

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**  
**CAMPUS CAMPOS CENTRO**  
**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**LORENA PESSANHA DE SOUZA OLIVEIRA**  
**SARA DE SOUZA CARVALHO**

**FATORAÇÃO ALGÉBRICA: uma proposta de intervenção didática a partir da  
investigação sobre as dificuldades de alunos do primeiro ano do Ensino Médio**

**Campos dos Goytacazes/ RJ**

Setembro – 2023.1

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**  
**CAMPUS CAMPOS CENTRO**  
**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**LORENA PESSANHA DE SOUZA OLIVEIRA**  
**SARA DE SOUZA CARVALHO**

**FATORAÇÃO ALGÉBRICA: uma proposta de intervenção didática a partir da  
investigação sobre as dificuldades de alunos do primeiro ano do Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos  
Centro, como requisito parcial para conclusão do  
Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes/RJ

Setembro – 2023.1

### PÁGINA DA FICHA CATALOGRÁFICA

OBS: Esta página não é numerada, mas é contada.

A Ficha catalográfica fica posicionada no verso, abaixo da metade inferior da folha de rosto (a página anterior). E fica contida num retângulo de aproximadamente 12,5 x 7,5 cm  
Somente após a defesa, com a versão final corrigida e impressa.



LORENA PESSANHA DE SOUZA OLIVEIRA  
SARA DE SOUZA CARVALHO

FATORAÇÃO ALGÉBRICA: uma proposta de intervenção didática a partir da  
investigação sobre as dificuldades de alunos do primeiro ano do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos  
Centro, como requisito parcial para conclusão do  
Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 05 de setembro de 2023.

Banca Examinadora:

---

Paula Eveline da Silva dos Santos (Examinadora)  
Mestre em Educação Matemática/UENF  
IFFluminense *Campus* Campos Centro

---

Viviane Stellet Alecrin (Examinadora)  
Mestre em Educação Matemática/USS  
IFFluminense *Campus* Campos Centro

---

Carla Antunes Fontes (Orientadora)  
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ  
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Eu, Sara, gostaria de dedicar este trabalho ao meu avô Jorge Batista Carvalho. A pessoa que mais se encantava por saber que eu estudava no IFF. Você sempre estará presente no meu coração.

## **AGRADECIMENTOS (LORENA)**

Primeiramente, agradeço a Deus por ser meu refúgio e meu guia. Por me iluminar, proteger e me ajudar a superar cada dificuldade.

Agradeço aos meus pais por serem a minha base e a minha fortaleza. Agradeço por não medirem esforços para que eu tivesse uma educação de qualidade e por toda ajuda psicológica. Sou grata por estarem ao meu lado em cada momento e, em especial, durante a realização dessa pesquisa.

Agradeço à minha dupla, Sara, por ser tão parceira e inspiradora. Obrigada por compartilhar esse momento tão importante para nossa trajetória. Obrigada por toda disposição, dedicação, risadas e entrega.

À nossa orientadora, professora Carla Antunes Fontes, que com tanta maestria nos encorajou. Obrigada por toda troca, conselho e compreensão. Obrigada, também, por ser inspiração e admiração na nossa vida acadêmica e pessoal.

À professora Jhenyfer Pessanha pela disponibilidade e pela prontidão para realizarmos a aplicação da nossa sequência didática.

Às professoras Paula Eveline e Viviane Stellet por aceitarem o nosso convite para compor a banca examinadora neste momento tão importante para nós. Sou grata, também, pelas contribuições durante toda minha formação docente.

Agradeço também aos meus amigos da faculdade, que durante essa caminhada sempre se fizeram presentes. Obrigada pelas risadas, pelos trabalhos em grupos e pela força nos momentos mais difíceis.

Sou extremamente grata a esta instituição e a todos os meus professores.

E por fim, agradeço ao Alexandre, por ser meu alicerce e meu maior incentivador. Obrigada pela paciência e pelo companheirismo diariamente.

Muito obrigada a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão deste trabalho. Citá-los aqui seria impossível.

## **AGRADECIMENTOS (SARA)**

Agradeço a Deus primeiramente, por ter me dado forças até aqui e nunca ter me deixado desistir diante de todas as dificuldades.

Agradeço aos meus pais e meus irmãos que sempre me apoiaram nessa minha trajetória da faculdade, principalmente da minha vida. Passei por problemas de saúde, mas foi o apoio de todos eles que me fez permanecer firme e hoje estar aqui concluindo esta etapa importante da minha vida.

Um agradecimento muito especial vai para minha dupla, Lorena, sem ela não seria o mesmo realizar este trabalho. Sempre enfrentei dificuldades em fazer trabalhos em grupo, mas não conseguiria me imaginar fazendo este trabalho sem ela. Me ensinou muito, me deu muito apoio, inspiração, forças e ajudou com que esta pesquisa fosse feita da forma mais leve e divertida possível.

Gostaria de expressar minha gratidão à nossa orientadora, a professora Carla Antunes Fontes, que tem sido minha fonte de inspiração desde a primeira aula que assisti ministrada por ela. Ela nos ofereceu um apoio inestimável ao longo de toda a trajetória da nossa pesquisa. Hoje, com total convicção, posso afirmar que escolhê-la como nossa orientadora foi a melhor decisão que poderíamos ter tomado.

Agradeço às professoras Paula Eveline e Viviane Stellet, que aceitaram o convite para participar da nossa banca examinadora. Dando um agradecimento especial à professora Paula, que é uma das minhas maiores inspirações dentro da instituição.

Não poderia deixar de agradecer à Atlética IFFÊNIX, que me acolheu como uma família dentro e fora da faculdade. Toda minha trajetória durante a graduação ganhou muito significado graças a ela.

Aos meus amigos dentro e fora da faculdade, deixo meus agradecimentos, pois sempre me deram muito apoio e foram como uma família para mim.

Agradeço também ao Instituto Federal Fluminense, que me possibilitou muitas oportunidades dentro e fora do ambiente institucional, além de todos os meus professores.

“A álgebra é apenas geometria escrita e a geometria só é a álgebra figurada.”  
(Sophie Germain)



## RESUMO

É consenso entre os pesquisadores em Educação Matemática as dificuldades existentes no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra ao longo da Educação Básica. O conteúdo de fatoração algébrica, apesar de ministrado nos anos finais do Ensino Fundamental, tem repercussões nas séries subsequentes, devido à sua aplicabilidade em outros assuntos. Este trabalho tem por objetivo investigar as possíveis contribuições de uma sequência didática, elaborada a partir do levantamento das dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro, para minimizar tais dificuldades. Para alcançar tal objetivo, estruturou-se uma pesquisa de caráter qualitativo, do tipo intervenção pedagógica, cujos instrumentos de coleta de dados foram a observação ao longo da aplicação da sequência proposta e as respostas a uma lista de exercícios, resolvida pelos alunos ao final dos encontros. A fim de realizar o levantamento das dificuldades supracitadas, foi idealizado um teste diagnóstico, aplicado a todos os alunos do primeiro ano do Ensino Médio da instituição, no ano letivo de 2022. A partir da análise dos erros cometidos, elaborou-se a sequência didática, tendo como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Levou-se também em consideração certo estado de fragilidade emocional demonstrado pelos alunos, devido ao período pós pandêmico em que se encontravam. Assim, as atividades propostas procuravam partir de assuntos já dominados por eles, reafirmando sua capacidade de compreender novos conceitos. A aplicação da proposta contemplou parte do público alvo, no ano letivo de 2023, e revelou-se bastante adequada às demandas dos participantes. Por meio dos instrumentos de coleta de dados, foi possível perceber que o uso da representação geométrica dos casos de fatoração algébrica permitiu melhor compreensão de sua representação algébrica e expandiu os horizontes dos participantes no que diz respeito ao seu significado.

Palavras-chave: Álgebra. Fatoração algébrica. Registros de representação semiótica.

## ABSTRACT

It is common sense among researchers in Mathematics Education the existing difficulties in the process of teaching and learning Algebra throughout Basic Education. The content of algebraic factoring, despite being taught in the final years of elementary school, has repercussions in subsequent grades, due to its applicability to other subjects. This work aims to investigate the possible contributions of a didactic sequence, elaborated from the survey of the difficulties in algebraic factoring of the students of the first year of the High School of the IFF Campus Campos Centro, to minimize such difficulties. To achieve this goal, a qualitative research was structured, of the pedagogical intervention type, whose data collection instruments were the observation throughout the application of the proposed sequence and the responses to a list of exercises, solved by the students at the end of the meetings. In order to carry out a survey of the aforementioned difficulties, a diagnostic test was devised, applied to all students in the first year of high school at the institution, in the academic year of 2022. After the analysis of the errors committed, the didactic sequence was elaborated, based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers. A certain state of emotional guard demonstrated by the students was also taken into account, due to the post-pandemic period in which they found themselves. Thus, the proposed activities sought to start from subjects already mastered by them, affirming their ability to understand new concepts. The application of the proposal included part of the target audience, in the 2023 school year, and proved to be quite adequate to the demands of the participants. Through the data collection instruments, it was possible to perceive that the use of geometric representation of the cases of algebraic factorization allowed a better understanding of its algebraic representation and expanded the horizons of the participants with regard to its meaning.

Keywords: Algebra. Algebraic factorization. Semiotic representation registers.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fatoração de polinômios .....	17
Figura 2 – Fatoração de polinômios (segunda parte) .....	18
Figura 3 – Resolução de equações completas utilizando fatoração .....	19
Figura 4 – Resolução de equações utilizando completamento de quadrados .....	20
Figura 5 – Exemplo 1 de tratamento e conversão .....	25
Figura 6 – Exemplo 2 de tratamento e conversão .....	26
Figura 7 – Questões do teste diagnóstico .....	34
Figura 8 – Habilidades da BNCC de Álgebra para o 8º. ano .....	43
Figura 9 – Habilidades da BNCC de Álgebra para o 9º. ano .....	43
Figura 10 – Atividade 2 .....	45
Figura 11 – Tabuleiro de Fatoração com base de madeira .....	45
Figura 12 – Peças de E.V.A. utilizadas no Tabuleiro de Fatoração .....	46
Figura 13 – Área do quadrado de lado 13 .....	47
Figura 14 – Planta do apartamento .....	48
Figura 15 – Resolução da questão 3 (letra b) .....	50
Figura 16 – Resolução da questão 3 (letra d) - Grupo A .....	51
Figura 17 – Resolução da questão 3 (letra d) - Grupo B .....	51
Figura 18 – Aluno realizando a atividade 1 .....	55
Figura 19 – Retângulo de papelão semelhante à questão 2 da apostila .....	56
Figura 20 – Alunos manipulando o tabuleiro de fatoração .....	57
Figura 21 – Área do quadrado de lado 13 .....	59

Figura 22 – Planta do apartamento .....	60
Figura 23 – Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos .....	61
Figura 24 – Quadrado de lado $x + 2$ .....	62
Figura 25 – Praça com área de esporte ao ar livre no formato de um quadrado de lado $x$ .....	63
Figura 26 – Quadrado de lado medindo $a$ .....	64
Figura 27 – Quadrado de lado $a$ após retirar o quadrado de lado $b$ .....	65
Figura 28 – Figura formada por retângulos com lados explicitados .....	65
Figura 29 – Retângulo de lados medindo $(a + b)$ e $(a - b)$ .....	66
Figura 30 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (b) .....	67
Figura 31 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (c) .....	67
Figura 32 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (e) .....	68

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Trabalhos relacionados .....	28
Quadro 2 - Análise das coleções aprovadas no PNLD 2020 .....	37
Quadro 3 - Cronograma de conteúdo da aplicação da sequência didática .....	53

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>22</b>
2.1 Análise de Erros	22
2.2 Teoria dos Registros de Representações Semióticas	23
2.3 Trabalhos Relacionados	27
2.3.1 Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes: Papel e Lápis e no Software Aplusix	29
2.3.2 Álgebra dos polinômios no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental: Dificuldades encontradas pelos alunos de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul - ES	30
2.3.3 Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	31
<b>3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>33</b>
3.1 Caracterização da pesquisa	33
3.2 Aplicação do teste diagnóstico	34
3.3 Análise dos livros didáticos	36
3.3.1 Síntese das coleções analisadas	42
3.4 Elaboração da sequência didática	44
3.5 Teste Exploratório	49
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>53</b>
4.1 Primeira etapa (manhã)	53
4.2 Segunda etapa (tarde)	59
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>69</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>74</b>
APÊNDICE A – Teste diagnóstico	75
APÊNDICE B – Apostila (primeira versão)	77
APÊNDICE C – Apostila (versão final)	85
APÊNDICE D – Lista de exercícios	93
<b>ANEXO – Livros analisados</b>	<b>95</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018, p. 270) destaca ser fundamental iniciar o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental com: “as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade”.

Segundo a BNCC:

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2018, p. 270).

De acordo com Costa (2019), tem sido desafiador para os professores alfabetizar algebricamente os alunos do Ensino Fundamental, pois os estudantes apresentam a necessidade de desfrutar de um ensino e aprendizagem mais concreto e contextualizado. O mesmo autor exemplifica: “[...] podemos citar como exemplo as operações com polinômios, em que os livros didáticos têm apresentado apenas definições, fórmulas e situações-problema, na maioria das vezes, não contextualizadas” (Costa, 2019, p. 17).

Em concordância com Costa (2019), Ribeiro (2001) afirma que: “O trabalho com Álgebra precisa urgentemente ser repensado, mesmo em situações que demandam basicamente procedimentos mecânicos, os alunos não conseguiram sucesso” (Ribeiro, 2001, p. 29). Desse modo, os autores defendem um ensino algébrico significativo, para que o aluno possa desenvolver as habilidades e competências esperadas no ensino e aprendizagem da Álgebra.

A presente pesquisa buscou delimitar a unidade temática da Álgebra estudando um conceito específico: a fatoração algébrica. Seu propósito é averiguar as dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio, através da análise de erros de um teste diagnóstico, e elaborar uma sequência didática a partir dessas dificuldades.

De acordo com Costa:

[...] a reflexão dos erros de variadas formas de avaliar, amplia os aspectos da aprendizagem, de tal forma que o aluno aprenda mais e o professor adquira conhecimentos mais aprofundados que poderão ajudá-lo na (re)organização de seu trabalho e que o mesmo consiga atuar de modo mais eficaz (Costa, 2019, p. 50).

Embora o conceito de fatoração seja apresentado no Ensino Fundamental, o público alvo escolhido foi devido aos alunos apresentarem dificuldades na aprendizagem da fatoração no Ensino Médio e no Ensino Superior (Burigato, 2007).

De acordo com o trabalho de Lima e Siqueira (2021) sobre a Álgebra dos Polinômios, foi detectado através de um questionário que a maior dificuldade que os alunos possuem é o significado da fatoração algébrica. Feito um *ranking* com as maiores dificuldades desses alunos, foi constatado que: “[...] tem-se em primeiro lugar fatorar expressões algébricas, seguido por efetuar resoluções de equações de segundo grau e por fim operar polinômios” (Lima; Siqueira, 2021, p. 90).

As mesmas autoras observaram, a partir do estudo do panorama da Álgebra no Brasil, que os alunos seguem tendo dificuldades com a escrita algébrica e em desenvolver expressões para fatorar (Lima; Siqueira, 2021).

O tema do presente trabalho foi escolhido devido às autoras chegarem ao Ensino Superior com dificuldades e habilidades limitadas em fatoração algébrica, de forma que foram pouco desenvolvidas durante o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Além disso, foi observado, a partir de aulas particulares ministradas pelas autoras, que alguns alunos da Educação Básica desconhecem o conceito de fatoração algébrica e suas aplicações, como colocar o fator comum em evidência, por exemplo. Segundo Burigato (2007), em relação às aplicações da fatoração:

[...] apesar de seu estudo ser enfatizado no Ensino Fundamental, pelos livros didáticos, os alunos apresentam dificuldades em utilizar a fatoração de maneira adequada. E, nos anos posteriores ao seu estudo, ela não vem sendo suficientemente aplicada (Burigato, 2007, p. 34).

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), no nono ano do Ensino Fundamental se inicia o conteúdo de expressões algébricas, abordando fatoração e produtos notáveis na unidade temática de Álgebra. Em sequência, é apresentado o tema “resolução de equações polinomiais do 2º. grau por meio de fatorações”. A BNCC evidencia como habilidade desejada nesses objetos de conhecimento:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º. grau (Brasil, 2018, p. 317).

Nos anos anteriores ao nono ano do Ensino Fundamental, a BNCC aborda, em relação a polinômios, somente equações polinomiais do 1º. grau no sétimo ano. No oitavo ano do



Ensino Fundamental são abordados sistemas de equações polinomiais do 1º. grau e equações polinomiais do 2º. grau. A fatoração e os produtos notáveis são apresentados apenas no nono ano do Ensino Fundamental (Brasil, 2018).

Segundo Burigato (2007, p.1), a fatoração: “[...] pode ser utilizada, também, no Ensino Médio no estudo da função do segundo grau, nas inequações e na equação da circunferência, etc”. Deste modo, torna-se importante também nas séries subsequentes aos anos finais do Ensino Fundamental. Em relação ao Ensino Médio, a BNCC aponta que:

A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (Brasil, 2018, p. 527).

Ao analisar várias coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, e apesar da BNCC sugerir que essa temática seja apresentada no 9º. ano, foi observado que, por exemplo, na Coleção Matemática Essencial (Pataro; Balestri, 2018), volume do 8º. ano, se inicia uma parte introdutória do estudo da fatoração de polinômios (Figuras 1 e 2). Esta coleção está entre as aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2020.

Figura 1 – Fatoração de polinômios

**Fatoração de polinômios**

Estudamos em anos anteriores que podemos escrever um número como o produto de dois ou mais números, ou seja, escrevê-lo de **forma fatorada**.

Observe alguns exemplos de como podemos fatorar o número 36.

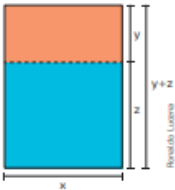
•  $36 = 4 \cdot 9$       •  $36 = 3 \cdot 12$       •  $36 = 6 \cdot 6$       •  $36 = 2 \cdot 18$   
 •  $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$       •  $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$       •  $36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$       •  $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Além de números, também podemos **fatorar** polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

Considere o retângulo ao lado, decomposto em duas partes retangulares. Podemos representar a medida da área desse retângulo de duas maneiras.

- Desconsiderando a decomposição.

$x \cdot (y + z)$



- Adicionando as medidas das áreas das duas partes obtidas:

$xy + xz$

O polinômio  $x \cdot (y + z)$  é uma forma fatorada de  $xy + xz$ .  
 Estudaremos a seguir alguns métodos de fatoração de polinômio.

Fonte: (Pataro; Balestri, 2018, p. 94).

Figura 2 – Fatoração de polinômios (segunda parte)

**Fatoração por agrupamento**

Há polinômios que não têm fatores comuns a todos os termos. Em alguns desses casos é possível utilizar o método de **fatoração por agrupamento**.

Observe como podemos fatorar  $ax - az + 5x - 5z$  por agrupamento.

- Inicialmente agrupamos os termos que possuem fator comum e colocamos esse fator em evidência em cada grupo obtido.

$$ax - az + 5x - 5z = (ax - az) + (5x - 5z) = a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z)$$

Note que  $(x - z)$  é um fator comum a todos os termos obtidos.

- Assim, colocamos  $(x - z)$  em evidência.

$$a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z) = (x - z) \cdot (a + 5)$$

Portanto,  $(x - z) \cdot (a + 5)$  é uma forma fatorada do polinômio  $ax - az + 5x - 5z$ .

Veja mais alguns exemplos.

- $7b + 7 + ab^3 + ab^2 = 7 \cdot (b + 1) + ab^2 \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot (7 + ab^2)$
- $3a^3 + 3ab - 4a^2b - 4b^2 = 3a \cdot (a^2 + b) - 4b \cdot (a^2 + b) = (a^2 + b) \cdot (3a - 4b)$

Para verificar se uma fatoração foi realizada de maneira correta, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação. O resultado obtido deve ser igual ao polinômio que foi fatorado.

$$(a + 5) \cdot (x - z) = ax - az + 5x - 5z$$

**Fatoração da diferença de dois quadrados**

No estudo de produtos notáveis, vimos que o produto da soma pela diferença de dois termos é uma diferença de quadrados, ou seja,  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ .

O produto  $(a + b) \cdot (a - b)$  é a forma fatorada de  $a^2 - b^2$ . Observe alguns exemplos.

- $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7) \cdot (x - 7)$
- $\frac{1}{4}a^2 - b^2c^4 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (bc^2)^2 = \left(\frac{1}{2}a + bc^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - bc^2\right)$

**Fatoração do trinômio quadrado perfeito**

Vimos que o quadrado da soma ou da diferença de dois termos é um trinômio quadrado perfeito, ou seja:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dizemos que  $(a + b)^2$  é a forma fatorada de  $a^2 + 2ab + b^2$  e  $(a - b)^2$  é a forma fatorada de  $a^2 - 2ab + b^2$ .

Observe alguns exemplos de fatoração de trinômios quadrados perfeitos.

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 3) + 3^2 = (x + 3)^2$
- $9a^2 + 12a + 4 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a \cdot 2) + 2^2 = (3a + 2)^2$
- $y^2 - 12y + 36 = y^2 - 2 \cdot (y \cdot 6) + 6^2 = (y - 6)^2$

Fonte: (Pataro; Balestri, 2018, p. 95).

Dando continuidade às observações sobre a coleção, no livro do 9º. ano foi retomada a fatoração, para resolver equações polinomiais do 2º. grau (Figuras 3 e 4), de acordo com a habilidade EF09MA09 da BNCC (Brasil, 2018, p. 317). Observou-se que o autor utilizava a representação geométrica para auxiliar a compreensão da técnica de completamento de quadrados. Isto vai ao encontro da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, elaborada por Raymond Duval, o qual afirma que o conhecimento matemático ocorre por meio da coordenação de vários tipos de registros de um mesmo objeto matemático (Duval, 2011). Esta teoria será utilizada como aporte teórico para o presente trabalho.

Figura 3 – Resolução de equações completas utilizando fatoração

### Resolução de equações do 2º grau completas

Para calcular as raízes de uma equação do 2º grau completa, vamos utilizar três métodos: **fatoração**, **completar quadrados** ou **fórmula resolvente**.

#### Fatoração

Vamos determinar as raízes de  $x^2 - 14x + 49 = 9$  por fatoração.

Nessa equação, o 1º membro é um **trinômio quadrado perfeito**. Assim, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{trinômio} \\ & \text{quadrado perfeito} \\ & x^2 - 14x + 49 = 9 \\ & (x - 7) \cdot (x - 7) = 9 \\ & (x - 7)^2 = 9 \end{aligned}$$

Trinômios quadrados perfeitos são expressões que podem ser obtidas por meio do quadrado da soma ou da diferença de dois termos:

- $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$\begin{array}{ll} x - 7 = +\sqrt{9} & x - 7 = -\sqrt{9} \\ x - 7 = 3 & x - 7 = -3 \\ x - 7 + 7 = 3 + 7 & x - 7 + 7 = -3 + 7 \\ x = 10 & x = 4 \end{array}$$

Portanto, as raízes da equação são 4 e 10.

#### Completar quadrados

Há equações do 2º grau em que o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito. Nesses casos, podemos determinar as raízes da equação utilizando o método de **completar quadrados**.

Observe como podemos calcular as raízes de  $x^2 + 8x + 7 = 0$  utilizando esse método.

- Como o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isolamos o termo independente no 2º membro.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 7 - 7 &= 0 - 7 \\ x^2 + 8x &= -7 \end{aligned}$$

43

Fonte: (Pataro; Balestri, 2018, p. 43).

Figura 4 – Resolução de equações utilizando completamento de quadrados

• Escrevemos o 1º membro de maneira conveniente.

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x$$

Para nos auxiliar na obtenção do número a ser acrescentado em ambos os membros da equação, podemos utilizar a representação geométrica do 1º membro. Note que, para completar a figura a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado cuja medida do comprimento do lado é 4 unidades de comprimento.

Observe que na representação geométrica  $x + 4 > 0$ , porém, algebricamente, também devemos considerar os valores negativos.

• Para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos  $4^2$  aos dois membros.

$$\begin{array}{l} \text{trinômio} \\ \text{quadrado perfeito} \\ x^2 + 8x + 4^2 = -7 + 4^2 \\ x^2 + 8x + 16 = 9 \end{array}$$

• Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e resolvemos a equação.

$$\begin{array}{l} x^2 + 8x + 16 = 9 \\ (x + 4)^2 = 9 \end{array}$$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$\begin{array}{ll} x + 4 = +\sqrt{9} & x + 4 = -\sqrt{9} \\ x + 4 = 3 & x + 4 = -3 \\ x + 4 - 4 = 3 - 4 & x + 4 - 4 = -3 - 4 \\ x = -1 & x = -7 \end{array}$$

As igualdades  $x + 4 = +\sqrt{9}$  e  $x + 4 = -\sqrt{9}$  podem ser indicadas, de maneira resumida, por  $x + 4 = \pm\sqrt{9}$ .

Portanto, as raízes da equação são  $-1$  e  $-7$ .

44

Fonte: (Pataro; Balestri, 2018, p. 44).

Diante desse contexto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma sequência didática, elaborada a partir das dificuldades dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro, para a aprendizagem de fatoração algébrica?

Para responder a questão de pesquisa, definiu-se o seguinte objetivo geral: Investigar as possíveis contribuições de uma sequência didática, elaborada a partir do levantamento das dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro, para minimizar tais dificuldades.

A partir do objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Investigar as dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro;
- Averiguar como a utilização da teoria dos registros de representação semiótica pode contribuir para a compreensão dos processos de fatoração algébrica;
- Analisar estratégias diferenciadas para o ensino de fatoração algébrica.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos: introdução, revisão da literatura, procedimentos metodológicos, resultados e discussões e considerações finais. No capítulo da revisão da literatura está incluído o aporte teórico, onde é apresentada a metodologia utilizada neste trabalho, além dos trabalhos relacionados. No capítulo dos procedimentos metodológicos é abordado o tipo de pesquisa do projeto, são apresentados os instrumentos de coletas de dados, o teste diagnóstico e seus resultados, a análise dos livros didáticos, a elaboração da sequência didática e o teste exploratório. Em “resultados e discussões” é feito o relato da aplicação e o diálogo com o referencial teórico. Por fim, no último capítulo são tecidas as considerações acerca de todo o trabalho monográfico.

## **2 REVISÃO DA LITERATURA**

Neste capítulo discute-se o aporte teórico que sustenta os estudos desta pesquisa monográfica. As duas primeiras seções trazem, respectivamente, a análise de erros e a teoria dos registros de representação semiótica, e a seção seguinte, três trabalhos que de alguma forma se assemelham a esta proposta.

### **2.1 Análise de Erros**

A Análise de Erros se caracteriza como uma metodologia de pesquisa que visa analisar o desempenho dos alunos em um determinado conteúdo, teste ou atividade. Sendo uma abordagem de pesquisa, segundo Cury (2013): “[...] com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de estudantes de todos os níveis de ensino nas amostras [...]”.

Segundo Cury (2013), a análise de resoluções permite averiguar o modo como os alunos pensam e utilizam seus conhecimentos anteriores no momento de resolver uma determinada questão, não apenas identificando o que eles possuem domínio.

Conforme a autora, ao utilizar um equívoco como ponto de partida para novas descobertas, abre-se a oportunidade de transformá-lo em um desafio. O objetivo é criar soluções para esse equívoco, o que por sua vez estimula a promoção da aprendizagem.

Desse modo, a Análise de Erros também se caracteriza como uma metodologia de ensino, pois o erro revela o entendimento do aluno, ao identificar suas áreas de dificuldade, permitindo assim ao professor utilizá-lo como uma estratégia de ensino a partir dessas lacunas (Cury, 2013).

A autora defende ainda a importância do professor desenvolver intervenções didáticas a partir dos erros, com a finalidade de levar o discente a questionar suas respostas.

Cury (2013) cita exemplos de situações nas quais a análise de erros pode ser usada como estratégia de ensino. O primeiro exemplo é quando um aluno verbaliza seu erro no momento em que ele é questionado em sala de aula. A autora diz ser necessário averiguar se existem mais estudantes com a mesma dificuldade. Caso haja, aconselha o professor a modificar os dados da pergunta até que o aluno chegue em um resultado contraditório. Se for o caso de só um aluno ter a dúvida, a autora recomenda que a mesma seja sanada em outro momento.

O segundo exemplo que Cury (2013) menciona é o de realizar uma atividade de investigação baseada em um exercício contendo algum erro cometido pelos alunos e pedir

para que os mesmos desenvolvam essa exploração. Já a terceira estratégia de ensino utilizando a Análise de Erros apontada pela autora é a de explorar um objeto de estudo em que os alunos apresentem bastante dificuldades de aprendizagem.

De acordo com Cury (2006), os professores em formação deveriam praticar a análise de erros como metodologia de ensino desde sua graduação. Assim, quando esses futuros mestres fossem atuar em sala de aula, já teriam conquistado habilidades de conseguir entender como os alunos pensam e os motivos que os fizeram chegar a um determinado erro. Além disso, seriam capazes de antecipar os possíveis erros e abordá-los com os alunos.

A escolha da análise de erros como aporte teórico se deu visando realizar uma sequência didática bem estruturada utilizando essa metodologia. Deste modo, a proposta é analisar as maiores dificuldades em fatoração algébrica apresentadas pelos alunos, por meio de um questionário, e propor uma sequência didática com o objetivo de minimizar tais dificuldades.

## **2.2 Teoria dos Registros de Representações Semióticas**

O referencial teórico utilizado na elaboração da sequência didática será a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval. Segundo o autor, no ensino da matemática, a abordagem cognitiva por si só não é suficiente para alcançar um entendimento completo do conteúdo, uma vez que essa disciplina lida com objetos abstratos.

Conforme afirmado por Duval (2013), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática está relacionada ao fato de que os objetos matemáticos não têm existência física, não são palpáveis. Portanto, o acesso a esses objetos só é viável por meio da utilização de um sistema semiótico, através de signos, a fim de fazer representações para auxiliar na visualização. No contexto da Matemática, a diversidade dos sistemas semióticos desempenha um papel fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos.

Segundo Damm (2008):

As representações semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetificação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém esse tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana (Damm, 2008, p. 174).

A autora ressalta ainda que é por meio das representações semióticas que se torna viável realizar certas funções cognitivas fundamentais, além de serem um suporte para as representações mentais (Damm, 2008, p. 176).

De acordo com Duval (2012), as representações mentais abrangem um conjunto de imagens e, de maneira mais ampla, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, uma situação e seus elementos associados. Por outro lado, as representações semióticas são criações resultantes da utilização de signos pertencentes a um sistema de representações que apresenta suas próprias características de significado e funcionamento. Figuras geométricas, enunciados em língua natural, sistema de escrita (numérica, algébrica e simbólica) e gráficos são exemplos de representações semióticas que pertencem a diferentes sistemas semióticos.

Gambarato (2005) esclarece signo como "aquilo que, sob determinado aspecto, representa alguma coisa para alguém, criando em sua mente um signo equivalente. Nessa operação é gerado o interpretante. Aquilo que o signo representa é denominado seu objeto" (Gambarato, 2005, p. 211).

Duval (2012) destaca que é comum considerar as representações semióticas como um meio simples de externar representações mentais com o objetivo de comunicá-las e torná-las visíveis ou acessíveis a outras pessoas. No entanto, os registros<sup>1</sup> não se limitam apenas a fins de comunicação, eles também são essenciais para a atividade cognitiva.

O autor destaca que o pensamento humano depende intrinsecamente da presença de uma variedade de formas de representação, conhecidas como registros semióticos. A *semiose*, ou seja, a criação ou compreensão de uma representação semiótica, juntamente com a *noesis*, que é a apreensão conceitual de um objeto, são elementos essenciais e inseparáveis do funcionamento cognitivo (Duval, 2012).

Conforme Duval (2011), a existência de diversos sistemas semióticos possibilita uma ampla diversificação de representações para um mesmo objeto, o que potencializa as capacidades cognitivas dos indivíduos. De acordo com o autor, a diversidade de representações de um mesmo objeto de estudo possibilita que ele seja reconhecido em cada uma. Ele salienta também que, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é capaz de ser totalmente abrangente em relação ao objeto que representa. Cada representação revela um conceito específico, uma propriedade determinada ou uma característica distinta.

Além disso, de acordo com Duval (2011), a mobilização e a coordenação de vários registros de representação desempenham um papel importante para evitar a confusão entre os objetos matemáticos e suas representações. Essa coordenação permite que os objetos sejam reconhecidos de forma clara e precisa em cada uma das representações utilizadas.

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, usaremos os termos "registro", "registro de representação" e "representação" com o mesmo significado de "registro de representação semiótica".



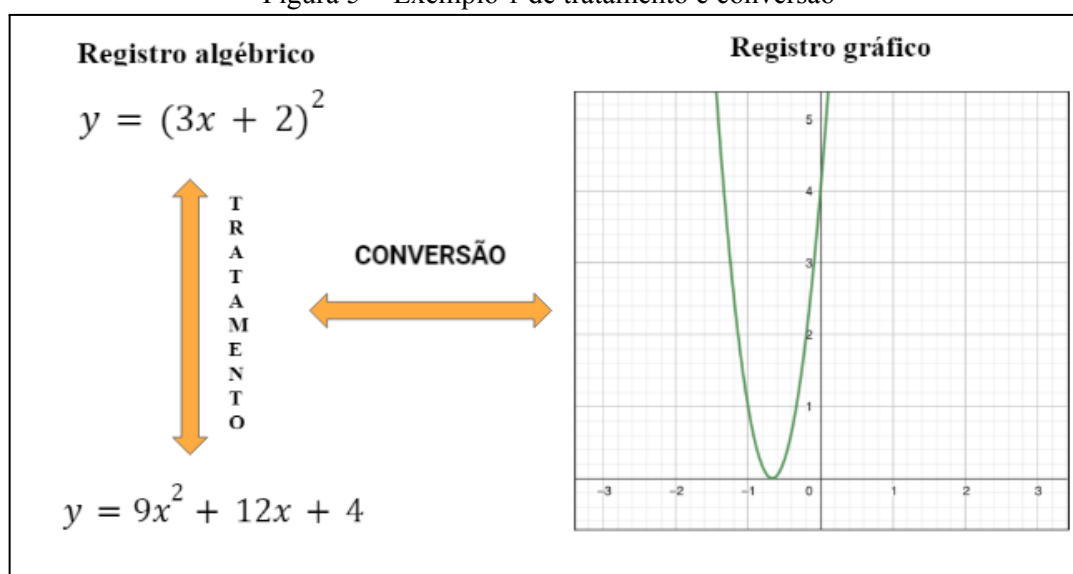
Desta forma, os objetos matemáticos não devem ser confundidos com suas representações, pois isso poderia causar confusão nos alunos e comprometer a compreensão, tornando os conhecimentos adquiridos rapidamente inutilizáveis dentro do contexto de aprendizagem. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico fundamental para a compreensão da matemática (Duval, 2012).

Contudo, as múltiplas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente essenciais. Afinal, os objetos matemáticos não estão prontamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata. Assim, é necessário fornecer representações para torná-los acessíveis. Além disso, a capacidade de realizar operações e tratamentos sobre os objetos matemáticos está diretamente relacionada ao sistema de representação semiótica utilizado (Duval, 2012).

Há dois tipos diferentes de transformações de registros de representação: o tratamento e a conversão. Para Duval (2012, p. 272) o tratamento de uma representação “é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro.”

O autor afirma que "a conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial." (Duval, 2012, p. 272). De fato, pois a conversão se refere à transformação externa ao registro inicial em outro registro de sistema semiótico diferente (Figura 5).

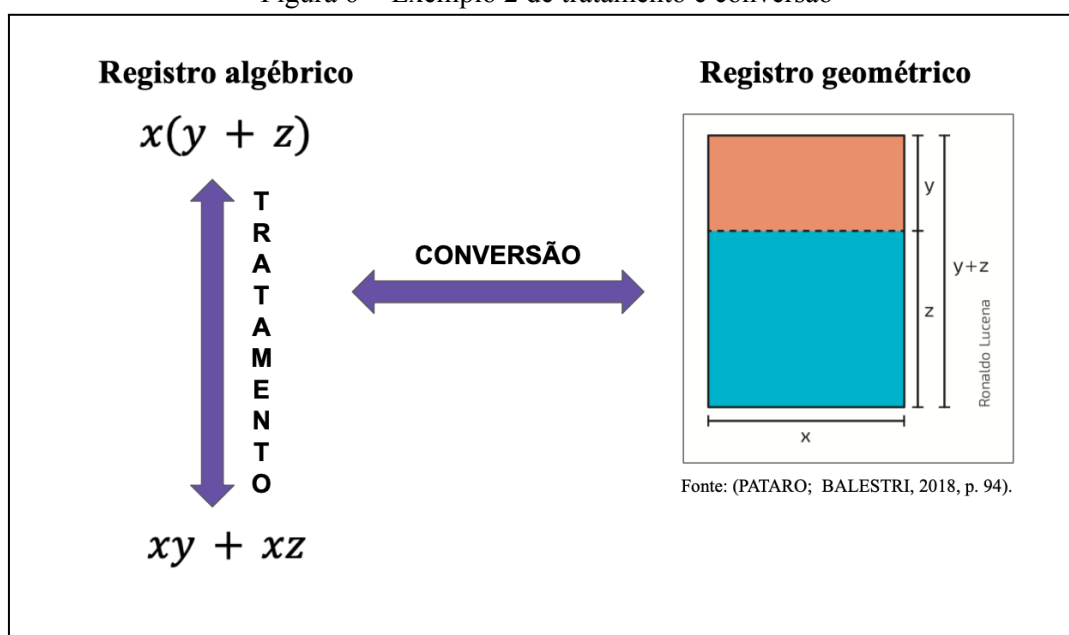
Figura 5 – Exemplo 1 de tratamento e conversão



Fonte: Elaboração própria.

Fazendo um paralelo com o presente trabalho, foi identificado no livro Matemática Essencial do 8º. ano, analisado anteriormente, um exemplo de transformação por conversão e tratamento (Figura 6). A área do retângulo da figura pode ser representada de duas maneiras distintas. A primeira maneira é considerando a área total do retângulo:  $x(y + z)$ . A segunda maneira, a soma das áreas dos retângulos laranja e azul:  $xy + xz$ . O polinômio  $x(y + z)$  é a forma fatorada de  $xy + xz$ , representando a transformação de tratamento do registro algébrico.

Figura 6 – Exemplo 2 de tratamento e conversão



Fonte: (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 94).

Fonte: Elaboração própria.

É relevante destacar que utilizar a conversão pode facilitar a operação de tratamento, visto que considera a representação da área total do retângulo de duas maneiras diferentes.

De acordo com Duval (2012), o início do entendimento dos objetos e seus conceitos em matemática ocorre somente quando o aluno consegue de forma espontânea mobilizar e coordenar dois registros de representação diferentes para o mesmo objeto. Essa habilidade é essencial para o desenvolvimento de um modelo cognitivo de pensamento que contemple todos os desafios enfrentados no ensino de matemática.

A atividade de conversão é inerentemente cognitiva e pode ser observada a partir do fenômeno da variação entre congruência e não-congruência (Duval, 2012).

Para entender melhor a atividade de conversão, basta comparar a representação de partida com a representação de chegada. Esquemáticamente, podemos ter duas situações. Em uma situação, a representação de chegada é muito similar à representação de partida, tornando

a conversão mais próxima de uma simples codificação - isso é chamado de congruência. Em outra situação, a representação final é completamente diferente da inicial, caracterizando a não-congruência (Duval, 2009a).

Existem três critérios para estabelecer se em uma conversão há congruência ou não.

- a possibilidade de uma correspondência “semântica” de elementos significantes: a cada unidade significativa simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
- a univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significativa elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significativa elementar no registro da representação de chegada;
- a organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjo das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão (Duval, 2012, p. 283).

Para o autor, quando uma das três condições descritas acima não está satisfeita, a conversão é não-congruente. Quando não se estabelece uma relação de congruência, existe dificuldade no processo de conversão, e além disso, também pode surgir um obstáculo no qual o indivíduo se sente despreparado para pensar na possibilidade de conversão.

O registro de representação semiótica, proposto por Raymond Duval, contribui significativamente para o aprendizado da matemática ao permitir que os alunos compreendam e expressem conceitos matemáticos de diferentes formas, como símbolos, gráficos e palavras. Isso ajuda a promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, facilitando a conexão entre diferentes modos de representação e enriquecendo a compreensão geral dos alunos sobre o objeto estudado.

### **2.3 Trabalhos Relacionados**

Para identificar trabalhos publicados com temas relacionados ao deste projeto, foi realizada, no dia 19 de agosto de 2022, uma pesquisa sistematizada no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com as seguintes palavras-chaves: “fatoração” AND “álgebra” AND “educação”. Obteve-se 3 trabalhos como resultado, sendo selecionado apenas o primeiro que destacou-se por constar no título “dificuldades na aprendizagem da fatoração”. Após analisar o sumário deste trabalho, tópicos como “Alguns Estudos sobre Erros e Dificuldades na Aprendizagem da Álgebra”, “Teste Diagnóstico” e “Elaboração da Sequência Didática” foram semelhantes à

ideia inicial desta proposta.

A segunda pesquisa foi realizada no dia 23 de Agosto de 2022, com o intuito de encontrar trabalhos de conclusão de curso realizados no Instituto Federal Fluminense (IFF), *campus* Campos Centro, que versassem sobre temas afins a este projeto. Foi pesquisada a palavra chave “álgebra dos polinômios” na Biblioteca Digital Anton Dakitsch, do IFF *campus* Campos Centro. Desse modo, foi encontrado o trabalho intitulado “Álgebra dos polinômios no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental: Dificuldades encontradas pelos alunos de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul - ES”, sendo ele o único encontrado nesta busca.

Para aprofundar a pesquisa dos trabalhos relacionados, no dia 28 de agosto de 2022 foi feita uma nova busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES com a utilização da *string*: "dificuldades de aprendizagem" AND "álgebra" AND "ensino fundamental". Obteve-se como resultado 2 trabalhos. Utilizando como critério de inclusão para seleção a análise do título e do resumo de forma sucinta, o trabalho escolhido foi "Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental".

No Quadro 1 estão apresentados os trabalhos selecionados nas 3 buscas, incluindo o título, autor, ano e tipo de trabalho acadêmico.

Quadro 1 – Trabalhos relacionados

ID	Título	Autor (ano)	Tipo
1º. T	Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes: Papel e Lápis e no Software Aplusix	Burigato (2007)	Dissertação
2º. T	Álgebra dos Polinômios no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental: Dificuldades encontradas pelos alunos de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul - ES	Lima e Siqueira (2021)	Trabalho de Conclusão de Curso
3º. T	Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º.ano do Ensino Fundamental	Costa (2019)	Dissertação

Fonte: Elaboração própria.

### 2.3.1 Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes: Papel e Lápis e no Software Aplusix

Esta dissertação é de autoria de Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato e foi publicada em 2007.

A pesquisa tem como objetivo geral estudar as dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas. A fim de alcançá-lo, foram traçados os seguintes objetivos específicos: identificar teoremas em ação utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas e investigar a estabilidade dos teoremas em ação construídos pelos alunos.

O trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa do tipo análise teórica ou análise *a priori*, inspirada na proposta de Michel Henry (2006), com a finalidade de analisar situações em sala de aula.

Os procedimentos metodológicos foram divididos em: (i) análise da apresentação da fatoração nos livros didáticos; (ii) elaboração e aplicação do teste diagnóstico; (iii) elaboração da sequência didática; (iv) gestão e previsão de possíveis erros e dificuldades dos alunos na resolução das atividades propostas.

A autora considera relevante a análise dos livros didáticos, por terem um papel fundamental como suporte para os professores, optando por três coleções diferentes que sintetizam diversas abordagens da fatoração. Como resultado da análise dos livros didáticos, a autora conclui que a fatoração é compartimentada e que não são propostas atividades com diferentes casos de fatoração para que o aluno reflita e verifique qual deles utilizar.

Em seguida, foi elaborado um teste diagnóstico com 12 questões baseadas nos livros didáticos analisados, aplicado em duas turmas de oitava série (atual nono ano) no *software Aplusix*<sup>2</sup> para analisar os possíveis erros e servir como base para a elaboração da sequência didática.

A sequência didática foi composta por 10 atividades e fragmentada em 6 encontros, dividindo a turma em dois grupos para que um realizasse as atividades em papel e lápis e a outra com o *software Aplusix*.

Após a aplicação da sequência didática, foram observadas dificuldades na aprendizagem da fatoração devido a formação desse conceito. Além disso, foi destacado que com o software os alunos se mostraram mais motivados a realizar várias tentativas do que quando utilizavam papel e lápis.

---

<sup>2</sup> O Software Aplusix foi desenvolvido com o intuito de ajudar alunos a aprender aritmética e álgebra. Tem uma linguagem simples, de fácil interpretação e permite que toda a ação do aluno fique gravada, possibilitando ao professor um estudo mais aprofundado sobre o aprendizado do aluno.

O presente trabalho se assemelha ao nosso devido à aplicação de um teste diagnóstico para a coleta de dados e elaboração de uma sequência didática, destacando também as dificuldades em fatoração. Diferencia-se quanto ao público-alvo, que são alunos da oitava série (atual nono ano) e à utilização do software Aplusix como recurso pedagógico.

### **2.3.2 Álgebra dos polinômios no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental: Dificuldades encontradas pelos alunos de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul - ES**

O Trabalho de Conclusão de Curso de Maria Carolina Mendes Lima e Mariana Peixoto Siqueira tem como objetivo geral identificar as dificuldades encontradas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul no estudo da Álgebra dos Polinômios. Foi defendido no ano de 2021.

Para atingir o objetivo, foram traçados objetivos específicos, que visam: (i) aprofundar os estudos sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa e sua influência no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra dos Polinômios; (ii) aprofundar os estudos sobre a Teoria da Transposição Didática e suas implicações no estudo da Álgebra dos Polinômios; (iii) esboçar um panorama do ensino de Álgebra no Brasil, por meio da análise de documentos oficiais e da literatura relacionada; (iv) investigar como a Álgebra dos Polinômios, no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental, repercute na visão do aluno sobre a Matemática e (v) contribuir para reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra dos Polinômios no Ensino Fundamental.

Este trabalho tem como público alvo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e é caracterizado como uma pesquisa qualitativa. A metodologia utilizada foi a do estudo de caso, usando como instrumento de coleta de dados um questionário, que contém 10 questões. Inicialmente pensou-se na realização de um questionário eletrônico, devido ao distanciamento dos alunos com a escola em virtude da Covid-19. No entanto, durante o processo de pesquisa, se tornou possível realizar a aplicação do questionário de modo presencial.

Antes do questionário ser aplicado, foi realizado um teste exploratório com alunos matriculados na turma de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC II). O objetivo era encontrar possíveis erros e repará-los previamente à aplicação para o público-alvo e verificar se as questões produzidas estavam de acordo com os objetivos propostos.

Após a aplicação nas turmas de nono ano da escola, foi constatado, a partir das respostas às questões elaboradas, que os alunos possuem muita dificuldade em conceitos e procedimentos da Álgebra dos Polinômios, como entender a diferença entre variável e

incógnita e o próprio conceito de fatoração de polinômios.

Essa pesquisa traz como semelhança a Álgebra na Educação Básica e a análise das dificuldades encontradas pelos alunos. Aponta-se como diferenças o público-alvo e o foco na Álgebra dos Polinômios, enquanto o nosso trabalho tem como objetivo analisar os alunos do 1º ano do Ensino Médio e a fatoração polinomial.

### **2.3.3 Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental**

A dissertação de José Airton do Nascimento Costa (2019) teve como objetivo investigar as dificuldades dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental referentes ao estudo da Álgebra, além de analisar suas causas e consequências. Para alcançar tal objetivo, o autor idealizou os seguintes objetivos específicos:

- 1) Reconhecer as possíveis dificuldades de aprendizagem de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental regular em relação à Álgebra;
- 2) Identificar as causas e implicações dessas possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos envolvendo a Álgebra;
- 3) Analisar as implicações resultantes dessas dificuldades de aprendizagem;
- 4) Propor estratégias metodológicas como possibilidades de superação das dificuldades de aprendizagem de conceitos algébricos (Costa, 2019, p. 17).

Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, sendo utilizada a metodologia de pesquisa de campo. O referido trabalho utilizou a aplicação de três formatos de questionário, a observação com intervenção e também depoimentos escritos dos alunos, de maneira complementar.

O primeiro questionário, chamado de Pré-teste, era composto de 6 questões sobre equações do 1º. grau. O segundo, denominado de Teste, abarcava cinco questões contemplando equações, operações com polinômios e fatoração. O terceiro questionário, intitulado Pós-teste, abordava cinco questões referentes a outras atividades de equações, operações com polinômios e fatoração.

Como panorama conclusivo, o autor destaca que as dificuldades manifestadas pelos alunos não são da Álgebra propriamente dita, mas da falta de apropriação da Aritmética e de problemas relacionados que não foram corrigidos nos anos anteriores. Costa (2019) observa também que muitos alunos não percebem que a fatoração é o inverso de alguns produtos notáveis e não vêem sentido e aplicabilidade nesse conceito. Além disso, ele orienta e evidencia a relevância dos professores em refletir sobre as estratégias metodológicas

utilizadas e as possibilidades para organização do ensino da matemática também no Ensino Médio.

A dissertação de Costa (2019) assemelha-se ao presente trabalho em razão do diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos (por meio de teste), buscando analisar as dificuldades de aprendizagem algébrica na Educação Básica. Como contraste desta pesquisa, tem-se o público-alvo, em que o autor realiza com alunos do 8º. ano do Ensino Fundamental.



### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

#### 3.1 Caracterização da pesquisa

Esta seção tem como proposta descrever os procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa. Nela serão abordados o tipo de pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, a caracterização do público alvo e as etapas da pesquisa.

Para melhor domínio do percurso metodológico adotado, apresenta-se novamente o objetivo geral: a partir da investigação das dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro, propor uma sequência didática que contribua para minimizar tais dificuldades.

Para atingir tal objetivo, será proposta uma pesquisa qualitativa, do tipo intervenção pedagógica. Ao empregar a abordagem qualitativa, as pesquisadoras buscam elucidar o significado dos elementos, sem quantificar os resultados numericamente (Gerhardt; Silveira, 2009). Segundo Yin (2016) a pesquisa qualitativa se distingue das outras por retratar o ponto de vista dos participantes do estudo.

No que se refere a intervenção pedagógica:

[...] são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (Damiani *et al.*, 2013, p. 58).

A atual pesquisa busca analisar o conceito de fatoração algébrica que os alunos do primeiro ano do Ensino Médio possuem. Após detectar seus maiores erros, é pretendido elaborar uma sequência didática a fim de minimizar tais dificuldades e avaliar se o objetivo foi alcançado.

O presente trabalho monográfico está dividido nas seguintes etapas: (i) revisão bibliográfica, (ii) elaboração do teste diagnóstico, (iii) aplicação do teste diagnóstico, (iv) análise das respostas do teste diagnóstico, (v) análise de livros didáticos, (vi) elaboração da sequência didática, (vii) teste exploratório, (viii) correções, (ix) aplicação da sequência didática e (x) análise dos resultados. A escrita monográfica será feita concomitantemente às etapas destacadas.

O teste diagnóstico será elaborado com o objetivo de investigar as dificuldades em fatoração algébrica nas turmas de primeiro ano do Ensino Médio do IFF. Este público-alvo está distribuído em 9 turmas, e todas serão contempladas.

Posteriormente, serão analisados os dados obtidos segundo o referencial teórico considerado nesta monografia. Após a análise e identificação das maiores dificuldades em fatoração algébrica, será elaborada uma sequência didática, buscando minimizá-las. A princípio, pensa-se em aplicá-la no contraturno, com os alunos interessados sobre o tema. O objetivo da proposta é procurar sanar suas dúvidas e ter um olhar mais profundo sobre os desafios encontrados por eles, a fim de contribuir para uma melhor compreensão da fatoração de polinômios.

Após a aplicação da sequência didática, serão descritas as considerações finais desta pesquisa. Os instrumentos de coleta de dados serão as observações feitas ao longo das aulas e também as respostas a uma atividade proposta ao final da sequência didática.

### 3.2 Aplicação do teste diagnóstico

Nos dias 28 e 29 de setembro e 04, 05 e 06 de outubro de 2022, foi realizada a aplicação do teste diagnóstico (Apêndice A) nas nove turmas de primeiro ano do Ensino Médio do IFF *campus* Campos Centro. A Figura 7 traz apenas as questões propostas.

Figura 7 – Questões do teste diagnóstico

1. Fatore cada expressão a seguir.	
a) $x^2 + 5x$	d) $9x^2 - 4$
b) $3x^2 + 6x + 4x + 8$	e) $x^2 + 3x + 2$
c) $x^2 + 6x + 9$	
2. Você teria interesse em participar de uma atividade que abordasse o assunto da questão anterior? ( ) Sim ( ) Não	
3. Se você respondeu "sim" à pergunta anterior, qual seria o turno de sua preferência para a realização da atividade? ( ) Manhã ( ) Tarde ( ) Noite	
Obrigada pela sua participação!	

Fonte: Elaboração própria.

Durante a aplicação, foram observadas algumas falas recorrentes por parte de professores e alunos.

O fato de que o oitavo e o nono anos haviam sido cursados durante a pandemia foi ressaltado tanto por professores como por alunos, como uma espécie de justificativa para um possível resultado ruim nos testes. Alguns estudantes relataram que precisaram trabalhar para ajudar em casa, outros que a escola “distribuía apostilas e aprovava todos que tinham

presença”, e por isso, não haviam estudado no período pandêmico.

Pelo menos um aluno em cada turma perguntou se poderia utilizar calculadora. Outros indagaram se fatorar era o mesmo que dividir, e muitos questionaram o que era fatoração. Inúmeros alunos perguntaram se deveriam descobrir o valor desconhecido (da variável  $x$ ). Houve bastante confusão entre expressão algébrica e equação, denotando não saberem a diferença entre variável e incógnita. Uma aluna perguntou se poderia “igualar a zero para resolver, como uma equação”, e passou a tentar obter o valor da variável “ $x$ ” em cada item. Perguntaram também se poderiam usar a “fórmula de Bhaskara” para resolver.

Em relação à pergunta sobre a calculadora, as pesquisadoras esclareceram que o seu uso não seria necessário para resolver as questões propostas. Quanto aos demais questionamentos, nada foi dito, pois qualquer intervenção poderia comprometer o levantamento das dificuldades dos participantes.

Outro aspecto que chamou atenção foi a baixa auto-estima e desvalorização pessoal, transparecida ao afirmarem que “só entraram no IFF porque o ingresso foi por sorteio”. Alunos de diferentes turmas afirmaram serem “burros” e pediram desculpas ao final do teste por “decepcionar” e não saber responder.

Sem dúvida, a pandemia impactou negativamente a todos, tanto em termos de aprendizagem como no aspecto emocional. Isso ficou claro no momento da aplicação do teste.

Ao analisar os resultados, observou-se que todos os alunos, à exceção de um, erraram a maioria ou todas as questões do teste diagnóstico. Ou deixaram em branco, ou esboçaram alguma ideia de resolução, em geral tentando encontrar o valor da variável “ $x$ ” como se fosse uma incógnita. Utilizando a metodologia da análise de erros, infere-se que a sequência didática a ser proposta deverá ressaltar o conceito de expressão algébrica, reforçando o papel da letra como variável nesse contexto.

Segundo Curry (2013), uma oportunidade para aproveitar as respostas dos alunos surge quando existem trabalhos escritos, permitindo planejar uma atividade de exploração elaborada pelos próprios alunos, com base nos erros identificados.

Pode-se ainda depreender das falas relatadas e dos resultados obtidos que o conceito de fatoração algébrica não está claro para os participantes. Novamente, utilizando a metodologia da análise de erros, o conceito será retomado na proposta didática a partir da fatoração numérica, para que seja plenamente compreendido pelos alunos.

Além disso, conforme constatado, os alunos desconheciam todos os casos de fatoração, mesmo o fator comum em evidência. Serão então contemplados, na sequência didática, não só este, mas também a fatoração com uso do quadrado da soma, quadrado da

diferença, e produto da soma pela diferença.

A respeito do aspecto de baixa auto-estima observado, pretende-se utilizar material manipulável na construção da proposta, para adicionar ludicidade ao processo de aprendizagem, e, ainda, partir de conceitos que eles já dominem, para que sintam-se mais confiantes e capazes.

### **3.3 Análise dos livros didáticos**

Após a aplicação do teste diagnóstico, iniciou-se a elaboração da sequência didática. Tendo em vista que o público alvo não domina o conceito de fatoração, será necessário retomá-lo para, só então, trabalhar os casos de fatoração algébrica. A fim de obter subsídios para a preparação do material, buscou-se de que forma o conceito é abordado nos livros didáticos.

Durante a formação escolar, os livros didáticos desempenham função de caráter importante e servem como referência para os professores na condução da aprendizagem. Costuma ser, para a maioria dos professores da Educação Básica, o principal instrumento de trabalho (Silva Junior; Regnier, 2008).

Diante disso, as autoras decidiram analisar todas as coleções de livros didáticos aprovadas no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2020, em um total de doze. Foi observada a apresentação do conteúdo introdutório de fatoração de polinômios, anterior aos casos de fatoração, em todas elas. Procurou-se pelos seguintes aspectos: retomada da fatoração numérica, interação com a Geometria e aplicações do conteúdo. O Quadro 2 traz um resumo do que foi obtido na investigação de cada aspecto, por coleção.

Analisar os livros didáticos com ênfase na identificação da retomada da fatoração numérica visa proporcionar ao aluno relacionar um procedimento algébrico a um aritmético, que ele já conhece. A busca pela interação com a Geometria baseia-se na TRRS, pois utilizar representações geométricas e algébricas para expressar áreas favorece a aprendizagem. Além disso, os alunos dominam os cálculos de área em questão, o que os encorajaria a acreditar que são capazes de aprender o conteúdo apresentado. Já a busca por exemplos com alguma aplicação servirá para que o objeto de estudo seja desenvolvido de maneira contextualizada.

Quadro 2 – Análise das coleções aprovadas no PNLD 2020

Código	Coleção	Ano	Retomada da fatoração numérica	Interação com a Geometria	Aplicação da fatoração algébrica
1	Matemática e Realidade	8º.		X	X
2	Matemática Essencial	8º.	X	X	
3	Trilhas da Matemática	9º.	X		
4	Matemática Realidade & Tecnologia	9º.	X	X	
5	Geração Alpha	9º.		X	
6	Convergências	9º.	X	X	
7	Araribá Mais Matemática	9º.	X	X	
8	Matemática Bianchini	8º.	X	X	
9	Matemática Compreensão e Prática	9º.	X	X	
10	Apoema	9º.		X	
11	A Conquista da Matemática	9º.	X	X	
12	Teláris	9º.			

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, serão apresentadas algumas considerações sobre cada coleção. Os trechos dos livros analisados, citados nesta seção, encontram-se no Anexo.

### **Coleção 1: Matemática e Realidade**

Os autores dessa coleção apresentam o tema de fatoração algébrica no livro do 8º. ano do Ensino Fundamental - Anos Finais. Eles iniciam com uma aplicação que interage com a Geometria e apresentam dois retângulos de mesma base ( $a$ ) e alturas diferentes ( $b$  e  $c$ ) e desejam determinar a razão entre as áreas desses retângulos. Os autores desenvolvem aplicando a razão entre as expressões algébricas, resultando em uma fração algébrica. Em seguida, retomam como simplificar as frações numéricas para auxiliar na simplificação da fração algébrica quando o numerador e denominador possuem fator comum.

Posteriormente, conceituam a fatoração de polinômios como "Fatorar um polinômio significa transformá-lo em um produto correspondente. É o mesmo que decompor em fatores" (Iezzi *et al.*, 2018, p. 227). Neste caso, observa-se que o termo "correspondente" pode gerar dúvidas e dificultar a compreensão do aluno sobre o conceito de fatoração.

### **Coleção 2: Matemática Essencial**

Essa coleção apresentou o tema de fatoração algébrica no volume oito. Foi observado que os autores iniciam retomando o conceito de fatoração numérica. Eles mencionam o que é fatorar de maneira direta e superficial. Em seguida, utilizam a ideia de decomposição de figuras planas para calcular a área de um retângulo (decomposto em duas partes retangulares), encontrando um polinômio resultante deste exemplo e sua forma fatorada.

No desenvolvimento dos polinômios, os autores utilizam três variáveis, não exibem a relação de igualdade e não retomam a fatoração numérica de fato para introduzir o tema a ser abordado.

### **Coleção 3: Trilhas da Matemática**

A apresentação da fatoração de polinômios é feita no volume nove, capítulo cinco. O autor inicia com uma aplicação de fatoração numérica, resolvendo a expressão  $\frac{165+205}{5}$  e retomando o conteúdo. Posteriormente, ele exemplifica com um polinômio, escreve-o em sua forma fatorada e destaca a estratégia que permite simplificar o cálculo.

Em sua abordagem, o autor não menciona um exemplo de fatoração algébrica análogo à fatoração numérica. Ele apenas fatora o polinômio  $5x^2 + 10x$  e não faz uma relação com o que foi feito anteriormente com números. Além disso, não caracteriza as situações em que a fatoração irá simplificar os cálculos.

### **Coleção 4: Matemática Realidade & Tecnologia**

O conteúdo de fatoração de polinômios é apresentado no volume do 9º. ano do Ensino Fundamental - Anos Finais. É iniciado com dois números naturais (30 e 12) e suas possibilidades de escrita na forma fatorada, à qual se refere como um produto de dois ou mais números.

Para introduzir o conteúdo do capítulo, o autor utiliza um retângulo de lados medindo **a** e **a + b + c**. Escreve duas expressões algébricas diferentes para a área dessa figura. A primeira expressão é  $a^2 + ab + ac$ , que corresponde a um produto de polinômios, e fatorando, ele encontra a expressão  $a \cdot (a + b + c)$ .

Os termos “expressão algébrica” e “polinômio” são usados alternadamente, o que pode provocar dúvidas. Além disso, a manipulação com três variáveis pode também dificultar a compreensão.

### **Coleção 5: Geração Alpha**

A apresentação do conteúdo fatoração de polinômios é feita no volume nove. Os autores já iniciam o tema com o exemplo do polinômio  $x^2 + 5x + 6$  e mencionando que ele pode ser escrito na forma  $(x + 3) \cdot (x + 2)$ . Assim, conclui-se que o polinômio escrito no modo de multiplicação de dois fatores é a forma fatorada do polinômio apresentado inicialmente.

Em seguida, começam a trabalhar a fatoração de polinômios em conjunto com a Geometria. Como em outras coleções, são representadas áreas de figuras planas a partir da fatoração polinomial.

O livro apresenta quatro figuras planas, que representam as peças de um quebra cabeça retangular, indicando suas medidas como  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Em seguida, realiza a soma das áreas de cada figura resultando no polinômio  $3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$ . Logo após, os autores realizam um possível encaixe das figuras, transformando em um retângulo. Para chegar na área deste retângulo, é multiplicada a base pela altura, resultando em  $3c \cdot (a + b)$ . O livro conclui que as duas expressões  $3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$  e  $3c \cdot (a + b)$  representam a mesma área, sendo que a segunda expressão é a forma fatorada da primeira.

Analisando esta coleção, foi observado que o texto não apresenta muita clareza em suas palavras, como em: “[...] duas expressões aparentemente diferentes podem representar a mesma expressão.” (De Oliveira; Fugita, 2017, p. 139) podendo dificultar a compreensão do aluno. Além disso, o livro utiliza exemplos complexos para a introdução do conteúdo, não faz retomada da fatoração numérica e não exemplifica aplicação da fatoração polinomial.

Uma outra observação feita na análise do livro foi em relação ao exemplo realizado em conjunto com a Geometria. Diferente de outras coleções, os autores começam trabalhando com partes de figuras planas, para depois trabalhar com sua composição, formando uma única figura.

### **Coleção 6: Convergências**

A fatoração é apresentada no volume nove. O autor inicia com diferentes formas de escrever o número 32 na forma fatorada. Após a retomada da fatoração numérica, destaca que, da mesma forma que podemos fatorar um número natural, diferente de 1, também podemos fatorar polinômios.

Para detalhar sobre a fatoração de polinômios, o autor utiliza a relação com a geometria para calcular a área de um quadrado dividido internamente em outros dois quadrados e dois retângulos menores. Ele utiliza duas maneiras para representar a área do quadrado maior. Na primeira, ele soma as áreas das quatro figuras planas internas. Já na segunda, ele multiplica a base pela a altura do quadrado.

Como as duas formas correspondem à medida da área de uma mesma figura, o autor iguala as duas representações, sendo uma delas um polinômio e a outra, a sua forma fatorada.

Nessa coleção, não foi exemplificada uma aplicação da fatoração algébrica.

### **Coleção 7: Araribá Mais Matemática**

Essa coleção apresenta a fatoração de polinômios no volume nove. Os autores iniciam com um diálogo entre dois alunos e relembram o conceito de fatoração numérica. Logo após, comparam com o conceito de fatoração de polinômios, dando um exemplo posterior relacionado com a Geometria.

No exemplos, os autores apresentam um retângulo que está dividido em três retângulos menores de altura  $a$ . Os lados desses retângulos menores são, respectivamente,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para calcular a área do retângulo maior, somam as áreas dos retângulos menores ( $ax + ay + az$ ). Em seguida, expressam como um produto de polinômios:  $a \cdot (x + y + z)$ . Igualam as duas representações, pois elas representam a área do mesmo retângulo, destacando que a segunda é a forma fatorada da primeira.

Os autores conceituam a fatoração de polinômios como "Fatorar um polinômio significa escrevê-lo na forma de um produto de dois ou mais polinômios" (Gay; Silva, 2018, p. 97). Não mencionam aplicações.

### **Coleção 8: Matemática Bianchini**

No volume oito dessa coleção, o autor introduz a retomada do conceito de fatoração numérica com as possibilidades de escrever o número 72 como um produto de dois ou mais fatores. Em seguida, relaciona a fatoração numérica com a fatoração de polinômios.

Para exemplificar a fatoração de polinômios, apresenta um diálogo entre dois alunos que representaram de duas maneiras diferentes a área de um retângulo que contém dois retângulos menores internos a ele. Um aluno representou a área somando as áreas dos retângulos inferiores, resultando em um polinômio. Em contrapartida, o outro aluno multiplicou a base pela altura do retângulo maior e obteve a fatoração do polinômio que havia sido encontrado pelo primeiro aluno.

Logo após, o autor evidencia alguns exemplos de fatoração de expressões numéricas, destacando o fator comum entre elas. O que de fato é importante para o ensino e aprendizagem, já que alguns alunos muitas vezes encontram dificuldades em evidenciar um fator comum nas expressões.

O autor não sugere aplicação deste conteúdo na introdução do capítulo.



### **Coleção 9: Matemática Compreensão e Prática**

Nessa coleção, o conteúdo de fatoração de polinômios foi pautado no volume nove. Inicia-se com a retomada da forma fatorada do número cem, ou seja, escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores.

Diferentemente das coleções anteriores analisadas, o autor desse livro faz a interação da Geometria com a fatoração de polinômios por meio do perímetro de um polígono irregular de oito lados, com seus lados opostos de mesma medida. O polígono possui lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O perímetro pode ser representado por:  $a + a + b + b + c + c + c + c = 2a + 2b + 4c$ . Esse polinômio pode ser reescrito na sua forma fatorada:  $2(a + b + 2c)$ .

O autor não representa o polinômio e sua forma fatorada igualando-os ao formalizar o conteúdo. Além disso, não apresenta aplicação de fatoração de polinômios.

### **Coleção 10: Apoema**

O conteúdo de fatoração de polinômios é introduzido apresentando dois casos (fator comum e agrupamento). Diferentemente das demais coleções analisadas, o autor deste livro destaca que a "[...] fatoração pode ser considerada aqui o caminho inverso da propriedade distributiva da multiplicação [...]" (Longen, 2018, p. 60). Logo, parte do pressuposto de que o estudante usa tal propriedade corriqueiramente, e portanto, a conhece muito bem.

Ele exemplifica a fatoração considerando um retângulo maior dividido em outros três. A partir disso, representa a área do retângulo maior de duas maneiras diferentes, de forma semelhante à coleção “Araribá Mais”, analisada e detalhada anteriormente.

Em seguida, é apresentado o conceito de fatoração e duas propostas de exercícios. Para solucionar a primeira questão, o aluno deve utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Na resolução da segunda, ele precisa colocar em evidência o fator comum em cada termo. As autoras da presente pesquisa acreditam que, primeiramente, o autor quis instigar o aluno como forma de despertar interesse no tema para, em seguida, explicar detalhadamente como resolver uma questão colocando o fator comum em evidência.

Foi observado que o autor se refere à “expressão algébrica” e “polinômio” como conceitos distintos. Para fundamentar os casos de fatoração, ele utiliza três exemplos diferentes para fator comum e um exemplo de fatoração por agrupamento.

No exemplo de fatoração por agrupamento, o autor fatora a expressão:  $am + bm + ax + bx = m.(a + b) + x.(a + b) = (a + b).(m + x)$ . É importante destacar que ele não menciona outras possibilidades de resolver, como por exemplo, colocar o

(a) e o (b) em evidência como:  
 $am + bm + ax + bx = a.(m + x) + b.(m + x) = (a + b).(m + x).$

Essa coleção não retoma o conceito de fatoração numérica e não menciona aplicação de fatoração de polinômios. Além disso, utiliza uma linguagem mais rebuscada, o que pode comprometer a compreensão do aluno.

### **Coleção 11: A Conquista da Matemática**

O conteúdo de fatoração de polinômios é apresentado no volume nove. Os autores o introduzem lembrando o que é fatorar um número natural e em seguida, conceituam como "Fatorar um número significa escrevê-lo como uma multiplicação de dois ou mais fatores" (Júnior; Castrucci, 2018, p. 70). Observa-se que os autores se diferenciam ao utilizar o termo "multiplicação" ao invés de "produto", como visto em outros livros.

Os autores mostram um retângulo maior, dividido em dois retângulos menores, e utilizam um polinômio para representar o cálculo da área total desse retângulo. Uma maneira abordada foi a multiplicação da altura pela base, e a outra, a soma das áreas dos retângulos menores, sendo a primeira maneira a forma fatorada do polinômio.

Não fizeram aplicação desse conteúdo e o introduziram de forma breve e objetiva.

### **Coleção 12: Teláris**

A apresentação do conteúdo de fatoração de polinômios foi feita no volume nove. O autor não retoma o conceito de fatoração numérica e logo apresenta a definição de fatoração algébrica com um exemplo. Em sua abordagem, não realiza a interação com a Geometria e não faz aplicação de fatoração.

A coleção não se aprofunda no tema introdutório e em seguida já menciona os casos de fatoração de polinômios.

### **3.3.1 Síntese das coleções analisadas**

Nas análises, observou-se que o conteúdo de fatoração de polinômios é apresentado, na maioria das coleções, no volume nove, segundo os preceitos da BNCC. A seguir, mostra-se as habilidades da unidade temática da Álgebra na BNCC para o 8º. e 9º. anos (Figuras 8 e 9).

Figura 8 – Habilidades da BNCC de Álgebra para o 8º. ano

<b>(EF08MA06)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
<b>(EF08MA07)</b> Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
<b>(EF08MA08)</b> Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
<b>(EF08MA09)</b> Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ .
<b>(EF08MA10)</b> Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
<b>(EF08MA11)</b> Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
<b>(EF08MA12)</b> Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
<b>(EF08MA13)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: (Brasil, 2018, p. 313).

Figura 9 – Habilidades da BNCC de Álgebra para o 9º. ano

<b>(EF09MA06)</b> Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
<b>(EF09MA07)</b> Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
<b>(EF09MA08)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
<b>(EF09MA09)</b> Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: (Brasil, 2018, p. 317).

Observando a Figura 9, a BNCC utiliza expressão algébrica ao invés da terminologia usual “polinômio”. Esse documento normativo também menciona a fatoração algébrica nas habilidades do 9º. ano. Mesmo com essas orientações, três coleções introduzem a fatoração algébrica no 8º ano e foram aprovadas no PNLD 2020.

Além disso, nota-se também que, na habilidade que se refere especificamente à fatoração, a indicação é que sejam utilizados os produtos notáveis como elos entre o que os

alunos já conhecem e o novo conteúdo, e que a aplicabilidade seja direcionada para a resolução de equações de segundo grau.

### **3.4 Elaboração da sequência didática**

Para aplicação da sequência didática, será elaborada uma apostila para os alunos (Apêndice B) e serão produzidos oito Tabuleiros de Fatoração para auxiliar na aprendizagem. Também será utilizado o Tabuleiro em tamanho maior para que as pesquisadoras possam fazer exemplos para toda a turma. A sequência didática será composta por nove atividades, e as duas últimas deverão ser devolvidas às pesquisadoras como instrumento de coleta de dados.

A aplicação está prevista para dois encontros, cada um com duas horas/aula, totalizando quatro horas/aula. Inicialmente, a apostila irá retomar o conceito de fatoração numérica utilizando a representação geométrica com disposição retangular para determinar se um número é primo ou composto. Serão analisados os números 5 e 6 e suas representações. Observando os seus divisores, verificar-se-á se é um número composto ou primo.

O objetivo de iniciar com a fatoração numérica é relembrar o conceito de fatoração, para em seguida, introduzir a fatoração algébrica. Isso será feito porque, de acordo com a aplicação do teste diagnóstico, foi observado que o significado de fatoração era desconhecido por muitos participantes.

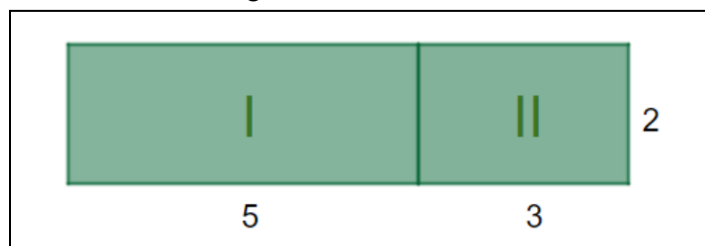
Posteriormente, será definido o conceito de fatoração como "um número natural pode ser representado por um produto entre dois ou mais fatores. A escrita do número como um produto é chamada de fatoração".

Para a primeira atividade, os alunos receberão uma folha de malha quadriculada para representar os números 10, 12, 13 e 15 e dizer se cada um é um primo ou composto, em seguida escrevendo-os como produtos de dois ou mais fatores.

Dando continuidade, a questão 2 será feita com os alunos. Como, nesta atividade, espera-se que os participantes escrevam a representação da área e não o cálculo da área do retângulo, foi optado por realizá-la com eles.

Será apresentado um retângulo composto por dois retângulos menores adjacentes (Figura 10) e deseja-se encontrar a representação da área total de duas maneiras diferentes.

Figura 10 – Atividade 2

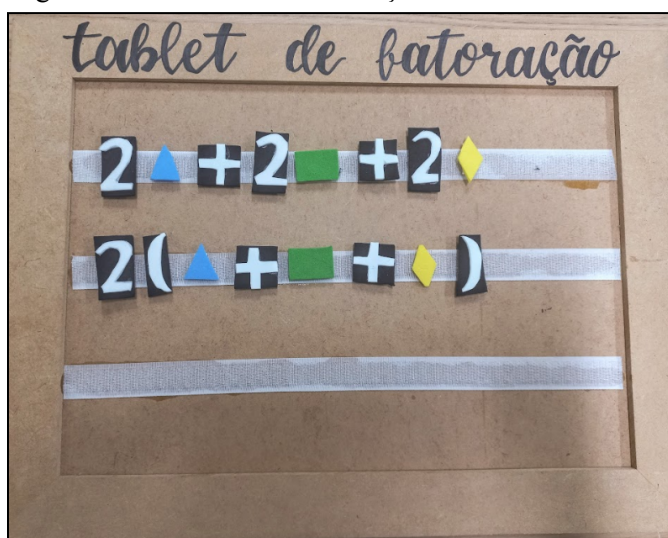


Fonte: Elaboração própria

O objetivo desta atividade é destacar que existem duas representações para a área total deste retângulo. A primeira como  $(5 + 3) \cdot 2$  e a segunda como  $(5 \cdot 2) + (3 \cdot 2)$ , concluindo que a primeira representação é a forma fatorada da segunda. Ressaltando ainda que 2 é o fator comum da segunda representação. Aqui já se faz uso da TRRS, pois são apresentadas três representações do mesmo objeto matemático, realizando uma conversão e um tratamento.

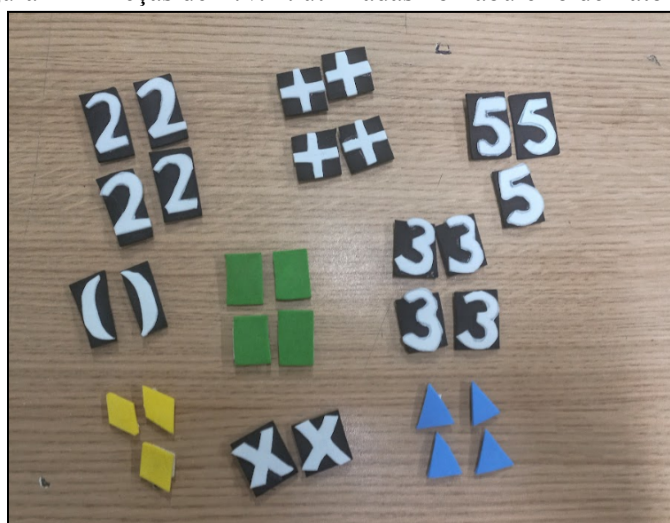
Para iniciarmos o caso de fatoração algébrica com termo comum em evidência, utilizaremos o Tabuleiro de Fatoração, com o objetivo de tornar a aula mais dinâmica e lúdica. A turma será dividida em grupos para realizar a próxima atividade proposta. Este material será produzido com base em madeira ou papelão, números e figuras geométricas de E.V.A. e velcro formando as linhas para representar as expressões (Figuras 11 e 12).

Figura 11 – Tabuleiro de Fatoração com base de madeira



Fonte: Elaboração própria.

Figura 12 – Peças de E.V.A. utilizadas no Tabuleiro de Fatoração



Fonte: Elaboração própria.

A apostila apresenta um retângulo de base 2 composto por três retângulos menores de mesma base e alturas representadas por figuras geométricas: um triângulo, um retângulo e um losango, respectivamente.

Na apostila, será representada a área deste retângulo de duas maneiras distintas. Na primeira representação da área do retângulo será somada a área de cada figura que compõe o retângulo maior ( $2 \triangle + 2 \square + 2 \diamond$ ). Na segunda representação, será considerada as dimensões totais do retângulo maior [ $2(\triangle + \square + \diamond)$ ]. Novamente, são enfatizadas a conversão e o tratamento envolvidos, de acordo com a TRRS.

Serão exemplificadas estas duas representações de área no tabuleiro de fatoração em conjunto com os alunos para que eles se habituem com o material produzido para este momento.

Logo após a finalização deste exemplo, será disponibilizada a terceira atividade, em que os alunos terão que fatorar cinco expressões algébricas com o auxílio do tabuleiro de fatoração. Ao utilizar o tabuleiro, deverão que considerar  $x = \triangle$ ,  $y = \square$  e  $z = \diamond$ .

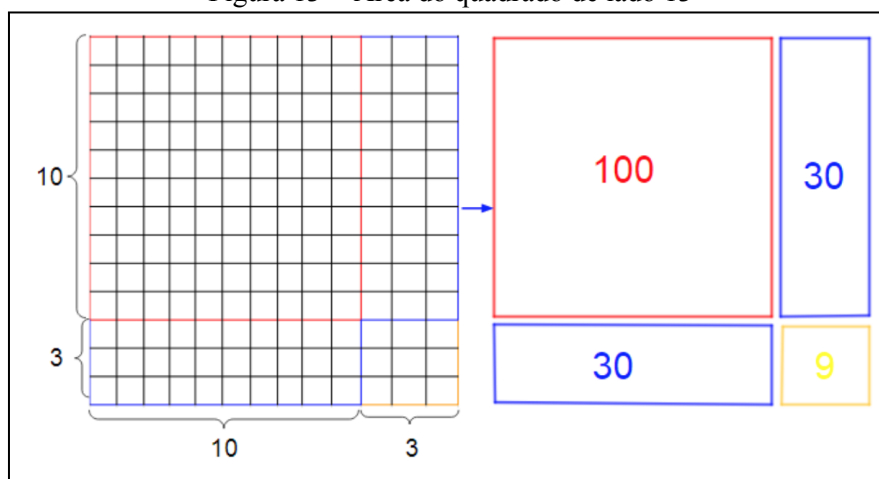
Para o estudo dos casos de fatoração trinômio quadrado perfeito e diferença de dois quadrados, optou-se abordar os respectivos produtos notáveis, quais sejam, o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença. Serão apresentados os produtos notáveis antes de cada caso de fatoração, pois esses conceitos estão interligados e se complementam no estudo da Álgebra. Além disso, conforme diagnosticado no teste aplicado às turmas, e ainda levando em consideração o que foi relatado pelos alunos, não se pode

presumir que haja domínio de conteúdos presentes no oitavo e nono anos, o que incluiria produtos notáveis, de acordo com as habilidades da BNCC já mencionadas neste trabalho.

Dando continuidade à apostila, será apresentado o tópico 3: Fatoração algébrica utilizando o quadrado da soma. Antes de iniciar o produto notável do quadrado da soma, o mesmo será apresentado de forma numérica, para que os participantes consigam se familiarizar com o raciocínio e perceber que farão algo análogo algebricamente.

Inicialmente será utilizada uma estratégia para calcular o  $13^2$ , reescrevendo o 13 como  $(10 + 3)$  e em seguida o desenvolvimento desta resolução, apresentada a partir do cálculo de área de um quadrado de lado 13 (Figura 13), dividido em um quadrado de lado 10, um quadrado de lado 3 e dois retângulos de dimensões 10 e 3.

Figura 13 – Área do quadrado de lado 13



Fonte: Elaboração própria

O objetivo é introduzir o desenvolvimento do produto notável a partir da área do quadrado de lado 13, pois, posteriormente, será feita a relação entre eles. Ressalta-se aqui o esforço para relacionar o conteúdo que será apresentado a algo que o aluno já domina, a fim de encorajá-lo a participar.

Após a explicação, serão formuladas duas questões. A primeira será: "Quais são as áreas das quatro figuras em que o quadrado de lado 13 foi dividido?", na qual espera-se como resposta dos alunos os números 100, 30, 30, 9. A segunda será: "Qual é a soma das áreas dessas quatro figuras?" e espera-se como resposta o valor de 169.

Em seguida, será apresentado um exercício com um desenho da planta de um apartamento (Figura 14) e deseja-se a representação da área de duas maneiras diferentes. A primeira, usando a área de todo o quadrado e a segunda representando a área de cada cômodo e depois somando.

Após evidenciar as duas representações, serão igualadas as duas expressões pois caracterizam a área de uma mesma figura. O objetivo é apresentar o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos de forma algébrica e ao mesmo tempo geométrica. Novamente, enfatiza-se aqui a utilização da TRRS em todas as atividades propostas para introdução dos casos de fatoração.

Figura 14 – Planta do apartamento



Fonte: (Silva, 2016).

Posteriormente, será apresentada a fórmula generalizada com o quadrado de lado medindo  $a + b$  e sua representação geométrica. Em seguida, será proposta uma atividade com quatro expressões algébricas para serem fatoradas utilizando o quadrado da soma de dois termos. Nesta atividade, pretende-se que os alunos factorem algebricamente a partir da interpretação geométrica associada à representação da área de um quadrado.

No caso de fatoração algébrica utilizando o quadrado da diferença, será proposta uma situação problema, realizada com os alunos. A questão trará uma praça com área de esporte ao ar livre no formato de um quadrado de lado  $x$ . Após passar por algumas mudanças, será necessário determinar a nova área de esporte ao ar livre. Espera-se encontrar a seguinte igualdade:  $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ .

Na próxima atividade haverá cinco expressões algébricas que os participantes deverão fatorar utilizando o quadrado da diferença. O objetivo desta atividade é verificar se o aluno reconhece o produto notável e é capaz de aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente para fatorar corretamente as expressões.

No último tópico da aplicação, será utilizada a representação geométrica para observarmos outro caso de produto notável: o produto da soma pela diferença. Será considerado um quadrado de lado medindo  $a$ . Em seguida, será retirado um quadrado menor



de lado medindo  $b$  e será feita uma manipulação das figuras a fim de chegar ao retângulo de dimensões  $(a + b)$  e  $(a - b)$ .

Será representada de duas maneiras distintas a área formada após a retirada do quadrado de lado  $b$ . A primeira, considerando a diferença entre as áreas do quadrado de lado  $a$  e do quadrado de lado  $b$ :  $a^2 - b^2$ . A segunda, considerando a área do retângulo obtido:  $(a + b) \cdot (a - b)$ . As duas maneiras serão iguais pois representam a área do mesmo retângulo.

Para finalizar a sequência didática serão propostas duas questões (Apêndice D) com os casos de fatoração algébrica vistos na aplicação, para os participantes resolverem e entregarem para análise.

É importante destacar que a apostila foi elaborada colorida e será impressa em cores para tornar o material mais atraente, facilitar a compreensão e organização das informações e enriquecer a experiência dos alunos.

### 3.5 Teste Exploratório

Após a aplicação do teste diagnóstico com as turmas de primeiro ano do Ensino Médio, foram destacadas as dificuldades recorrentes dos alunos e elaborada uma sequência didática. Antes da aplicação da sequência com o nosso público-alvo, foi feito um teste exploratório no dia 15 de março de 2023, na sala do Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT).

Os principais objetivos do teste exploratório foram: (i) identificar clareza dos enunciados e tempo de duração da sequência didática; (ii) analisar qualidade dos materiais; (iii) averiguar se o nível estava adequado a partir da explicação da apostila que foi entregue e (iv) identificar possíveis dúvidas nas atividades propostas.

A realização do teste teve início às 18h20 minutos e finalizou às 20h com as considerações dos participantes. Estavam presentes oito alunos matriculados na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II. Foram escolhidos por serem concluintes do curso de Licenciatura e pela disponibilidade no dia da realização do teste.

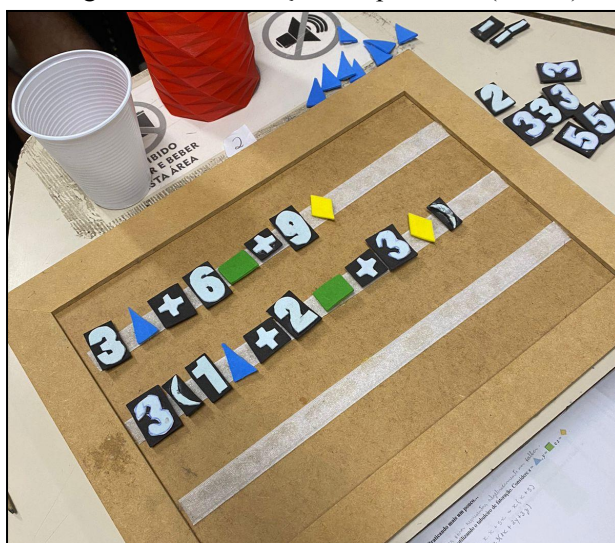
Inicialmente, os participantes consideraram que não conheciam a forma de fatoração numérica com a malha quadriculada para identificar se um número é composto ou primo. Além disso, elogiaram esse método de visualização.

O tópico "Fatoração algébrica com termo comum em evidência" da apostila foi apresentado com o Tabuleiro de Fatoração, dividindo-se os participantes em dois grupos, que

serão chamados de grupo A e grupo B. Neste momento, houve bastante entusiasmo por parte dos integrantes. Eles sugeriram mais exemplos com uso do Tabuleiro devido ao fato de gostarem da dinâmica em grupo.

Foi identificado nesta mesma etapa que o desenvolvimento da fatoração foi diferente em cada grupo. Na letra b, que solicitava fatorar a expressão  $3x + 6y + 9z$ , um dos grupos desenvolveu o número 3 em evidência como o produto de  $3 \times 1$  (Figura 15).

Figura 15 – Resolução da questão 3 (letra b)

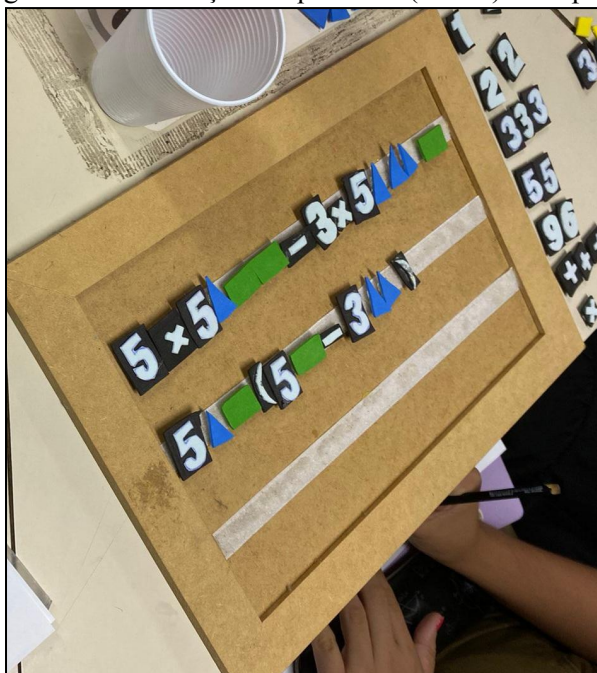


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Essa observação foi relevante para a nossa aplicação pois, a partir disso, serão acrescentadas mais peças como opção de resolução. Neste caso, o número um.

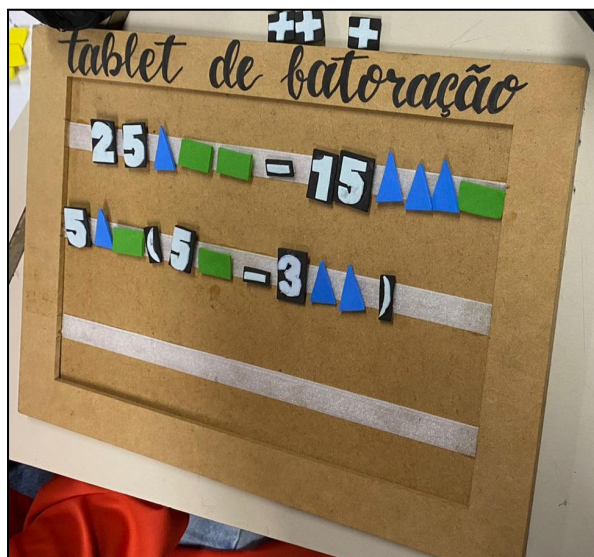
Na letra d, desta mesma questão, os participantes fizeram duas representações diferentes (Figuras 16 e 17).

Figura 16 – Resolução da questão 3 (letra d) - Grupo A



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 17 – Resolução da questão 3 (letra d) - Grupo B



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O grupo A fez a fatoração numérica dos números 25 e 15 na expressão que deveria ser fatorada, já utilizando o conceito de fatoração numérica que foi abordado inicialmente na sequência didática.

Na questão 4, consideramos possível a modificação dos itens como letra (a) e letra (b). Sendo assim, na letra (a) foi solicitada a representação da área total do quadrado. A resposta

esperada seria  $(x + 3)^2$ , porém eles desenvolveram como  $x^2 + 6x + 9$ . Diante deste cenário, será proveitoso resolver com os alunos no dia da aplicação.

Foi analisado que no tópico "Produto da soma pela diferença" houve um obstáculo na representação apenas pela imagem da apostila. Os participantes tiveram dificuldades em assimilar as manipulações da figura inicial até a final. Como consequência desse fato, decidiu-se preparar um recurso com material concreto para ilustrar as etapas desse processo.

Ao final do teste exploratório, alguns participantes relataram que a sequência foi bem elaborada e didática e que desconheciam o desenvolvimento dos conceitos algébricos a partir de representações geométricas, conforme apresentado.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com a disponibilidade dos alunos que participaram do teste diagnóstico, a sequência didática foi aplicada no dia 23 de junho de 2023 no Instituto Federal Fluminense campus Campos Centro a uma turma do segundo ano do curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Edificações.

A escolha aconteceu quando as licenciandas procuraram uma das professoras de matemática do Ensino Médio e a mesma sugeriu uma turma em que ela havia identificado que os alunos apresentavam dificuldades na Álgebra. Como também haviam participado do teste diagnóstico, eram elegíveis a público alvo da pesquisa.

O encontro foi dividido em duas etapas no mesmo dia (Quadro 3), iniciando pela manhã às 8h50 e finalizando às 10h30 com 26 alunos presentes. Já no período vespertino, de 13h20 às 16h, havia 22 alunos, cujas respostas foram analisadas.

Quadro 3 – Cronograma de conteúdo da aplicação da sequência didática

Horário	Conteúdo
Manhã (08h50 - 10h30)	Retomando a fatoração numérica Fatoração algébrica utilizando fator comum em evidência
Tarde (13h20 - 16h)	Fatoração algébrica utilizando quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença

Fonte: Elaboração própria.

### 4.1 Primeira etapa (manhã)

No primeiro momento, as professoras em formação se apresentaram, explicaram o objetivo da aplicação da sequência didática e a importância da participação ativa dos alunos. Antes de iniciar o conteúdo, foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, orientado para que lessem e, caso concordassem, assinassem.

Dando continuidade ao encontro, foi entregue a parte introdutória da apostila, intitulada como “Retomando a fatoração numérica”. Foi destacado que, antes de iniciar a fatoração algébrica, seria retomado o conceito de fatoração numérica. Seguiu-se um questionamento para os alunos: “O que é fatoração?”. Dois alunos responderam que é quando “se divide um número qualquer por um número primo”, e foi interpretado pelas licenciandas que se referiam à decomposição em fatores primos. As professoras em formação deixaram claro que levaram em consideração o que eles haviam dito e ressaltaram que a definição seria aprimorada no decorrer da apostila. Isso está de acordo com o preconizado pela metodologia

da análise de erros, que sugere o desenvolvimento da aula a partir de dificuldades demonstradas pelos alunos acerca do assunto a ser abordado.

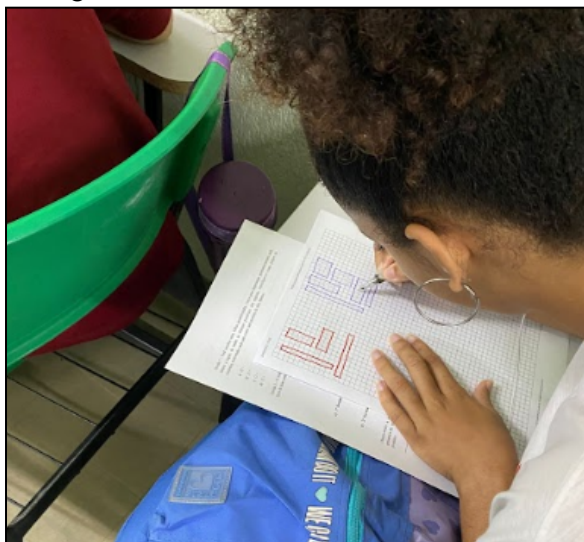
De acordo com Curry (2013), os resultados de pesquisas sobre os erros cometidos por estudantes no processo de ensino podem ser aproveitados por meio de atividades que exploram os conteúdos em que os alunos encontram maiores dificuldades de aprendizagem ou que têm como objetivo aprimorar suas habilidades matemáticas de forma abrangente.

Foi iniciada a leitura da apostila, apresentando os conceitos de números compostos e primos. Utilizou-se a representação geométrica com disposição retangular na malha quadriculada para identificar se um número era primo ou composto. Em seguida, foi abordada a definição de fatoração. Reforça-se aqui a utilização de tipos diferentes de registro a fim de propiciar uma melhor compreensão da fatoração numérica.

Dando continuidade ao encontro, as licenciandas entregaram a página de exercícios e a folha de malha quadriculada a ser utilizada na resolução da questão 1 (Apêndice C). Em seguida, foi lido o enunciado da primeira questão. Como alguns alunos manifestaram dúvidas, foi explicado detalhadamente para melhor compreensão. Observou-se que os participantes não conheciam a representação figural (usando a malha quadriculada) dos números primos e compostos, o que corrobora o afirmado por Passos (2012). Segundo essa autora, os professores privilegiam as linguagens natural e algébrica, sem se preocupar em utilizar outros tipos de registros, como o geométrico.

Durante a execução da atividade proposta, as licenciandas acompanharam os participantes, indo em cada carteira para verificar como estava sendo feita a resolução (Figura 18). Foram necessários aproximadamente quinze minutos para que eles conseguissem finalizar. Em seguida, foi feita a correção no quadro, questionando os participantes quais as possibilidades de fatorar o número proposto em cada item. Os alunos estavam concentrados e respondendo atentamente no momento da correção.

Figura 18 – Aluno realizando a atividade 1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Observou-se que realizar a representação geométrica facilitou aos alunos a tarefa de fatorar os números solicitados. O que corrobora Damm (2008), quando afirma que, na matemática:

[...] as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático (Damm, 2008, p.170).

Para introduzir o fator comum em evidência, foi fixado um retângulo de papelão no quadro (Figura 19) semelhante à questão 2 da apostila (Apêndice C). Neste momento, a atividade foi realizada em conjunto com os participantes, que se mostraram bastante atentos e interessados. Para finalizar, foi solicitado que os alunos identificassem a presença de um fator comum na expressão que representa a área do retângulo obtida na letra (b). Dito isso, eles prontamente conseguiram identificar de forma correta. Observou-se que o uso da representação geométrica contribuiu para que os alunos visualizassem o fator comum com mais facilidade, corroborando a TRRS.

Figura 19 – Retângulo de papelão semelhante à questão 2 da apostila



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dando continuidade, foi solicitado que os alunos se organizassem em trios para realizar a próxima atividade proposta, a fim de promover a troca de conhecimento entre os participantes. Enquanto se organizavam, foi entregue a continuação da apostila e o tabuleiro de fatoração com as peças preestabelecidas para a prática dos exercícios (Figura 20).

Iniciando o tópico de fatoração algébrica utilizando o fator comum em evidência, foi feita a leitura do material em conjunto com a turma e realizada, de dois modos distintos, a representação da área do retângulo ilustrado na apostila com o uso do tabuleiro de fatoração (Figura 20). No primeiro modo, foi feita a soma da área de cada figura que formava o retângulo. Posteriormente, foi considerada a dimensão do retângulo todo para representar a área. Destacou-se, em seguida, que a segunda representação é a forma fatorada da primeira.

A partir de uma representação geométrica, foi feita uma conversão para um registro algébrico da área do retângulo. Fez-se então um tratamento na representação da área, chegando à sua forma fatorada. Utilizando-se duas representações da mesma expressão algébrica, obtidas a partir de conceitos geométricos, espera-se agregar significado à fatoração. De acordo com Damm (2008), a apreensão do objeto matemático é garantida pela coordenação de diversos registros de representação.



Figura 20 – Alunos manipulando o tabuleiro de fatoração



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para entender como deveria ser utilizado o tabuleiro, as licenciandas fizeram a letra (a) da terceira questão, solicitando que os participantes ficassem atentos à explicação, para em seguida manipularem as peças. No momento da explicação, um aluno respondeu que a forma fatorada da expressão  $x^2 + 5x$  seria  $x(x + 5x)$ . As licenciandas reforçaram que, aplicando a propriedade distributiva, o resultado não seria igual à expressão inicial. Por isso, a forma fatorada é  $x(x + 5)$ . O aluno em questão demonstrou ter entendido seu erro. Aqui, além do tabuleiro de fatoração, que proporciona uma representação visualmente atrativa, utilizou-se a operação inversa para explicar a fatoração, de acordo com a análise do erro cometido pelo aluno. Tal intervenção demonstrou ser efetiva, o que corrobora o preconizado pela metodologia da análise de erros.

De acordo com Curry (2013), o erro pode ser empregado como uma estratégia de ensino quando o professor desenvolve técnicas durante a aula que ajudam o aluno a identificar seus próprios erros.

Para finalizar a primeira etapa, foi solicitado que os trios resolvessem os outros itens da questão com o auxílio do tabuleiro de fatoração. Durante o tempo disponibilizado para que respondessem, as professoras em formação passavam pelas carteiras observando e acompanhando as resoluções. Quando necessário, as licenciandas tiravam as dúvidas que

surgiam. Alguns exemplos de resoluções feitas pelos alunos são comentadas a seguir.

Na letra (b), com a expressão  $3x + 6y + 9z$ , alguns alunos não identificaram o fator comum para colocar em evidência. Foi preciso ter interferência das licenciandas, ressaltando a fatoração numérica vista anteriormente e solicitando que eles fatorassem os números 3, 6 e 9. Após essa orientação, eles prontamente perceberam que o fator comum era o número 3.

Na expressão da letra (c):  $xy^2 - x^2y$ , os fatores comuns são  $x$  e  $y$  e esperava-se como fatoração:  $xy(y - x)$ . Contudo, alguns participantes registraram como  $x(y^2 - xy)$ , que não deixa de ser uma forma fatorada da expressão. Na letra (d) desta mesma questão, os alunos conseguiram identificar de maneira satisfatória os três fatores comuns para colocar em evidência. Acredita-se que esta facilidade foi fruto da compreensão dos itens anteriores.

No último item, com a expressão  $7x - 14xy$ , esperava-se como resposta da fatoração:  $7x(1 - 2y)$ . Foram observadas duas resoluções equivocadas e distintas. Um dos alunos registrou a forma fatorada sendo  $7x(-2y)$ . As professoras em formação solicitaram que o aluno efetuasse o produto usando a propriedade distributiva a partir da resolução feita por ele e assim, ele chegaria na expressão  $-14xy$ , que é diferente da expressão dada no item (e). Com isso, as licenciandas questionaram a fim de que o aluno percebesse o elemento neutro da multiplicação. Outro aluno fatorou como  $7x(x - 2y)$ , e rapidamente, depois de solicitar que realizasse o procedimento supracitado, ele percebeu que a forma fatorada da expressão era  $7x(1 - 2y)$ .

A primeira etapa se encerraria às 10h30, e devido ao tempo ofertado para aplicação, foi feita a correção até o item (c) com o auxílio do tabuleiro de fatoração maior para os alunos visualizarem.

No momento da devolução do tabuleiro de fatoração, os participantes comentaram que o material estava atrativo e diferenciado. Um aluno reconheceu que na produção das peças houve muita dedicação por parte das pesquisadoras. Foi observado que os alunos se mostraram dispostos e empolgados a manipular o material elaborado. Segundo Facchi (2022), é evidente que os materiais manipuláveis têm a capacidade de impactar o processo de aprendizagem de diversas maneiras. Além disso, é importante ressaltar que tais recursos podem servir como um estímulo para os alunos, promovendo sua motivação para aprender, ao mesmo tempo em que tornam a compreensão de conceitos matemáticos mais acessível.

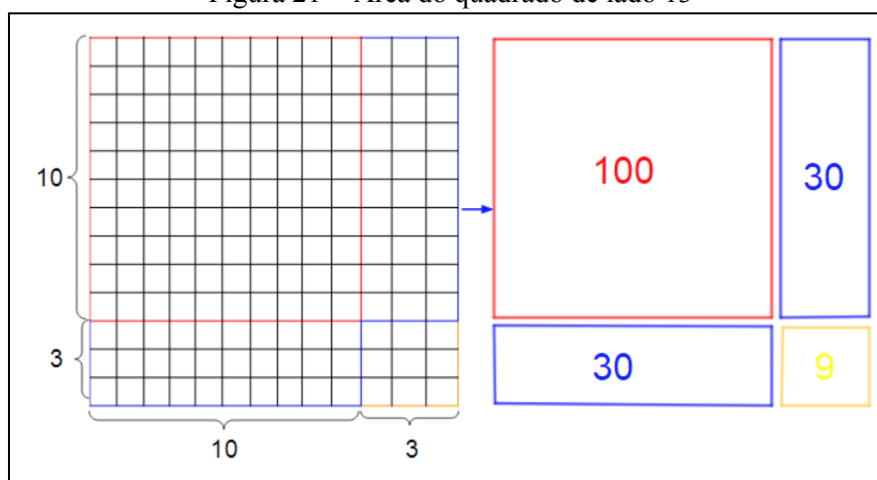
Ressalte-se que foi perceptível a contribuição do uso do registro geométrico para a compreensão tanto do conceito de fatoração algébrica como do fator comum em evidência.

## 4.2 Segunda etapa (tarde)

Para iniciar o período da tarde, foi entregue uma lista de presença para os participantes assinarem. Enquanto iam assinando, foi feita a correção no quadro (sem a utilização do tabuleiro) do exercício de fatoração algébrica utilizando fator comum em evidência a partir do item (d). Neste momento, houve uma participação menos ativa dos alunos e, devido ao horário, demonstraram um pouco de cansaço, porém, no decorrer da atividade, ficaram mais despertos.

No próximo tópico da sequência didática, intitulado como "Fatoração algébrica utilizando o quadrado da soma" foi apresentada uma estratégia para calcular o  $13^2$ , reescrevendo o número 13 como  $(10 + 3)$ , e em seguida, a partir do cálculo de área de um quadrado de lado 13 (Figura 21), dividido em um quadrado de lado 10, um quadrado de lado 3 e dois retângulos de dimensões 10 e 3. Foi perguntado e respondido oralmente pelos participantes quais são as áreas das quatro figuras em que o quadrado de lado 13 foi dividido e qual é a soma das áreas das quatro figuras. Pretendia-se introduzir numericamente o quadrado da soma, antes de abordá-lo algebricamente, na perspectiva de partir de algo que os alunos já dominassem, a fim de encorajá-los a participar e mostrar que eram capazes.

Figura 21 – Área do quadrado de lado 13

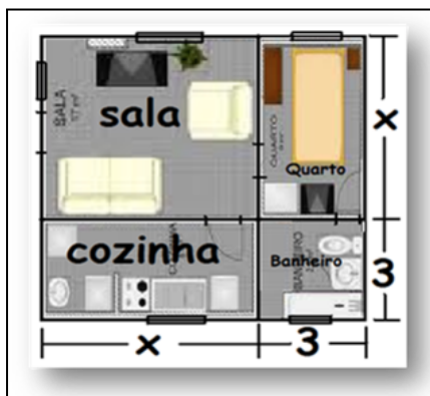


Fonte: Elaboração própria.

Dando continuidade ao caso de fatoração algébrica utilizando o quadrado da soma, foram entregues as páginas 5 e 6 da apostila. Para introduzi-lo, no exercício 4 havia o desenho de uma planta de apartamento (Figura 22) e desejava-se a representação da área de duas

maneiras diferentes. Nesta atividade, novamente é apresentada uma representação geométrica e duas algébricas de um mesmo objeto, sendo realizadas duas conversões.

Figura 22 – Planta do apartamento



Fonte: (Silva, 2016).

A primeira representação é usando a área de todo o quadrado  $((x + 3)^2)$  e a segunda é representando a área de cada cômodo e depois somando  $(x^2 + 6x + 9)$ . Antes de começar a resolução da questão, alguns alunos ficaram animados e comentaram da questão ter relação com o curso técnico que eles fazem no instituto (edificações).

Diante disto, vale ressaltar a importância da contextualização no processo de ensino e aprendizagem, pois através dessa abordagem, os alunos irão compreender a relevância dos conceitos matemáticos.

A BNCC (Brasil, 2018) destaca a relevância de integrar o conhecimento escolar no contexto da vida social, considerando que essas práticas têm origem em situações da vida real e devem, ao mesmo tempo, ser apresentadas aos estudantes dentro de contextos significativos

A questão foi realizada em conjunto com os alunos da turma, reforçando que seu objetivo era a representação da área. Não era preciso “resolver e descobrir o valor de  $x$ ”, assim como a questão 2 do tópico de fatoração numérica. Foi necessário complementar desta forma devido ao fato deles sempre desejarem encontrar o valor de “ $x$ ”.

Ao representar a área total do quadrado de lado  $x + 3$ , foi perguntado como se calcula a área de um quadrado qualquer e prontamente eles responderam como a base vezes a altura. Foi perguntado qual era a dimensão da base desse quadrado e um aluno respondeu  $3x$ . As professoras em formação explicaram que o lado do quadrado era composto pela parte  $x$  e pela parte  $3$ , logo, deveria ser  $x + 3$ . Como foi obtida uma resposta positiva sobre o entendimento, as licenciandas deram continuidade. Essa incoerência demonstra a fragilidade do conceito algébrico, pois a representação  $3x$  significava, para o aluno, uma soma e não um

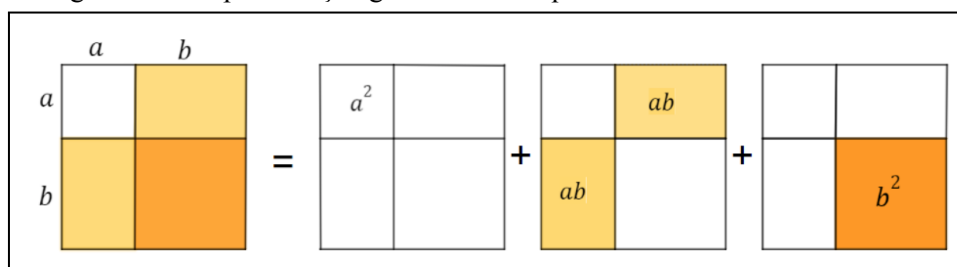
produto.

Após fazer as duas representações, as professoras em formação esclareceram que são iguais porque representam a área de uma mesma figura, e que uma era a forma fatorada da outra. Os alunos compreenderam esse fato, o que corrobora Duval (2009a). Segundo ele, para a compreensão matemática, é essencial ter acesso a pelo menos dois registros de representação distintos.

A estratégia de calcular o  $13^2$  de duas maneiras diferentes e a representação da área do apartamento foram preâmbulos para chegar ao cálculo do quadrado da soma de dois termos. Foi então feito o raciocínio com um quadrado de lado medindo  $a + b$  e sua representação geométrica (Figura 23). As licenciandas perguntaram aos alunos se eles se recordavam da fórmula do quadrado da soma de dois termos e apenas um afirmou lembrar-se. Esse é um indício de que o conteúdo havia sido momentaneamente decorado e logo esquecido.

Acredita-se que o ato de decorar fórmulas é pouco eficaz na matemática para o entendimento de alguns conceitos. De acordo com Reis e Nehring (2017), a contextualização visa fornecer uma base sólida para o processo de aprendizagem, pois ajuda os alunos a entenderem significados aos conceitos matemáticos, estabelecendo conexões relevantes em seu entendimento.

Figura 23 – Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos



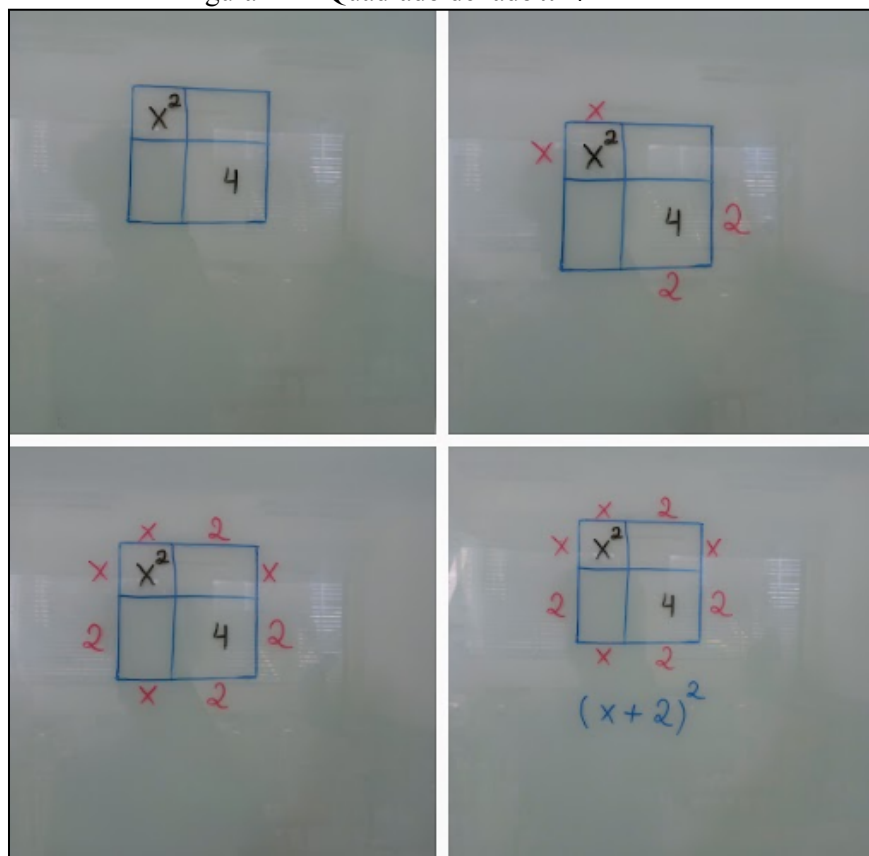
Fonte: Elaboração própria.

Os participantes acompanharam e compreenderam a obtenção da fórmula para o cálculo do quadrado da soma, uma vez que esse tipo de procedimento já havia sido feito outras vezes ao longo da aula. Isso reforça o afirmado por Duval (2009a): a conversão resulta em um segundo registro, que atua como apoio ou referência para os tratamentos realizados em um registro diferente. A representação geométrica facilitou a compreensão do registro algébrico, pois foi por meio da representação da área de um quadrado que se obteve a regra geral para o cálculo da soma de dois termos.

Na questão 5, as licenciandas resolveram juntamente com a turma o item (a), sugerindo que os alunos pensassem no quadrado visto anteriormente e identificassem pela

expressão algébrica a representação das áreas dos dois quadrados e, em seguida, identificar as dimensões desses quadrados menores. Sabendo as dimensões dos quadrados menores, os alunos conseguem completar as dimensões que faltam, para descobrir os lados do quadrado maior (Figura 24).

Figura 24 – Quadrado de lado  $x + 2$

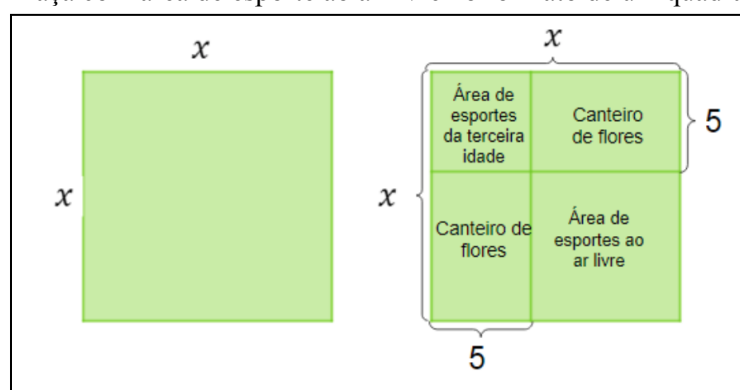


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a explicação de como fatorar as expressões, foi disponibilizado um tempo em cada item para resolver e, posteriormente, fazer a correção. Durante a correção, um aluno comentou que não havia estudado a partir da representação geométrica e por achar um caminho "mais longo", prefere "gravar a fórmula" do quadrado da soma de dois termos.

Foram entregues as folhas 7 e 8 para iniciar o penúltimo tópico da apostila, intitulado como "Fatoração algébrica utilizando o quadrado da diferença". Para introduzir esse caso de fatoração, foi proposta uma situação problema, realizada com os alunos. A questão trazia a imagem (Figura 25) de uma praça com área de esporte ao ar livre no formato de um quadrado de lado  $x$  e após passar por algumas mudanças (como acrescentar os ambientes de canteiros de flores e a área de esporte da terceira idade), solicitava-se determinar a nova área de esporte ao ar livre.

Figura 25 – Praça com área de esporte ao ar livre no formato de um quadrado de lado  $x$



Fonte: Elaboração própria.

Para iniciar a resolução, a professora em formação determinou qual a área do quadrado de esportes ao ar livre. Ao perguntar quais eram as dimensões da nova área de esporte ao ar livre, os alunos prontamente responderam  $x - 5$ . Logo após, foi perguntado como se representava a área desse quadrado e foi respondido  $(x - 5)^2$ , de acordo com a questão. A resposta ter sido rápida surpreendeu as pesquisadoras, e indicou que a representação geométrica realmente auxiliou na compreensão do registro algébrico. Segundo Damm (2008):

É tomando simultaneamente em conta dois registros de representação, e não cada um isoladamente, que podemos constatar a importância das representações semióticas nas atividades cognitivas matemáticas. Melhor dizendo, é durante a passagem de um registro de representação a outro que podemos observar a importância da forma das representações (Damm, 2008, p. 187).

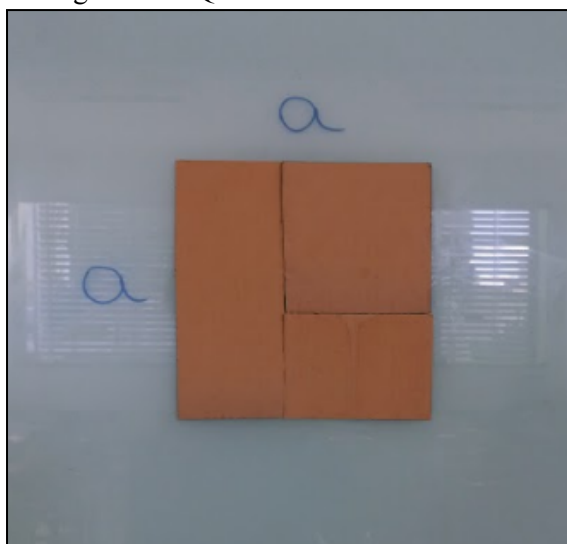
Para demonstrar o desenvolvimento do quadrado da diferença de dois termos, primeiramente foi representada a área considerando a dimensão total da praça ( $x^2$ ). Em seguida, foi escrita a área total considerando cada área das figuras menores: área de esportes da terceira idade (25), área do primeiro canteiro de flores ( $5(x - 5)$ ), área do segundo canteiro de flores ( $5(x - 5)$ ) e área de esportes ao ar livre ( $(x - 5)^2$ ). Posteriormente, as licenciandas igualaram as duas representações (considerando a área da dimensão total do quadrado e somando cada área das figuras que formavam o quadrado) e fizeram a manipulação algébrica até chegar em  $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ . Foi reforçado que era semelhante ao quadrado da soma de dois termos e destacado que a diferença era o sinal da segunda parcela.

Ao finalizar a questão, um aluno perguntou o porquê de não encontrar o valor de  $x$  na questão. As professoras em formação explicaram que o enunciado solicitava apenas a representação da área, e que o objetivo era entender o desenvolvimento da fórmula a partir da situação problema. Os alunos pareceram não se conformar com o fato de não obterem o valor de “ $x$ ”. Isso reforça a suspeita de que a diferença entre variável e incógnita não é clara para eles.

A próxima questão continha os itens de (a) até (d) e solicitava que eles fatorassem cada expressão utilizando os produtos notáveis. Um aluno chamou uma das licenciandas para verificar se a questão estava correta, pois já havia finalizado. Como estava feita corretamente, o aluno demonstrou contentamento e auxiliou outros colegas na resolução, quando tinham dúvidas, gerando a interação entre eles e a construção do conhecimento em grupo. No fim, as licenciandas fizeram a correção no quadro.

No último tópico da aplicação, intitulado "Fatoração algébrica utilizando o produto da soma pela diferença", foram utilizadas três peças de papelão (dois retângulos e um quadrado) para formar um quadrado maior de lado medindo  $a$  (Figura 26) para fixar no quadro, semelhante à apostila.

Figura 26 – Quadrado de lado medindo  $a$

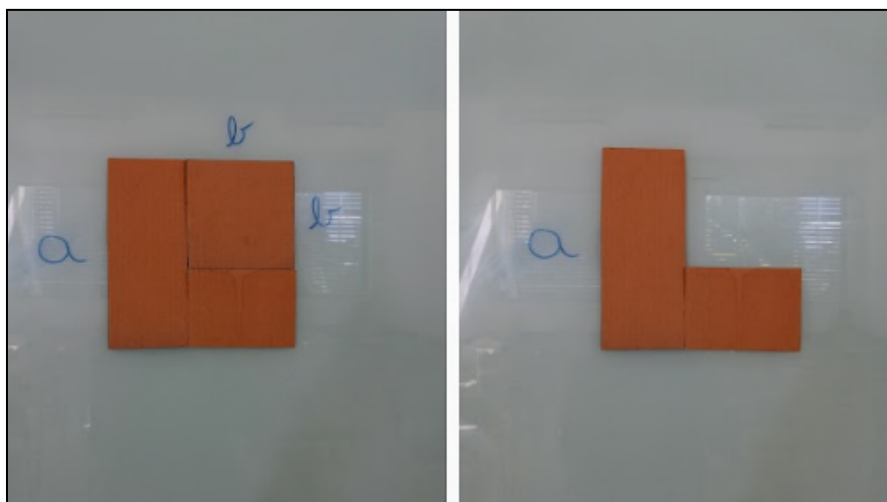


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após fixar as peças no quadro, foi apresentado o quadrado de lado  $a$  e retirado um quadrado interno de lado medindo  $b$  (Figura 27).



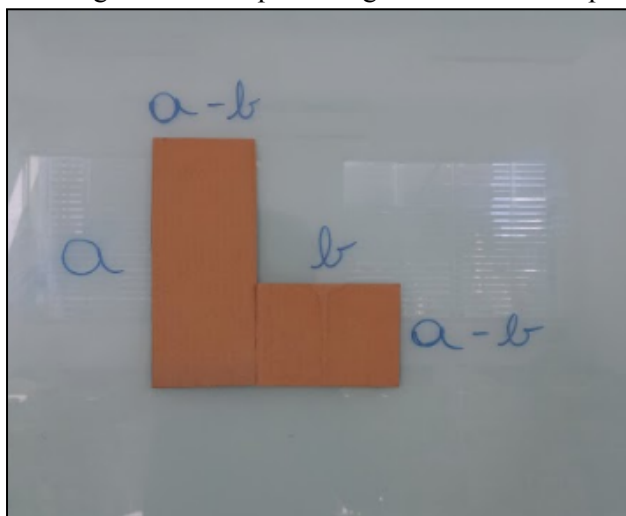
Figura 27 – Quadrado de lado  $a$  após retirar o quadrado de lado  $b$



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, as licenciandas explicitaram os lados das peças retangulares da figura (Figura 28).

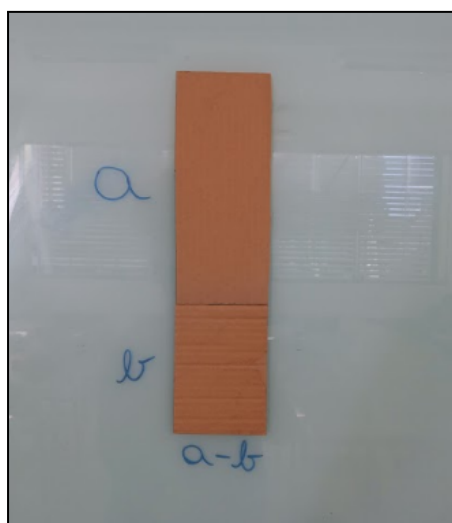
Figura 28 – Figura formada por retângulos com lados explicitados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Então, elas moveram o retângulo de dimensões  $(a - b)$  e  $(b)$  para formar outro retângulo (Figura 29), de dimensões  $(a + b)$  e  $(a - b)$ .

Figura 29 – Retângulo de lados medindo  $(a + b)$  e  $(a - b)$



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi representada de duas maneiras distintas a área formada após a retirada do quadrado de lado  $b$ . A primeira maneira considerando a diferença entre as áreas do quadrado de lado  $a$  e do quadrado de lado  $b$ :  $a^2 - b^2$ . A segunda, considerando a área do retângulo obtido:  $(a + b) \cdot (a - b)$ . Posteriormente, as professoras em formação igualaram as duas expressões, porque são representações da área de mesma figura, ressaltando que  $(a + b) \cdot (a - b)$  representa a forma fatorada de  $a^2 - b^2$ .

Foi observado pelas licenciandas que ter levado as figuras para fixar no quadro auxiliou na compreensão e na visualização. Alguns alunos disseram que não haviam visto a representação geométrica quando estudaram esse conteúdo anteriormente. Segundo Duval (2009b), a diversidade dos sistemas semióticos desempenha um papel crucial na aprendizagem matemática, já que as representações semióticas possibilitam uma multiplicidade de formas de representar um mesmo objeto.

Foi entregue uma folha de exercícios com todos os casos de fatoração vistos na aplicação da sequência (Apêndice D). Os alunos deveriam resolver em um tempo preestabelecido de trinta minutos e entregar às licenciandas, como um instrumento de coleta de dados. Foi reforçado que na folha não era necessária a identificação de cada um, pois foi solicitado que, ao final, eles colocassem observações sobre a aula, como por exemplo, se já conheciam a representação geométrica de alguns casos, quais foram as contribuições, se eles haviam gostado, etc.

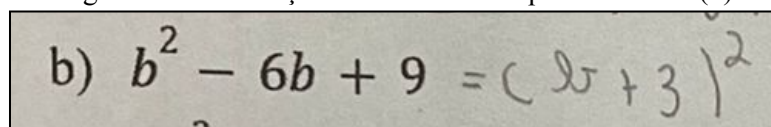
Na primeira questão havia uma tabela para ser preenchida. Como sugestão do teste exploratório, as licenciandas explicaram no quadro como completar a primeira linha e o

restante eles fizeram sozinhos. As professoras em formação estavam à disposição para sanar eventuais dúvidas relacionadas ao enunciado.

Introduzir o conteúdo de fatoração a partir do conceito de área do retângulo, considerado um conceito habitual e que os alunos tinham domínio, foi o que facilitou aos participantes atingirem o objetivo da aplicação. Ao longo de toda a proposta, originava-se do registro geométrico a representação da área de uma figura de duas maneiras diferentes, sendo uma a forma fatorada da outra. Utilizou-se tanto a conversão como o tratamento.

Ao analisar as respostas obtidas na folha de exercícios, entregue no final da aula, pôde-se constatar que a maioria dos alunos demonstrou ter compreendido o que é fatorar e conseguiu responder as questões acertadamente. De modo geral, observou-se erros comuns e considerados relevantes como a troca de sinais no caso do quadrado da diferença e do quadrado da soma (Figura 30). No caso da questão 2 letra (b), esperava-se como resposta a fatoração  $(b - 3)^2$  e não  $(b + 3)^2$ , como mostra a Figura 30, a seguir.

Figura 30 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (b)



$$b) \quad b^2 - 6b + 9 = (b + 3)^2$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item (c) desta mesma questão, foi identificada uma incoerência na resposta de alguns alunos (Figura 31) ao escrever  $(3a - 1)^2$  no lugar de  $(3a + 1)(3a - 1)$ , não associando-a à questão anterior, feita por eles.

Figura 31 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (c)

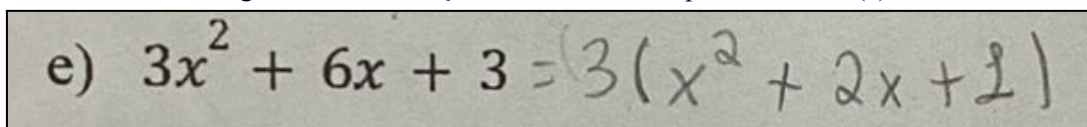


$$c) \quad 9a^2 - 1 = (3a - 1)^2$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No último item, era necessário manipular dois casos de fatoração (utilizando fator comum em evidência e o quadrado da soma). Alguns alunos fatoraram apenas utilizando o fator comum em evidência (Figura 32).

Figura 32 – Resolução de um aluno na questão 2 letra (e)


$$e) 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1)$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

De maneira geral, as pesquisadoras consideram que alguns erros dos alunos foram devido à falta de atenção no momento. Por mais proveitoso que tenha sido, não é considerado suficiente para que eles alcancem um domínio completo dos casos de fatoração. A aula teve um desempenho positivo, permitindo uma compreensão sólida do conceito de fatoração e contribuindo para a resposta da questão de pesquisa.

Comparando-se os erros cometidos no teste diagnóstico com os observados após a aula, observou-se grande progresso dos participantes da aplicação, não só quanto à compreensão do conceito de fatoração algébrica como de alguns de seus casos, trabalhados ao longo da aula.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi motivada pelo fato das autoras terem ingressado no Ensino Superior de Matemática com dificuldades e habilidades limitadas em fatoração algébrica, que não foram adequadamente desenvolvidas durante o Ensino Fundamental e Médio.

Além disso, durante as aulas particulares ministradas pelas autoras, foi observado que alguns estudantes da Educação Básica desconhecem o conceito de fatoração algébrica e suas aplicações. Para a realização deste trabalho, foi definido o seguinte tema da Álgebra: fatoração algébrica.

O presente trabalho objetivou investigar as possíveis contribuições de uma sequência didática, elaborada a partir do levantamento das dificuldades em fatoração algébrica dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio do IFF *Campus* Campos Centro, para minimizar tais dificuldades. Para alcançar o objetivo geral, foram traçados três objetivos específicos.

Para levantamento de coleta de dados e elaboração de uma sequência didática, destacando também as dificuldades em fatoração, foi aplicado um teste diagnóstico nas turmas de primeiro ano. A partir da análise dos resultados obtidos, foi averiguado que os alunos desconheciam inclusive o conceito de fatoração.

Na matemática, o âmbito algébrico e o geométrico se relacionam. Em alguns casos, há mais ênfase no ensino algébrico. A Álgebra, frequentemente, apresenta uma natureza abstrata e é acompanhada por desafios significativos durante o processo de aprendizagem, devido a valorização incoerente da mecanização e da memorização.

Diante deste fato, utilizar estratégias diferentes para o ensino de fatoração, sendo ela a representação geométrica, facilitou a compreensão e deu significado ao tema proposto. Destaca-se que a escolha da elaboração da apostila foi a partir da análise dos livros didáticos do PNLD 2020.

Para averiguar como a utilização da teoria dos registros de representação semiótica pode contribuir para a compreensão dos processos de fatoração algébrica, durante a aplicação didática, foram utilizados pelo menos dois registros de representação e a conversão entre eles para melhor compreensão dos alunos.

Ao explorarmos a interdependência entre a Geometria e a Álgebra ao longo deste estudo, emerge uma compreensão aprofundada das conexões fundamentais que permeiam essas duas unidades temáticas aparentemente distintas.

O presente trabalho buscou desenvolver conceitos algébricos a partir de conhecimentos geométricos. Assim, estabelecendo uma relação entre Geometria e Álgebra.

Ao reconhecer que a Geometria proporciona uma interpretação visual dos conceitos algébricos, percebe-se que ela não apenas facilita a compreensão intuitiva das relações entre os termos, mas também nos permite discernir padrões geométricos subjacentes nas expressões algébricas.

A compreensão dessas duas unidades temáticas de maneira integrada enriquece os métodos matemáticos e abre portas para aplicações práticas abrangentes. Assim, não fortalecendo apenas o domínio sobre a fatoração algébrica mas também as possibilidades para abordar desafios matemáticos de forma eficaz.

Mediante as pesquisas realizadas para a elaboração do presente trabalho e dos resultados obtidos no teste diagnóstico, percebeu-se que se faz necessário uma investigação prévia dos conhecimentos dos alunos, aplicando uma aula que intervenha nas maiores dificuldades deles.

O estudo proporcionou diversas contribuições para o desenvolvimento das pesquisadoras, permitindo-lhes: (i) aprofundarem seus conhecimentos a respeito da fatoração algébrica, (ii) compreenderem a importância da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, (iii) aperfeiçoarem as práticas de elaboração de uma sequência didática, (iv) aprimorarem as habilidades relacionadas à leitura e escrita, e (v) adquirirem experiência em ministrar um minicurso relacionado ao tema.

De modo geral, foi observado, durante a pesquisa, que os alunos chegam no Ensino Médio com muita defasagem no ensino da Matemática, desconhecendo conceitos elementares e que são necessários para a aprendizagem. Contudo, alguns alunos preferem memorizar fórmulas e realizar o processo mecânico mesmo que isso signifique que ele não consiga absorver o conteúdo adequadamente.

Foi observado também, desde a aplicação do teste diagnóstico, que os alunos desconheciam a diferença entre expressão algébrica e equação, tentando encontrar o valor de uma variável como se fosse uma incógnita.

A partir dos resultados obtidos ao longo da pesquisa, deixa-se como sugestões para trabalhos futuros aprimorar a compreensão da distinção entre variável e incógnita, assim como entre expressão algébrica e equação, por meio de abordagens geométricas.

Também é sugerido explorar a abordagem do material de forma prolongada, permitindo que o aluno deduza por si próprio os produtos notáveis e, conseqüentemente, o processo de fatoração.

## REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf). Acesso em: 22 ago. 2023.

BURIGATO, Sonia Maria Monteiro da Silva. **Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes: papel e lápis e no software aplusix**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/848/1/Sonia%20Maria%20Monteiro%20da%20Silva%20Burigato.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2023.

CHAVANTE, Eduardo. **Convergências matemática**. 2. ed. São Paulo: SM Educação, 2018.

COSTA, José Airton do Nascimento. **Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º. ano do Ensino Fundamental**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, PROFMAT, Teresina, 2019. Disponível em: <https://sistemas2.uespi.br/bitstream/tede/217/5/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20Completa>. Acesso em: 22 ago. 2023.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros e formação de professores: sugestões para ensino e pesquisa em cursos de Licenciatura em Matemática. **Contexto e Educação**, Rio Grande do Sul, v. 21, n. 76, p. 95-113, jul./dez. 2006. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/1098>. Acesso em: 22 ago. 2023.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

DA SILVA JUNIOR, Clovis Gomes; REGNIER, Jean-Claude. Livros didáticos e suas funções para o professor de matemática no Brasil e na França. In: **2 SIPEMAT: Simposio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. 2008. p. 63.

DAMIANI, Magda Floriana *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, mai./ago. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822>. Acesso em: 22 ago. 2023.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. revista. p. 167-188. São Paulo: EDUC, 2008.

DANTE, Luiz. **Teláris**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DUVAL, R. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas**. (2013). In: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v.2, no3, jul-dez 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 2012.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão matemática**. In: MACHADO, Silvia (org.). Aprendizagem em matemática. Campinas: Papirus, (2009a). p. 11-31.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2009b).

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, 2011.

FACCHI, Maria Gabriela. **A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/29222/1/importanciamateriaismanipulaveis.pdf>. Acesso em: 20 out. 2023

GAMBARATO, Renira Rampazzo. Signo, significação, representação. In: **Contemporânea**. n. 4, 2005.1, p. 204-214. Rio de Janeiro: UERJ, 2005.

GAY, Mara; SILVA, Willian. **Araribá mais matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

GERHARDT, T. E. *et al.* Estrutura do projeto de pesquisa. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2023.

HENRY, Michel. **Analyse Theorique de Situations Didactiques**. Recife - Pernambuco, 2006. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa de Educação Matemática, Recife – UFPE, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade**. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

JÚNIOR, José; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.



LIMA, Maria Carolina Mendes; SIQUEIRA, Mariana Peixoto. **Álgebra dos polinômios no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental: dificuldades encontradas pelos alunos de uma Escola Estadual de Mimoso do Sul - ES.** 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Licenciatura em Matemática de Campos dos Goytacazes, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro. Disponível em: <http://bd.centro.iff.edu.br/jspui/bitstream/123456789/3740/2/Texto.pdf>. Acesso em 22 ago. 2023.

LONGEN, Adilson. **Apoema matemática.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

OLIVEIRA, Carlos; FUGITA, Felipe. **Geração Alpha matemática.** 2. ed. São Paulo: SM Educação, 2018.

PASSOS, Daniela S. **A educação algébrica no 8º ano do ensino fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis/SE: entendimentos dos professores de Matemática.** 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática NPGECIMA da Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, SE, 2012.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial.** 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2018.

REIS, Ana Queli; NEHRING, Cátia Maria. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas Contextualization in the teaching of mathematics: conceptions and practices. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 19, n. 2, 2017. Disponível em: <file:///C:/Users/Multim%C3%ADdia/Downloads/31841-Texto%20do%20artigo-93663-1-10-20170907.pdf>. Acesso em: 20 out. 2023.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP.** 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2001. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11220/1/alessandro.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2023.

SAMPAIO, Fausto. **Trilhas da matemática.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SILVA, Regivaldo Alves de. 2016. Disponível em: <https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/calculo-algebrico-produtos-notaveis/#:~:text=%E2%80%9320Produtos%20not%C3%A1veis%20apresentam%20padr%C3%B5es%20que>. Acesso em: 20 jul. 2023.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática compreensão e prática.** 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, Joamir. **Matemática realidade & tecnologia.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

YIN, Roberto K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim.** Porto Alegre: Penso, 2016.

## **APÊNDICES**

## **APÊNDICE A – Teste diagnóstico**

Disciplina: TCC I

Alunas: Lorena Pessanha de Souza Oliveira e Sara de Souza Carvalho

### Teste Diagnóstico

Este teste diagnóstico é parte de um trabalho de conclusão de curso, e suas respostas serão utilizadas exclusivamente para fins acadêmicos. Contamos com sua colaboração para que nossa pesquisa seja desenvolvida!

*Não esqueça de registrar as resoluções! 😊*

1. Fatore cada expressão a seguir.

a)  $x^2 + 5x$

d)  $9x^2 - 4$

b)  $3x^2 + 6x + 4x + 8$

e)  $x^2 + 3x + 2$

c)  $x^2 + 6x + 9$

2. Você teria interesse em participar de uma atividade que abordasse o assunto da questão anterior? ( ) Sim ( ) Não

3. Se você respondeu “sim” à pergunta anterior, qual seria o turno de sua preferência para a realização da atividade? ( ) Manhã ( ) Tarde ( ) Noite

Obrigada pela sua participação!

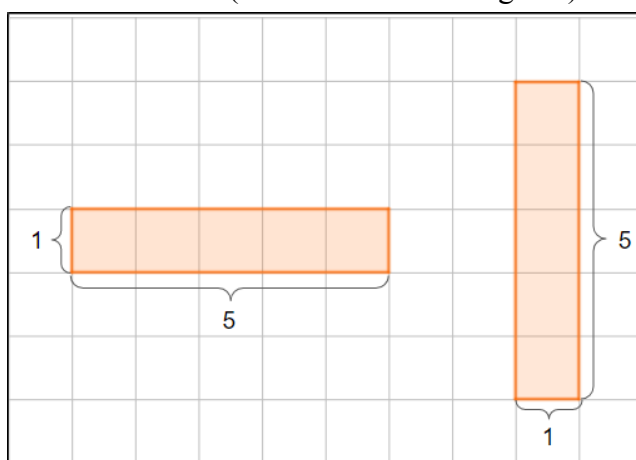
**APÊNDICE B – Apostila (primeira versão)**

## Fatoração algébrica

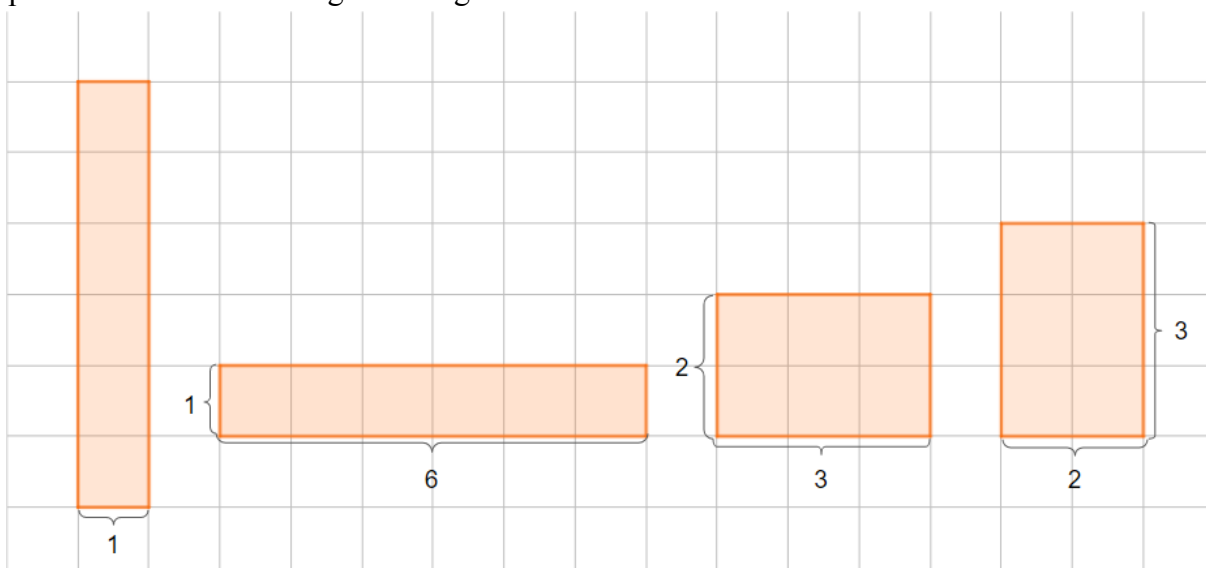
Um número natural pode ser primo (ter apenas dois divisores distintos, um e ele mesmo) ou composto (possuir outros divisores além de um e dele mesmo).

Para determinar se um número é primo ou composto, vamos utilizar uma representação geométrica com disposição retangular.

Ao analisar o número 5, vemos que ele é primo, pois as duas únicas maneiras de desenhar um retângulo com essa quantidade de quadradinhos são apresentadas a seguir. Observe que os únicos divisores de 5 (dimensões dos retângulos) são 1 e 5.



Entretanto, o número 6 é composto, pois com essa quantidade de quadradinhos podemos formar os retângulos a seguir.



Observe que os divisores naturais de 6 são 1, 2, 3 e 6.

Um número natural pode ser representado por um produto entre dois ou mais fatores.

A escrita do número como um produto é chamada de fatoração. Por exemplo,  $6 = 1.6 = 6.1 = 3.2 = 2.3$ .

### Praticando...

1) Analisando a representação geométrica, classifique os números a seguir como primos ou compostos, escrevendo cada um como um produto de dois fatores.

a) 12:

b) 10:

c) 7:

2) O retângulo abaixo é composto por dois retângulos menores. Calcule a área total da figura de duas maneiras diferentes.



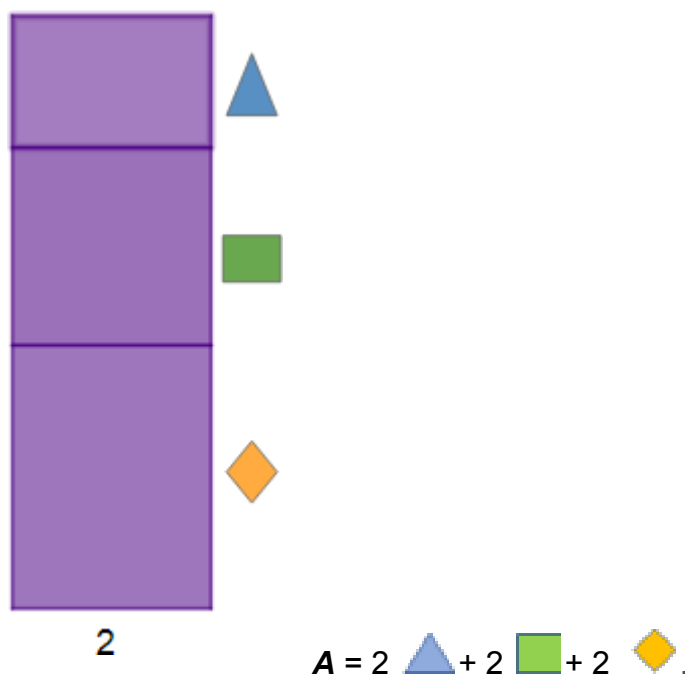
1ª forma:

2ª forma:

Observando a expressão obtida para a área total da figura da 2ª forma, podemos identificar a presença de um fator comum às duas parcelas. Isto nos permite reescrever essa expressão como um produto:

### Fatoração algébrica com termo comum em evidência

Observe a figura abaixo, que contém 3 retângulos de mesma base. A área total dessa figura é dada pela soma das áreas desses 3 retângulos. Vamos calcular a área total utilizando o Tabuleiro de Fatoração.



Também podemos calcular a área considerando o retângulo inteiro:

$$A = 2(\triangle + \square + \diamond)$$

Neste caso dizemos que

$$A = 2(\triangle + \square + \diamond) \text{ é a forma fatorada de } A = 2 \triangle + 2 \square + 2 \diamond$$

### Praticando mais um pouco...

3) Fatore utilizando o tabuleiro de fatoração. Considere  $x = \triangle$ ,  $y = \square$  e  $z = \diamond$ .

- a)  $x^2 + 5x$
- b)  $3x + 6y + 9z$
- c)  $xy^2 - x^2y$
- d)  $25xy^2 - 15x^3y$



## Quadrado da soma

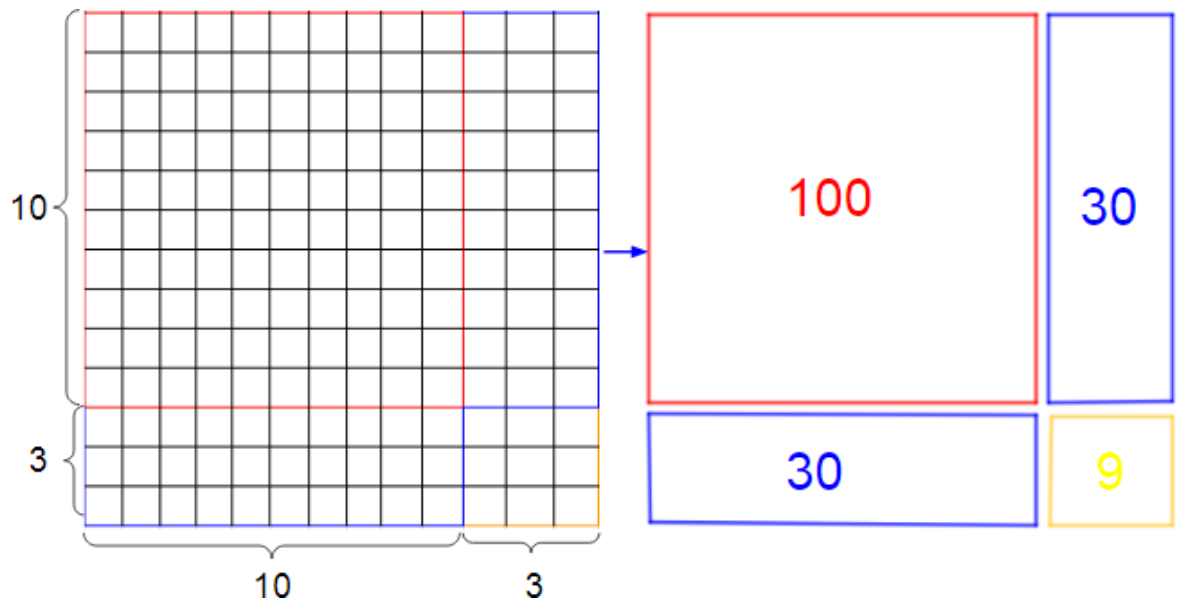
Existem situações em que podemos utilizar diversas estratégias de cálculo para obter uma resposta. Um exemplo é o cálculo do quadrado do número 13.

- Quanto é  $13^2$ ?

Uma possível estratégia é resolver o  $13^2$  reescrevendo o 13 como  $10 + 3$ :

$$13^2 = 13 \cdot 13 = (10 + 3) \cdot (10 + 3) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 100 + 30 + 30 + 9 = 169$$

Uma maneira de visualizar o que foi feito é por meio do cálculo de áreas, conforme estudado em geometria. Considerando um quadrado de lado 13 cm, temos:



- Quais são as áreas das quatro figuras em que o quadrado de lado 13 foi dividido?
- Qual é a soma das áreas dessas quatro figuras?

## Vamos à prática!

4) (Adaptado de SILVA, 2016) Considere a planta de um apartamento na figura a



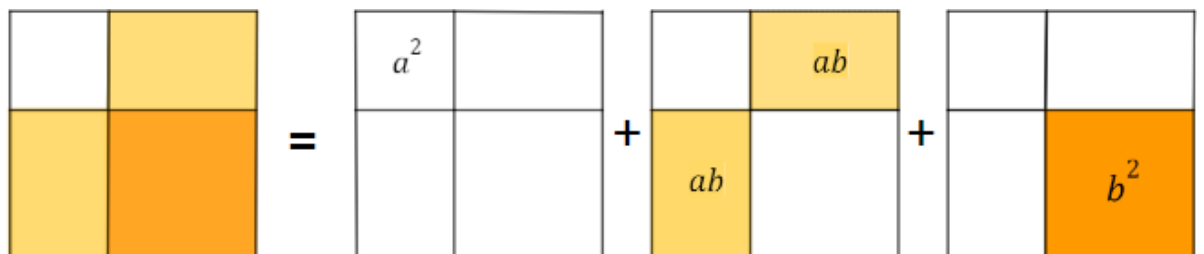
seguir:

Represente a área total do apartamento de duas maneiras:

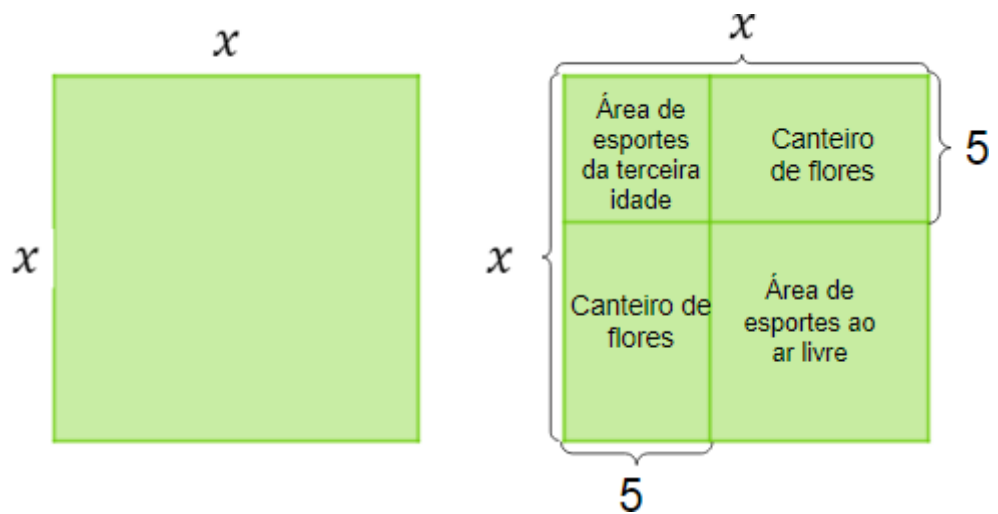
- **Calculando a área de todo o quadrado:**
- **Calculando a área de cada cômodo e depois somando:**

O quadrado da soma de dois termos é obtido por meio do quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro multiplicado pelo segundo mais o quadrado do segundo termo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



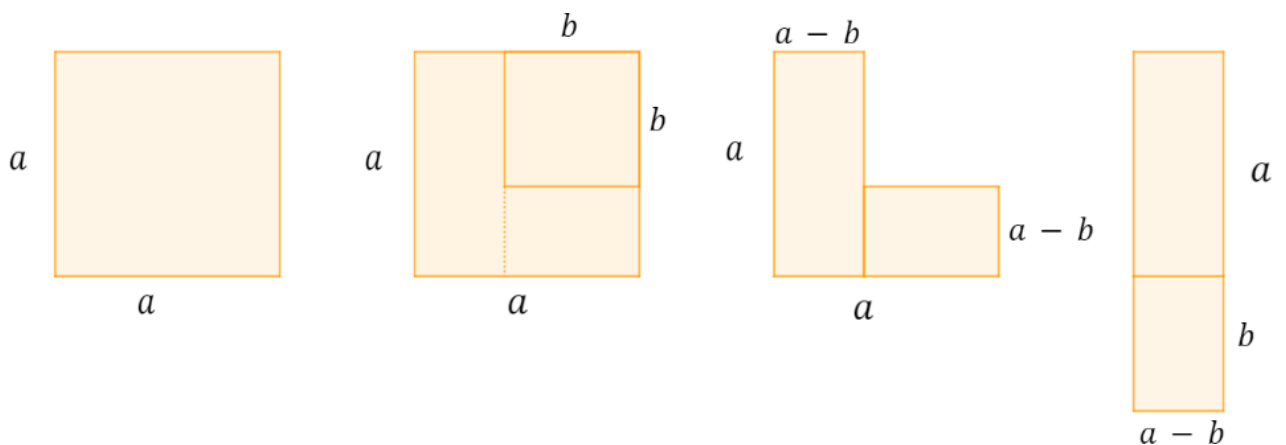
5) (adaptado de LONGEN, 2018) Na Avenida República existe uma praça de esportes ao ar livre cujo formato é quadrado. Um projeto urbanístico que visa melhorar a área verde da praça propõe uma reforma de acordo com a seguinte planta:



Determine a expressão algébrica que representa a nova área de esportes ao ar livre.

### Produto da soma pela diferença

Vamos utilizar novamente uma representação geométrica para observarmos outro caso de produto notável. Considere que, de um quadrado de lado medindo  $a$ , retiramos um quadrado menor de lado medindo  $b$ , conforme as figuras a seguir.



Podemos calcular de duas maneiras a área formada após a retirada do quadrado de lado  $b$ :

### 1ª maneira

Considerando a diferença entre as áreas do quadrado de lado  $a$  e do quadrado de lado  $b$ :

$$a^2 - b^2$$

### 2ª maneira

Considerando a área do retângulo obtido:

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

Podemos então escrever a seguinte igualdade:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Algebricamente, podemos obter esse resultado da seguinte forma:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Podemos dizer que  $(a + b) \cdot (a - b)$  representa a forma fatorada de  $a^2 - b^2$ .

6) Complete a tabela a seguir:

Produto da soma pela diferença	<input type="checkbox"/> Diferença de dois quadrados
$(b + \square)(b - \square)$	$b^2 - 49$
$(6x + 5)(6x - 5)$	$\square x^2 - 25$
$(2x \square 4)(2x \square 4)$	$4x^2 - 16$
$(2a + 2b)(\square - \square)$	$\square - 4b^2$
$(3 + 8c)(3 - 8c)$	<input type="checkbox"/>

7) Fatore as expressões a seguir:

a)  $y^2 + 14y + 49$

b)  $b^2 - 6b + 9$

c)  $9a^2 - 1$

d)  $4b^2 + 4b + 1$

**APÊNDICE C – Apostila (versão final)**

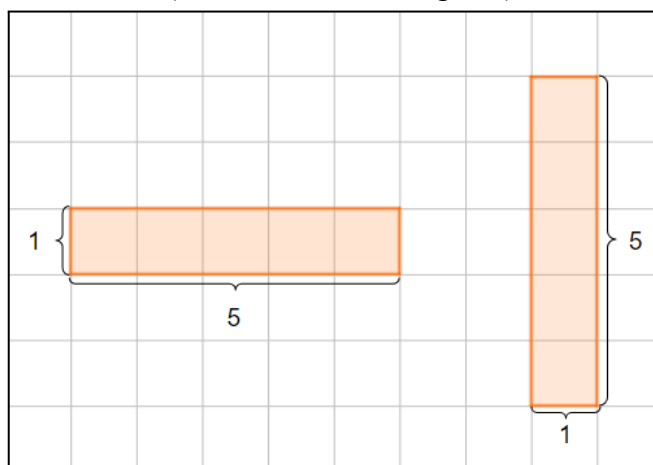
Alunas: Lorena Pessanha de Souza Oliveira e Sara de Souza Carvalho

### 1) Retomando a fatoração numérica

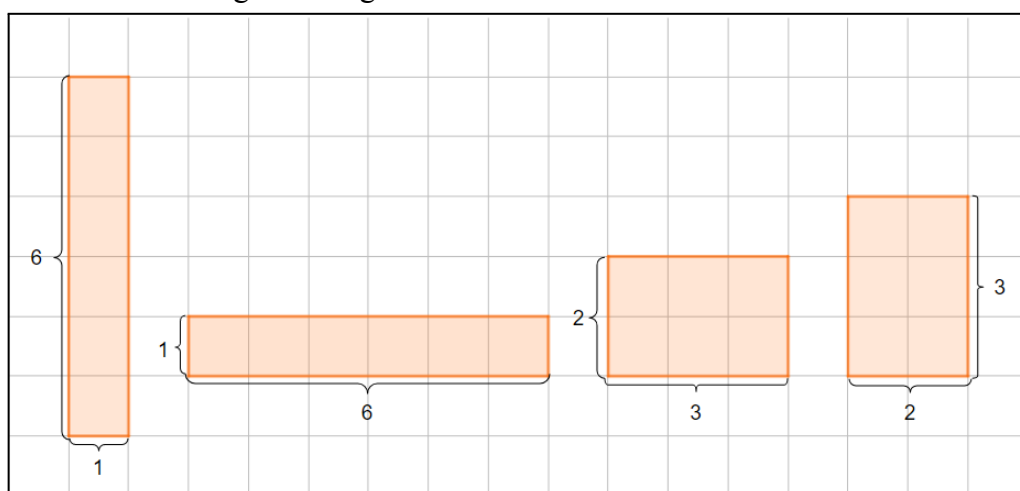
Um número natural pode ser primo (ter apenas dois divisores distintos, um e ele mesmo) ou composto (possuir outros divisores além de um e dele mesmo).

Para determinar se um número é primo ou composto, vamos utilizar uma representação geométrica com disposição retangular.

Ao analisar o número 5, vemos que ele é primo, pois as duas únicas maneiras de desenhar um retângulo com essa quantidade de quadradinhos são apresentadas a seguir. Observe que os únicos divisores de 5 (dimensões dos retângulos) são 1 e 5.



Entretanto, o número 6 é composto, pois com essa quantidade de quadradinhos podemos formar os retângulos a seguir.



Observe que os divisores naturais de 6 são 1, 2, 3 e 6.

Um número natural pode ser representado por um produto entre dois ou mais fatores. A escrita do número como um produto é chamada de fatoração. Por exemplo,

$$6 = 1.6 = 6.1 = 3.2 = 2.3.$$

### Praticando...

Questão 1 - Você recebeu uma folha quadriculada. Use-a para representar geometricamente cada número a seguir, de todas as formas possíveis. Em seguida, classifique-os como primos ou compostos, escrevendo cada um como um produto de dois fatores.

a)  $10 =$

b)  $12 =$

c)  $13 =$

d)  $15 =$

Questão 2 - O retângulo abaixo é composto por dois retângulos menores. Represente a área total da figura de duas maneiras diferentes.



a) 1ª forma - usando as dimensões de toda a figura:

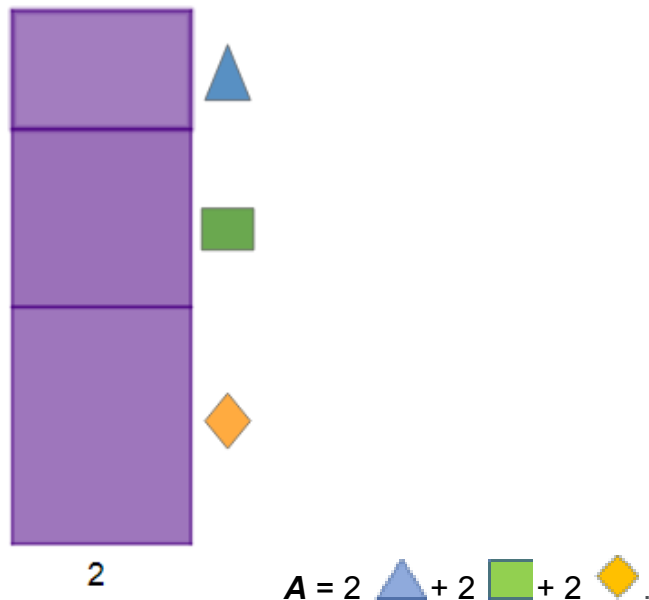
b) 2ª forma - somando as áreas dos retângulos I e II:

Observando a expressão obtida para a área total da figura da 2ª forma, podemos identificar a presença de um fator comum às duas parcelas. Isto nos permite reescrever essa expressão como um produto:

---

## 2) Fatoração algébrica utilizando fator comum em evidência

Observe a figura abaixo, que contém 3 retângulos de mesma base. A área total dessa figura é dada pela soma das áreas desses 3 retângulos. Vamos representar a área total utilizando o Tabuleiro de Fatoração.



Também podemos calcular a área considerando o retângulo inteiro:3

$$A = 2(\triangle + \square + \diamond)$$

Neste caso dizemos que

$$A = 2(\triangle + \square + \diamond) \text{ é a forma fatorada de } A = 2 \triangle + 2 \square + 2 \diamond.$$

### Praticando ...

Questão 3 - Fatore utilizando o tabuleiro de fatoração. Escreva o resultado encontrado.

Considere  $x = \triangle$ ,  $y = \square$  e  $z = \diamond$ .

- a)  $x^2 + 5x$
- b)  $3x + 6y + 9z$
- c)  $xy^2 - x^2y$
- d)  $25xy^2 - 15x^3y$
- e)  $7x - 14xy$



### 3) Fatoração algébrica utilizando o quadrado da soma

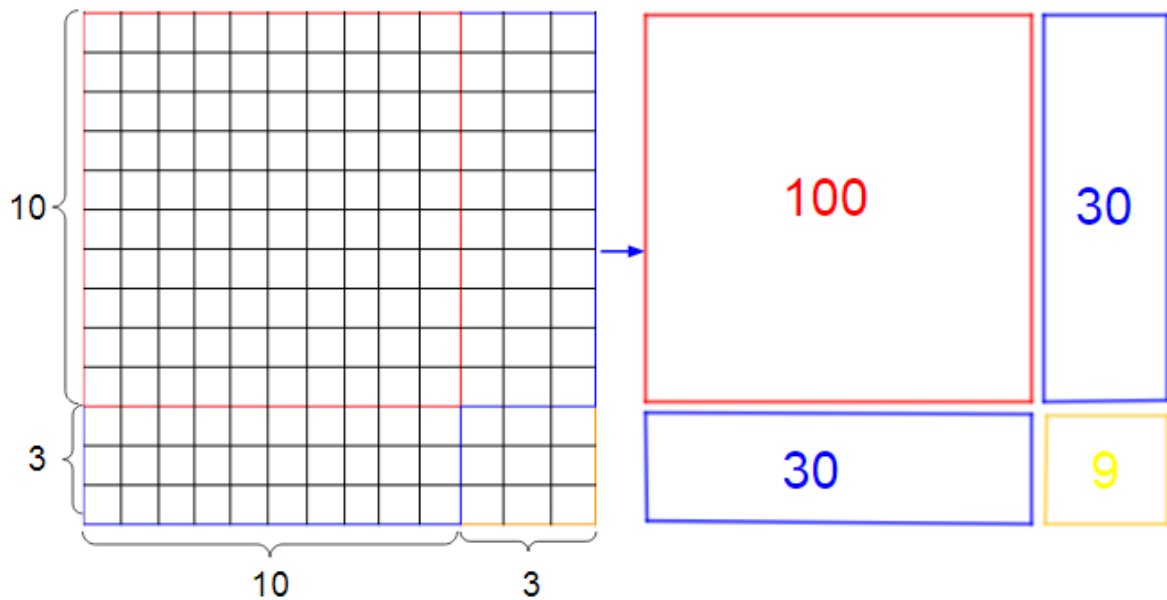
Existem situações em que podemos utilizar diversas estratégias de cálculo para obter uma resposta. Um exemplo é o cálculo do quadrado do número 13.

- Quanto é  $13^2$ ?

Uma possível estratégia é resolver o  $13^2$  reescrevendo o 13 como  $10 + 3$ :

$$13^2 = 13 \cdot 13 = (10 + 3) \cdot (10 + 3) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 100 + 30 + 30 + 9 = 169$$

Uma maneira de visualizar o que foi feito é por meio do cálculo de áreas, conforme estudado em geometria. Considerando um quadrado de lado 13 cm, temos:



- Quais são as áreas das quatro figuras em que o quadrado de lado 13 foi dividido?
- Qual é a soma das áreas dessas quatro figuras?

**Vamos à prática!**

Questão 4 - (Adaptado de SILVA, 2016) Considere a planta de um apartamento na figura a seguir:

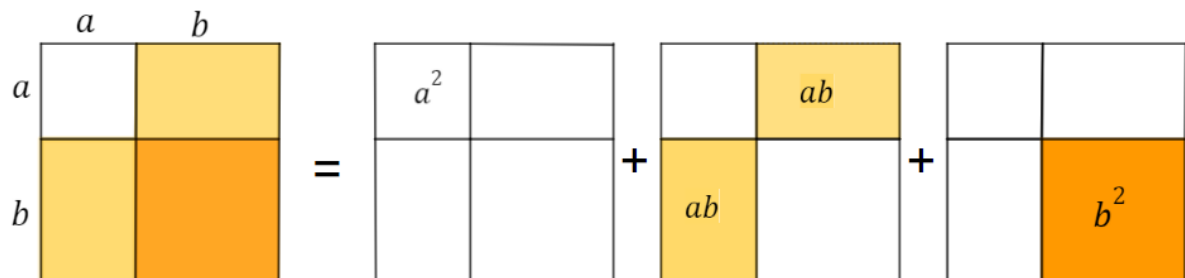


Represente a área total do apartamento de duas maneiras:

- a) Usando a área de todo o quadrado:
  
  
- b) Escrevendo a área de cada cômodo e depois somando:

O quadrado da soma de dois termos é obtido por meio do quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro multiplicado pelo segundo mais o quadrado do segundo termo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



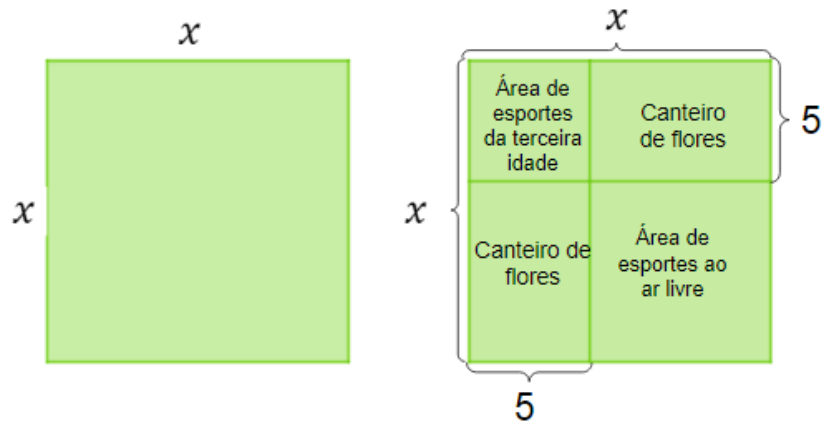
Questão 5 - Fatore as expressões algébricas a seguir:

- a)  $x^2 + 4x + 4$
- b)  $a^2 + 14a + 49$
- c)  $4y^2 + 4y + 1$
- d)  $b^2 + 12b + 36$

#### 4) Fatoração algébrica utilizando o quadrado da diferença

Já vimos os casos de fatoração do fator comum em evidência e do quadrado da soma. Agora, vamos estudar juntos o caso em que temos o quadrado de uma diferença.

(Adaptado de LONGEN, 2018) Na Avenida República existe uma praça de esportes ao ar livre cujo formato é quadrado. Um projeto urbanístico que visa melhorar a área verde da praça propõe uma reforma de acordo com a seguinte planta:



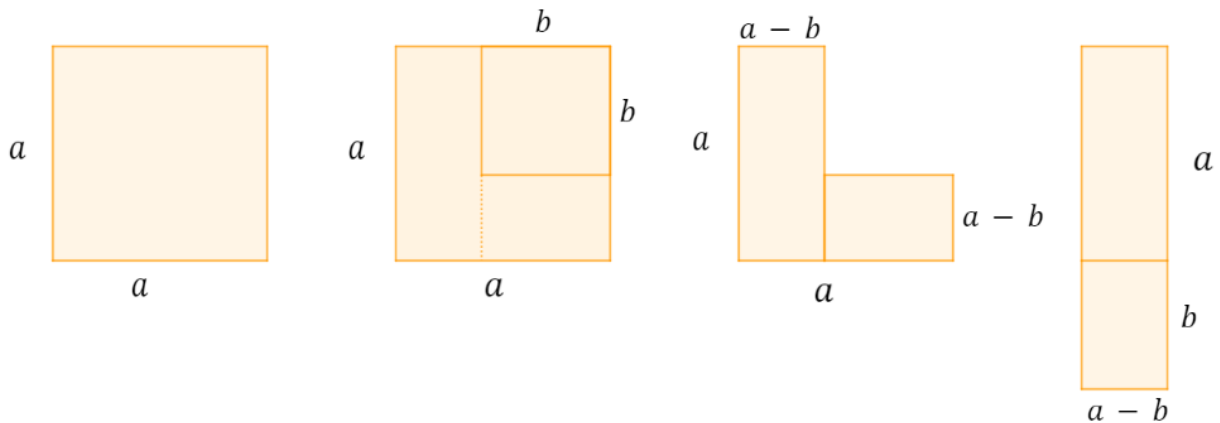
Determine a expressão algébrica que representa a nova área de esportes ao ar livre.

Questão 6 - Utilizando produtos notáveis, fatore cada uma das seguintes expressões:

- a)  $4 - 4x + x^2$
- b)  $y^2 - 6y + 9$
- c)  $9a^2 - 6a + 1$
- d)  $b^2 - 16b + 64$

## 5) Fatoração algébrica utilizando o produto da soma pela diferença

Vamos utilizar novamente uma representação geométrica para observarmos outro caso de produto notável. Considere que, de um quadrado de lado medindo  $a$ , retiramos um quadrado menor de lado medindo  $b$ , conforme as figuras a seguir.



Podemos representar de duas maneiras a área formada após a retirada do quadrado de lado  $b$ :

### 1ª maneira

Considerando a diferença entre as áreas do quadrado de lado  $a$  e do quadrado de lado  $b$ :

$$a^2 - b^2$$

### 2ª maneira

Considerando a área do retângulo obtido:

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

Podemos então escrever a seguinte igualdade:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Podemos dizer que  $(a + b) \cdot (a - b)$  representa a forma fatorada de  $a^2 - b^2$ .

## **APÊNDICE D – Lista de exercícios**

Questão 1 - Complete a tabela a seguir:

Produto da soma pela diferença	Diferença de dois quadrados
$(b + \square)(b - \square)$	$b^2 - 49$
$(6x + 5)(6x - 5)$	$\square x^{\square} - 25$
$(2x \square 4)(2x \square 4)$	$4x^2 - 16$
$(2a + 2b)(\square - \square)$	$\square - 4b^2$
$(3 + 8c)(3 - 8c)$	<input type="text"/>

Questão 2 - Fatore as expressões a seguir:

- a)  $y^2 + 16y + 64$
- b)  $b^2 - 6b + 9$
- c)  $9a^2 - 1$
- d)  $25b^2 + 10b + 1$
- e)  $3x^2 + 6x + 3$

## **ANEXO – Livros analisados**

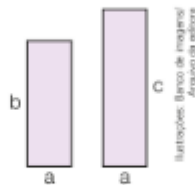
## Matemática e Realidade - 8º. ano

- **Página 226**

### Fração algébrica e simplificação

#### Retângulos de bases iguais

Na figura há dois retângulos de base **a**; num deles a altura é **b** e, no outro, é **c**. Qual é a razão entre as áreas desses retângulos?



As áreas são  $a \cdot b$  e  $a \cdot c$ ; portanto, a razão entre elas é  $\frac{ab}{ac}$ .

Uma razão entre expressões algébricas, como  $\frac{ab}{ac}$ , é denominada *fração algébrica*.

Recorde que uma fração numérica pode ser simplificada quando o numerador e o denominador apresentam um mesmo fator. Nesse caso, dividimos ambos por esse fator. Por exemplo:

$$\frac{5 \cdot 6}{5 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

Essa operação se aplica também às frações algébricas. Assim, dividindo numerador e denominador por **a**,  $a \neq 0$ , obtemos:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

Concluimos que a razão entre as áreas de dois retângulos de bases iguais é igual à razão entre as alturas deles. Se dobrarmos a altura, a área dobrará. Se a altura for triplicada, a área também triplicará.





## • Página 227

### Simplificando

A fração numérica  $\frac{51}{69}$  pode ser simplificada?

Como 51 e 69 são ambos divisíveis por 3, temos:

$$\frac{51}{69} = \frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 23} = \frac{17}{23}$$

Agora considere a fração algébrica  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ , em que  $x^2 - 1 \neq 0$ . Uma fração assim também pode ser simplificada?

Se o numerador e o denominador podem ser divididos por um mesmo fator, então poderemos simplificar a fração. Uma maneira de descobrir é decompor numerador e denominador em produto. No exemplo acima:

- $x^2 + 2x + 1$  é o resultado de  $(x + 1)^2$ , portanto, de  $(x + 1)(x + 1)$ ;
- $x^2 - 1$  é o resultado de  $(x + 1)(x - 1)$ .

Então:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Note que dividimos numerador e denominador pelo fator  $(x + 1)$ , que aparece em ambos. Nessa simplificação supomos  $x + 1 \neq 0$ , porque não existe divisão por zero.

### ↳ Fatoração

O processo de decomposição em produto é denominado *fatoração*.

*Fatorar* um polinômio significa transformá-lo em um produto correspondente. É o mesmo que decompor em fatores.

Para fatorar um polinômio precisamos descobrir que fatores devem ser multiplicados de modo que o resultado seja o polinômio dado. A forma fatorada é o produto desses fatores.

Estudaremos, agora, alguns casos de fatoração de polinômios. Aplicaremos a fatoração para simplificar e operar com frações algébricas.

## Matemática Essencial - 8º. ano

- **Página 94**

### **Fatoração de polinômios**

Estudamos em anos anteriores que podemos escrever um número como o produto de dois ou mais números, ou seja, escrevê-lo de **forma fatorada**.

Observe alguns exemplos de como podemos fatorar o número 36.

- $36 = 4 \cdot 9$
- $36 = 3 \cdot 12$
- $36 = 6 \cdot 6$
- $36 = 2 \cdot 18$
- $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$
- $36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Além de números, também podemos **fatorar** polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

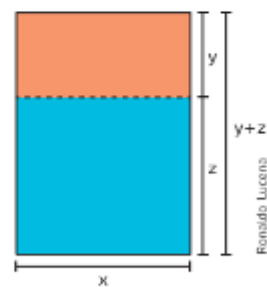
Considere o retângulo ao lado, decomposto em duas partes retangulares. Podemos representar a medida da área desse retângulo de duas maneiras.

- Desconsiderando a decomposição.

$$x \cdot (y + z)$$

- Adicionando as medidas das áreas das duas partes obtidas:

$$xy + xz$$



O polinômio  $x \cdot (y + z)$  é uma forma fatorada de  $xy + xz$ .

Estudaremos a seguir alguns métodos de fatoração de polinômio.

• Página 50

**CAPÍTULO**  
**5** **Fatoração**

Observe a seguir como o cálculo  $\frac{165 + 205}{5}$  foi efetuado.

$$\begin{aligned} \frac{165 + 205}{5} &= \frac{(5 \cdot 33 + 5 \cdot 41)}{5} = \\ &= \frac{\cancel{5} \cdot (33 + 41)}{\cancel{5}} = 33 + 41 = 74 \\ \frac{165 + 205}{5} &= 74 \end{aligned}$$

Barco de imagens/Aquele que estuda

Podemos escrever os números 165 e 205 como um produto no qual 5 é um dos fatores.



Barco de imagens/Aquele que estuda

Dizemos que nesse cálculo a soma  $165 + 205$  foi **fatorada**.

De maneira similar, podemos reescrever uma expressão algébrica como um produto de dois ou mais fatores. Essa estratégia nos permite simplificar cálculos em diversas situações.

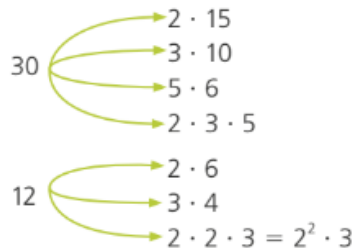
Por exemplo, o polinômio  $5x^2 + 10x$  pode ser escrito na forma  $5x \cdot (x + 2)$ . Nesse caso,  $5x$  e  $(x + 2)$  são os fatores e dizemos que o polinômio  $5x^2 + 10x$  foi **fatorado**.

Fatorar um polinômio significa escrevê-lo na forma de um produto de dois ou mais polinômios.

Neste capítulo, vamos estudar alguns processos usados para fatorar expressões algébricas.

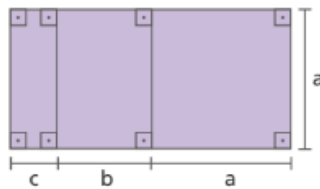
## Fatoração de polinômios

Em anos anteriores, estudamos que um número natural pode ser escrito na forma fatorada, ou seja, como um produto de dois ou mais números. Observe diferentes maneiras de escrever os números 30 e 12 na forma fatorada.



Qual é a decomposição do número 30 em fatores primos? E do número 12?  
 $2 \cdot 3 \cdot 5$   $2 \cdot 2 \cdot 3$ .

Estudaremos agora como fatorar, quando possível, um polinômio. Para exemplificar, observe diferentes maneiras de expressar a área da figura representada a seguir.



1ª) Considerando a figura de retângulo de lados medindo  $a$  e  $a + b + c$ .  
 $a \cdot (a + b + c)$

2ª) Calculando a área de cada parte e adicionando-as.  
 $a^2 + ab + ac$

Note que essas duas expressões correspondem à área de uma mesma figura. Assim, as duas expressões são equivalentes. Podemos dizer que  $a \cdot (a + b + c)$ , correspondente a um produto de polinômios, é uma forma fatorada de  $a^2 + ab + ac$ .

- Página 139

### Fatoração

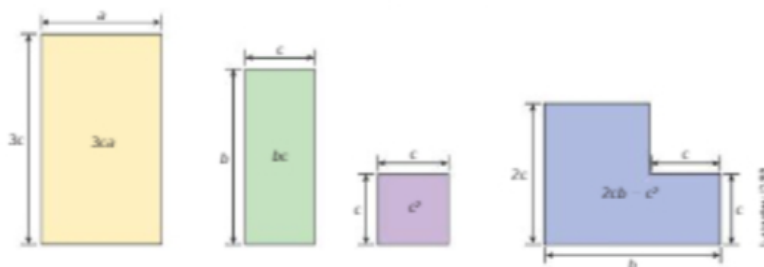
As expressões matemáticas podem ser escritas de diversas maneiras. Assim, duas expressões aparentemente diferentes podem representar a mesma expressão.

Por exemplo, a expressão  $x^2 + 5x + 6$  pode ser escrita como  $(x + 3) \cdot (x + 2)$ . Observe que uma é apresentada como multiplicação de dois fatores e a outra, como o produto dessa multiplicação. Dizemos que a expressão  $(x + 3) \cdot (x + 2)$  está na **forma fatorada**, ou seja, explicita quais são os fatores multiplicados. Ao efetuarmos essa operação, o polinômio gerado é o produto, ou seja,  $x^2 + 5x + 6$ .

Neste estudo, faremos o inverso do que realizamos quando estudamos os produtos notáveis. Ou seja, vamos partir do produto para chegar aos fatores de uma multiplicação que resultam nele. Esse processo é chamado de **fatoração** de um polinômio.

Acompanhe o exemplo a seguir.

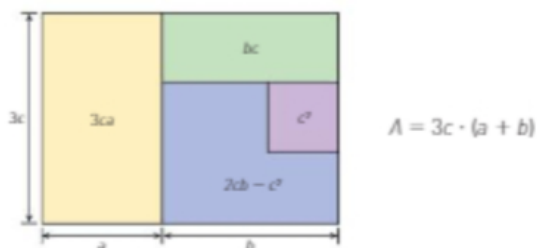
As figuras abaixo são peças de um quebra-cabeça retangular. Se considerarmos as medidas indicadas em cada peça por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , podemos representar a área de cada uma delas por uma expressão.



A soma da área de cada uma das peças resulta em um polinômio que representa a área total ( $A$ ) do quebra-cabeça:

$$A = 3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$$

Veja abaixo um possível encaixe das peças desse quebra-cabeça.



Observe que as expressões  $3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$  e  $3c \cdot (a + b)$  representam a mesma área. Dizemos que a expressão  $3c \cdot (a + b)$  representa a medida dessa área na forma fatorada.

## Fatoração de polinômios

Um número natural, diferente de 1, pode ser escrito como produto de dois ou mais fatores, isto é, podemos escrevê-lo na forma fatorada. Veja como podemos escrever o número 32 de forma fatorada.

- $32 = 2 \cdot 16$
- $32 = 4 \cdot 8$
- $32 = 2 \cdot 4 \cdot 4$
- $32 = 2 \cdot 2 \cdot 8$
- $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4$
- $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Assim como os números, também podemos fatorar os polinômios, ou seja, escrevê-los como produto de dois ou mais polinômios.

Veja a seguir um quadrado composto de dois quadrados menores, com medidas de áreas diferentes, e dois retângulos de mesma medida de área.

Podemos representar a medida da área do quadrado maior de duas maneiras.

### 1ª maneira

Adicionando as medidas das áreas das quatro partes em que o quadrado foi dividido.

$$4x^2 + 8x + 8x + 16 =$$

$$= 4x^2 + 16x + 16$$

...

### 2ª maneira

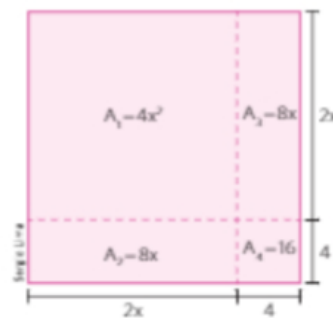
Multiplicando a medida dos lados do quadrado maior.

$$(2x + 4)(2x + 4)$$

ou

$$(2x + 4)^2$$

...



Como os dois cálculos representam a medida da área do quadrado maior, temos:

$$4x^2 + 16x + 16 = \underline{(2x + 4)^2}$$

forma fatorada de  
 $4x^2 + 16x + 16$

Ao escrever o polinômio  $4x^2 + 16x + 16$  na forma  $(2x + 4)^2$ , estamos efetuando a fatoração desse polinômio.

Fatorar um polinômio significa transformá-lo em um produto de polinômios.

A seguir, estudaremos alguns métodos de fatoração de polinômios.



• Página 97

## 2. Fatoração de expressões algébricas

Você já estudou fatoração de um número e agora vai estudar diferentes casos de fatoração de polinômios, que, muitas vezes, são úteis na resolução de problemas. Antes, porém, vamos relembrar como fatorar um número.

Acompanhe a conversa entre Marcos e Gabriela.



Observe o polinômio que representa a área de cada retângulo.

- Retângulo amarelo:  $ax$
- Retângulo azul:  $ay$
- Retângulo vermelho:  $az$
- Retângulo maior:  $a \cdot (x + y + z)$

Veja duas formas de expressar a área do retângulo maior.

$$\underbrace{ax + ay + az}_{\text{polinômio}} = a \cdot \underbrace{(x + y + z)}_{\text{produto de polinômios}}$$

O produto de polinômios  $a \cdot (x + y + z)$  é uma **forma fatorada** do polinômio  $ax + ay + az$ .

**Fatorar um polinômio** significa escrevê-lo na forma de um produto de dois ou mais polinômios.

Estudaremos a seguir diferentes casos de fatoração de polinômios: colocação de um fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados e trinômio quadrado perfeito.

- Página 138

## 2 Fatoração de polinômios

Sabemos que um número natural pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores. Esse procedimento é chamado de **fatoração**. Existem várias maneiras de fatorar um número natural. Observe alguns exemplos de fatoração do número 72.

$$72 = 8 \cdot 9 \quad 72 = 6 \cdot 12 \quad 72 = 2 \cdot 2 \cdot 18 \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Assim como os números naturais, alguns polinômios também podem ser fatorados.

Fatorar um polinômio, quando possível, significa escrevê-lo como produto de polinômios mais simples.

Considere a figura abaixo.

HELENA MARI FOLHA



Veja como Bruno e Leticia determinaram a área dessa figura.

ANDRÉ VAZ DOS



Por gentileza, não tirar, AV. W 4400 Colégio Renascença, 13080-100, São João do Rio Preto, SP

Logo:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(a + b) \cdot c}_{\text{produto de polinômios}}$$

A expressão  $(a + b) \cdot c$  é a forma fatorada do polinômio  $ac + bc$ .

A seguir, vamos estudar diferentes casos de fatoração de polinômios: fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito, soma ou diferença de dois cubos.



- **Página 139**

### Fatorando expressões numéricas

Assim como os números, as expressões numéricas também podem ser fatoradas.

Já sabemos que, pela propriedade distributiva da multiplicação, é possível desenvolver uma expressão numérica escrita na forma fatorada. Veja:

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \underbrace{3 \cdot (5 + 12)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3 \cdot 5 + 3 \cdot 12}_{\text{forma desenvolvida}} \qquad \bullet \quad \underbrace{3,2 \cdot (8 - 0,5)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3,2 \cdot 8 - 3,2 \cdot 0,5}_{\text{forma desenvolvida}} \end{array}$$

Agora, vamos fazer o inverso, ou seja, escrever na forma fatorada expressões desenvolvidas pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

- $5 \cdot 3 + 5 \cdot 11$

Trata-se de uma adição, na qual cada parcela é um produto de dois fatores em que o número **5** é um **fator comum**.

$$\underbrace{5 \cdot 3 + 5 \cdot 11}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{5 \cdot (3 + 11)}_{\text{forma fatorada}}$$

- $2,4 \cdot 7 - 2,4 \cdot 2$

Cada parcela tem em comum o fator **2,4**.

$$\underbrace{2,4 \cdot 7 - 2,4 \cdot 2}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{2,4 \cdot (7 - 2)}_{\text{forma fatorada}}$$

Esse procedimento nos ajuda a calcular de maneira mais fácil, ou até mesmo mentalmente, o valor de algumas expressões numéricas.

- Página 105

### 3 Fatoração

Podemos escrever o número 100 como o produto de dois ou mais números. Veja:

▶  $100 = 4 \cdot 25$

▶  $100 = 2 \cdot 50$

▶  $100 = 2 \cdot 5 \cdot 10$

▶  $100 = 10 \cdot 10$

▶  $100 = 2 \cdot 2 \cdot 25$

▶  $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Nesses casos, escrevemos o número 100 na forma fatorada.

**Fatorar** um número é escrevê-lo como o produto de dois ou mais fatores.

Além de números, podemos fatorar polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

#### Exemplo

O polígono ao lado possui lados de medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

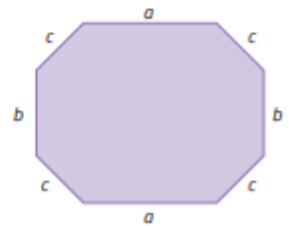
Seu perímetro pode ser representado por:

$$a + a + b + b + c + c + c + c = 2a + 2b + 4c$$

Podemos, também, escrever esse polinômio da seguinte forma:

$$2(a + b + 2c)$$

O polinômio  $2(a + b + 2c)$  é uma forma fatorada de  $2a + 2b + 4c$ .



CAPÍTULO  
**2** FATORANDO  
POLINÔMIOS

Veja como podemos escrever o número 90 utilizando a multiplicação:



Quando escrevemos o número 90 nas formas apresentadas anteriormente, transformamos esse número em uma multiplicação de fatores.

Em qualquer um dos casos, fizemos a **fatoração** do número 90.

Fatorar um número significa escrevê-lo como uma **multiplicação de dois ou mais fatores**.

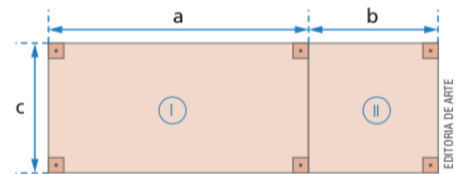
Considerando esses conhecimentos, vamos representar a área da figura a seguir:

**1ª maneira:** Área da figura ① mais área da figura ②, ou seja,  $ac + bc$ .

**2ª maneira:** Fazendo  $c \cdot (a + b)$ .

Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{c \cdot (a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$



Quando escrevemos o polinômio  $ac + bc$  na forma  $c \cdot (a + b)$ , estamos transformando o polinômio inicial em uma multiplicação de polinômios.

Fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma **multiplicação de dois ou mais polinômios**.

## Fator comum e por agrupamento

Nos capítulos anteriores, utilizamos a Geometria plana, particularmente o cálculo da área de quadrados e retângulos, para explicar casos de produtos notáveis. Neste capítulo, transformaremos algumas expressões algébricas em produto, isto é, vamos escrever uma expressão algébrica na forma fatorada. A **fatoração** pode ser considerada aqui o caminho inverso da propriedade distributiva da multiplicação, por exemplo, em relação à adição.

Para exemplificar, vamos considerar um retângulo de altura  $x$  dividido em três outros retângulos cujas bases medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , como indicado na figura a seguir.



A área desse retângulo pode ser calculada de duas maneiras diferentes:

$$\text{Área} = (a + b + c) \cdot x \quad \text{ou} \quad \text{Área} = ax + bx + cx$$

A primeira dessas duas formas é denominada **forma fatorada**.

↑ **Fatorar** uma expressão algébrica significa escrevê-la na forma de um produto de dois ou mais fatores. Assim, fatorar equivale a transformar em produto.

Responda: Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

1. Como obter a expressão  $ax + bx + cx$  a partir da expressão  $x \cdot (a + b + c)$ ?
  2. E como obter a expressão  $a \cdot (x + y + z)$  a partir da expressão  $ax + ay + az$ ?
- Colocando em evidência o fator comum em cada multiplicação.

Retomando o exemplo anterior, observe que a segunda expressão representa a soma da área dos três retângulos considerados:

$$ax + bx + cx$$

As três parcelas dessa soma têm um fator em comum:  $x$ .  
Quando essa expressão é escrita na forma fatorada  $x \cdot (a + b + c)$ , dizemos que o termo em comum foi colocado em evidência.

O caso mais simples de fatoração ocorre quando, em uma expressão algébrica ou mesmo em um polinômio, temos apenas um fator em comum. Nesse caso, para fatorar basta colocar esse fator comum em evidência. Observe alguns exemplos a seguir.

### Exemplo 1

Fatore a expressão  $ax + ay$ .

- Nos dois termos dessa expressão há um fator comum: a incógnita  $a$ . Vamos colocar esse fator comum em evidência:

$$ax + ay = a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

#### Observação:

Para verificar se a fatoração está correta, utilize a propriedade distributiva na forma fatorada.

Esse exemplo pode ser ilustrado pelo cálculo da área do retângulo maior abaixo.

Área do retângulo:

$$ax + ay \text{ ou } a(x + y)$$



### Exemplo 2

Escreva a forma fatorada da expressão algébrica  $4mpx - 2mx - 4x$ .

- Nesta expressão algébrica temos como fator comum o termo  $2x$ . Assim, colocamos esse fator comum em evidência:

$$4mpx - 2mx - 4x = 2x \cdot 2mp - 2x \cdot m - 2x \cdot 2 = 2x \cdot (2mp - m - 2)$$

### Exemplo 3

Fatore o polinômio  $2x^3 - 8x^2 + 6x$ .

- Nesse caso, os três termos do polinômio têm o fator  $x$  em comum, bem com o termo  $2$ .

$$2x^3 - 8x^2 + 6x = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 4x + 2x \cdot 3 = 2x \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

### Exemplo 4

Fatore a expressão algébrica  $am + bm + ax + bx$ .

- Note que não há um termo comum às quatro parcelas da expressão algébrica do exemplo anterior. Entretanto, se considerarmos os dois primeiros, temos o termo  $m$  em comum; nos dois últimos, o termo  $x$ . Assim, fatoramos de dois em dois, ou seja:

$$am + bm + ax + bx = m \cdot (a + b) + x \cdot (a + b)$$

- A soma agora tem duas parcelas e em cada uma aparece o termo  $(a + b)$ . Dessa forma, colocamos esse termo em evidência:

$$am + bm + ax + bx = m(a + b) + x(a + b) = (a + b) \cdot (m + x)$$

Para compreender a fatoração por agrupamento feita anteriormente, observaremos como calcular a área do retângulo maior, conforme as medidas indicadas.



- Considerando que a área do retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura, temos:

$$\text{Área do retângulo} = (a + b) \cdot (m + x) \quad \rightarrow \text{forma fatorada}$$

- Podemos calcular a área do retângulo por meio da soma das áreas dos retângulos em que ele está dividido:

$$\text{Área do retângulo} = am + bm + ax + bx$$

- Comparando essas duas maneiras, concluímos que:

$$(a + b) \cdot (m + x) = am + bm + ax + bx$$

## Teláris - 9º. ano

# 2 Fatoração de polinômios

Fazer a **fatoração** ou **fatorar** um polinômio é expressá-lo como o produto de 2 ou mais polinômios.

Por exemplo, o polinômio  $x^2 + 2x$  pode ser escrito como o produto  $x \cdot (x + 2)$ . Dizemos que  $x \cdot (x + 2)$  é a forma fatorada de  $x^2 + 2x$ . Vejamos alguns casos de fatoração.