MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DÁLETE DOS SANTOS RIBEIRO PITANGA FREITAS
ELLEN ROSA SILVA

Uma abordagem inicial do conceito de reta sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio

Campos dos Goytacazes/ RJ

Setembro – 2023.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DÁLETE DOS SANTOS RIBEIRO PITANGA FREITAS
ELLEN ROSA SILVA

Uma abordagem inicial do conceito de reta sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Me. Romulo Mussel

Campos dos Goytacazes/RJ

Setembro – 2023.1

Biblioteca
CIP - Catalogação na Publicação

F586a

Freitas, Dálete
Uma abordagem inicial de reta sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio / Dálete Freitas, Ellen Silva - 2023.
145 f.: il. color.

Orientador: Romulo Mussel

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Anton Dakitsch, RJ, 2023.
Referências: f. 142 a 146.

1. Função Afim. 2. Geometria Analítica. 3. Aprendizagem. 4. Análise de conteúdo. I. Silva, Ellen. II. Mussel, Romulo, orient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE
CAMPUS CAMPOS CENTRO
RUA DOUTOR SIQUEIRA, 273, PARQUE DOM BOSCO, CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ, CEP 28030130
Fone: (22) 2726-2903, (22) 2726-2906

PARECER CACLMCC/DAESLCC/DIRESLCC/DGCCENTRO/REIT/IFFLU N° 18

11 de outubro de 2023

DÁLETE DOS SANTOS RIBEIRO PITANGA FREITAS
ELLEN ROSA SILVA

Uma abordagem inicial do conceito de reta sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 18 de Setembro de 2023.

Banca Examinadora:

____

Prof ª. Letícia Carvalho Maciel
Mestre em Matemática – UENF
IFFluminense *Campus* Campos Centro

____

Prof.ª Viviane Stellet Alecrin
Mestre em Matemática - USS
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Romulo Mussel (Orientador)

Mestre em Matemática – IMPA

IFFluminense *Campus* Campos Centro

Documento assinado eletronicamente por:

- **Romulo Mussel, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 11/10/2023 19:19:53.**
- **Leticia Carvalho Maciel, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO , COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 11/10/2023 20:22:15.**
- **Viviane Stellet Alecrin , PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, COORDENACAO ACADEMICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMATICA, em 11/10/2023 20:28:17.**

RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo investigar como é abordado o conceito de reta sob o olhar da Geometria Analítica em materiais de escolas públicas do Ensino Médio, tais como: livros didáticos de Matemática, o material produzido pelo professor (se houver). A partir das dificuldades em Geometria Analítica durante a graduação e a importância da mesma para o entendimento de conteúdos matemáticos, como por exemplo, Função Afim, delimitou-se a seguinte questão de pesquisa: De que forma o conceito de reta é trabalhado sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio? Para responder a essa pergunta, buscou-se como aporte teórico a obra de Lima (1999) "Os três Componentes do ensino da Matemática". Para análise de cada material, utilizou-se a metodologia da Análise de conteúdo de Bardin (2011). Houve a necesssidade da criação de dois quadros com categorias e subcategorias para estabelecer parâmetros de contribuição da relação da Função Afim e a Geometria Analítica no estudo da reta. Após a análise criteriosa dos materiais selecionados, foi possível identificar que apenas um deles faz essa relação.

Palavras-chave: Função Afim; Geometria Analítica; Aprendizagem; Análise de Conteúdo.

ABSTRACT

This work aims to investigate how the concept of a straight line is approached from the perspective of Analytical Geometry in materials from public high schools, such as: Mathematics textbooks, material produced by the teacher (if any). From the difficulties in Analytical Geometry during graduation and its importance for the understanding of mathematical contents, such as Affin Function, the following research question was delimited: How is the concept of a straight line worked under the eyes of of Analytical Geometry in High School? To answer this question, seek as a theoretical contribution the work of Lima (1999) “The three Components of the teaching of Mathematics”. For the analysis of each material, Bardin's (2011) Content Analysis methodology was used. There was a need to create two tables with categories and subcategories to establish parameters of contribution of the relationship between the Affine Function and Analytical Geometry in the study of the line. After a careful analysis of the selected materials, it was possible to identify that only one of them makes this relationship.

Keywords: Affine Function; Analytical Geometry; Learning; Content analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência de fundamental importância para o desenvolvimento integral das capacidades e habilidades do ser humano. Em um mundo de constantes evoluções e transformações, o pensamento matemático se torna indispensável para o estímulo e aperfeiçoamento individual. Do auxílio ao raciocínio lógico à capacidade de criação, seus benefícios contribuem na resolução de problemas e tomada de decisões.

> A matemática é uma área privilegiada para o desenvolvimento cognitivo do aluno, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos, sendo que estas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de representação diferentes da linguagem natural ou deimagens (Dallemole, Groenwald, 2012, p.37).

Um dos ramos da matemática que trabalha simultaneamente com diferentes representações de um mesmo objeto matemático é a Geometria Analítica, pois ela está vigente em muitas áreas da ciência, na qual se estuda as relações existentes entre a álgebra e a geometria. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2006) destaca que:

> A Geometria Analítica deve ser trabalhada de modo articulado com a Álgebra, ampliando a capacidade de visualização. É importante valorizar não apenas a manipulação algébrica, mas enfatizar o significado geométrico dos coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas e perpendiculares, entre outras. As articulações entre a Geometria Analítica e outras áreas da Matemática escolar também podem ser enfatizadas quando do estudo de ideias envolvendo crescimento e decrescimento, taxas de variação de uma função, entre outros temas (Brasil, 2017, p.563).

De acordo com Silva (2006), no ensino de Geometria Analítica, constata-se que muitos alunos apresentam dificuldades ao lidar com as diversas representações gráficas e algébricas. Duval (2003) afirma que a razão dessas dificuldades está no fato do aluno desconhecer a correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e a escrita algébrica.

Segundo Sores e Souza (2021), tem-se como principal ferramenta no campo educacional o livro didático, adotado normalmente todas as escolas, e muitas vezes sendo o principal instrumento nas escolas públicas. Este importante recurso deve estar em constante avaliação pelo Ministério da Educação (MEC) e secretarias de estados e municípios. “O livro didático pode contribuir para o processo de aprendizagem como um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno e possibilita interações de vários tipos” (Mandarino, 2010, p. 5).

Dante (1996) destaca a importância do livro didático para o professor de uma maneira detalhada. Ele diz que “o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem ajuda do livro didático”. Para Dante (1996):

> Muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor[...] o livro didático de matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor (Dante, 1996, p. 63).

Sendo assim, alguns professores até tentam elaborar materiais didáticos, mas por muitas vezes não têm tempo para investir em aprimorações e acabam convivendo com esse grande desafio (Lorenzato, 2010), por isso, o livro a princípio acaba tendo mais ilustrações, mais diversidade de exercícios, ou seja, o material do professor acaba sendo utilizado em casos específicos, como, por exemplo, quando não há livros disponíveis para todos os alunos.

Frente a isso, Lopes (2009) destaca que a importância do livro didático de Matemática na educação brasileira é inegável, tanto pelo aspecto histórico nos processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina quanto pelo o que ele representa para a maioria dos professores e dos alunos.

Levando em consideração a estrutura do livro utilizado na maioria das escolas e que a matemática tem suas características próprias, em que seus conteúdos exigem meios apropriados para sua aquisição, Lima (1999), sugere três componentes básicos aos quais o ensino de matemática deve se apoiar: conceituação,manipulação e aplicação.

De acordo com Lima (1999), a conceituação desempenha um papel fundamental na compreensão dos conteúdos matemáticos, e é a partir deste componente que é possível estabelecer as conexões entre conceitos diversos, necessários à aplicação satisfatória dos conteúdos. A manipulação é importante no ensino e aprendizagem da Matemática, pois propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de concentração do estudante, essenciais para se obter êxito ao lidar com operações algébricas, fórmulas e construções geométricas. A aplicação é o emprego das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo no cotidiano.

Neste contexto, delimitou-se a seguinte questão de pesquisa: De que forma o conceito de reta é abordado sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio?

Para responder essa questão de pesquisa, foi traçado o seguinte objetivo geral: Investigar como o conceito de reta é abordado sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino

Médio.

Com o intuito de analisar como o conceito de reta é trabalhado no Ensino Médio sob o olhar da Geometria Analítica, optou-se por investigar não só os livros didáticos, mas também o material do professor, caso o livro não fosse a única fonte; como apostilas, exercícios e quaisquer outros materiais utilizados.

Para alcançar tal objetivo, traçou-se os seguintes objetivos específicos:

- Analisar como o conceito de reta é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio;
- Analisar se abordam a relação de Função Afim com a Geometria Analítica;
- Investigar as interações dos professores com o conteúdo através do seu material, caso o livro didático não seja a fonte principal;
- Propor reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica com o estudo de Função Afim.

A escolha do tema se deu em razão da dificuldade em Geometria Analítica durante a graduação e a importância da mesma para o desenvolvimento de habilidades e competências, segundo prescrições curriculares e seus afins quanto à formação, além de ser um conhecimento fundamental para estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

Este trabalho de conclusão de curso está dividido em sete capítulos, sendo o primeiro esta introdução, o segundo versando sobre a revisão de literatura, o terceiro dedicado aos procedimentos metodológicos, o quarto apresenta os livros aprovados pela PNLD 2020 e os materiais recolhidos, o quinto traz a análise de cada um deles, e o sexto mostra a análise comparativa dos materiais e a última as considerações finais.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica deste trabalho. Ele está dividido em seis seções: I) História da Geometria Analítica; II) Estudo da reta em função Afim; III) Estudo analítico da reta; IV) Relação entre função Afim e Geometria Analítica V) Análise de conteúdo; VI) Os três componentes do Ensino da Matemática e VII) Trabalhos relacionados.

2.1 História da Geometria Analítica

A Geometria foi criada pelos gregos e fundamentada principalmente por Euclides (360-0295 a.c), mesmo não sendo ele o criador. Euclides foi considerado o pai da Geometria por seus trabalhos que fundamentaram todo conhecimento geométrico existente até aquela época, por meio de teoremas e axiomas, registrados em seu livro: Os Elementos.

Há mais de dois mil anos, os gregos desenvolveram a matemática partindo do pressuposto que a Geometria precedia à álgebra e aritmética. Tempos mais tarde, René Descartes desenvolveu seu estudo na ordem inversa, ou seja, que a geometria era precedida da álgebra e aritmética. A história da Geometria Analítica se deu no século XVII, com os Franceses Pierre Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 - 1650), que desenvolveram a Geometria Analítica de forma independente.

Ao estudar a história da Matemática, no que tange a Geometria Analítica em 1637, alguns autores consideram que René Descartes seja o "pai" da Geometria Analítica, em seu pequeno texto chamado *A Geometria*, que é um dos três apêndices na obra *Discurso do Método,* que foi considerada o marco inicial da filosofia moderna, enquanto outros defendem que foram os estudos de Pierre Fermat e René Descartes que deram propulsão a esse ramo da matemática

Para Domingues (2008):

> A geometria como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas apesar do seu brilhantismo faltava operacionalidade à grande geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para fusão criativa com a geometria (Domingues, 2008, p. 1).

A Geometria Analítica, então, surge da fusão entre a Álgebra e Geometria, sendo uma parte da Matemática que estabelece relações existentes entre elas. Tais relações vieram das contribuições de Descartes e Fermat. As contribuições de Fermat à Geometria Analítica, podem ser encontradas em seu pequeno texto, por título *Introdução aos Lugares Planos e* Sólidos, com data de 1636, que só foi publicada em 1679, juntamente com toda sua obra.

Descartes contribuiu com sua obra já citada, *O Discurso do Método*, onde defende o método matemático como aquisição do conhecimento em todos os campos. Relacionando a Geometria com a Álgebra, ele criou princípios matemáticos para analisar por meios geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando a distância entre eles e localização (coordenadas).

Para Garding (1919):

> A geometria analítica é o uso sistemático de fato que existe uma correspondência natural entre os números reais e os pontos de uma reta, entre os pares de números reais e os pontos de um plano, e entre os termos de números reais e os pontos do espaço. Os cálculos com números podem então ser interpretados geometricamente e

> os problemas geométricos podem ser reformulados como problemas algébricos (Garding, 1919, p. 74).

A Geometria Analítica, chamada antigamente de coordenadas geométricas, é o estudo da Geometria por meio dos princípios da Álgebra que, a partir da representação cartesiana, manipula equações para planos, retas, cônicas e círculos, com o objetivo de conciliar entes geométricos às relações algébricas. Esta associação possibilita um estudo mais minucioso das figuras geométricas. Tal relação trouxe grandes avanços no campo da Matemática como ciência.

> A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, é um par de eixos ortogonais, não usados por nenhum deles. Sabiam que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste, particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica (Domingues, 2008, p.1).

Assim, como destacado por Domingues (2008), a Geometria Analítica possibilita o estudo de figuras geométricas a partir de equações. Bosquilha e colaboradores (2003, p. 36), afirmam que "[...] um dos objetivos da Geometria Analítica é determinar a reta que representa certa equação ou obter a equação de uma reta dada, estabelecendo uma relação entre a geometria e a álgebra."

Vemos a abordagem dessa relação ser inseirda na escola brasileira com a chegada da família real no país. Devido às eminentes guerras, viu-se a necessidade de um melhor preparo da artilharia e infantaria, o que impulsionou o ensino da geometria no Brasil, em especial nas aulas de *Artilharia e Fortificações*, que eram cursos preparatórios dos oficiais militares (Valente, 1999).

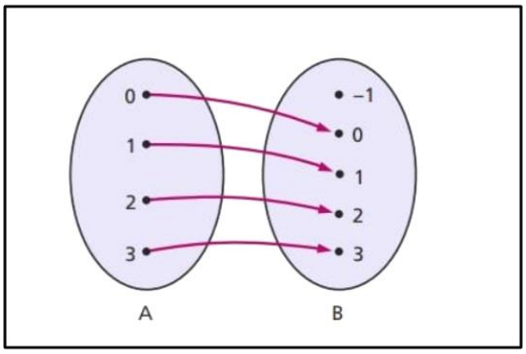
2.2 Estudo da reta em Função Afim

Desde a antiguidade, é notório que os conhecimentos da matemática se fazem presentes na vida humana. "O conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda a Matemática" (Ponte, 1990, p. 1). A Função Afim é um dos assuntos mais considerados dentro dos inúmeros conteúdos matemáticos, pois é abordado em diversos anos do Ensino Fundamental e nas séries de Ensino Médio, seja por meio de capítulos específicos ou de forma interdisciplinar.

Quando dizemos que algo está em função de outro, percebemos logo uma relação de dependência. Assim também é na matemática. A função trabalha uma relação de dependência entre dois conjuntos, onde um conjunto é chamado de Domínio e o outro de Contradomínio. No conjunto Domínio, encontramos possibilidades de valor para "x" e no conjunto Contradomínio, possibilidades de valores para "y". Cada elemento do Domínio só pode ser associadoa um único elemento do Contradomínio. Essa relação entre os elementos se dá pela lei de formação, que é a lei que define uma função.

Segundo Iezzi e Murakami (2013), no livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1, dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existeum só $y \in B \mid (x,y) \in f$. A função *f* é aplicação de A em B $\leftrightarrow \forall\, x \in A, \exists!\, y \in B \mid (x,y) \in f$, onde "*x*" é a variável independente e "*y*" é a variável dependente. A Figura 1 ilustra essa relação.

Figura 1- Domínio, Contradomínio e Imagem.



Fonte: Iezzi e Murakami, 2013, p. 80.

Como está descrito na figura acima, podemos ver que cada elemento do conjunto Domínio (conjunto A) está associado a apenas um elemento do conjunto Contradomínio (conjunto B). Esses elementos estão associados por uma lei de formação, que formam o conjunto Imagem (todos os números em B, que receberam seta). O conjunto Imagem é um subconjunto do Contradomínio, formado por todos os elementos que estão associados aos elementos do conjunto Domínio. Percebe-se então a relação de dependência dos elementos doconjunto Imagem aos elementos do conjunto Domínio.

Definição de Função Afim ou Função Polinomial do 1º grau.

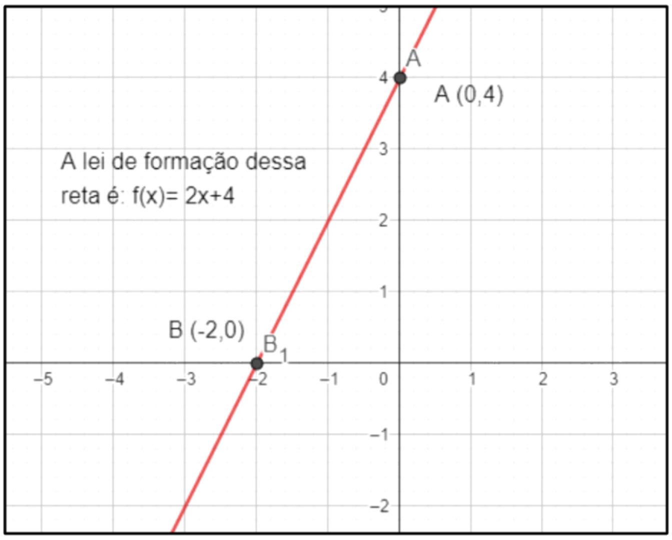
Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de Função Afim, quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ em que $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = ax + b$.

Nesta função, o termo *a* é chamado de coeficiente de *x* e representa a taxa de crescimento ou decrescimento ou ainda coeficiente angular da função. O coeficiente *b* é conhecido como coeficiente linear da função, também pode ser chamado de termo constante ou linear da Função Afim.

Gráfico da Função Afim

O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ é uma reta. Conforme a figura abaixo.

Figura 2 - Gráfico de uma Função Afim.

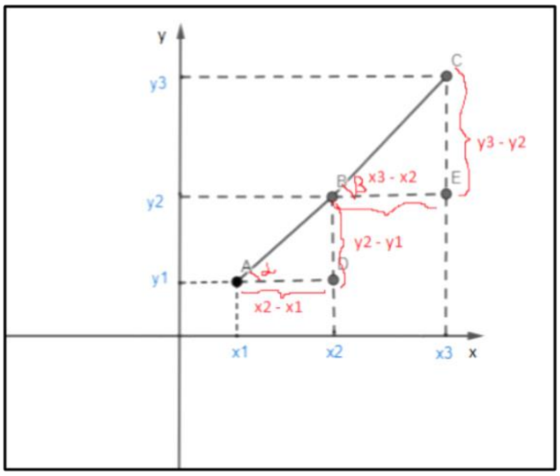


Fonte: Elaboração própria.

Agora, vamos demonstrar porque o gráfico de uma Função Afim é uma reta.

Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos. Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, mostraremos, inicialmente, que os triângulos retângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{C}E$ são semelhantes (Figura 3).

Figura 3 - Semelhança de triângulos



Fonte: Iezzi e Murakami, 1987, p. 101.

Consideraremos as retas:

$$(x_1, y_1) \in f \to y_1 = ax_1 + b$$
$$(x_2, y_2) \in f \to y_2 = ax_2 + b$$
$$(x_3, y_3) \in f \to y_3 = ax_3 + b$$
$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$
$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$
$$\to \quad \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

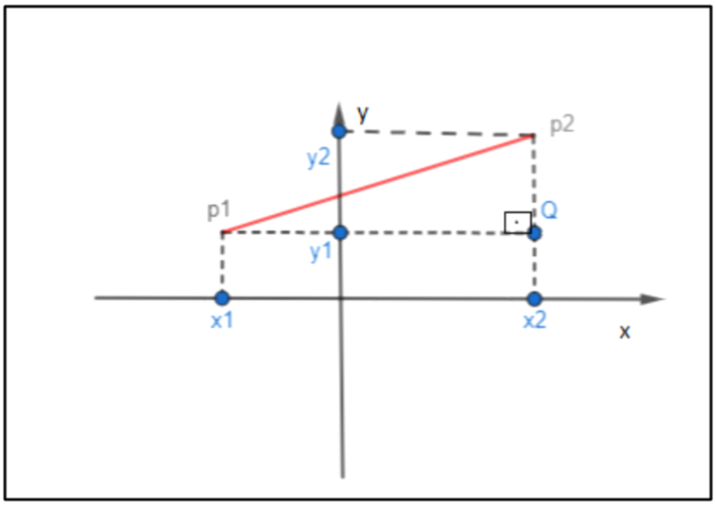
Os triângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{C}E$ são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A, B e C estão alinhados.

Aqui foi considerado um valor de *a* positivo na imagem, mas independente do *a* ser positivo ou negativo, essas relações continuam válidas.

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que os une. A menor distância entre dois pontos é sempre um segmento de reta. Considerando os pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ dois pontos de um plano. Luiz Roberto Dante em seu livro "Contexto e Aplicações (volume 1)" faz o seguinte questionamento: "como se pode exprimir a distância do ponto P_1 ao ponto P_2 em termos dessas coordenadas?" Ou seja, dados os dois pontos $P_1(x_1,y_1)$ e P_2 (x_2,y_2), pretende-se obter a expressão da distância $d(P_1, P_2)$ em termos das coordenadas de P_1 e P_2. Para isso, é preciso introduzir um novo ponto Q (x_2,y_1). O triângulo P_1 P_2 Q é retângulo em Q, e o segmento de reta P_1 P_2 é a sua hipotenusa. Seus catetos medem $|(x_2 - x_1)|$, e $|(y_2 - y_1)|$ tomados em valores absolutos.Usando a relação de Pitágoras, temos: $d[(P_1\ P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$,ou seja, $d(P_1\ P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, como é mostrado na Figura a seguir.

Figura 4 - Coordenadas no plano cartesiano



Fonte: Dante, 2013, p. 50.

Utilizando o plano cartesiano é possível demonstrar as coordenadas cartesianas que são representadas pelos pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ em que *x* é a abscissa e *y* ordenada. Percebe-se que cada par ordenado corresponde a um ponto no plano cartesiano. E assim podemos perceber as propriedades geométricas em linguagem algébrica, ou seja, interpretar gráficos através da manipulação da álgebra e reciprocamente, interpretar geometricamente as manipulações entre números reais.

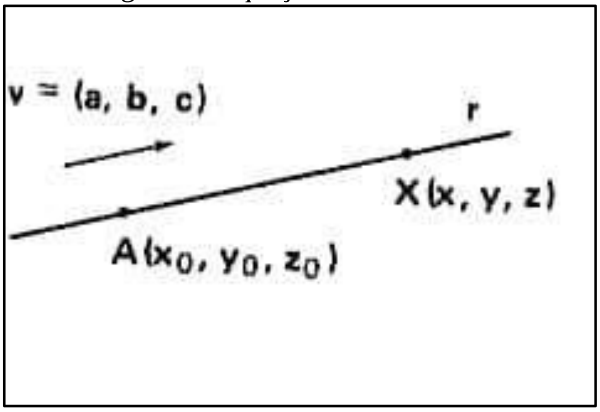
2.3 Estudo Analítico da Reta

Segundo Machado (1982), denominamos equação de uma reta no $\mathbb{R}^2$ a toda equação nas incógnitas x e y que é satisfeita pelos pontos P (x, y) que pertencem à reta e só por eles.

De acordo com Dante (2005), um segmento de reta orientado, diz-se orientado quando se estipula qual dos seus extremos é o inicial, consequentemente, o outro, será o final. Por exemplo, quando se diz segmento orientado AB, fica subentendido que o ponto A é o extremo inicial e B é o extremo final, surgindo então a ideia de vetor.

Um vetor não nulo paralelo a uma reta é chamado de vetor diretor dessa reta. Considerando então a equação da reta definida por um ponto, um vetor diretor, tem-se o seguinte caso:

Figura 5 - Equação vetorial da reta



Fonte: Machado, 1982, p. 70.

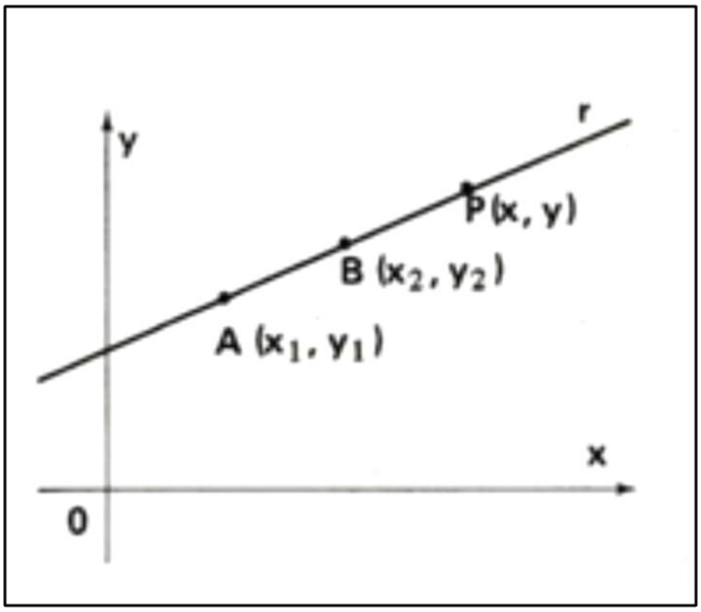
$$\overrightarrow{AX} \,||\vec{v} \leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t.\vec{v}, t \ \in \mathbb{R}$$

$$X - A = t.v$$

$$X = A + t.v$$

Encontrando a equação vetorial da reta. Assim, representado na forma simbólico-numérico, através das coordenadas $\mathrm{P}\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{A}\ (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1), \mathrm{B}(\ \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1)$ encontra-se a equação paramétrica da reta.

Figura 6 – Alinhamento de pontos



Fonte: Machado, 1982, p. 37.

Utilizando a conversão usando a reta no formato vetorial, temos:

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \quad \mathrm{A}\ (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) \qquad \mathrm{B}(\ \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_1)$$

$$(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1).\mathrm{t} + \left(\mathrm{x}_{1,}, \mathrm{y}_1\right) = (\mathrm{x}, \mathrm{y})\ , \mathrm{t} \in \mathbb{R}$$

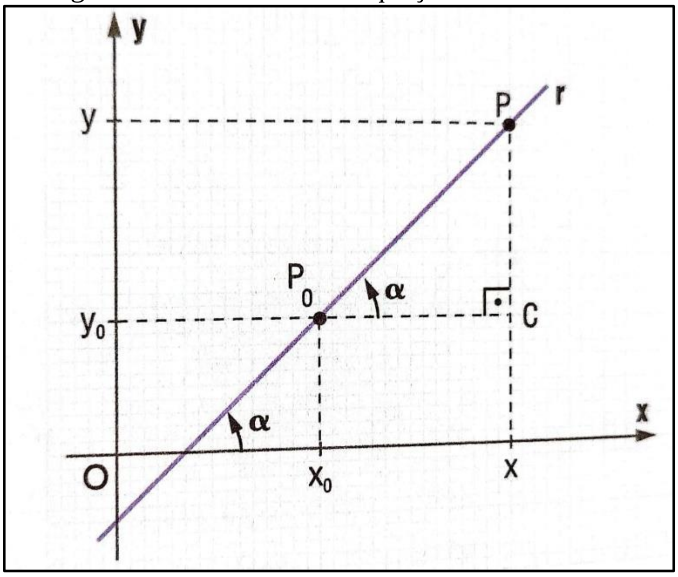
Desenvolvendo, encontramos a equação paramétrica da reta:

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1 \end{cases}$$

Equação da reta quando são conhecidos um ponto e a declividade da reta

Assim como dois pontos distintos determinam uma reta no plano cartesiano, também é possível determiná-la conhecendo apenas um ponto e um ângulo. Pois uma reta *r* intercepta o eixo Ox em um ponto formando um ângulo α. A medida desse ângulo varia entre $0° \leq \alpha < 180°$.

Figura 7- Determinando a equação da reta



Fonte: Dante, 2005, p. 402.

Esse ângulo é a inclinação da reta e sua tangente é o valor do seu coeficiente angular.

Assim, $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de coeficiente angular da reta ou (declividade da reta).

A relação entre o coeficiente angular (a) e o ângulo de inclinação (α) que o eixo *Ox* forma com a reta *s* é dada por *a* = (*tan*α). Se P(x,y) é um ponto genérico de uma reta r, então o coeficiente angular α e um ponto P_0 (x_0, y_0) dela determinam essa reta.

$$a = \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)} \rightarrow (y - y_0) = a\,(x - x_0) \rightarrow y = y_0 + a(\,x - x_0)$$

Essa é a equação de reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular α.

2.4 Relação entre Função Afim e Geometria Analítica

No caso da função afim: f(x) = ax + b, com (a ≠ 0) ou y = ax + b com (a ≠ 0), tem-se a representação geométrica de uma reta. O termo *a* é chamado coeficiente de *x*, o qual se estabelece como coeficiente angular e está relacionado com a declividade da reta em relação ao eixo das abscisas. Já o termo constante b é chamado coeficiente linear da reta. Para x = 0, temos f(0) = a.0 + b. Sendo dessa maneira, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy (Iezzi *et al*, 2006).

A respeito da Geometria Analítica, esta também apresenta uma equação geral que se consolida em uma reta, a qual se faz pela seguinte expressão: ax + by + c = 0, assim sendo, é imporante perceber que, se isolarmos o termo y por: by = - ax – c, ou seja, y $=-\frac{ax}{b}-\frac{c}{b}$ temos a equação y = mx + n (m ≠ 0), que é a forma reduzida da equação da reta da Geometria, sendo m = $-\frac{a}{b}$ e n $=-\frac{c}{b}$. A nomenclatura de coeficientes angular e linear se mantém, determinando que m é o coeficiente angular da reta e que n é o seu coeficiente linear. O número responsável pela inclinação da reta, ou seja, m, pode ser obtido através da correlação que m = tg(α) (Iezzi *et al*, 2006).

Isso significa, dizer, então que existe uma relação na determinação da lei que rege uma reta no conteúdo de Funções e da reta que se forma na Geometria Analítica. Este vínculo muitas vezes não é observado, porém, como descrito, é de fácil percepção avaliar que os mesmos estão em íntegra familiaridade.

2.5 Análise de Conteúdo

A definição de análise de conteúdo surge no final dos anos 40-50, com Berelson, auxiliado por Lazarsfeld, mas somente em 1977, foi publicada a obra de Bardin, "Analyse de Contenu", na qual o método foi configurado nos detalhes que servem de orientação atualmente. Para Bardin (2011):

> O termo análise de conteúdo designa: um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (Bardin, 2011, p. 47).

A Análise de Conteúdo é um método que pode ser aplicado tanto na pesquisa quantitativa como na investigação qualitativa, mas com aplicação diferente, afirma Triviños (1987), podendo ainda ser aplicada na versão quali-quantitativa de pesquisa, usando a abordagem qualitativa, mas com o emprego de dados estatísticos.

Bardin (2011), indica que a utilização da análise de conteúdo prevê três fases fundamentais: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados - a inferência e a interpretação.

A primeira fase, pré análise, pode ser identificada como uma fase de organização. Nela é estabelecido um esquema de trabalho que deve ser preciso, com procedimentos bem definidos, embora flexíveis. Geralmente, esta primeira fase possui três missões: a escolha dos documentosa serem submetidos à análise (corpus), a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboraçãode indicadores que fundamentam a interpretação final (Bardin, 2010).

Na sequência, tem-se a exploração do material, fase que tem por finalidade a categorização ou codificação no estudo. Nesta fase, a descrição analítica vem a enaltecer o estudo aprofundado, orientado pelas hipóteses e referenciais teóricos (Mozzato; Grzybovski, 2011). Neste segmento, a definição das categorias é classificada, apontando os elementos constitutivos de uma analogia significativa na pesquisa, isto é, das categorias. Dessa forma, a análise categorial consiste no desmembramento e posterior agrupamento ou reagrupamento das unidades de registro do texto. Assim, a repetição de palavras e/ou termos pode ser a estratégia adotada no processo de codificação para serem criadas as unidades de registro e, posteriormente, categorias de análise iniciais (Bardin, 2010).

Na terceira fase, o tratamento dos resultados tem a finalidade de constituir e captar os conteúdos contidos em todo o material coletado por meio dos instrumentos (Fossá, 2013). Esta fase é a “operação lógica, pela qual se admite uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceitas como verdadeiras” (Bardin, 2010, p. 41).

Neste trabalho a primeira fase da Análise de Conteúdo se deu pela a coleta dos livros didáticos e materiais elaborados pelos professores, a partir disso, foi possível averiguar quais capítulos seriam utilizados. Na segunda fase, houve a categorização através de referenciais teóricos. E por fim, a captura dos conteúdos por meio de instrumentos que no caso deste trabalho de curso foram os quadros de análise.

2.6 Os Três Componentes do Ensino da Matemática

Segundo o matemático Elon Lages Lima, para que ocorra uma aprendizagem significativa dos conteúdos de matemática é necessário que o ensino contemple três componentes fundamentais, aos quais chamou: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Esses três componentes devem ser pensados como um tripé que sustenta e organiza o ensino e aprendizagem de Matemática, tendo cada um deles com importância única, e que no conjunto, os três devem ser bem equilibradas, pois não existe algum com maior importância. Para melhor entendermos a função e relevância desses componentes, os descreveremos a seguir. Com base em Lima (1999):

Conceituação - Esse componente se refere às definições e conceituações matemáticas.

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientesde hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos.É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações (Lima, 1999, p.2).

Compreender bem o conceito para assim dar um significado do que se ensina ou aprende é fundamental, pois assim os próximos componentes ganham clareza e importância.

Manipulação - Está relacionada ao manuseio de objetos matemáticos, ação dependente das habilidades desenvolvidas pelo aluno no decorrer do processo de ensino e aprendizagem.

> A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-oda perda de tempo e energia com detalhes secundários (Lima, 1999, p.2).

Assim, manipular está associado à atividade de manusear. Mas é importante que o estudante tenha conhecimentodas ferramentas que está manuseando, pois assim ele terá capacidade de manipulá-la em qualquer situação que seja acionada essa necessidade.

Aplicações - Pode ser definida como a utilização prática dos conceitos matemáticos no dia a dia ou em diferentes áreas do conhecimento. São as habituais aplicações da matemática que tornam o ensino dessa ciência necessário e indispensável.

> Aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamentecada vez mais no futuro (Lima, 1999, p.2).

Portanto, aplicar é nada mais que usufruir de um conjunto de competências e habilidades desenvolvidas e apoiadas nos componentes conceituação e manipulação, completando o tripé que organiza e sustenta o ensino e aprendizagem da Matemática.

2.7 Trabalhos Relacionados

Para revisão dos trabalhos relacionados foi feita uma pesquisa no dia 25 de março de 2022 na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Google Acadêmico com o objetivo de encontrar trabalhos que fossem equiparáveis ao tema da presente pesquisa.

Na pesquisa foi utilizada a *string* “geometria analítica” AND “estudo da reta” na BDTD, onde foram encontrados 9 trabalhos, sendo selecionado apenas um deles, pois os demais tratavam de assuntos que não se adequavam à proposta da pesquisa.

No Google Acadêmico foi encontrada uma vasta quantidade de publicações com tais *strings*. Decidiu-se, então, acrescentar a *string* “livro didático” além das que foram mencionadas. Desse modo, foram encontrados 288 (duzentos e oitenta e oito) trabalhos. Posteriormente, foi aplicado filtro para limitar o período de tempo entre 2015 e 2022 das pesquisas publicadas. Sendo assim, foram selecionados dois trabalhos que atenderam aos critérios de similaridade.

Com base nas leituras dos resumos dos trabalhos, aqueles que se adequaram ao tema deste projeto foram selecionados, que se encontram no Quadro 1.

Quadro 1 – Trabalhos relacionados

Trabalho	**Autor (a)**	**Ano/Instituição**
Geometria Analítica: Análise de coleção de livros didáticos do ensino médio sob a ótica dos registros de representação semiótica.	Jocilene Castro Soares	2017 - Universidade Federal do Pampa
O uso do Geogebra no ensino da Geometria Analítica: Estudo da reta.	Leonardo de Souza Marins	2013 – Universidade federal de Goiás
As intersecções nos conteúdos de função e de geometria analítica observadas nos livros didáticos.	Susana Ribeiro Soares e Tainara Camila de Souza	2021 – Artigo publicado na *Brazilian Jounal of Development*

Fonte: Elaboração própria.

2.7.1 Geometria Analítica: Análise de coleção de livros didáticos do ensino médio sob a ótica dos registros de representação semiótica.

Este trabalho tem por objetivo analisar como a Geometria Analítica é proposta nas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e traz como aporte teórico as ideias de Duval ao propor a teoria dos Registros de Representação Semiótica. O trabalho analisou livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (2015). O desenvolvimento deste trabalho seguiu os pressupostos da pesquisa qualitativa. A análise das fontes de produção de dados foi realizada por meio da Análise de Conteúdo.

A metodologia aplicada foi verificar os tipos de atividades propostas em coleções de livros didáticos de Matemática, dando ênfase à qualidade e buscando dissipar a predominância da quantidade.

Ao analisar as coleções a autora afirma, que a abordagem dos conceitos da Geometria

Analítica é fragmentada. Constatou-se que as três coleções analisadas priorizam atividades que envolvem conversões de representações em relação ao tratamento, mas ainda falta explorar outros sentidos, pois as conversões exigidas, na maioria das vezes, são propostas dos registros da língua natural para o registro algébrico.

Por fim a autora destaca a importância do uso do livro didático - que ainda é uma das principais ferramentas do professor dentro da sala de aula - e que a escolha deste recurso deve ser feita a partir de uma análise minuciosa.

Esta pesquisa tem como semelhança ao presente trabalho a análise dos livros didáticos voltada à Geometria Analítica. Diferencia-se por apresentar uma abordagem mais pronfunda dos conteúdos de Geometria Analítica.

2.7.2 As intersecções nos conteúdos de função e de Geometria Analítica observadas nos livros didáticos.

O trabalho tem por objetivo estabelecer relações entre alguns conteúdos no estudo da disciplina matemática, para contribuir com o progresso intelectual dos alunos, sendo essa relação prioritária para o estudo de funções do primeiro grau, fazendo correspondências com o estudo da reta.

Sabendo a importância de relacionar conteúdo dentro de uma ciência, deve-se explorar esse cenário para estabelecer o mais alto índice da educação brasileira, de forma a mudar e avançar no cenário atual, objetivando preparar o aluno para concursos e demais vestibulares.

Este trabalho foi dividido em três partes, sendo a primeira a análise dos livros disponibilizados na Biblioteca do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Barbacena, focando na análise dos conteúdos funcionais e da geometria analítica. Em seguida, foram feitas análises de conceitos e conteúdos importantes sobre cada temática abordada e selecionada aquelas consideradas com maior nível de relevância. Na terceira parte foi feita uma análise dos resultados obtidos após a leitura dos referenciais teóricos, que se apoiaram em pilares do ensino e aprendizagem na área da educação matemática.

O trabalho se assemelha por analisar como é feita abordagem da relação da função afim com o estudo da reta em um livro didático do Ensino Médio. Se diferencia por investigar apenas uma coleção, enquanto a presente pesquisa se apoiou em cinco livros didáticos, além de materiais elaborados pelo professor.

2.7.3 O uso do GeoGebra no Ensino da Geometria Analítica: Estudo da Reta

O trabalho escrito por Leonardo de Souza Marins destaca o estudo da reta para ser aplicado às turmas do terceiro ano do Ensino Médio com auxílio do GeoGebra, intencionando proporcionar maior dinamicidade na exposição dos conteúdos inerentes à geometria analítica. O autor viu o *software* GeoGebra como um facilitador deste processo de ensino e aprendizagem.

O referido trabalho é bastante ilustrativo. Explica passo a passo como esboçar uma reta no *software* GeoGebra, propiciando o desenvolvimento matemático do aluno por meio das construções, o que dispensa a necessidade de memorizar fórmulas

Esse trabalho se assemelha à presente pesquisa por apresentar o estudo da reta por meio de conceitos e demonstrações analíticas e se difere por fazer uso do *software* Geogebra.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo discorrerá sobre os referenciais e aspectos metodológicos utilizados no presente Trabalho de Conclusão de Curso. Evidencia-se novamente o objetivo geral: Analisar como o conceito de reta, sob o olhar da Geometria Analítica é abordado no Ensino Médio.

Neste capítulo, serão descritos o tipo de pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e as etapas que serão utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

3.1 Caracterização da Pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada é de cunho qualitativo, pois pretende-se investigar e compreender a parte subjetiva da questão apresentada acima, identificando e analisando dados que não são mensurados numericamente. De acordo com Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, ou seja, os pesquisadores estudam práticas diferentes em cenários diferentes, tentando entender os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem.

Considerando a pesquisa de caráter exploratório, Gil (2008), destaca que o objetivo desse tipo de pesquisa é familiarizar-se com o assunto que ainda é pouco conhecido. Quanto aos procedimentos técnicos, tal pesquisa se enquadra como pesquisa bibliográfica. De acordo com Gil (2008), ela é desenvolvida com base em material já elaborado, constituídos principalmentede livros e artigos científicos.

> Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis (Gil, 2008, p. 27).

Como ferramenta de coleta de dados, optou-se pela pesquisa de campo, que corresponde à observação, análise, coleta e interpretação de fatos e fenômenos que ocorrem dentro dos cenários e ambientes de vivência, com o objetivo de extrair dados e informações diretamente da realidade do objeto de estudo.

Segundo Gonsalves (2001, p.67):

> A pesquisa de campo é o tipo de pesquisa que pretende buscar a informação diretamente com a população pesquisada. Ela exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorre, ou ocorreu e reunir um conjunto de informações a serem documentadas [...] (Gonsalves, 2001, p. 67).

Esta pesquisa de campo vislumbra aprofundar o conhecimento do pesquisador a partir das verificações de como é incorporada a Geometria Analítica no estudo da reta e das análises dos materiais aos quais os professores se apoiam.

3.2 Critério de escolha das coleções utilizadas

Essa primeira etapa consistiu na escolha das escolas e no levantamento dos dados referentes aos materiais utilizados pelos professores. O critério de escolha das coleções de livros didáticos aprovados pela PNLD 2020, a princípio, se deu pela localização das escolas – optou-se por analisar as coleções de colégios estaduais próximos às moradias das autoras deste trabalho – no entanto, devida à falta de receptividade e escassez de coleções, a visita precisou ocorrer em outras escolas escolas estaduais da cidade de Campos dos Goytacazes- RJ.

Oito escolas foram visitadas, porém em apenas quatro delas foi possível coletar os livros didáticos e conversar com os professores de Matemática, pois objetivou-se também saber se o professor de fato utilizava a coleção disponibilizada pela escola, além de materiais elaborados por ele, caso houvesse.

Dos quatro professores de matemática entrevistados, dois utilizavam o livro didático. Dos outros dois, um utilizava apostilas elaboradas por ele mesmo e o outro utilizava uma coleção de livros de uma escola da rede particular. Por fim, foram coletadas as coleções que havia nas quatro escolas, são elas:

- Multiversos – Matemática, escrita por Joamir Roberto de Souza e publicada pela editora FTD;

- Conexões com a Matemática, editada por Fabio Martins de Leonardo e publicada pela editora Moderna;

- Prisma – Matemática, escrita por José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa publicada e editada pela FTD;

- Quadrante matemática e suas tecnologias, escrito por Diego Barboza Prestes e Eduardo Rodrigues Chavante e publicada pela editora SM.

Em seguida, coletou-se os materiais utilizados pelos professores, para que pudesse também incorporar a análise realizada nesse trabalho.

- Uma apostila elaborada pelo professor;

- Um livro da rede particular: Sistema de Ensino Ph – Divisão Em Frentes – Ensino Médio – 1ª série.

3.3 Instrumento de coleta de dados

Para que a análise fosse feita de maneira padronizada, foram criados critérios para categorizar esses materiais. Considerando os livros, esta pesquisa foi realizada no “livro do aluno”, que normalmente é dividido em textos iniciais (explicação sobre o conteúdo) e, após isso, em atividades propostas. Para apostila feita por um dos professores, também se seguiu essa mesma ideia de análise, visto que o material também era dividido dessa forma.

Durante a análise, considerando os livros didáticos, foram selecionados alguns capítulos das coleções que se adequaram ao tema desta pesquisa, de acordo com os critérios adotados expostos no Quadro 2 e no Quadro 3, a seguir. Inicialmente, cada quadro foi dividido em “categorias”, “subcategorias” e “nota de critério” para que pudesse facilitar a interpretação de cada tópico apresentado nas subdivisões estabelecidas.

No Quadro 2, é possível observar as subcategorias que compõem cada uma das categorias. Ao final dos quadros mostrados, cada uma das categorias e subcategorias terão seus critérios explicados, bem como a sua pontuação na qual se julga qualitativamente cada categoria, classificada em alta, média, moderada ou nula como o Quadro 3 mostra. Cada subcategoria tem sua nota máxima, expostas no quadro.

O Quadro 2 traz uma proposta baseada na análise dos “textos iniciais” dos livros e materiais recolhidos, que estão no corpo desta pesquisa. A análise é feita com intuito de qualificá-los, e não quantificá-los.

Quadro 2 – Critérios para análise dos textos iniciais.

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	
Total		14	

Fonte: Elaboração própria.

Caso todas as notas de critério sejam altas, o total desta subcategoria será igual a 14, considerando 1 ponto por critério. Assim, a subcategoria será classificada como tendo alta contribuição para a análise. A partir desse princípio criou-se um quadro para a classificação das análises, por meio das notas de critério.

Quadro 3 – Classificação da categoria.

Classificação	Porcentagem	Nota de critério
Alta	Mais de 70% a 100%	11 a 14
Moderada	Mais 50% até 70%	7 a 10
Baixa	De 1 até 50%	1 a 6
Nula	0%	0

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, encontram-se as explicações de cada categoria e subcategoria.

3.3.1 Justificação das categorias

A criação das categorias do quadro “textos iniciais” se deu com base na presença de alguns elementos, são as categorias: Situações; Demonstrações; Conceitos; Relação entre conteúdos. Cada categoria é dividida em subcategorias.

A seguir, será apresentado a justificativa teórica de cada um deles.

Categoria 1 – Situações

1.1 Conteúdo por meio de situações-problema

O ensino por meio de situações-problema de Matemática deve ser constante em sala de aula, pois, de acordo com Lima (1999), é o ato de “contextualizar” os conceitos e procedimentos matemáticos.

> Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai a ser ensinada. É muito importante que o enunciado do problema não contenha palavras que digam respeito ao assuntoque vai ser estudado naquele capítulo. De resto, as aplicações mais interessantes, durante todo o curso, são exemplos e exercícios cujo objeto principal não é o assunto que está sendo tratado (Lima, 1999, p. 6).

Para que haja critérios para categoria em questão, adotou-se para esta pesquisa a visão de Meirieu (1998), que traz alguns aspectos que devem ser seguidos para que se tenha uma boa situação-problema.

De acordo com a proposta de análise do livro, cada critério terá a nota correspondente a um ponto, sendo a nota máxima, três, caso o material analisado se enquadre em todos os aspectos, e a nota mínima, zero, caso o material analisado não se enquadre em nenhum dos tópicos.

Critério 1 - Conteúdo relacionado ao cotidiano

Para Macedo (2002), uma situação-problema está diretamente relacionada ao cotidiano, de forma dinâmica e aberta, em um universo fantástico e problemático que é a vida, tendo como foco principal a contextualização, apresentando um recorte da vida real.

Critério 2 - Devem ser problemas abertos que permitam resolução inicial qualitativa, baseada no levantamento de hipóteses.

Para Pozo e Crespo (2009), pode-se entender problemas qualitativos como problemas abertos, nos quais os estudantes devem analisar as situações apresentadas em contextos científicos ou cotidianos, para interpretá-las a partir dos seus conhecimentos prévios ou em vias de aprendizagem.

Critério 3 - Devem ser reconhecidas pelos alunos como um desafio intelectual, porém, não deve ser tão difícil para que esse aluno não busque evitar a aprendizagem.

Segundo Meirieu (1998), a situação-problema deve ser um problema que, ao ser resolvido, deve necessariamente promover a aprendizagem no aluno, impossibilitando-o de resolvê-la sem que nada aprenda.

1.2 Tarefas resolvidas

Nessa perspectiva tomamos os exercícios resolvidos nos livros didáticos como elementos de particular relevância ao representarem um dos primeiros elos entre a teoria e o que se deseja dos alunos, ou seja, a capacidade de resolver os futuros problemas que lhes serão apresentados, considerando ainda, como bem ressalta Kuhn, que "também se aprende teoria resolvendo problemas" (Peduzzi; Peduzzi, 2005, p. 111).

De acordo com a proposta de análise do livro, cada critério terá a nota correspondente a um ponto, em que a nota máxima um é atribuída caso o material analisado se enquadre em todos os aspectos, e a nota mínima zero atribuída caso o material analisado não se enquadre em nenhum dos tópicos.

Critério 1 - Dentro dos conceitos apresentados o autor propõe exercícios e os resolve?

Uma das possibilidades para essa análise é ver se o autor resolve o exercício passo a passo, apontando a definição ou propriedade utilizada que justifica poder seguir determinada lógica indutiva.

Categoria 2 – Demonstrações

A utilização das demonstrações no Ensino Médio se trata de uma abordagem para o entendimento do rigor existente na matemática. Apesar de inicialmente haver uma dificuldade de compreensão deste recurso, devida a linguagem formal não se fazer tão presente durante a fase escolar, aos poucos, este meio de estruturação de objetos matemáticos pode ser construído e utilizado numa perspectiva eficaz, fazendo com que os estudantes não apenas memorizem fórmulas, por exemplo, mas também adquiram uma compreensão do porquê delas existirem. Segundo Fossa (2009):

> As demonstrações são necessárias para assegurar a verdade dos teoremas. Mas demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo. Logo, as várias técnicas e estratégias são nada mais do que instrumentos que podemos usar em uma demonstração (Fossa, 2009, p. 48).

Parece-nos pertinente o entendimento dado por Hanna (1995) sobre demonstração. Para ela, deve-se diferenciar a demonstração para fins escolares da demonstração para os matemáticos profissionais ou lógicos. É a partir dessa estruturação que ela elabora três categorias de demonstrações: demonstração formal, demonstração aceitável e demonstração empregada para fins escolares. A primeira seria o conceito teórico da lógica formal e que poderia ser encarada como o ideal matemático de cuja prática apenas se aproxima; a segunda é o conceito aceitável para os matemáticos profissionais; a terceira é a composição de atividades que visam desenvolver junto aos alunos noções e conceitos.

Para analisar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, por meio de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a “nota de critério" proposta para a análise. Sendo assim, nesta categoria foram estabelecidos três critérios, nos quais a nota máxima a ser atribuída é três e a mínima, zero.

Critério 1 - O material impresso traz alguma demonstração?

De acordo com Lima (1999) demonstrações devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza Matemática e por seu valor educativo. É considerada a base da compreensão em Matemática e é essencial para desenvolver, criar e comunicar o conhecimento matemático.

Critério 2 - As demonstrações são claras?

É necessário que as demonstrações na Educação Básica sejam precisas e permeadas de simbolismos, mas não excessivamente formais. “Assim, a demonstração deve assumir um carácter pedagógico, sendo também uma forma de educar os alunos para que estes se sintam cada vez mais seguros e motivados nas suas argumentações matemáticas.” (Amado, 2015, p. 641).

Critério 3 - As passagens das demonstrações são explicadas passo a passo?

Neste critério é de suma importância que as demonstrações ou provas utilizadas sejam capazes de desenvolver no aluno a capacidade de argumentação que justifique a validade da proposição ou de um procedimento, ou seja, acaba surgindo uma inquietação por parte dos alunos de não conseguirem ver sentindo quando etapas são puladas de acordo com Andrade (2007).

Categoria 3 – Conceitos

3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático

De acordo com Lima (1999), a conceituação é a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das preposições, a prática do raciocínio dedutivo e a interpretação das ideias e fatos. Ele destaca que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações.

Para analisar esta categoria foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, por meio de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a "nota de critério" proposta para a análise. Sendo assim, nesta categoria foram estabelecidos dois critérios, nos quais a nota máxima a ser atribuída é dois e a mínima, zero.

Critério 1 - Clareza no conteúdo

Para haver uma boa articulação e clareza de conteúdos, é necessário que os mesmos possuam uma lógica conceitual na sua construção.

> [...] o livro do aluno deve desenvolver os conteúdos claramente e corretamente, adequando os conceitos ao nível cognitivo e ao interesse do seu público-alvo, atentando a necessária gradação e articulação de conteúdos e evitando as confusões conceituais, as contradições e a indução a erro (Brasil, 1998, p.237).

Critério 2 – Análise para constatar se há uma única definição e se essa é formal ou intuitiva.

Segundo Lima (1999), a conceituação compreende vários aspectos, entre os quais destaca: a formulação correta e objetiva das definições matemáticas; o emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que se supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese) e; o entendimento e a percepção de que algumas noções e certas propostas podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos.

Categoria 4 - Relação entre conteúdos

De acordo com a proposta de análise do livro, cada critério terá a nota correspondente a um ponto, em que a nota máxima cinco é atribuída caso o material analisado se enquadre em todos os aspectos, e a nota mínima zero atribuída caso o material analisado não se enquadre em nenhum dos tópicos.

Critério 1 – O livro/material traz alguma relação com o conteúdo de Geometria Analítica?

Diversas são as maneiras de relacionar e aprender os conteúdos matemáticos presentes em distintos momentos estudados. É possível uma certa relação de alguns temas importantes que são abordados no Ensino Médio, segundo Souza e Soares (2021). Com isso, existem diversos conteúdos que podem ser relacionados dentro da matemática.

Para avaliar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, com o objetivo de facilitar a “nota de critério" estabelecida. Sendo assim, nesta categoria foram criados 2 critérios, nos quais a nota máxima é cinco e a mínima zero.

Critério 1 - Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica

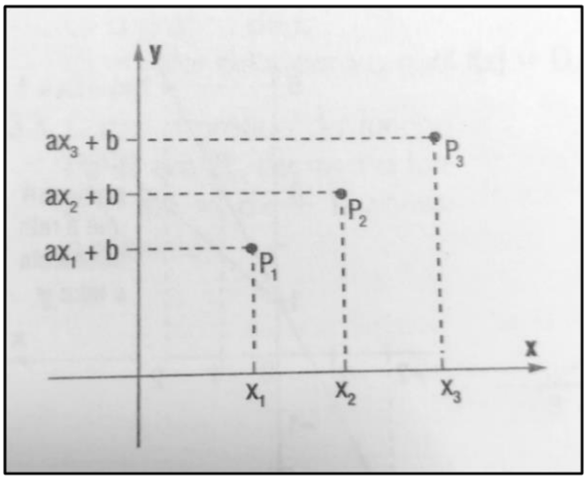
De acordo com Sores e Souza (2021), quando os estudantes se deparam com os conteúdos de Geometria Analítica, no terceiro ano, eles não conseguem assimilar que em determinadas equações só houve uma remodelação das ordens de certos termos, e isso vem se tornar, na visão deles, um empecilho para progredir no conteúdo. Ou seja, após correlacionar os dois assuntos, modifica-se o olhar sobre a disciplina, o que contribui para uma melhor compreensão do aluno.

Critério 2 - Demonstrações envolvendo conceitos da Geometria Analítica

Três pontos quaisquer do gráfico são colineares

Exemplo:

Figura 8 – Três pontos quaisquer do gráfico



Fonte: Dante, 2005, p. 57.

Considerando:

$P_1\ (x_1, ax_1 + b)$

$P_2(x_2, ax_2 + b)$

$P_3(x_3, ax_3 + b)$

Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que um dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Supomos $x_1 < x_2 < x_3$ e mostraremos então que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2 =}$$

$$= \sqrt{1(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(1 + a)^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

De modo análogo, observamos que:

$d(P_2, P_3) = x_3 - x_2\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = x_3 - x_1\sqrt{1 + a^2}$

Portanto:

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1, P_3)$$

ou seja

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$$

Critério 3 - Associação da Função Afim com a Equação da Reta

Segundo Dante (2005), se observarmos ambas as abordagens dadas aos conteúdos, em que do “ponto de vista” do estudo de funções escrevemos P(x,f(x)) e do “ponto de vista” da Geometria Analítica escrevemos P(x,y), concluímos que, embora esses conteúdos sejam tratados em séries distintas (1º e 3º ano do ensino médio), eles produzem o mesmo significado se olhados isoladamente, deixando de lado as várias aplicações que são próprias de cada conteúdo em cada série.

Critério 4 - Diferenciação entre a Função Afim e a Equação da reta

Na representação gráfica de uma Função do Afim, na qual os eixos são construídos numa mesma escala e as grandezas relacionadas são de mesma dimensão, pode-se afirmar que as taxas de variações associadas aos gráficos são, de fato, os coeficientes angulares e identificá-las como a tangente do ângulo, sem correr o risco de estar cometendo equívocos.

No entanto, quando se representa uma Função Afim que descreve um experimento, alguns cuidados devem ser tomados: numa função em que as grandezas associadas não possuem a mesma dimensão, as taxas de variações associadas ao gráfico não podem ser chamadas de coeficiente angular, já que este é um número puro e a taxa de variação é uma grandeza que possui dimensão (Soares; Souza, 2021).

Critério 5 - Posições relativas entre duas retas

De acordo com Delgado *et al* (2013), duas retas, r e s, podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

- Coincidentes, quando sãi iguais, isto é, $r = s$
- Paralelas: quando não se intersectam em um ponto, isto é $r \cap s = \emptyset$
- Concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é, $r \cap s = \{P\}$

A criação das categorias do Quadro 4 “atividades propostas” se deu com base na presença de alguns elementos, são categorias: Tarefas propostas; Proposições; Procedimentos. Cada categoria é dividida em subcategorias, como é mostrado no quadro a seguir.

Quadro 4 – Análise das atividades.

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	
Total		7	

Fonte: Elaboração própria.

Caso todas as notas de critério sejam altas, o total desta subcategoria será igual a sete, considerando um ponto por critério. Assim, a subcategoria será classificada como tendo alta contribuição para a análise. A partir desse princípio criou-se um quadro para a classificação das análises, a partir das notas de critério.

Quadro 5 – Classificação das categorias.

Classificação	Porcentagem	Nota de critério
Alta	Mais de 70% a 100%	6 a 7
Moderada	Mais 50% até 70%	3 a 5
Baixa	De 1 até 50%	1 a 3
Nula	0%	0

Fonte: Elaboração própria.

Categoria 5 – Tarefas propostas

As tarefas matemáticas podem ser problemas, investigações, exercícios, projetos, construções, entre outras. Entende-se também como tarefas todas aquelas que são apresentadas no livro para que o estudante faça. Elas são o ponto de partida para que o aluno desenvolva seu conhecimento matemático. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intenções para aplicação de conhecimentos emergentes (Ponte, *et al*., 1997).

Para avaliar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados por meio de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a “nota de critério” estabelecida. Dessa forma, nesta categoria foram criados três critérios, sendo suas notas máxima dois e a mínima, zero.

5.1 Exercícios/problemas que o autor propõe aos alunos para a aplicação dos conceitos que foram ensinados.

Para avaliar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, a partir de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a “nota de critério" estabelecida. Sendo assim, nesta categoria foram estabelecidos 2 critérios, onde sua nota máxima é dois e a mínima zero.

Critério 1 – Apresentam os exercícios?

Nos exercícios, o aluno não precisa decidir sobre o procedimento a ser utilizado para chegar à solução. Pozo (1998, apud, Soares & Pinto 2001) exemplifica:

> As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente... servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas.

Dante (1998) também faz esta diferenciação onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução.

Tipos de exercícios que podem aparecer:

Manipulação - A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes. Para Lima (1999):

> A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a matemática se resumisse a ela. Isso tem bastante a ver com o fato de que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos algébricos impõe a formação de hábitos mentais de atenção, ordem e exatidão, porém não exige criatividade, imaginação ou capacidade de raciocinar abstratamente (Lima, 1999, p. 4).

Representação Gráfica – A representação deve ser oferecida para que o aluno represente graficamente para que possa estabelecer relações entre conteúdos.

Prova/demonstração – Desenvolver no aluno a capacidade de argumentação que justifique tal situação.

Modelar - uma alternativa para os professores nos processos de ensino e de aprendizagem, que visa ensinar matemática a partir da solução de problemas por meio de representações simplificadas da realidade que são elaboradas por aqueles que a investigam.

Critério 2 **-** Apresentam problemas na lista de tarefas?

Para Dante (1998), um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la. O autor ressalta que um bom problema deve:

- ser desafiador para o aluno;
- ser real;
- ser interessante;
- ser o elemento de um problema realmente desconhecido;
- não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade.

Um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver seu pensamento e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado.

Categoria 6 – Método de Resolução de exercícios

Para avaliar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, a partir de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a “nota de critério" estabelecida. Sendo assim, nesta categoria foram estabelecidos três subcategorias, onde os critérios possuem nota máxima igual a um e a mínima, zero.

6.1 – Exercícios resolvidos

Critério 1 – Importância dos exercícios resolvidos

Neste critério, a importância da tarefa resolvida serve para entender as demais é de suma relevância, sendo assim caso o livro tenha essa nota será pontuada.

6.2 - Utilizam diversas maneiras diferentes para a resolução de um só conteúdo?

Um exemplo de problema com mais de uma solução pode ser encontrado em Stancanelli (2001), essa autora traz um problema de planificação com o cubo que possui 11 diferentes soluções. É possível perceber então que em diversos casos há mais de uma maneira de resolver um determanado exercício.

Para avaliar esta categoria, foi necessário avaliar alguns critérios dentro dos capítulos analisados, a partir de perguntas norteadoras com o objetivo de facilitar a “nota de critério" estabelecida. Sendo assim, nesta subcategoria, os critérios possuem nota máxima igual a dois e a mínima, zero.

Critério 1 – Diferentes abordagens para resolver uma mesma situação

Para Smole e Diniz (2001) esse tipo de problema rompe com a ideia preconcebida que os alunos têm de que todo problema apresenta uma única resposta, bem como a de que há uma única forma de resolvê-lo. Também possibilita ao aluno perceber que resolver problemas é umprocesso investigativo, no qual ele participa de forma ativa da construção do seu próprio conhecimento.

Critério 2 – Desenvolvimento do senso crítico e da criatividade

Durante o processo de desenvolvimento de mais de uma resolução sobre determinado exercício é possível que o aluno perceba que há possibilidade de desenvolvimento do senso crítico através de um novo ponto de vista mostrado. (Dante, 1998).

6.3 Justificam ou não a solução?

Como afirma Stancanelli (2001) é muito importante que os exercícios resolvidos sejam respondidos passo a passo para que o aluno consiga entender tudo o que foi mostrado, para então seguir fazendo os que forem propostos.

Critério 1 - Importância

Os procedimentos utilizados na Resolução dos exercícios são justificados ou só apresentam como Exercício resolvido – um método bem rotineiro. (Masetti, 2015)

Categoria 7 – Procedimentos

7.1 Utilizam tecnologia

Critério 1 – Durante os exercícios/problema há sugestão do uso de tecnologia?

As mídias digitais constituem recurso tecnológico que vem a favorecer no processo de aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e proporcionando situações que levam à compreensão dos conceitos matemáticos. Ao permitir o movimento de figuras, manipulações de funções e figuras dinâmicas, como por exemplo, o *software* GeoGebra, abordam habilidades importantes como visualização, identificação de propriedades, argumentação, instigando o raciocínio dedutivo dos estudantes. O uso de mídias digitais em sala de aula deveria ocorrer de modo natural, uma vez que o seu uso é hoje um elemento fortemente presente na vida de nossos alunos.

Miskulin (1999) considera que a tecnologia é extremamente útil e importante para a exploração e construção de conceitos, porém deve-se ressaltar que os resultados obtidos dependem muito da intervenção do professor no processo ensino-aprendizagem.

4 MATERIAIS UTILIZADOS NESTA PESQUISA

O critério estabelecido para a escolha destas coleções se deu através de escolas públicas estaduais próximas as autoras desta pesquisa. Foram ao todo 8 escolas visitadas, porém apenas 4 delas possibilitou a disponibilidade das coleções utilizadas. Sendo assim as mesmas se encontram abaixo. Além das quatro coleções, foram disponibilizados dois materiais que também são utilizados.

4.1 Livros Aprovados no PNLD 2020

4.1.1 Livro A - Multiversos - Matemática, escrito por Joamir Roberto de Souza e publicado pela editora FTD.

4.1.1.1 Descrição da coleção

Cada volume do Livro Texto possui três unidades. A abertura dessas unidades encontra-se em uma página dupla com as habilidades da BNCC a serem trabalhadas na unidade, textos, imagens e questionamentos quanto ao assunto apresentado e possui como objetivo fornecer informações sobre conhecimentos prévios dos alunos quanto a algum ponto a ser estudado.

Na seção “Integrando” propõe discussões de assuntos de maior integração com outras áreas de conhecimento. Já na seção “Você conectado” é feita a relação do conteúdo com o GeoGebra, por exemplo.

No decorrer do livro são apresentadas caixas : “Dica”, com lembretes importantes sobre um conceito ou atividade; “Conexões”, com indicações de materiais extras para complementar o conteúdo; “Para pensar”, com questões com objetivo de provocar reflexões e argumentação sobre tal conteúdo. “Matemática na História", com relações do conteúdo com a história da matemática. Ao final da unidade há a seção “O que estudei” com o objetivo de promover o aluno uma autoavaliação dos conhecimentos adquiridos e, para o professor, uma reflexão da sua prática podendo ajustá-la nas demais unidades. Já ao final da coleção, há a seção “+ Atividades” com questões de ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e vestibulares que podem ser usadas no decorrer das aulas ou no processo avaliativo.

4.1.1.2 Capítulos analisados

De acordo com os capítulos analisados desta coleção, a unidade selecionada do volume Conjuntos e Função Afim foi: “Função Afim”

Figura 9 - Unidade selecionada do livro A

Fonte: Souza, 2020, s.p.

4.1.2 Livro B - Conexões - Matemática e suas tecnologias, escrito por Fábio Martins de Leonardo e publicado pela editora Moderna.

4.1.2.1 Descrição da coleção

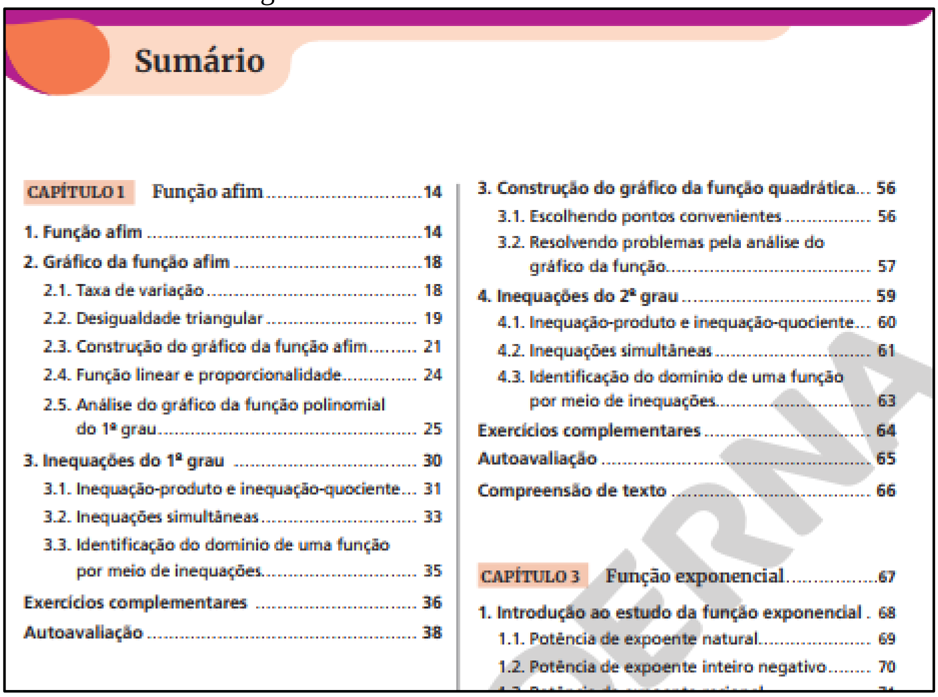
O livro texto é dividido em capítulos, na abertura dos quais é possível encontrar uma imagem ilustrando o assunto de abertura, os objetivos do capítulo e as habilidades da BNCC trabalhadas. Durante o corpo do texto há algumas informações adicionais e algumas questões, são eles: “explore”, “observações” e “reflita”. Além disso, tem uma caixa “pensamento computacional”, onde são feitas relações do conteúdo com o pensamento computacional ou alguma consideração em relação ao último.

De acordo com a BNCC, o pensamento “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.” (BRASIL, 2018, p. 474). Também há a seção de “exercícios resolvidos”, com os exercícios organizados em forma crescente de dificuldade. Bem como “exercícios complementares”, com finalidade de conferir profundidade ao conteúdo e suas aplicações, com os exercícios mais complexos localizados na subseção “aprofundamentos e/ou desafios

4.1.2.2 Capítulos analisados

De acordo com os capítulos analisados desta coleção, a unidade selecionada do volume Funções e Aplicações foi: “Função Afim”

Figura 10 - Sumário do Livro B


Sumário

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, s.p.

4.1.3. Quadrante - Matemática e suas Tecnologias, escrito por Eduardo Chavante e Diego Prestes, publicado pela editora SM.

4.1.3.1 Descrição da coleção

Esta coleção é dividida em seis volumes. O livro está dividido em seis capítulos, nos quais serão estudado durante o ano letivo. A abertura deste livro se dá com a indicação de temas relevantes que estarão relacionados com o capítulo que será estudado, as habilidades e competências da BNCC trabalhadas e objetivos de seções que serão vistas ao longo do livro. Durante a apresentação do livro pode-se perceber algumas caixas como, “matemática a +", “aplicando fronteiras”, “matemática em ação” e “passo a passo”. Encontra-se uma caixa chamada “ferramenta”, onde ensina o aluno a utilizar calculadora científica, planilhas eletrônicas, software de geometria dinâmica e o *Scratch*, todos explorados como ferramentas que aprofundam os conhecimentos matemáticos.

Os autores iniciam cada capítulo com uma imagem que representa uma situação da vida real e trazendo indagações, para que sejam geradas discussões que vão levar o aluno a introdução do conteúdo proposto. Pode-se perceber que existem no livro seções como, “valores em ação” e “dignidade no trabalho” que oferecem textos que se relacionam com diversos temas, para incentivar o aluno a leitura.

Bem como a seção “tarefas” que vem com uma numerosa lista de exercícios de fixação aplicando os conceitos adquiridos e exercícios contextualizados, aplicando o conteúdo em diversas situações problema.

4.1.3.2 Capítulos analisados

De acordo com os capítulos analisados desta coleção, a unidade selecionada do volume Conjuntos foi: “Função Afim”

Figura 11 – Sumário do Livro C

- CEMT 1, 3, 4 e 5; CG 7
- EM13MAT101; EM13MAT302; EM13MAT315; EM13MAT401; EM13MAT404; EM13MAT501

Fonte: Chavantes; Prestes, 2020, s.p.

4.1.4 Livro D - Prisma - Matemática Conjuntos e Funções, escrito por Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo Câmara, publicado pela editora FTD.

4.1.4.1 Descrição da coleção

A coleção de livros Prisma está dividida em seis volumes, ou seja, não háuma ordem definida para utilização deles. Cada um deles está dividido em quatro capítulos,exceto um que só possui três capítulos. Suas primeiras páginas vêm contendo caixas como, "Abertura de capítulo", com imagens e textos relacionados ao conteúdo do capítulo, "Fórum" com temas contemporâneos para compartilhar com colegas e professores, "Para refletir" uma oportunidade que o aluno tem de refletir sobre o que estudouem cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação do seu desempenho.

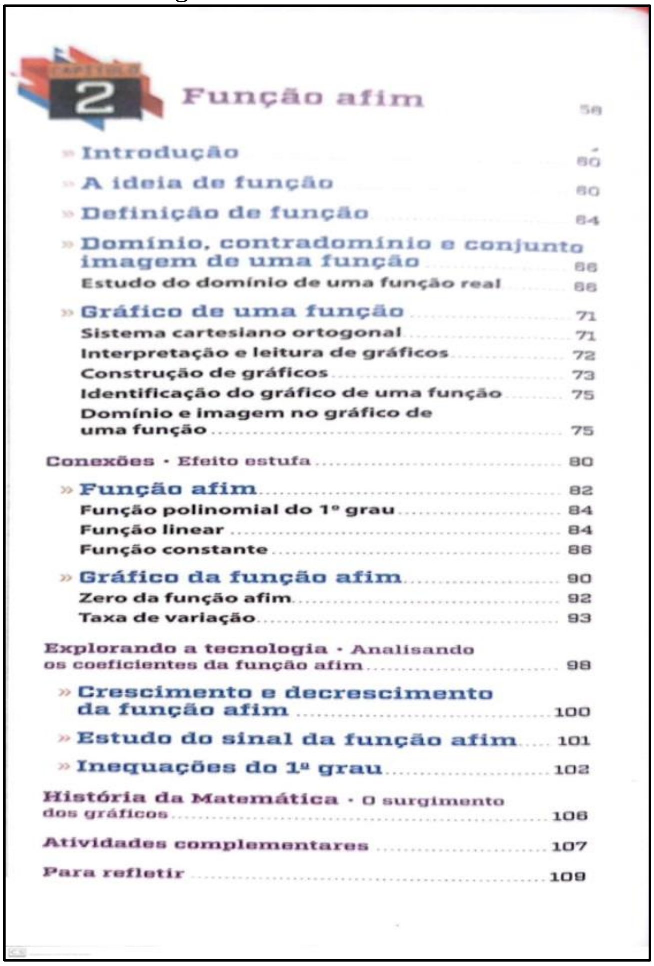
Além de seções como "História da Matemática" com textos relacionados ao conteúdo, incentivando o aluno a leitura, "Explorando a tecnologia" que ensina o aluno a aprofundar seus conhecimentos matemáticos através do software como o Geogebra e outras curiosidades matemáticas. E não menos importante a seção "Conexões" composta por textos relacionados ao conteúdo, com o objetivo de desenvolver o senso crítico com atividades investigativas e pesquisas para serem debatidas em grupos. No decorrer dos textos estão presentes caixas laterais (saiba que…, pense e responda) oferecendo ao aluno informações adicionais.

Os livros desta coleção apresentam letras maiores e imagens bem ilustrativas para atrair a atenção do aluno. As habilidades e competências da BNCC estão descritas nas últimas páginas de cada livro. Dispõe de exercícios de fixação, com a finalidade de aplicação direta do conteúdo, exercícios resolvidos e uma extensa lista exercícios de grandes universidades reconhecidas como, Fuvest-SP, PUC-RJ, Cesgranrio-RJ, IFPR e etc., com o intuito de preparar o aluno para vestibulares.

4.1.4.4 Capítulos analisados

De acordo com os capítulos analisados desta coleção, a unidade selecionada do volume Conjuntos e Funções foi: “Função Afim”.

Figura 12- Sumário do livro C



Fonte: Bonjorno; Giovanni; Camara, 2020, s.p.

4.2 Outros materias utilizados

4.2.1 Descrição da apostila

A apostila é utilizada no estudo de Função Afim e é dividida apenas em alguns tópicos, são eles: Introdução a função afim, se a função é crescente e decrescente, coeficiente da função e posteriormente lista de exercícios

4.2.2 Descrição do livro da rede partiular

O livro é dividido em módulos, em cada bimestre eles recebem dois cadernos (nome que usam para referenciar ao livro didático). Uma das caracteristicas que o livro traz é que ele relata as situações cotidianas estão sempre presentes em objetos do conhecimento, como por exemplo, desde cálculos básicos até o conhecimento de outros objetos do cotidiano.

Ao decorrer dos módulos aparecerão conteúdos ou temas da seguinte forma; para começar; para aprender; para praticar; para concluir onde cada uma tem uma função.

4.2.2.1 Capítulos analisados

De acordo com os módulos analisados desta coleção, a unidade selecionada foi "Função polinomial do 1º grau I" e "Função polinomial do 1º grau II".

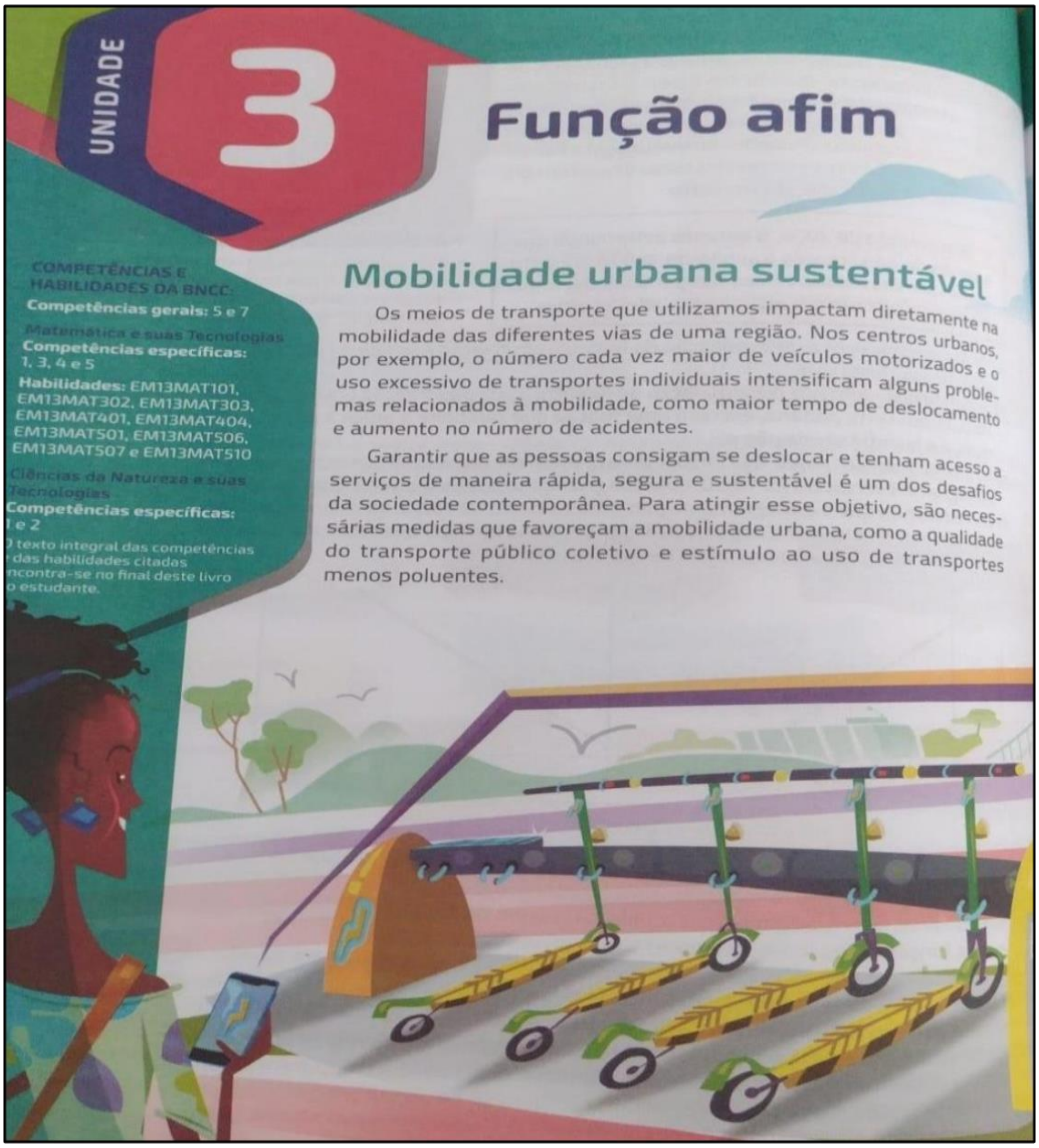
5 ANÁLISE DOS MATERIAIS

Neste capítulo foi feita a análise dos quatros livros aprovados pelo PNLD de 2020 e dois materiais utilizados pelos professores, pois os livros disponibilizados na escola não eram a única fonte utilizada. Sendo assim, essa análise estará ligada a proposta do conceito de reta no estudo de Função Afim analisada sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio.

5.1 Análise do Livro A

Foi considerado o Livro A como sendo Multiversos - Matemática, escrita por Joamir Roberto de Souza e publicada pela editora FTD. O autor inicia o capítulo de Função Afim com uma situação-problema envolvendo aluguel de patinete elétrico, trazendo uma contextualização que julgou ser importante, que é a mobilidade urbana sustentável, fugindo das questões clássicas de táxi. Seguindo este raciocínio o mesmo propõe uma conversa entre alunos e professores sobre questionamentos ligados à mobilidade urbana sustentável (confome as Figuras 13 e 14).

Figura 13 - Introdução ao estudo de Função Afim



UNIDADE 3

Função afim

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:
Competências gerais: 5 e 7
Matemática e suas Tecnologias
Competências específicas: 1, 3, 4 e 5
Habilidades: EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT506, EM13MAT507 e EM13MAT510
Ciências da Natureza e suas Tecnologias
Competências específicas: 1 e 2
O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

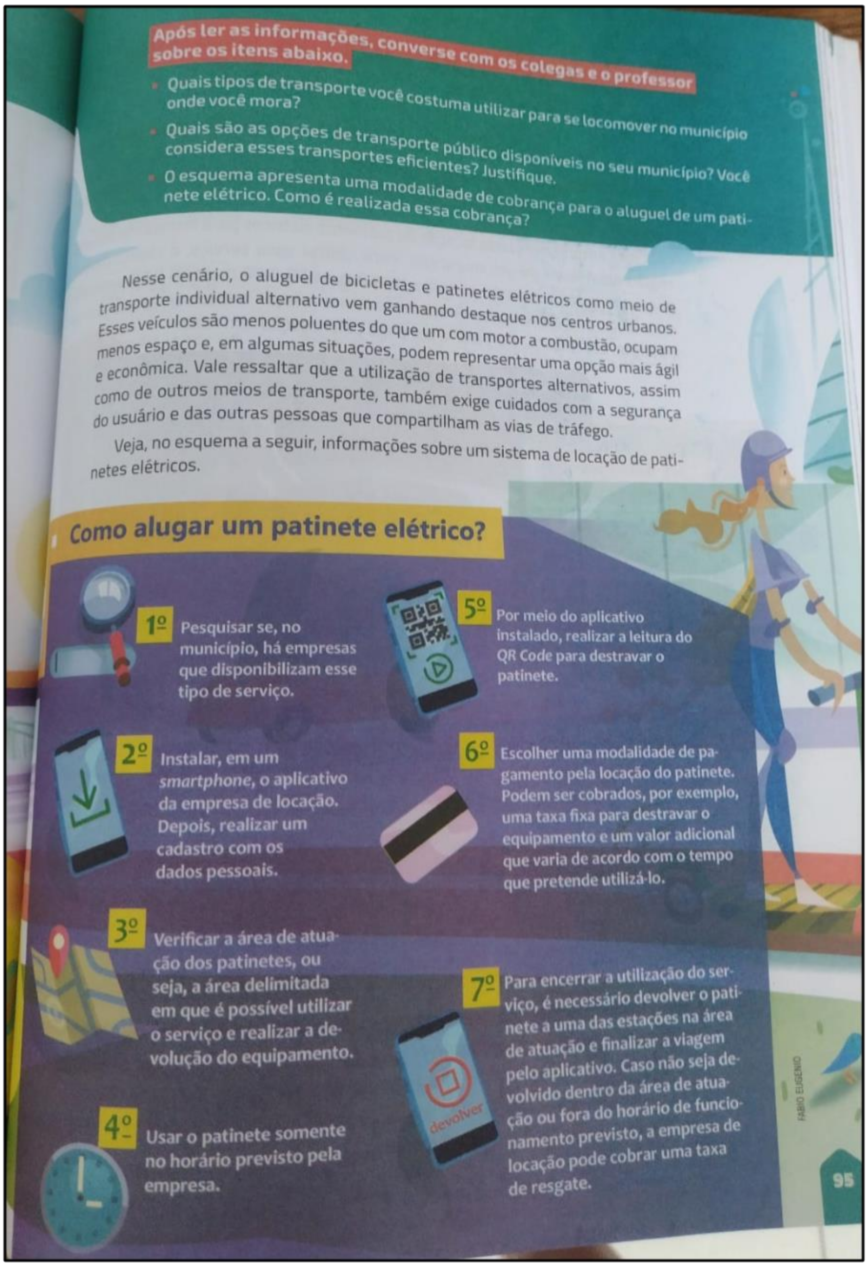
Mobilidade urbana sustentável

Os meios de transporte que utilizamos impactam diretamente na mobilidade das diferentes vias de uma região. Nos centros urbanos, por exemplo, o número cada vez maior de veículos motorizados e o uso excessivo de transportes individuais intensificam alguns problemas relacionados à mobilidade, como maior tempo de deslocamento e aumento no número de acidentes.

Garantir que as pessoas consigam se deslocar e tenham acesso a serviços de maneira rápida, segura e sustentável é um dos desafios da sociedade contemporânea. Para atingir esse objetivo, são necessárias medidas que favoreçam a mobilidade urbana, como a qualidade do transporte público coletivo e estímulo ao uso de transportes menos poluentes.

Fonte: Souza, 2020, p. 94.

Figura 14- Introdução ao estudo de Função Afim.



Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

- Quais tipos de transporte você costuma utilizar para se locomover no município onde você mora?
- Quais são as opções de transporte público disponíveis no seu município? Você considera esses transportes eficientes? Justifique.
- O esquema apresenta uma modalidade de cobrança para o aluguel de um patinete elétrico. Como é realizada essa cobrança?

Nesse cenário, o aluguel de bicicletas e patinetes elétricos como meio de transporte individual alternativo vem ganhando destaque nos centros urbanos. Esses veículos são menos poluentes do que um com motor a combustão, ocupam menos espaço e, em algumas situações, podem representar uma opção mais ágil e econômica. Vale ressaltar que a utilização de transportes alternativos, assim como de outros meios de transporte, também exige cuidados com a segurança do usuário e das outras pessoas que compartilham as vias de tráfego.

Veja, no esquema a seguir, informações sobre um sistema de locação de patinetes elétricos.

Como alugar um patinete elétrico?

1º Pesquisar se, no município, há empresas que disponibilizam esse tipo de serviço.

2º Instalar, em um *smartphone*, o aplicativo da empresa de locação. Depois, realizar um cadastro com os dados pessoais.

3º Verificar a área de atuação dos patinetes, ou seja, a área delimitada em que é possível utilizar o serviço e realizar a devolução do equipamento.

4º Usar o patinete somente no horário previsto pela empresa.

5º Por meio do aplicativo instalado, realizar a leitura do QR Code para destravar o patinete.

6º Escolher uma modalidade de pagamento pela locação do patinete. Podem ser cobrados, por exemplo, uma taxa fixa para destravar o equipamento e um valor adicional que varia de acordo com o tempo que pretende utilizá-lo.

7º Para encerrar a utilização do serviço, é necessário devolver o patinete a uma das estações na área de atuação e finalizar a viagem pelo aplicativo. Caso não seja devolvido dentro da área de atuação ou fora do horário de funcionamento previsto, a empresa de locação pode cobrar uma taxa de resgate.

devolver

FABIO EUGENIO

95

Fonte: Souza, 2020, p .95.

Posteriormente, o autor prossegue a ideia trazendo uma situação-problema envolvendo o mesmo contexto, masjá utilizando um preço fixo para os alunos e mais um valor sobre o tempo de uso em minutos. Sendo assim, quanto aos critérios estabelecidos, atende a subcategoria 1.1 dos textos iniciais. Segundo Lima (1999), a cada novo capítulo deve ser iniciado com uma situação problema na qual a solução requeresse o uso da matéria que será ensinada . A ideia de Função Afim já surge de forma explícita.

Figura 15 - Situação-problema sobre patinete.

Função afim: ideias iniciais e definição

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre mobilidade urbana e meios de transporte alternativos, como o aluguel de patinetes elétricos para pequenos deslocamentos. Ainda nesse contexto, considere a seguinte situação.

Certa empresa oferecia locação de patinetes elétricos para transporte em uma região delimitada de um município. Para utilizar esse serviço, o cliente deveria pagar um valor composto por uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 para cada minuto de uso do patinete. A seguir, temos a relação entre o tempo de uso do patinete, em minuto, e o valor a ser pago pela locação, em reais.

Tempo (min)	Valor total (R$)
1	0,50 · 1 + 3 = 3,50
2	0,50 · 2 + 3 = 4,00
3	0,50 · 3 + 3 = 4,50
4	0,50 · 4 + 3 = 5,00
5	0,50 · 5 + 3 = 5,50

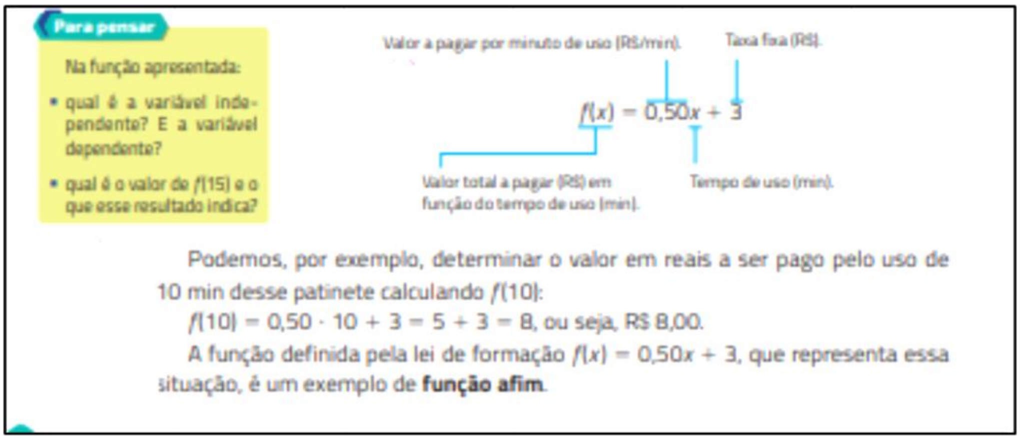
» Homem andando de patinete elétrico em ciclovia na cidade de São Paulo (SP). Fotografia de 2019.

Essa relação também pode ser expressa pela função *f*:

Fonte: Souza, 2020, p. 96.

Em seguida, ele opta por utilizar uma tabela para mostrar a mudança dos valores que é feita à medida que o tempo muda, mas que é nítido identificar as taxas fixas. Após completar a tabela, o autor tem a intenção de fazer com que os alunos percebam que há uma taxa fixa e conforme os minutos aumentam de um em um minuto, maior será o valor a ser pago pelo aluguel do mesmo. Assim, o autor formaliza o conceito de Função Afim, mostrando sua representação pela lei de formação f(x)= ax+b (Figura 16), indicando que o termo *a* é o coeficiente de *x* e o *b* é o termo independente da função.

Figura 16- Exemplo de Função Afim

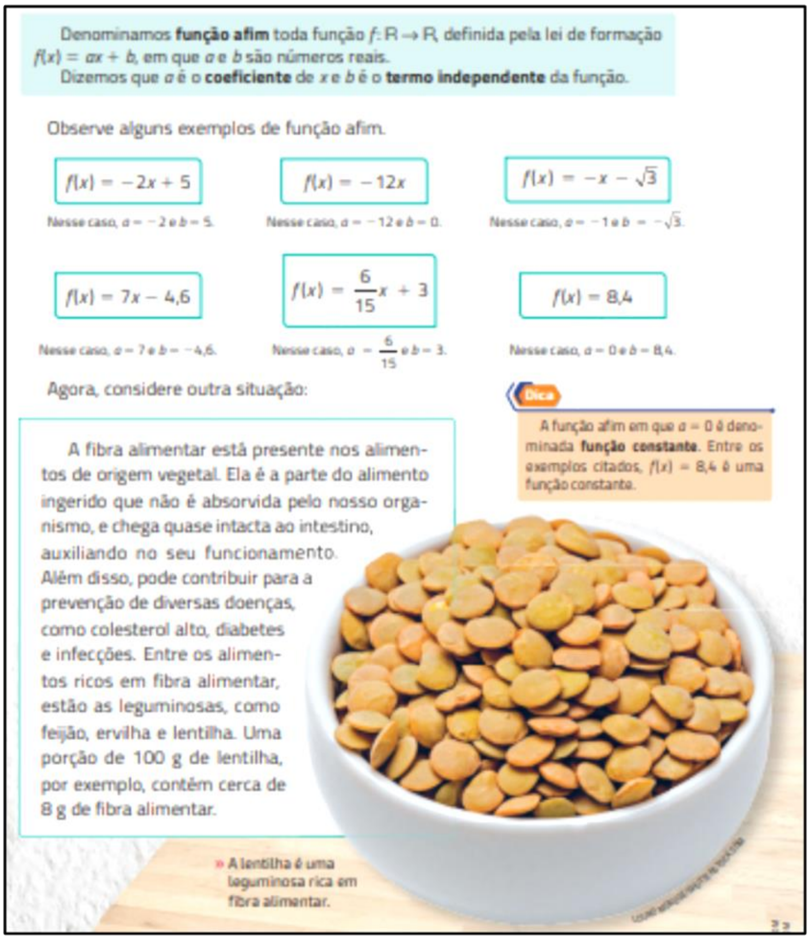


Fonte: Souza, 2020, p. 96.

Considerando a subcategoria 1.2 (tarefas resolvidas) dos textos iniciais, a Figura 16 atende a nota máxima do critério, trazendo uma atividade resolvida durante as explicações.

Na imagem abaixo, o autor traz uma caixa de dica que fala sobre a Função Constante, que é uma particularidade da Função Afim, onde *a=0,* então só é considerado o valor do termo independente *b.* A Função Linear, que também é uma particularidade da Função Afim, o autor a apresenta por meio de uma situação-problema, na qual o aluno percebe a proporção entre a massa de lentilha e a fibra alimenta e massa de fibra alimentar, como é mostrado na Figura 17.

Figura 17- Função Constante



Denominamos **função afim** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.
Dizemos que a é o **coeficiente** de x e b é o **termo independente** da função.

Observe alguns exemplos de função afim.

$f(x) = -2x + 5$ — Nesse caso, $a = -2$ e $b = 5$.

$f(x) = -12x$ — Nesse caso, $a = -12$ e $b = 0$.

$f(x) = -x - \sqrt{3}$ — Nesse caso, $a = -1$ e $b = -\sqrt{3}$.

$f(x) = 7x - 4{,}6$ — Nesse caso, $a = 7$ e $b = -4{,}6$.

$f(x) = \frac{6}{15}x + 3$ — Nesse caso, $a = \frac{6}{15}$ e $b = 3$.

$f(x) = 8{,}4$ — Nesse caso, $a = 0$ e $b = 8{,}4$.

Agora, considere outra situação:

A fibra alimentar está presente nos alimentos de origem vegetal. Ela é a parte do alimento ingerido que não é absorvida pelo nosso organismo, e chega quase intacta ao intestino, auxiliando no seu funcionamento. Além disso, pode contribuir para a prevenção de diversas doenças, como colesterol alto, diabetes e infecções. Entre os alimentos ricos em fibra alimentar, estão as leguminosas, como feijão, ervilha e lentilha. Uma porção de 100 g de lentilha, por exemplo, contém cerca de 8 g de fibra alimentar.

Dica

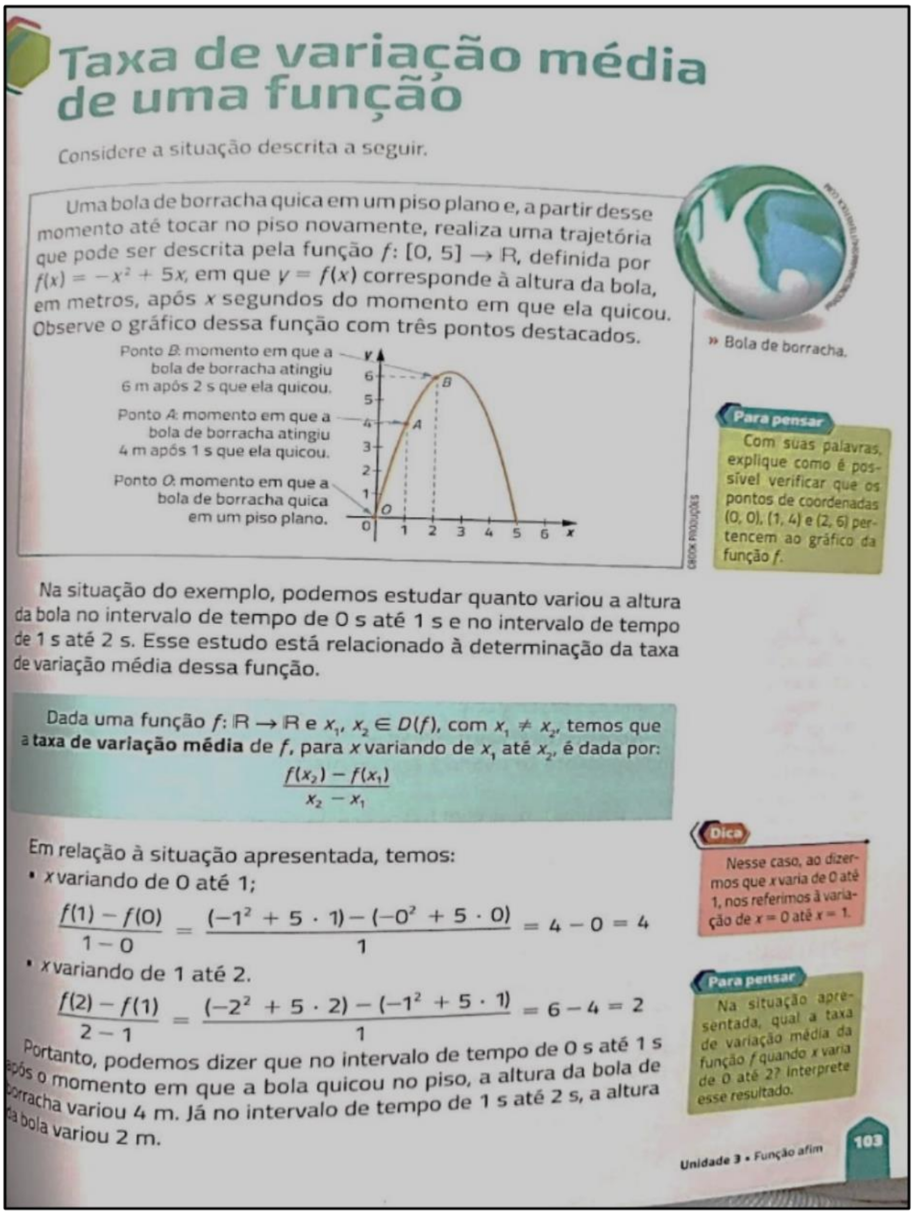
A função afim em que $a = 0$ é denominada **função constante**. Entre os exemplos citados, $f(x) = 8{,}4$ é uma função constante.

A lentilha é uma leguminosa rica em fibra alimentar.

Fonte: Souza, 2020, p. 97

Antes de abordar o estudo da reta o autor traz a explicação da Taxa de variação média (Figura 18), através de uma situação-problema, onde pretende saber a variação da altura de uma bola de borracha dentro de um intervalo de tempo, como mostra a figura abaixo. Logo após apresenta sua definição e exemplos, posteriormente traz a definição direta referente a Função Afim e em seguida dois exercícios resolvidos.

Figura 18 - Taxa de variação média de uma função



Taxa de variação média de uma função

Considere a situação descrita a seguir.

Uma bola de borracha quica em um piso plano e, a partir desse momento até tocar no piso novamente, realiza uma trajetória que pode ser descrita pela função $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 5x$, em que $y = f(x)$ corresponde à altura da bola, em metros, após x segundos do momento em que ela quicou. Observe o gráfico dessa função com três pontos destacados.

Para pensar Com suas palavras, explique como é possível verificar que os pontos de coordenadas (0, 0), (1, 4) e (2, 6) pertencem ao gráfico da função f.

Na situação do exemplo, podemos estudar quanto variou a altura da bola no intervalo de tempo de 0 s até 1 s e no intervalo de tempo de 1 s até 2 s. Esse estudo está relacionado à determinação da taxa de variação média dessa função.

Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos que a **taxa de variação média** de f, para x variando de x_1 até x_2, é dada por:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Em relação à situação apresentada, temos:

- x variando de 0 até 1;

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(-1^2 + 5 \cdot 1) - (-0^2 + 5 \cdot 0)}{1} = 4 - 0 = 4$$

- x variando de 1 até 2.

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(-2^2 + 5 \cdot 2) - (-1^2 + 5 \cdot 1)}{1} = 6 - 4 = 2$$

Portanto, podemos dizer que no intervalo de tempo de 0 s até 1 s após o momento em que a bola quicou no piso, a altura da bola de borracha variou 4 m. Já no intervalo de tempo de 1 s até 2 s, a altura da bola variou 2 m.

Dica Nesse caso, ao dizermos que x varia de 0 até 1, nos referimos à variação de $x = 0$ até $x = 1$.

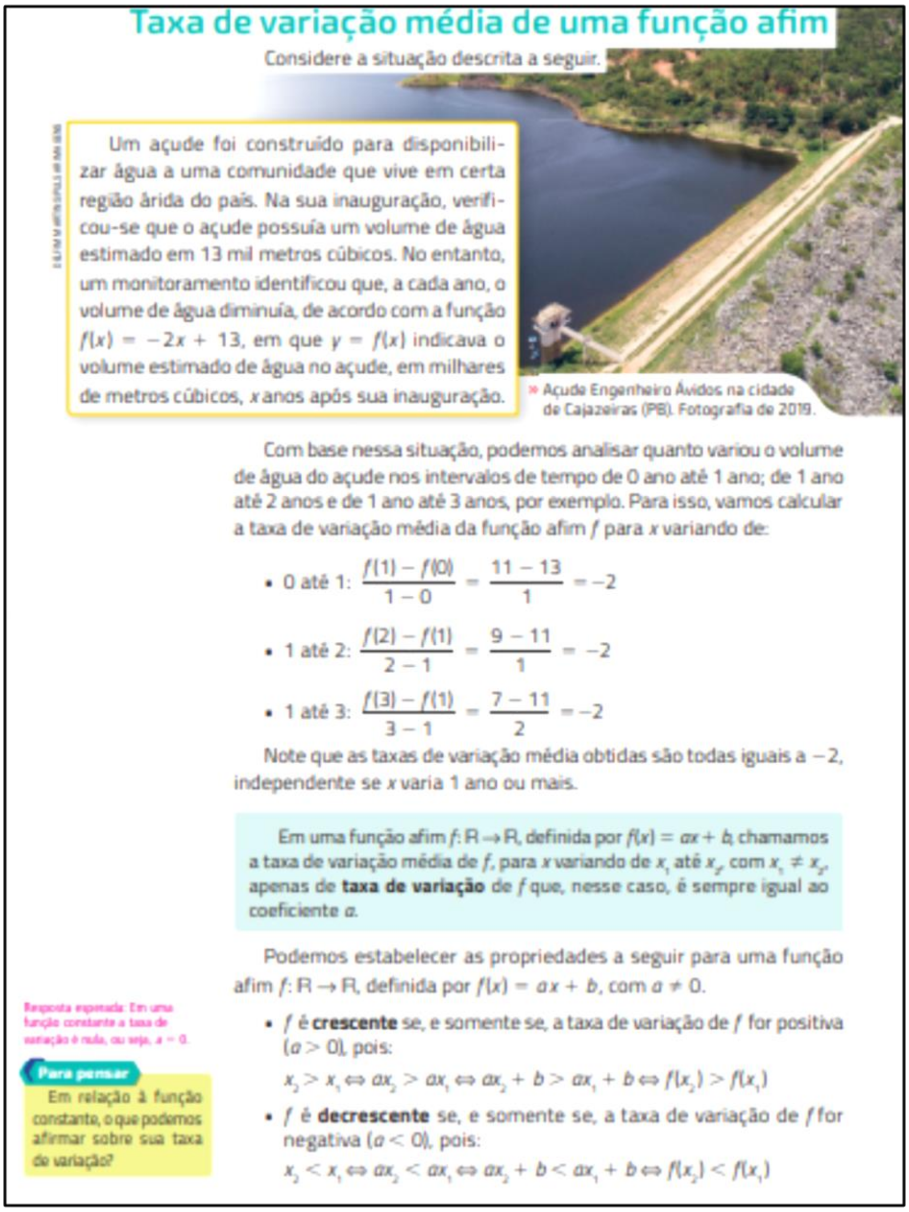
Para pensar Na situação apresentada, qual a taxa de variação média da função f quando x varia de 0 até 2? Interprete esse resultado.

Unidade 3 • Função afim 103

Fonte: Souza, 2020, p. 103.

É possível perceber na figura acima, que ao falar sobre a Taxa de variação média de uma função, o autor deixa implícito, pela manipulação algébrica que o coeficiente a é a taxa de variação e que está relacionado com a função ser crescente, quando a>0 ou decrescente, quando a<0.

Figura 19 - Taxa de variação média de uma Função Afim



Taxa de variação média de uma função afim

Considere a situação descrita a seguir.

Um açude foi construído para disponibilizar água a uma comunidade que vive em certa região árida do país. Na sua inauguração, verificou-se que o açude possuía um volume de água estimado em 13 mil metros cúbicos. No entanto, um monitoramento identificou que, a cada ano, o volume de água diminuía, de acordo com a função $f(x) = -2x + 13$, em que $y = f(x)$ indicava o volume estimado de água no açude, em milhares de metros cúbicos, x anos após sua inauguração.

Açude Engenheiro Ávidos na cidade de Cajazeiras (PB). Fotografia de 2019.

Com base nessa situação, podemos analisar quanto variou o volume de água do açude nos intervalos de tempo de 0 ano até 1 ano; de 1 ano até 2 anos e de 1 ano até 3 anos, por exemplo. Para isso, vamos calcular a taxa de variação média da função afim f para x variando de:

- 0 até 1: $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{11 - 13}{1} = -2$
- 1 até 2: $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{9 - 11}{1} = -2$
- 1 até 3: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2$

Note que as taxas de variação média obtidas são todas iguais a -2, independente se x varia 1 ano ou mais.

Em uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, chamamos a taxa de variação média de f, para x variando de x_1 até x_2, com $x_1 \neq x_2$, apenas de **taxa de variação** de f que, nesse caso, é sempre igual ao coeficiente a.

Podemos estabelecer as propriedades a seguir para uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

- f é **crescente** se, e somente se, a taxa de variação de f for positiva ($a > 0$), pois:
  $x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 > ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b > ax_1 + b \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- f é **decrescente** se, e somente se, a taxa de variação de f for negativa ($a < 0$), pois:
  $x_2 < x_1 \Leftrightarrow ax_2 < ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b < ax_1 + b \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Resposta esperada: Em uma função constante a taxa de variação é nula, ou seja, $a = 0$.

Para pensar

Em relação à função constante, o que podemos afirmar sobre sua taxa de variação?

Fonte: Souza, 2020, p. 104.

Após essa definição, o autor traz uma lista com seis exercícios referentes ao conteúdo estudado. Sendo dois de manipulação, um de demonstração e os demais de forma contextualizada. Alguns exemplos de exercícios propostos por esse autor, podem ser vistos na Figura a seguir.

Figura 20 - Exercício sobre taxa de variação média

11. Determine a taxa de variação média da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso a seguir.

a) $f(x) = 2x^2 + 6$, para x variando de -1 até 2

b) $f(x) = 4x - 1$, para x variando de -4 até 0.

c) $f(x) = 3x^3$, para x variando de 1 até 2.

d) $f(x) = \frac{x}{2} + 7$, para x variando de -2 até 6.

12. Mostre que, em uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a de x é igual à taxa de variação de f para x variando de x_1 até x_2, com $x_1 \neq x_2$.

13. Sem realizar cálculos, determine a taxa de variação de cada função afim a seguir. Depois, classifique cada uma em crescente ou decrescente.

a) $f(x) = 5x + 10$

b) $g(x) = -8x + \frac{5}{2}$

c) $h(x) = 2 - x$

d) $p(x) = \frac{x}{3} - 1$

14. Crie uma situação que envolva variáveis que se relacionam de acordo com uma função afim e cuja taxa de variação seja igual a $-\frac{1}{2}$. Depois, descreva essa situação e registre a lei de formação da função. Por fim, compare a função que você escreveu com a de alguns colegas.

15. Em cada item a seguir são apresentadas informações sobre uma função afim. Classifique cada função afim em crescente ou decrescente.

a) $f(1) = 6$ e $f(5) = -2$

b) $g(1) = -1$ e $g(-2) = -13$

c) $h(-3) = 0$ e $h(-6) = 3$

d) $p(-3) = 1$ e $p(6) = 4$

16. Um laboratório químico possui uma câmara fria com temperatura interna constante de -4 °C. Em um experimento, para avaliar as reações de uma solução líquida submetida a aquecimento, essa câmara foi programada para que, em certo momento, a temperatura começasse a aumentar gradativamente.

Sabendo que a temperatura interna dessa câmara registrou 1 °C após 1 h do experimento e 16 °C após 4 h do experimento, e que, no intervalo de tempo da realização do experimento, a temperatura interna dessa câmara pôde ser expressa por uma função afim f, resolva os itens a seguir.

a) Qual é a taxa de variação da função f? O que ela indica?

b) Escreva a função afim f, representando o tempo, em horas, por t.

c) Quanto tempo após o início desse experimento a temperatura interna da câmara atingiu 6 °C?

Fonte: Souza, 2020, p. 105.

Após uma lista de exercícios, o autor traz o gráfico da Função Afim, retornando a ideia inicial, que fala sobre o aluguel de patinetes. Através de uma tabela onde foram escolhidos valores reais para *x* (variável independente), após utilizar a lei de formação f(x)= ax+b, descobre-se então os valores de y (variável dependente). Para mostrar que o gráfico de uma Função Afim é uma reta, o autor propõe mostrar os pontos (x,y) através da representação gráfica no plano cartesiano. Traçando o lápis sobre esses pontos, percebe-se que é uma reta, pois os pontos pertencem a uma mesma reta ou estao contidos nela. Para garantir a veracidade dessa afirmativa, o autor traz uma breve explicação, que pode ser acompanhada nas Figuras 21 e 22.

Figura 21 - Gráfico da Função Afim

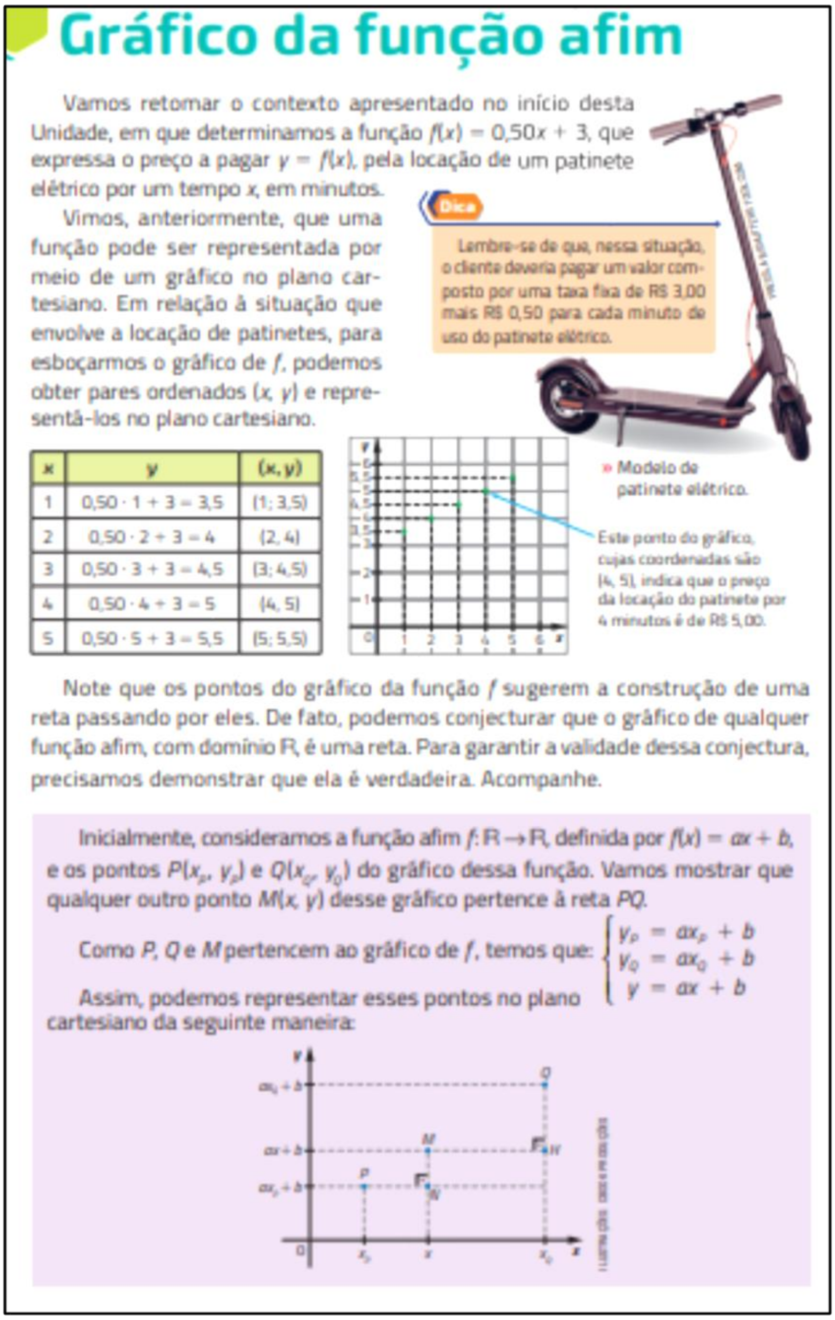


Gráfico da função afim

Vamos retomar o contexto apresentado no início desta Unidade, em que determinamos a função $f(x) = 0{,}50x + 3$, que expressa o preço a pagar $y = f(x)$, pela locação de um patinete elétrico por um tempo x, em minutos.

Vimos, anteriormente, que uma função pode ser representada por meio de um gráfico no plano cartesiano. Em relação à situação que envolve a locação de patinetes, para esboçarmos o gráfico de f, podemos obter pares ordenados (x, y) e representá-los no plano cartesiano.

Dica

Lembre-se de que, nessa situação, o cliente deveria pagar um valor composto por uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 para cada minuto de uso do patinete elétrico.

x	y	(x, y)
1	0,50 · 1 + 3 = 3,5	(1; 3,5)
2	0,50 · 2 + 3 = 4	(2, 4)
3	0,50 · 3 + 3 = 4,5	(3; 4,5)
4	0,50 · 4 + 3 = 5	(4, 5)
5	0,50 · 5 + 3 = 5,5	(5; 5,5)

Note que os pontos do gráfico da função f sugerem a construção de uma reta passando por eles. De fato, podemos conjecturar que o gráfico de qualquer função afim, com domínio $\mathbb{R}$, é uma reta. Para garantir a validade dessa conjectura, precisamos demonstrar que ela é verdadeira. Acompanhe.

Inicialmente, consideramos a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, e os pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ do gráfico dessa função. Vamos mostrar que qualquer outro ponto $M(x, y)$ desse gráfico pertence à reta PQ.

Como P, Q e M pertencem ao gráfico de f, temos que: $\begin{cases} y_P = ax_P + b \\ y_Q = ax_Q + b \\ y = ax + b \end{cases}$

Assim, podemos representar esses pontos no plano cartesiano da seguinte maneira:

Fonte: Souza, 2020, p. 106.

O autor traz uma demonstração partindo da marcação que foi realizada no plano cartesiano a partir da locação de patinetes. É possível perceber que os pontos do gráfico da função f sugerem a construção de um reta. Para garatir a veracidade dessa afirmativa, foi possível demostrar que ela é verdadeira, como mostra a Figura 22.

Figura 22- Continuação da demonstração

Dica

Na representação, foram indicados os pontos auxiliares H e N. Além disso, note:

- $QH = (ax_Q + b) - (ax + b) = ax_Q + b - ax - b = a(x_Q - x)$
- $MN = (ax + b) - (ax_P + b) = ax + b - ax_P - b = a(x - x_P)$
- $HM = x_Q - x$
- $NP = x - x_P$

De acordo com os triângulos retângulos PMN e MQH, podemos escrever a seguinte relação entre as medidas dos catetos:

$$\frac{QH}{MN} = \frac{a(x_Q - x)}{a(x - x_P)} = \frac{x_Q - x}{x - x_P} = \frac{HM}{NP}$$

Como $\frac{QH}{MN} = \frac{HM}{NP}$ e $med(Q\hat{H}M) = med(M\hat{N}P) = 90°$, temos pelo caso LAL (lado, ângulo, lado) que os triângulos PMN e MQH são semelhantes. Logo, todos os demais pares de ângulos internos correspondentes possuem medidas iguais:

$$med(M\hat{Q}H) = med(P\hat{M}N) \text{ e } med(H\hat{M}Q) = med(N\hat{P}M).$$

Dica

Indicamos a medida de um ângulo $M\hat{N}P$ como $med(M\hat{N}P)$.

Indicamos que as retas MH e NP são paralelas utilizando a notação $\overleftrightarrow{MH} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{NP}$.

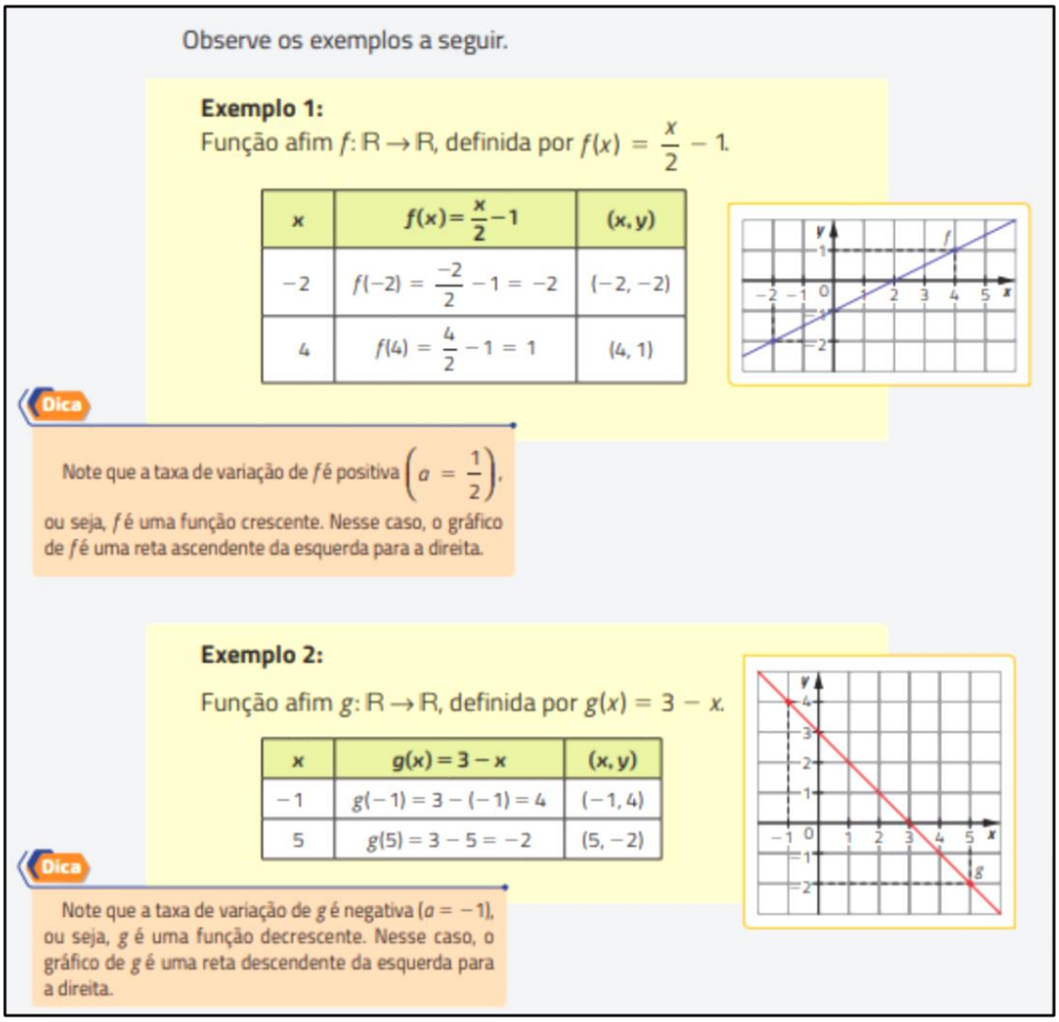
Como $\overleftrightarrow{MH} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{NP}$ e $med(H\hat{M}Q) = med(N\hat{P}M)$, podemos afirmar que os pontos P, Q e M são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

Portanto, M pertence à reta PQ, ou seja, o gráfico de qualquer função afim, com domínio $\mathbb{R}$, é uma reta.

Fonte: Souza, 2020, p. 107.

Considerando a demonstração mostrada nas Figuras 21 e 22, é possível perceber que elas atendem as notas de critérios estabelecidas no quadro dos textos iniciais, na categoria 3. O autor propõe uma série de exemplos considerando que dois pontos determinam reta e logo em seguida traz um exercício ENEM com atividade resolvida, conforme a Figura 23.

Figura 23- Exemplos de Função Afim



Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 1:

Função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 1$.

x	$f(x) = \frac{x}{2} - 1$	(x, y)
-2	$f(-2) = \frac{-2}{2} - 1 = -2$	$(-2, -2)$
4	$f(4) = \frac{4}{2} - 1 = 1$	$(4, 1)$

Dica

Note que a taxa de variação de f é positiva $\left(a = \frac{1}{2}\right)$, ou seja, f é uma função crescente. Nesse caso, o gráfico de f é uma reta ascendente da esquerda para a direita.

Exemplo 2:

Função afim $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3 - x$.

x	$g(x) = 3 - x$	(x, y)
-1	$g(-1) = 3 - (-1) = 4$	$(-1, 4)$
5	$g(5) = 3 - 5 = -2$	$(5, -2)$

Dica

Note que a taxa de variação de g é negativa $(a = -1)$, ou seja, g é uma função decrescente. Nesse caso, o gráfico de g é uma reta descendente da esquerda para a direita.

Fonte: Souza, 2020, p. 108.

Como podemos ver na imagem acima é notório perceber o comportamento do gráfico de uma Função Afim, se é crescente ou decrescente. A partir da taxa de variação *a* é possível observar a inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas.

A seguir, a Figura 24 finaliza essa parte e inicia com exercícios resolvidos.

Figura 24 - Atividade resolvida

Atividade resolvida

R4. (Enem/MEC) Em um município foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obtendo-se os dados:

Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro.

Qual a previsão do número de médicos nesse município para o ano 2040?

a) 387 b) 424 c) 437 d) 574 e) 711

Resolução

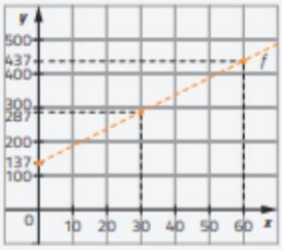
Como o comportamento no período observado é de crescimento linear, podemos representá-lo por uma função afim. Considerando 1980 como o ano 0 e 1985 como o ano 5, temos que a taxa de variação (a) da quantidade de médicos por ano de 1980 a 1985 é dada por:

$$a = \frac{162 - 137}{5 - 0} = 5$$

Sendo f a função que representa a quantidade de médicos x anos após 1980, temos $f(x) = 5x + 137$. Assim, para calcular a previsão da quantidade de médicos em 2040, fazemos $x = 2040 - 1980 = 60$ e calculamos:

$$f(60) = 5 \cdot 60 + 137 = 437\text{, ou seja, 437 médicos.}$$

Representando o gráfico de f em um plano cartesiano, temos:



Dica

Neste gráfico, as escalas dos eixos estão diferentes.

Dica

Situações em que as variáveis se relacionam de maneira que ocorra o crescimento ou decrescimento linear podem ser expressas por uma função afim. Assim como ocorre na situação apresentada, a função utilizada para representar esse tipo de situação não é necessariamente uma função linear.

Assim, a previsão para o ano de 2040 é de 437 médicos nesse município. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

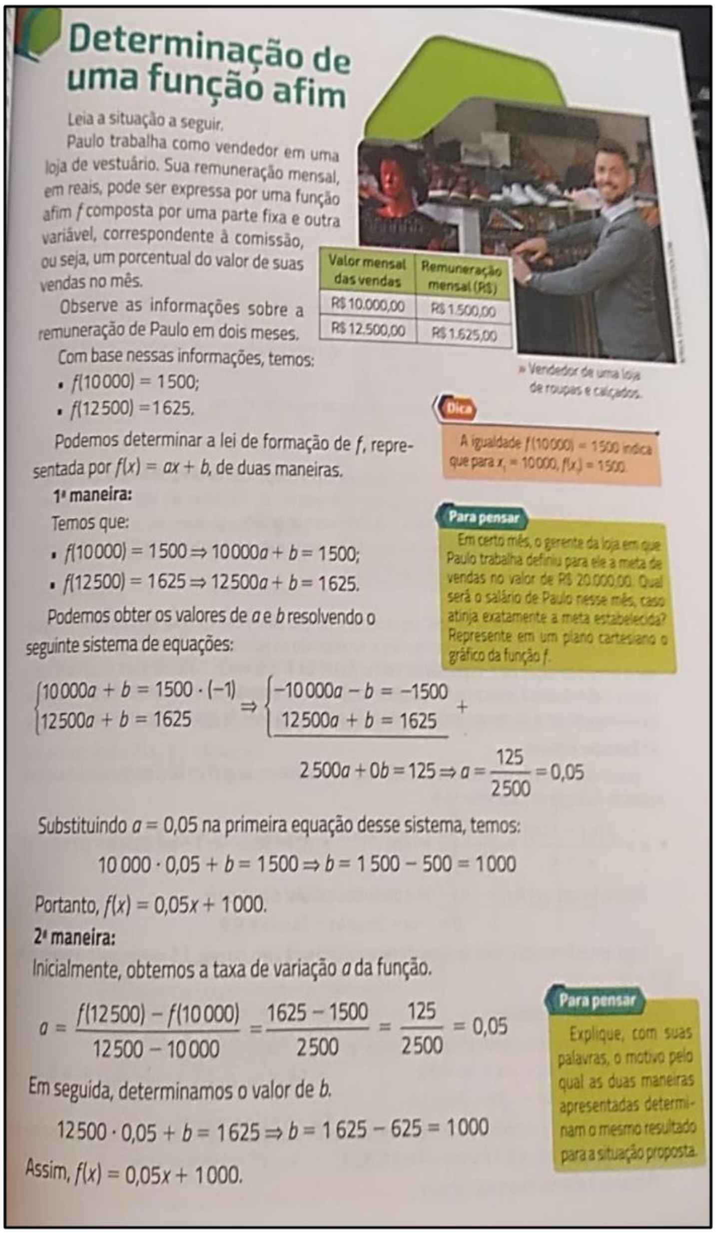
Fonte: Souza, 2020, p. 109.

Acima está representada uma atividade resolvida em relação a inclinação da reta, para que o aluno faça a aplicação direto da fórmula da taxa de variação e veja a manipulação do mesmo.

Em seguida, o autor traz a interseção do gráfico de uma Função Afim com os eixos cartesianos e translação do gráfico. Mais um exercício resolvido sobre esse conteúdo e logo depois uma série de exercícios nos quais os alunos precisam utilizar manipulação, aplicação da definição, e exercícios contextualizados.

O autor também traz um tópico chamado Determinação de uma função que explica duas maneiras de chegar em uma Função Afim, através de sistemas e através da taxa de variação. Em seguida, mais uma atividade de resolução de problema resolvida sobre esse conteúdo.

Figura 25 - Determinação de Função Afim.



Determinação de uma função afim

Leia a situação a seguir.

Paulo trabalha como vendedor em uma loja de vestuário. Sua remuneração mensal, em reais, pode ser expressa por uma função afim f composta por uma parte fixa e outra variável, correspondente à comissão, ou seja, um porcentual do valor de suas vendas no mês.

Observe as informações sobre a remuneração de Paulo em dois meses.

Valor mensal das vendas	Remuneração mensal (R$)
R$ 10.000,00	R$ 1.500,00
R$ 12.500,00	R$ 1.625,00

» Vendedor de uma loja de roupas e calçados.

Com base nessas informações, temos:

- $f(10000) = 1500$;
- $f(12500) = 1625$.

Dica A igualdade $f(10000) = 1500$ indica que para $x_1 = 10000$, $f(x_1) = 1500$.

Podemos determinar a lei de formação de f, representada por $f(x) = ax + b$, de duas maneiras.

1ª maneira:

Temos que:

- $f(10000) = 1500 \Rightarrow 10000a + b = 1500$;
- $f(12500) = 1625 \Rightarrow 12500a + b = 1625$.

Podemos obter os valores de a e b resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 10000a + b = 1500 \cdot (-1) \\ 12500a + b = 1625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10000a - b = -1500 \\ 12500a + b = 1625 \end{cases} +$$

$$2500a + 0b = 125 \Rightarrow a = \frac{125}{2500} = 0,05$$

Para pensar Em certo mês, o gerente da loja em que Paulo trabalha definiu para ele a meta de vendas no valor de R$ 20.000,00. Qual será o salário de Paulo nesse mês, caso atinja exatamente a meta estabelecida? Represente em um plano cartesiano o gráfico da função f.

Substituindo $a = 0,05$ na primeira equação desse sistema, temos:

$$10000 \cdot 0,05 + b = 1500 \Rightarrow b = 1500 - 500 = 1000$$

Portanto, $f(x) = 0,05x + 1000$.

2ª maneira:

Inicialmente, obtemos a taxa de variação a da função.

$$a = \frac{f(12500) - f(10000)}{12500 - 10000} = \frac{1625 - 1500}{2500} = \frac{125}{2500} = 0,05$$

Em seguida, determinamos o valor de b.

$$12500 \cdot 0,05 + b = 1625 \Rightarrow b = 1625 - 625 = 1000$$

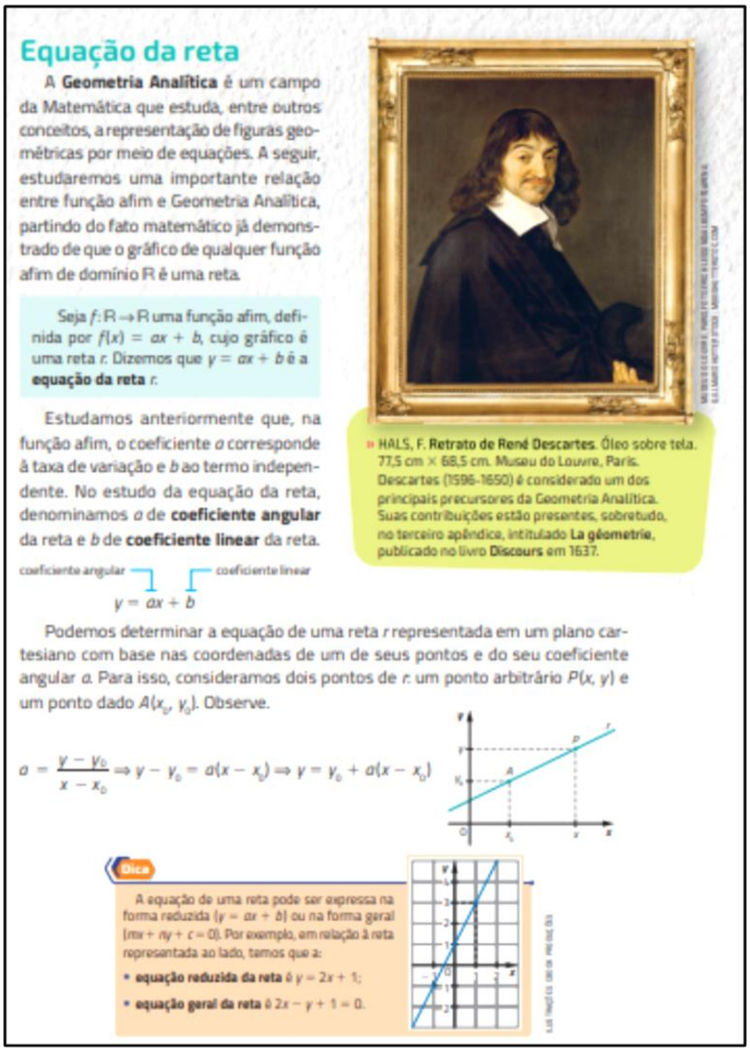
Assim, $f(x) = 0,05x + 1000$.

Para pensar Explique, com suas palavras, o motivo pelo qual as duas maneiras apresentadas determinam o mesmo resultado para a situação proposta.

Fonte: Souza, 2020, p. 117.

Depois dessas explicações, o autor aborda um tema que fala de reta, onde é nítido o destaque com a Geometria Analítica e alguns de seus elementos. O mesmo chama a atenção ao dizer que possível encontrar a equação da reta com base em um ponto (x,y) e o coeficiente angular *a,* fazendo uma distinão entre função afim e o estudo da reta entro da Geometria Analítica. Ele também mostra como é representada a forma da equação reduzida da reta, representada por y=ax+b e aequação geral da reta, representada por mx+ny+c=0. Em virtude a utilização de uma apresentação disrcursiva, verbal e gráfica o livro atendeu ao critério estabelecido na categoria 3 (conceitos) dos textos iniciais, quanto a categoria 4 (relações entre conteúdos), atende quatro critérios estabelecidos, é possível observar na Figura 26.

Figura 26 - Equação da reta.



Equação da reta

A **Geometria Analítica** é um campo da Matemática que estuda, entre outros conceitos, a representação de figuras geométricas por meio de equações. A seguir, estudaremos uma importante relação entre função afim e Geometria Analítica, partindo do fato matemático já demonstrado de que o gráfico de qualquer função afim de domínio $\mathbb{R}$ é uma reta.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, cujo gráfico é uma reta r. Dizemos que $y = ax + b$ é a **equação da reta** r.

Estudamos anteriormente que, na função afim, o coeficiente a corresponde à taxa de variação e b ao termo independente. No estudo da equação da reta, denominamos a de **coeficiente angular** da reta e b de **coeficiente linear** da reta.

$$y = \underbrace{a}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{b}_{\text{coeficiente linear}}$$

HALS, F. **Retrato de René Descartes**. Óleo sobre tela. 77,5 cm × 68,5 cm. Museu do Louvre, Paris. Descartes (1596-1650) é considerado um dos principais precursores da Geometria Analítica. Suas contribuições estão presentes, sobretudo, no terceiro apêndice, intitulado **La géometrie**, publicado no livro **Discours** em 1637.

Podemos determinar a equação de uma reta r representada em um plano cartesiano com base nas coordenadas de um de seus pontos e do seu coeficiente angular a. Para isso, consideramos dois pontos de r: um ponto arbitrário $P(x, y)$ e um ponto dado $A(x_0, y_0)$. Observe.

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + a(x - x_0)$$

Dica

A equação de uma reta pode ser expressa na forma reduzida ($y = ax + b$) ou na forma geral ($mx + ny + c = 0$). Por exemplo, em relação à reta representada ao lado, temos que a:

- **equação reduzida da reta** é $y = 2x + 1$;
- **equação geral da reta** é $2x - y + 1 = 0$.

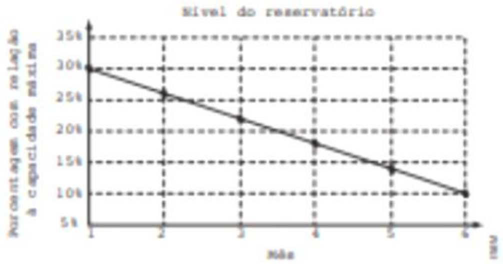
Fonte: Souza, 2020, p. 119.

O autor propõe uma atividade resolvida, como é mostrado na Figura 27, e uma lista de exercícios sobre este conteúdo,para que o aluno possa praticar. É possível possível perceber que no conteúdo da figura abaixo se adequa ao critério da subcategoria 6.1 (traz exercícios resolvido).

Figura 27- Atividade resolvida sobre equação da reta.

Atividade resolvida

R8. (Enem/MEC) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio. b) 3 meses e meio. c) 1 mês e meio. d) 4 meses. e) 1 mês.

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

1ª) Compreender o enunciado.

Do enunciado, temos que:

- o nível de água de um reservatório foi monitorado por um período de tempo e o resultado é mostrado pelo gráfico, que descreve uma tendência linear;
- os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico.

Temos de identificar qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade.

2ª) Elaborar um plano.

O gráfico "Nível do reservatório" representa a função afim f que corresponde ao nível de água do reservatório, em porcentagem, no mês x. Analisando os pontos do gráfico, podemos determinar a lei de formação de f, expressa na forma $f(x) = ax + b$, e, então, calcular para qual valor de x temos $f(x) = 0$, isto é, o zero da função. Por fim, podemos subtrair 6 desse resultado, para obter a quantidade mínima de meses, após o sexto mês, para que o nível de água do reservatório seja zero.

3ª) Executar o plano.

Como os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico de f, podemos determinar a taxa de variação de f e o valor de b:

- $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{30 - 10}{1 - 6} = -4$;
- $f(1) = 30 \Rightarrow -4 \cdot 1 + b = 30 \Rightarrow b = 30 + 4 = 34$.

Assim, temos que $f(x) = -4x + 34$ e podemos calcular o zero de f:

$$0 = -4x + 34 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = 8,5$$

Logo, em 8,5 meses o nível de água do reservatório será zero, ou seja, 2,5 meses após o sexto mês (8,5 − 6).

4ª) Verificar os resultados.

Para verificar o resultado obtido, podemos realizar os seguintes cálculos:

- $f(1) = -4 \cdot 1 + 34 = -4 + 34 = 30$;
- $f(6) = -4 \cdot 6 + 34 = -24 + 34 = 10$;
- $f(8,5) = -4 \cdot 8,5 + 34 = 34 - 34 = 0$.

Note que esses cálculos indicam que os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico da função f e que 8,5 é o zero dessa função.

Portanto a alternativa **a** é a correta.

Fonte: Souza, 2020, p. 120.

Após estas observações, é possível perceber que o capítulo de Função Afim nesta coleção é bem extensa, traz alguns tópicos como: Estudo do sinal e algumas aplicações. Quando é iniciado o estudo da reta, ainda na primeira série do Ensino Médio, é possível estabelecer a relação entre geometria e álgebra, mas ainda de maneira superficial (Dante 2005) exatamente da forma que o autor do livro trouxe.

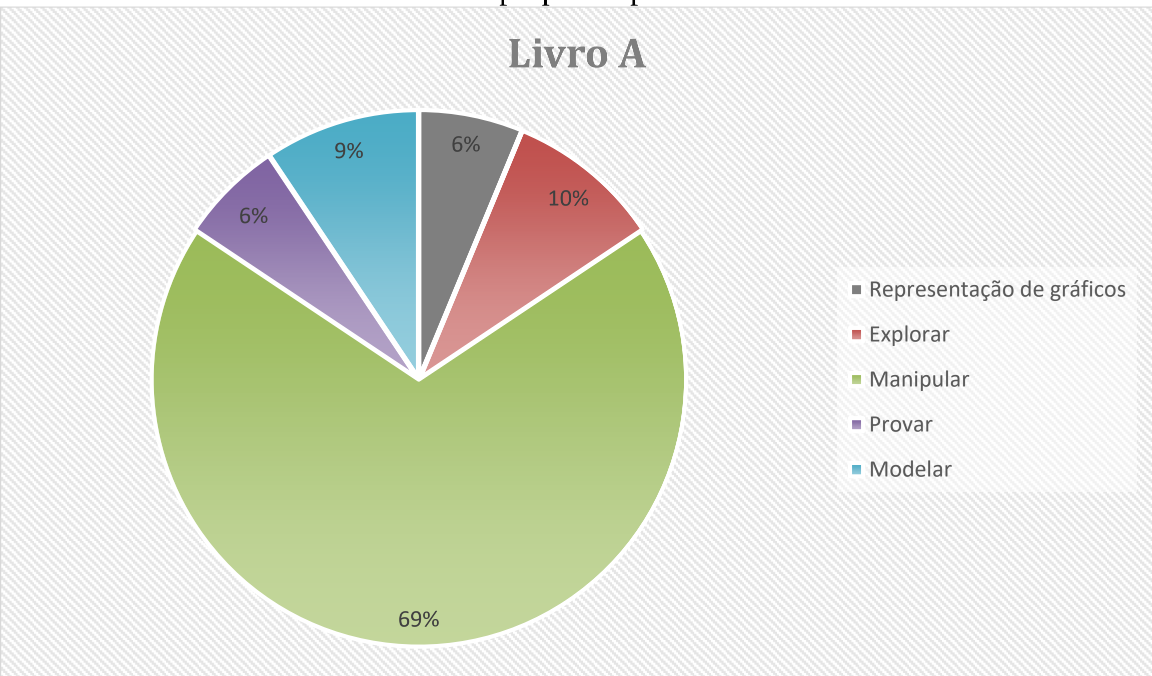
Considerações

O autor desta obra, oferece o conceito de função e de reta de maneira explícita de forma com que o aluno não investigue ou deduza conceitos. A sequência é intercalada a todo momento por definições, exemplos, exercícios resolvidos e tarefas a serem realizadas.

Antes de estudar o gráfico, o autor achou pertinente falar sobre função linear revisando proporcionalidade. Optou-se também por falar em taxa de variação média para que se entendesse de fato, o conceito de reta.

Achou-se necessária a elaboração de um gráfico, que se encotra abaixo, com a contabilização dos exercícios oferecidos pelo autor aos alunos e professores.

Gráfico 1- Tarefas propostas pelo autor do livro A



Fonte: Elaboração própria.

No que foi analisado, 39 exercícios intitulados como “atividades”. Como se pode notar, o autor propõe mais exercícios de manipulação que são aquelas para aplicar a definição proposta.

A oferta de tarefas para se provar é constituída apenas por duas, assim como também é muito pequena a quantidade de tarefas para modelar e apenas uma de resolução de problema, como também não atividades que utilizam a tecnologia.

Abaixo estão os dois Quadros referentes às notas de critério que foram atribuídas ao livro A, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.1.1 Quadro de Análise

Quadro 6 -Critérios para análise dos textos iniciais do Livro A

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	3 1
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	2
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	4
Total		14	11 (alta)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 7 – Atividades Propostas do Livro A

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	2
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	1
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	1
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	0
Total		7	6 (alta)

Fonte: Elaboração própria.

5.2 Análise do Livro B

O autor Fabio Martins de Leonardo da Coleção Conexões inicia o tema de Função Afim mostrando uma situação-problema envolvendo a Pandemia, que foi algo que aconteceu no mundo inteiro, um tema bastante atual, que permite de forma interdisciplinar trabalhar com a área de Ciências da Natureza, porém ao falar sobre a lei de formação os autores trazem a escala de temperatura em Fahrenheit, que é utilizada em alguns países como é mostrado na Figura 28 abaixo. Nessa parte inicial, considerando a subcategoria 1.1 (situação problema) do quadro dos textos iniciais, o livro rebeceu nota de critério igual a dois.

Figura 28- Problema inicial do capítulo de função

1 Função afim

A pandemia causada pelo novo Coronavírus no início do ano de 2020 mudou hábitos de locomoção e consumo. Visando a diminuição de contágio, a Organização Mundial de Saúde (OMS) recomendou que as pessoas permanecessem em casa. Com o tráfego de pessoas reduzido, locais como lojas, escritórios e restaurantes fecharam as suas portas.

Protocolos como higienização das mãos e a aferição da temperatura corporal passaram a ser tomados no acesso aos estabelecimentos essenciais que permaneceram abertos, como supermercado e alguns locais de trabalho.

Observe a foto da aferição da temperatura de um trabalhador na Índia. O aparelho de infravermelho está indicando 98 °F. Essa unidade de medida de temperatura, Fahrenheit, é adotada em alguns países. No Brasil, a temperatura é medida em grau Celsius. Para converter a temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, podemos usar a seguinte função:

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e x a medida em grau Fahrenheit.

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 15.

Em seguida, o mesmo enfatiza que o exemplo proposto é uma lei de formação de uma Função Afim, mostrando então que *a* e *b* são coeficientes da lei da função f(x)= ax+b para todo *x* pertencente aos reais.

O autor propõe uma revisão de Domínio, Contradomínio e Conjunto imagem de uma função. Em meio à revisão, cita Função polinomial e os casos particulares da Função Afim. O texto traz de forma sucinta tais definições nas quais foram apresentadas neste trabalho de conclusão de curso. Como é apresentado na Figura 29, o autor prossegue com um exercício resolvido e em seguida 7 questões com atividades, são elas de manipulação para que os alunos fixem tais práticas pré- estabelecidas.

Considerando o a subcategoria 1.2 (tarefas resolvidas), o autor traz uma dentro do textos iniciais, assim tendo nota máxima na nota de critério.

Figura 29 - Exercício resolvido

Exercício resolvido

R1. Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

b) x, para $g(x) = 4$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 17.

Figura 30- Exercícios propostos

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

A função i não é afim porque não assume forma $ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes a e b.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

c) $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

d) $k(x) = -13x$ $a = -13$ e $b = 0$

- Por que entre os itens, há função que não é afim?

2. Considerando a função f, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7

b) x, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$

c) $f(\sqrt{2})$ $-3\sqrt{2} + 1$

d) x, para $f(x) = 19$ -6

- Para quais valores de x temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Ver resolução no Guia do professor.

3. Determine o valor de a para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$

4. Determine os valores de p e q para que a função j, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? R$ 34,50; R$ 50,50

b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou? 330 minutos

c) Escreva no caderno a lei de formação da função que representa essa situação.

d) Se, em uma residência dessa cidade, havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês? R$ 103,50

6. Dada a função f, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3

c) $f(3) - f(2)$ 3

d) $f(4) - f(3)$ 3

Ver resolução no Guia do professor.

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de x.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de x na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

7. A tabela a seguir apresenta alguns valores reais de x e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins f e g.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−1	1	3	5	7
$g(x)$	4	3	2	1	0

a) Considerando os valores apresentados na tabela, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados na tabela relativos à função f. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de f, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função g. Ver resolução no Guia do professor.

d) Considerando os gráficos construídos nos itens **b** e **c**, que figura geométrica se espera que seja empregada para representar graficamente uma função afim? uma reta

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 17.

A seguir, o autor inicia a definição do gráfico da Função Afim. Inicialmente, é mostrada a Taxa de Variação através de exemplos e usando a ideia dos exercícios propostos anteriormente, a partir de um exemplo, e posteriormente uma demonstração formal com uma linguagem adequada para o ano escolar proposto, como pode ser observado na Figura 31.

Figura 31 - Demonstração Taxa de Variação

2 Gráfico da função afim

2.1 Taxa de variação

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx), ou seja, podemos verificar como varia $f(x)$ atribuindo diferentes valores para x.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$.

Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0$, temos $f(x_1) = y_1 = 1$.
- Para $x_2 = 1$, temos $f(x_2) = y_2 = -2$.

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3$$

Assim, o número -3 é a **taxa de variação** da função f no intervalo $[0, 1]$.

Agora, vamos calcular a taxa de variação dessa função em outro intervalo.

- Para $x_3 = -4$, temos $f(x_3) = y_3 = 13$.
- Para $x_4 = -2$, temos $f(x_4) = y_4 = 7$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{7 - 13}{-2 - (-4)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 18.

Figura 32 - Demonstração Taxa de Variação

O número -3 é a taxa de variação da função f no intervalo $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que a taxa de variação da função f encontrada nos intervalos $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$ e $[-4, -2]$ é a mesma encontrada no intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale a.

A taxa de variação de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente a.

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 18.

Na figura acima, o autor utiliza para deixar clara a explicação. A intenção do autor é estudar o comportamento da Função Afim analisando a variação da razão entre a variação de dois elementos da imagem e a variação de seus respectivos elementos correspondentes no domínio. O autor escolhe dois valores para o domínio para encontrar seus respectivos valores para imagens. Seguindo, ele testa três intervalos [x,y] diferentes, ele encontra o mesmo valor para taxa de variação. E conclui que a taxa de variação *a* de uma Função Afim é constante para qualquer intervalo do domínio. Na sequência, mostra mais um exercício resolvido se referindo a taxa de variação considerando x e $x+h$ dois elementos do domínio.

Figura 33 - Exercício resolvido sobre taxa

Exercício resolvido

R2. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x, ou seja, -3.

▸ **Resolução**

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim: $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \dfrac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$

$= \dfrac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \dfrac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3.

Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

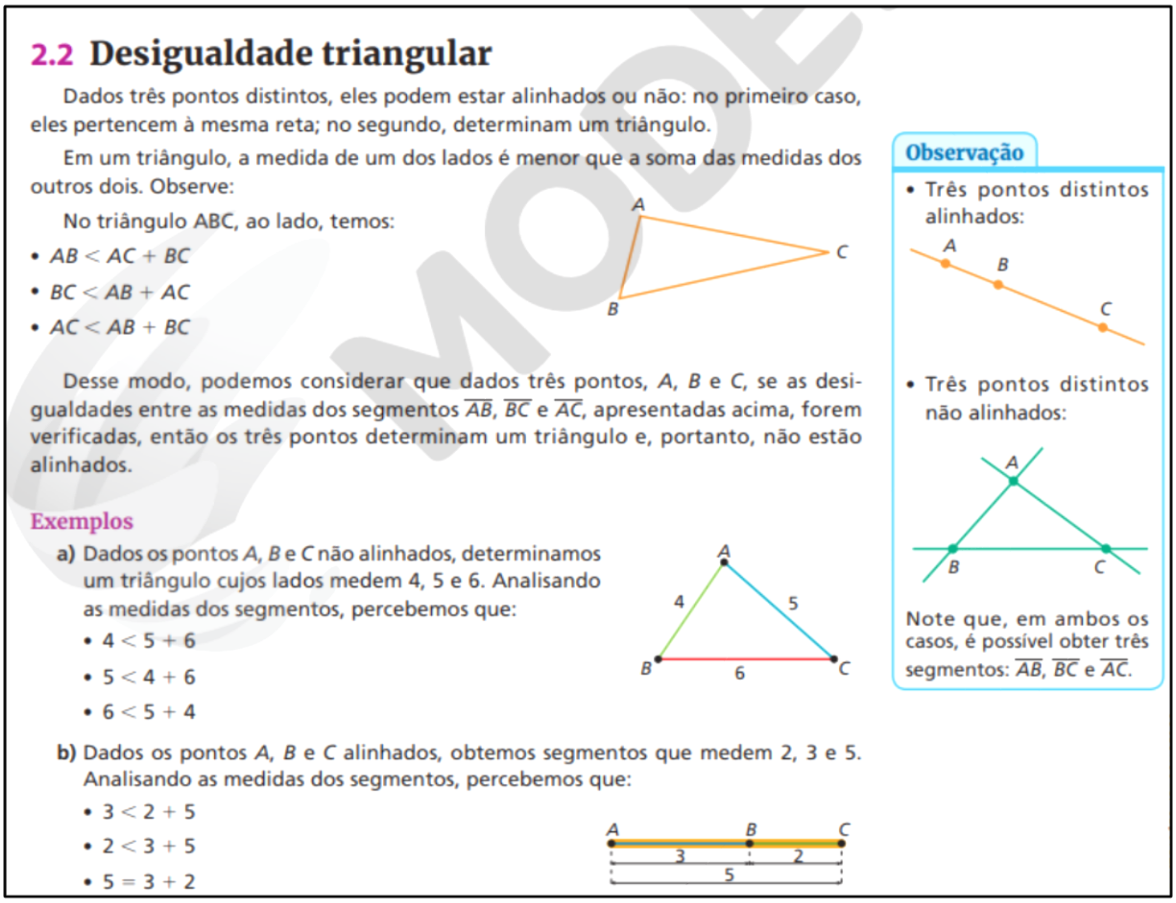
Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

$f(x) = -3x + 1$	
x	$f(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 19

Para dar continuidade ao conteúdo, o capítulo traz a demonstração de que dois pontos distintos alinhados determinam uma reta, através da propriedade da desigualdade triangular, como mostra a Figura 34.

Figura 34 - Desigualdade triangular para provar a reta.



2.2 Desigualdade triangular

Dados três pontos distintos, eles podem estar alinhados ou não: no primeiro caso, eles pertencem à mesma reta; no segundo, determinam um triângulo.

Em um triângulo, a medida de um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois. Observe:

No triângulo ABC, ao lado, temos:

- $AB < AC + BC$
- $BC < AB + AC$
- $AC < AB + BC$

Desse modo, podemos considerar que dados três pontos, A, B e C, se as desigualdades entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, apresentadas acima, forem verificadas, então os três pontos determinam um triângulo e, portanto, não estão alinhados.

Exemplos

a) Dados os pontos A, B e C não alinhados, determinamos um triângulo cujos lados medem 4, 5 e 6. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:

- $4 < 5 + 6$
- $5 < 4 + 6$
- $6 < 5 + 4$

b) Dados os pontos A, B e C alinhados, obtemos segmentos que medem 2, 3 e 5. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:

- $3 < 2 + 5$
- $2 < 3 + 5$
- $5 = 3 + 2$

Observação

- Três pontos distintos alinhados:
- Três pontos distintos não alinhados:

Note que, em ambos os casos, é possível obter três segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 20

Como mostra acima, através da desigualdade triangular o autor diz que com três pontos (pares ordenados) distintos, podem estar alinhados ou não. Se as desigualdades entre as medidas dos segmentos forem verificadas, então os três pontos formam um triângulo. Se os três pontos estiverem alinhados então constitui uma reta. Através da Figura 35 é possível ver a manipulação algébrica que resulta na determinação da reta, mostrando assim, que o gráfico de uma Função Afim é uma reta.

Figura 35 - Demonstração da reta

Reflita

Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos A, B e C não estão alinhados e, portanto, determinam um triângulo?

Não, os pontos podem estar alinhados, como os desta figura:

$A \quad C \quad B$

Verifica-se que $AC \neq AB + BC$ e, no entanto, os pontos A, B e C não determinam um triângulo.

Observação

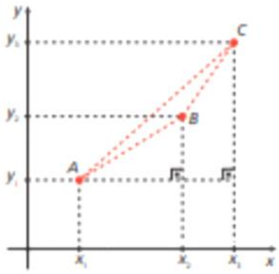
Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** ou taxa de variação, e o termo constante b é chamado de **coeficiente linear** da reta que representa o gráfico da função f.

Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.

Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.



Para provar que os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos demonstrar que AC é igual a $AB + BC$.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto B, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto C também pertence ao gráfico de f; então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2(1 + a^2)$

$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter AB e BC:

$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

Assim:

$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)]\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = AC$

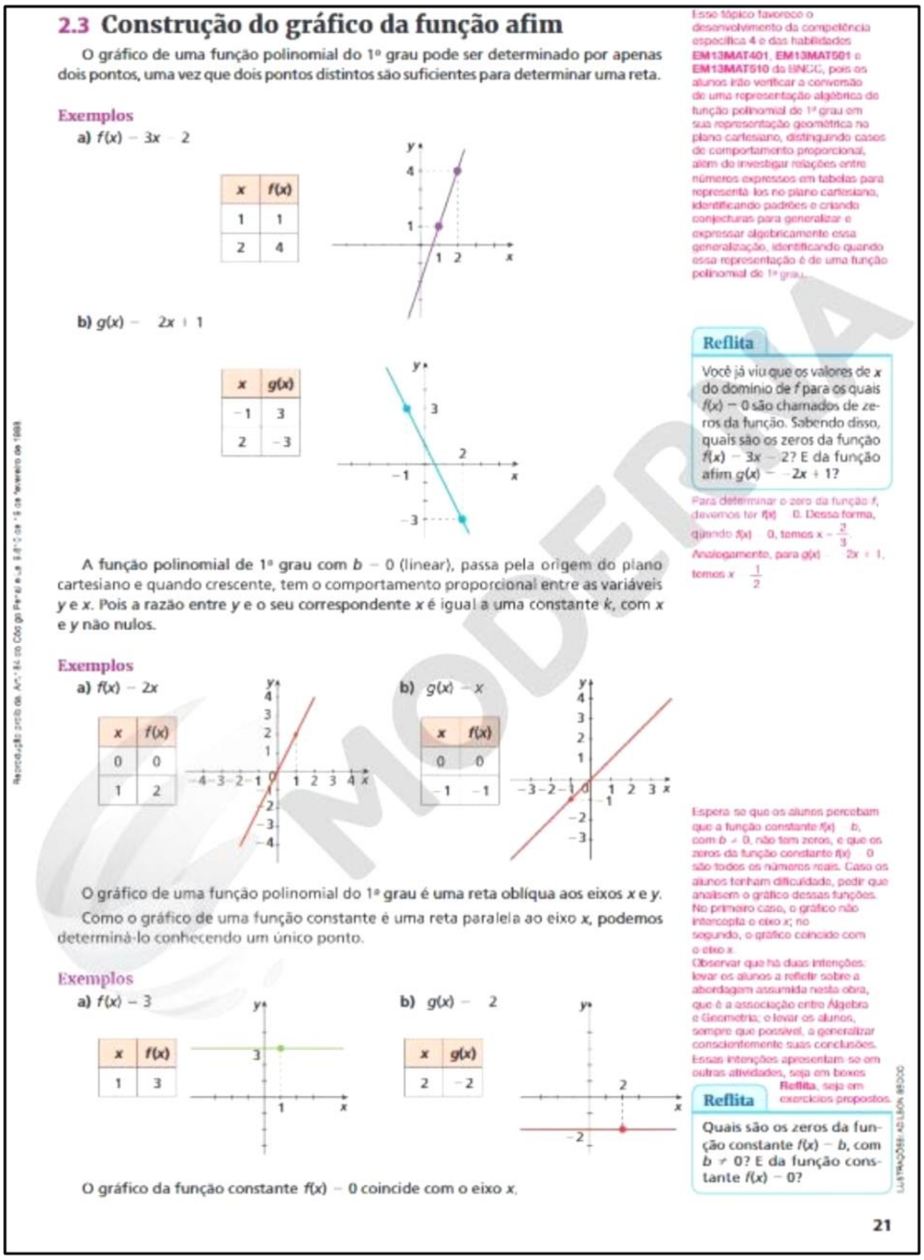
Como $AB + BC = AC$, então A, B e C estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p.

Em seguida, o autor traz a construção do gráfico partindo da ideia de que dois pontos distintos determinam uma reta. Abaixo, mostra mais um gráfico para que o aluno perceba que é uma Função Constante, uma das particularidades da Função Afim. Considerando a categoria 2 (demonstrações) e seus critérios, atendeu parte dele, tendo então, nota dois.

Figura 36 - Construção do gráfico Função Afim.



2.3 Construção do gráfico da função afim

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau pode ser determinado por apenas dois pontos, uma vez que dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta.

Exemplos

a) $f(x) = 3x - 2$

x	$f(x)$
1	1
2	4

b) $g(x) = -2x + 1$

x	$g(x)$
−1	3
2	−3

A função polinomial de 1º grau com $b = 0$ (linear), passa pela origem do plano cartesiano e quando crescente, tem o comportamento proporcional entre as variáveis y e x. Pois a razão entre y e o seu correspondente x é igual a uma constante k, com x e y não nulos.

Exemplos

a) $f(x) = 2x$

x	$f(x)$
0	0
1	2

b) $g(x) = x$

x	$f(x)$
0	0
−1	−1

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta oblíqua aos eixos x e y.

Como o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, podemos determiná-lo conhecendo um único ponto.

Exemplos

a) $f(x) = 3$

x	$f(x)$
1	3

b) $g(x) = -2$

x	$g(x)$
2	−2

O gráfico da função constante $f(x) = 0$ coincide com o eixo x.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica 4 e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos irão verificar a conversão de uma representação algébrica da função polinomial de 1º grau em sua representação geométrica no plano cartesiano, distinguindo casos de comportamento proporcional, além de investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, identificando quando essa representação é de uma função polinomial de 1º grau.

Reflita

Você já viu que os valores de x do domínio de f para os quais $f(x) = 0$ são chamados de zeros da função. Sabendo disso, quais são os zeros da função $f(x) = 3x - 2$? E da função afim $g(x) = -2x + 1$?

Para determinar o zero da função f, devemos ter $f(x) = 0$. Dessa forma, quando $f(x) = 0$, temos $x = \frac{2}{3}$. Analogamente, para $g(x) = -2x + 1$, temos $x = \frac{1}{2}$.

Espera-se que os alunos percebam que a função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros, e que os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais. Caso os alunos tenham dificuldade, pedir que analisem o gráfico dessas funções. No primeiro caso, o gráfico não intercepta o eixo x; no segundo, o gráfico coincide com o eixo x.

Observar que há duas intenções: levar os alunos a refletir sobre a abordagem assumida nesta obra, que é a associação entre Álgebra e Geometria; e levar os alunos, sempre que possível, a generalizar conscientemente suas conclusões. Essas intenções apresentam-se em outras atividades, seja em boxes **Reflita**, seja em exercícios propostos.

Reflita

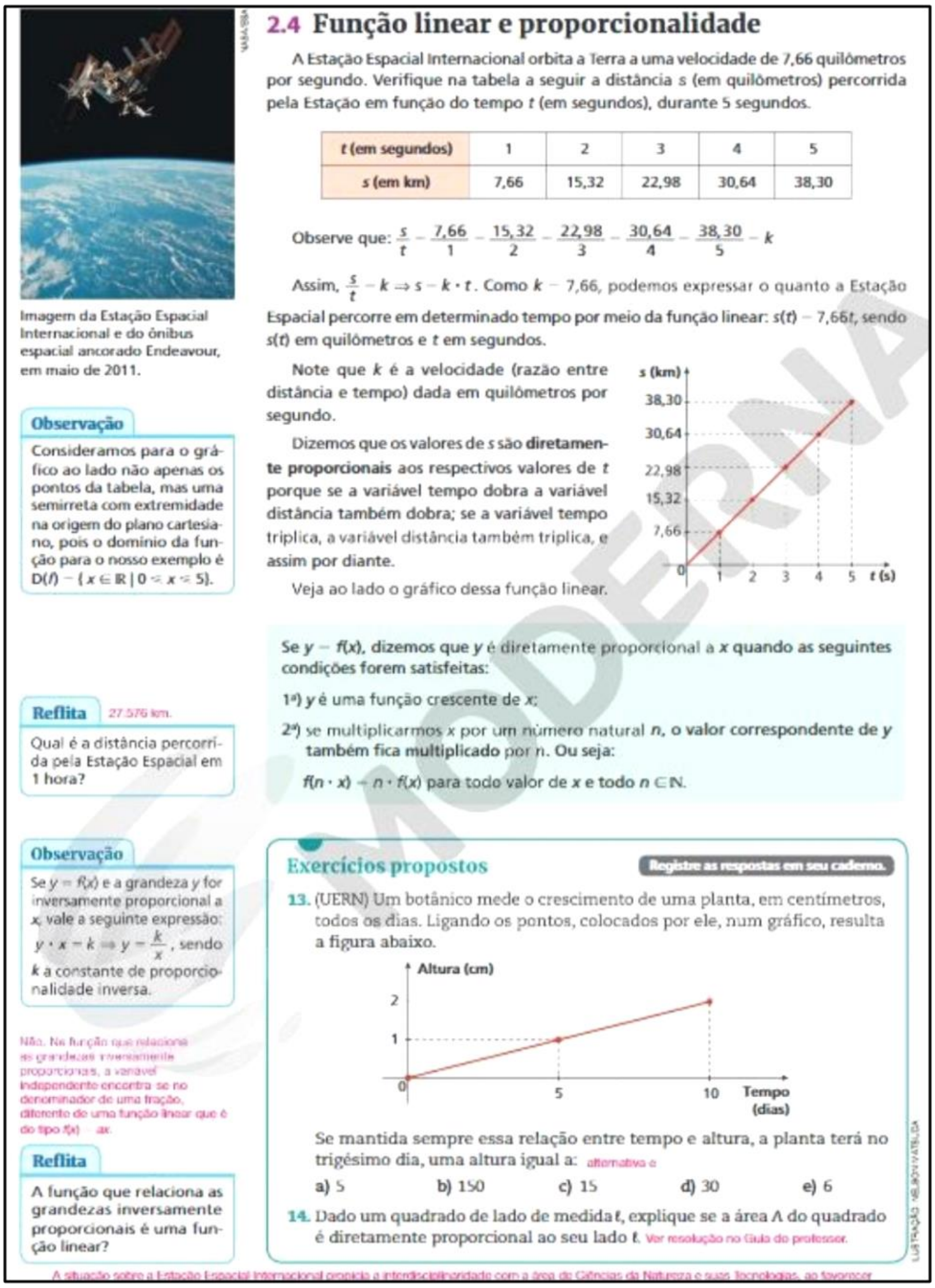
Quais são os zeros da função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$? E da função constante $f(x) = 0$?

21

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 21.

Na imagem acima, para esboçar o gráfico da Função Afim, o autor optou por construir uma pequena tabela, com valores diferentes para o domínio e assim encontrar suas respectivas imagens. Considerando a categoria 3 (conceitos), a utilização para a apresentação do gráfico recebe nota máxima. A partir daí, o próximo tópico apresentado fala sobre o coeficiente linear da Função Afim envolvendo também proporcionalidade e um exercício proposto apresentando também sua resolução, como a Figura 37 apresenta.

Figura 37- Função linear e proporcionalidade.



2.4 Função linear e proporcionalidade

A Estação Espacial Internacional orbita a Terra a uma velocidade de 7,66 quilômetros por segundo. Verifique na tabela a seguir a distância s (em quilômetros) percorrida pela Estação em função do tempo t (em segundos), durante 5 segundos.

t (em segundos)	1	2	3	4	5
s (em km)	7,66	15,32	22,98	30,64	38,30

Observe que: $\frac{s}{t} = \frac{7{,}66}{1} = \frac{15{,}32}{2} = \frac{22{,}98}{3} = \frac{30{,}64}{4} = \frac{38{,}30}{5} = k$

Assim, $\frac{s}{t} = k \Rightarrow s = k \cdot t$. Como $k = 7{,}66$, podemos expressar o quanto a Estação Espacial percorre em determinado tempo por meio da função linear: $s(t) = 7{,}66t$, sendo $s(t)$ em quilômetros e t em segundos.

Note que k é a velocidade (razão entre distância e tempo) dada em quilômetros por segundo.

Dizemos que os valores de s são **diretamente proporcionais** aos respectivos valores de t porque se a variável tempo dobra a variável distância também dobra; se a variável tempo triplica, a variável distância também triplica, e assim por diante.

Veja ao lado o gráfico dessa função linear.

Imagem da Estação Espacial Internacional e do ônibus espacial ancorado Endeavour, em maio de 2011.

Observação

Consideramos para o gráfico ao lado não apenas os pontos da tabela, mas uma semirreta com extremidade na origem do plano cartesiano, pois o domínio da função para o nosso exemplo é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$.

Se $y = f(x)$, dizemos que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1ª) y é uma função crescente de x;

2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n. Ou seja:

$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$.

Reflita 27.576 km.

Qual é a distância percorrida pela Estação Espacial em 1 hora?

Observação

Se $y = f(x)$ e a grandeza y for inversamente proporcional a x, vale a seguinte expressão: $y \cdot x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa.

Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

Reflita

A função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais é uma função linear?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. (UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.

Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a: alternativa e

a) 5 b) 150 c) 15 d) 30 e) 6

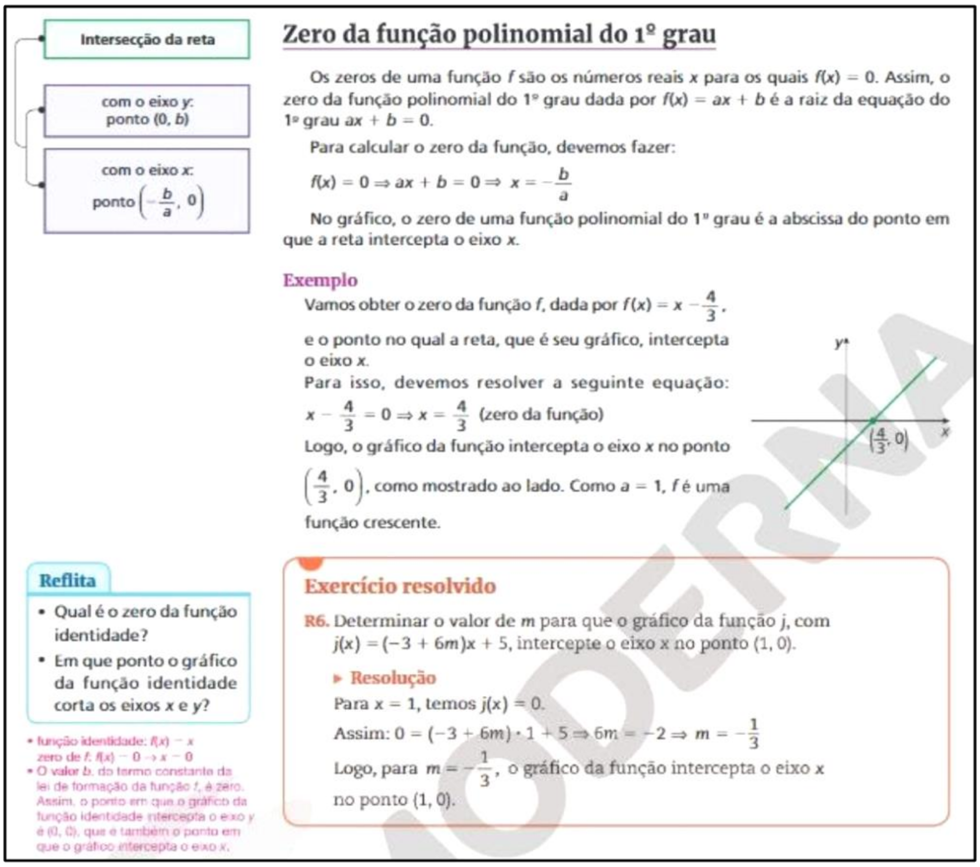
14. Dado um quadrado de lado de medida ℓ, explique se a área A do quadrado é diretamente proporcional ao seu lado ℓ. Ver resolução no Guia do professor.

A situação sobre a Estação Espacial Internacional propicia a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao favorecer

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 22.

O livro traz a definição de crescimento e decrescimento da função através de exemplos e mais um exercício resolvido. Depois é mostrado um tópico que fala sobre Zero da função.

Figura 38- Zero da função afim



Intersecção da reta

com o eixo y: ponto $(0, b)$

com o eixo x: ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

Zero da função polinomial do 1º grau

Os zeros de uma função f são os números reais x para os quais $f(x) = 0$. Assim, o zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Para calcular o zero da função, devemos fazer:

$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

No gráfico, o zero de uma função polinomial do 1º grau é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x.

Exemplo

Vamos obter o zero da função f, dada por $f(x) = x - \frac{4}{3}$, e o ponto no qual a reta, que é seu gráfico, intercepta o eixo x.

Para isso, devemos resolver a seguinte equação:

$x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ (zero da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, como mostrado ao lado. Como $a = 1$, f é uma função crescente.

Reflita

- Qual é o zero da função identidade?
- Em que ponto o gráfico da função identidade corta os eixos x e y?

- função identidade: $f(x) = x$
zero de f: $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$
- O valor b, do termo constante da lei de formação da função f, é zero. Assim, o ponto em que o gráfico da função identidade intercepta o eixo y é $(0, 0)$, que é também o ponto em que o gráfico intercepta o eixo x.

Exercício resolvido

R6. Determinar o valor de m para que o gráfico da função j, com $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$, intercepte o eixo x no ponto $(1, 0)$.

▸ **Resolução**

Para $x = 1$, temos $j(x) = 0$.

Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

Logo, para $m = -\frac{1}{3}$, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

Fonte: Leonardo (ed.), 2020, p. 23

Depois dessa definição o autor propõe alguns tópicos como; translação do gráfico de uma função, estudo de sinal e resolução de situações-problema envolvendo este mesmo assunto e inequação.

Considerações

Como podemos notar o autor introduz o conceito de função de maneira explícita por meio de uma situação –problema cujo contexto se aplica na vida real, mas ao decorrer da explicação o conceito está relacionado a um assunto que muitas vezes os alunos não tem muito contato que é a escala de temperatura em Fahrenheit.

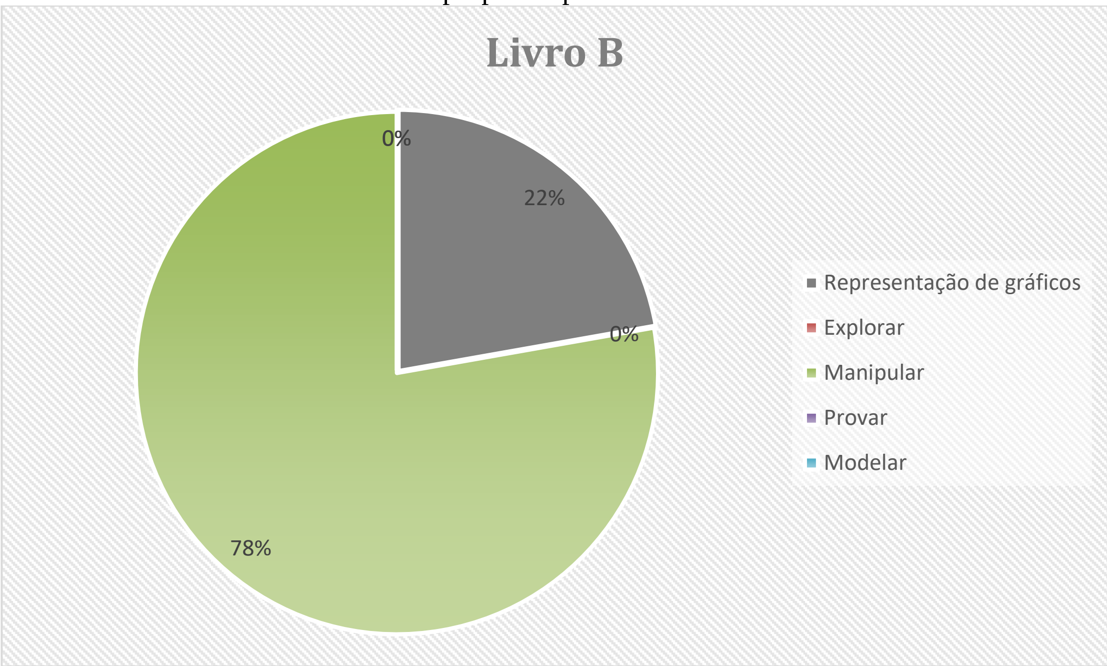
Neste capítulo o conceito de reta vem através da Função Afim diante de uma sequência como definições, exemplos, exercícios resolvidos. A estrutura é intercalada com aplicações de tarefas. Tais tarefas oferecem aos alunos fixarem o conceito visto, através da manipulação algébrica utilizando definição e aplicando conceitos.

Em nenhum momento o autor fez associações ao estudo da reta em Geometria Analítica e ao estudo de demonsrações dessa área que são importantes, não tendo nenhuma nota de critério na categoria. De acordo com Silva (2014) muitos alunos chegam no Ensino

Médio com a ideia de que uma reta é simplesmente um traço retilíneo e que não há relação com as equações. Logo mostrar uma reta de forma geométrica é muito simples, basta construir o gráfico. Uma questão difícil para eles é enxergar uma reta em um registro algébrico, ou seja, em uma equação por exemplo.

A partir de então optou-se pela contabilização dos tipos de exercícios, como mostra o Gráfico 2, oferecido pelo autor dentro do que foi proposto durante o trabalho

Gráfico 2 - Tarefas propostas pelo autor do livro B



Fonte: Elaboração própria.

Considerando os exercícios que são prioritários para esta análise, o autor trouxe todos os sobre manipulação. Nenhum deles usa o conceito de reta apresentado e nenhum outro tipo de exercício. De acordo com Lima (1999) encontrar aplicações significativas para a matéria que está sendo trabalhada deveria ser uma preocupação constante, pois ela deve ser abordada nas aulas.

Abaixo estão os dois quadros referente às notas de critério que foram atribuídas ao livro B, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.2.1 Quadro de Análise do Livro B

Quadro 8 – Critérios para análise dos textos iniciais do livro B

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	2 1
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	2
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	0
Total		14	6 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 9 – Atividades Propostas do Livro B

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	1
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	0
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	1
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	1
Total		7	4 (moderada)

Fonte: Elaboração própria.

5.3 Análise do Livro C

Apresentamos a seguir a proposta dos autores do livro Matemática e suas Tecnologias, escrita por Eduardo Chavante e Diego Prestes, para abordagem do ensino de Função Afim. Os autores iniciam tema Função Afim com uma situação na qual a matemática pode contribuir para a ciência, mais especificamente na geração de energia por meio das usinas eólicas (Figura 39), mas sem falar do assunto a ser abordado.

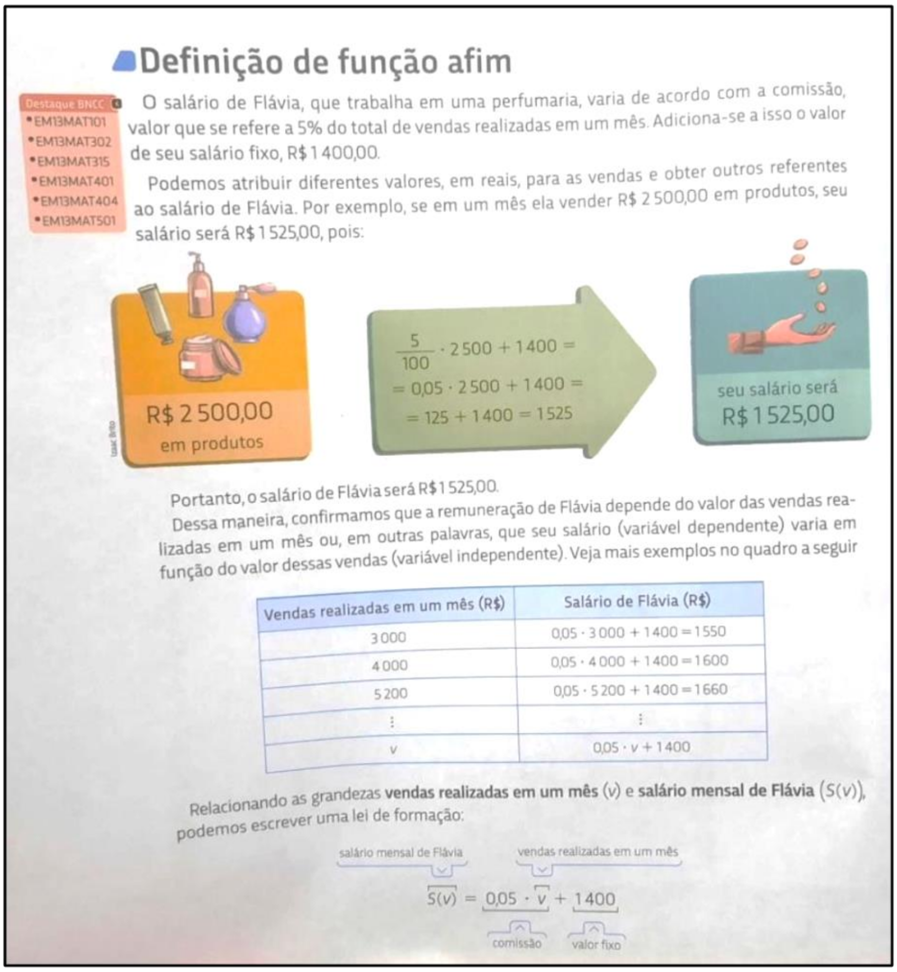
Figura 39 - Introdução ao estudo de função

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 56, 57.

Em seguida, os autores sugerem que o professor inicie o conteúdo de Função Afim com uma situação contextualizada a respeito do salário de uma funcionária de uma loja, que varia de acordo com a comissão de 5% do total de vendas realizadas em um mês (Figura 40). Com base em valores diferentes, em reais, para as vendas, pode-se obter diferentes valores de salário para a funcionária. Sendo assim, considerando a subcategoria 1.1 (situação-problema) o livro recebeu nota máxima de critério. Os autores pretendem que os alunos percebam intuitivamente que o salário da funcionária (variável dependente) varia em função do valor das vendas (variável independente).

A seguir, os autores apresentam em linguagem matemática a lei de formação da função afim e seu conceito. E assim, pretende que o aluno perceba que o gráfico da função afim é uma reta não vertical, podendo ser crescente, quando o valor da variável independente for positivo ou decrescente, quando o valor da variável independente for negativo. O objetivo final da atividade é que os alunos consigam perceber certos padrões através dos resultados obtidos que correspondem a variável dependente, os quais lhe permitem chegar a uma lei de formaçãoe assim traçar o gráfico correspondente.

Figura 40 - Definição de Função afim



Definição de função afim

Destaque BNCC
- EM13MAT101
- EM13MAT302
- EM13MAT315
- EM13MAT401
- EM13MAT404
- EM13MAT501

O salário de Flávia, que trabalha em uma perfumaria, varia de acordo com a comissão, valor que se refere a 5% do total de vendas realizadas em um mês. Adiciona-se a isso o valor de seu salário fixo, R$ 1 400,00.

Podemos atribuir diferentes valores, em reais, para as vendas e obter outros referentes ao salário de Flávia. Por exemplo, se em um mês ela vender R$ 2 500,00 em produtos, seu salário será R$ 1 525,00, pois:

Portanto, o salário de Flávia será R$ 1 525,00.

Dessa maneira, confirmamos que a remuneração de Flávia depende do valor das vendas realizadas em um mês ou, em outras palavras, que seu salário (variável dependente) varia em função do valor dessas vendas (variável independente). Veja mais exemplos no quadro a seguir.

Vendas realizadas em um mês (R$)	Salário de Flávia (R$)
3 000	$0,05 \cdot 3000 + 1400 = 1550$
4 000	$0,05 \cdot 4000 + 1400 = 1600$
5 200	$0,05 \cdot 5200 + 1400 = 1660$
⋮	⋮
v	$0,05 \cdot v + 1400$

Relacionando as grandezas **vendas realizadas em um mês** (v) e **salário mensal de Flávia** ($S(v)$), podemos escrever uma lei de formação:

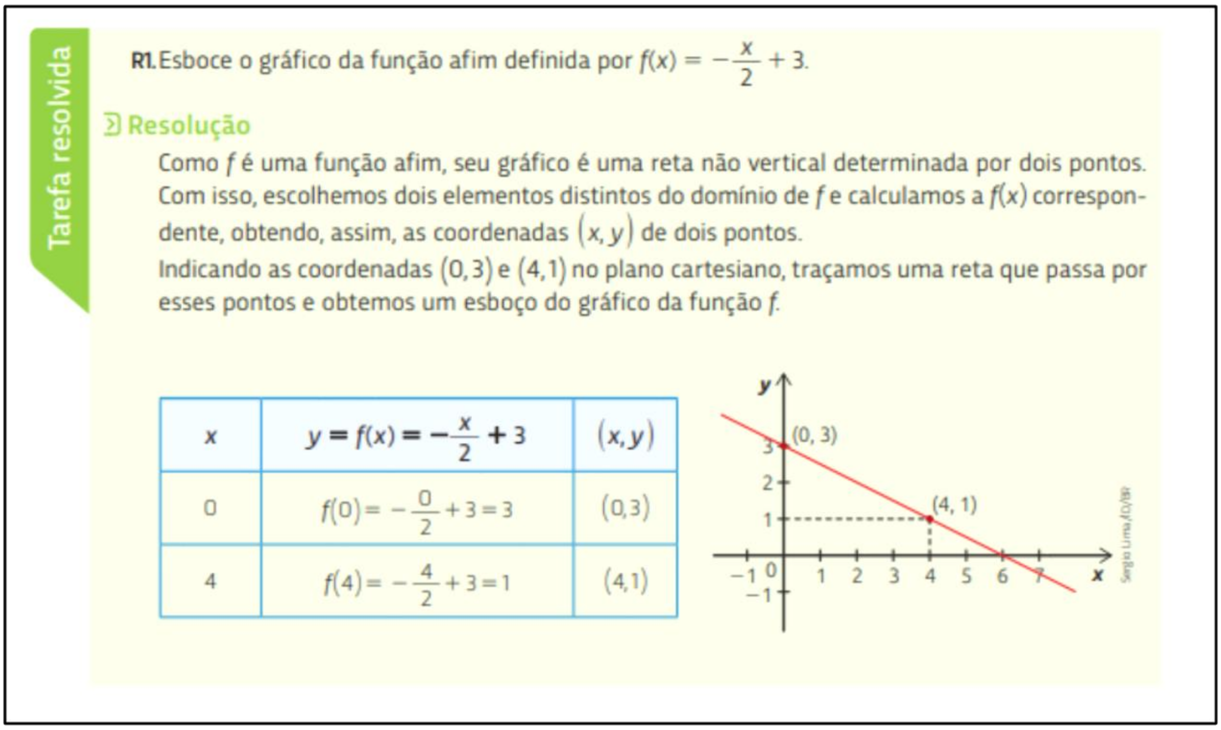
$$\overbrace{S(v)}^{\text{salário mensal de Flávia}} = \underbrace{0,05}_{\text{comissão}} \cdot \overbrace{v}^{\text{vendas realizadas em um mês}} + \underbrace{1400}_{\text{valor fixo}}$$

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 58.

O conceito de função é apresentado de maneira implícita, permitindo que o aluno tenha a possibilidade de construir seu conhecimento através da observação e mediação do professor, tendo o educando ativo em sua aprendizagem. Após formalizar para o aluno que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, os autores apenas citam que é possível demonstrar que três pontos quaisquer do gráfico de função afim são colineares, ou seja, existe uma reta que contém esses pontos. E que por ser uma reta, é possível defini-la, determinando dois de seus pontos distintos entre si.

Logo depois de apresentar o conceito de função afim e seu respectivo gráfico, os autores trazem uma questão resolvida passo a passo, com aplicação direta do conceito, ou seja, uma questão de manipulação atendendo a subcagoria 1.2 (tarefas resolvidas) recebendo então nota máxima (Figura 41). Iniciam com exercício resolvido afirmando que o gráfico é uma reta não vertical, e como dito anteriormente, essa reta pode ser determinada por dois pontos. Este ponto é determinado por dois valores reais que os autores escolhem para a variável independente (x) e após inserir esse valor na fórmula já apresentada, descobre o valor da variável dependente (y). Formando assim o par ordenado (x,y). Após encontrar os valores dos dois pares ordenados, os autores fazem a representação através do gráfico, mostrando ao aluno que é possível determinar uma reta por dois pontos (pares ordenados) distintos.

Figura 41- Exercício resolvido.


Tarefa resolvida

R1. Esboce o gráfico da função afim definida por $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$.

Resolução

Como f é uma função afim, seu gráfico é uma reta não vertical determinada por dois pontos. Com isso, escolhemos dois elementos distintos do domínio de f e calculamos a $f(x)$ correspondente, obtendo, assim, as coordenadas (x, y) de dois pontos.
Indicando as coordenadas $(0, 3)$ e $(4, 1)$ no plano cartesiano, traçamos uma reta que passa por esses pontos e obtemos um esboço do gráfico da função f.

x	$y = f(x) = -\frac{x}{2} + 3$	(x, y)
0	$f(0) = -\frac{0}{2} + 3 = 3$	$(0, 3)$
4	$f(4) = -\frac{4}{2} + 3 = 1$	$(4, 1)$

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 60.

Para finalizar esta parte do conteúdo, os autores propõem uma lista de sete exercícios distribuídos entre, questões de manipulação e representação gráfica.

Dando sequência ao tema, os autores utilizam gráficos para analisar os coeficientes da função afim. Sendo o coeficiente “*a*” chamado taxa de variação e “*b*” coeficiente linear da lei de formação *f(x)= ax+b*. Através dos gráficos os autores mostram que o coeficiente “*a*” ou declividade ou coeficiente angular, determina se o gráfico da função afim vai ser crescente *a*>0 ou decrescente *a*<0. E o coeficiente “*b*” intersecta o eixo *y* no ponto de coordenada (0,b). Vejamos o exemplo na Figura 36. Para o estudo do gráfico, o livro nota 1 (um) dentro da catgoria 3 (conceitos).

Figura 42- Coeficientes da Função Afim

Gráfico da função afim

É possível representar uma função afim por meio de um gráfico no plano cartesiano. Para ter uma ideia do aspecto desse gráfico, tomamos a lei de formação da função e atribuímos alguns valores reais à variável independente, obtendo os valores correspondentes, também reais, para a variável dependente.

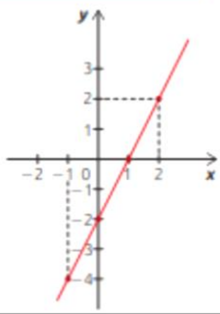
Observe uma maneira de esboçar o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x - 2$.

Inicialmente, atribuímos alguns valores à variável independente x e obtemos os valores correspondentes para a variável dependente $f(x)$, determinando, assim, os pares ordenados (x, y), em que $y = f(x)$. Em seguida, representamos no plano cartesiano os pontos determinados por esses pares ordenados.

Como x pode assumir qualquer valor real, podemos atribuir infinitos valores a x, obtendo valores correspondentes para y. Os infinitos pontos cujas coordenadas satisfazem a lei de formação dada formam o gráfico dessa função.

x	$f(x) = 2x - 2$	(x, y)
-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -2 - 2 = -4$	$(-1, -4)$
0	$f(0) = 2 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2$	$(2, 2)$

Perceba que $f(x) = 2x - 2$, cujo gráfico está representado ao lado, é **crescente**, pois, para todo $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

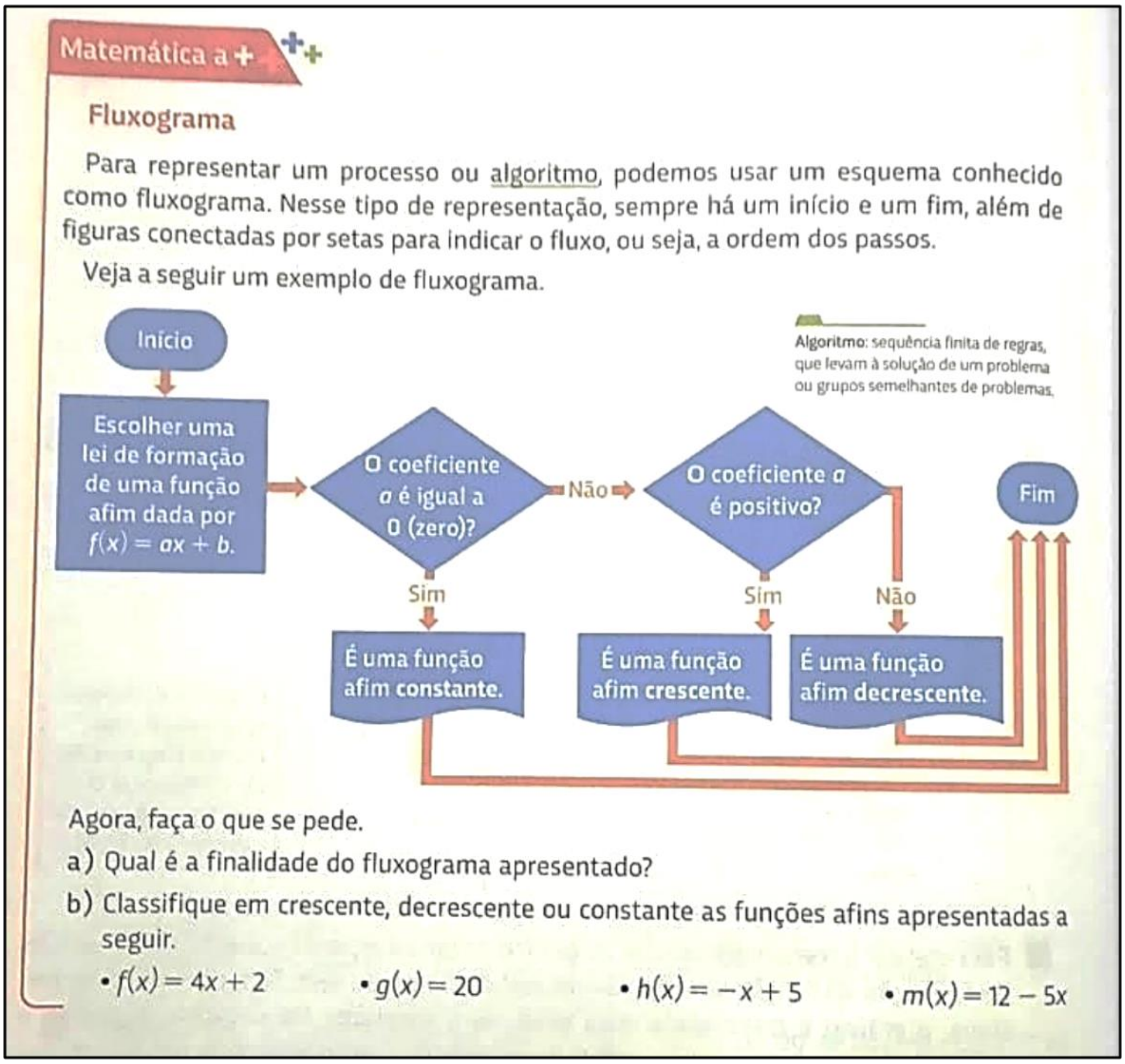


Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 62.

Logo após, os autores fazem um breve relato sobre a função identidade, função constante e translação vertical que pode ocorrer no gráfico da função afim.

Para recapitular tudo que foi visto até aqui, a obra traz um esquema conhecido como fluxograma, apresentado na Figura 43.

Figura 43 - Fluxograma.



Matemática a +

Fluxograma

Para representar um processo ou algoritmo, podemos usar um esquema conhecido como fluxograma. Nesse tipo de representação, sempre há um início e um fim, além de figuras conectadas por setas para indicar o fluxo, ou seja, a ordem dos passos.

Veja a seguir um exemplo de fluxograma.

Algoritmo: sequência finita de regras, que levam à solução de um problema ou grupos semelhantes de problemas.

Agora, faça o que se pede.

a) Qual é a finalidade do fluxograma apresentado?

b) Classifique em crescente, decrescente ou constante as funções afins apresentadas a seguir.

- $f(x) = 4x + 2$
- $g(x) = 20$
- $h(x) = -x + 5$
- $m(x) = 12 - 5x$

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 64.

Dando continuidade ao assunto estudado, os autores fazem uma breve explicação do zero da função. Explica que para encontrá-lo é necessário igualar a lei da função ao número zero. Assim *ax+b=0*, na abscissa zero, onde a reta não horizontal intersecta o eixo x.

Figura 44- Zero da Função afim

Zero da função afim

Vimos anteriormente que o zero de uma função f é todo valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$. No caso da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, para determinar seu zero basta determinar o valor x tal que $f(x) = ax + b = 0$, ou seja, é necessário resolver a equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, o zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico dessa função intersecta o eixo Ox.

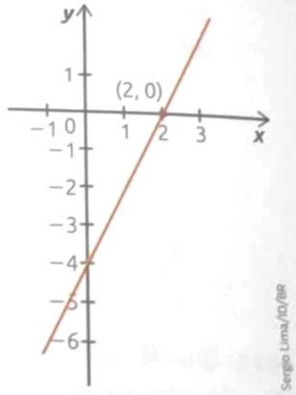
Veja como determinar, algébrica e geometricamente, o zero da função afim dada por $f(x) = 2x - 4$.

- Resolvendo a equação $2x - 4 = 0$, temos:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

Logo, o zero desta função afim é 2.

- O gráfico intersecta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(2, 0)$, como é possível observar ao lado.



Logo, o zero desta função é a abscissa do ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, 2.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 64.

Nota-se agora que o exercício resolvido que os autores propuseram já tem um grau de dificuldade maior, pois além de traçar o gráfico pela lei da função que foi dada, os autores inserem nesse exercício tudo que foi visto até o momento. Vejamos essa lista de exercícios na Figura 38.

Figura 45- Tarefa resolvida

Tarefa resolvida

R2. Seja a função g: $[0, 6] \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = \begin{cases} 4x - 2, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, \text{ se } 1 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, \text{ se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico da função g.

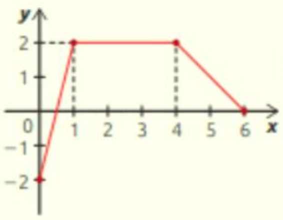
b) Determine os intervalos do domínio em que a função g é constante, crescente e decrescente.

c) Determine os zeros da função g.

Resolução

a)

x	$g(x)$	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
1	2	$(1, 2)$
4	2	$(4, 2)$
6	0	$(6, 0)$



b) A função g é:

- crescente para o intervalo $[0, 1]$ do domínio, pois é definida pela lei de formação $4x - 2$, em que a taxa de variação 4 é maior do que zero.
- decrescente para o intervalo do domínio $[4, 6]$, pois é definida pela lei de formação $-x + 6$, em que a taxa de variação -1 é menor do que zero.
- constante para o intervalo $[1, 4]$ do domínio, pois é definida pela lei de formação 2, em que a taxa de variação é igual a zero.

c) O zero da função g é todo valor de $x \in \mathbb{R}$, de modo que $g(x) = 0$. Pela lei de formação da função g, o zero da função pode estar apenas nos intervalos $[0, 1]$ e $[4, 6]$, pois no intervalo $[1, 4]$ $g(x) = 2$. Assim, resolvendo as equações $4x - 2 = 0$ e $-x + 6 = 0$, temos:

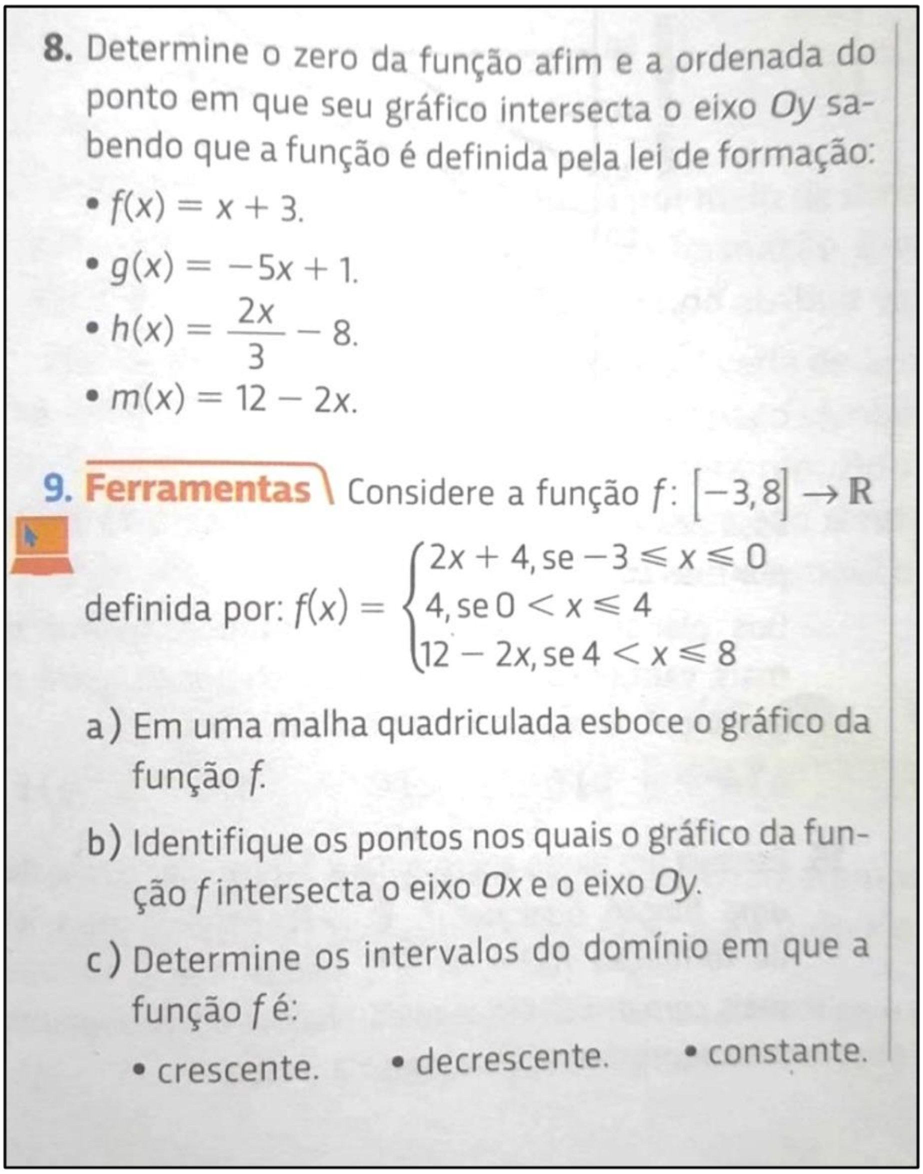
$$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$-x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

Logo, os zeros da função g são $\frac{1}{2}$ e 6.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 65.

Dentre os exercícios propostos estão os de manipulação, os contextualizados de situações do cotidiano, os desafiadores e questões que já caíram no ENEM. A seguir estão alguns exemplos.

Figura 46 - Atividades propostas



8. Determine o zero da função afim e a ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo Oy sabendo que a função é definida pela lei de formação:

- $f(x) = x + 3$.
- $g(x) = -5x + 1$.
- $h(x) = \frac{2x}{3} - 8$.
- $m(x) = 12 - 2x$.

9. Ferramentas Considere a função $f: [-3, 8] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{ se } -3 \leq x \leq 0 \\ 4, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ 12 - 2x, \text{ se } 4 < x \leq 8 \end{cases}$

a) Em uma malha quadriculada esboce o gráfico da função f.

b) Identifique os pontos nos quais o gráfico da função f intersecta o eixo Ox e o eixo Oy.

c) Determine os intervalos do domínio em que a função f é:

- crescente.
- decrescente.
- constante.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 65.

Os exercícios de manipulação auxiliam o aluno a desenvolver um maior contato e domínio sobre o conteúdo (LIMA, 1999), pois é fundamental que ele conheça os conceitos básicos do conteúdo para que ele venha progredir em sua aprendizagem. Como propuseram os autores, é possível por meios como, *software* de geometria dinâmica ou o *Scratch*, utilizados como ferramentas para aprofundar os conhecimentos matemáticos dos alunos.

Figura 47 - Atividades propostas.

10. Em certa cidade, a tarifa mensal de água nas residências é estabelecida de acordo com a faixa de consumo. Observe o quadro a seguir.

Faixa de consumo	Valor cobrado
De 0 m^3 a 10 m^3	R$ 32,00 por mês
O que passar de 10 m^3 até 40 m^3 acrescenta-se	R$ 3,80 por m^3 a mais
O que passar de 40 m^3 acrescenta-se	R$ 6,10 por m^3 a mais

a) Escreva a lei de formação da função $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que associa o valor cobrado $(v(x))$, em reais, ao consumo mensal de água (x), em metros cúbicos.

b) Esboce o gráfico da função *v*.

c) Determine o maior intervalo do domínio em que a função *v* é constante.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 65.

É fundamental que o professor e o material que esteja usando, apresente ao aluno como a matemática está presente no cotidiano do mesmo, pois de acordo com Lima (1999) deveria ser uma preocupação constante do professor encontrar aplicações significativas para a matéria permeando situações que o aluno possa ver de perto, como no exemplo da foto acima, mostrando como calcular o valor deuma tarifa de água de acordo o consumo de uma casa.

Abaixo, alguns exercícios propostos pelos autores.

Figura 48 - Atividades propostas.

12. Desafio Considere as funções afins $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(4) = g(4)$. Sabendo que f é crescente e g é decrescente, podemos afirmar que o coeficiente linear de f é menor do que o coeficiente linear de g? Justifique sua resposta.

13. Durante o tempo em que está empregado, todo trabalhador com registro em carteira contribui com o INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) com uma porcentagem de seu salário. O INSS utiliza essas contribuições para o pagamento de aposentadoria, entre outros benefícios.

Podemos escrever uma lei de formação para calcular o valor de contribuição mensal ao INSS y em reais, vigente a partir de 1º de março de 2020. Tomando x como o valor do salário do contribuinte em reais, temos:

$$y = \begin{cases} 0{,}075x, \text{ se } x \leq 1\,045 \\ 0{,}09x - 15{,}67, \text{ se } 1\,045 < x \leq 2\,089{,}60 \\ 0{,}12x - 78{,}36, \text{ se } 2\,089{,}60 < x \leq 3\,134{,}40 \\ 0{,}14x - 141{,}05, \text{ se } 3\,134{,}40 < x \leq 6\,101{,}06 \\ 713{,}10, \text{ se } x > 6\,101{,}06 \end{cases}$$

a) Para que $y = f(x)$ seja uma função, quais podem ser os conjuntos de domínio e de contradomínio de f?

b) Determine o valor da contribuição ao INSS de um trabalhador cujo salário é:

- R$ 1 760,89.
- R$ 998,13.
- R$ 3 340,56.
- R$ 6 133,03.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 66.

Os autores propõem questões de desafio intelectual, com um grau de dificuldade maior, mas, que não deve ser tão difícil para não inibir o aluno da busca à aprendizagem, além de questões com contextos econômicos e sociais para que trabalhar o senso crítico.

Figura 49- Proporcionalidade e Função Afim.

Proporcionalidade e função linear

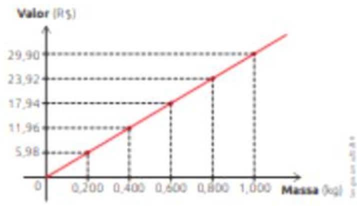
Vamos ampliar o estudo da função afim relacionando-a com a noção de proporcionalidade direta.

Em muitas cidades, existem restaurantes que vendem refeições cujo preço varia em função da massa de comida colocada no prato. Funciona da seguinte maneira: o cliente monta sua refeição escolhendo entre as diversas opções de alimentos; depois verifica a massa, em quilogramas, dessa porção de comida. Assim, o valor a ser pago, em reais, é proporcional à massa, em quilogramas.

Comer fora de casa pode ser um desafio para quem deseja manter uma alimentação saudável. Pensando nisso, muitos restaurantes oferecem, para escolha do cliente, opções saborosas que atendem às necessidades nutricionais diárias.

A foto da balança mostra que o preço (em reais) do quilograma da refeição custa R$ 29,90. Como a massa de alimento no prato é 0,400 kg, o valor a ser pago é R$ 11,96. Com essas informações, podemos construir um quadro com outros valores para a massa do alimento (m), a fim de obter os valores a serem pagos ($v(m)$) e depois representar essa situação por meio de um gráfico.

Massa (kg)	Valor a ser pago (R$)
0,200	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 5{,}98$
0,400	$29{,}90 \cdot 0{,}400 = 11{,}96$
0,600	$29{,}90 \cdot 0{,}600 = 17{,}94$
0,800	$29{,}90 \cdot 0{,}800 = 23{,}92$
⋮	⋮
m	$29{,}90 \cdot m = 29{,}9m$



A situação acima foi representada por meio de uma função v cujo domínio são os números reais não negativos m e cuja lei de formação é $v(m) = 29{,}9m$. Nesse caso, é necessário restringir o domínio, pois não faz sentido atribuir valores negativos para a massa.

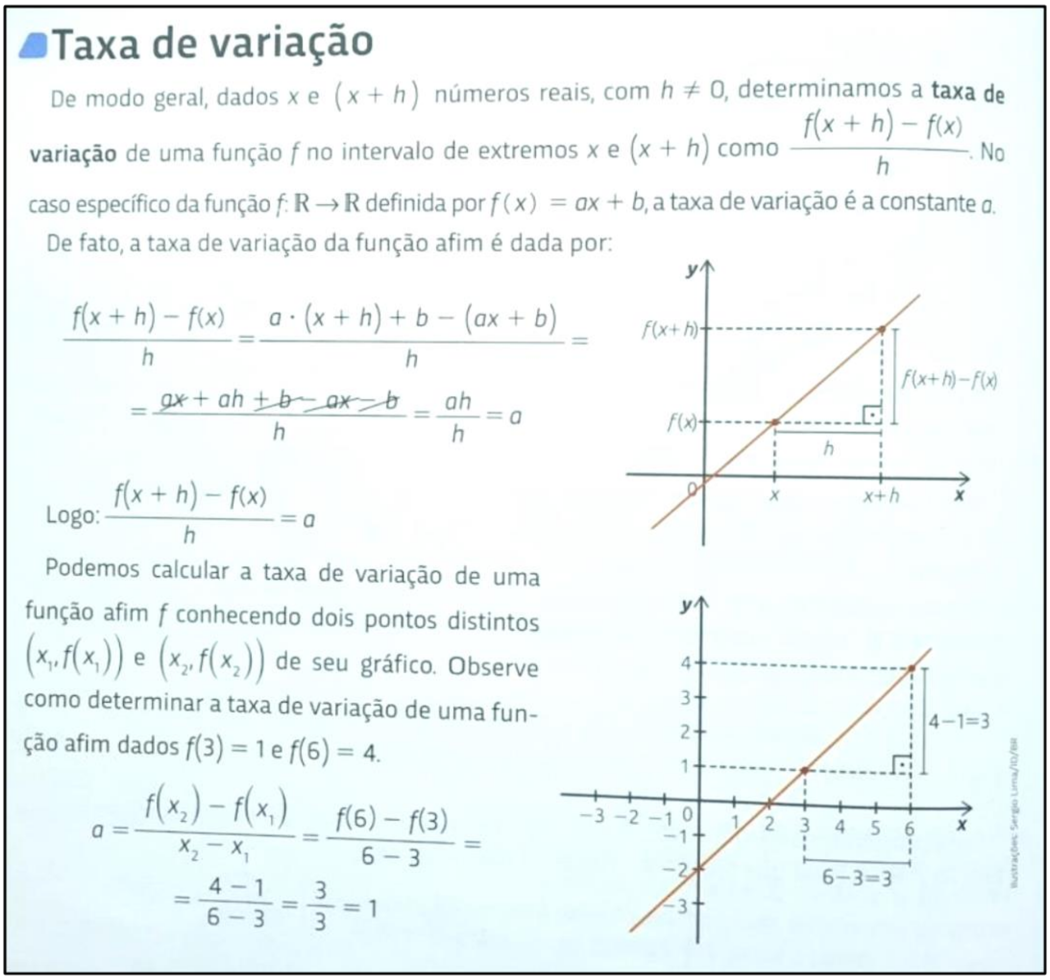
Note que a grandeza "valor a ser pago" varia de acordo com a "massa" da seguinte maneira: ao triplicarmos a massa, o valor a ser pago também triplicará; ou, ao reduzirmos a massa à metade, o valor a ser pago também será reduzido à metade; e assim por diante. Quando isso ocorre, dizemos que essas grandezas são **diretamente proporcionais** ou apenas **proporcionais**. A função linear é o modelo matemático para situações que envolvem proporcionalidade direta.

Seja $a \in \mathbb{R}$. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada **função linear**. A função linear é um caso particular de função afim.

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 67.

Como mostra a Figura 49, os autores trazem a função linear, dada por *f(x)= ax*, como uma particularidade da função afim, dada por *f(x)= ax + b*, com b≠0. Uma função só é linear se, e somente se, é uma proporcionalidade direta, ou seja, à medida que os valores do domínio crescem ou decrescem, a mesma medida ocorre com os valores da imagem. Quando isso ocorre, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Sendo assim, os autores apresentam duas possibilidades de resolver uma função linear, sejam eles, jogar o valor na fórmula e descobrir o resultado ou resolver por proporcionalidade (regra de três ou multiplicação cruzada).

Figura 50- Taxa de variação



Taxa de variação

De modo geral, dados x e $(x + h)$ números reais, com $h \neq 0$, determinamos a **taxa de variação** de uma função f no intervalo de extremos x e $(x + h)$ como $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. No caso específico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, a taxa de variação é a constante a.

De fato, a taxa de variação da função afim é dada por:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{a \cdot (x + h) + b - (ax + b)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{ax} + ah \cancel{+ b} \cancel{- ax} \cancel{- b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Logo: $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a$

Podemos calcular a taxa de variação de uma função afim f conhecendo dois pontos distintos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ de seu gráfico. Observe como determinar a taxa de variação de uma função afim dados $f(3) = 1$ e $f(6) = 4$.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} =$$

$$= \frac{4 - 1}{6 - 3} = \frac{3}{3} = 1$$

Fonte: Chavante; Prestes, 2020, p. 68.

Como os autores já haviam mencionado, uma reta é definida por pelo menos dois pontos (pares ordenados). Então fica mais fácil o aluno compreender a taxa de variação, que conhecemos como coeficiente *a* da função *f(x)= ax+b.* O coeficiente *a* recebe esse nome pois pretende-se analisar a inclinação da reta.

Logo em seguida vem o estudo do sinal de uma função, seguida de um exercício resolvido e uma lista de atividades de manipulação, contextualizadas, de argumentação e representação gráfica.

Os autores encerram este capítulo com o estudo de “sistemas de inequações" e uma lista de exercícios referente a este tema.

Nota-se como característica destes autores, após apresentar os subtópicos do tema, apresentar uma atividade com resolução passo a passo. Fazendo assim os autores mostram ao aluno o que ele pretende com os exercícios que vêm adiante. Logo em seguida apresentar uma lista de sete a nove exercícios, sendo que pelo menos um o autor indica a utilização das ferramentas como calculadora científica, *software* como *Scratch*, planilha eletrônica, entre outros, como mais um recurso pedagógico que o professor pode utilizar em sala de aula. Percebe-se que os autores utilizam muitos gráficos em seus subtópicos do tema para auxiliar o aluno a ter uma visão explícita do que se está estudando e como uma outra forma de reconhecer a função afim.

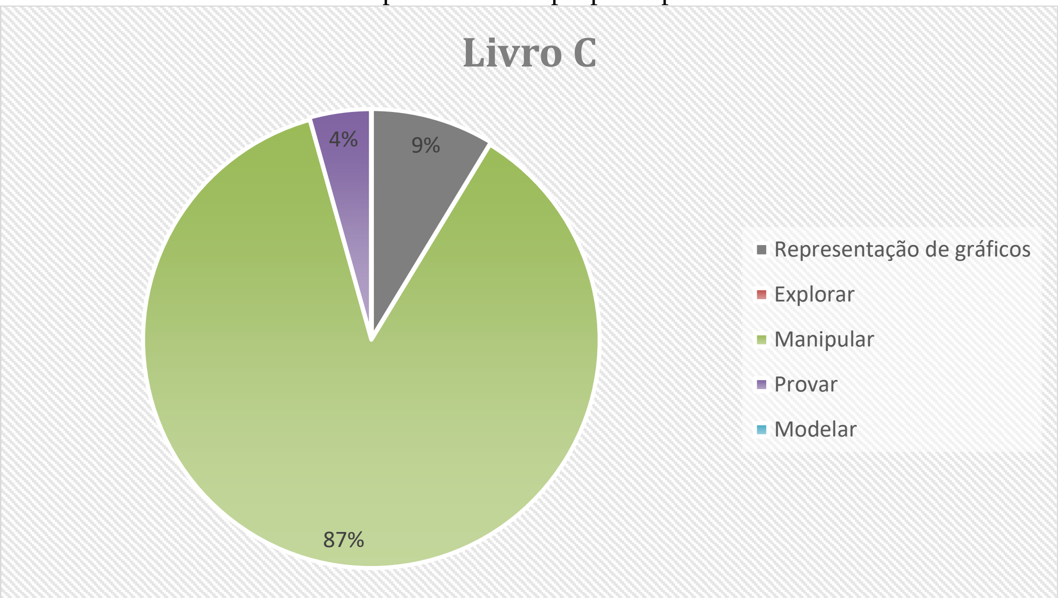
Nesse livro os autores não trazem nenhum momento o estudo da reta sob o olhar da Geometria Analítica.

Considerações

É notório que os autores oferecem uma explicação bem sucinta sobre o conteúdo de Função Afim. A demonstração relacionada sobre a reta é apenas ligação entre pontos pré-estabelecidos. Quanto aos exercícios, há poucos que estimulam e provocam o aluno a investigar, explorar, conjecturar. Os autores utilizam e oferecem definições que podem ser utilizadas como ponte para a resolução das questões oferecidas nas tarefas. Em nenhum momento os autores relacionam tal tema com o estudo da Geometria Analítica.

A seguir, apresenta-se o gráfico 3 para categorizar os itens ligados aos tipos de exercícios utilizados no capítulo analisado.

Gráfico 3 - Tipos de tarefas proposto pelo livro C



Fonte: Elaboração própria.

Para este tema foram propostos 24 exercícios que se distribuíram de acordo com o gráfico. A quantidade de tarefas para manipular, aqueles em que se aplicam as definições, são oferecidos em grande escala, correspondendo a 87%.

Há apenas um exercício para se provar e acontece de forma implícita através da seguinte expressão “mostre passo a passo”. Outro ponto nítido é a não oferta dos exercícios que não desenvolvem a competência relacionada a modelar.Desta forma, fica claro que os autores se preocuparam mais com a repetição do conceitoaplicado nas tarefas propostas.

A seguir, estão os dois quadros (Quadro 9 e Quadro 10) referentes às notas de critério que foram atribuídas ao livro C, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.3.1 Quadros de Análise

Quadro 9 – Critérios para análise dos textos iniciais do livro C

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	3 1
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	1
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	0
Total		14	6 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 10 – Análise das atividades do livro C

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	2
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	0
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	0
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	0
Total		7	3(baixa)

Fonte: Elaboração própria.

5.4 Análise do Livro D

Apresentaremos a seguir o livro D da coleção Prisma dos autores Bonjorno, Giovanni Jr e Paula Câmara, que vai abordar o estudo de Função Afim no capítulo dois. Os mesmos iniciam o tema trazendo a ideia de função relacionada a vida real. Com isso, os autores propõem estudar situações onde é possível verificar as relações entre grandezas e entre conjuntos, em especial, aquelas que podem ser associadas ao conceito de função e função afim. Os autores trazem a seguinte situação: como é calculado o valor de uma corrida de táxi e orienta ao professor para que os alunos se reúnam para responder alguns questionamentos, como mostra a Figura 44.

Figura 51- Abertura do capítulo de Função Afim.

CAPÍTULO

2

Função afim

A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 1, 2, 4 e 7
- Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
  - Competência específica 1: EM13MAT101 e EM13MAT103
  - Competência específica 3: EM13MAT302
  - Competência específica 4: EM13MAT401
  - Competência específica 5: EM13MAT501 e EM13MAT510
- Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Você sabe como é calculado o valor de uma corrida de táxi? Tudo depende de onde você está e para onde quer ir.

O valor de uma corrida de táxi está relacionado a uma tarifa fixa, conhecida como bandeirada, e a outra que é cobrada por quilômetro rodado e por outros fatores que possam influenciar nesse valor, como o tempo do veículo parado no trânsito.

A determinação dessas tarifas é incumbência das prefeituras; por isso, estados e até cidades dentro do mesmo estado podem ter valores diferentes. Por exemplo, em 2020, no município de São Paulo (SP), o preço da bandeirada era de R$ 4,50, e a taxa por quilômetro rodado era de R$ 2,75. Além disso, havia a tarifa de R$ 33,00 por hora parada. Já em Porto Alegre (RS), esses valores eram R$ 5,18 (bandeirada), R$ 2,59 (por quilômetro rodado) e R$ 18,31 (por hora parada).

Para realizar esses cálculos, os táxis possuem um aparelho chamado de **taxímetro**, similar a uma calculadora, que mostra o valor a ser pago à medida que o veículo se desloca. Atualmente, algumas empresas que oferecem serviço de táxi operam por meio de aplicativos, e quando um usuário solicita uma corrida, o preço aproximado aparece na tela do celular, incluindo o tempo estimado da viagem.

O estudo de **funções** em Matemática pode nos auxiliar a modelar situações, fazer estimativas e compreender como esses valores são obtidos.

- Ao iniciar a corrida, o motorista do táxi aciona o taxímetro, indicando se a corrida será conforme bandeira 1 ou bandeira 2.

58

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Vocês já utilizaram o serviço de táxi? Se sim, lembram-se de ter reparado no funcionamento do taxímetro?
2. Pesquisem o valor das tarifas de táxi no município onde vocês moram e façam uma estimativa do valor de uma corrida de 8 km.
3. Vocês sabem o que é uma função? E função afim?

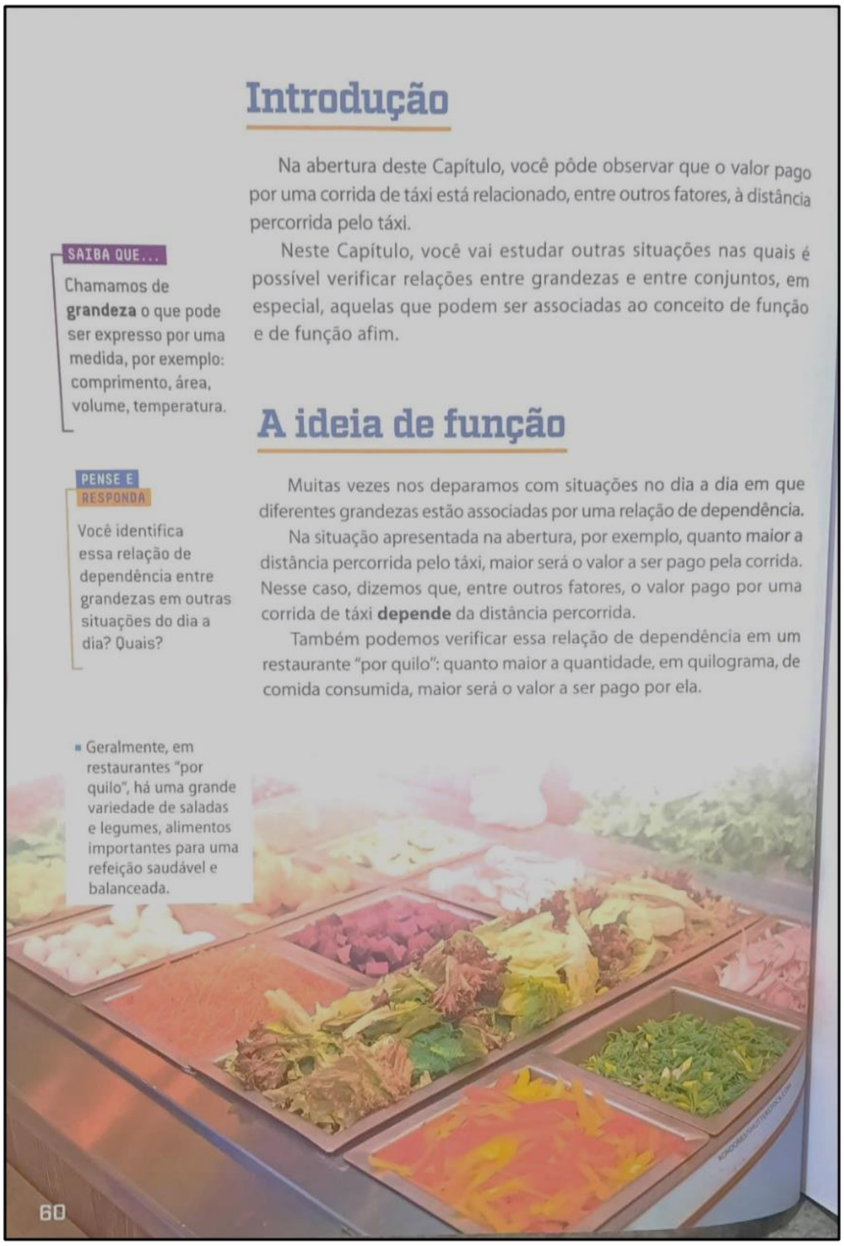
- Pessoa utilizando serviço de táxi no aeroporto Santos Dumont, no Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2020.

Fonte: Bonjorno, Jr, Sousa, 2020, p. 58,59

Diante da subcategoria 1.1 (situação-problema), o livro atendeu todos os critérios estabelecidos.

Vejamos agora a proposta de introdução do conteúdo de Função Afim, dos autores para esta coleção na Figura 52.

Figura 52 - Introdução ao estudo de Função


Introdução

Na abertura deste Capítulo, você pôde observar que o valor pago por uma corrida de táxi está relacionado, entre outros fatores, à distância percorrida pelo táxi.

Neste Capítulo, você vai estudar outras situações nas quais é possível verificar relações entre grandezas e entre conjuntos, em especial, aquelas que podem ser associadas ao conceito de função e de função afim.

SAIBA QUE...

Chamamos de **grandeza** o que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume, temperatura.

A ideia de função

Muitas vezes nos deparamos com situações no dia a dia em que diferentes grandezas estão associadas por uma relação de dependência.

Na situação apresentada na abertura, por exemplo, quanto maior a distância percorrida pelo táxi, maior será o valor a ser pago pela corrida. Nesse caso, dizemos que, entre outros fatores, o valor pago por uma corrida de táxi **depende** da distância percorrida.

Também podemos verificar essa relação de dependência em um restaurante "por quilo": quanto maior a quantidade, em quilograma, de comida consumida, maior será o valor a ser pago por ela.

PENSE E RESPONDA

Você identifica essa relação de dependência entre grandezas em outras situações do dia a dia? Quais?

- Geralmente, em restaurantes "por quilo", há uma grande variedade de saladas e legumes, alimentos importantes para uma refeição saudável e balanceada.

60

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr., Sousa, 2020, p. 60.

Com essa introdução, os autores trazem a ideia de função relacionada as variáveis dependente e independente, mosstrando o diagrama de Venn (diagrama de flexas), domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função, etc. Após todo estudo de função, no mesmo capítulo os autores introduzem o estudo de função afim retomando a situação-problema que foi proposta na abertura do capítulo.

O estudo é iniciado com um dos exemplos mais clássicos da Função Afim. Como calcular o preço de uma corrida de táxi (Figura 53) assim retomam ao exemplo que foi utilizado na abertura do Capítulo 2.

Figura 53- Introdução ao estudo de Função Afim.

Função afim

Na abertura deste Capítulo, vimos que em São Paulo (SP) o valor da bandeirada vigente em fevereiro de 2020 era de R$ 4,50 e o valor, em bandeira 1, de cada quilômetro rodado era de R$ 2,75.

▪ Na imagem, verificamos o momento em que o taxista dá início à corrida. Veja que aparece o valor da bandeirada e a indicação de tarifa (bandeira) 1.

Vimos também que o preço *p* a ser cobrado por uma corrida de táxi depende, entre outros fatores, da distância *x* percorrida pelo táxi. Vamos estudar agora como podemos utilizar o conceito de função para analisar a relação entre esses valores.

Suponha uma situação em que o táxi não cobre adicionalmente a hora parada. Nesse caso, o preço *p* a ser cobrado é composto de uma parte fixa, que é a bandeirada, e uma parte variável, correspondente à distância *x* percorrida.

Considerando R$ 4,50 o valor da bandeirada e R$ 2,75 o valor de cada quilômetro rodado em bandeira 1, podemos escrever a seguinte lei de formação para representar o preço *p* em função da distância *x*:

$$p(x) = 4{,}50 + 2{,}75x \text{ ou } y = 2{,}75x + 4{,}50$$

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr., Sousa, 2020, p. 82.

Note que estes autores ao introduzir o conteúdo de Função Afim acabam por esclarecer o que será estudado. A apresentação da Função Afim e sua conceituação se dá de forma mais rápida, pois os alunos já estudaram no início do capítulo dois “a definição de função”, “estudo do domínio, contradomínio e conjunto imagem”, “identificação e construção do gráfico de uma função” e atividades para praticar os conceitos estudado. Os autores apresentam alguns exemplos com valores aplicados direto na lei de formação $f(x)= ax+b$.

Eles apresentam também a Função Identidade, Função Linear r e proporcionalidade e Função Constante e dão sequência com uma lista com atividades resolvidas. Em seguida, há uma lista com atividades propostas, variadas entre exercícios de manipulação, argumentação e contextualizados.

Figura 54 - Definição de Função Afim.

Função polinomial do 1º grau

Quando o coeficiente ***a*** da função afim é **diferente de zero**, a função recebe o nome de **função polinomial do 1º grau**, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1º grau.

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 1º grau**.

Observe alguns exemplos de leis de função polinomial do 1º grau:

a) $f(x) = 2x - 1$, em que $a = 2$ e $b = -1$;

b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$, em que $a = 0{,}5$ e $b = \sqrt{2}$;

c) $y = \frac{2}{3} + 2x$, em que $a = 2$ e $b = \frac{2}{3}$;

d) $f(x) = 4x$, em que $a = 4$ e $b = 0$.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr., Sousa, 2020, p. 84.

Observe que os autores desse livro mencionam o x como variável independente e o y como variável dependente da função afim $y=ax+b$. Posteriormente tratam do a e b como coeficientes (números reais).

Dando continuidade ao assunto, eles falam brevemente sobre a Função Linear (Figura 48) e proporcionalidade com a lei de formação $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a>0$. Mencionam também que x e y são as variáveis que representam grandezas diretamente proporcionais e que a constante de proporcionalidade K é o coeficiente a da função (Figura 55).

.

Figura 55- Função Linear e proporcionalidade.

Função linear e proporcionalidade

Retomando a situação que relaciona o consumo de combustível *y* (em litro) de um modelo de carro blindado e a distância *x* que ele percorre (em quilômetro) por meio de uma função linear dada por $y = 0{,}25x$, podemos construir uma tabela para analisar a relação entre alguns valores. Observe:

x (em quilômetro)	*y* (em litro)
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
⋮	⋮
10	2,50

Perceba que, ao dobrarmos o valor de *x*, o valor correspondente de *y* também dobra. Se multiplicarmos *x* por 3, o valor correspondente de *y* também será multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

Nesse caso, dizemos que as variáveis *x* e *y* representam **grandezas diretamente proporcionais** e a constante de proporcionalidade *k* pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p. 85.

Aqui, na Figura 49, estão alguns exemplos de exercícios resolvidos propostos. Atendendo então, a subcategoria 1.2 (tarefas prpostas) do quadro dos textos iniciais.

Figura 56 - Atividades resolvidas.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Vinícius trabalha como *DJ* e cobra um valor fixo de R$ 250,00, além de um valor adicional de R$ 110,00 por hora, para animar uma festa.

▪ O serviço de DJ é bastante requisitado em festas de debutantes e de casamentos.

a) Indicando por y o valor total cobrado por Vinícius, em reais, e por x, a quantidade de horas trabalhadas, escreva a lei da função que relaciona y e x.

b) Essa lei de formação é de uma função afim? Justifique sua resposta.

c) Qual é o valor, em reais, que Vinícius receberá se trabalhar durante 2 horas em uma festa?

d) Sabendo que Vinícius recebeu R$ 635,00 pelo trabalho em determinada festa, por quantas horas ele prestou seu serviço?

Resolução

a) O valor y recebido por Vinícius depende da quantidade x de horas que ele trabalhou animando a festa. Assim, a lei que relaciona essas duas variáveis pode ser escrita como:
$y = 250 + 110x$ ou $y = 110x + 250$

b) Sim, essa lei de formação é de uma função afim, pois é do tipo $y = ax + b$, com a e b reais. Neste caso, $a = 110$ e $b = 250$.

c) Se o tempo de animação da festa for de 2 horas, então substituímos x por 2 na lei da função e determinamos o valor de y correspondente:
$y = 250 + 110 \cdot 2 \Rightarrow y = 250 + 220 \Rightarrow y = 470$
Portanto, Vinícius receberá R$ 470,00 por 2 horas de trabalho na festa.

d) Sabendo que ele recebeu R$ 635,00, substituímos y por 635 na lei da função e determinamos o valor de x:
$635 = 250 + 110x \Rightarrow 110x = 385 \Rightarrow x = 3,5$
Portanto, ele prestou serviço nessa festa por 3,5 h ou 3h30min.

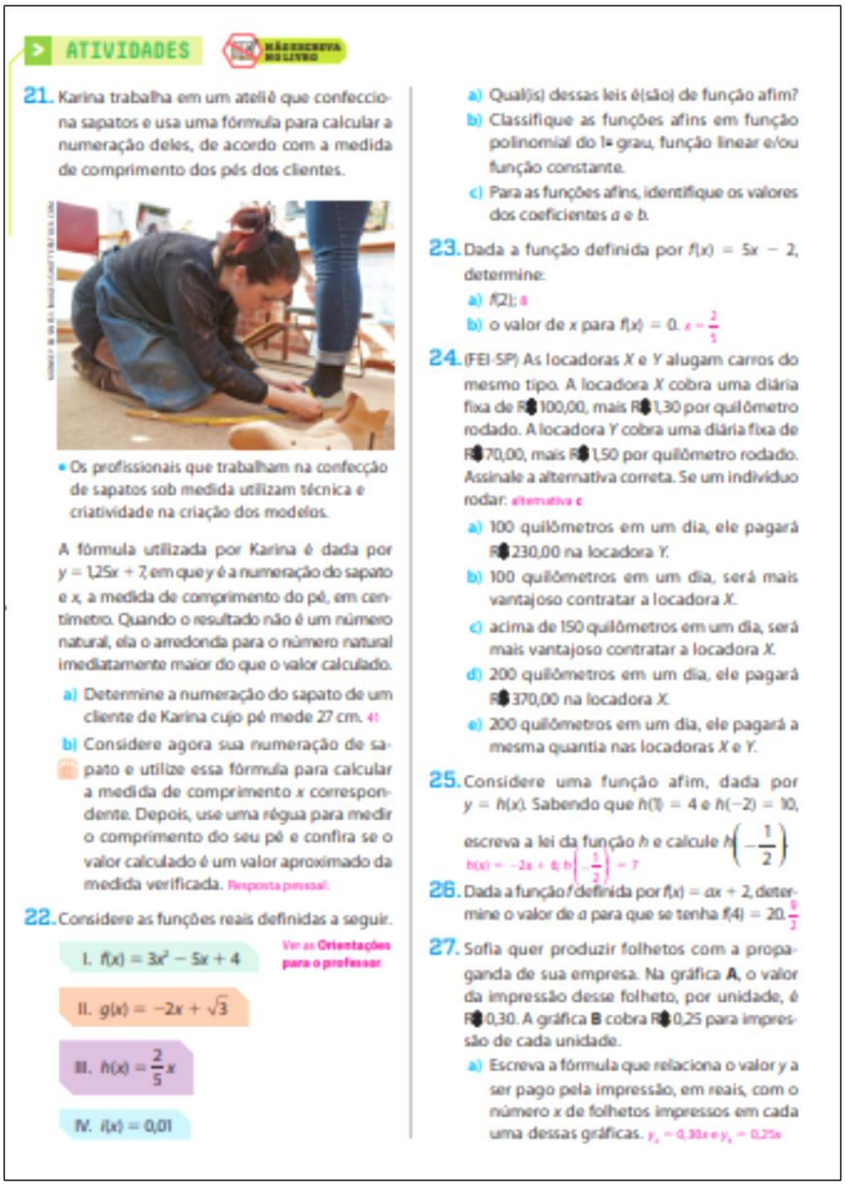
PENSE E RESPONDA

Observe a afirmação a seguir.
"O valor que Vinícius recebe é diretamente proporcional ao número de horas que trabalhou".
Reúna-se a um colega, e discutam-na. Ela é verdadeira? Justifiquem.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p. 86.

A figura a seguir, mostra que o objetivo deles com as atividades resolvidas é mostrar ao aluno o que se pretende com os exercícios seguintes, dando então um auxílio para que eles possam ter uma ideia de como responder as questões seguintes..

Figura 57 - Exercícios propostos



ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

21. Karina trabalha em um ateliê que confecciona sapatos e usa uma fórmula para calcular a numeração deles, de acordo com a medida de comprimento dos pés dos clientes.

- Os profissionais que trabalham na confecção de sapatos sob medida utilizam técnica e criatividade na criação dos modelos.

A fórmula utilizada por Karina é dada por $y = 1{,}25x + 7$, em que y é a numeração do sapato e x, a medida de comprimento do pé, em centímetro. Quando o resultado não é um número natural, ela o arredonda para o número natural imediatamente maior do que o valor calculado.

a) Determine a numeração do sapato de um cliente de Karina cujo pé mede 27 cm. 41

b) Considere agora sua numeração de sapato e utilize essa fórmula para calcular a medida de comprimento x correspondente. Depois, use uma régua para medir o comprimento do seu pé e confira se o valor calculado é um valor aproximado da medida verificada. Resposta pessoal.

22. Considere as funções reais definidas a seguir. Ver as Orientações para o professor.

I. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

II. $g(x) = -2x + \sqrt{3}$

III. $h(x) = \frac{2}{5}x$

IV. $i(x) = 0{,}01$

a) Qual(is) dessas leis é(são) de função afim?

b) Classifique as funções afins em função polinomial do 1º grau, função linear e/ou função constante.

c) Para as funções afins, identifique os valores dos coeficientes a e b.

23. Dada a função definida por $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(2)$; 8

b) o valor de x para $f(x) = 0$. $x = \frac{2}{5}$

24. (FEI-SP) As locadoras X e Y alugam carros do mesmo tipo. A locadora X cobra uma diária fixa de R$ 100,00, mais R$ 1,30 por quilômetro rodado. A locadora Y cobra uma diária fixa de R$ 70,00, mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Assinale a alternativa correta. Se um indivíduo rodar: alternativa c

a) 100 quilômetros em um dia, ele pagará R$ 230,00 na locadora Y.

b) 100 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

c) acima de 150 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

d) 200 quilômetros em um dia, ele pagará R$ 370,00 na locadora X.

e) 200 quilômetros em um dia, ele pagará a mesma quantia nas locadoras X e Y.

25. Considere uma função afim, dada por $y = h(x)$. Sabendo que $h(1) = 4$ e $h(-2) = 10$, escreva a lei da função h e calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$. $h(x) = -2x + 6$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$

26. Dada a função f definida por $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 20$. $\frac{9}{2}$

27. Sofia quer produzir folhetos com a propaganda de sua empresa. Na gráfica **A**, o valor da impressão desse folheto, por unidade, é R$ 0,30. A gráfica **B** cobra R$ 0,25 para impressão de cada unidade.

a) Escreva a fórmula que relaciona o valor y a ser pago pela impressão, em reais, com o número x de folhetos impressos em cada uma dessas gráficas. $y_A = 0{,}30x$ e $y_B = 0{,}25x$

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p. 88.

Após uma longa lista com treze exercícios de manipulação, os autores apresentam o gráfico da Função Afim, que é representado por uma reta. Chega-se a essa conclusão levando em consideração a localização no sistema cartesiano de dois pontos (pares ordenados) distintos. Para traçar o gráfico, os autores indicam a construção de tabelas, atribuindo valores para a variável independente "*x*" encontrando, assim, valores para variável dependente "*y*".

Figura 58 - Gráfico da Função Afim.

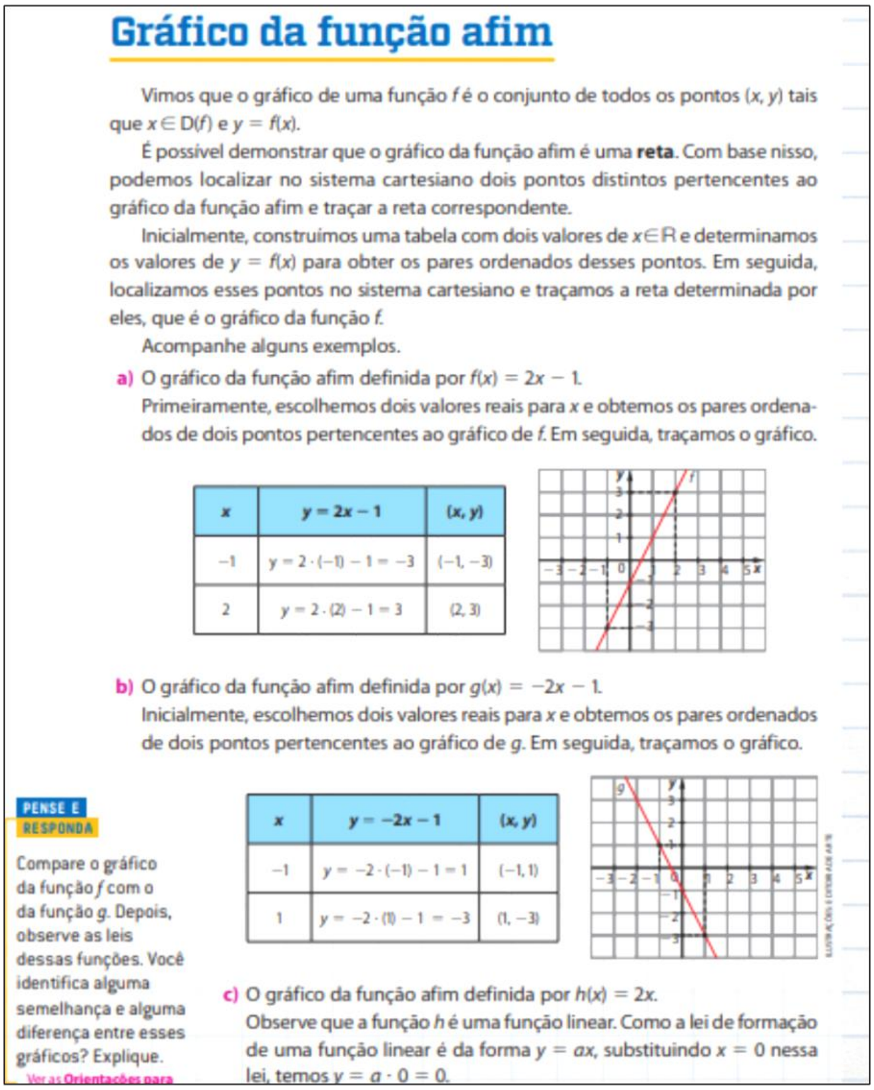


Gráfico da função afim

Vimos que o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

É possível demonstrar que o gráfico da função afim é uma **reta**. Com base nisso, podemos localizar no sistema cartesiano dois pontos distintos pertencentes ao gráfico da função afim e traçar a reta correspondente.

Inicialmente, construímos uma tabela com dois valores de $x \in \mathbb{R}$ e determinamos os valores de $y = f(x)$ para obter os pares ordenados desses pontos. Em seguida, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos a reta determinada por eles, que é o gráfico da função f.

Acompanhe alguns exemplos.

a) O gráfico da função afim definida por $f(x) = 2x - 1$.

Primeiramente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de f. Em seguida, traçamos o gráfico.

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
2	$y = 2 \cdot (2) - 1 = 3$	$(2, 3)$

b) O gráfico da função afim definida por $g(x) = -2x - 1$.

Inicialmente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de g. Em seguida, traçamos o gráfico.

x	$y = -2x - 1$	(x, y)
-1	$y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$	$(-1, 1)$
1	$y = -2 \cdot (1) - 1 = -3$	$(1, -3)$

PENSE E RESPONDA

Compare o gráfico da função f com o da função g. Depois, observe as leis dessas funções. Você identifica alguma semelhança e alguma diferença entre esses gráficos? Explique.

Ver as Orientações para

c) O gráfico da função afim definida por $h(x) = 2x$.

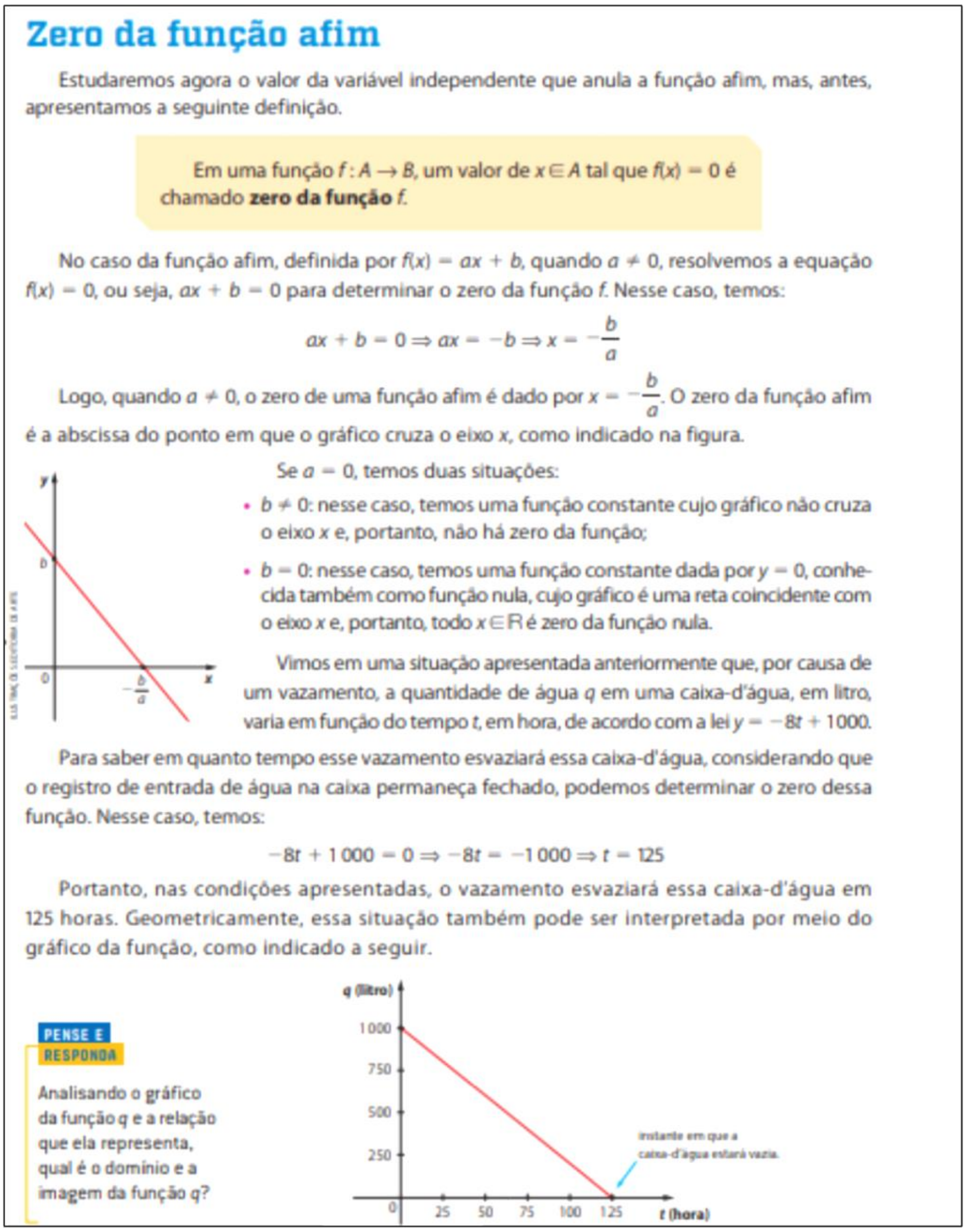
Observe que a função h é uma função linear. Como a lei de formação de uma função linear é da forma $y = ax$, substituindo $x = 0$ nessa lei, temos $y = a \cdot 0 = 0$.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr., Sousa, 2020, p. 90.

Repare que neste momento, eles apenas mostram e citam que se deve encontrar valores para formar dois pontos distintos, por meio de uma tabela, que ligados depois determinam uma reta. Os autores não explicitam a diferença entre os gráficos, mas indicam bem no canto esquerdo da página um breve questionamento e uma dinâmica em sala de aula para a descoberta do mesmo.

Para o estudo do “Zero da Função” (Figura 59), o valor da variável independente que anula a função afim, os autores indicam igualar a lei de formação $ax+b$ ao número zero, ou seja, $f(x) = 0$. E acaba por utilizar um dos exemplos “da caixa-d’água” (utilizado como conceito de função) para determinar os valores a partir da manipulação algébrica e representação gráfica.

Figura 59- Zero da função afim.



Zero da função afim

Estudaremos agora o valor da variável independente que anula a função afim, mas, antes, apresentamos a seguinte definição.

Em uma função $f: A \to B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função** *f*.

No caso da função afim, definida por $f(x) = ax + b$, quando $a \neq 0$, resolvemos a equação $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$ para determinar o zero da função *f*. Nesse caso, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, quando $a \neq 0$, o zero de uma função afim é dado por $x = -\frac{b}{a}$. O zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico cruza o eixo *x*, como indicado na figura.

Se $a = 0$, temos duas situações:

- $b \neq 0$: nesse caso, temos uma função constante cujo gráfico não cruza o eixo *x* e, portanto, não há zero da função;
- $b = 0$: nesse caso, temos uma função constante dada por $y = 0$, conhecida também como função nula, cujo gráfico é uma reta coincidente com o eixo *x* e, portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ é zero da função nula.

Vimos em uma situação apresentada anteriormente que, por causa de um vazamento, a quantidade de água *q* em uma caixa-d'água, em litro, varia em função do tempo *t*, em hora, de acordo com a lei $y = -8t + 1000$.

Para saber em quanto tempo esse vazamento esvaziará essa caixa-d'água, considerando que o registro de entrada de água na caixa permaneça fechado, podemos determinar o zero dessa função. Nesse caso, temos:

$$-8t + 1\,000 = 0 \Rightarrow -8t = -1\,000 \Rightarrow t = 125$$

Portanto, nas condições apresentadas, o vazamento esvaziará essa caixa-d'água em 125 horas. Geometricamente, essa situação também pode ser interpretada por meio do gráfico da função, como indicado a seguir.

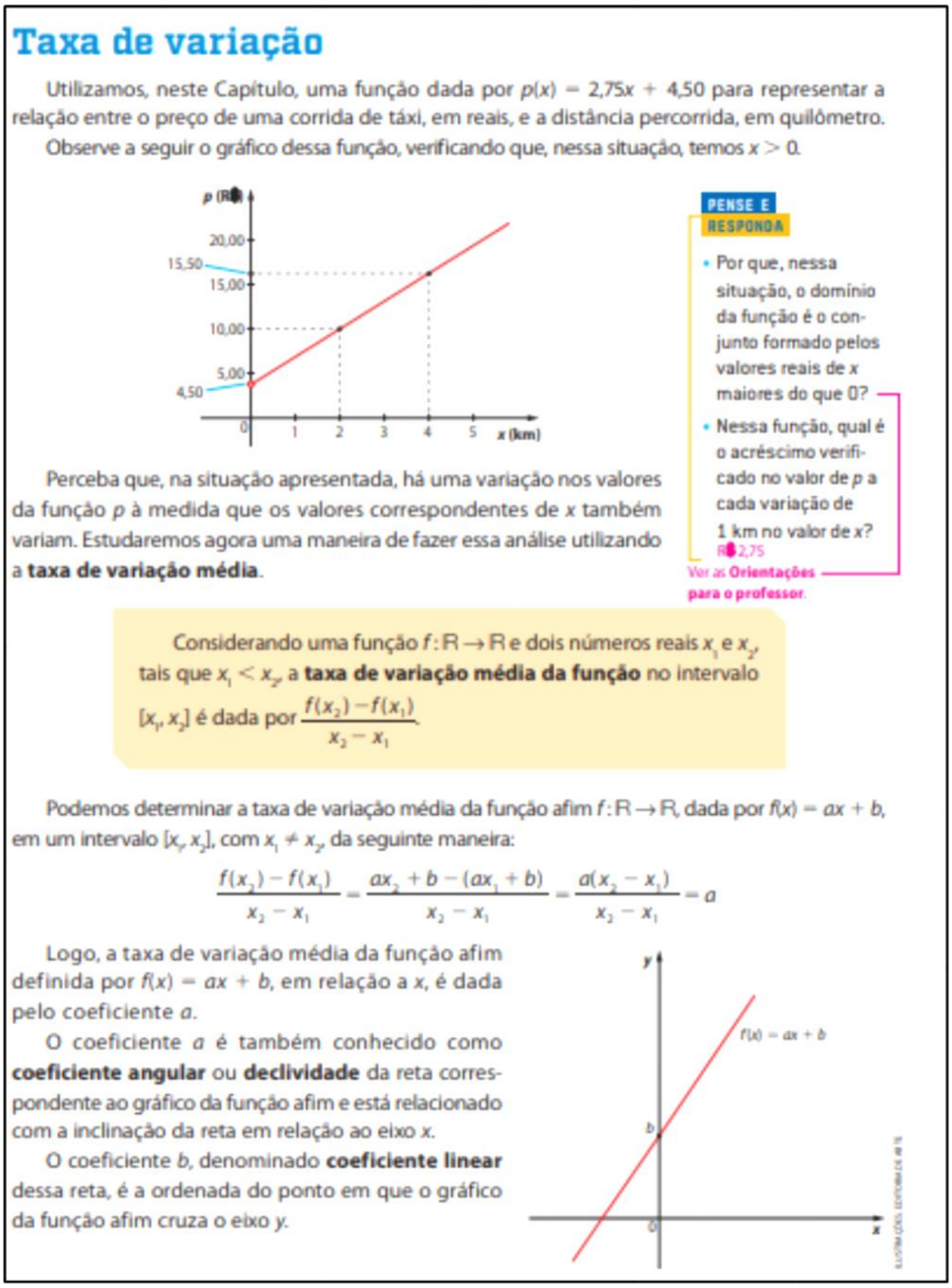
PENSE E RESPONDA

Analisando o gráfico da função *q* e a relação que ela representa, qual é o domínio e a imagem da função *q*?

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p. 92.

Para explicar a taxa de variação (Figura 60) , os autores retomam o exemplo do preço de uma corrida de táxi, visto no início do capítulo. Traçando seu gráfico, é explicado que há uma variação nos valores da função dentro de um intervalo. A medida que x varia, os valores de y também variam, mostrando também que o coeficiente "*a*" da função *f(x)* = *ax*+*b* é conhecido como coeficiente angular da reta, relacionado à inclinação da reta, e o coeficiente linear "*b*" é ordenada do ponto que intercepta o eixo y.

Figura 60 - Taxa de variação média da Função Afim



Taxa de variação

Utilizamos, neste Capítulo, uma função dada por $p(x) = 2{,}75x + 4{,}50$ para representar a relação entre o preço de uma corrida de táxi, em reais, e a distância percorrida, em quilômetro.

Observe a seguir o gráfico dessa função, verificando que, nessa situação, temos $x > 0$.

PENSE E RESPONDA

- Por que, nessa situação, o domínio da função é o conjunto formado pelos valores reais de x maiores do que 0?
- Nessa função, qual é o acréscimo verificado no valor de p a cada variação de 1 km no valor de x? R$ 2,75

Ver as **Orientações para o professor**.

Perceba que, na situação apresentada, há uma variação nos valores da função p à medida que os valores correspondentes de x também variam. Estudaremos agora uma maneira de fazer essa análise utilizando a **taxa de variação média**.

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dois números reais x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$, a **taxa de variação média da função** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Podemos determinar a taxa de variação média da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, em um intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, da seguinte maneira:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, a taxa de variação média da função afim definida por $f(x) = ax + b$, em relação a x, é dada pelo coeficiente a.

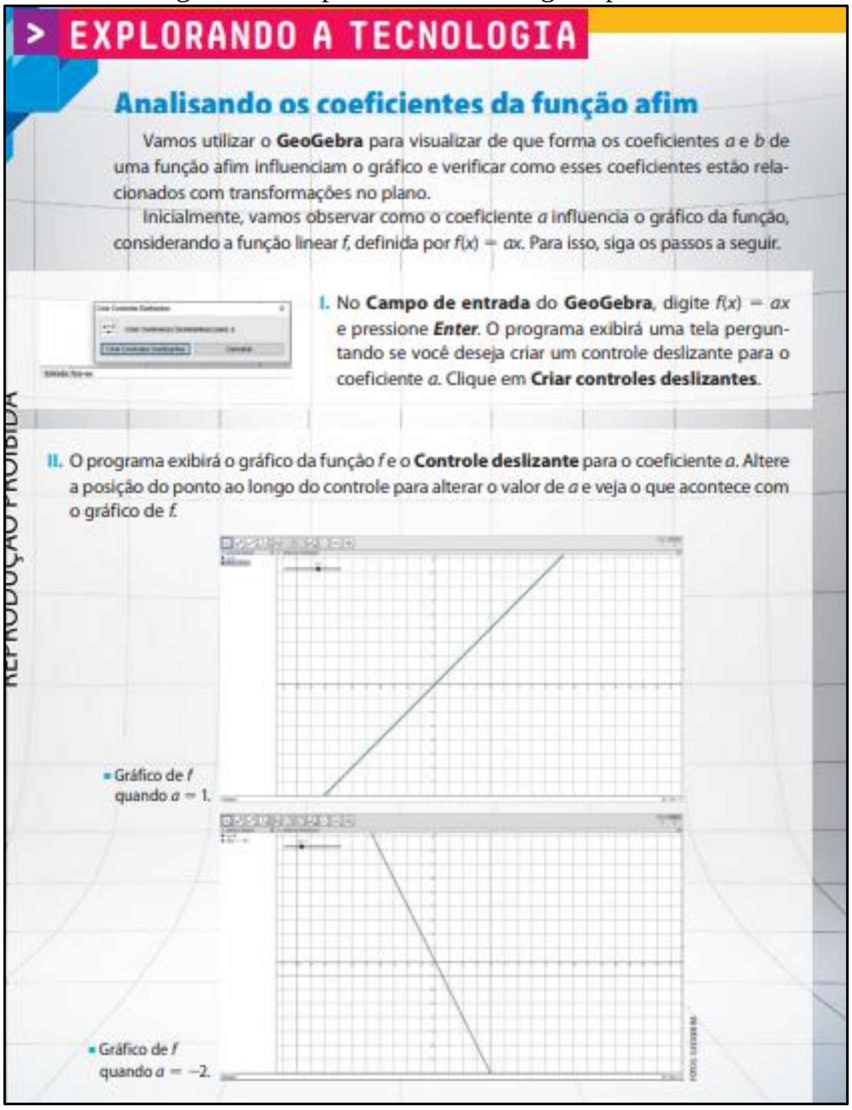
O coeficiente a é também conhecido como **coeficiente angular** ou **declividade** da reta correspondente ao gráfico da função afim e está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x.

O coeficiente b, denominado **coeficiente linear** dessa reta, é a ordenada do ponto em que o gráfico da função afim cruza o eixo y.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p.93.

Após algumas atividades de manipulação e representação gráfica, os autores trazem um subtópico "Explorando a Tecnologia" onde indicam e auxiliam o aluno a utilizar o *software* GeoGebra para que o mesmo possa visualizar de que forma os coeficientes *a* e *b* se comportam no gráfico e como estão relacionados com as transformações no plano, como mostram as Figuras 61 e 62, atendendo a categoria 7 (procedimentos) e tendo nota máxima de critério.

Figura 61 - Explorando a tecnologia – parte 01



> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Analisando os coeficientes da função afim

Vamos utilizar o **GeoGebra** para visualizar de que forma os coeficientes *a* e *b* de uma função afim influenciam o gráfico e verificar como esses coeficientes estão relacionados com transformações no plano.

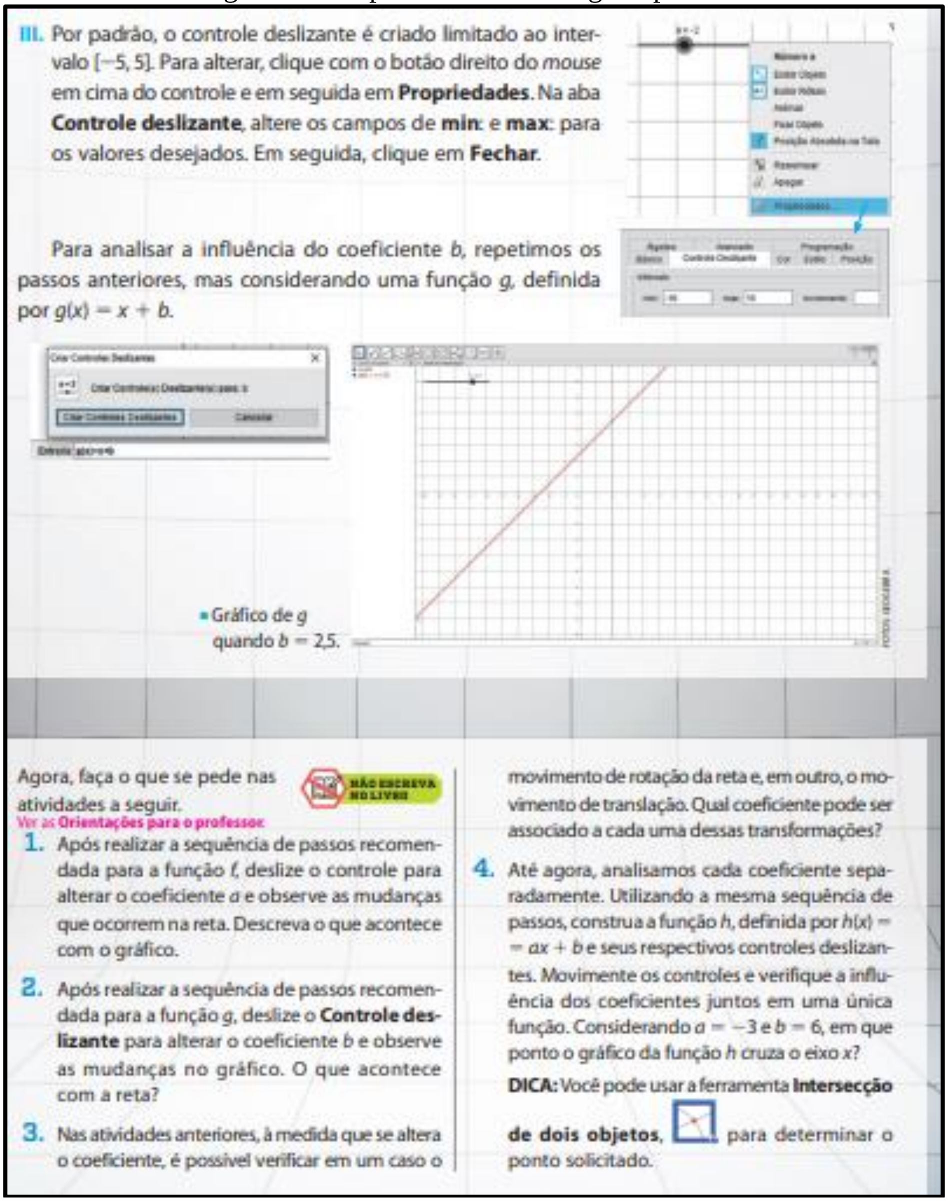
Inicialmente, vamos observar como o coeficiente *a* influencia o gráfico da função, considerando a função linear *f*, definida por $f(x) = ax$. Para isso, siga os passos a seguir.

I. No **Campo de entrada** do **GeoGebra**, digite $f(x) = ax$ e pressione ***Enter***. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente *a*. Clique em **Criar controles deslizantes**.

II. O programa exibirá o gráfico da função *f* e o **Controle deslizante** para o coeficiente *a*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e veja o que acontece com o gráfico de *f*.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr, Sousa, 2020, p. 98.

Figura 62 - Explorando a tecnologia – parte 01



III. Por padrão, o controle deslizante é criado limitado ao intervalo [−5, 5]. Para alterar, clique com o botão direito do *mouse* em cima do controle e em seguida em **Propriedades**. Na aba **Controle deslizante**, altere os campos de **min:** e **max:** para os valores desejados. Em seguida, clique em **Fechar**.

Para analisar a influência do coeficiente b, repetimos os passos anteriores, mas considerando uma função g, definida por $g(x) = x + b$.

Gráfico de g quando $b = 2,5$.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as Orientações para o professor.

1. Após realizar a sequência de passos recomendada para a função f, deslize o controle para alterar o coeficiente a e observe as mudanças que ocorrem na reta. Descreva o que acontece com o gráfico.
2. Após realizar a sequência de passos recomendada para a função g, deslize o **Controle deslizante** para alterar o coeficiente b e observe as mudanças no gráfico. O que acontece com a reta?
3. Nas atividades anteriores, à medida que se altera o coeficiente, é possível verificar em um caso o movimento de rotação da reta e, em outro, o movimento de translação. Qual coeficiente pode ser associado a cada uma dessas transformações?
4. Até agora, analisamos cada coeficiente separadamente. Utilizando a mesma sequência de passos, construa a função h, definida por $h(x) = ax + b$ e seus respectivos controles deslizantes. Movimente os controles e verifique a influência dos coeficientes juntos em uma única função. Considerando $a = -3$ e $b = 6$, em que ponto o gráfico da função h cruza o eixo x?

DICA: Você pode usar a ferramenta **Intersecção de dois objetos**, para determinar o ponto solicitado.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr., Sousa, 2020, p. 98.

Após apresentarem o *software*, eles sugerem algumas atividades para o aluno praticar, trazendo uma proposta bem interessante para que o professor possa utilizar em sala de aula.

E por fim, os autores encerram o capítulo, falando um pouco sobre "o crescimento e decrescimento da função afim", trazendo o estudo do "sinal de uma Função Afim", estudo de Inequações do 1º grau seguido de atividades propostas e uma lista de atividades complementares, que são exercícios do ENEM e de Vestibulares; além de um subtópico História da Matemática, que traz um texto reportando o surgimento dos gráficos.

Sendo assim, o autores trazem conceitos e definições do conteúdo a ser estudado, uma grande variedade de exercícios resolvidos e propostos como para investigar através damanipulação e argumentação. Esta é uma linha de proposta feita pelos autores para o professor e seus alunos.

Por fim, é importante citar que os autores não fazem nenhuma associação ao estudo de reta na Geometria Analítica. Usam a taxa de variação para falar sobre o coeficiente angular da reta.

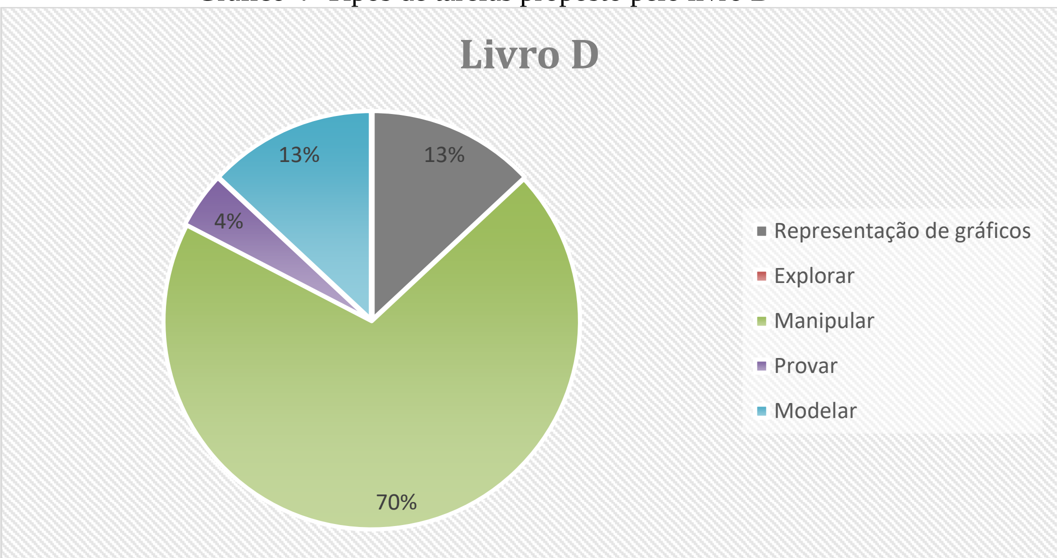
Considerações

Os autores são sucintos nas explicações. O tema inicia com o valor de uma bandeira em um determinado táxi, onde não faz o aluno pensar no caso que foi estabelecido, em seguida traz um outro tipo de problema envolvendo caixa-d'água.

O capítulo ficou bastante extenso, pela escolha de tratar o estudo de funções separado de função afim, apesar de estarem no mesmo capítulo. Pode-se perceber que o tema proposto segue uma estrutura de definições, exemplos, exercícios resolvidos e em seguida atividades para os alunos.

A seguir, apresenta-se o gráfico 4 para categorizar os itens ligados aos tipos de exercícios utilizados no capítulo analisado.

Gráfico 4- Tipos de tarefas proposto pelo livro D



Fonte: Elaboração própria.

Abaixo estão os Quadros 10 e 11 referente às notas de critério que foram atribuídas ao livro D, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.4.1 Quadros de Análise

Quadro 10- Critérios para análise dos textos iniciais do Livro D

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	3 1
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	1
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	0
Total		14	6 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 11 – Atividades Propostas do Livro D

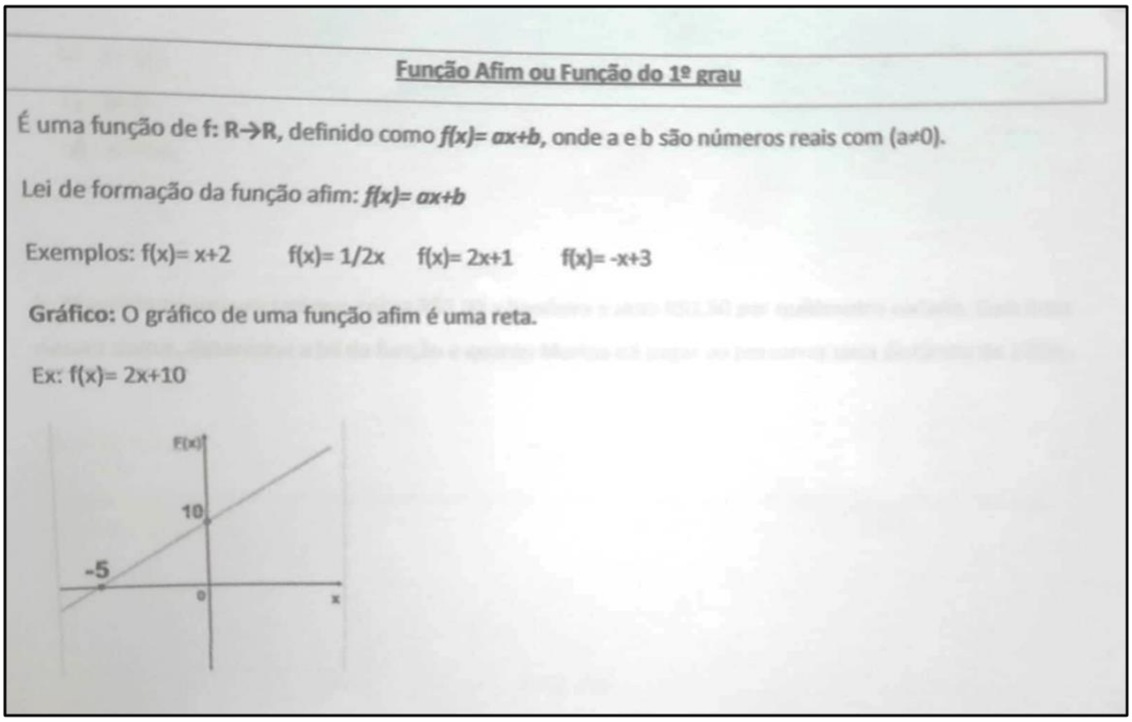
Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração/ Modelar	2	2
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	0
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	1
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	1
Total		7	5 (alta)

5.5 Análise do Material E

A seguir, destaca-se a análise feita do material (resumo) que um dos professores da rede estadual utiliza para auxiliar sua aula, já que não usa um dos livros didáticos. De acordo com o mesmo, muitas vezes não é possível disponibilizar apostilas para os alunos pela falta de papel A4 na escola, sendo, portanto, esse conteúdo por muitas vezes exposto no quadro.

Aqui inicia o material elaborado pelo professor dando início ao estudo de Função Afim, na qual não faz traz nenhuma situação-problema e de acordo com Lima (1999) cada novo capítulo deveria ser iniciado com um problema em que a solução requeresse o uso da matéria que começará a ser ensinado.

Figura 63 - Introdução de Função Afim.



Função Afim ou Função do 1º grau

É uma função de **f: R→R**, definido como ***f(x)= ax+b***, onde a e b são números reais com (a≠0).

Lei de formação da função afim: ***f(x)= ax+b***

Exemplos: f(x)= x+2 f(x)= 1/2x f(x)= 2x+1 f(x)= -x+3

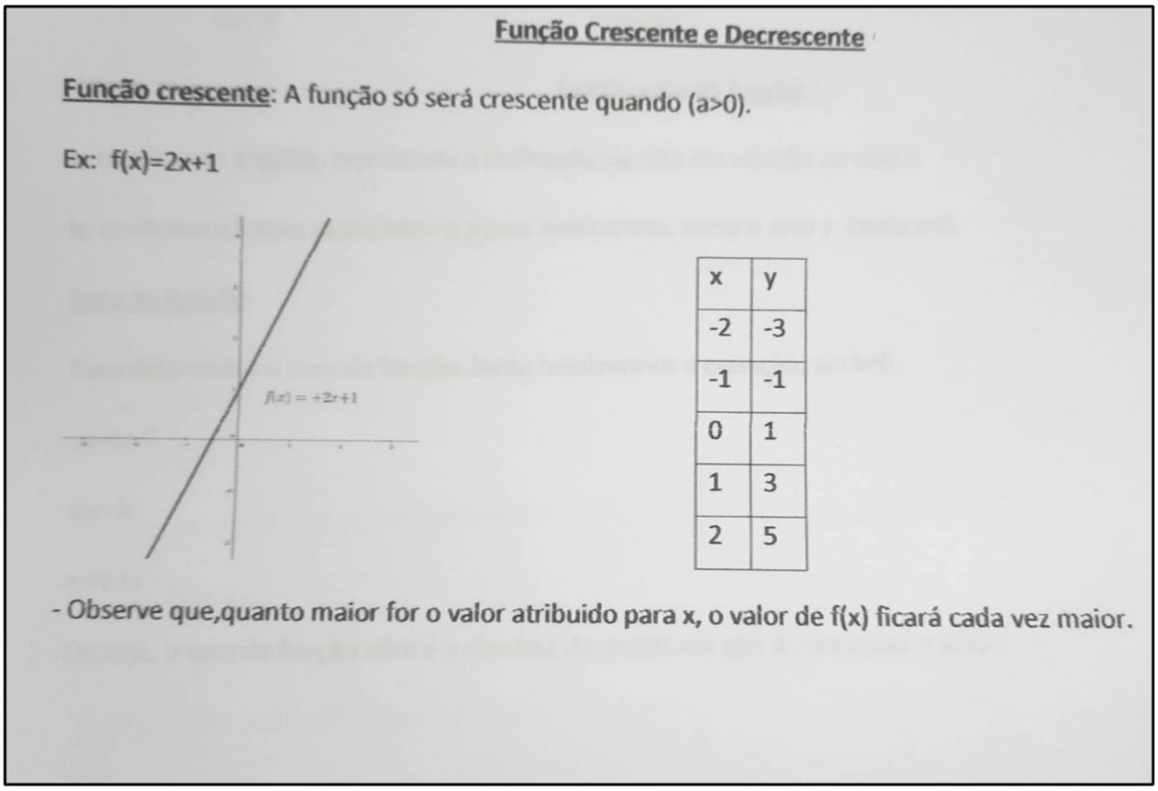
Gráfico: O gráfico de uma função afim é uma reta.

Ex: f(x)= 2x+10

Fonte: Resumo do professor

É possível perceber que o material utilizado pelo professor traz uma breve definição sobre o estudo de Função Afim, dando alguns exemplos e mostrando como reconhecer pela lei de formação e sua representação gráfica sem qualquer tipo de dedução ou prova do mesmo. Logo após, traz as funções constante, identidade e linear, apresentados na Figura a seguir.

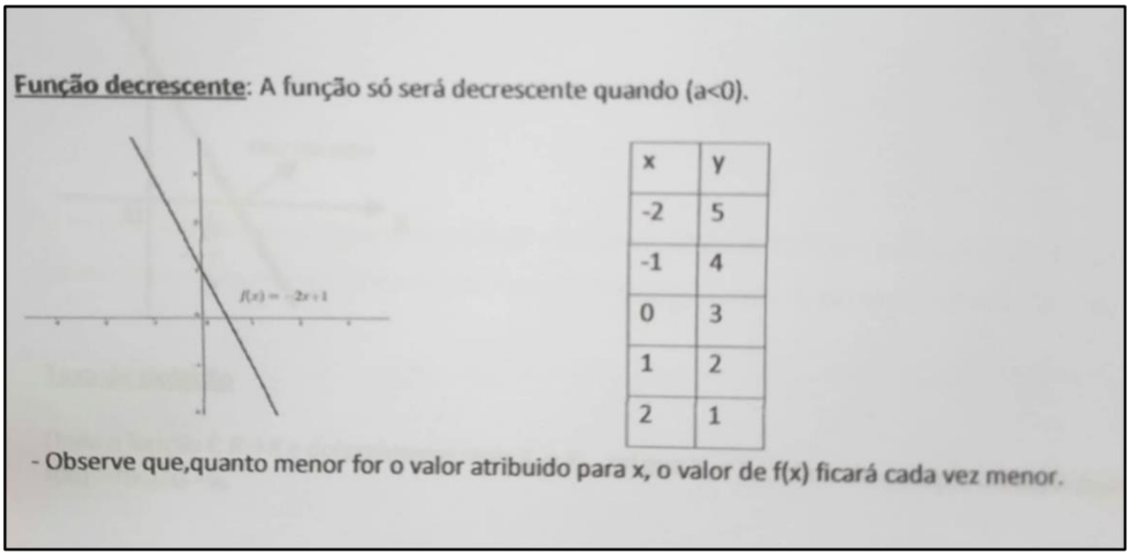
Figura 64 - Função crescente.



Fonte: Resumo do professor

.

Figura 65- Função decrescente

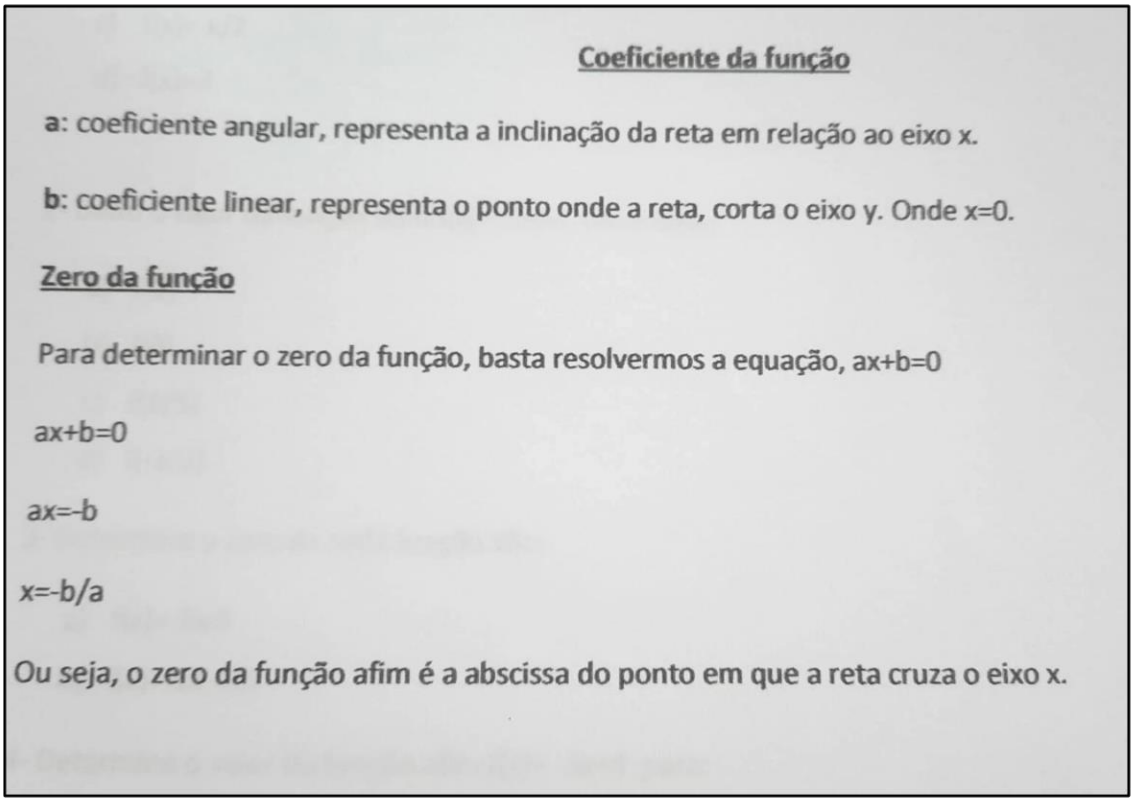


Fonte: Resumo do professor.

O professor traz gráficos para exemplificar e explicar quando as funções são crescentes e decrescentes, atribuindo valores para montar uma tabela e posteriormente construir o gráfico. O único critério atendido nesse material do professor, considerando o quadro de análise dos textos iniciais foi dentro da categoria 3 (conceitos) que teve nota 1 (um).

Na Figura 66, apresenta também os coeficientes e o zero da função brevemente.

Figura 66 - Coeficientes da função afim.



Coeficiente da função

a: coeficiente angular, representa a inclinação da reta em relação ao eixo x.

b: coeficiente linear, representa o ponto onde a reta, corta o eixo y. Onde x=0.

Zero da função

Para determinar o zero da função, basta resolvermos a equação, ax+b=0

ax+b=0

ax=-b

x=-b/a

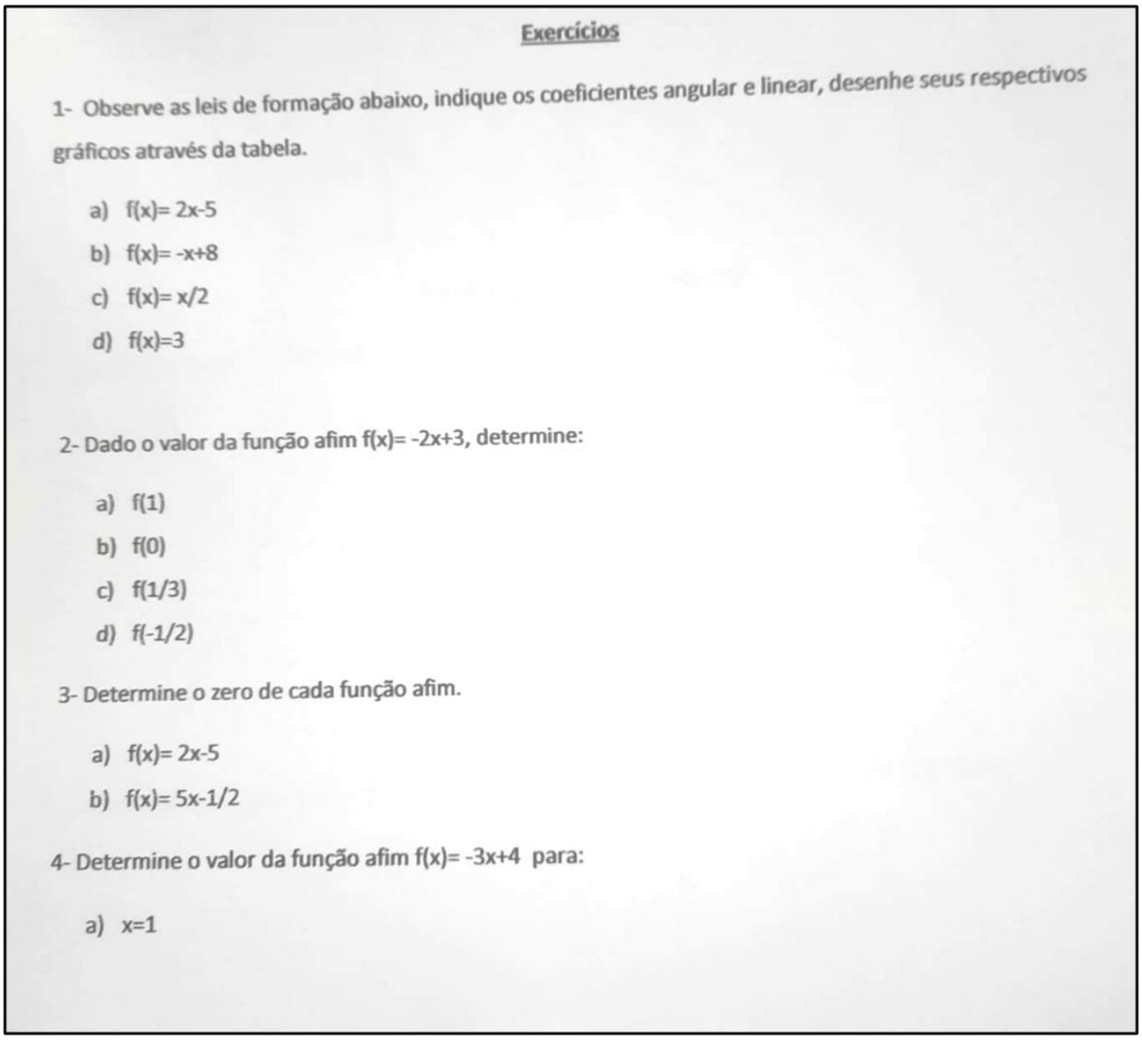
Ou seja, o zero da função afim é a abscissa do ponto em que a reta cruza o eixo x.

Fonte: Resumo do professor.

Esse material é utilizado no estudo de função Afim, onde percebe-se que não há demonstrações.

Os exercícios de manipulação são necessários para que o aluno possa se familiarizar com o conteúdo e se preparar para as questões contextualizadas com um grau maior de dificuldade, como podemos observar na Figura 67.

Figura 67 - Exercícios



Exercícios

1- Observe as leis de formação abaixo, indique os coeficientes angular e linear, desenhe seus respectivos gráficos através da tabela.

a) f(x)= 2x-5
b) f(x)= -x+8
c) f(x)= x/2
d) f(x)=3

2- Dado o valor da função afim f(x)= -2x+3, determine:

a) f(1)
b) f(0)
c) f(1/3)
d) f(-1/2)

3- Determine o zero de cada função afim.

a) f(x)= 2x-5
b) f(x)= 5x-1/2

4- Determine o valor da função afim f(x)= -3x+4 para:

a) x=1

Fonte: Resumo do professor

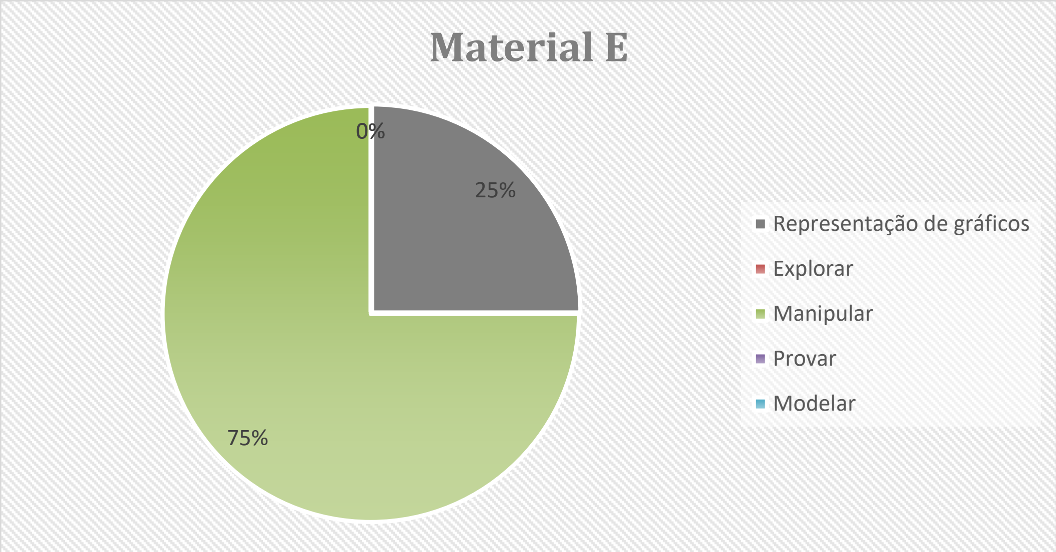
Considerações

É notório que o material utilizado tem uma quantidade baixa de exercícios e conteúdo em si. De acordo com Lima (1999) as demonstrações se encontram no processo de conceituação, elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da Natureza Matemática.

Os exercícios são todos de maniplução, contendo um para construção de gráficos através da tabela. A não oferta de tarefas para se provar é algo que chama atenção visto que é uma das prescrições nas orientações curriculares. Diante disso, o material atendeu apenas 1 (um) critério da subcategoria 5.1 (tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos).

A seguir, apresenta-se o gráfico 4 para categorizar os itens ligados aos tipos de exercícios utilizados no material analisado.

Gráfico 5 - Tipos de tarefas propostas pelo material E



Fonte: Elaboração própria.

Na próxima página, estão os Quadros 12 e 13 referentes às notas de critério que foram atribuídas ao material E, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.5.1 Quadros de Análise

Quadro 12 – Critérios para análise dos textos iniciais do Material E

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	0 0
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	0
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	0
Total		14	1 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

.

Quadro 13 – Atividades Propostas do material E

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	1
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	0
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	0
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	0
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	0
Total		7	1 (baixa)

5.6 Análise do Material F

O material F é utilizado por um dos professores econtrado na pesquisa de campo, o mesmo afirmou que não utiliza o livro do PNLD 2020 em suas aulas devido à indisponibilidade dos livros para os alunos.

O tema Função Afim é dividido em 2 módulos, o 1º traz uma situação- problema para iniciar o conteúdo, através de temas relacionado a “Dieta”, assunto que está frequentemente no cotidiano do aluno, através daí um modelo matemático que sai na lei de formação.

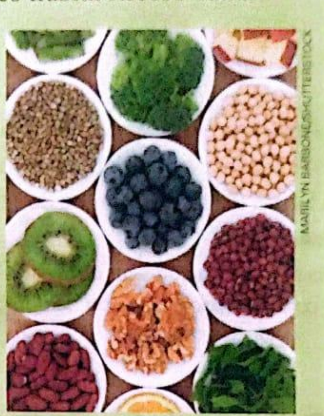
Figura 68- Introdução a Função Afim

Você já ouviu falar sobre a dieta do vinagre? E sobre a dieta da comida de bebê?
As variações e opiniões são muitas quando o assunto é dieta.

Dietas sem indicação e acompanhamento médico trazem riscos à saúde

De acordo com a Organização Mundial de Saúde, cerca de 1,4 bilhão de pessoas com mais de 21 anos em todo o mundo apresentam sobrepeso. Desses, cerca de 500 milhões representam casos de obesidade. No Brasil, dados da pesquisa Vigitel 2013 (Vigilância de Fatores de Risco e Proteção para Doenças Crônicas por Inquérito Telefônico) indicam que atualmente 50,8% dos brasileiros estão acima do peso ideal e 17,5% são obesos. A mudança de hábitos de alimentação e exercícios físicos são formas de obter resultados positivos contra este quadro global de saúde.

Disponível em: <www.blog.saude.gov.br/34973-dietas-sem-indicacao-e-acompanhamento-medico-trazem-riscos-a-saude.html>. Acesso em: 29 abr. 2016.



Sandra fazia parte da parcela da população brasileira com obesidade e, por motivos de saúde, foi orientada por seu médico a fazer uma dieta. Uma semana antes do início da dieta, Sandra conseguiu perder 1 kg, aliando exercícios físicos a leves mudanças em seus hábitos alimentares. A dieta proposta por seu médico permitiu a perda semanal de 3 kg. Considerando que Sandra tinha massa de 109 kg e passou a ter 75 kg no final do procedimento, você consegue determinar por quanto tempo ela seguiu a dieta?

Vamos nomear as variáveis envolvidas da seguinte forma:

- t: tempo da dieta de Sandra (em semanas).
- P: massa perdida por Sandra (em kg).

Dada a perda inicial de 1 kg, podemos relacionar P e **t** da seguinte maneira:

$P = 109 - 1 - 3t \Rightarrow$

$\Rightarrow P = -3t + 108$

Assim, para $P = 75$, temos:

$-3t + 108 = 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3t = -108 + 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t = 33 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 11$

Logo, após a semana inicial, Sandra seguiu a dieta por mais 11 semanas.

Podemos chamar de $P(t) = -3t + 108$ a função que descreve a massa perdida por Sandra em função do tempo da dieta. Tal função é definida por um polinômio do 1º grau na variável **t**.

Uma função desse tipo é chamada de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim** e esse é o assunto deste módulo.

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 93.

Em seguida, traz a definição de função polinomial do 1 º grau, definição de função Linear, tratando também sobre as grandezas diretamente proporcional como mostrado na Figura 69. Um ponto interessante que ele traz é a utilização do comprimento do círculo e o volume do cubo para mostrar a razão existente ou não entre eles. Sendo assim, quanto aos critérios estabelecidos, atende a subcategoria 1.1 dos textos iniciais.

Figura 69- Definição Função Afim.

PARA APRENDER

Definição de função polinomial do 1º grau ou função afim

É toda função f: R → R cuja lei de formação tem a forma:

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a \neq 0$$

- As letras **a** e **b** representam números reais e são chamadas coeficientes.
- A letra **x** é a variável independente da função.

A função definida é chamada do 1º grau porque o expoente da incógnita é igual a 1, isto é, $x = x^1$.

Exemplo:

Na seção **Para começar** obtivemos a função $P = -3t + 108$, que podemos reescrever na forma apresentada, considerando **x** o tempo de duração da dieta e f(x) a massa perdida:

$$f(x) = -3x + 108 \ (a = -3 \text{ e } b = 108)$$

Definição de função linear

É uma função afim na qual o coeficiente linear **b** é nulo. Assim:

$$f(x) = ax, \text{ com } a \neq 0$$

Exemplos:

- $f(x) = \frac{8}{9}x \left(a = \frac{8}{9} \text{ e } b = 0\right)$
- $g(x) = 1{,}02x \ (a = 1{,}02 \text{ e } b = 0)$

Relação com grandezas diretamente proporcionais

A função linear está diretamente ligada ao conceito de proporcionalidade.

Dizemos que duas grandezas **x** e **y** são proporcionais, quando:

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante real não nula)}$$

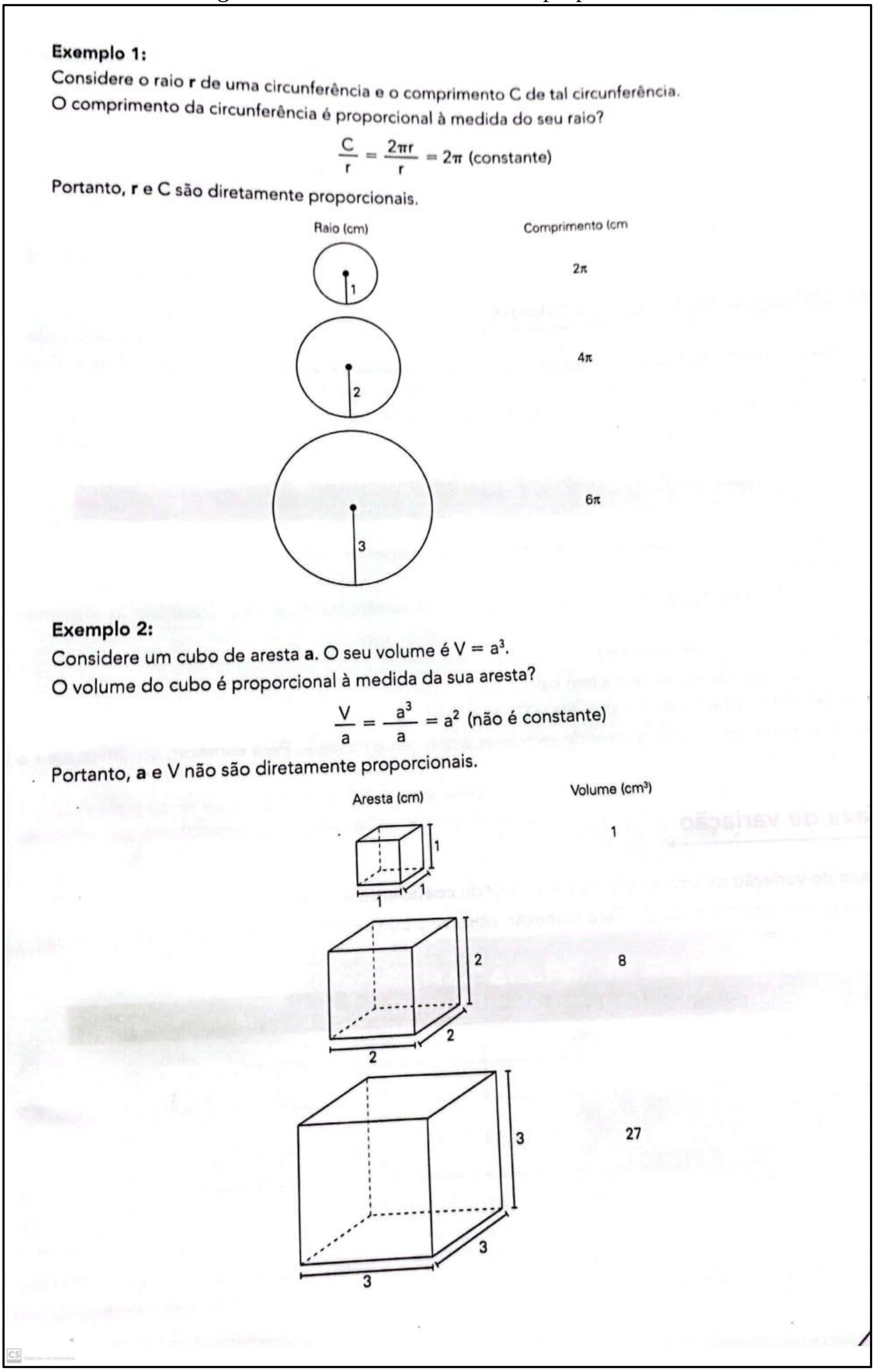
Observe que poderíamos descrever a relação na forma de função linear:

$$y = kx$$

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 94.

Na Figura acima é notório a lei de formação da Função Afim e uma de suas particularidades, logo faz uma relação com grandezas diretamente proporcionais. Na figura abaixo, os autores deste material utilizam a medida do raio e o comprimento do diâmetro para mostrar que suas medidas são proporcionais e como a aresta de um cubo é proporcional ao seu volume.

Figura 70 - Grandezas diretamente proporcionais



Exemplo 1:

Considere o raio **r** de uma circunferência e o comprimento C de tal circunferência.
O comprimento da circunferência é proporcional à medida do seu raio?

$$\frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ (constante)}$$

Portanto, **r** e C são diretamente proporcionais.

Exemplo 2:

Considere um cubo de aresta **a**. O seu volume é $V = a^3$.
O volume do cubo é proporcional à medida da sua aresta?

$$\frac{V}{a} = \frac{a^3}{a} = a^2 \text{ (não é constante)}$$

Portanto, **a** e V não são diretamente proporcionais.

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 95.

Posteriormente, o livro traz a definição de Função Constante. Em seguida, mostra a taxa de variação, como mostra a figura 64, através de uma tabela e a relação de grandezas sem utilizar nenhuma demonstração, apenas explica de forma dedutiva.

Figura 71 - Taxa de variação.

Taxa de variação

A **taxa de variação** de uma função afim é o valor do **coeficiente a** da função.

Voltando ao problema da seção **Para começar**, observe o que acontece quando **t** varia uma unidade:

$P(t) = -3t + 108$

Semana (t)	Massa antes (kg)	Massa perdida (kg)	Massa depois (kg)
0	109	1	108
1	108	3	$108 - 3 = 105$
2	105	3	$105 - 3 = 102$
3	102	3	$102 - 3 = 99$
4	99	3	$99 - 3 = 96$
⋮	⋮	⋮	⋮
11	78	3	$78 - 3 = 75$

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 96.

O exemplo que os autores utilizam para explicarem a taxa de variação, foi o mesmo utilizado no início deste estudo com assunto relacionado a dieta. O qual queria descobrir quanto tempo durou a dieta de Sandra, que pesou 102Kg e depois da dieta passou a pesar 75Kg. Sendo assim, quanto aos critérios estabelecidos, atende o critério estabelecido na categoria 3 (conceitos) dos textos iniciais. Na Figura 72, ele termina a ideia de taxa de variação e inicia a relação entre grandezas.

Figura 72 - Relação entre grandezas.

É importante destacar o coeficiente (−3), pois ele nos mostra exatamente quanto a função diminui à medida que o valor da incógnita **t** aumenta uma unidade.

De modo geral:

Se y = ax + b, então a **taxa de variação** representa quanto **y** aumenta (ou diminui) à medida que **x** aumenta uma unidade.

Relação entre grandezas

Destacamos agora uma característica que nos permite identificar quando é possível relacionar duas grandezas **x** e **y** em situações-problema, de modo que a relação entre elas seja do 1º grau, isto é, y = ax + b.

Aumentar um valor constante na variável **x** corresponde a aumentar (ou descontar) um valor constante na incógnita **y**.

Exemplo:

Retome a tabela feita para estudarmos a taxa de variação.

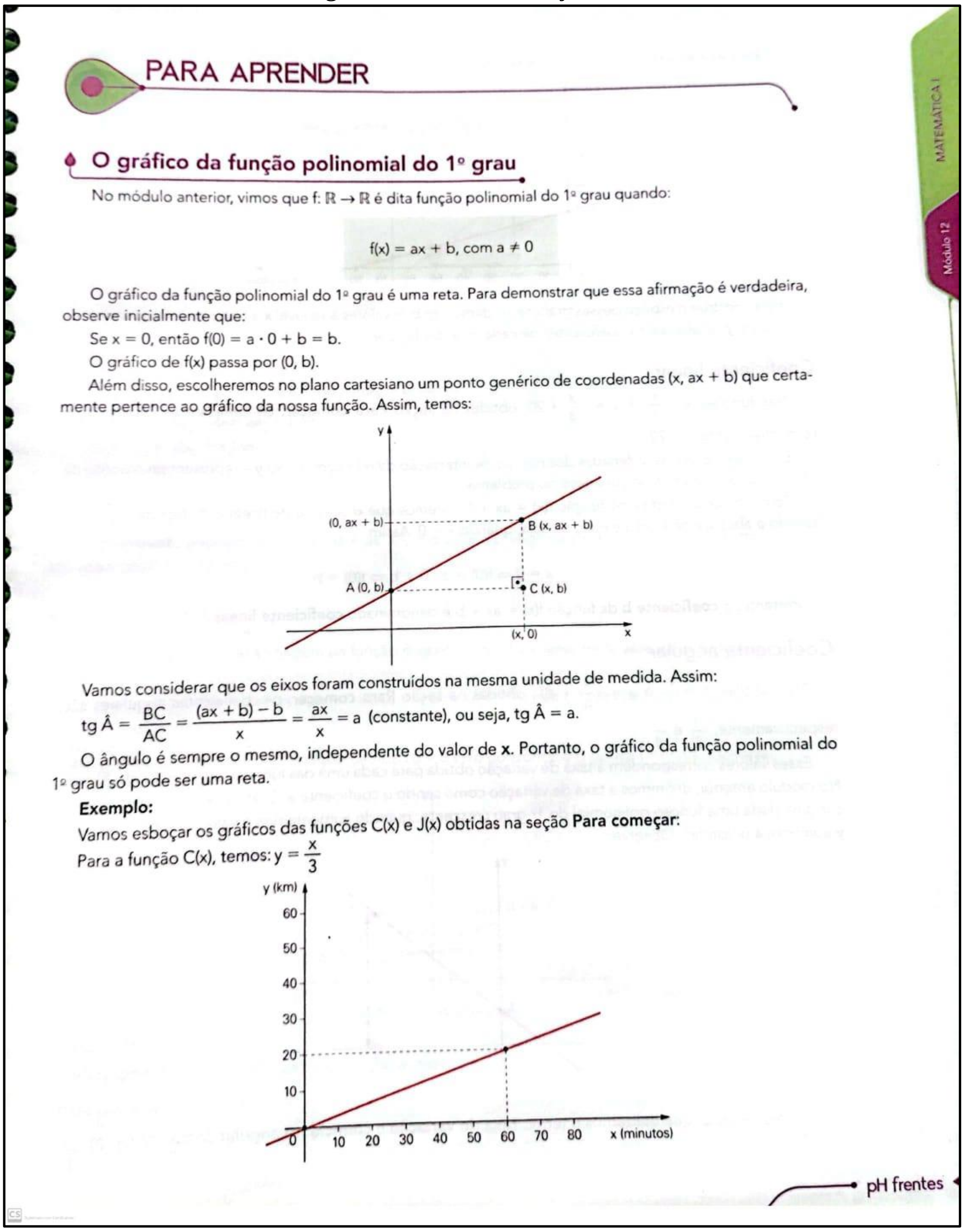
Semana (t)	Peso antes (kg)	Peso perdido (kg)	Peso depois (kg)
0	109	1	108
1	108	3	108 − 3 = 105
2	105	3	105 − 3 = 102
3	102	3	102 − 3 = 99
4	99	3	99 − 3 = 96
⋮	⋮	⋮	⋮
11	78	3	78 − 3 = 75

Considere os 12 kg perdidos por Sandra nas semanas 3, 4, 5 e 6. Quaisquer que fossem as 4 semanas seguidas que escolhêssemos, a perda também seria de 12 kg.

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 96.

O módulo 2 é iniciado com o gráfico de função Afim com uma demonstração dedutiva partir dos pontos C (x,0) e B (x, ax+b). Em seguida ,traz coeficiente angular e linear da reta e zero da função, como é mostrada na Figura 73. Em nenhum momento o livro faz associação a Geometria Analítica.

Figura 73- Gráfico Função Afim.



PARA APRENDER

O gráfico da função polinomial do 1º grau

No módulo anterior, vimos que f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função polinomial do 1º grau quando:

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a \neq 0$$

O gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta. Para demonstrar que essa afirmação é verdadeira, observe inicialmente que:

Se x = 0, então f(0) = a · 0 + b = b.

O gráfico de f(x) passa por (0, b).

Além disso, escolheremos no plano cartesiano um ponto genérico de coordenadas (x, ax + b) que certamente pertence ao gráfico da nossa função. Assim, temos:

Vamos considerar que os eixos foram construídos na mesma unidade de medida. Assim:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{(ax + b) - b}{x} = \frac{ax}{x} = a \text{ (constante), ou seja, tg } \hat{A} = a.$$

O ângulo é sempre o mesmo, independente do valor de **x**. Portanto, o gráfico da função polinomial do 1º grau só pode ser uma reta.

Exemplo:

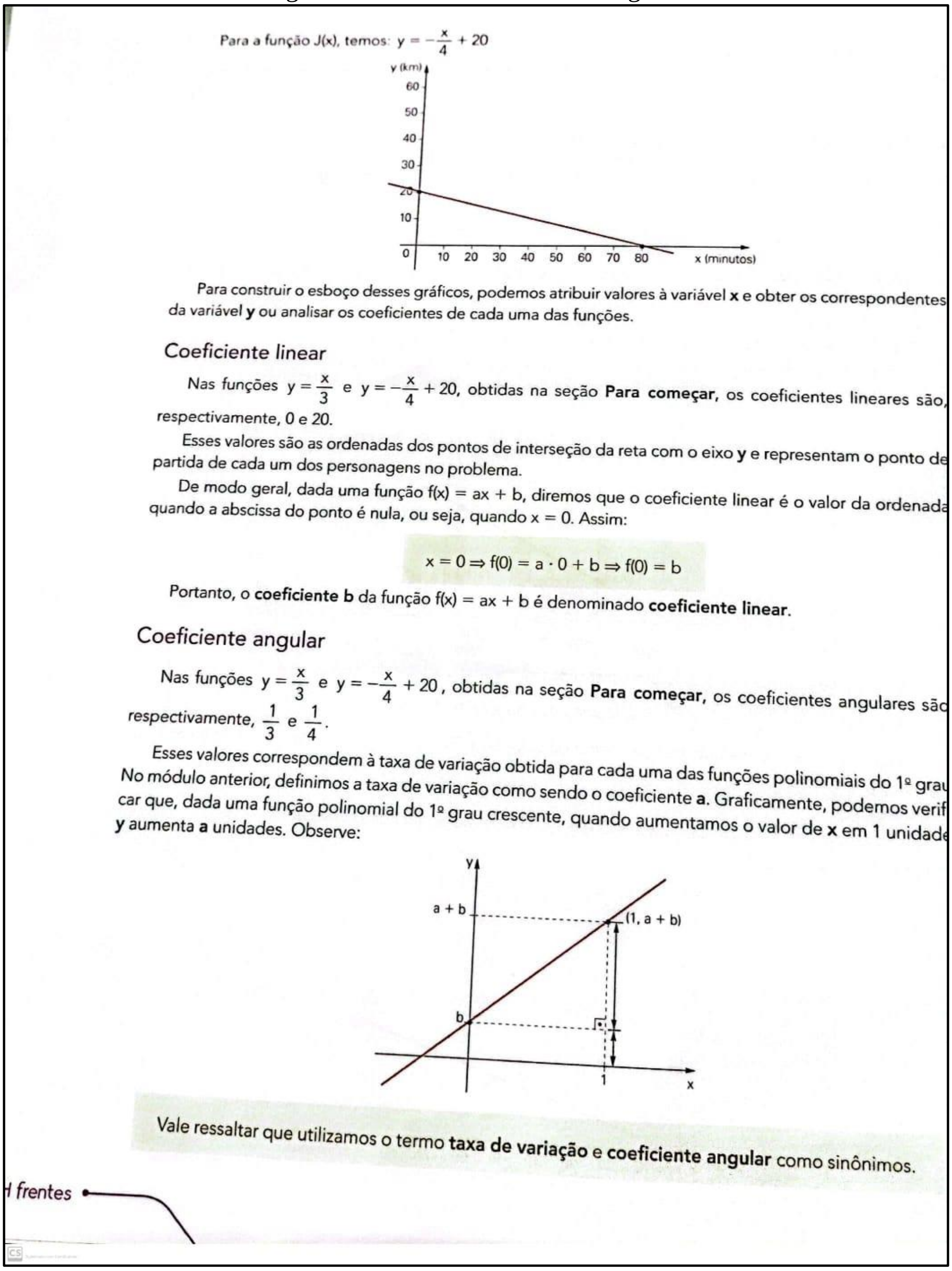
Vamos esboçar os gráficos das funções C(x) e J(x) obtidas na seção **Para começar**:

Para a função C(x), temos: $y = \frac{x}{3}$

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 109.

Na Figura 73, ao representar a reta no plano cartesiano, os autores mostram que a reta cruza o eixo das ordenadas (y), no ponto (0,b). E mencionam outra forma de encontrar o coeficiente *a* que é através da tangente de alfa (tg), que por isso recebe o nome decoeficiente angular, pois está relacionado com a inclinação da reta

Figura 74 - Coeficiente linear e angular.



Para a função J(x), temos: $y = -\frac{x}{4} + 20$

Para construir o esboço desses gráficos, podemos atribuir valores à variável **x** e obter os correspondentes da variável **y** ou analisar os coeficientes de cada uma das funções.

Coeficiente linear

Nas funções $y = \frac{x}{3}$ e $y = -\frac{x}{4} + 20$, obtidas na seção **Para começar**, os coeficientes lineares são, respectivamente, 0 e 20.

Esses valores são as ordenadas dos pontos de interseção da reta com o eixo **y** e representam o ponto de partida de cada um dos personagens no problema.

De modo geral, dada uma função $f(x) = ax + b$, diremos que o coeficiente linear é o valor da ordenada quando a abscissa do ponto é nula, ou seja, quando $x = 0$. Assim:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

Portanto, o **coeficiente b** da função $f(x) = ax + b$ é denominado **coeficiente linear**.

Coeficiente angular

Nas funções $y = \frac{x}{3}$ e $y = -\frac{x}{4} + 20$, obtidas na seção **Para começar**, os coeficientes angulares são, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

Esses valores correspondem à taxa de variação obtida para cada uma das funções polinomiais do 1º grau. No módulo anterior, definimos a taxa de variação como sendo o coeficiente **a**. Graficamente, podemos verificar que, dada uma função polinomial do 1º grau crescente, quando aumentamos o valor de **x** em 1 unidade, **y** aumenta **a** unidades. Observe:

Vale ressaltar que utilizamos o termo **taxa de variação** e **coeficiente angular** como sinônimos.

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 110.

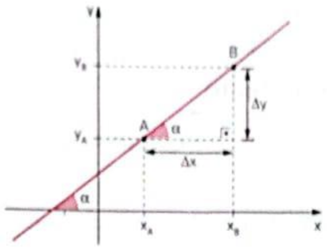
Ao utilizar o triângulo retângulo sobre o eixo cartesiano e apontar as relações trigonométricas básicas, os autores mostram que é possível encontrar o valor do coeficiente angular *a*. E logo após mostra através da representação gráfica, mostra o zero da função de acordo com a Figura 75.

Figura 75 - Coeficiente angular e zero da função.

Nos casos em que os eixos não estão na mesma unidade de medida, o nome taxa de variação é o conveniente, já que a ideia de ângulo e sua tangente correspondente passam a não fazer sentido.

Para determinar tal coeficiente, podemos proceder da seguinte maneira:

Considere os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ sobre o gráfico da função $f(x) = ax + b$, como segue:



Assim:

$$\begin{cases} y_a = ax_a + b \\ y_b = ax_b + b \end{cases} \Rightarrow y_b - y_a = (ax_b + b) - (ax_a + b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_b - y_a = ax_b + b - ax_a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_b - y_a = a(x_b - x_a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta y = a\Delta x$$

$$\therefore a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

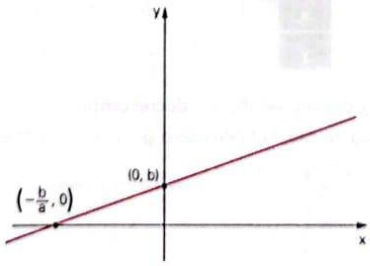
O **coeficiente angular** da função $f(x) = ax + b$ é o valor da tangente do ângulo que a reta forma com o semieixo positivo horizontal.

Zero da função

É o valor de **x** para qual a imagem da função é igual a zero. Para determinar esse valor, faremos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ (raiz ou zero da função).}$$

No gráfico, dizemos que a interseção da reta com o eixo horizontal é o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Observe:



Exemplos:

Vamos determinar as raízes das funções C(x) e J(x):

Para $C(x) = y = \frac{x}{3}$, temos:

$$\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$$

pH frentes

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 111.

Na Figura 76 a seguir, o livro traz o crescimento e decrescimento da função.

Figura 76 - Crescimento e decrescimento da Função Afim

Para $J(x) = y = -\frac{x}{4} + 20$, temos

$-\frac{x}{4} + 20 = 0 \Rightarrow -\frac{x}{4} = -20 \Rightarrow x = 80$

Vale observar que, ao construir os gráficos dessas funções, esses são os valores onde o gráfico intercepta o eixo horizontal.

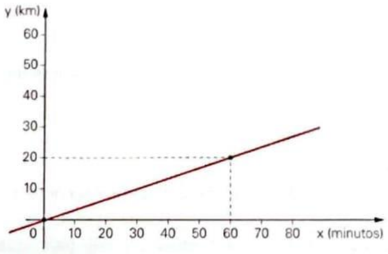
Crescimento e decrescimento

Vamos escolher alguns valores para a variável **x**, sempre aumentando tais valores, e analisar o que ocorre com a variável **y**, nas funções trabalhadas nesse módulo:

$y = \frac{x}{3}$ → Taxa de variação positiva: $\frac{1}{3}$

x	−6	−3	0	3	6
y	−2	−1	0	1	2

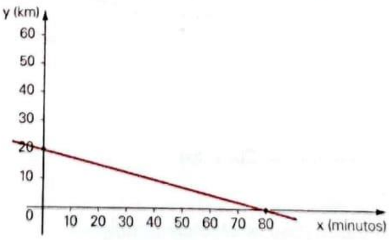
À medida que **x** aumenta, **y** também aumenta. A função é **crescente**.
Observando o gráfico dessa função, nota-se que o gráfico é crescente.



$y = -\frac{x}{4} + 20$ → Taxa de variação negativa: $-\frac{1}{4}$

x	−8	−4	0	4	8
y	22	21	20	19	18

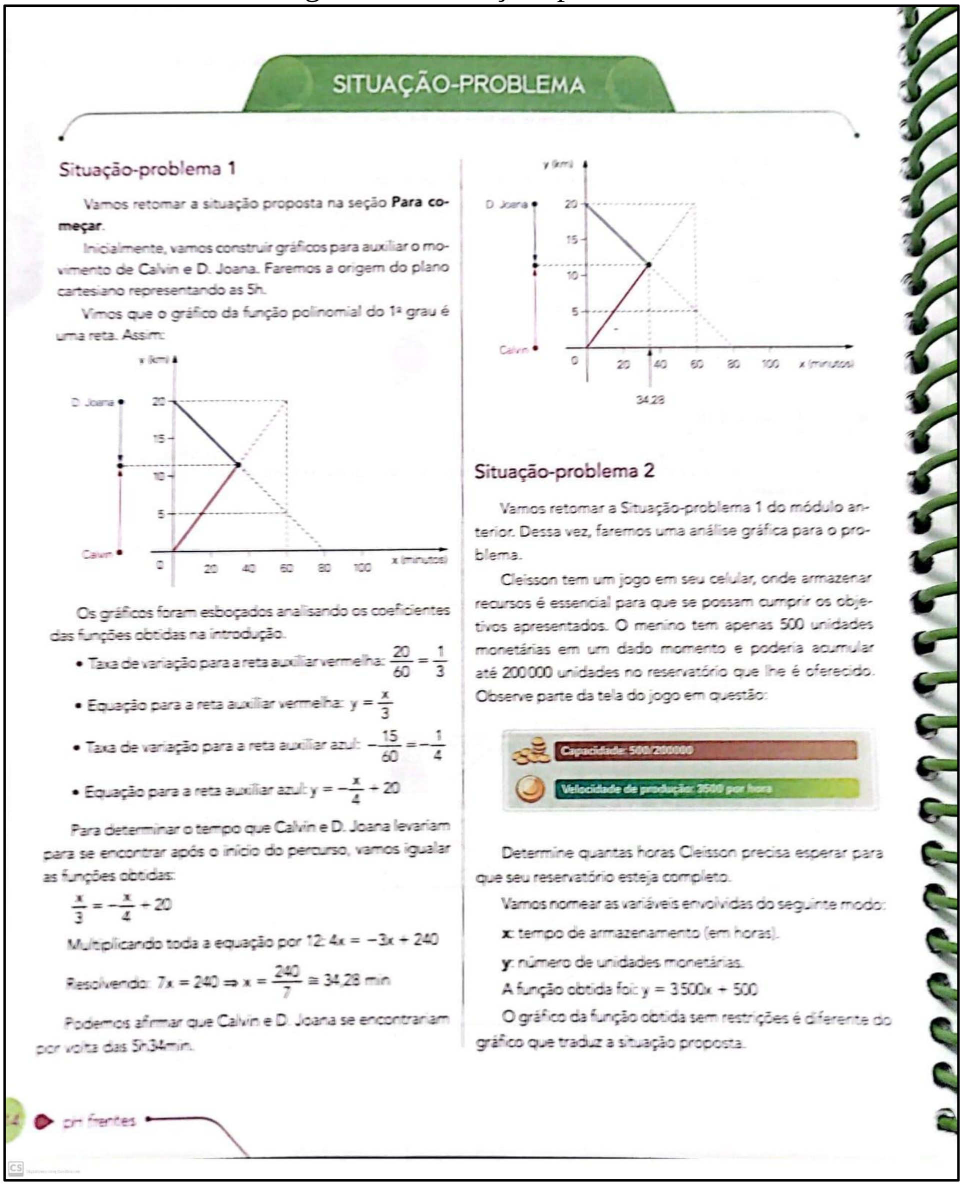
À medida que **x** aumenta, **y** diminui. A função é **decrescente**.
Observando o gráfico dessa função, nota-se que o gráfico é decrescente.



Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 112.

Dando sequência ao coneúdo de função, o livro traz tres situações-problemas com resolução a sobre o estudo de gráfico, de acordo com as Figuras 77 e 78. Sendo assim, o material atendeu a subcategoria 1.2 (tarefas resolvidas).

Figura 77 - Situação- problema.



SITUAÇÃO-PROBLEMA

Situação-problema 1

Vamos retomar a situação proposta na seção **Para começar**.

Inicialmente, vamos construir gráficos para auxiliar o movimento de Calvin e D. Joana. Faremos a origem do plano cartesiano representando as 5h.

Vimos que o gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta. Assim:

y (km)

D. Joana

Calvin

x (minutos)

Os gráficos foram esboçados analisando os coeficientes das funções obtidas na introdução.

- Taxa de variação para a reta auxiliar vermelha: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$
- Equação para a reta auxiliar vermelha: $y = \frac{x}{3}$
- Taxa de variação para a reta auxiliar azul: $-\frac{15}{60} = -\frac{1}{4}$
- Equação para a reta auxiliar azul: $y = -\frac{x}{4} + 20$

Para determinar o tempo que Calvin e D. Joana levariam para se encontrar após o início do percurso, vamos igualar as funções obtidas:

$\frac{x}{3} = -\frac{x}{4} + 20$

Multiplicando toda a equação por 12: $4x = -3x + 240$

Resolvendo: $7x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{7} \cong 34{,}28$ min

Podemos afirmar que Calvin e D. Joana se encontrariam por volta das 5h34min.

Situação-problema 2

Vamos retomar a Situação-problema 1 do módulo anterior. Dessa vez, faremos uma análise gráfica para o problema.

Cleisson tem um jogo em seu celular, onde armazenar recursos é essencial para que se possam cumprir os objetivos apresentados. O menino tem apenas 500 unidades monetárias em um dado momento e poderia acumular até 200 000 unidades no reservatório que lhe é oferecido. Observe parte da tela do jogo em questão:

Capacidade: 500/200000

Velocidade de produção: 3500 por hora

Determine quantas horas Cleisson precisa esperar para que seu reservatório esteja completo.

Vamos nomear as variáveis envolvidas do seguinte modo:

x: tempo de armazenamento (em horas).

y: número de unidades monetárias.

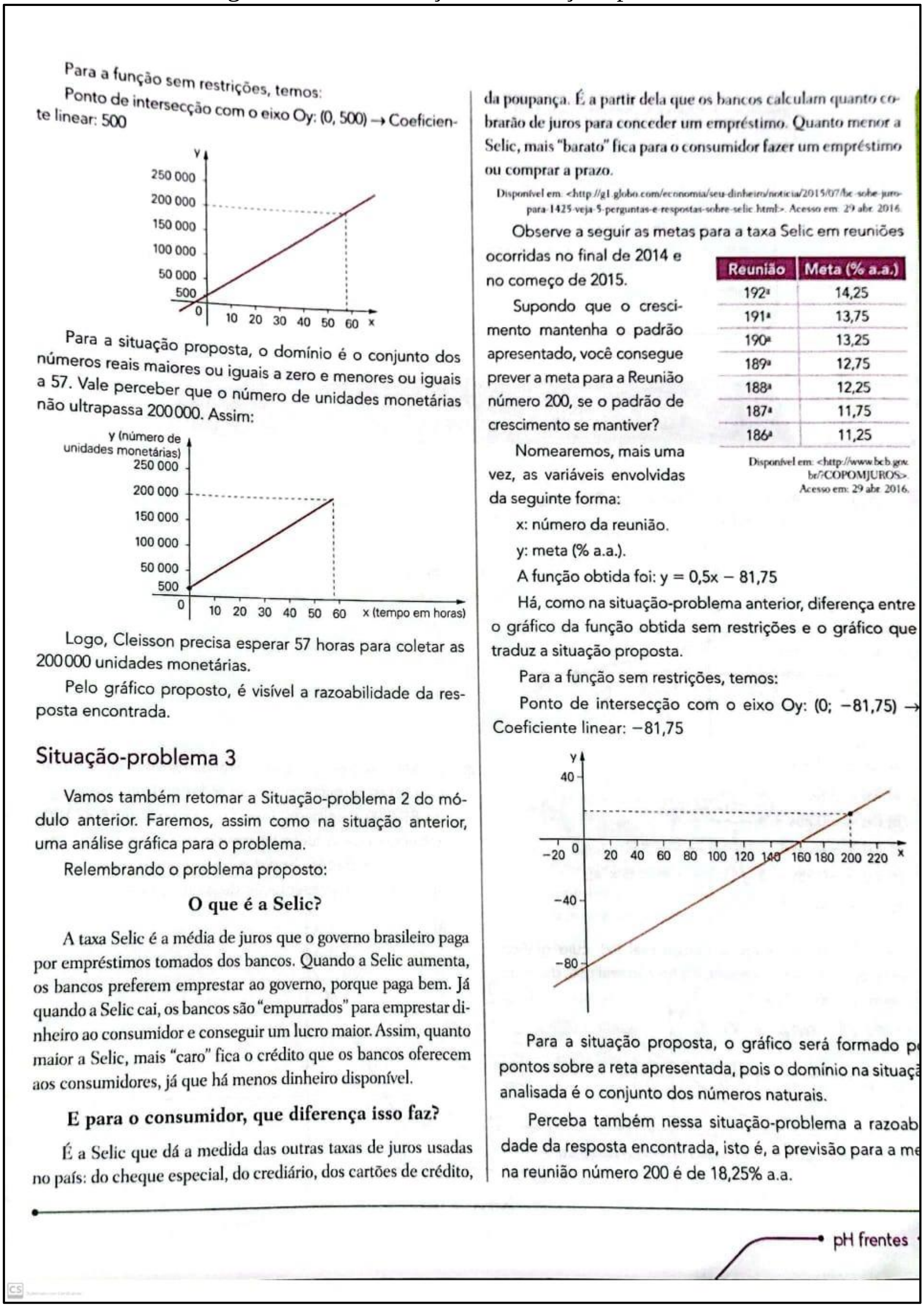
A função obtida foi: $y = 3500x + 500$

O gráfico da função obtida sem restrições é diferente do gráfico que traduz a situação proposta.

ph frentes

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 124.

Figura 78 - Continuação da Situação- problema



Para a função sem restrições, temos:

Ponto de intersecção com o eixo Oy: (0, 500) → Coeficiente linear: 500

Para a situação proposta, o domínio é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 57. Vale perceber que o número de unidades monetárias não ultrapassa 200000. Assim:

Logo, Cleisson precisa esperar 57 horas para coletar as 200000 unidades monetárias.

Pelo gráfico proposto, é visível a razoabilidade da resposta encontrada.

Situação-problema 3

Vamos também retomar a Situação-problema 2 do módulo anterior. Faremos, assim como na situação anterior, uma análise gráfica para o problema.

Relembrando o problema proposto:

O que é a Selic?

A taxa Selic é a média de juros que o governo brasileiro paga por empréstimos tomados dos bancos. Quando a Selic aumenta, os bancos preferem emprestar ao governo, porque paga bem. Já quando a Selic cai, os bancos são "empurrados" para emprestar dinheiro ao consumidor e conseguir um lucro maior. Assim, quanto maior a Selic, mais "caro" fica o crédito que os bancos oferecem aos consumidores, já que há menos dinheiro disponível.

E para o consumidor, que diferença isso faz?

É a Selic que dá a medida das outras taxas de juros usadas no país: do cheque especial, do crediário, dos cartões de crédito, da poupança. É a partir dela que os bancos calculam quanto cobrarão de juros para conceder um empréstimo. Quanto menor a Selic, mais "barato" fica para o consumidor fazer um empréstimo ou comprar a prazo.

Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/2015/07/bc-sobe-juro-para-1425-veja-5-perguntas-e-respostas-sobre-selic.html>. Acesso em: 29 abr. 2016.

Observe a seguir as metas para a taxa Selic em reuniões ocorridas no final de 2014 e no começo de 2015.

Reunião	Meta (% a.a.)
192ª	14,25
191ª	13,75
190ª	13,25
189ª	12,75
188ª	12,25
187ª	11,75
186ª	11,25

Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?COPOMJUROS>. Acesso em: 29 abr. 2016.

Supondo que o crescimento mantenha o padrão apresentado, você consegue prever a meta para a Reunião número 200, se o padrão de crescimento se mantiver?

Nomearemos, mais uma vez, as variáveis envolvidas da seguinte forma:

x: número da reunião.

y: meta (% a.a.).

A função obtida foi: $y = 0{,}5x - 81{,}75$

Há, como na situação-problema anterior, diferença entre o gráfico da função obtida sem restrições e o gráfico que traduz a situação proposta.

Para a função sem restrições, temos:

Ponto de intersecção com o eixo Oy: (0; −81,75) → Coeficiente linear: −81,75

Para a situação proposta, o gráfico será formado p[...] pontos sobre a reta apresentada, pois o domínio na situaçã[...] analisada é o conjunto dos números naturais.

Perceba também nessa situação-problema a razoab[...]dade da resposta encontrada, isto é, a previsão para a me[...] na reunião número 200 é de 18,25% a.a.

pH frentes

Fonte: Sistema de ensino Ph, ed. (2018), p. 125.

Para finalizar o módulo, o livro traz algumas questões parecidas com as que foram resolvidades para que possa ser realizado seguindo os mesmos passos.

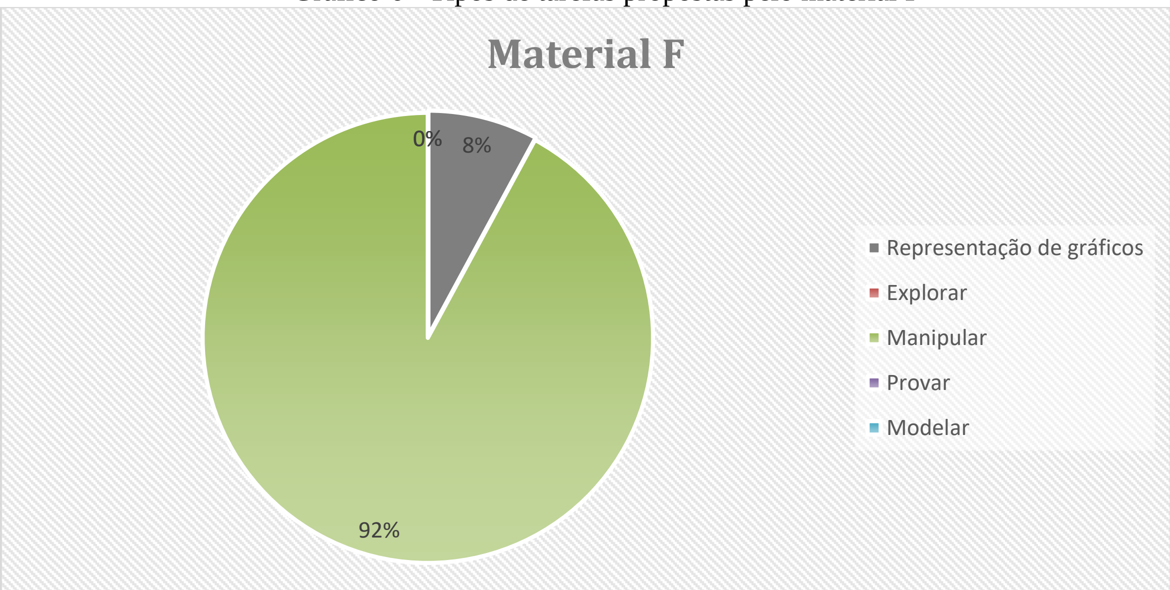
Não há nenhuma ligação com o estudo da Geometria Analítica, para o estudo da reta a condição de alinhamento entre dois pontos, o estudo dos seus coeficientes são os conteúdos utilizados para alcançar as habilidades indicadas. Saber usar o sistema de coordenadas cartesianas para representar pontos e figuras, saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes e as posições relativas entre as retas também são conceitos essenciais. Geometria analítica é parte fundamental do estudo da matemática, pois a partir do seu conhecimento espera-se dos estudantes a identificação das relações existentes entre outros conceitos matemáticos, ou mesmo a relação entre conceitos matemáticos e de outras disciplinas.

Considerações

O livro tem uma vasta quantidade de exercícios, e é oferecida uma quantidade variada de questões, mas 92% delas é de manipulação. Outra característica importante a destacar é que todas são de vestibular, ou seja, percebe-se que o intuito da coleção está voltada apenas para os vestibulares, não há questões para provar, modelar. Assim, pouco se propõe sobre a construção de gráficos.

A seguir, apresenta-se o gráfico 4 para categorizar os itens ligados aos tipos de exercícios utilizados no capítulo analisado.

Gráfico 6 - Tipos de tarefas propostas pelo material F



Fonte: Elaboração própria

Abaixo estão Quadros 14 e 15 referente às notas de critério que foram atribuídas ao material F, de acordo com os critérios desenvolvidos pelas autoras deste trabalho.

5.6.1 Quadros de Análise

Quadro 14 - Critérios para análise dos textos iniciais do Material F

Categorias	Subcategorias	Nota Máxima	Nota do critério
1. Situações	1.1 Situação problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	3 1
2. Demonstrações	2.1 Utilizam demonstração?	3	1
3. Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático	2	1
4. Relação entre conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria Analítica.	5	0
Total		14	6 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 15 – Análise das atividades do Material F

Categoria	Subcategorias	Nota máxima	Nota do critério
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	2
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para aresolução de um só conteúdo?	2	1
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	1
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	0
Total		7	5 (alta)

Fonte: Elaboração própria.

6 ANÁLISE COMPARATIVA DOS DADOS

Considerando os materiais A, B, C, D, E, F conseguiu-se perceber que os A,B,C,D e F apresentam situações contextualizadas para iniciar o estudo de Função Afim, pois segundo MACEDO (2002) uma situação-problema está diretamente relacionada ao cotidiano, de forma dinâmica e aberta em um universo fantástico e problemático que é a vida, já o material E não traz . As coleções analisadas obedecem a um padrão: as noções a serem trabalhadas são apresentadas com ou exemplos ou atividade resolvida, apontando a definição ou propriedade utilizada que o justifica poder seguir determinada lógica indutiva.

Sobre a discussão da Geometria Analítica no estudo de Função Afim, apenas o livro A faz essa associação, onde consequentemente tem a maior nota de critério. Quanto aos demais materiais nem mencionam o estudo da Geometria Analítica ou fazem qualquer outro referencial no estudo da reta.

No estudo da reta o Livro A mostra essa análise através de pontos que formam triângulos retângulos e assim através do caso LAL (lado, ângulo, lado) prova-se que são colineares. O livro B traz essa definição através da desigualdade triangular, mostrando que três pontos alinhados formam uma reta. O livro C traz uma demonstração muito informal, onde apenas colocou uma função e através dos pontos *(x,y)* dados já afirmou que é uma reta. O livro D assim como C também trabalha com a mesma ideia. O material E não traz nenhuma conceituação sobre reta e o F mostra através de uma demonstração dedutiva atravpes de dois pontos dados.

Os quadros de análise mostram o quanto a prova/demonstração é escassa, embora seja umas das expectativas dos PCNEM (BRASIL,2000) de que o aluno domine a linguagem formal da Matemática, pois virá precisar desta habilidade caso queira continuar seus estudos, com isso é possível perceber que os Livros A, B trazem tópicos mais explicativos com a passo a passo das demonstraçãoes que foram utilizadas.

A seguir, serão mostradas duas tabelass comparativas (Quadro 16 e Quadro 17) sobre os textos iniciais de cada material coletado, de acordo com a análise desenvolvida.

Quadro 16- Quadro comparativo dos textos iniciais

Categoria	Subcategoria	Livro A	Livro B	Livro C	Livro D	Material E	Material F
1. Tarefas propostas	1.1 Situação-problema 1.2 Tarefas Resolvidas	3 1	2 1	3 1	3 1	0 0	3 1
2. Demonstração	2.1 Utilizam demonstração?	2	2	1	1	0	1
3.Conceitos	3.1 Utilizam uma apresentação discursiva, verbal ou gráfica para a validação de um objeto/conceito/conteúdo matemático.	1	1	1	1	0	1
4. Relações entre os conteúdos	4.1 Ligação do conteúdo com a Geometria	4	0	0	1	0	0
Total		11 (alta)	6 (baixa)	5 (baixa)	6 (baixa)	1 (baixa)	6 (baixa)

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 17 - Quadro comparativo dos exercícios propostos

Categoria	Subcategoria	Livro A	Livro B	Livro C	Livro D	Mat. E	Mat. F
5. Tarefas propostas	5.1 Tipos de tarefas que os autores propõem aos estudantes para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados, são eles: Manipulação Representação Gráfica Prova/Demonstração Modelar	2	1	2	2	1	2
6. Método de Resolução de exercícios	6.1 Traz exercícios resolvidos	1	1	1	1	0	1
	6.2 Utilizam maneiras diferentes para a resolução de um só conteúdo?	0	0	0	0	0	1
	6.3 Justificam ou não a solução?	1	1	0	1	0	1
7. Procedimentos	7. 1 Utilizam tecnologia	1	1	0	1	0	0
Total		5 (alta)	4 (moderada)	3 (baixa)	5 (alta)	1 (baixa)	5 (alta)

Fonte: Elaboração própria.

O livro A recebeu nota alta (11), pois atende a maior parte do critério “4 - relação entre conteúdos”, ou seja, apresenta a relação envolvendo conceitos da Geometria Analítica, faz associação do conteúdo com a equação da reta e traz a explicação das posições relativas entre dois pontos; pois é o que o presente trabalho deseja observar. Também recebeu nota alta (5) no quesito “atividades propostas”, por trazer exercícios que satisfazem os critérios estabelecidos.

O livro B recebeu nota baixa (6), pois no critério “4 – relação entre conteúos” ele não faz nenhuma associação ao estudo. Recebeu nota moderada (4), pois não atendeu os critérios estabelecidos na subcategoria 5.1 e a 6.2.

O livro C recebeu nota baixa (6), pois no critério “4 – relação do conteúdo entre conteúdos” ele não faz associação. Recebeu nota baixa (3) para “atividades propostas”, pois faltou utilizar tecnologia em seus estudos, diferentes maneiras para resolver uma determinada questão.

O livro D recebeu nota baixa (6), pois ao critério “4 –Relação entre conteúdos” não atendeu nenhuma subcategoria. Recebeu nota alta (5) para “atividades propostas”, não atendeu a subcategoria 6.2 (diferentes maneiras para resolver uma determinada questão).

O material E apostila utilizada por um dos professores, recebeu nota baixa (1) para o critério “ 4 –relação entre conteúdos” pois a apostila foi produzida de uma forma bem simplificada e sem todos os conceitos e definições necessários para introduzir o conteúdo de Função Afim. Recebeu nota baixa (1) para “atividades propostas”, pois não apresentam critérios que foram estabelecidos, Um deles é falta de tarefas para provar, modelar, não apresenta justificativa nas resoluções. O material E é utizado pelo professor que possui o Livro C em sua instuição, tal material foi usado pela indisponbilidade do livro para todos os alunos.

O material F, recebeu nota baixa (6) para o critério “4 – relação entre conteúdos” pois não atende nenhum dos critérios estabelecidos na subcategoria. Recebeu nota alta (5) para “atividades propostas” pois tem uma quantidade vasta no número de ecercícios atendendo então os critérios estabelecido. Como o livro é de uma rede particular, onde um dos objetivos principais é o foco nos vestibulares, tem uma grande quantidade diversa de exercícios. Esse material era utilizado pelo professor que possui o livro B, de acordo com o mesmo, esse material F consiste em uma quantidade mais vasta de exercícios.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo trouxe à tona o seguinte tema: Uma abordagem inicial do conceito de reta sob o olhar da Geometria Analítica no Ensino Médio. Justificou-se o tema escolhido por se tratar da defasagem que há no Ensino Médio no que tange o ensino da Geometria Analítica (G. A.). É notório perceber que existem traços da G.A. no estudo de Funções, como, por exemplo, similaridade das equações da reta que é nítida, incorporadas em funções como $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ e em G.A como $y = mx + n$ $(m \neq 0)$.

Nessa perspectiva, a presente pesquisa buscou respostas para o referido problema por meio dos livros didáticos e material do professor, quando houvesse. Para responder a questão de pesquisa, foram traçados os seguintes objetivos específicos: analisar como o conceito de reta é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio; analisar se os livros didáticos abordam a relação de função afim com a Geometria Analítica; investigar, por meio da análise de conteúdos as interações dos professores com o conteúdo, através do seu material, caso o livro didático não seja a fonte principal.

Durante a investigação dos conteúdos nos livros didáticos e conversa informal com professores na pesquisa de campo, pode-se perceber que o livro didático tem sido o principal instrumento de embazamento e preparação das aulas e atividades. No que se refere às tecnologias digitais, estas não foram utilizadas, visto que ou as escolas não possuíam sala de informática ou as que tinham precisavam de um técnico de informática para auxiliar as aulas de Matemática. Além disso, o tempo necessário para deslocar as turmas de um ambiente de aprendizagem para outro era empecilho para o uso de tais tecnologias digitais.

Os professores em questão não enxergam outra alternativa para lecionar suas aulas, a não ser se guiar pelos livros didáticos ou preparar apostilas. Ainda devem se preocupar com a quantidade de xerox, pois nas escolas visitadas se trata de algo limitado. É preciso levar em consideração a rotina pesada que um professor tem, visto a quantidade de turmas que ele deve assumir para cumprir seus horários, lhe sobrando pouco tempo para preparar suas aulas (Lorenzato, 2010).

Durante a análise, foi possível perceber a escassez da formalidade do pensamento algébrico e do amadurecimento da linguagem matemática mais formal com base nos critérios explicados neste trabalho.

Respondendo à questão de pesquisa, o conceito de reta sob olhar da Geometria analítica não é trabalhado dentro do conteúdo de função afim. A reta só é mostrada em sua forma geométrica, por meio dos gráficos que indicam que a reta é determinada a partir de dois pontos distintos, utilizando pares ordenados.

Nesse sentido, analisando os materiais didáticos por meio dos critérios estabelecidos, chegou-se à conclusão que os que não fazem relação do estudo da reta com a Geometria Analítica trabalham bem outros conceitos, mas não destacam a importância em ampliar os estudos ligados a Geometria Analítica.

Na análise das quatro coleções, apenas uma apresentou conceitos da Geometria Analítica. Quanto aos outros dois materiais analisados (elaborados pelo professor), estes também não apresentaram. Essa associação é importante para apresentar uma valiosa ferramenta matemática, revelando ao aluno que a qualquer momento é possível recorrer elementos da Geometria Analítica para estudo de funções e vice-versa.

Sendo assim, traçar caminhos que levem a essas relações é de suma impotância dentro da Educação Matemática, contribuindo para um progresso intelectual dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana:** praxeologias matemáticas no ensino médio. 121 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Núcleo pedagógico ao desenvolvimento científico, Universidade Federal do Pará – UFPA. Pará, 2007.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J**. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula**: o estudo da reta de Euler. Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 7, 2011.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 4. ed. Lisboa: Edições 70, 2010.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy.; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma:** Matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**, proposta preliminar: segunda versão revista, abril, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-2versao.revis ta.pdf. Acesso em: 5 maio. 2022.

Ministério da Educação (MEC). *Parâmetros Nacionais Curriculares Ensino Médio*: bases legais. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: out. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/ Seb. 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1998.

BOSQUILHA, Alessandra; Corrêa, Marlene Lima Pires; Vivero, Tânia Cristina Neto. Geometria Analítica. **Mini manual compacto de Matemática Ensino Médio**: Teoria e prática. São Paulo: Rideel, 2003.

CHAVANTE,Eduardo; PRESTES, Diego**. Quadrante**: Matemática e suas tecnologias. 1. ed .São Paulo: Edições SM, 2020.

DALLEMOLE, J. J.,& GROENWALD, C. L. O**. A Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica nos livros didáticos de Matemática**. v.7, p37, n.1. Jul, 2012.

DANTE, Luis Roberto. **Livro Didático de Matemática:** uso ou abuso? Em Aberto, Brasília, a. 16, n. 69, p. 83-97, 1996.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática,1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**,volume único / luiz Roberto Dante . 1. Ed. São Paulo: Ática, 2005.

DELGADO, J.: FRENSEL, K.; CRISSAFF, L.**Geometria Analítica**, 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

DENZIN, Norman; LINCOLN, Yonna. **A disciplina e a prática da pesquisa qualitativa.** IN: e col. O Planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens. Porto Alegre: ArtMed, 2006, p.15-41.

DIONIZIO, F. A. Q. & BANDTC. F**. O caminho percorrido pela semiótica para a aprendizagem da matemática.** Revista Latino-americana de estudos científicos. Caxias do sul, RS. Anais do IX ANPED SUL, 2012.

DOMINGUES, H. H. **Infinito**. O site da Matemática. 2008. Disponível em: https://infinito.webnode.page/disciplinas/geometria-analitica/historia/
Acesso em : 12 Ago. 2022.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003, p.11-33.

FOSSÁ, J.A. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.B, 1919, 323.

GARDING, Lars. **Encontro com a matemática.** Tradução: Célia W. Alvarenga, Maria Manuela V. Marques Alvarenga. Brasília: EdItora da UnB, 2. ed. 1919, 323p (Coleção Pensamento Científico).

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo**. Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2008.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GONSALVES, E. P. **Iniciação à pesquisa científica**. 3. ed. Campinas: Alinea, 2001.

HANNA, G. **Challenges to the importance of proof. For the Learning of Mathematics**. 1995.p. 42-49.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos e Funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 2006. Vol. 1.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.: **Fundamentos da Matemática Elementar**:
Conjuntos, Funções, vol. 1. Atual, 9ª ed., 2013.

LEONARDO. F. M. de.**Conexões:** Matemática e suas tecnologias. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2020.

LIMA, E. L. **Conceituação, Manipulação e Aplicações**: os três componentes do ensino da Matemática. In: Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n.41, 1999.

LOPES J. de A. **O livro didático, o autor e as tendências em educação Matemática**. In: NACARATTO A. M.; LOPES C. E. (Org.). Escritas e leituras na educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica, p. 35 - 62. 2009.

LORENZATO, S**. Para aprender matemática**/ Sérgio Lorenzato. 3 ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).

MACEDO, L. **Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar.** In: PERRENOUD, P. et al. As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MACHADO, A. S. **Algebra Linear e Geometria Analítica**. 2.ed. São Paulo: Atual, 1982.

MANDARINO, M. C. F. **O livro didático de matemática: da avaliação ao uso em sala de aula.** In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

MARINS, L. de S**.. O uso do geogebra no ensino da Geometria Analítica**: estudo da reta. 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Univerisade Federal de Goiás, Goiania.

MASETTI, C**. Análise de livros didáticos de Matemática:** Função exponencial. Dissertação (Mestrado em Eduação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, PUC - SP, 2015. 165p.

MEIRIEU, P. **Aprender sim, ...mas como?** Cap. 2 - "O que é aprender?". p. 47 - 75 Porto Alegre: Artmed, 1998.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teórico Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.** 1999. 165p. Tese (doutorado em Doutor em Educação) - Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Eduação. Campinas, São paulo, 1999.

MOZZATO, A. R; GRZYBOVSKI, D. **Análise de Conteúdo como Técnica de Análise de Dados Qualitativos no Campo da Administração**: Potencial e Desafios. Revista de Administração Contemporânea, Curitiba, v. 15, n. 4, p. 731-747, jul./ago. 2011.

PEDUZZO. Q.; PEDUZZI, Sônia Silveira. **Sobre o papel da resolução literal de problemas no ensino de física:** exemplos em mecânica. In: PIETROCOLA, Maurício (Org.). Ensino de física: conteúdo, metodologia e epistemologia em uma conc epção integradora. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.p.101-123

PONTE, J. P**. O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 1990.

POZO, J.I.; CRESPO, M. A. G**. A aprendizagem e o ensino de ciências:** do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SILVA, C. R. da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** São Paulo: PUC, 2006. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

Sistema de Ensino Ph: **Matemática e suas Tecnologias.** exatas, caderno: aluno. 1.ed. São Paulo: SOMOS Sistemas de Ensino, 2018.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.) **Ler escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. **Metodologia da resolução de problemas**. In: 24ª Reunião ANPEd, 2001, Caxambu. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp1.htm#gt19. Acesso em: 04 set. 2022.

SOARES, S; SOUZA, T. **As interseções nos conteúdos de função e de geometria analítica nos livros didáticos.** Brazilian Journal of Development, Curitiba, v.7, n.2, p.12160-12178 feb 2021.

SOUZA. Joamir Roberto de**. Multiversos Matemática:** Matemática e suas tecnologias. 1.ed. São Paulo: FTD, 2020.

STANCANELLI, R. **Conhecendo diferentes tipos de problemas**. In: SMOLE, K. S.DIN. M. I. (orgs.). Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2021, p. 103-120.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil**, 1730-1930. São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999.