dificuldades para a compreensão desta noção. Ressaltou, ainda, que a visualização das dimensões de entes geométricos, como é o caso dos segmentos de reta apresentados na questão, apresentam-se como um dificultador para a compreensão dos conjuntos de pontos que estão neles contidos.

4.1.3 Análise da Questão 3

A terceira questão apresentava uma soma de infinitas parcelas obtidas a partir das sucessivas divisões por 2 do número 100, (100 + 50 + 25 + 12,5 + …) e tendo 200 como resultado. É questionado se o resultado apresentado está correto, objetivando investigar a construção da ideia do infinito atual a partir da noção do infinito potencial.

Das respostas obtidas, vinte e três alunos responderam de forma “negativa”, quatro responderam de forma “afirmativa” e quatorze alunos “não responderam”. As justificativas dos alunos que responderam “sim” estão categorizadas no Gráfico 7. Pontua-se que um aluno não justificou a sua resposta.

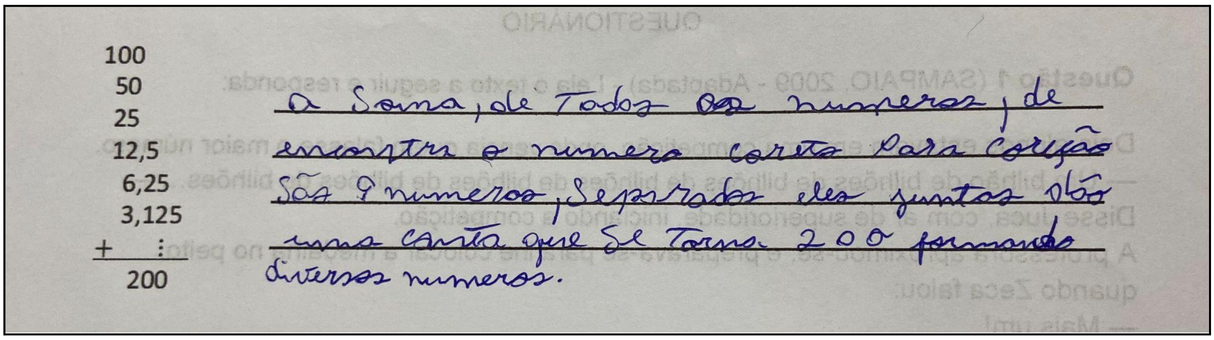
Gráfico 7 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam que a soma é igual a 200



Fonte: Elaboração própria.

A respeito do aluno que justificou tratar-se de uma soma finita, supõe-se que o mesmo não compreendeu as reticências como representação da continuidade da sequência. Possivelmente, este aluno considerou os pontos das reticências como números a serem somados às seis parcelas apresentadas na questão. Desse modo, encontrariam-se os “9 números” citados em sua resposta (Figura 20), que alegou resultar em 200 a soma das mesmas.

Figura 20 - Resposta do aluno que não compreendeu as reticências como a representação da continuidade da sequência

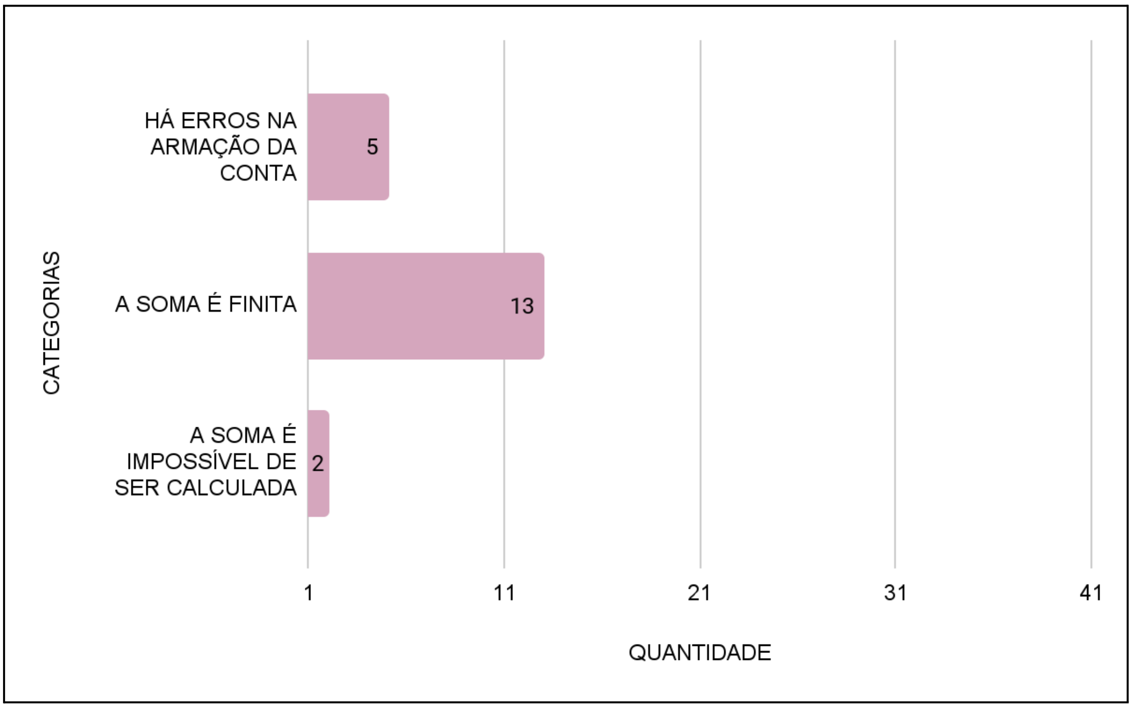


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação às respostas que não foram compreendidas, um aluno justificou que *"o final dos números sempre será zero ou cinco"* e, o outro, respondeu de forma vaga que a questão *"trata de uma lei matemática"*, a qual não pode ser justificada.

O Gráfico 8 apresenta as categorias das justificativas dos alunos que alegaram que a soma não resulta em 200. Evidencia-se que dois alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 8 - Categorias das justificativas dos alunos que responderam que a soma não é igual a 200

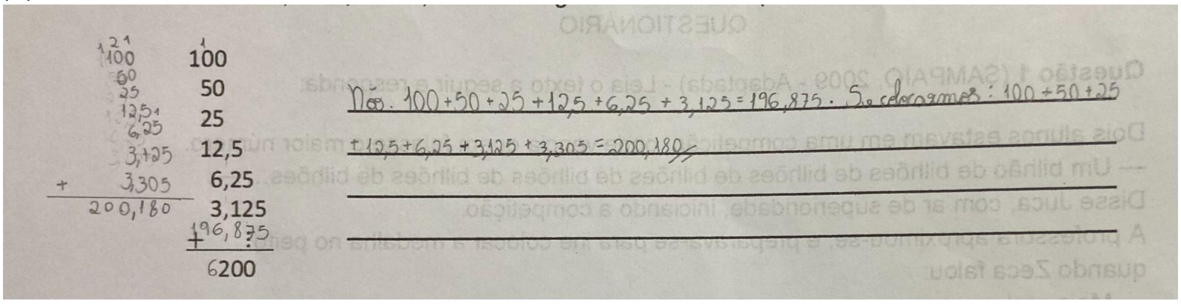


Fonte: Elaboração própria.

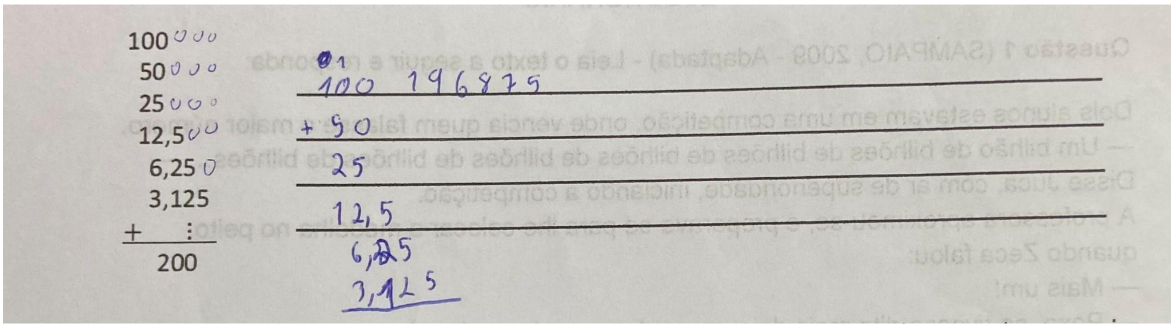
Das justificativas dos treze alunos que não consideraram a soma igual a 200 alegando tratar-se de uma soma finita, foi relatado que o cálculo dos números expostos resulta em um número maior ou menor que 200. Estes, não compreenderam o símbolo das reticências como a representação de um cálculo infinito. Destacam-se na Figura 21 algumas das respostas obtidas.

Figura 21 - Respostas de três alunos (a), (b) e (c) que alegaram que a soma possui finitas parcelas

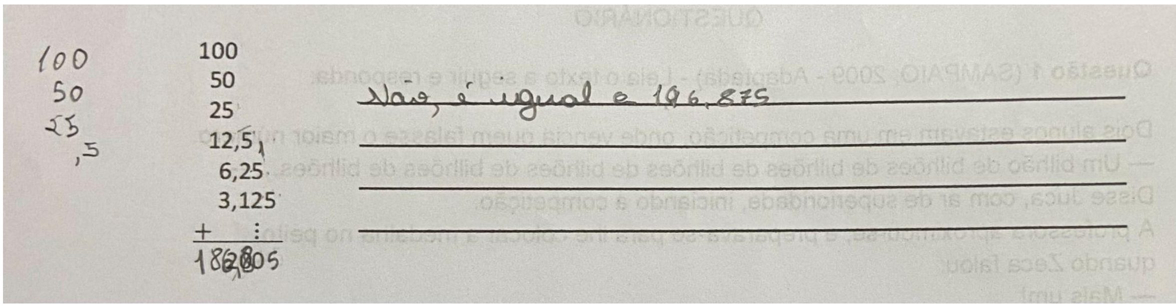
(a)



(b)



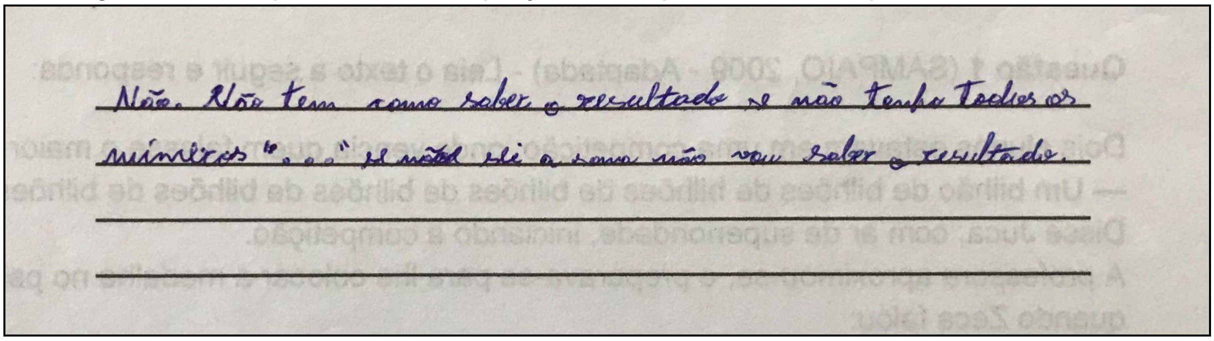
(c)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os dois alunos que justificaram que a soma apresentada na questão seria impossível de ser calculada, consideraram que não seria possível mensurar a quantidade de números a serem somados. Estes, apesar de entenderem a simbologia das reticências como representação de infinitas parcelas, não compreenderam que uma soma infinita pode ter um resultado finito, como também constatado por Sampaio (2009) em sua pesquisa. Destaca-se na Figura 22 a justificativa de um destes alunos.

Figura 22 - Resposta do aluno que justificou que a soma é impossível ser calculada



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pôde ser observado que uma quantidade significativa dos alunos alegou ser finita a soma apresentada na questão. Vale ressaltar que já era esperada a dificuldade por parte dos alunos para a compreensão de que uma soma com infinitas parcelas poderia resultar em um número, visto tratar-se de uma noção não intuitiva e que, possivelmente, não foi estudada anteriormente por estes alunos.

Todavia, considerou-se relevante averiguar a compreensão dos alunos acerca do infinito "em ato", visto que a incompreensão desta noção pode impactar diretamente na aprendizagem de conceitos matemáticos como, por exemplo, as dízimas periódicas e os números irracionais (Lorin, 2018, p. 79).

Vale destacar, ademais, que uma quantidade considerável dos alunos participantes da pesquisa não respondeu à Questão 3, possivelmente por não terem vivenciado anteriormente uma experiência com uma soma infinita.

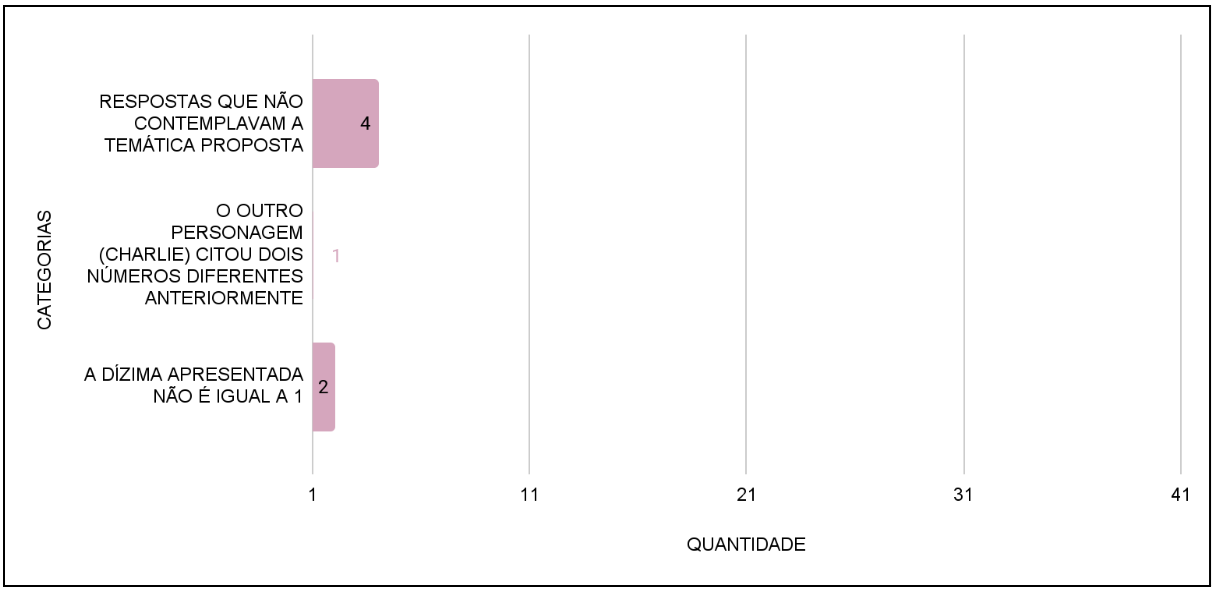
4.1.4 Análise da Questão 4

A Questão 4 apresenta um diálogo entre dois personagens que competem sobre quem é capaz de falar o maior número existente que "começa com zero". Esta, dividida nos itens **a** e **b**, busca verificar, respectivamente, se os alunos compreendem que não existe o maior número real menor do que 1 e se reconhecem que a dízima periódica $0,\overline{9}$ é igual a 1.

O item **a** questiona sobre a existência de um vencedor na competição e, se existisse, quem seria. Das respostas obtidas, vinte e seis alunos responderam de forma "afirmativa", dos quais doze consideraram o "Snoopy como o vencedor", enquanto quatorze consideraram o “Charlie vencedor”. Já oito alunos responderam que “não é possível haver um vencedor” e sete alunos “não responderam ao item”.

As justificativas obtidas pelos alunos que alegaram que o vencedor da competição seria o Snoopy estão categorizadas no Gráfico 9. Pontua-se que cinco alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 9 - Categorias das justificativas das respostas afirmativas obtidas no item **a** (Snoopy vencedor)



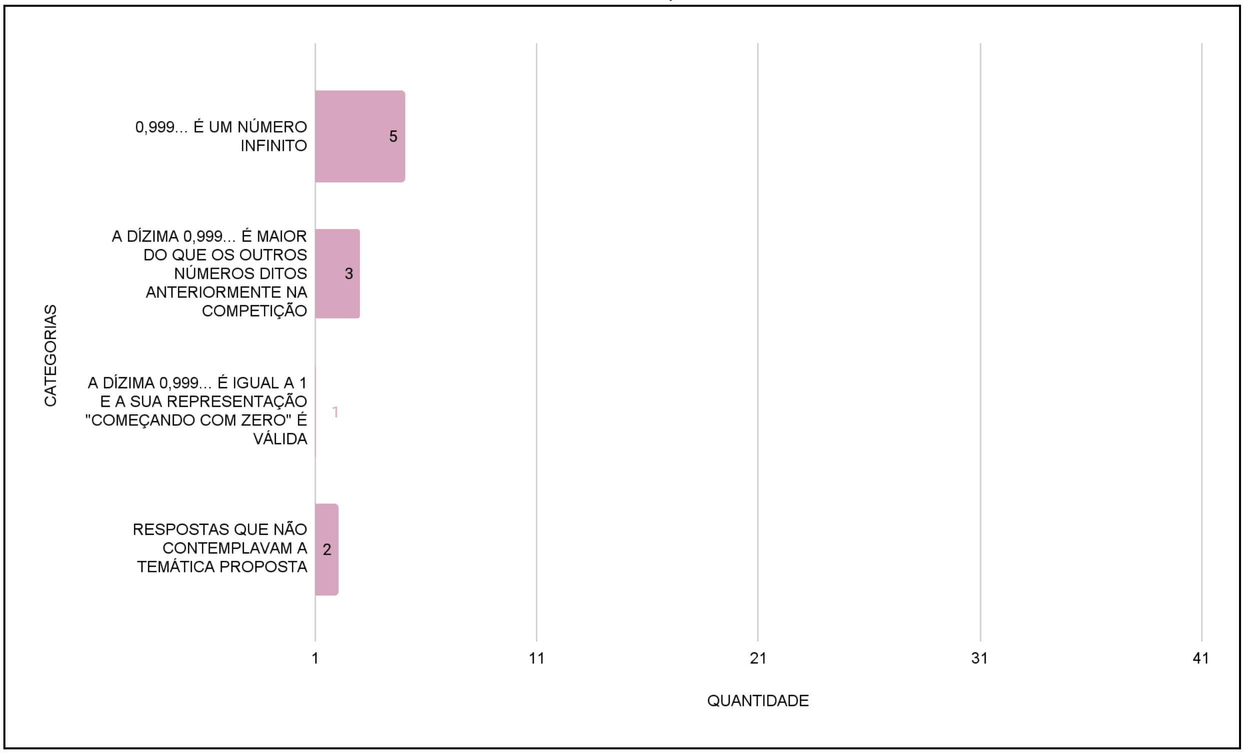
Fonte: Elaboração própria.

Quanto ao aluno que justificou que o personagem Charlie teria citado dois números diferentes quando mencionada a dízima periódica, considera-se que este não compreende a representação da dízima com a barra acima do período, visto que na questão, a dízima foi apresentada em suas diferentes representações (0,999… e $0,\overline{9}$).

Os alunos que justificaram que a dízima apresentada não é igual a um, possivelmente não compreendem que algo infinito pode gerar algo finito, ou seja, um número com infinitas casas decimais pode ser representado como um número inteiro. Nesse viés, Lorin (2018) constatou que há uma resistência por parte da mente humana para aceitar que processos infinitos podem apresentar resultados finitos.

A respeito dos alunos que consideraram o Charlie como vencedor da competição, estão categorizadas no Gráfico 10 as suas justificativas. Ressalta-se que três alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 10 - Categorias das justificativas das respostas afirmativas obtidas no item **a** (Charlie vencedor)



Fonte: Elaboração própria.

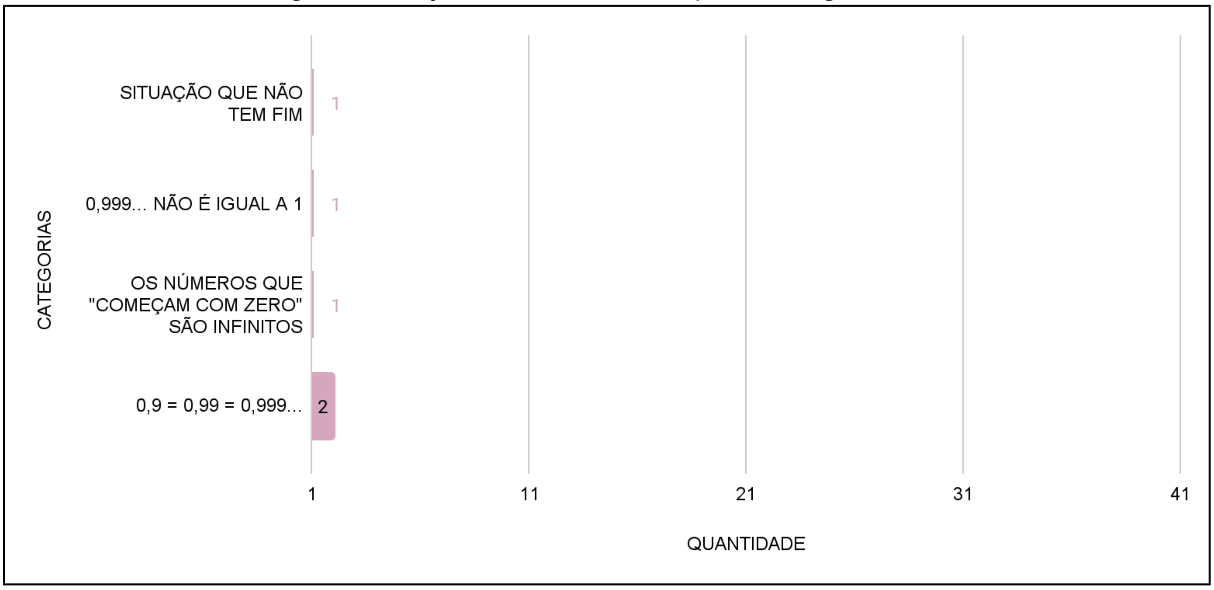
Em relação aos alunos que justificaram que *"0,999… é um número infinito"*, estes possivelmente compreendem as reticências como representação da continuidade dos algarismos da dízima, a qual, citada pelo personagem Charlie, é o maior número que 'começa com zero' existente, justamente por possuir infinitas casas decimais.

A respeito dos três alunos que justificaram que a dízima mencionada por Charlie seria o maior número citado na competição, pôde-se compreender que os mesmos consideraram as reticências como simbologia para a continuidade dos algarismos da dízima, como explicitado na categoria descrita no parágrafo anterior. Contudo, não foi possível perceber se estes alunos entendem a ideia da infinitude dos algarismos da dízima.

O aluno que justificou que a dízima periódica citada é igual ao número 1, alegou que a representação começando com zero (0,999…) dita pelo personagem Charlie é válida e não contraria as regras da competição, o que, para ele, torna o Charlie vencedor. Todavia, diante de sua resposta, não foi possível verificar se este aluno reconhece que a dízima periódica $0,\overline{9}$ é igual a 1, o que buscava-se nesta questão.

Em relação aos alunos que consideraram não haver um vencedor na competição, suas justificativas estão categorizadas no Gráfico 11. Destaca-se que três alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 11 - Categorias das justificativas das respostas negativas obtidas no item **a**



Fonte: Elaboração própria.

Quanto ao aluno que considerou não ser possível existir um vencedor, visto que a competição geraria uma situação sem fim, justificou que cada personagem, em sua vez, poderia aumentar um algarismo em sua resposta. O raciocínio apresentado pelo aluno associa-se à noção do infinito potencial, uma vez que este refere-se à ideia de um processo sem conclusão. Sobre esse fato, Kindel e Frant (2015) afirmam que

> As relações existentes entre o panorama histórico da pesquisa e a análise dos livros didáticos apontam ainda uma considerável apropriação, por parte dos livros didáticos, de abordagens do infinito, ou seja, infinito potencial, como algo processual. Não é de se surpreender, portanto, que os estudantes apresentem essa concepção de infinito como sendo a mais “presente” em seu modo de pensar (Kindel; Frant, 2015, p. 194).

O aluno que justificou que os números que “começam com zero” são infinitos, considerou que as normas da competição ocasionariam uma disputa infinita. Este, respondeu corretamente quanto à impossibilidade de haver um vencedor, tendo em vista que o conjunto dos números que começam com zero é infinito, e cada personagem da competição poderia aumentar um algarismo a cada resposta.

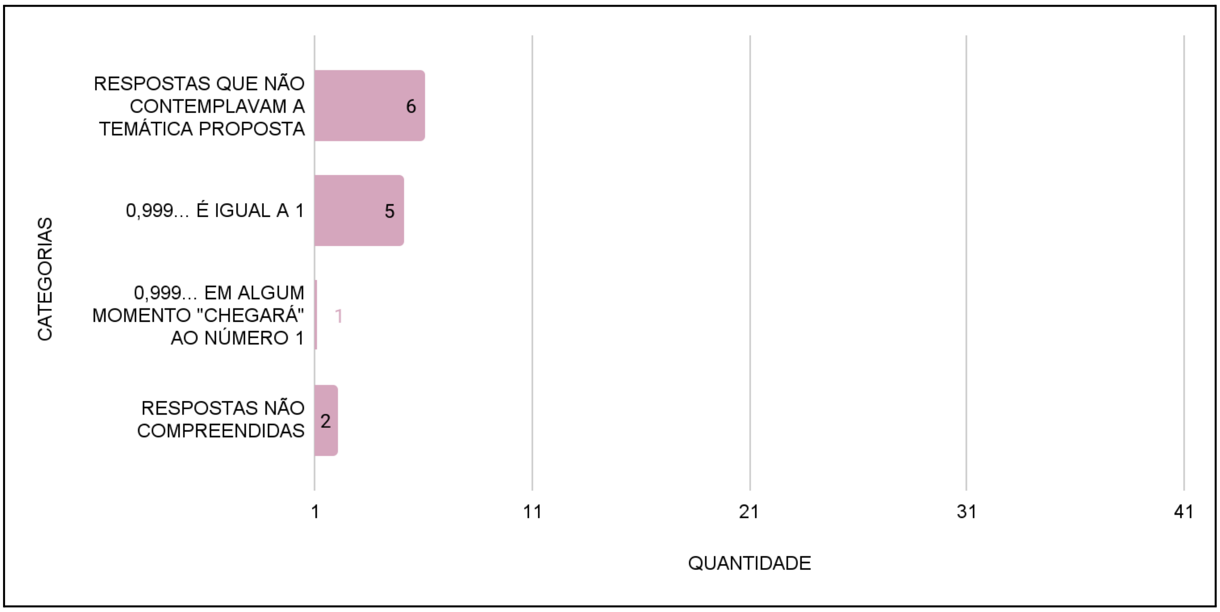
Supõe-se que esse aluno compreende a ideia da infinitude de um conjunto de números, corroborando com a noção do infinito potencial.

Quanto aos alunos que alegaram que a competição não teria um vencedor visto que todos os números mencionados na competição seriam iguais (0,9 = 0,99 = 0,999…), além de não compreenderem que ao acrescentar algarismos “9” ao número 0,9 ele torna-se maior, possivelmente não reconhecem a simbologia de representação de uma dízima periódica. Nesse viés, Lorenzato (2010) afirma que são notórias as dificuldades dos alunos para entender o significado das simbologias próprias da linguagem matemática e, para que sejam aplicadas corretamente, faz-se necessário que sejam melhor estabelecidas e compreendidas.

O item **b** da quarta questão pergunta se é possível considerar que o personagem Snoopy está correto quando o mesmo afirma que a dízima periódica $0,\overline{9}$ é igual a 1. Das respostas obtidas, dezessete alunos responderam de forma “afirmativa”, quinze responderam de forma “negativa” e nove “não responderam”.

As justificativas dos alunos que responderam que o Snoopy estaria correto estão categorizadas no Gráfico 12. Pontua-se que três alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 12 - Categorias das justificativas das respostas dos alunos que acreditam que o Snoopy está correto



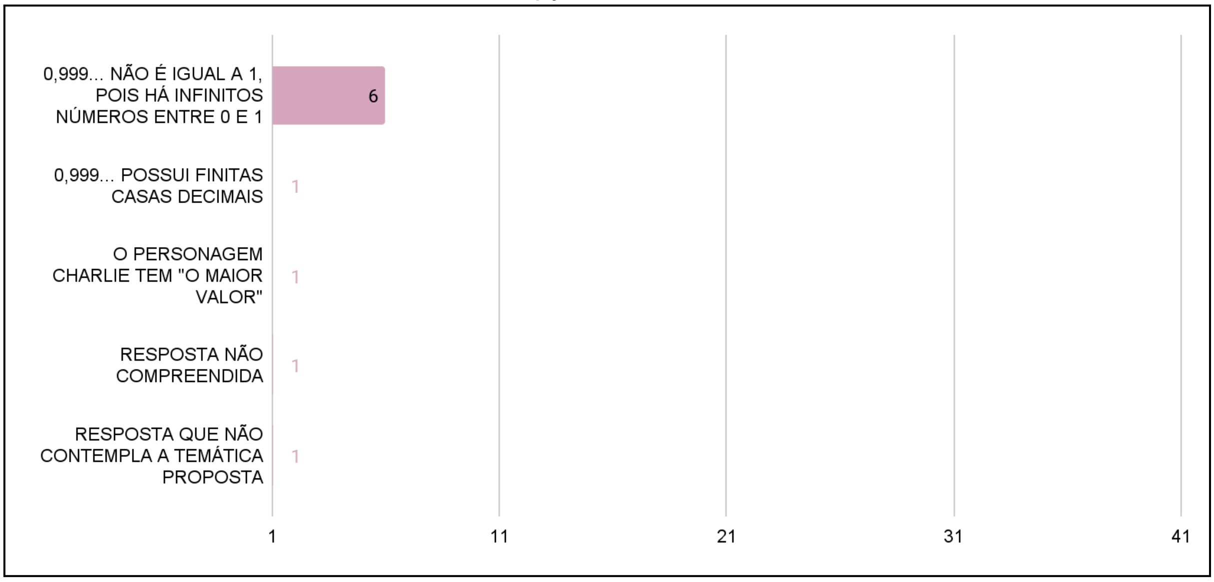
Fonte: Elaboração própria.

Os cinco alunos que justificaram que 0,999… é igual a 1 alegaram que o personagem Charlie contrariou as regras da competição quando respondeu que o maior número que começa com zero é a dízima $0,\overline{9}$, pois a mesma pode ser representada como o número 1. Contudo, fica o questionamento se estes alunos compreendem a ideia do infinito atual, uma vez que em suas justificativas são utilizados argumentos em relação às regras do jogo e não sobre a noção do infinito que perpassa o conteúdo de dízimas periódicas.

Para mais, não foi possível compreender se o aluno que justificou que em algum momento a dízima "chegará ao número 1" entende que um número com infinitas casas decimais pode resultar em um número inteiro. A julgar pelo fato de estar na 1.ª série do Ensino Médio, provavelmente esse aluno ainda não teve contato com somas infinitas, apesar de já conhecer as dízimas periódicas.

Já em relação aos alunos que responderam que o Snoopy não estaria correto, suas justificativas estão categorizadas no Gráfico 13. Evidencia-se que cinco alunos não justificaram as suas respostas.

Gráfico 13 - Categorias das justificativas das respostas dos alunos que acreditam que o Snoopy não está correto



Fonte: Elaboração própria.

A respeito das respostas dos seis alunos que justificaram que há infinitos números entre 0 e 1, não é possível identificar se estes têm o conhecimento de que a dízima 0,999... é igual a 1, embora seus raciocínios estejam corretos e sejam relevantes, uma vez que associam-se à ideia do infinito atual.

Já o aluno que justificou alegando que $0,\overline{9}$ possui finitas casas decimais, possivelmente não compreende o que é uma dízima periódica, pois o mesmo ainda considerou a dízima apresentada como a representação de um valor monetário, alegando faltar *“1 centavo para 1 real”*.

Em relação ao aluno que alegou que o personagem Charlie *“tem o maior valor”*, este certamente compreendeu que a dízima 0,999… é maior que o número 0,999, citado pelo outro personagem. Todavia, não é possível saber se este aluno entende que uma dízima periódica pode representar um número inteiro, neste caso, igual a 1.

A respeito do aluno que se utilizou de uma justificativa a qual não contemplava a temática proposta, alegou que o personagem Snoopy estaria incorreto pois *“tentou trapacear para ganhar do amigo”*.

Quanto à Questão 4, de modo geral, pôde ser observado que um quantitativo significativo dos alunos respondeu incorretamente ao item **a**, considerando que na competição apresentada é possível afirmar que há um vencedor. Diante da análise das respostas obtidas e das justificativas apresentadas, pode-se afirmar que os alunos não compreendem que não existe o maior número real menor do que 1.

Já no item **b**, um número considerável de alunos respondeu corretamente sobre a fala do personagem Snoopy estar correta, quando o mesmo afirma que $0,\overline{9}$ é igual a 1. Contudo, embora grande parte tenha respondido corretamente ao item, conclui-se que não é possível compreender suas percepções quanto à ideia do infinito que perpassa o conteúdo abordado.

Nesse viés, Belmonte e Sierra (2011) afirmam que o conceito de infinito apresentado pelos livros didáticos e pelo currículo escolar, apesar de perpassar de forma evidente uma grande parte das etapas de ensino e de diferentes conteúdos, não é tratado em manuais e tampouco há orientações sobre sua abordagem na Educação Básica.

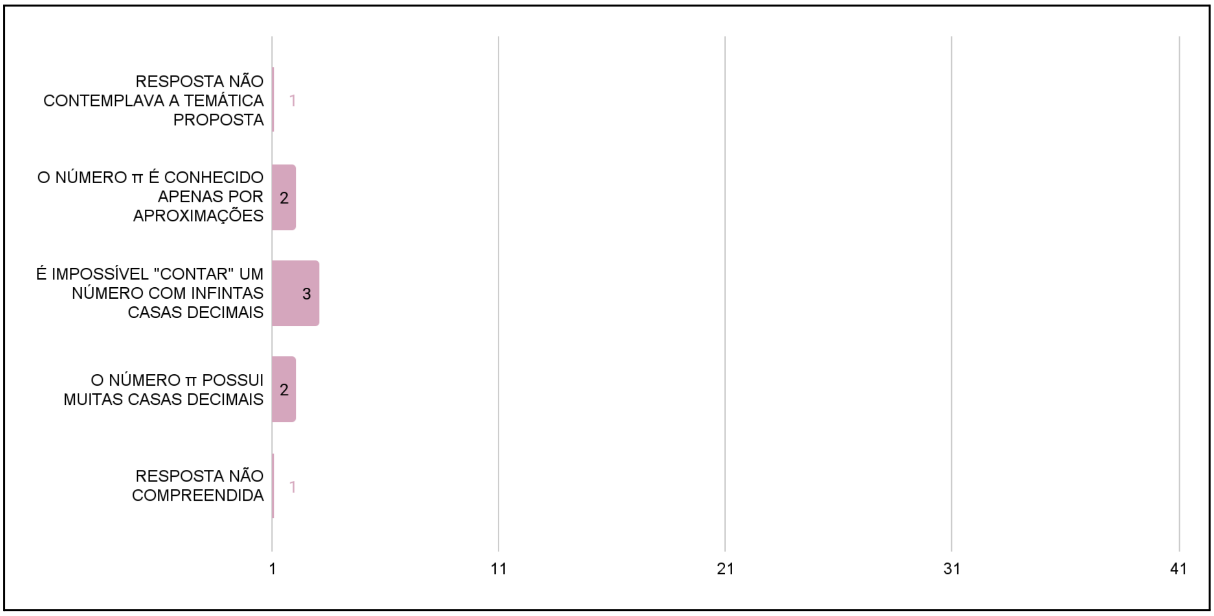
4.1.5 Análise da Questão 5

A quinta questão objetivava identificar se os alunos entendem os números irracionais como números com infinitas casas decimais e parte decimal aperiódica. Dessa forma, são apresentadas informações a respeito do número pi e é perguntado se, na opinião do aluno, todas as casas decimais do número serão conhecidas algum dia. Das respostas obtidas, dezessete alunos responderam de forma “afirmativa”, dez responderam de forma “negativa” e quatorze “não responderam a pergunta”.

Dos alunos que responderam de forma afirmativa sobre a possibilidade de todas as casas decimais serem conhecidas um dia, sete não justificaram suas respostas e dez utilizaram de justificativas vagas, das quais não foi possível interpretar suas compreensões acerca da ideia do infinito, como, por exemplo, *“se os pesquisadores estudarem mais, eles conseguem”*.

O Gráfico 14 apresenta as categorias das justificativas obtidas pelos alunos que responderam que não será possível conhecer todas as casas decimais do número pi algum dia. Destaca-se que um aluno não justificou a sua resposta.

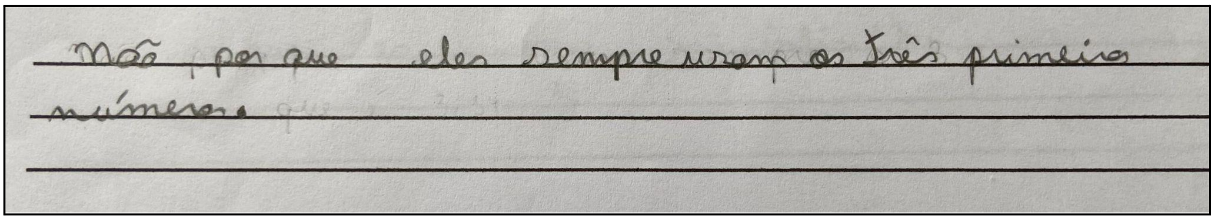
Gráfico 14 - Categorias das justificativas das respostas dos alunos que alegaram que não será possível conhecer todas as casas decimais do número pi



Fonte: Elaboração própria.

A respeito das respostas dos alunos que estão categorizadas em “o número pi é conhecido apenas por aproximações”, esses possivelmente conhecem a forma usual em que o número pi é apresentado, ou seja, como apenas aproximações para os números 3 ou 3,14. A resposta de um desses alunos é destacada na Figura 23.

Figura 23 - Resposta de um dos alunos que relata a forma usual em que o pi é apresentado

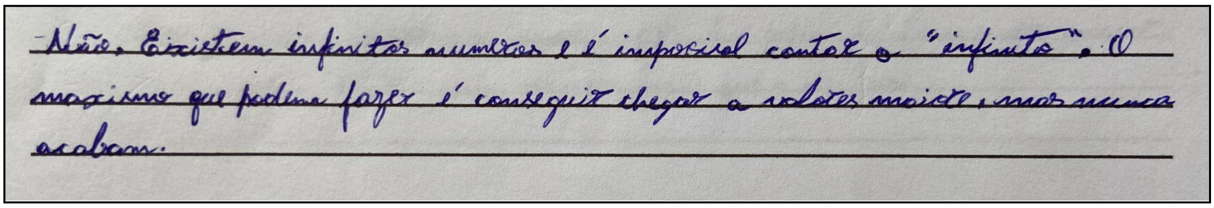


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nessa perspectiva, Sampaio (2009) salienta que é de extrema importância o cuidado de se tratar a diferenciação entre um número e as suas aproximações, visto que alguns alunos tendem a considerar que estes podem ter o mesmo significado.

Já os três alunos que relataram a impossibilidade de se conhecer todas as casas decimais do número pi, alegaram que trata-se de algo infinito e impossível de se contar (Figura 24). Considera-se que esses alunos, possivelmente, compreendem que o número pi possui infinitas casas decimais, uma vez que estes associaram a noção do infinito à ideia de um processo sem fim, o que representa a noção do infinito potencial, a qual intuitivamente é melhor compreendida pelos alunos (Sampaio, 2009).

Figura 24 - Resposta de um dos alunos que afirmou que a parte decimal do número pi é composta por infinitos algarismos


Não. Existem infinitos numeros e é impossivel contar o "infinito". O maximo que poderia fazer é conseguir chegar a valores maiores, mas nunca acabam.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto aos dois alunos que justificaram que o número pi possui muitas casas decimais, não foi possível saber se esses compreendem que o número irracional citado na questão possui infinitas casas decimais, já que, por meio da análise de suas respostas não se tem a certeza do que a palavra "muitas" significa para esses alunos.

Ainda, em relação à resposta não compreendida, o aluno relatou em sua justificativa que *"nem todos os números são compatíveis"*.

Diante da análise dos resultados obtidos na Questão 5, pôde ser observado que grande parte dos alunos não respondeu a pergunta e, dos que responderam, a maioria justificou incorretamente suas respostas. Desse modo, constatou-se que, possivelmente, os estudantes não conhecem o número pi, tampouco entendem a infinitude de seus algarismos, visto terem alegado que um dia, provavelmente, todas as suas casas decimais serão conhecidas.

A construção do conceito de número irracional pode ser um processo de difícil compreensão. Em uma pesquisa realizada com alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental, Kindel e Frant (2015) perceberam que os alunos consideravam o conjunto dos números reais desnecessário, visto que para eles os números se resumem nos racionais com a inserção de poucos exemplos de números irracionais,

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π. Ademais, Igliori e Silva (1998 *apud* Sampaio, 2009) ressaltam em sua pesquisa os conflitos que perduraram por séculos para que os números reais fossem bem estabelecidos na sociedade, tendo em vista que estes possuem características intrínsecas que geraram dificuldades de ordem filosófica para o seu entendimento.

Ainda a respeito dos números irracionais, Sabel e Santos (2022) afirmam que é notório que os estudantes enfrentam dificuldades para compreender a infinitude de suas casas decimais, já que é necessário romper com conhecimentos superficiais a respeito das características destes números. Contudo, os mesmos autores defendem que esse fator não deve ser utilizado como uma justificativa para a não abordagem desses conceitos durante os processos educacionais. Com vistas ao entendimento da noção do infinito que perpassa os números irracionais, sua abordagem deve ser feita de modo a viabilizar que seus significados sejam construídos mais organicamente (Sabel; Santos, 2022).

4.1.6 Análise da Questão 6

A sexta questão, dividida em quatro itens, visava investigar a concepção dos alunos acerca do infinito em um espaço limitado, analisar suas compreensões a respeito da infinidade de pontos existentes em uma reta e verificar suas percepções sobre o fato de que uma dízima é maior do que um número com finitas casas decimais. Para isso, os alunos assinalaram como verdadeiras ou falsas cada uma das afirmações apresentadas. As respostas obtidas estão contabilizadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Quantitativo das respostas obtidas na Questão 6

	V	F	NÃO RESPONDEU
a)	18	21	2
b)	24	15	2
c)	20	19	2
d)	25	14	2

Fonte: Elaboração própria.

Pôde ser observado que a maioria dos alunos respondeu aos itens da questão, pois trinta e nove responderam e apenas dois não responderam.

Das respostas obtidas no item **a**, foi percebido que a maioria dos alunos respondeu de forma incorreta, visto que consideraram a afirmativa falsa. Ressalta-se que o item **a** da Questão 2, o qual também tratava da infinidade de pontos de um segmento, obteve um quantitativo significativo de respostas incorretas, o que reafirma a dificuldade apresentada pelos alunos neste tópico.

No item **b**, a maior parte dos alunos respondeu de forma correta, afirmando que entre dois pontos de uma reta sempre existirá outro. Todavia, não é possível saber se estes alunos compreendem o conceito de fato, visto tratar-se de uma questão fechada, da qual não foi solicitada justificativa.

Já no item **c,** o qual afirmava que toda reta possui um conjunto infinito de pontos, a maioria dos alunos respondeu corretamente. Diante disso e da análise das respostas obtidas no item **a**, observou-se a dificuldade dos alunos de compreender que um segmento de reta, assim como uma reta, possui um conjunto infinito de pontos, o que evidencia a notória não aceitação do infinito apresentar-se também em um espaço limitado (infinito atual).

Por último, o item **d** da questão afirmava que $0,0\overline{9} < 0,09999999999$, o que foi considerado pela maioria dos respondentes como uma verdade. Novamente, por tratar-se de uma questão fechada, não pode-se traduzir o raciocínio destes alunos. Contudo, em consonância com as respostas obtidas no item **b** da Questão 4, supõe-se que os alunos não reconhecem a simbologia da dízima periódica com a barra acima do período, uma vez que afirmaram que o número $0,09999999999$ é maior, possivelmente por apresentar “mais algarismos” em sua parte não inteira.

Diante da análise das respostas obtidas na Questão 6, foram reafirmadas dificuldades por parte dos alunos, as quais também puderam ser observadas nas demais questões.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o seu surgimento, a ideia do infinito apresenta-se como um conceito abstrato e de difícil compreensão, tendo em vista os limites da imaginação humana para o entendimento de um conceito sem exemplos reais no mundo físico. Por séculos, muitos foram os questionamentos sem respostas que impulsionaram discussões acerca da noção de infinitude.

Nesse sentido, a motivação para o desenvolvimento da presente pesquisa baseou-se na curiosidade das autoras para o estudo da ideia do infinito, tal como todo o seu percurso histórico. Além disso, após a participação das pesquisadoras em um minicurso sobre a temática, intensificou-se ainda mais o desejo para a realização deste trabalho.

Conforme previsto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), a ideia do infinito pode ser observada implicitamente em diversos conteúdos da Educação Básica. Dentre estes, as dízimas periódicas e os números irracionais.

A noção do infinito apresenta-se como um conceito importante e pertinente para o entendimento de conceitos matemáticos e lógicos. Contudo, tendo em vista seu nível de abstração e complexidade, a ideia de infinitude é, por vezes, abordada superficialmente. Nessa perspectiva, foi traçada como questão norteadora para a presente pesquisa: Quais as interpretações dos alunos da primeira série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais?

Para responder a questão de pesquisa, foi aplicado o questionário elaborado e dividido em seis questões para alunos da primeira série do Ensino Médio. Diante das respostas obtidas, considera-se que foram atingidos os objetivos específicos delineados para o alcance do objetivo geral traçado para o presente trabalho, o qual previa investigar as interpretações dos alunos da primeira série do Ensino Médio sobre a noção do infinito que perpassa os conteúdos de dízimas periódicas e números irracionais.

Puderam ser identificados os obstáculos epistemológicos presentes no estudo do conceito de infinito, além de ter sido analisada a relação entre a noção de números com representação decimal infinita e os conceitos de infinito potencial e atual e, ainda, foram investigadas as concepções dos alunos a respeito de dízimas periódicas e números irracionais.

Para a fundamentação da análise das respostas obtidas, foi estabelecido como referencial a teoria dos obstáculos epistemológicos, com vistas à busca da identificação de possíveis erros e incompreensões quando trabalhados conteúdos que perpassam a noção do infinito. Para mais, a pesquisa esteve fundamentada no percurso histórico da ideia do infinito, a fim de compreender como o surgimento e desenvolvimento de um conceito pode influenciar o seu entendimento.

Como resposta ao primeiro objetivo específico, que pretendia identificar os obstáculos epistemológicos que podem surgir no estudo do conceito de infinito, tem-se que a análise das respostas apresentadas pelo público-alvo, mostrou que um quantitativo significativo dos alunos participantes entende mais facilmente a ideia do infinito potencial, visto que o infinito atual trata da ideia do infinito em um espaço limitado, o que torna-se de difícil compreensão. Também foram percebidas muitas dificuldades dos alunos em relação à comparação de quantidades infinitas.

Em relação à análise da relação entre a noção de números com representação decimal infinita e os conceitos de infinito potencial e atual, foi observada uma notória dificuldade para a interpretação das simbologias utilizadas na representação das dízimas periódicas, como as reticências e a barra acima do número para a indicação do período. Constatou-se, também, uma dificuldade por parte dos alunos para a compreensão das reticências como simbologia da infinitude dos algarismos de números irracionais.

Além disso, salienta-se a percepção de que a temática abordada no questionário apresentou-se como uma novidade para os alunos, que demonstraram esforço para desenvolverem seus raciocínios na tentativa de justificarem suas reflexões. Sendo assim, o último objetivo específico que era investigar as concepções dos alunos a respeito de dízimas periódicas e números irracionais, foi alcançado com dificuldade visto o desconhecimento por parte dos alunos dos temas citados.

Como mencionado quando descrito o momento da aplicação do questionário para as três turmas participantes da pesquisa, enfatiza-se que em decorrência da interferência direta da professora regente, algumas das respostas foram desconsideradas para a análise, uma vez que a profissional as induziu equivocadamente em seu raciocínio sobre algumas questões. Tal acontecimento evidenciou que a noção do infinito por vezes não é bem compreendida também pelos professores.

Ainda, destaca-se a importante participação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática no teste exploratório realizado, que propiciou a observação de que estes também apresentam dificuldades para o entendimento da temática abordada e demonstraram-se veementemente interessados pela mesma.

Assim, para pesquisas futuras, sugere-se uma investigação das interpretações e abordagens realizadas por docentes quando trabalhados conteúdos que perpassem a ideia do infinito, não somente na Educação Básica, mas também em cursos de Ensino Superior.

Ademais, apesar do instrumento para a coleta de dados utilizado na presente pesquisa ter atendido eficazmente a proposta aqui estabelecida, sugere-se para possíveis pesquisas futuras, a entrevista como instrumento para a obtenção de dados, uma vez que esta pode propiciar diálogos e falas relevantes, que por vezes não são expressas em registros escritos.

A elaboração do presente trabalho contribuiu significativamente para os saberes acadêmicos das autoras. Nesta experiência, puderam ser trabalhados e discutidos os aspectos da estruturação de uma pesquisa de modo enriquecedor, bem como a forma pela qual uma escrita acadêmica se apresenta e o conhecimento dos elementos necessários para o desenvolvimento de uma investigação.

Ressalta-se, além do exposto, que a realização desta pesquisa proporcionou às autoras o estudo e o entendimento aprofundado das bases teóricas aqui fundamentadas: a teoria dos obstáculos epistemológicos e a história do infinito.

Ainda, a proposta de investigação estabelecida foi crucial para o desenvolvimento da capacidade de criticidade das autoras, uma vez que a análise dos dados coletados na presente pesquisa foi realizada de forma cautelosa e criteriosa, tendo em vista as particularidades de cada dado coletado. Por isso, o processo de categorização das respostas analisadas também foi de extrema importância, visto que proporcionou reflexões acerca das diferentes interpretações sobre a noção do infinito.

Além disso, o desenvolvimento desta pesquisa propiciou às autoras um encantamento ainda maior pela temática trabalhada.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito**: um obstáculo no estudo da matemática. 2005. 112 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11322/1/dissertacao_flavio_luiz_amadei.pdf. Acesso em: 20 set. 2022.

BACHELARD, Gaston. **A Epistemologia**. Tradução: Fátima Lourenço Godino e Mário Carmino Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2006.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução: Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 05 jul. 2022.

BELMONTE, José Luiz; SIERRA, Modesto. Modelos Intuitivos del Infinito y Patrones de Evolución Nivelar. **Relime**, México, v. 14, n. 2, p. 139-171, jul. 2011. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33519238002. Acesso em: 07 jul. 2023.

BROETTO, Geraldo Claudio; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira. O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, Rio Claro (São Paulo), v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/MtpgMFQwZXKxQVWffL9hDCG/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 10 ago. 2022

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2017.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

GONÇALVES, Ana Paula. **Perguntas e histórias sobre o infinito matemático**: o que os estudantes da Educação Básica desejam saber acerca da história cultural do infinito? 2019. 125 p. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em:

http://146.164.248.81/hcte/docs/dissertacoes/2019/ana_paula_goncalves.pdf. Acesso em: 15 set. 2022.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. **Matemática Universitária**, n. 47, p. 16-24, 2010. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47_Artigo02.pdf. Acesso em: 14 jun. 2023.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008. p. 113 - 140.

KINDEL, Dora Soraia; FRANT, Janete Bolite (org.). **Diálogos de alunos sobre infinito.** 1. ed. Curitiba: Editora Appris, 2015.

LOPES, Silvio Joaquim. **A noção de infinito em livros didáticos do Ensino Básico**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10896/1/Silvio%20Joaquim%20Lopes.pdf. Acesso em: 15 set. 2022.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LORIN, João Henrique. **Relações entre teoremas-em-ação e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito**. 2018. 182 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018. Disponível em: https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/LORIN-Joao-Henrique.pdf. Acesso em: 15 set. 2022.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito**: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SABEL, Eduardo; SANTOS, Cristiane Aparecida dos. Obstáculo Epistemológico e Educação Matemática: refletindo sobre o conceito no ensino da matemática. *In*: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2022. **Anais** [...]. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2022. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/366020130_Obstaculo_Epistemologico_e_Educacao_Matematica_refletindo_sobre_o_conceito_no_ensino_da_matematica. Acesso em: 30 ago. 2023.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito uma história a contar. **Millenium-Journal of Education, Technologies, and Health**, n. 34, p. 205-222, 2016. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/millenium/article/view/8368. Acesso em: 13 jul. 2022.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **Bolema**, São Paulo, v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. *In:* GERHADT, Tatiana Angel; SILVEIRA, Denise Tolfo. (org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Unidade 2, p. 31-34. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 05 set. 2022.

STEWART, James. **Cálculo**, volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VERGNAUD, Gerard. Teoria dos campos conceituais. *In*: Nasser, L. (Ed.). **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, p. 1-26, 1993.

VIEIRA, Sonia. **Como elaborar questionários**. São Paulo: Atlas, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Instrumento de coleta de dados elaborado

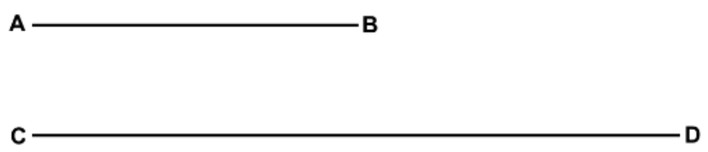
QUESTIONÁRIO

Questão 1 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Leia o texto a seguir e responda:

Dois alunos estavam em uma competição, onde vencia quem falasse o maior número.
— Um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões…
— Disse Juca, com ar de superioridade, iniciando a competição.
A professora aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Zeca falou:
— Mais um!
— Poxa, se tivesse dito mais dois, eu ganhava. — lamentou Juca.

Você acha que pode haver um vencedor nessa competição? Justifique.

Questão 2 (LORIN, 2018) - Considere os dois segmentos de reta AB e CD, representados abaixo, e responda às questões:



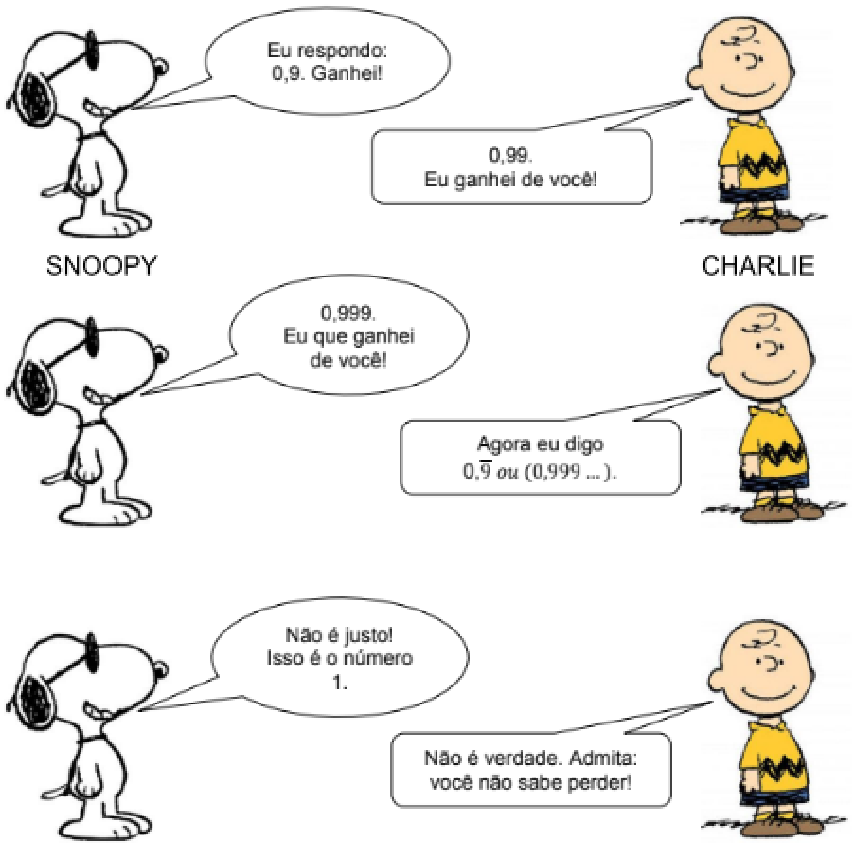
a) Considerando que o segmento AB é constituído por pontos, para você, a quantidade de pontos em AB é finita (porém muito grande) ou é infinita? Justifique.

b) Se tivesse que comparar a quantidade de pontos do segmento AB com a do segmento CD, você concluiria que CD possui mais pontos que AB? Justifique.

Questão 3 (SAMPAIO, 2009 - Adaptada) - Podemos considerar que a soma 100 + 50 + 25 + + 12,5 + 6,25 + 3,125 + … é igual a 200? Justifique.

$$\begin{array}{r l} & 100 \\ & 50 \\ & 25 \\ & 12{,}5 \\ & 6{,}25 \\ & 3{,}125 \\ + & \vdots \\ \hline & 200 \end{array}$$

Questão 4 (LORIN, 2018) - Dado o desafio "vence quem é capaz de encontrar o maior número que 'começa com zero'", considere o seguinte diálogo e responda os itens a seguir:



a) Na sua opinião, existe um vencedor? Se sim, quem seria? Justifique.

b) Você considera que o Snoopy está correto? Justifique.

Questão 5. Definida como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, a constante π é um número irracional. A grande evolução no cálculo do seu valor aconteceu a partir do momento em que o computador entrou em cena. Sobre isso, leia o trecho a seguir e responda.

Recentemente, pesquisadores anunciaram ter quebrado um novo recorde de precisão no cálculo de pi, alcançando 62,8 trilhões de dígitos. A descoberta, feita com um supercomputador, levou 108 dias e nove horas, bateu o recorde mundial anterior de 50 trilhões de casas decimais, além de ter sido calculada 3,5 vezes mais rápido.

Fonte: IMPA, 2023.

Você acha que todas as casas decimais do número pi serão conhecidas algum dia? Justifique.

____

____

____

____

Questão 6. Dadas as afirmações a seguir, classifique-as em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) (   ) Todo segmento de reta possui um conjunto infinito de pontos.
b) (   ) Entre dois pontos de uma reta sempre existe outro.
c) (   ) Toda reta possui um conjunto infinito de pontos.
d) (   ) $0,0\overline{9} < 0,09999999999$.

APÊNDICE B - Gabarito comentado do instrumento de coleta de dados elaborado

GABARITO

Questão 1

Não. Tendo em vista que o conjunto dos números naturais é infinito, sempre será possível somar 1 ao número dito anteriormente. Essa é uma característica do conjunto dos números naturais, no qual todo elemento possui um sucessor, que é obtido adicionando-se uma unidade ao referido elemento.

Questão 2

a) Infinita, pois um segmento de reta é formado por infinitos pontos. É possível demonstrar que existe uma bijeção entre os pontos de uma reta e os pontos de um segmento de reta qualquer.

b) Não. Ambos possuem infinitos pontos. É possível demonstrar que quaisquer dois segmentos possuem o mesmo número de pontos, construindo uma bijeção entre eles por meio de uma função de primeiro grau.

Questão 3

Sim, pois a soma de infinitas parcelas pode resultar em um número. Esse resultado pode ser demonstrado por meio da teoria dos limites. Um bom exemplo é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, chamada de série geométrica. Quando a razão da progressão é um número entre -1 e 1, pode-se efetuar a soma de seus infinitos termos e tem-se, inclusive, uma forma de obter o resultado.

Questão 4

a) Não, pois não existe o maior número que "começa com 0", já que há infinitos números entre o 0 e o 1. Isso pode ser visualizado considerando, por exemplo, o intervalo entre $0,9$ e 1. O número $0,95$ é o ponto médio desse intervalo, e é menor do que 1. Agora, considere o intervalo entre $0,95$ e 1. O ponto médio desse novo intervalo é $0,975$, também menor do que 1. Considerando dessa vez o intervalo entre $0,975$ e 1, tomemos seu ponto médio: $0,9875$. Também é menor do que 1. Continuando esse processo indefinidamente, sempre seremos capazes de definir um intervalo e calcular seu ponto médio, que por sua vez será sempre menor do que 1.

b) Sim, pois $0,999...$ é igual a 1. Isso pode ser demonstrado usando a técnica de obtenção da fração geratriz de uma dízima. Seja $x = 0,999...$. Logo, $10x = 0,999...$. Subtraindo x de $10x$, teremos $10x - x = 9,999... - 0,999...$. Assim, $9x = 9$, ou seja, $x = 1$. Como $x = 0,999...$ e $x = 1$, chega-se a $0,999... = 1$.

Questão 5

Não. Porque π possui infinitas casas decimais e não possui período, portanto será impossível conhecer todas algum dia. Essa é uma característica dos números irracionais, que não são quocientes de números inteiros. Todos os números irracionais possuem representação decimal infinita e não periódica.

Questão 6

a) V
b) V
c) V
d) F