MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DE CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTER DA SILVA ROBERTO

MARIA FERNANDA OLIVEIRA PINTO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ELIPSE POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E DA TECNOLOGIA DIGITAL

Campos dos Goytacazes/ RJ

Outubro – 2023.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DE CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTER DA SILVA ROBERTO

MARIA FERNANDA OLIVEIRA PINTO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ELIPSE POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E DA TECNOLOGIA DIGITAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade.

Coorientadora: Profª. Me. Paula Eveline da Silva dos Santos.

Campos dos Goytacazes/RJ

Outubro – 2023.1

Biblioteca
CIP - Catalogação na Publicação

d642p

da Silva Roberto, Ester
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ELIPSE POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E DA TECNOLOGIA DIGITAL / Ester da Silva Roberto, Maria Fernanda Oliveira Pinto - 2023.
162 f.: il. color.

Orientadora: Ana Paula Rangel
Coorientador: Paula Eveline dos Santos

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Anton Dakitsch, RJ, 2023.
Referências: f. 105 a 109.

1. Elipse. 2. Investigação Matemática . 3. Tecnologia Digital. 4. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. I. Oliveira Pinto, Maria Fernanda. II. Rangel, Ana Paula, orient. III. Título.III. dos Santos, Paula Eveline, coorient. IV. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca do IFF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ESTER DA SILVA ROBERTO
MARIA FERNANDA OLIVEIRA PINTO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ELIPSE POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E DA TECNOLOGIA DIGITAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 05 de Outubro de 2023.

Banca Examinadora:

Letícia Carvalho Maciel
Letícia Carvalho Maciel
Mestre em Matemática/UENF
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Mylane dos Santos Barreto
Doutora em Cognição e Linguagem/UENF
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Ana Paula Rangel de Andrade
Ana Paula Rangel de Andrade
Doutora em Planejamento e Gestão da Cidade/UCAM
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Paula Eveline da Silva dos Santos
Paula Eveline da Silva dos Santos
Mestre em Matemática/UENF
IFFluminense *Campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, a Deus, por nos capacitar e nos ajudar na caminhada que nos trouxe até aqui.

Agradecemos também aos nossos familiares e amigos, por nos incentivarem e motivarem nesta etapa.

Aos nossos professores do curso de Licenciatura em Matemática, um singelo carinho por nos mostrarem que a Educação transforma. Vocês são nossas inspirações!

Em especial, às nossas orientadoras, a Profª. Dra. Ana Paula Rangel de Andrade e a Profª. Me. Paula Eveline da Silva dos Santos, agradecemos por confiarem na gente e, principalmente, por nos aconselharem, nos apoiando em toda a pesquisa. Agradecemos pelo comprometimento, dedicação e suporte neste processo. Nosso muito obrigada!

À banca examinadora deste trabalho, a Profª. Dra. Mylane dos Santos Barreto e a Profª. Me. Letícia Carvalho Maciel, pela atenção dada a este trabalho. Vocês são referências para nós.

Ensinarás a voar... mas não voarão o teu voo;

Ensinarás a sonhar... mas não sonharão o teu sonho;

Ensinarás a viver... mas não viverão a tua vida;

Ensinarás a cantar... mas não cantarão a tua canção;

Ensinarás a pensar... mas não pensarão como tu;

Porém saberás que cada vez que voem, sonhem, vivam, cantem e pensem... estará a semente do caminho ensinado e aprendido.

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

Pesquisas apontam que o estudo da Geometria tem perdido lugar dentro da sala de aula, dando cada vez mais espaço à Álgebra, e gerando uma visão limitada da Matemática. Nesse contexto, o estudo das cônicas, quando ocorre na Educação Básica, é reduzido à sua representação algébrica. A Tecnologia Digital, por sua vez, apresenta-se como facilitadora neste processo, auxiliando na visualização de figuras geométricas e na relação entre a Álgebra e a Geometria. Diante deste cenário, este trabalho tem por objetivo geral identificar as contribuições da Investigação Matemática e da Tecnologia Digital para o estudo da elipse no Ensino Médio. Com essa finalidade, realizou-se uma pesquisa qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica, na qual foi elaborada e aplicada uma sequência didática com base na Investigação Matemática. Participaram da fase de implementação, vinte e três alunos da 2ª. série do Ensino Médio de uma Instituição Federal de Educação. Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: observação, anotação no caderno de campo, respostas dos alunos às atividades, entrevista semiestruturada com os discentes e gravação em áudio. A análise dos dados coletados foi realizada de acordo com os referenciais teóricos da pesquisa, em especial, os relacionados à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Investigação Matemática. Os resultados desta pesquisa apontaram que a Tecnologia Digital facilitou e auxiliou no estudo intradisciplinar da cônica elipse.

Palavras-chave: Elipse. Investigação Matemática. Tecnologia Digital. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

Research shows that the study of Geometry has lost it's place in the classroom, giving more and more space to Algebra, and generathing a limited view of Mathematics. In this context, the study of conics, when it occurs in Basic Education, is reduced to their algebraic representation. Digital technology, in turn, presents itself as a facilitator in this process, helping to visualize geometric figures and the relationship between Algebra and Geometry. Given this scenario, the general objective of this work is to identify the contributions of Mathematical Research and digital technology to the study of the ellipse in high school. For this pourpose, qualitative research of the Pedagogical Intervention type was carried out, in which a didactic sequence based on Mathematical Investigation was developed and applied. Twenty-three 2^{nd} grade students participated in the implementation phase. High school series at a Federal Education Institution. The data collection instruments used were: observation, notes in the field notebook, student responses to activities, semi-structured interviews with students and audio recording. The analysis of the collected data was carried out in accordance with the theoretical references of the research, in particular those related to Duval's Theory of Semiotic Representation Records and Mathematical Investigation. The results of this research showed that digital technology facilitated and assisted in the intradisciplinary study of the conic ellipse.

Keywords: Ellipse. Mathematical Investigation. Digital Technology. Theory of Semiotic Representation Registers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A motivação para a escolha do tema abordado nesta pesquisa foi a crítica das autoras à ausência da abordagem geométrica no estudo das cônicas durante a graduação. O afastamento da linguagem geométrica gerou incômodo e trouxe a necessidade de pesquisar sobre os motivos da Geometria ser pouco explorada não só no Ensino Superior, como também na Educação Básica.

O estudo da Geometria é tão importante quanto o estudo da Álgebra, que vem recebendo maior importância nos últimos anos, devido a sua simplificação por meio de fórmulas. Pavanello (2004) salienta que:

> [...] há necessidade de cultivar e de desenvolver tanto o pensamento visual, dominante na geometria, quanto o seqüencial, preponderante na álgebra, pois ambos são essenciais à educação matemática. A prioridade dada, ainda recentemente, à álgebra, tanto na pesquisa como no ensino da matemática, acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento. É necessário, portanto, restabelecer o equilíbrio, retomando-se o ensino da geometria (Pavanello, 2004, p.3).

Da mesma forma, de acordo com Tomaz e Lima (2022), é necessário considerar a relevância da Geometria, visto que a defasagem em seu ensino pode causar aos alunos dificuldades de percepção do mundo ao seu redor e no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), o estudo da Geometria é importante como forma de desenvolver a visualização do mundo e o raciocínio lógico.

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para instigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes [...] (Brasil, 2018, p. 271).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), o ensino da Matemática deve priorizar, como um de seus objetivos, "Utilizar diferentes registros gráficos — desenhos, esquemas, escritas numéricas — como recurso para expressar idéias (sic), ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados" (Brasil, 1997, p. 56).

Dentre as cônicas, este trabalho tem como foco a elipse e utiliza a Tecnologia Digital como ferramenta para o estudo desta curva. De acordo com Tomaz e Lima (2022), a utilização de um software de geometria dinâmica, na aula de Geometria, em especial no ensino de cônicas, gera muitas contribuições e possibilidades para desenvolver situações de aprendizagem, por auxiliar na percepção de definições, elementos e propriedades. Afirmam também que tal conteúdo, em respeito à sua linguagem geométrica, tem pouco espaço nos livros didáticos.

Ainda nessa perspectiva, Tomaz e Lima (2022) citam que, dentre os softwares de geometria dinâmica, o GeoGebra[1] possui ferramentas completas para a construção geométrica a partir de comandos simples e práticos. Dessa forma, a sua utilização traz diversas possibilidades para o estudo das cônicas.

Com base na problemática exposta, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições da Investigação Matemática e do uso da Tecnologia Digital para o estudo da elipse no Ensino Médio?

Para responder a esta questão de pesquisa, foi traçado o seguinte objetivo geral: Investigar as contribuições da Investigação Matemática e da Tecnologia Digital para o estudo da elipse no Ensino Médio. Para alcançá-lo, traçou-se os objetivos específicos:

- Investigar as dificuldades dos alunos na relação entre a Álgebra e a Geometria;
- Realizar investigações matemáticas que aproximem os alunos da Geometria;
- Desenvolver nos alunos, a habilidade de formular conjecturas a respeito da elipse, a partir do seu desenho geométrico.

A metodologia adotada para esta pesquisa é a qualitativa do tipo intervenção pedagógica. De acordo com Damiani *et al.* (2013):

> [...] denominam-se intervenções as interferências (mudanças, inovações), propositadamente realizadas, por professores/pesquisadores, em suas práticas pedagógicas. Tais interferências são planejadas e implementadas com base em um determinado referencial teórico e objetivam promover avanços, melhorias, nessas práticas, além de pôr à prova tal referencial, contribuindo para o avanço do conhecimento sobre os processos de

[1] O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que possui as interfaces algébrica, geométrica e gráfica, além de calculadora, calculadora científica, calculadora CAS, etc. O GeoGebra também possui diversas ferramentas para a construção de objetos matemáticos. As interfaces utilizadas são integradas e contém suas informações interligadas, combinando os conceitos de diferentes áreas da Matemática. Link para acesso: https://GeoGebra.org.

> ensino/aprendizagem neles envolvidos. Para que a produção de conhecimento ocorra, no entanto, é necessário que se efetivem avaliações rigorosas e sistemáticas dessas interferências (Damiani *et al.*, 2013, p. 58).

Os instrumentos de coleta de dados são: a observação, as anotações no caderno de campo, as respostas dos alunos às atividades, a entrevista semiestruturada com os discentes e a gravação em áudio. O público-alvo desta pesquisa são alunos da 2ª. série do Ensino Médio.

A análise de dados será feita com base no referencial teórico da pesquisa, especialmente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval. Pantoja, Campos e Salcedos (2013) afirmam que:

> Segundo essa teoria, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de representação semiótica, os quais são definidos como: produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento (Pantoja; Campos; Salcedos, 2013, p.1).

Este trabalho possui cinco capítulos, incluindo esta introdução. O capítulo seguinte conta com a revisão da literatura. Nela, é abordada a importância do desenho geométrico e das tecnologias digitais na Educação Básica; a teoria dos Registros de Representação Semiótica; a Investigação Matemática e alguns trabalhos relacionados ao tema da pesquisa.

O terceiro capítulo aborda os procedimentos metodológicos realizados para a elaboração da sequência didática. É feita a caracterização da pesquisa e o detalhamento da intervenção pedagógica, abrangendo o Planejamento, com a elaboração da sequência didática, elaboração e escolha dos *applets* e do roteiro de perguntas para a entrevista. O capítulo também conta com detalhes para o teste exploratório e sobre as fases de Implementação e Avaliação.

O quarto capítulo, por sua vez, apresenta os resultados obtidos com a aplicação do teste exploratório e da sequência didática, realizados com um grupo de licenciandos e um grupo de alunos do Ensino Médio, respectivamente. Ao final, são apresentadas as considerações finais desta pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, é apresentado o aporte teórico que fundamenta os estudos da pesquisa a ser desenvolvida. Está dividido em quatro seções: (i) A importância do desenho geométrico e das tecnologias digitais na Educação Básica; (ii) A Teoria dos Registros de Representação Semiótica; (iii) A Investigação Matemática; e (iv) Trabalhos relacionados.

2.1 A importância do desenho geométrico e das tecnologias digitais na Educação Básica

A aquisição de conhecimento e o estudo da Matemática se desenvolvem por meio de diferentes representações. De acordo com Damm (2000, p.177):

> Para que ocorra a apreensão de um objeto Matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito, que apreende de vários registros de representação.

Neste contexto, as construções geométricas são uma ferramenta importante para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria, pois auxiliam o estudante na integração entre conceito e aplicação, e na proximidade das definições com a sua representação geométrica (Vitor, 2013). Segundo Vitor (2013), as formas geométricas são as mais primitivas e puras de apresentação de ideias matemáticas.

As construções geométricas são de grande importância e trazem diversas vantagens para o ensino e aprendizagem da Geometria. De acordo com Castro (2019, p.80):

> O desenho geométrico surge, assim, como possibilidade de colocar em prática os conceitos, definições e teoremas estudados ao longo do surgimento da geometria plana e espacial. Tais práticas auxiliam no desenvolvimento cognitivo, além de possibilitar aos alunos a prática de conceitos que muitas vezes não são fáceis de se perceber no processo de aprendizagem.

Entretanto, afirma Varhidy (2010), assim como a Geometria, o desenho geométrico sempre esteve “em segundo plano” no currículo escolar, seja pela falta de tempo ou pela pouca preparação dos profissionais da educação para ministrarem aulas nessa área da Matemática. Nessa perspectiva, este autor também afirma que:

> Temos notado haver certa hierarquia, um tanto insensata, dentro e fora da Escola, que considera Álgebra superior à Geometria, e ambos (muito) superiores ao Desenho Geométrico. É como se o Desenho Geométrico fosse mais simples, mais superficial, até mesmo desnecessário para a Educação Matemática, enquanto a Álgebra e a Geometria alcançassem reflexões mais profundas, exigissem raciocínio mais apurado, buscassem sentimentos mais elevados (Varhidy, 2010, p. 6-7).

Agravando este cenário, no ano de 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n 4.024 (Brasil, 1961), decretou o fim da obrigatoriedade do ensino de desenho geométrico, que foi gradualmente excluído dos currículos escolares.

Este trabalho pretende utilizar o desenho geométrico no estudo de uma das cônicas, a elipse. De acordo com Santos (2014), as cônicas estão frequentemente presentes no ambiente que nos cerca e têm aplicações em diversas áreas de estudo, como Astronomia, Engenharia, Arquitetura, etc.

Entretanto, o processo de ensino e aprendizagem dessas curvas carrega consigo diversos problemas. Por vezes, o conteúdo não é contemplado no currículo escolar (Lopes, 2014) e quando é apresentado, limita-se apenas a linguagem algébrica, em que são apresentadas suas equações, como afirma Vitor (2013):

> Um grave problema no estudo das cônicas na educação básica é o fato de serem mencionadas efetivamente como um objeto de estudo matemático depois que inicia o aprendizado de geometria analítica. A consequência é que boa parte dos alunos que finalizam o ensino médio, quando carregam alguma informação sobre cônicas, está relacionada apenas às suas equações (Vitor, 2013, p. 17).

Nesta pesquisa, as construções da cônica elipse serão feitas por meio de Tecnologia Digital. Silva (2019) afirma que a Matemática apresenta conceitos abstratos e estruturas que boa parte dos alunos consideram de difícil compreensão. Salienta ainda, que o uso das tecnologias digitais dentro da sala de aula enriquece o processo de ensino e aprendizagem, evidenciando sua participação e fazendo com que a aprendizagem seja mais significativa.

Os PCN (Brasil, 1998) trazem, como um de seus objetivos para o Ensino Fundamental, a utilização de tecnologia durante as aulas, visto que ela está presente no cotidiano dos alunos. Afirmam como um objetivo: “apontar a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que contemplem o uso das tecnologias da comunicação e da informação, para que todos, alunos e professores, possam delas se apropriar e participar, bem como criticá-las e/ou delas usufruir” (Brasil, 1998, p.11).

O uso das tecnologias, por meio de softwares educativos, possui grande importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sobretudo no ensino da Geometria. Silva (2019) afirma que o recurso computacional é um instrumento que, quando utilizado na Geometria, desenvolve habilidades de visualização devido a facilidade de movimentar as figuras por meio de software de Geometria dinâmica, que promove aquisição e formalização, com maior facilidade, dos conceitos geométricos.

Para tanto, esta pesquisa utilizará o GeoGebra como recurso digital, visto que é considerado um auxílio para demonstração e exemplificação de conteúdos matemáticos. Tomaz e Lima (2022) afirmam que esse software promove a interação entre alunos e professores, uma vez que apresenta uma linguagem simples e funcionalidades alternativas para a resolução de problemas, viabilizando a compreensão conceitual e estimulando o interesse e a curiosidade dos estudantes. Constatam também que estimula a capacidade de relacionar as linguagens algébrica e geométrica. Portanto, esse é um recurso que por meio de suas funcionalidades e dinamismo, potencializa a aprendizagem, agregando valor aos métodos de ensino já utilizados, como afirmam os autores.

Ainda na visão dos autores Tomaz e Lima (2022), o software GeoGebra permite aos alunos, por meio de suas ferramentas de manipulação e movimentação, fazerem indagações e alcançarem soluções, pois potencializa a relação da teoria com a prática. Estes autores observam que, com o seu uso, ocorre uma maior percepção das propriedades geométricas comparado a utilização apenas de meios convencionais.

Além disso, este software desperta interesse e curiosidade dos estudantes, instigando o raciocínio lógico por permitir, ao aluno, fazer conjecturas e desenvolver o processo dedutivo (Tomaz; Lima, 2022).

2.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval foi um filósofo e psicólogo que desenvolveu, no contexto da Psicologia Cognitiva, um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual tem se mostrado frutífera para a realização de pesquisas no âmbito da Didática da Matemática. Grande parte das investigações que têm sido realizadas, inclusive no Brasil, utilizam esse referencial teórico (Bonomi, 2007).

Em sua teoria, Duval (2012) apresenta as Representações Semióticas como "[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (Duval, 2012, p. 269).

Ele pondera que a apreensão conceitual de um objeto (noesis) é inseparável de sua representação semiótica (semiose). Duval (2011, 2012) afirma que não há noesis sem semiose e isso resulta num paradoxo cognitivo do pensamento matemático que gera dificuldades na aprendizagem. Para tal, é necessário a mobilização de diferentes registros de representação semiótica (figuras geométricas, representações gráficas, símbolos, língua materna, sistemas de numeração, escritas algébricas, etc.) durante um mesmo passo na atividade matemática, podendo optar por qual registro utilizar (Duval, 2011, 2012).

Para o autor, "O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação" (Duval, 2012, p. 270). Ele considera essas diversas representações, absolutamente necessárias.

Do ponto de vista epistemológico, a Matemática é um tipo de conhecimento completamente diferente dos outros, visto que o acesso aos objetos matemáticos é feito exclusivamente pelo estabelecimento de produções semióticas. O modo de trabalhar em Matemática é indissociável da transformação de representações matemáticas em outras representações semióticas de um mesmo sistema semiótico (Duval, 2014).

Duval (2003) *apud* Lopes (2012) classifica as representações semióticas nos seguintes registros: linguagem natural (oralmente ou por escrito), sistemas de escritas (numéricos e algébricos), figuras geométricas planas ou em perspectiva e grafos cartesianos.

Para Duval (2011, 2018), dependendo do problema a ser resolvido, um registro pode aparecer favorecido em detrimento do outro. Dessa forma, as representações semióticas não são, do ponto de vista matemático, equivalentes ou igualmente adequadas para um determinado contexto. O critério da escolha de uma representação em detrimento da outra depende das operações que são necessárias realizar para obter outras representações cujos conteúdos mostrarão um novo dado ou uma nova informação (Duval, 2014).

Há três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: Formação, Tratamento e Conversão. Para Duval (2011, 2012), a Formação pode ser comparada à realização de uma tarefa de descrição. Inicialmente, identificando e reconhecendo a representação, para depois verificar a possibilidade da utilização para o Tratamento. Um exemplo da Formação é a equação da elipse com o eixo focal paralelo ao eixo x (Figura 1).

Figura 1 - Exemplo da Formação no contexto da equação da elipse

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Elaboração própria.

De acordo com Duval (2011), uma representação semiótica pode ser transformada em outra representação semiótica por meio do Tratamento ou da Conversão.

Duval (2011) e Damm (2008) consideram o Tratamento como a transformação de uma representação no mesmo registro. Neste sentido, é relacionado à forma e não ao conteúdo da representação. Desta forma, é possível realizar Tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático, dependendo do registro em que está sendo representado. Cada registro possui diferentes regras de Tratamento, específicas da sua representação.

Um exemplo de Tratamento é quando um cálculo é efetuado mantendo-se em um mesmo sistema de escrita ou de representação dos números (Figura 2).

Figura 2 - Exemplo do Tratamento no contexto de uma equação da elipse

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

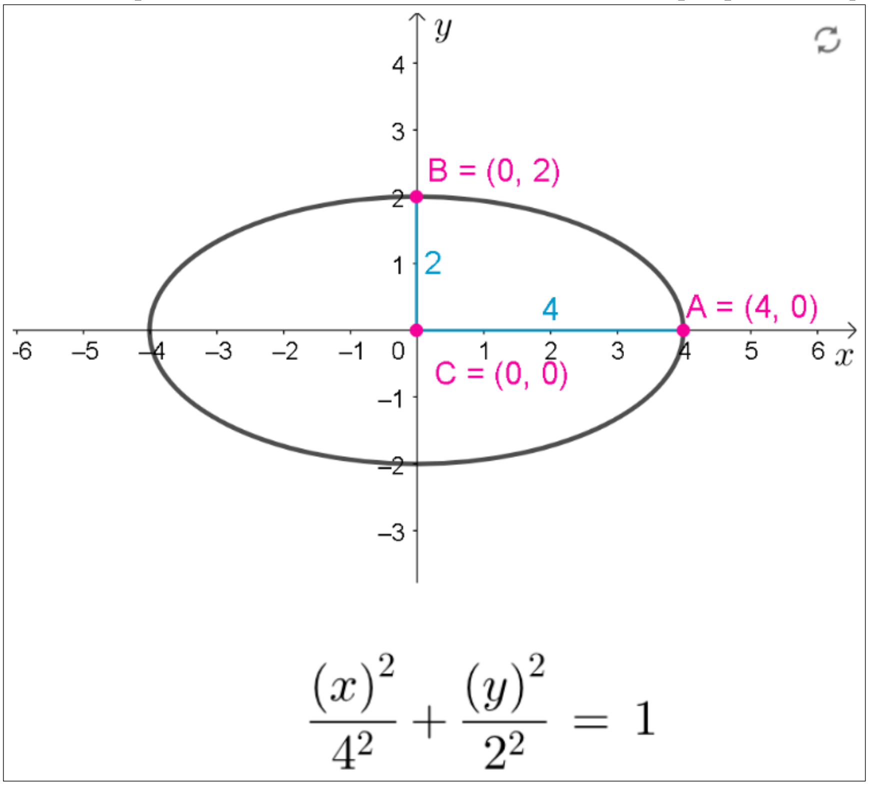
$$\frac{5(x-2)^2}{15} + \frac{3(y-1)^2}{15} = 1$$

$$5(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 15$$

Fonte: Elaboração própria.

Duval (2011) considera a Conversão como a Transformação que altera o registro de representação, mantendo o mesmo objeto matemático. A Figura 3 exemplifica esta atividade por meio da Transformação da representação gráfica na escrita algébrica de uma equação.

Figura 3 - Exemplo da Conversão no contexto do estudo da elipse para sua equação



Fonte: Elaboração própria.

Ainda segundo Duval (2011, p.15), “Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes”.

Acerca da relação entre o Tratamento e a Conversão, Duval (2011) afirma que:

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (Duval, 2016, p. 16).

De acordo com Duval (2018), o acesso aos objetos matemáticos faz-se de maneira exclusiva pelo estabelecimento de produções semióticas e isso traduz-se pelo fato de que a Matemática é um domínio de conhecimento que utiliza quase todo o espectro dos tipos possíveis de representações semióticas. Neste contexto, Duval (2011) afirma que a razão de dificuldades em alguns conteúdos matemáticos não está diretamente ligada aos conceitos matemáticos ligados a este conteúdo, mas à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre os registros de representação que o cercam.

Duval (2011) discorre que jamais deve-se confundir um objeto e sua representação, portanto, a compreensão em Matemática está diretamente relacionada à capacidade de mudar de registro. Afirma também que a compreensão Matemática está baseada na disposição de ao menos dois registros de representações diferentes, para que, desta forma, não se confunda o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

2.3 A Investigação Matemática

O texto escrito nesta seção conta, em sua maioria, com a referência "Investigações Matemáticas na Sala de Aula" de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (2009). Por isso, ela não será mencionada em citação, exceto no caso de citação direta.

A realização de uma Investigação Matemática é composta por quatro momentos: (i) exploração e formulação de questões; (ii) formulação de conjecturas; (iii) testes e reformulação; e (iv) justificação e avaliação.

O primeiro momento aborda o reconhecimento da situação problemática, a exploração preliminar da mesma e a formulação de questões. Esta etapa ocupa maior tempo, apesar de muitas vezes parecer que nada está acontecendo e que os alunos estão com restrições. Para estes autores, é nessa fase que os alunos vão se empenhando na situação e começam a formular conjecturas. Lorenzato (2010) afirma que:

> A importância da experimentação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão, construção de conhecimento. Isso pode ocorrer em meio ao silêncio, o que lembra Guimarães Rosa: "mesmo quando nada acontece, há um milagre que não estamos vendo" (Lorenzato, 2010, p. 72).

O segundo momento abrange a organização dos dados obtidos no primeiro momento, realizando afirmações e formulando conjecturas. Os autores afirmam que, às vezes, o raciocínio indutivo fica confinado ao pensamento do aluno que não formula explicitamente a conjectura ou a verbaliza parcialmente, completando, com a linguagem gestual, aquilo que não é dito.

O terceiro momento refere-se à realização de testes e ao refinamento das conjecturas e estimulando os alunos a se autoquestionarem.

O último momento, por sua vez, diz respeito à argumentação, demonstração, justificando as conjecturas e avaliando o raciocínio ou o resultado obtido.

A primeira Atividade Investigativa proposta neste trabalho é finalizada com uma questão que pede definição, e, como não se prova uma definição, precisou-se abdicar da 4ª. fase do processo de investigação, tendo como último momento o refinamento das conjecturas.

Da mesma forma, a segunda Atividade Investigativa, no contexto da investigação, aborda a passagem de um registro de representação para outro, não cabendo, também, a 4ª. fase do processo de investigação.

Portanto, utilizou-se, nesta pesquisa, as três primeiras fases do processo de Investigação Matemática pelo foco da investigação ocorrer em contextos que não caberiam uma demonstração formal.

De acordo com Braumann (2002 *apud* Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p.19), "Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem".

A premissa de utilizar a Investigação Matemática como atividade no processo de ensino e aprendizagem permite levar aos alunos o espírito da atividade matemática genuína, constituindo uma poderosa metáfora educativa, pois "O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p.23).

Vale ressaltar que, na Investigação Matemática, o ambiente que se cria na sala de aula é essencial para o seu êxito. Para isso, os alunos precisam se sentir à vontade e ter tempo para pensar, explorar as questões e expor suas ideias, sentindo que seu raciocínio e conjecturas formuladas são valorizados. Ainda segundo os autores, os discentes precisam, também, saber que as suas ideias devem ser discutidas com os colegas, sem a necessidade da validação constante do professor.

O professor, por sua vez, tem um papel crucial nas aulas de Investigação Matemática, interagindo com os alunos e os levando a se autoconfrontar com dificuldades e dilemas, garantindo que o trabalho flua e seja significativo, ao passo que lhe dê a autonomia para não interferir na sua investigação. Ele deve, inicialmente, observar como os alunos estão desenvolvendo o processo de investigação, e, durante o processo, deve questionar os alunos e pedir explicações do seu raciocínio, desempenhando o papel de mediador, reafirmando os resultados mais significativos e evitando validá-los. Os autores afirmam que:

> Quando os alunos se confrontam com dúvidas ou um impasse no seu trabalho, não sabendo como prosseguir, o professor deve começar por colocar questões abertas. Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la, levando-os a pensar melhor sobre o seu problema (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p. 52).

2.4 Trabalhos relacionados

Para embasar o estudo deste trabalho, no dia vinte e quatro de agosto de 2022 foi realizada uma pesquisa avançada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Foram utilizadas as palavras-chave: “elipse”, “construções geométricas” e “ensino médio”, simultaneamente. Dessa forma, foram encontrados sete trabalhos relacionados. Após a leitura dos resumos dos mesmos, dois trabalhos foram selecionados por serem semelhantes ao tema e a proposta em questão: Vasconcelos (2013) e Santos (2014).

Com o objetivo de buscar mais trabalhos relacionados ao tema, fez-se uma nova pesquisa no Google Acadêmico, ainda no dia vinte e quatro de agosto de 2022.

Desta vez, foram utilizadas as palavras-chave: “elipse”, “GeoGebra”, “construção geométrica”, “cônicas” e “ensino médio”. Para essa busca, foi utilizado o conectivo “e” entre todas as palavras e, ainda, os seguintes filtros: (i) Período: 2018- 2022 e (ii) Somente textos em português. Como resultado, obteve-se seis trabalhos. Destes, após a leitura de todos os resumos, um foi selecionado por se assemelhar com o tema em questão: Tomaz e Lima (2022).

A seguir, serão descritos os três trabalhos relacionados.

2.4.1 Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à Álgebra

A dissertação “Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à Álgebra” escrita por Marcelo Honório dos Santos (2014), trata-se de um estudo bibliográfico realizado pelo autor. A motivação do mesmo se deu pelo fato do autor criticar a forma como é transmitido o estudo das cônicas na Educação Básica, ou seja, a partir de fórmula e de suas aplicações, ignorando, assim, a parte geométrica deste assunto. Por este motivo, o autor acredita que as cônicas geralmente despertam pouco interesse por parte dos alunos.

Santos (2014) explicita em seu texto, a definição de todas as cônicas, desde a sua parte histórica até a sua relação com a Álgebra. Ele utiliza o software GeoGebra e mostra, por meio de um passo a passo, a construção da hipérbole, da elipse e da parábola.

Este trabalho é destinado a todos os educadores que atuam na Educação Matemática, principalmente aos professores que lecionam nas séries finais do Ensino Médio.

Os pontos em comum com este trabalho são a motivação do autor e a utilização do software GeoGebra para a construção das cônicas. O ponto distinto, por sua vez, é o fato do trabalho ser uma pesquisa bibliográfica e não ter uma aplicação de sequência didática.

2.4.2 Uma abordagem de curvas no Ensino Médio

Escrita por Cleverton da Silva Vasconcelos (2013), a dissertação “Uma abordagem de curvas no Ensino Médio” traz um roteiro que busca facilitar o ensino e aprendizagem das cônicas. O autor trabalha com pré-requisitos para o estudo, contextualização histórica, análise da presença das cônicas no cotidiano, a construção geométrica utilizando régua e compasso e, por fim, desenvolve o conceito analítico (elementos e equações).

O público-alvo deste trabalho são os alunos do Ensino Médio e o objetivo não é claramente indicado, assim como a metodologia adotada.

Os pontos em comum com este trabalho são o público-alvo e o uso de construções geométricas no estudo de cônicas. Os trabalhos também se aproximam por abordarem a Geometria antes da Álgebra.

Entretanto, os trabalhos se distanciam, pelo autor não ter relatado uma aplicação de sequência didática e também por não utilizar nenhum software matemático para as construções das cônicas.

2.4.3 Proposições ao ensino de Geometria: uma proposta de sequência didática para o estudo de cônicas utilizando o GeoGebra

O trabalho escrito por Elisama Costa Tomaz e Francisco José de Lima (2022), com o título “Proposições ao ensino de Geometria: uma proposta teórica de sequência didática para o estudo de cônicas utilizando o GeoGebra”, trata-se de uma proposta teórica visando o ensino de cônicas por meio do software GeoGebra tendo como público-alvo os alunos do Ensino

Médio. Os autores acreditam que utilizar o software para a construção das cônicas auxiliará na visualização das mesmas, facilitando, assim, seu aprendizado.

Este trabalho tem como objetivo: "[...] apresentar e descrever um caminho para o ensino de cônicas (elipse, hipérbole e parábola), por meio do GeoGebra, na perspectiva de desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de alunos do Ensino Médio" (Tomaz; Lima, 2022, p. 64).

O estudo apoiou-se em uma pesquisa qualitativa realizada, inicialmente, por uma pesquisa bibliográfica, por meio das quatro etapas defendidas por Gil (2008): (i) seleção das fontes de estudo; (ii) coleta de dados feita a partir da leitura exploratória e seletiva do material; (iii) análise e interpretação dos resultados a partir de leitura analítica dos trabalhos, com a finalidade de organizar as informações; e (iv) discussão dos resultados obtidos.

A seguir, a partir da Engenharia Didática, foram construídas sequências didáticas pautadas nas etapas Análise Prévia e Análise a Priori, na qual foram definidas as variáveis e descritas cada atividade proposta.

Os autores apresentam duas sequências didáticas: uma sobre a construção da elipse e outra sobre a construção da hipérbole, ambas no software GeoGebra.

Como pontos em comum com este trabalho, tem-se: a construção da elipse por meio do software GeoGebra, a criação de uma sequência didática sobre esta cônica e o público-alvo. Contudo, se difere a este trabalho pelo fato de a sequência didática não ter sido aplicada.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o intuito de propiciar uma melhor compreensão do percurso metodológico adotado neste trabalho, evidencia-se o objetivo geral: Identificar as contribuições da Investigação Matemática e da Tecnologia Digital para o estudo da elipse no Ensino Médio.

Este capítulo está dividido em duas seções: (i) a caracterização da pesquisa, na qual são salientados o tipo de pesquisa, o público-alvo, os instrumentos de coleta de dados e as etapas da pesquisa; e (ii) o detalhamento da Intervenção Pedagógica, realizado por meio do planejamento, da implementação das mudanças propostas e da avaliação dos efeitos dessas mudanças.

3.1 Caracterização da pesquisa

A metodologia adotada para esta pesquisa é a qualitativa pelo fato de não ter como foco a representatividade numérica, mas deter-se a analisar com profundidade os resultados obtidos pelos alunos na realização da sequência didática, suas contribuições e dificuldades com a proposta (Gerhardt; Silveira, 2009).

Utilizou-se a metodologia qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica. De acordo com Damiani *et al.* (2013), intervenções são as inferências, realizadas propositalmente, nas práticas pedagógicas. Estas interferências são planejadas e implementadas de acordo com um referencial teórico, objetivando promover avanços e melhorias nessas Práticas (Damiani *et al.*, 2013).

A metodologia de ensino utilizada neste trabalho é a Investigação Matemática. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.13), "[...] investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". Vale ressaltar que, devido ao escopo das investigações feitas, foram utilizadas as três primeiras fases desta metodologia.

A análise de dados desta pesquisa será feita com base no referencial teórico, especialmente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Inicialmente, o público-alvo eram alunos da 3ª. série do Ensino Médio. Esta escolha se deu pelo fato do conteúdo de cônicas estar presente no programa desta série. Entretanto, houve uma alteração que será detalhada no item 3.2.2.

Os instrumentos de coleta de dados utilizados neste trabalho são: a observação, as anotações no caderno de campo, as respostas dos alunos nas atividades, entrevista semiestruturada e a gravação em áudio desta última.

Segundo Vianna (2003), a observação é uma fonte de informação muito importante nas pesquisas qualitativas em Educação. Afirma ainda, que “Ao observador não basta simplesmente olhar. Deve, certamente, saber ver, identificar e descrever diversos tipos de interações e processos humanos” (Vianna, 2003, p. 12).

Quanto à entrevista semiestruturada, Nunes, Nascimento e Luz (2016), afirmam que, neste tipo de entrevista, pode-se conservar a padronização das perguntas sem impor as opções de respostas ao entrevistado, deixando-o formular uma resposta pessoal, e mantendo a neutralidade do entrevistador. Ressaltam também que, neste tipo de entrevista, é possível acrescentar questões, de acordo com o andamento da mesma.

Este trabalho está dividido em quatro etapas, sendo elas:

1. Revisão Bibliográfica;
2. Planejamento da ação. Esta etapa está dividida em:
    - Elaboração/escolha dos *applets* que serão utilizados durante as aulas;
    - Elaboração da sequência didática;
    - Aplicação do teste exploratório;
    - Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista.
3. Implementação da ação interventiva que ocorrerá com a aplicação da sequência didática desenvolvida;
4. Avaliação dos efeitos da intervenção feita por meio dos instrumentos de coleta de dados.

3.2 Detalhamento da Intervenção Pedagógica

Esta seção consiste no detalhamento da Intervenção Pedagógica, a partir da definição proposta por Damiani *et al.* (2013), que afirma que os estudos baseados neste tipo de intervenção abrangem o planejamento, a implementação de interferências e a avaliação dos seus efeitos. Desta forma, o detalhamento está organizado em três partes: o planejamento, a implementação e a avaliação.

3.2.1 O Planejamento

O Planejamento constitui-se da elaboração da proposta pedagógica, da escolha dos *applets*, da elaboração do roteiro da entrevista semiestruturada e da realização do teste exploratório.

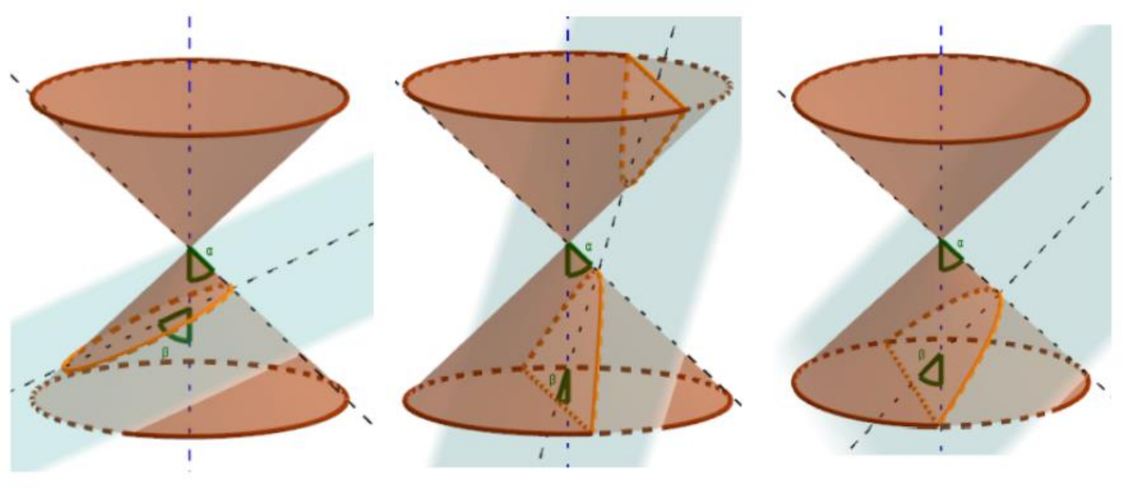
3.2.1.1 Elaboração da Sequência Didática

A sequência didática está dividida em seis momentos: (i) Seções Cônicas; (ii) A elipse na ciência; (iii) Atividade Investigativa 1; (iv) Elementos e equações da elipse; (v) Atividade Investigativa 2; e (vi) Propriedade refletora.

(i) Apresentação das Seções Cônicas

O início do primeiro momento constitui-se da apresentação, por meio de slides[2] (APÊNDICE D), dos elementos presentes num cone de duas folhas (geratriz e eixo) e das seções cônicas que podem ser geradas no mesmo (Figura 4).

Figura 4 - Seções cônicas



(a) Seção cônica tipo Elipse (b) Seção cônica tipo Hipérbole (c) Seção cônica tipo Parábola

Fonte: Muniz Junior (2018, p. 8).

Abaixo, seguem as definições, baseadas em Fainguelernt (1980), das seções cônicas geradas no cone de duas folhas:

[2]Os slides utilizados nesta sequência didática podem ser acessados pelo link: https://encurtador.com.br/emIT1.

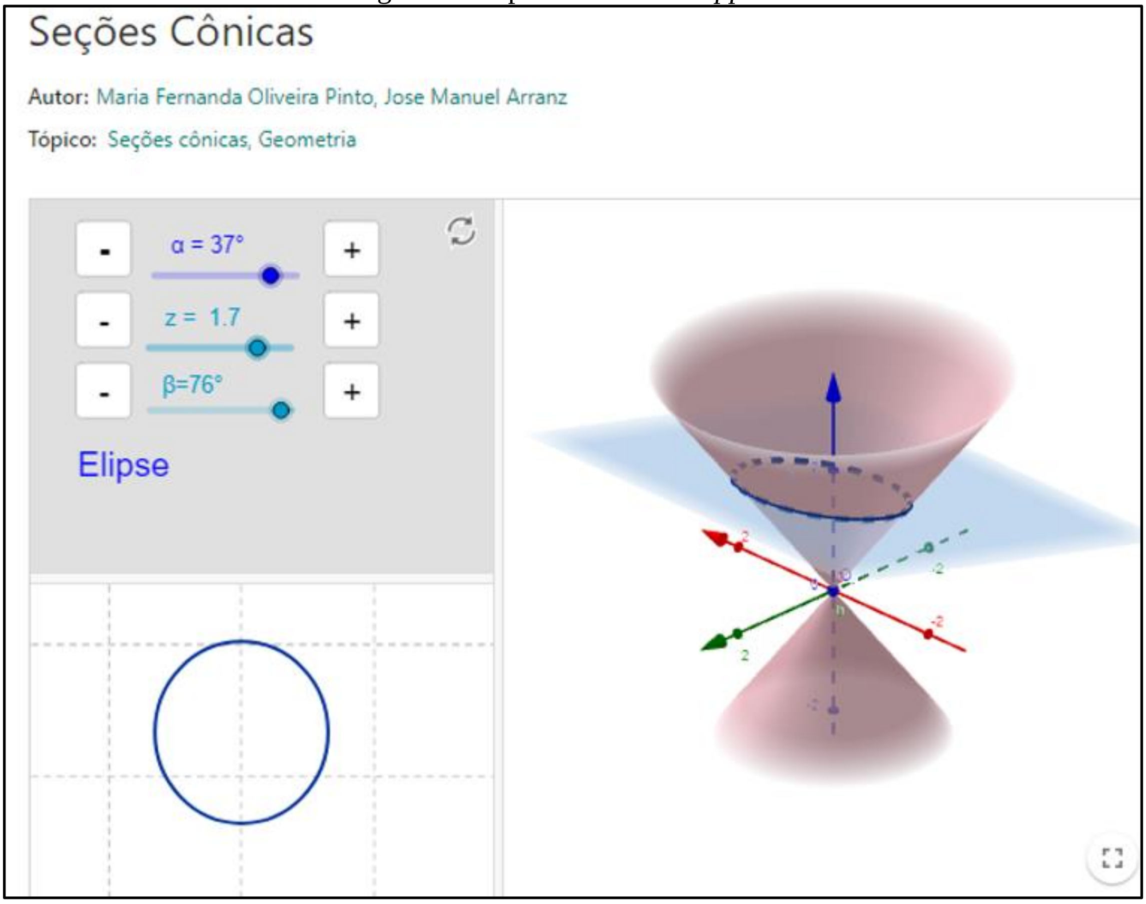
(a) Seção cônica tipo Elipse: O plano da seção é oblíquo ao eixo vertical e intersecta as geratrizes em uma única folha da superfície;

(b) Seção cônica tipo Hipérbole: O plano da seção intersecta as duas folhas da superfície cônica;

(c) Seção cônica tipo Parábola: O plano da seção é paralelo a uma geratriz da superfície.

Posteriormente, é utilizado o *Applet* 1 (Figura 5), no GeoGebra, para mostrar a movimentação de um plano secante ao cone e as respectivas seções cônicas que são geradas. Este momento tem como objetivo apresentar as seções cônicas por meio de um software de geometria dinâmica, que, de acordo com Costa (2013), é um facilitador da aprendizagem, visto que esta geração está familiarizada com computadores e tecnologia e, portanto, sua utilização cria um ambiente receptivo aos alunos, além de despertar mais curiosidade.

Figura 5 - Captura de tela do *Applet* 1



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/tz9h7rwk.

Scheffer (2006) afirma que os produtos multimídia têm impulsionado muitas pesquisas no meio educacional por desempenharem um papel significativo para a dinamização da aula, “proporcionando aprendizagem, motivação, reflexão, discussão e conhecimento” (Scheffer, 2006, p.101). Entretanto, Kallef (2006) sustenta que:

> [...] por mais sofisticadas que possam vir a ser as simulações tridimensionais, geradas, as representações resultantes permanecem planas na tela do computador e não dispensam a utilização dos artefatos tridimensionais desenvolvidos para a atividade (Kallef, 2006, p.118).

Neste contexto, utiliza-se material manipulável nesta sequência didática. Reys (1996 *apud* Botelho; Moraes, 2021, p.3) define material manipulável como “[...] objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”.

Segundo Lorenzato (2006), os materiais didáticos manipuláveis podem ser utilizados para desempenhar diferentes funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a redescoberta dos alunos. Com base nessas ideias, ainda no primeiro momento, é apresentado um cone de material manipulável (Figura 6), contendo os cortes que geram as cônicas ou parte delas. O material utilizado pertence ao acervo do Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) do Instituto Federal Fluminense c*ampus* Campos Centro e foi produzido por uma impressora 3D.

Figura 6 - Materiais didáticos manipuláveis: Cone com cortes (i); A elipse (ii); Um ramo da hipérbole (iii)

i) Cone com cortes	ii) A Elipse	iii) Um ramo da hipérbole

Fonte: Elaboração própria.

Rodrigues e Gazire (2012) afirmam que os materiais manipuláveis representam um importante recurso didático, auxiliando o professor em sala de aula, visto que a ação manipulativa aproxima a teoria matemática da sua constatação na prática, tornando as aulas mais dinâmicas e acessíveis. Ponte (2009) apoia a utilização desses materiais, por serem adequados ao estudo de vários conceitos, além de gerar entusiasmo nos alunos.

Segundo Lorenzato (2006), o material manipulável é eficiente para os alunos que, não compreendendo a mensagem (visual) apresentada na tela do computador, possam recorrer ao material e prosseguir sem dificuldades.

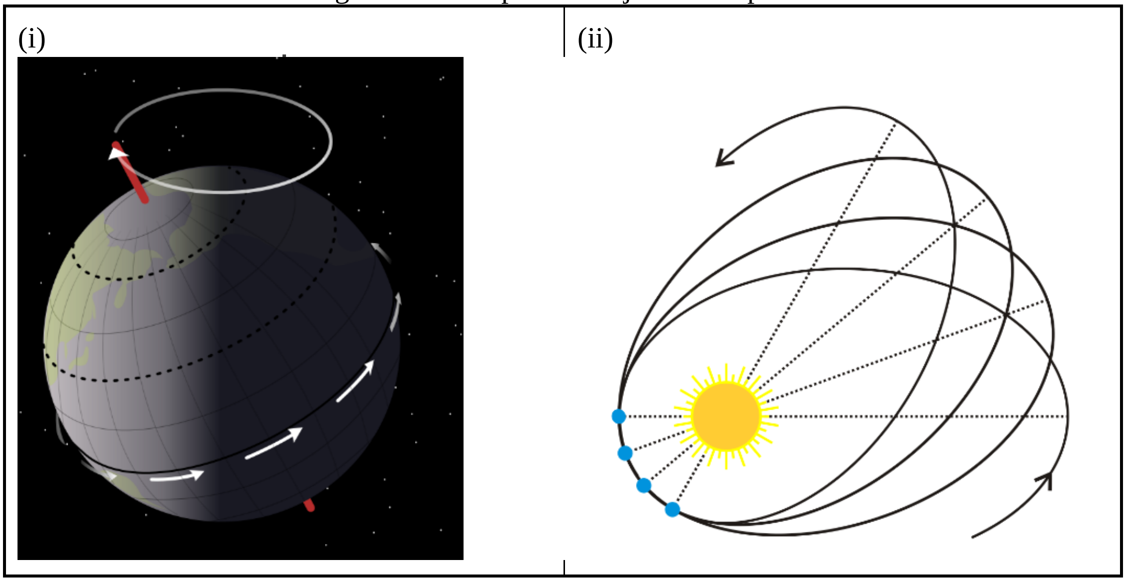
Após a apresentação das seções cônicas, inicia-se o segundo momento.

(ii) A elipse na ciência

Considerando que o foco do trabalho é sobre elipse, o segundo momento, também apresentado por slides, aborda a presença da elipse na ciência, visando mostrar a importância desta curva em outros domínios.

Um exemplo na natureza são as trajetórias dos corpos celestes. Isaac Newton mostrou que uma das trajetórias é elíptica (Figura 7).

Figura 7 - Exemplos de trajetórias elípticas



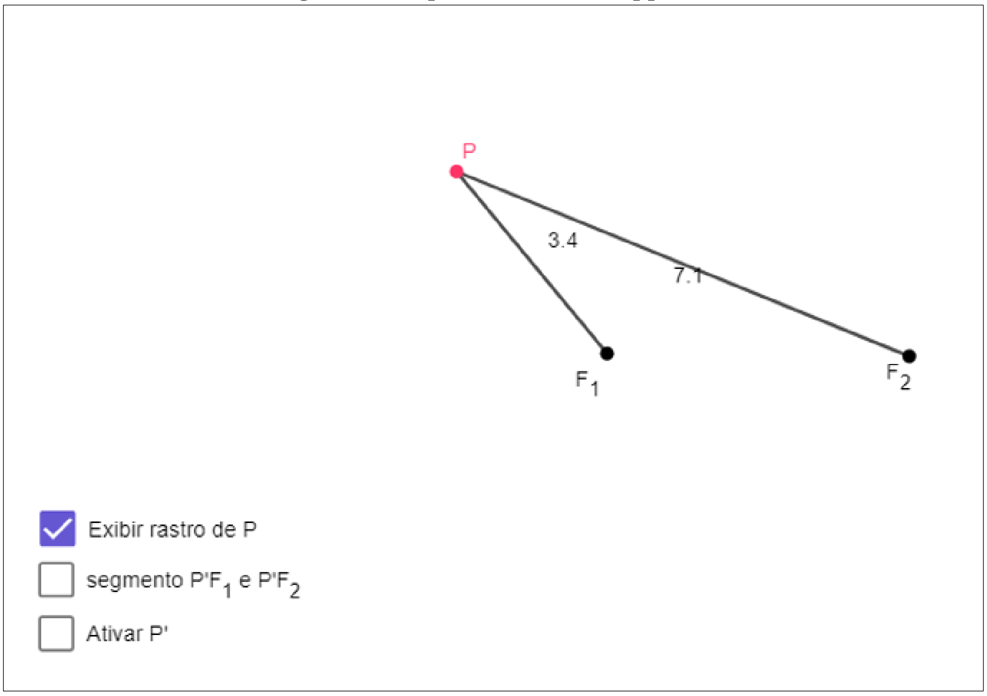
Fonte: Cunha; Tort, (2017, p. 17).

(iii) Atividade Investigativa 1

O terceiro momento da sequência didática é composto pela Atividade Investigativa 1. É entregue uma cópia da atividade aos participantes, contendo, no alto da folha, uma identificação (A_1; A_2; ...) para efeito da análise de dados. Esta identificação deve ser repetida, pelos participantes, em todos os materiais impressos que receberem no decorrer da aula.

Para a realização desta atividade, é utilizado o *Applet* 2 (Figura 8), criado no GeoGebra. De acordo com Vaz e Jesus (2014), o software pode ser utilizado pelo aluno para que ele movimente os objetos matemáticos e perceba relações, compare a Álgebra com a Geometria e interaja com o objeto do saber, construindo sua própria experiência.

Figura 8 - Captura de tela do *Applet* 2



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/ensk6t6s.

O objetivo da atividade é observar que a soma das distâncias de um ponto da elipse a dois pontos fixos do plano é constante e que essa distância deve ser maior do que a distância entre esses pontos.

No item **a** (Figura 9) deve-se observar que a soma das distâncias de um ponto da elipse a dois pontos fixos é constante.

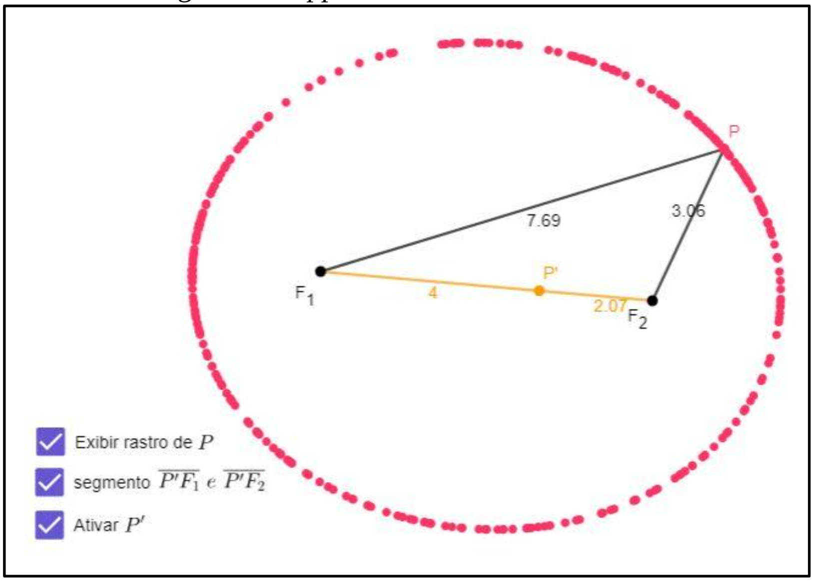
Figura 9 - Item **a** da Questão 1

> a) Considerando que os pontos $F1$ e $F2$ são distintos e fixos em um plano, movimente o ponto P e investigue o comportamento dos segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ na formação da elipse. O que é possível afirmar sobre a relação entre os segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ e esta formação?

Fonte: Elaboração própria.

No item **b** (Figura 10), deve-se identificar que essa constante deve ser maior que a distância entre os pontos fixos. Para isso, deve-se ativar, no A*pplet* 2, as caixas de exibição “segmento $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$” e “Ativar P’”. P’ é um ponto móvel que pertence ao segmento $\overline{F_1F_2}$.

Figura 10 - *Applet* 2 com as caixas ativadas



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/ensk6t6s.

Neste item, é solicitado que o ponto P’ seja movimentado para que se observe os valores de $\overline{P'F_1}$ e $\overline{P'F_2}$. Ao final, questiona-se se o ponto P’ pertence ou não à elipse.

Para finalizar, nos itens **c** e **d** (Figura 11), os participantes devem concluir a condição para que um ponto pertença à elipse, e completar o texto, formalizando a definição da mesma. Este item tem por finalidade organizar e relacionar as conjecturas dos itens anteriores, evidenciando a “formação”, a atividade cognitiva fundamental ligada a semiose, presente da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Figura 11 - Itens **c** e **d** da Questão 1

c) Considerando o que foi observado nos itens a) e b), qual deve ser a condição para que um ponto P pertença a uma elipse?

d) Com base na investigação realizada, complete o texto abaixo:

Considerando $F1$ e $F2$ dois pontos distintos e fixos em um plano, pode-se afirmar que um ponto P deste plano pertencerá a uma elipse quando ____

____

Fonte: Elaboração própria.

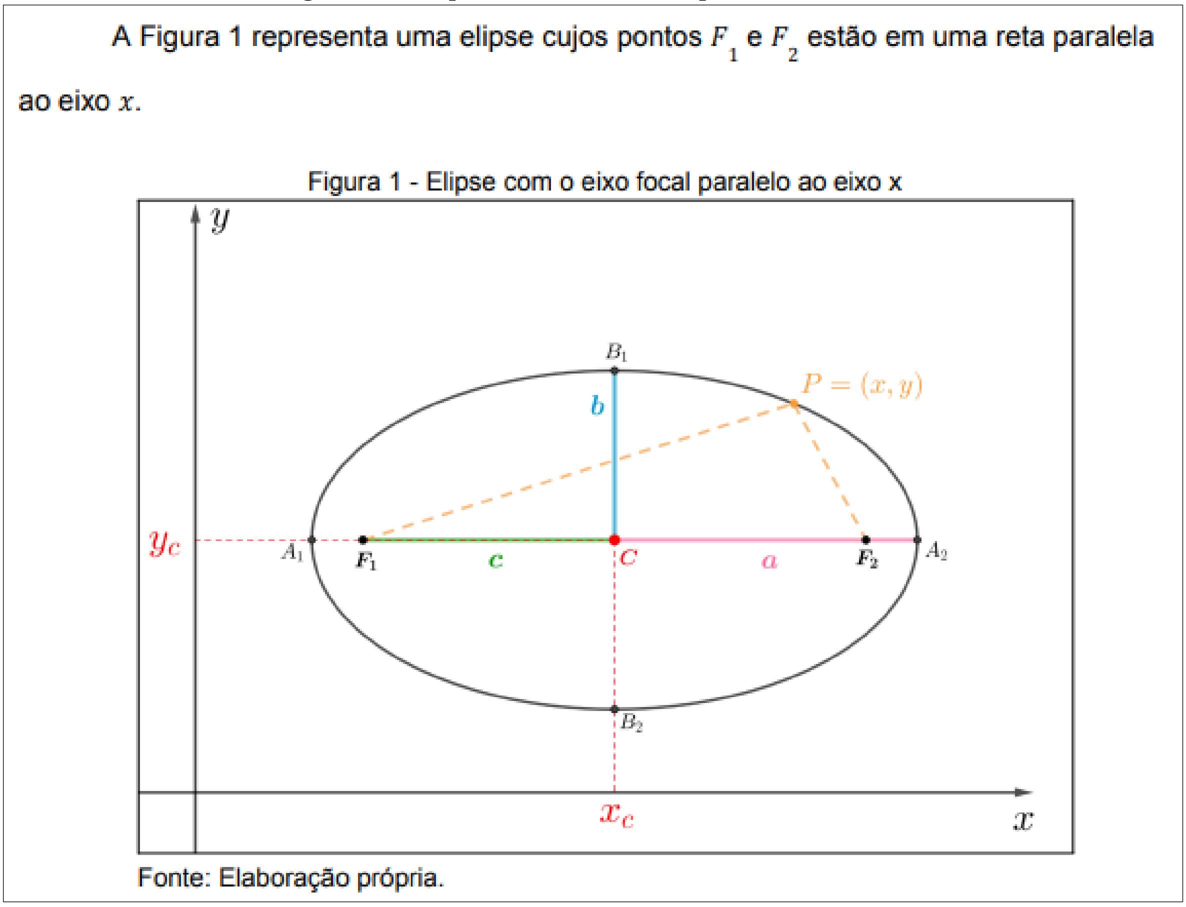
Após a realização da Atividade Investigativa 1, é feita a apresentação dos elementos e das equações da elipse.

(iv) Elementos e equações da elipse

Para o quarto momento, os alunos recebem uma cópia do material com a apresentação dos elementos e das equações da elipse (APÊNDICE A). No início, é apresentada a definição de elipse, adaptada de Machado (1982): A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante, maior do que a distância entre estes pontos fixos (Machado, 1982).

Posteriormente, são apresentadas duas elipses no plano cartesiano. Primeiro, com o eixo focal paralelo ao eixo x (Figura 12), sendo explicitados os seus elementos: foco, centro, eixos maior e menor; e equação.

Figura 12 - Elipse com o eixo focal paralelo ao eixo x



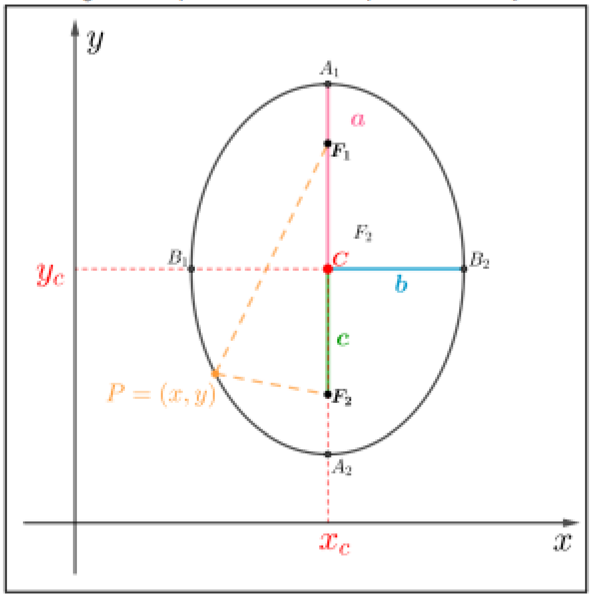
Fonte: Elaboração própria.

Depois, uma elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y, também sendo explicitados os seus elementos e a sua equação (Figura 13).

Figura 13 - Elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y e sua equação

A Figura 3 representa uma elipse cujos pontos F_1 e F_2 estão em uma reta paralela ao eixo y.

Figura 3 - Elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y



Fonte: Elaboração própria.

A equação dessa elipse está representada na Figura 4 abaixo.

Figura 4 - Equação da elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y

$$\frac{(x-x_c)^2}{b^2}+\frac{(y-y_c)^2}{a^2}=1$$

Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

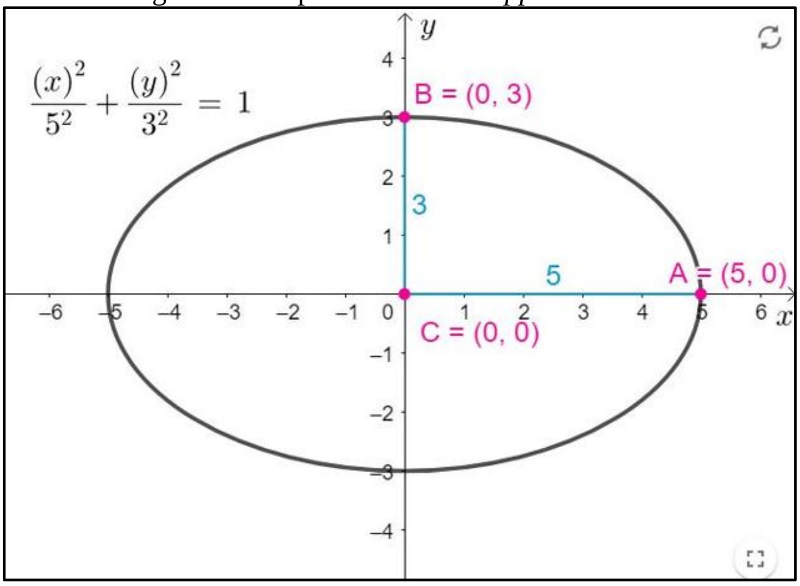
Este momento tem como objetivo: definir elipse, apresentar os elementos que a compõem (centro, eixo maior, eixo menor e eixo focal) e suas equações. Essa formalização é essencial para a Atividade Investigativa 2, que necessita dos conceitos expostos para que seja bem realizada pelos alunos.

(v) Atividade Investigativa 2

A Atividade Investigativa 2 constitui o quinto momento da proposta pedagógica e é composta por cinco questões, apresentadas abaixo, e o *Applet* 3.

A Questão 1 possui oito itens que abordam a relação da Álgebra com a Geometria no contexto do estudo da elipse. Utiliza-se o *Applet* 3 (Figura 14) do GeoGebra para relacionar a elipse com sua equação, sendo possível movimentar os pontos A, B e C para alterar o centro da elipse e a medida de seus eixos e observar as mudanças que ocorrem na equação da mesma.

Figura 14 - Captura de tela do *Applet* 3



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/vd5arpzf.

Os itens **a**, **b**, **c** e **d** (Figura 15) tratam da influência do centro e dos eixos (menor e maior) na equação da elipse. É pedido que sejam movimentados os pontos A, B ou C e observadas as respectivas alterações na equação da elipse.

Figura 15 - Itens **a**, **b**, **c** e **d** da Questão 1

a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

c) Movimente o ponto C e observe o que acontece com a **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

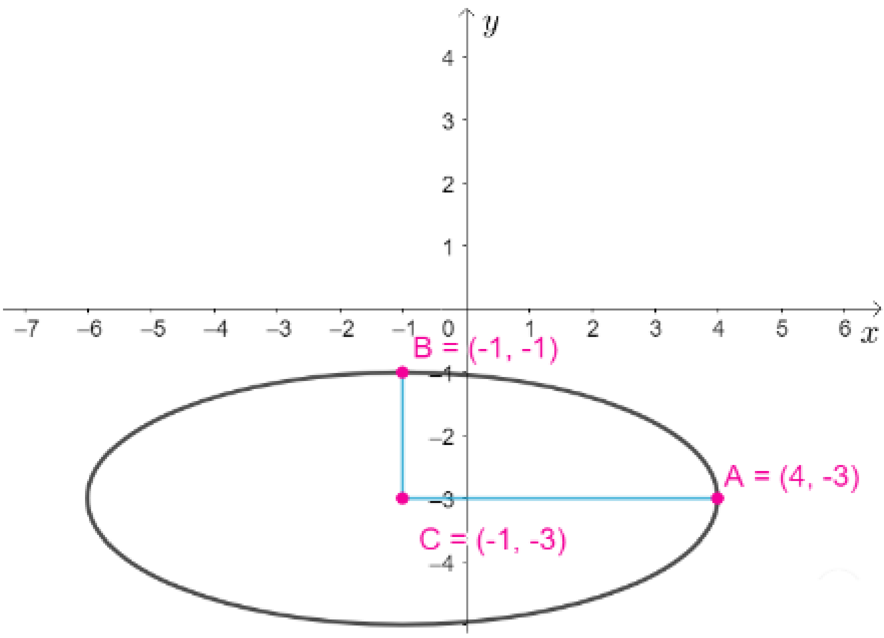
d) Quais são as coordenadas do centro da elipse para que sua equação seja $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+5)^2}{4^2} = 1$?

Fonte: Elaboração própria.

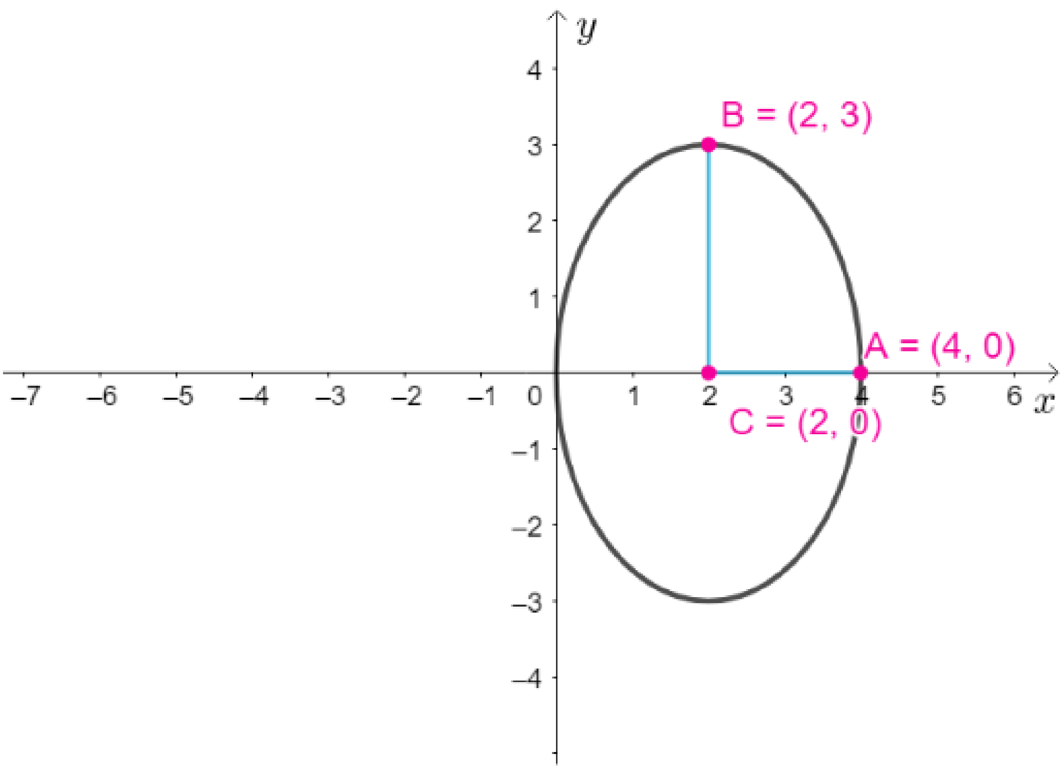
Os itens **e** e **f** (Figura 16) abordam a mudança do registro geométrico para o algébrico. Duval (2012) afirma que representar um objeto matemático por meio de suas diversas representações semióticas é absolutamente necessário, visto que esses objetos, diferentes dos objetos “reais” ou “físicos", não estão diretamente evidentes à percepção ou à experiência intuitiva imediata, sendo necessário atribuí-los à representantes. Para Duval (2011), a conversão é uma transformação de representação que altera o registro, mantendo os mesmos objetos.

Figura 16 - Itens **e** e **f** da Questão 1

e) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



f) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



Fonte: Elaboração própria.

Nos itens **g** e **h** (Figura 17) os enunciados apresentam as equações e solicitam elementos do contexto geométrico.

Figura 17 - Itens **g** e **h** da Questão 1

g) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(x+6)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1$?

h) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(y+3)^2}{5^2} + \frac{(x+6)^2}{2^2} = 1$?

Fonte: Elaboração própria.

A Questão 2 (Figura 18) também deve ser realizada utilizando o *Applet* 3. Entretanto, trata de movimentar os pontos A, B ou C de modo a encontrar uma elipse cujos eixos tenham a mesma medida. No item **a,** deve-se observar que a figura encontrada é uma circunferência e que os denominadores das frações são iguais. No item **b,** deve-se reescrever a equação apresentada no *applet* na forma da equação da circunferência. E, no item **c**, deve-se concluir que o valor de k representa o valor do raio da circunferência ao quadrado.

Figura 18 - Questão 2

a) Utilize novamente o *Applet*. A partir de um determinado ponto C, movimente os pontos A e B de forma que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ tenham a mesma medida. Qual figura é formada? Observe a sua equação e escreva o que é possível afirmar em relação aos denominadores da equação dessa figura?

b) Transforme a equação encontrada acima para que ela tenha o formato $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = k$. Qual equação foi formada?

c) Na equação formada acima, o que k representa na figura? Qual a relação de k com os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$?

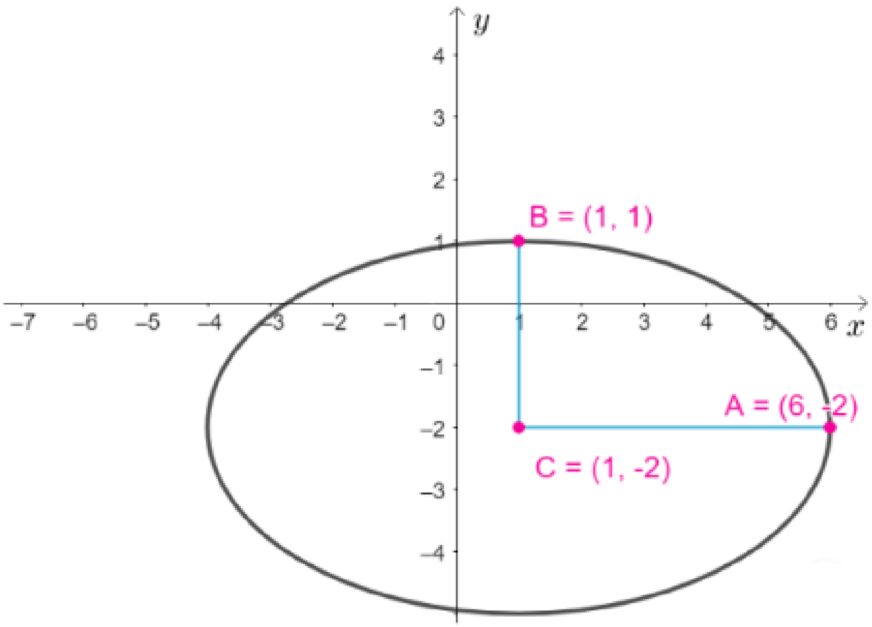
Fonte: Elaboração própria.

As Questões 3, 4, 5 e 6 devem, necessariamente, ser respondidas sem o uso do *applet*. A Questão 3 (Figura 19) é objetiva e representa a passagem do registro geométrico para o algébrico. O objetivo desta questão é que os alunos consigam, a partir da análise do centro e das medidas dos eixos da elipse, relacioná-la com a sua equação.

Figura 19 - Questão 3

Questão 3

Observe a figura abaixo e responda.



A equação que melhor representa a elipse formada é:

a) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

b) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$

c) $\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$

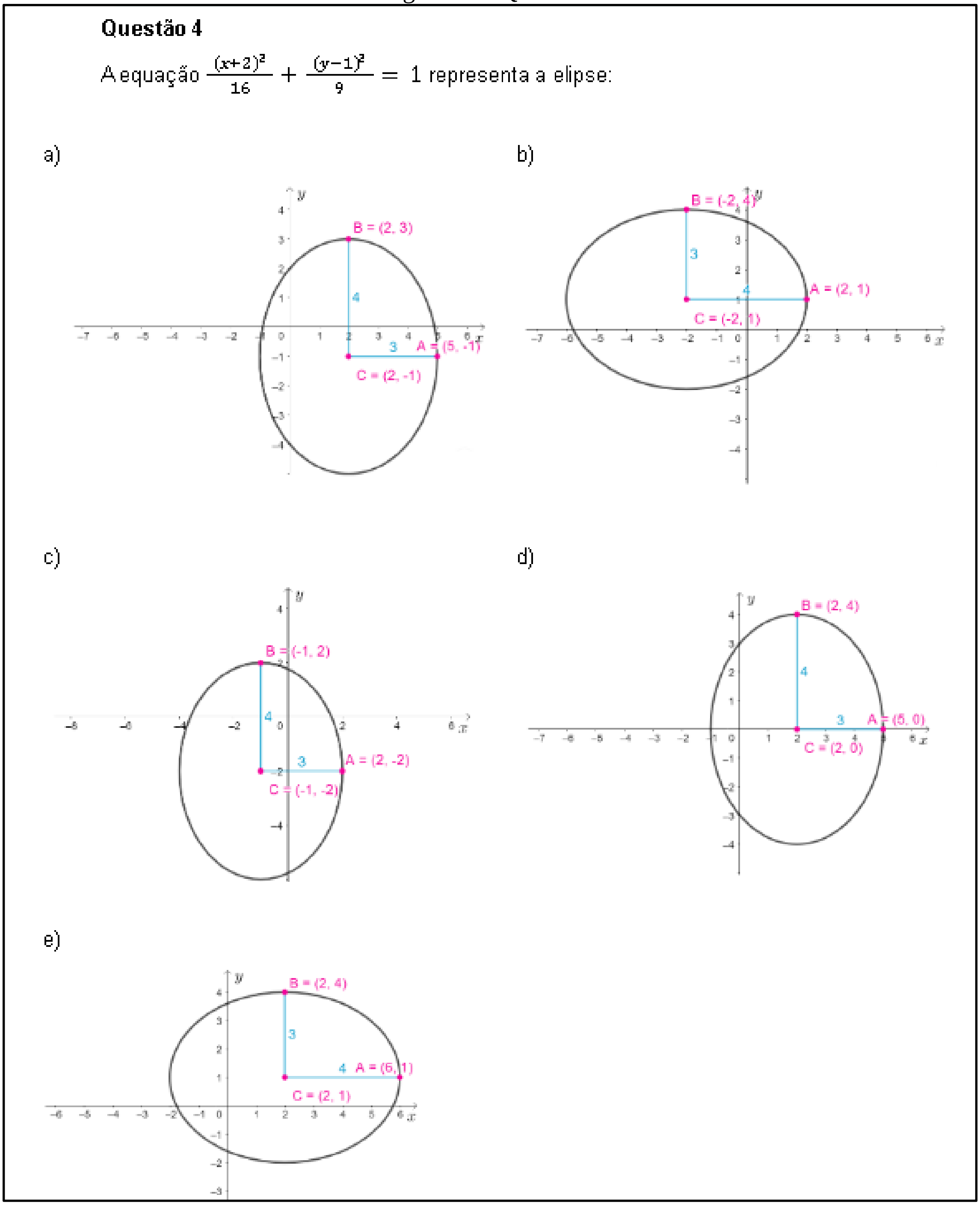
d) $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$

e) $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

Fonte: Elaboração própria.

Em paralelo com a questão anterior, a Questão 4 (Figura 20), que também é objetiva, aborda a passagem do registro algébrico para o registro geométrico. Nela, o aluno deve analisar a equação da elipse apresentada e conseguir identificar sua respectiva representação geométrica.

Figura 20 - Questão 4



Fonte: Elaboração própria.

Deseja-se, com estas questões, analisar se os alunos conseguem transitar entre os dois registros de representação apresentados. Bernd (2016) afirma que:

> Dado que um objeto, quando representado em formas de registros diferentes, apresenta atributos distintos, é justamente a transformação de um tipo de registro para outro que permite a compreensão efetiva do objeto, de modo a não confundi-lo com sua representação ou mesmo limitá-lo a uma única representação (Bernd, 2016, p.3).

A Questão 5 (Figura 21) apresenta a equação de uma circunferência e quatro afirmações sobre ela, as quais os alunos devem analisar e classificar, cada uma, como verdadeira (V) ou falsa (F). Esta questão tem como objetivo analisar se os alunos conseguem estabelecer relações entre a circunferência e o estudo realizado sobre elipse.

Figura 21 - Questão 5

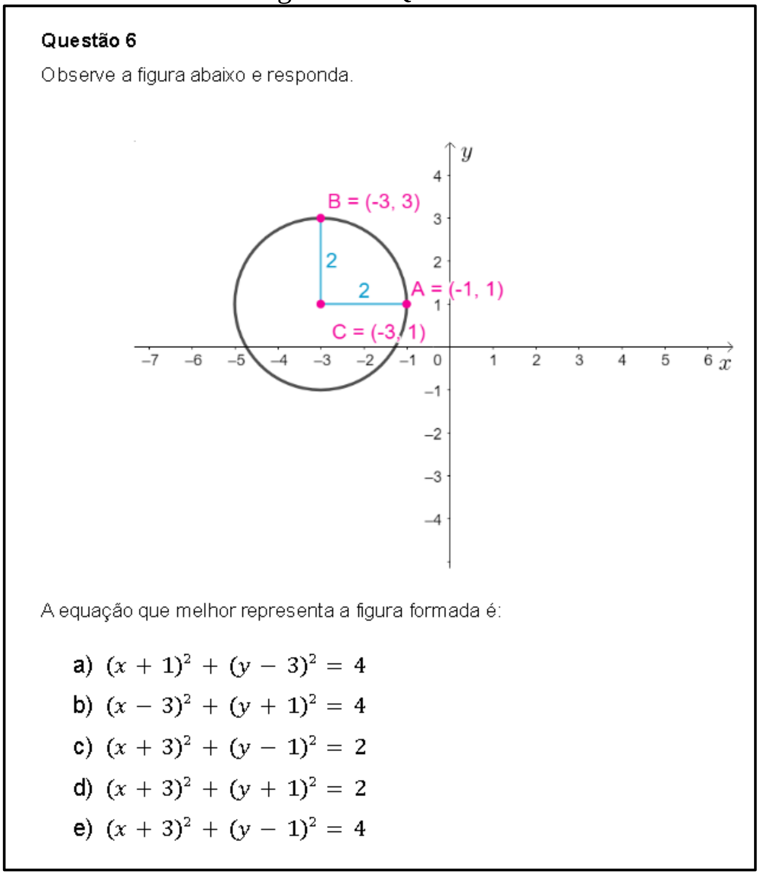
A equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ representa uma circunferência. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.

a) ( ) O centro dessa circunferência é $(-3, 2)$.
b) ( ) A medida dos semieixos (maior e menor) são iguais e medem 6.
c) ( ) O centro dessa circunferência é $(3, -2)$.
d) ( ) O raio dessa circunferência mede 36.

Fonte: Elaboração própria.

A Questão 6 (Figura 22) é objetiva e apresenta o registro geométrico de uma circunferência para que seja encontrada a sua equação.

Figura 22 - Questão 6



Fonte: Elaboração própria.

(vi) Apresentação da propriedade refletora

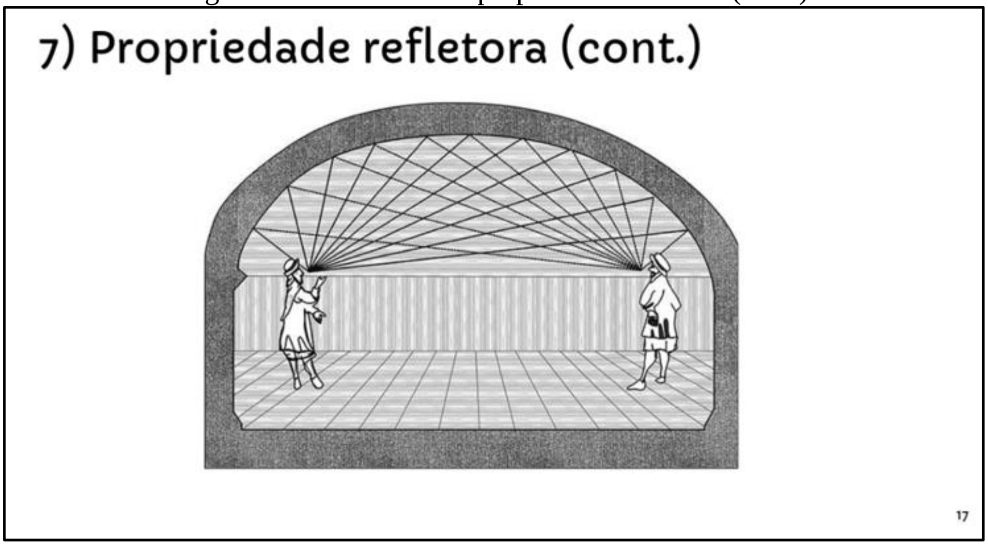
O último momento é dedicado à apresentação da propriedade refletora da elipse. Primeiro, é apresentado um vídeo de uma mesa de bilhar em formato elíptico, cujas caçapas estão localizadas nos focos da elipse (Figura 23).

Figura 23 - Slide sobre a propriedade refletora

Fonte: Elaboração própria.

Posteriormente, é explicado o que é uma sala ou galeria dos sussurros (Figura 24), que, segundo o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) (2020), geralmente são elípticas pelo fato da interessante propriedade de que, se uma pessoa sussurrar em um ponto específico, outra pessoa, posicionada em outro lugar específico, pode ouvi-la. Estes pontos específicos são os focos da elipse.

Figura 24 - Slide sobre a propriedade refletora (cont.)



Fonte: Elaboração própria.

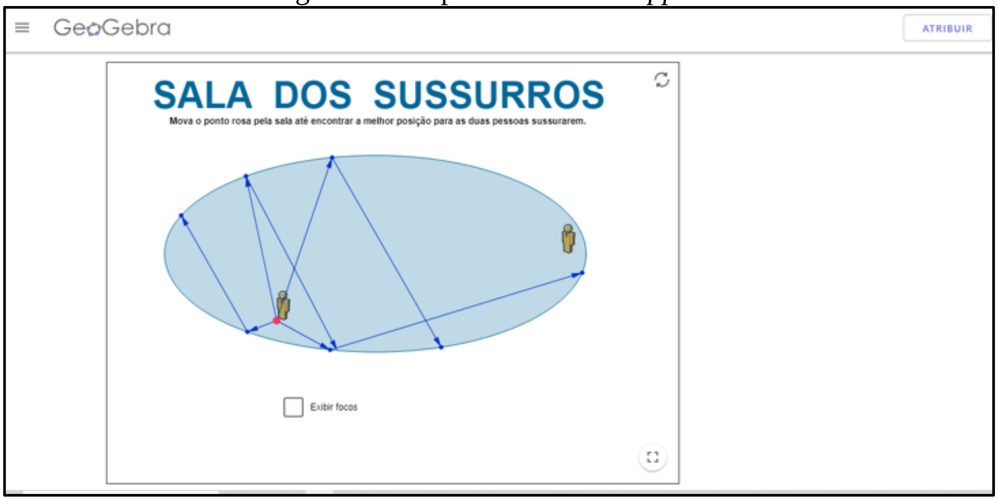
Após, é apresentado um vídeo de uma dessas galerias localizada em Nova Iorque (Figura 25).

Figura 25 - Slide sobre a propriedade refletora (cont.)

Fonte: Elaboração própria.

Ao final, os participantes são convidados a realizar uma atividade no *Applet* 4 (Figura 26). Nele, é representada uma sala dos sussurros com um personagem fixo sobre um dos focos da elipse e outro personagem solto, fora do outro foco. O objetivo da atividade é encontrar o outro foco na elipse para que os personagens possam se comunicar aos sussurros. Para confirmar se a posição escolhida está correta, basta ativar a caixa “Exibir focos” para que a posição dos dois focos seja apresentada.

Figura 26 - Captura de tela do *Applet* 4



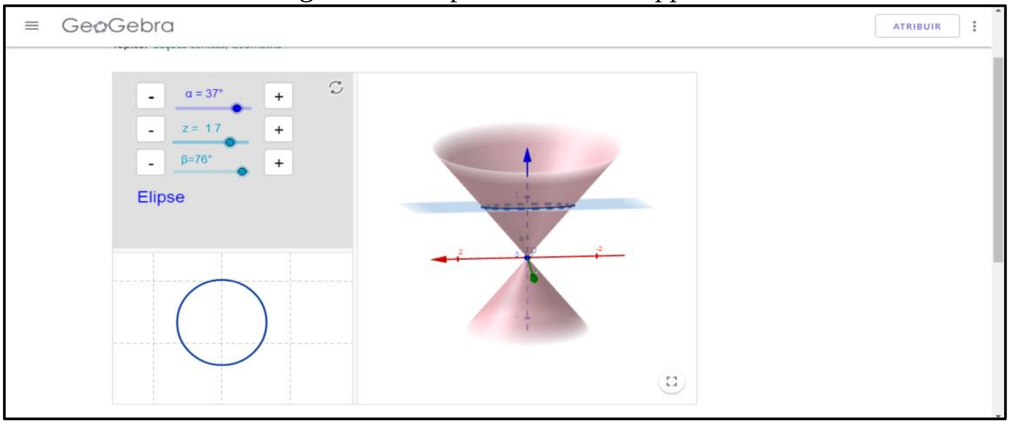
Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/keas2ygj.

3.2.1.2 Elaboração e escolha dos *applets*

Para a realização deste trabalho, são utilizados quatro *applets* do GeoGebra, nomeados por *Applet* 1, *Applet* 2, *Applet* 3 e *Applet* 4. A seguir, será apresentada como ocorreu a elaboração e escolha de cada um deles.

O *Applet* 1 foi escolhido na seção “Materiais” do GeoGebra e adaptado por uma das autoras deste trabalho. O idioma Espanhol e as cores foram modificados (Figura 27). O applet é utilizado para apresentar as seções cônicas geradas pelo corte de um plano com o cone de duas folhas.

Figura 27 – Captura de tela do *Applet* 1



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/tz9h7rwk.

Nele, há três janelas:

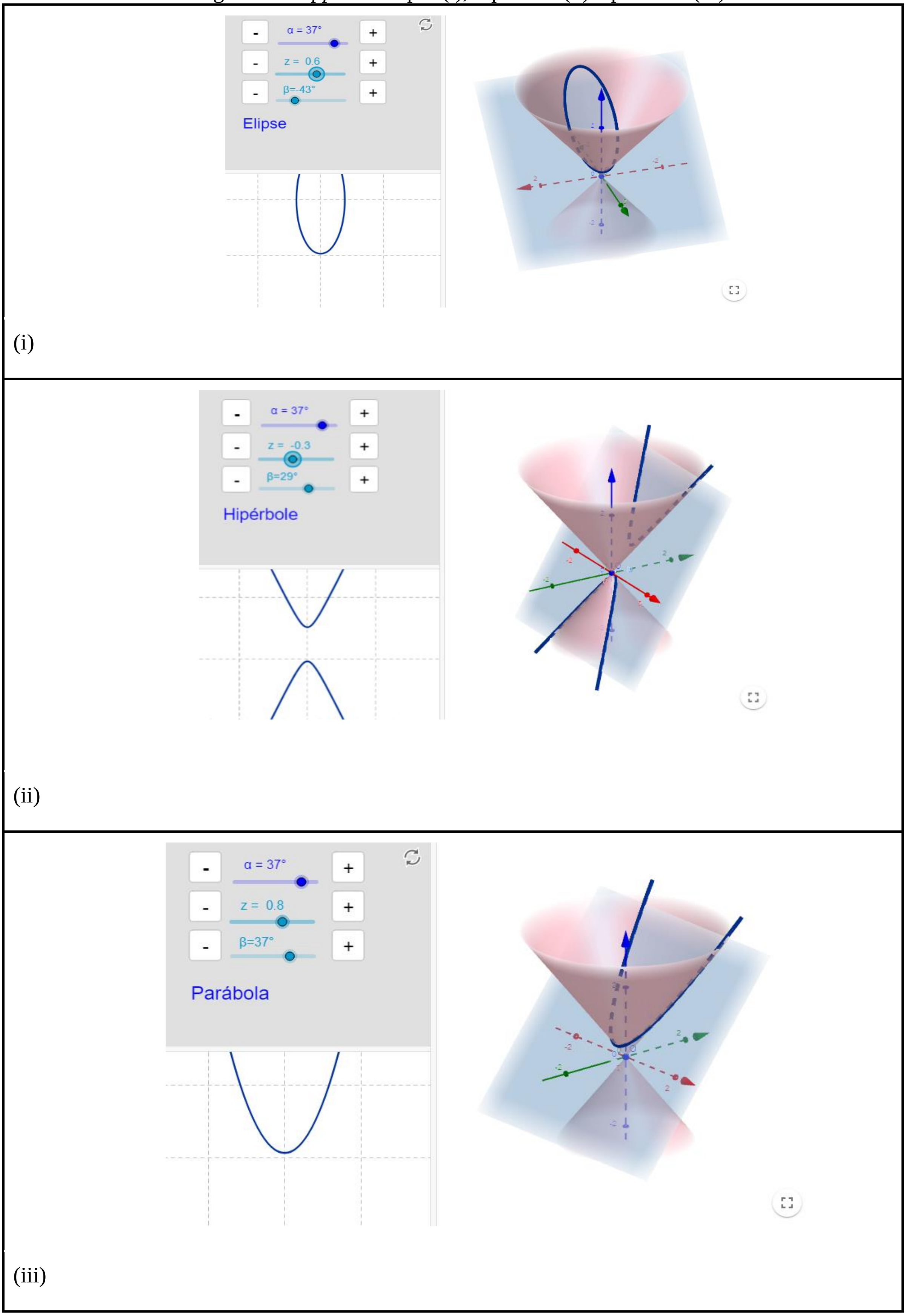
(i) Janela de visualização 3D, que contém um cone de duas folhas seccionado por um plano, com destaque na interseção entre eles;

(ii) Janela com três controles deslizantes: (**α**) altera o raio da base do cone, (**z**) translada o plano verticalmente e (**β**) rotaciona o plano, alterando sua inclinação. Esta janela também indica o nome da cônica gerada;

(iii) Janela de visualização 2D, contendo a planificação da figura gerada na interseção entre o cone e o plano.

A Figura 28 apresenta a visualização de cada uma das três cônicas, utilizando o *applet*.

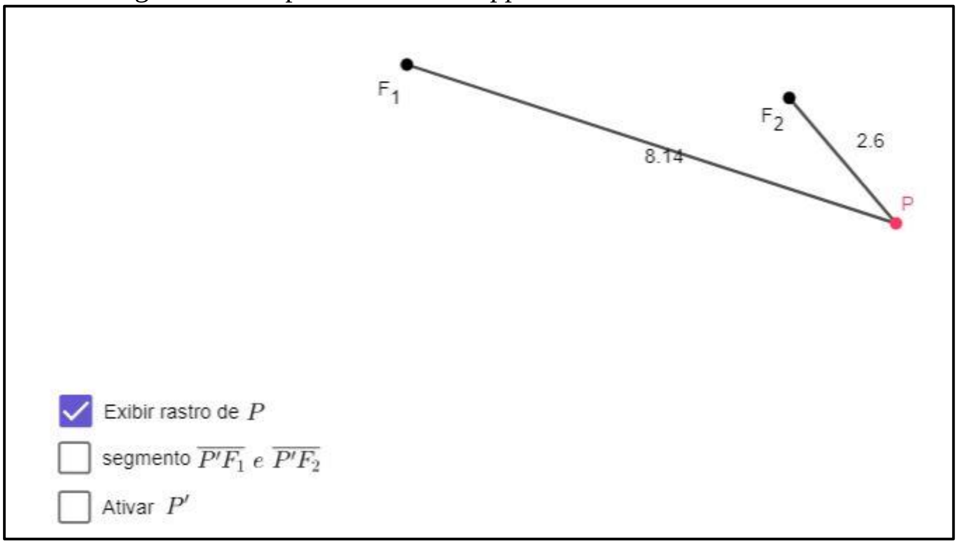
Figura 28 - *Applet* 1: elipse (i), hipérbole (ii) e parábola (iii)



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/tz9h7rwk.

O *Applet* 2 (Figura 29), foi elaborado por uma das autoras para a realização da Atividade Investigativa 1. Nele, há dois pontos fixos ($F1$ e $F2$), o ponto P móvel e os segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ com suas respectivas medidas. Há uma caixa ativada, que permite a exibição do rastro do ponto P, conforme ele é movimentado; e duas caixas desativadas: "segmento $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$" e "Ativar P'".

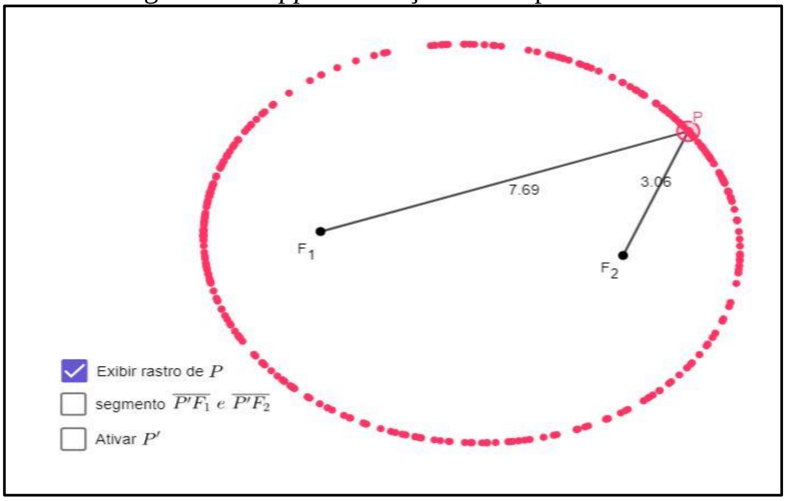
Figura 29 – Captura de tela do *Applet* 2 com uma caixa ativada



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/ensk6t6s.

Neste *applet*, é possível movimentar o ponto P e observar a formação de uma elipse (Figura 30). E, conforme o ponto P é movimentado, a medida dos segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ é alterada.

Figura 30 – *Applet* 2: traçado da elipse

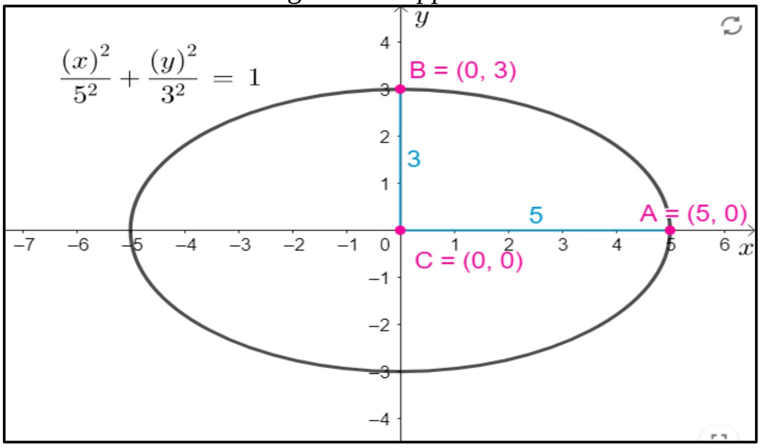


Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/ensk6t6s.

O *applet* é utilizado para investigar a relação da medida dos segmentos formados pelo ponto P com os focos da elipse. Além disso, ao ativar as caixas “segmento $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$” e “Ativar P'” (Figura 31), é exibido o segmento $\overline{F1F2}$ e o ponto P’ contido nele, com o objetivo de verificar a condição de um ponto P para que ele pertença à elipse.

O *Applet* 3 foi escolhido na seção “Materiais” do GeoGebra e adaptado por uma das autoras deste trabalho. Ele apresenta um plano cartesiano, uma elipse e sua respectiva equação. Há o centro, representado pelo ponto C; os pontos A e B; e os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, que representam a medida dos semieixos maior e menor, respectivamente (Figura 31). Neste *applet*, foi modificada a posição inicial e a cor dos pontos A, B e C.

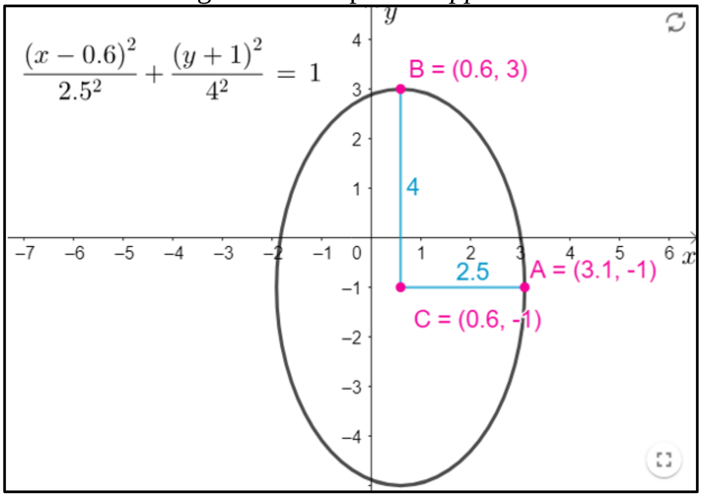
Figura 31 - *Applet* 3



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/vd5arpzf.

Os pontos A, B e C são móveis. O ponto A pode ser movido paralelamente ao eixo x, e o ponto B pode ser movido paralelamente ao eixo y. Ao movimentar o ponto A ou ponto B, a medida dos eixos da elipse é alterada. Já o ponto C pode ser movimentado livremente sobre o plano. As coordenadas de todos os pontos são indicadas na interface. A Figura 32 apresenta uma elipse no *applet*.

Figura 32 – Elipse no *Applet* 3

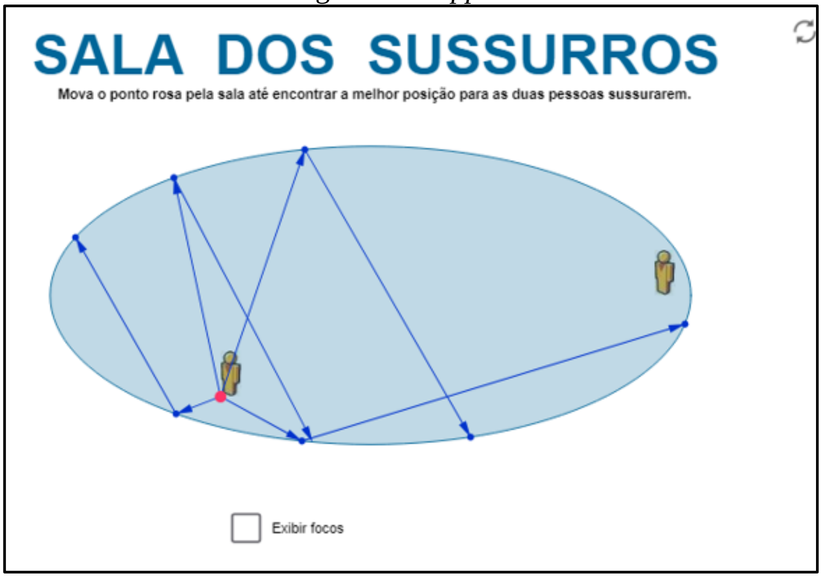


Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/vd5arpzf.

Neste *applet*, ao movimentar os pontos, são modificados tanto a figura apresentada quanto a equação da elipse, simultaneamente. A utilização deste recurso dinâmico permite investigar a influência do centro e dos eixos da elipse em sua equação. Esta relação entre o desenho e a equação é importante na mobilização dos dois registros de representação presentes, o geométrico e o algébrico.

O *Applet* 4 foi escolhido na seção "Materiais" do GeoGebra e adaptado por uma das autoras deste trabalho. Ele apresenta a representação de uma sala dos sussurros, com um boneco fixo (à direita) e um boneco móvel (à esquerda) (Figura 33). Há também uma caixa "Exibir focos", desativada. Antes da adaptação ele possuía quatro caixas desativadas: "T1", "T2", "T3" e "T4", que, ao serem ativadas, exibiam a retas tangentes e o ângulo de reflexão do boneco móvel. Além disso, foram modificadas as cores da figura.

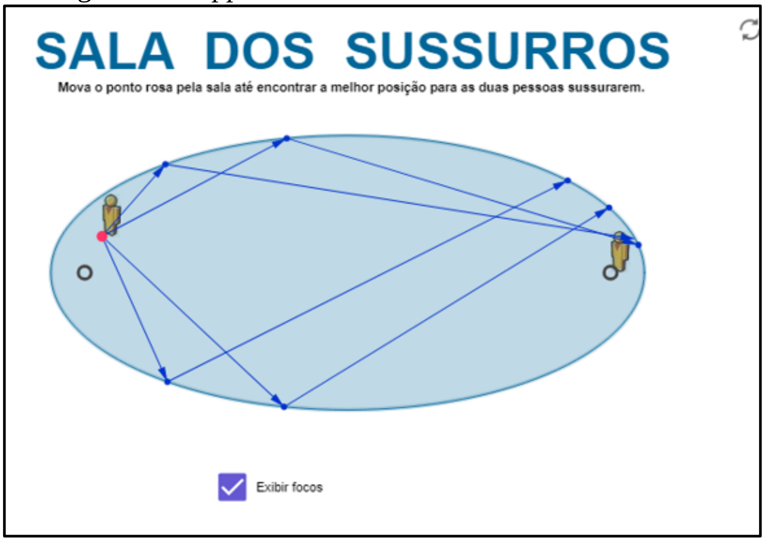
Figura 33 – *Applet* 4



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/keas2ygj.

O objetivo deste *applet* é encontrar a posição dos focos da elipse, de forma que os bonecos se "comuniquem aos sussurros". Para isso, é necessário movimentar o boneco da esquerda até que os vetores (que representam as ondas sonoras) incidam sobre o pé do boneco da direita. Ao encontrar a melhor posição, basta ativar a caixa "Exibir focos" para verificar a resposta (Figura 34).

Figura 34 – *Applet* 4 com a caixa "Exibir focos" ativada



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/keas2ygj.

3.2.1.3 Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista

Nesta seção, serão apresentados o roteiro de perguntas da entrevista para o teste exploratório e para a fase de Implementação.

3.2.1.3.1 Roteiro de perguntas da entrevista para o teste exploratório

O objetivo desta entrevista semiestruturada é coletar dos licenciandos, participantes desta etapa, informações a respeito do trabalho segundo alguns temas, como o uso da Tecnologia Digital, a Investigação Matemática, dentre outros.

O roteiro de perguntas para a entrevista semiestruturada do teste exploratório (APÊNDICE E) é formado por cinco seções: (i) Sobre os aspectos gerais da sequência didática; (ii) Sobre os seis momentos da sequência didática; (iii) Sobre o processo de investigação; (iv) Sobre o uso da Tecnologia Digital; e (v) Sobre os objetivos específicos da pesquisa. Cada seção é composta por questões que buscam agregar a opinião dos participantes sobre cada tema explicitado. Vale ressaltar que a entrevista é realizada após a implementação da sequência didática.

A primeira seção é composta por apenas uma questão e refere-se à avaliação de tópicos, como: o tempo para a realização de cada momento da aula; a clareza nos enunciados das questões; o grau de dificuldade das atividades desenvolvidas e a qualidade dos materiais utilizados, sendo eles: slides, *applets*, material manipulável, apostilas, figuras e vídeos.

A segunda seção possui questões relacionadas a cada momento desta sequência didática.

(i) O primeiro momento (Seções Cônicas) possui duas questões. A primeira questão tem como objetivo avaliar a apresentação dos elementos presentes no cone de duas folhas; e a segunda questão, saber se o *applet* e o material manipulável utilizados auxiliaram na compreensão de cada corte presente no cone de duas folhas.

(ii) O segundo momento (Atividade Investigativa 1) também possui duas questões. A primeira questão refere-se à avaliação do processo de investigação realizado pelo licenciando na formalização da equação da elipse, buscando saber se houve dificuldade e, em caso afirmativo, quais foram; e a segunda questão compete ao *applet* utilizado, se ajudou na formalização da equação da elipse.

(iii) O terceiro momento (Elipse no cotidiano) é composto por duas perguntas. A primeira dispõe-se sobre a avaliação do exemplo utilizado para mostrar a presença da elipse no cotidiano; e a segunda sobre a importância deste momento para a aula.

(iv) O quarto momento (Apresentação dos elementos e equações da elipse) possui uma questão que tem por objetivo avaliar o uso das imagens utilizadas para apresentar a elipse em relação aos seus elementos e à sua equação.

(v) O quinto momento (Atividade Investigativa 2) possui seis questões. A primeira, destina-se ao processo de investigação; se houve dificuldades e, em caso afirmativo, qual (ais) foi (foram). A segunda, busca saber se o *applet* auxiliou na visualização da mudança de registro de representação da elipse, ao ser utilizado para observar a equação da elipse relacionando-a com a sua representação geométrica. A terceira questão busca saber se há alguma sugestão de alteração para o *applet.* A quarta questão tem a finalidade de avaliar as perguntas feitas na Atividade Investigativa 2, se estão adequadas. A última questão destina-se a saber se há alguma sugestão quanto às perguntas realizadas nesta atividade.

(iv) No sexto momento (Propriedade refletora) há duas questões. A primeira tem por objetivo avaliar o vídeo apresentado, se ele esclarece a propriedade refletora da elipse. A segunda questão pretende avaliar se o *applet* utilizado para mostrar a propriedade refletora foi interessante e se é melhor apresentá-lo após o vídeo.

A terceira seção possui uma pergunta com o intuito de avaliar o processo de investigação para abordar o tema elipse, assim como as dificuldades percebidas, a impressão sobre o ato de investigar, o papel de protagonismo do aluno, etc.

Na quarta seção há apenas uma pergunta sobre de que forma o uso da Tecnologia Digital (*applets* e vídeos) contribuiu para o estudo da elipse neste processo de investigação.

A quinta seção busca verificar se este estudo tem potencial para atingir os objetivos específicos da pesquisa, pedindo aos licenciandos para que avaliem o trabalho, apontando críticas, sugestões e ressaltando o que mais lhe chamou atenção e contribui para o processo de investigação do assunto abordado.

3.2.1.3.2 Roteiro de perguntas da entrevista para a fase de Implementação

Optou-se, também, pela entrevista semiestruturada para obter informações sobre a implementação da sequência didática. O roteiro da entrevista possui três temas, sendo eles: estudo da Álgebra e da Geometria durante a Educação Básica; contribuições e dificuldades durante o processo de Investigação no estudo da elipse; e a importância da Tecnologia Digital.

A primeira pergunta: “Durante estes anos que você está na Educação Básica, você estudou mais Álgebra do que Geometria?” visa avaliar o aspecto quantitativo que pode gerar reflexos na facilidade ou dificuldade com que o aluno lida com uma dessas áreas.

A segunda pergunta divide-se em três questionamentos: “Quais as contribuições do processo de investigação neste estudo sobre a elipse? Houve dificuldades neste processo? Em caso afirmativo, quais foram?”. O objetivo é entender como foi para cada um, participar de um processo investigativo, diferente de uma aula expositiva, que normalmente é a mais utilizada em sala de aula. Nesse sentido, busca-se entender quais as dificuldades e as vantagens deste tipo de metodologia para o processo de aprendizagem do aluno.

A terceira pergunta: “Como vocês avaliam a importância da Tecnologia Digital na realização deste trabalho?” busca entender como cada aluno considera a importância do uso da tecnologia aplicada às atividades, avaliando a contribuição dos *applets* e dos vídeos sobre a propriedade refletora. Deve-se enfatizar, neste momento da entrevista, o auxílio que a tecnologia proporciona na visualização da mudança dos registros de representação, apresentada pelo *Applet* 3.

A última pergunta é uma avaliação geral do trabalho, em que cada participante irá apontar críticas e sugestões, de acordo com a sua experiência, considerando o processo investigativo e todo o material utilizado. Esta pergunta é discursiva e é entregue em uma folha para que os participantes possam deixar as suas respostas. Vale ressaltar que os participantes não terão suas identidades reveladas.

3.2.1.4 Teste exploratório

O teste exploratório foi realizado no dia trinta de maio de 2023, durante três horas aulas, com os licenciandos do 8º. período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Ensino, localizada em Campos dos Goytacazes. Todos os licenciandos que participaram estavam na fase final do Trabalho de Conclusão de Curso, o TCC III, e foram convidados a participar do teste exploratório devido ao fato de já terem cursado a disciplina Geometria Analítica II, na qual se estuda as cônicas, proporcionando um olhar crítico para os possíveis lapsos da sequência didática assim como sugestões construtivas.

O objetivo da realização do teste foi avaliar o tempo, a clareza nos enunciados das questões, o grau de dificuldade das atividades, a qualidade dos materiais utilizados (material manipulável, vídeos, slides e *applets*) e os momentos da sequência didática. Buscou-se avaliar o processo de Investigação Matemática, a contribuição da Tecnologia Digital para o trabalho e a importância dos *applets* na mudança de registro de representação e possíveis mudanças nos mesmos.

O teste também teve como objetivo analisar o potencial do trabalho para atingir os objetivos específicos traçados e promover, por meio da participação dos licenciados, possíveis mudanças benéficas para o trabalho, analisando falas e perguntas durante a aplicação e analisando os dados coletados nas atividades e na entrevista.

Os resultados obtidos neste teste exploratório, bem como a análise dos dados, serão apresentados no Capítulo 4, seção 4.1.

3.2.2 A Implementação

A Implementação da ação interventiva ocorreu no dia trinta de junho de 2023, com os alunos da 2ª. série do Ensino Médio do curso Técnico Integrado em Informática de uma Instituição Federal de Ensino, localizada em Campos dos Goytacazes. A escolha foi feita com base na disponibilidade de laboratórios com computadores, essencial para a realização das atividades propostas.

A mudança do público-alvo, inicialmente escolhido para a Implementação, se deu pela dificuldade de encontrar uma turma de 3ª. série do Ensino Médio disponível, visto que os professores desta série possuem muita demanda de conteúdo. Além disso, era necessário encontrar uma escola que disponibilizassem computadores para a aplicação da sequência didática.

Resolvida a questão dos computadores, as autoras e orientadoras deste trabalho analisaram e aprovaram a possibilidade desta sequência didática ser aplicada a alunos da 2ª. série do Ensino Médio, considerando o assunto a ser tratado e o grau de dificuldade das questões. Com isso e, mediante o auxílio da professora da turma e os horários vagos no contraturno, a sequência didática foi aplicada com vinte e três participantes.

3.2.3 A Avaliação

A avaliação dos efeitos da interferência proposta foi feita por meio dos seguintes instrumentos de coleta de dados: observação, anotações no caderno de campo, respostas dos alunos às atividades, entrevista semiestruturada com os discentes, e gravação em áudio da mesma.

Os dados coletados foram analisados segundo o referencial teórico adotado neste trabalho e serão apresentados no Capítulo 4, seção 4.2.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, inicialmente, são descridos e analisados os resultados obtidos no teste exploratório, destacando-se as alterações promovidas após as sugestões dos licenciandos. Posteriormente, são apresentados os dados obtidos nas fases de implementação e avaliação.

4.1 Teste exploratório

Esta seção refere-se à apresentação dos resultados da aplicação da sequência didática e da entrevista semiestruturada com um grupo de licenciandos em Matemática, apontando as percepções e sugestões dos mesmos. Também são apresentadas as alterações derivadas da análise das opiniões deste grupo e de uma releitura feita pelas autoras.

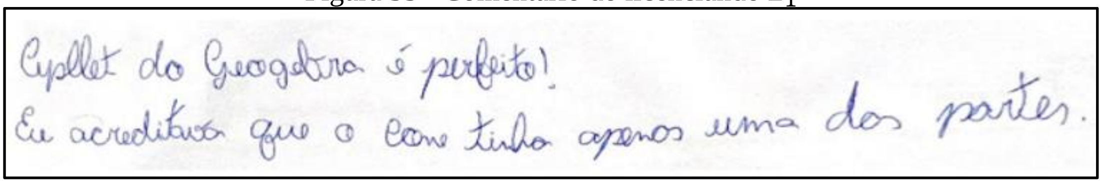
4.1.1 Aplicação da Sequência Didática

Seis licenciandos participaram da aplicação da sequência didática e, para manter o sigilo de suas identidades, serão nomeados por L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 e L_6. A seguir, será relatado o resultado da aplicação de cada momento da proposta e, ao final de cada momento, serão apresentadas as modificações, provenientes das sugestões dos licenciandos e da observação das autoras em relação à aplicação e a uma releitura mais crítica feita sobre todo o material elaborado.

(i) Apresentação das seções cônicas

Durante a explicação sobre as seções cônicas, os licenciandos não apresentaram dúvidas e elogiaram o *Applet* 1 utilizado, comentando que o acharam didático, além de ter facilitado a visualização da inclinação do plano que intersecta o cone. O licenciando L_1 comentou que não sabia que existia um cone de duas folhas (Figura 35).

Figura 35 - Comentário do licenciando L_1



Applet do Geogebra é perfeito!
Eu acreditava que o cone tinha apenas uma das partes.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto ao material manipulável, os licenciandos acharam sua utilização interessante e, ao final da aula, pediram para ver de perto e pegar com as mãos, observando os cortes. Neste contexto, Lorenzato (2010) afirma que: “O ‘ver com as mãos’ é mais popular do que geralmente se supõe [...] As pessoas precisam ‘pegar para ver’, como dizem as crianças” (Lorenzato, 2010, p.18-19). Analogamente, Scolaro (2008) diz ainda que, ao tocar, sentir e movimentar um objeto real, ele se torna a representação de uma ideia.

(ii) Apresentação da presença da elipse no cotidiano

Durante a apresentação sobre a presença da elipse no cotidiano não houve comentários.

(iii) Atividade Investigativa 1

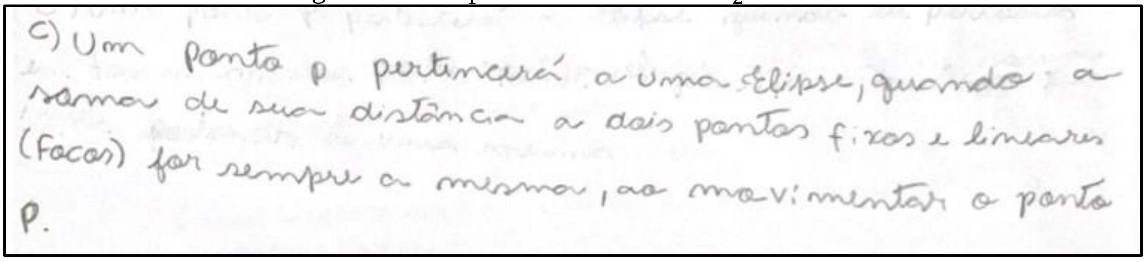
Na Atividade Investigativa 1 os licenciandos deveriam identificar as condições de um ponto P para que ele pertença à elipse. Eles utilizaram o *Applet* 2 de maneiras diferentes. Alguns movimentaram os focos, outros não; alguns analisaram o valor das medidas dos segmentos de reta, enquanto outros analisaram apenas comparando-as.

A atividade durou trinta minutos e os licenciandos alegaram muita dificuldade para sua realização, principalmente no item **c**, em que precisavam investigar a condição que existe para que um ponto P pertença à elipse, além da soma de sua distância à dois pontos fixos ser constante. A seguir está transcrito o depoimento do licenciando L_2 sobre esta atividade:

> *Amei o applet, tive muita dificuldade nas questões c e d. Acredito que se acrescentar alguma questão antes, pedindo para relacionar a soma das distâncias do ponto P aos focos e a distância dos focos, talvez ajude a formular melhor a letra d (Licenciando* L_2*).*

A Figura 36 apresenta a resposta do licenciando L_2. Ele evidencia que foi possível observar a relação entre a soma das distâncias do ponto P aos focos, mas a investigação da condição para que esse ponto P pertença à elipse (referente ao item **c**), não ocorreu.

Figura 36 - Resposta do licenciando L_2 no item **c**


c) Um ponto p pertencerá a uma Elipse, quando a soma de sua distância a dois pontos fixos e lineares (Focos) for sempre a mesma, ao movimentar o ponto p.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por consequência da dificuldade no item **c**, nenhum deles conseguiu responder corretamente o item **d**, que pedia para definir a elipse com base nas condições investigadas nos itens **a**, **b** e **c**. Abaixo estão transcritas as respostas dos licenciandos L_4 e L_6:

> *Uma figura que possui 2 focos, em que a distância entre eles é sempre igual. A soma de F1P até o ponto PF2 é sempre igual (Licenciando L_4).*
>
> *A reunião dos pontos em torno de dois pontos fixos, cuja a distância destes pontos aos focos somados é sempre a mesma (Licenciando L_6).*

Observa-se que o licenciando L_4 se equivocou ao dizer que a distância entre os focos é igual; houve erro na expressão "o ponto 'PF2'"; e, em ambas respostas, não foi observada a condição de que $\overline{PF1} + \overline{PF2} > \overline{F1F2}$.

O licenciando L_3, por sua vez, respondeu com base na definição de elipse apresentada no primeiro momento da aplicação, sendo necessário, portanto, enfatizar na pergunta que a resposta deveria ter como base, o que foi investigado nos itens observados pela utilização do *Applet* 2. A resposta do licenciando L_3 está transcrita abaixo:

> *Uma cônica formada pela interseção de um plano oblíquo a reta vertical que passa pelo centro dos cones (Licenciando L_3).*

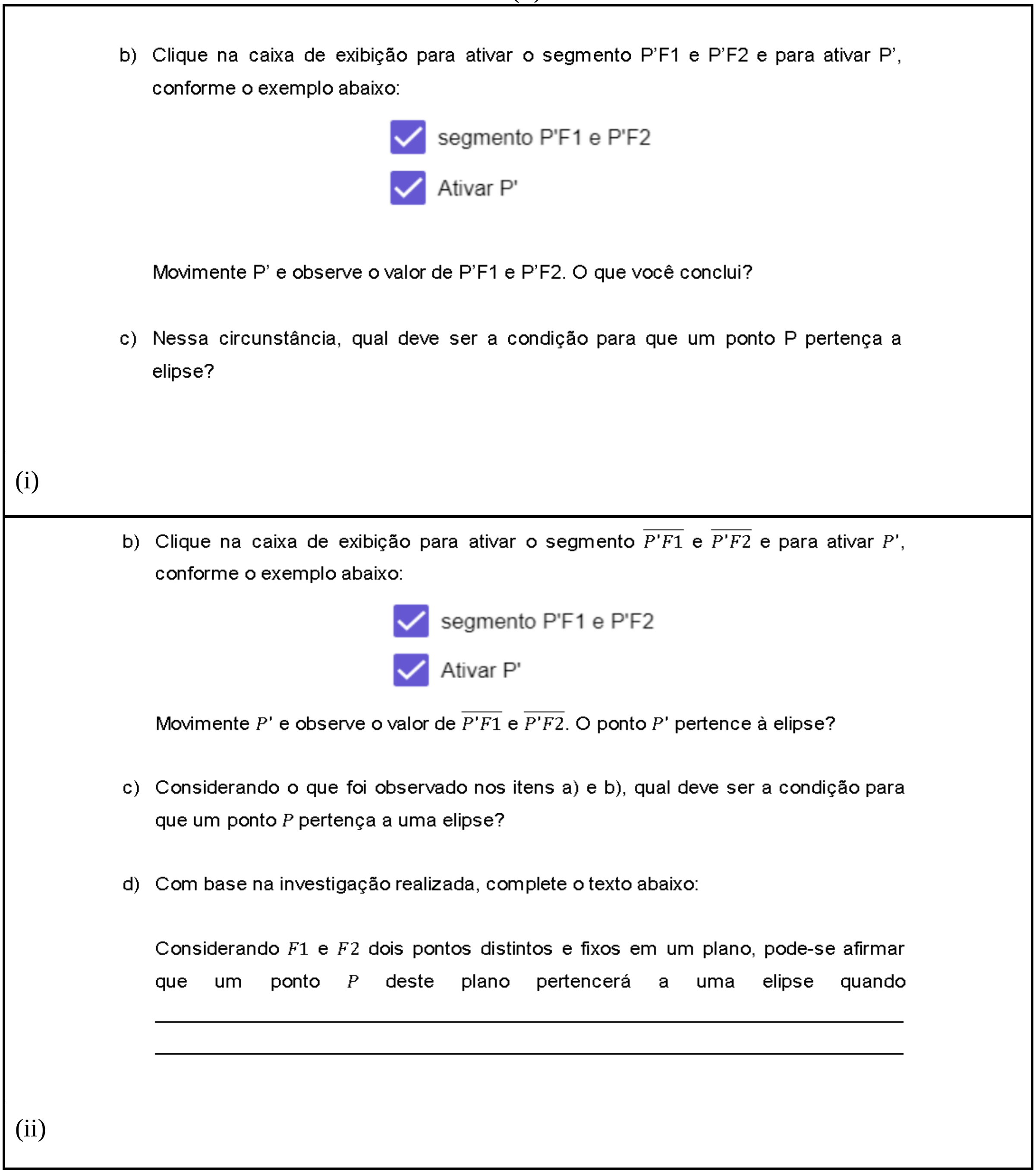
Os licenciandos sugeriram alterações durante a realização da atividade, descritas abaixo:

1. Acrescentar as perguntas: "As somas das distâncias são iguais? Qual é a maior? Ela pode ser menor?" no item **d** (Licenciando L_1);
2. Fixar os focos (Sugerido por L_1);
3. Entregar as folhas de respostas à parte para que seja mais prático o manuseio ao responder às questões (Sugerido por L_4).

Com base nessas sugestões, considerando a metodologia utilizada na pesquisa, nas releituras e nas observações realizadas pelas autoras, foram feitas as seguintes modificações:

1. Fixação dos focos no *Applet* 2 (Sugerido por L_1);
2. Modificação dos itens **b** e **c** da Questão 1 devido à dificuldade que alguns licenciandos apresentaram para compreendê-los (Figura 37) (Sugerido por L_1);

Figura 37 - Alterações nos itens **b** e **c** da Questão 1: “Antes da alteração” (i) e “Depois da alteração” (ii)



b) Clique na caixa de exibição para ativar o segmento P’F1 e P’F2 e para ativar P’, conforme o exemplo abaixo:

segmento P'F1 e P'F2

Ativar P'

Movimente P’ e observe o valor de P’F1 e P’F2. O que você conclui?

c) Nessa circunstância, qual deve ser a condição para que um ponto P pertença a elipse?

(i)

b) Clique na caixa de exibição para ativar o segmento $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$ e para ativar P', conforme o exemplo abaixo:

segmento P'F1 e P'F2

Ativar P'

Movimente P' e observe o valor de $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$. O ponto P' pertence à elipse?

c) Considerando o que foi observado nos itens a) e b), qual deve ser a condição para que um ponto P pertença a uma elipse?

d) Com base na investigação realizada, complete o texto abaixo:

Considerando $F1$ e $F2$ dois pontos distintos e fixos em um plano, pode-se afirmar que um ponto P deste plano pertencerá a uma elipse quando ____

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

3. Entrega das folhas de respostas à parte para que seja mais prático o manuseio para responder às questões (Sugerido por L_4);
4. Remoção, no cabeçalho, do espaço destinado à identificação dos alunos, com o intuito de manter o sigilo dos mesmos;
5. Indicação do traço na representação dos segmentos de reta (Figura 38);

Figura 38 - Alteração no enunciado do item **a** da Questão 1: “Antes da alteração” (i) e “Depois da alteração” (ii)

Questão 1

a) Movimente o ponto P e investigue o comportamento dos segmentos PF1 e PF2 na formação da elipse. O que é possível afirmar sobre a relação dos segmentos PF1 e PF2?

(i)

Questão 1

a) Considerando que os pontos $F1$ e $F2$ são distintos e fixos em um plano, movimente o ponto P e investigue o comportamento dos segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ na formação da elipse. O que é possível afirmar sobre a relação entre os segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ e esta formação?

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

6. Alteração no enunciado do último item da atividade (Figura 39).

Figura 39 – Alteração no enunciado do item **d** da Questão 1: “Antes da alteração” (i) e “Depois da alteração” (ii)

d) Considerando todas as condições discutidas, como você define a elipse?

(i)

d) Com base na investigação realizada, complete o texto abaixo:

Considerando $F1$ e $F2$ dois pontos distintos e fixos em um plano, pode-se afirmar que um ponto P deste plano pertencerá a uma elipse quando ____

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

(iv) Apresentação dos elementos e equações da elipse

Neste momento da aplicação, após apresentar a definição de elipse, os licenciandos alegaram muita dificuldade para visualizar, durante a Atividade Investigativa 1, o que deveria ter sido concluído no item **c**, para que pudessem definir a elipse corretamente. Ademais, elogiaram a qualidade das imagens das elipses apresentadas e entregues no material impresso.

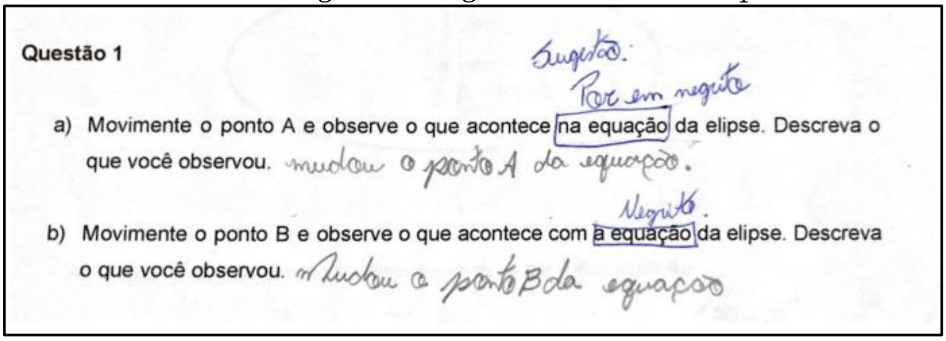
(v) Atividade Investigativa 2

A realização da Atividade Investigativa 2 durou quarenta e cinco minutos, tempo superior ao que era esperado pelas autoras. Os licenciandos não demonstraram dificuldades na realização das questões e elogiaram a estrutura da atividade. Também se mostraram satisfeitos com as questões, por apresentarem de forma prática e didática a mudança de registro da Álgebra para a Geometria e vice e versa.

Nesta atividade, os licenciandos L_4 e L_5 acharam complicado o manuseio da folha de respostas, preferindo destacá-la para responder às questões. Sugeriram que a mesma fosse entregue separadamente aos alunos. Também encontraram dificuldades na interpretação do enunciado de algumas questões, e fizeram sugestões de alteração, destacadas abaixo.

O licenciando L_1 sugeriu destacar o termo “na equação” na Questão 1, itens **a** e **b** (Figura 40).

Figura 40 - Sugestão do licenciando L_1



Questão 1

Sugestão:
Por em negrito

a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na equação da elipse. Descreva o que você observou. mudou o ponto A da equação.

Negrito.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a equação da elipse. Descreva o que você observou. mudou o ponto B da equação

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O licenciando L_1 sugeriu agrupar os itens **i**, **j**, **k** e **l** em uma nova questão, visto que abordam o caso de uma circunferência. Houve dúvida sobre a diferença entre circunferência e círculo. As autoras avisaram que a questão perguntava sobre a equação e, como se tratava de uma atividade investigativa, não se aprofundaram no esclarecimento da dúvida.

Também foi sugerido pelos licenciandos a inclusão de uma folha com malha quadriculada para a realização da Questão 4.

Analisando as respostas da atividade, as autoras fizeram as seguintes alterações:

1. Inversão na ordem dos itens **e** e **f** com os itens **g** e **h** na Questão 1, visto que os alunos apresentaram maior facilidade na mudança do registro geométrico para o algébrico, com o intuito de, antecipando a realização desses itens, auxiliar na resolução dos posteriores;
2. Destaque no termo "na equação" e "a equação" nos itens **a** e **b**, respectivamente, da Questão 1;
3. Criação de uma nova Questão 2, formada pelos itens **i**, **j**, **k** e **l** da Questão 1;
4. Exclusão da Questão 4, visto que a mesma tomou grande tempo da aplicação do teste exploratório. Vale ressaltar que o foco principal desta etapa, a mudança de registro, foi contemplado em outras questões.

(vi) Apresentação da propriedade refletora

O vídeo sobre a mesa de bilhar recebeu muitos elogios dos licenciandos, que o acharam muito interessante. O licenciando L_3 questionou se haveria alguma diferença caso mudasse a posição do taco utilizado no vídeo. Essa dúvida gerou a necessidade de acrescentar, no slide, um vídeo sobre a propriedade refletora, mostrando que, independentemente da posição do taco e da força aplicada sobre a bola de bilhar que está sobre o foco, a mesma intersecta a superfície elíptica para que, por meio da reflexão, intersecte o outro foco.

No vídeo sobre a sala dos sussurros foi possível observar sua usabilidade, na “prática”. Também gerou ânimo para a participação no *Applet* 4, que foi muito bem sucedido.

4.1.2 Entrevista semiestruturada

Devido ao tempo, não foi possível realizar a entrevista semiestruturada pessoalmente com os licenciandos. Desta forma, decidiu-se enviar o roteiro de entrevista (APÊNDICE E) para o e-mail dos mesmos, que responderam às perguntas e encaminharam suas respostas às autoras do trabalho.

Sobre os aspectos gerais da sequência didática:

(i) O tempo

Os licenciandos avaliaram o tempo para a realização de cada momento da aula, achando-o adequado. O licenciando L_1 destacou:

> *Achei o tempo para a realização de cada atividade muito bom, eu não me senti pressionada. Assim, consegui fazer e ir entendendo as coisas no meu tempo (Licenciando L_1).*

(ii) A clareza dos enunciados das questões

O licenciando L_4 sugeriu que, na Atividade Investigativa 2, deixasse claro no item **j** que o mesmo se refere à equação da elipse utilizada no item anterior, ele comentou:

> *Os enunciados estão claros. A única sugestão que faço é em relação aos itens i e j da atividade investigativa 2. Sugestão: deixar claro no item j que ele se refere a equação formada no item i (Licenciando L_4).*

(iii) O grau de dificuldade das questões desenvolvidas

Os participantes consideraram condizente com o público-alvo.

(iv) A qualidade dos materiais

A qualidade dos materiais utilizados foi bastante elogiada, como afirma o licenciando L_1:

> *Todos os slides estavam perfeitos! Materiais caprichosos. Eu amei tudo. Material manipulável fez toda a diferença (Licenciando L_1).*

Sobre os seis momentos da sequência didática:

1) Seções cônicas - os participantes avaliaram que a explicação foi realizada com clareza e que o *applet* utilizado e o material manipulável foram importantes para consolidar a explicação;

2) Atividade Investigativa 1 - o licenciando L_4 considerou o seu desempenho mediano, visto que teve dificuldade em algumas questões; já o licenciando L_1 respondeu que não houve dificuldade. Ambos responderam que o *applet* utilizado nesta atividade ajudou na formalização da equação da elipse;

3) Elipse no cotidiano - os licenciandos consideraram os exemplos utilizados muito interessantes e gostaram bastante. Consideraram esse momento valioso para a aplicação;

4) Apresentação da elipse - os licenciandos acharam que o uso das imagens para apresentar a elipse, os elementos e as equações da elipse, auxiliou na compreensão dos mesmos;

5) Atividade Investigativa 2 - os licenciandos destacaram que não houve dificuldades para a realização dessa atividade e que o *applet* utilizado auxiliou na compreensão da passagem da mudança do registro algébrico para o geométrico e vice-versa; a única sugestão para o *applet* foi a fixação dos focos. Os licenciandos consideraram, ainda, as perguntas desta atividade condizentes com o nível do trabalho. As sugestões de alterações foram mencionadas anteriormente;

6) Propriedade refletora - os licenciandos consideraram que o vídeo apresentado esclareceu a propriedade refletora. Quanto ao *applet*, consideraram válido a sua utilização para a conclusão da atividade refletora e sobre a ordem de sua apresentação, concordaram em deixá-lo após a apresentação do vídeo.

Sobre o processo de investigação, o consideraram enriquecedor para a aprendizagem dos alunos. O licenciando L_4 destacou:

> *Achei o processo muito enriquecedor para a aprendizagem dos alunos e foi tudo de modo excepcional (Licenciando L_4).*

Sobre o uso da Tecnologia Digital, destacaram que foi importante para a aprendizagem, visto que o mesmo consolidou os conceitos apresentados. O licenciando L_1 comentou:

> *Ajudou na visualização e no entendimento das propriedades da elipse, além de facilitar o aprendizado de cada elemento que está na equação da elipse (Licenciando L_1).*

E, sobre os objetivos específicos da pesquisa, os licenciandos concordaram que o estudo tem potencial para atingi-los.

Com base nas sugestões apresentadas pelos licenciandos, foram realizadas as seguintes modificações:

1. Remoção da folha de respostas para facilitar o manuseio da mesma durante a realização da atividade (Sugerido por L_4 e L_5);
2. Destaque do termo "na equação" nos itens **a** e **b** da Questão 1 (Sugerido por L_1 e L_3) (Figura 41);

Figura 41 - Alteração nos itens **a** e **b** da Questão 1: "Antes da alteração" (i) e "Depois da alteração" (ii)

a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na equação da elipse. Descreva o que você observou.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a equação da elipse. Descreva o que você observou.

(i)

a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

3. Agrupamento dos itens **i**, **j**, **k** e **l** em uma outra questão. Assim, esses itens passaram a ser, respectivamente, os itens **a**, **b**, **c** e **d** de uma nova Questão 2 (Sugerido por L_1) (Figura 42);

Figura 42 - Alteração na Questão 1: "Antes da alteração" (i) e "Depois da alteração" (ii)

i) Utilize novamente o *Applet*. Movimente os pontos A e B de forma que os segmentos CA e CB tenham a mesma medida. Qual figura é formada? O que é possível observar na equação da elipse?

j) Transforme essa equação para que ela tenha o formato $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = z$. Qual equação foi formada?

k) Na equação formada acima, o que z representa na figura formada? Qual a relação de z com os segmentos CA e CB?

l) O que você conclui a respeito da relação entre a elipse e o que foi observado nos itens i), j) e k)?

(i)

Questão 2

a) Utilize novamente o *Applet*. A partir de um determinado ponto C, movimente os pontos A e B de forma que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ tenham a mesma medida. Qual figura é formada? Observe a sua equação e escreva o que é possível afirmar em relação aos denominadores da equação dessa figura?

b) Transforme a equação encontrada acima para que ela tenha o formato $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = k$. Qual equação foi formada?

c) Na equação formada acima, o que k representa na figura? Qual a relação de k com os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$?

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

4. Remoção, no cabeçalho, do espaço destinado à identificação dos alunos, com o intuito de manter o sigilo dos mesmos;

5. Alteração na ordem dos itens da Questão 1, para facilitar a compreensão dos alunos, que relataram mais facilidade na escrita da equação da elipse a partir da sua representação geométrica. Mudança dos itens: **e** passou a ser o item **g** (neste item, foi alterada a ordem em que as frações da equação da elipse são apresentadas); o item **f** passou a ser o **h**; o item **g** passou a ser o **e**; o item **h** passou a ser o **f**; o item **g** passou a ser o item **e** e o item **h** passou a ser o item **f**;
6. Alteração da Questão 4 (que após a inclusão de uma nova Questão 2, passou a ser Questão 5), visto que a construção geométrica não é o foco do trabalho. Com isso, foi incluída uma questão sobre a circunferência (Figura 43).

Figura 43- Questão removida (i) e Questão adicionada (ii)

Questão 4

A equação $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ representa uma elipse. Faça o esboço dessa elipse, indicando seus eixos maior e menor e seu centro.

(i)

A equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ representa uma circunferência. Determine se as afirmativas são verdadeiras ou falsas. Coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.

( ) O centro dessa circunferência é $(-3, 2)$.
( ) A medida dos semi eixos (maior e menor) são iguais e medem 6.
( ) O centro dessa circunferência é $(3, -2)$.
( ) O raio dessa circunferência mede 36.
( ) A equação dada representa uma elipse.

(ii)

Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, a partir das sugestões feitas durante o teste exploratório, das respostas da entrevista com os participantes e das observações feitas pelas autoras, foram realizadas as alterações, descritas acima.

4.2 Implementação e Avaliação

4.2.1 Aplicação da Sequência Didática

A Implementação da ação interventiva ocorreu em uma turma da 2ª. série do Ensino Médio com a participação de vinte e três alunos. Eles serão nomeados de A_1 até A_{23}, para manter o sigilo de suas identidades. Exemplos: (i) A figura abaixo mostra o comentário feito pelo aluno A_2; (ii) Os alunos A_3 e A_{14} responderam corretamente.

Foram disponibilizadas 4h/a para a implementação do trabalho. Devido ao tempo, a sequência didática teve de ser alterada. Os slides sobre as seções cônicas e sobre a presença da elipse no cotidiano foram realocados para o final da aula, com o intuito de priorizar as atividades investigativas que não dependiam, necessariamente, deste contexto inicial. Assim, iniciou-se a aula com a Atividade Investigativa 1. Posteriormente, apresentou-se a definição da elipse, seus elementos e suas equações. Realizou-se a Atividade Investigativa 2 e foi apresentada a propriedade refletora.

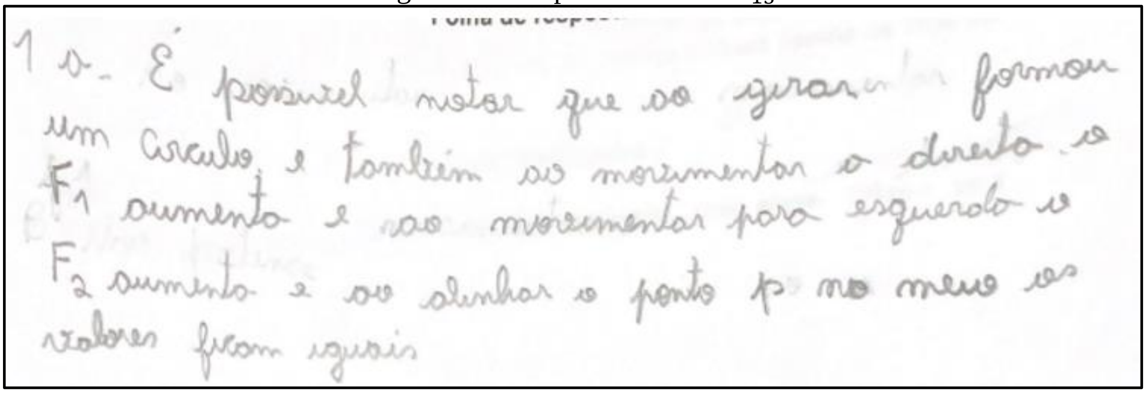
Como previsto pelas autoras, não foi possível apresentar os slides sobre as seções cônicas e a presença da elipse no cotidiano, cuja retirada não trouxe danos à aplicação da sequência didática, visto que a propriedade refletora, de certa forma, diz respeito a presença dessa figura em situações e lugares que são comuns a um determinado grupo de pessoas.

Dessa forma, a aula com a Atividade Investigativa 1 deu início à Implementação, com os alunos investigando os itens propostos, utilizando o *Applet* 2.

Os alunos demonstraram muita dificuldade na realização desta atividade. No item **a**, os alunos exploraram a situação-problema, primeira parte do processo de Investigação Matemática, seguindo os comandos e movimentando o ponto P para analisar a relação entre os segmentos formados ($\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$) e a formação da elipse. No entanto, não conseguiram enxergar esta relação com facilidade.

Quanto à segunda parte do processo de Investigação Matemática, boa parte dos alunos formulou conjecturas sobre a medida dos segmentos e sobre a alteração no tamanho destes segmentos. Os alunos fizeram afirmações sobre quando "caminhavam" com o ponto P, pertencente à elipse: no sentido horário, $\overline{PF2}$> $\overline{PF1}$; e, no sentido anti-horário, $\overline{PF1}$> $\overline{PF2}$ (Figura 44). Apesar de serem conjecturas corretas, não eram o ponto central da formação da elipse. Neste contexto, Ponte (2003) afirma que o objetivo de frente a um problema é, naturalmente, resolvê-lo. Mas, além disso, é possível realizar outras descobertas que podem se apresentar tão ou mais importantes do que a solução original; e, caso não seja possível resolvê-lo, o caminho percorrido ainda é importante pelas descobertas nele feitas.

Figura 44 - Resposta do aluno A_{15}



1 a- É posivel notar que ao giran formou um Circulo, e tambem ao movimentar o direito o F1 aumento e ao movimentar para esquerdo o F2 aumento e ao alinhar o ponto p no meio os valores ficam iguais

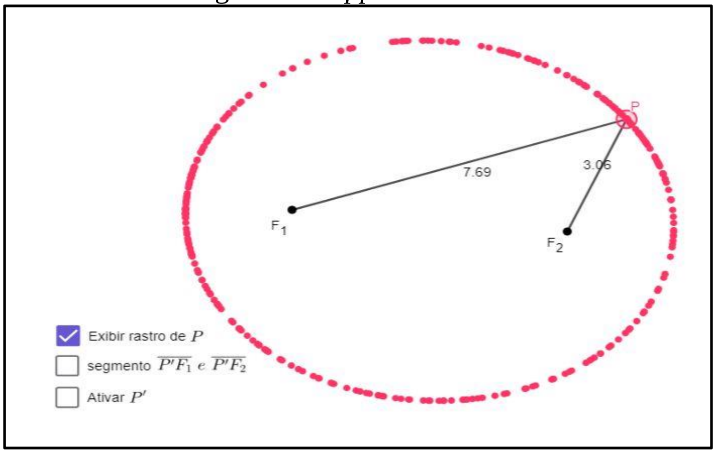
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Alguns alunos conjecturaram, também, que o desenho geométrico apresentado no *Applet* 2 era uma circunferência. Esta comparação com o desenho do círculo ou da circunferência ocorreu devido à proximidade dos focos (fixos), que fez o desenho geométrico da elipse se aproximar, de fato, dessas figuras.

Pode-se observar, na resposta do aluno A_{15} erros na sua escrita. Ele identificou F1 e F2 como segmentos, quando, na verdade, são pontos. Neste caso, a medida do segmento $\overline{PF1}$ se altera, e não F1; o mesmo vale para o ponto F2. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam que o registo escrito numa Investigação pode ser um desafio adicional para os alunos, dependendo do seu nível de escolaridade, considerando que exige um tipo de representação que podem nunca ter utilizado.

Após esta percepção, o *Applet* 2 foi modificado pelas autoras, sendo alteradas as posições dos focos. Neste momento, foi pedido aos alunos que eles atualizassem a página da web. Depois que os alunos realizaram a atualização, surgiram comentários como: “Agora não é uma circunferência perfeita” (Figura 45).

Figura 45 - *Applet* 2 alterado



Fonte: Elaboração própria.

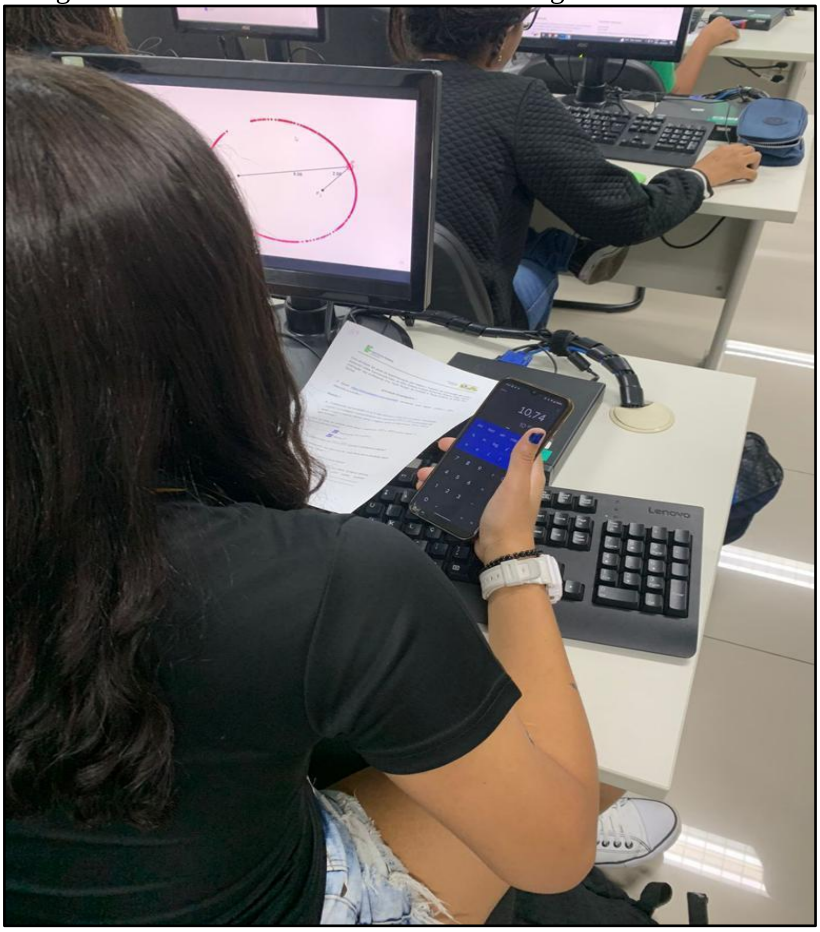
Neste momento, pode-se observar a terceira etapa do processo de Investigação, em que, de acordo com Ponte (2003), os alunos reformulam a conjectura inicial, intuitivamente, para depois refutar a mesma com o caso em que não se aplica tal afirmação. Evidencia-se, também, a importância do papel do professor no processo de Investigação Matemática. O autor afirma que o professor deve estimular a criatividade do aluno, criando nele um espírito interrogativo frente às suas ideias matemáticas.

Entretanto, mesmo após a atualização do *applet*, os alunos não conseguiram realizar afirmações sobre a relação entre os valores numéricos dos segmentos ($\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$) e a formação da elipse, pois estavam analisando o comportamento de cada segmento separadamente. Por este motivo, as autoras fizeram questionamentos, individualmente, como: "Qual a relação entre os segmentos e a elipse formada, além de um ser maior e o outro menor?"; "Você analisou os valores? Eles não estão aí à toa.". Ao perceber que haveria a necessidade de fazer contas, alguns alunos pediram para utilizar a calculadora, que foi liberada.

Como a dificuldade foi unânime na turma, as autoras pediram um momento de atenção e se dirigiram aos alunos, pedindo para que investigassem a relação que os segmentos possuem entre si com a formação da elipse, ao invés de analisar o comportamento de cada um separadamente. Realizaram, então, os questionamentos: "Além de um ser maior e o outro menor, há uma forma de relacionar ambos os segmentos com a formação da elipse? Há alguma relação entre os dois segmentos? Você observa algum padrão?".

Após este momento, os alunos realizaram testes, terceira etapa do processo de Investigação Matemática, e perceberam que, ao somar a medida dos segmentos, havia um padrão: a soma sempre resultava em 10,74 (Figura 46).

Figura 46 - Aluno somando a medida dos segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A maioria dos alunos conseguiu conjecturar que a soma de $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ resulta em uma constante, desde que o ponto P pertença à elipse. E, ainda neste momento, alguns alunos questionaram uma variação entre os resultados encontrados para a soma das medidas dos segmentos pois às vezes resultava em 10,75. Foi explicado que o GeoGebra, plataforma utilizada para o desenvolvimento e manuseio do *applet* utilizado na Atividade Investigativa, arredonda alguns valores para mais ou para menos, e, neste caso, estava acontecendo uma alteração de um centésimo no resultado. As respostas dos alunos A_{18} e A_5, transcritas abaixo, relatam estes dois valores encontrados.

> *É possível afirmar que na soma das duas medidas só vai dar dois resultados 10,74 e 10,75 (Aluno A_{18}).*

> *Depois da atualização a figura mudou de círculo para uma outra figura e os pontos F1 e F2 mudaram, o F1 era mais elevado que o ponto F2. Se somar os pontos F1 + F2 vão dar o mesmo valor 10,74 com vírgula, agora quando o número e inteiro sem vírgula dar 10,75 (Aluno A_5).*

Na resposta do aluno A_5 é possível, ainda, verificar um erro em relação à "somar pontos", em vez de somar as medidas dos segmentos. Já o aluno A_{11}, cuja resposta está transcrita abaixo, apresenta outra conjectura. É comentado sobre o ângulo formado por estes segmentos.

> *Os segmentos PF1 e PF2 mudam de acordo com o movimento que fazemos com o ponto P. Os pontos F1 e F2 continuam fixos, apenas os valores dos segmentos variam de acordo com o ângulo em que se encontra o ponto P (Aluno A_{11}).*

Como alguns alunos não concluíram que a soma dos segmentos deveria ser constante, mas sim que sempre deveria resultar em 10,74, houve a necessidade de apresentar a estes alunos outro *applet* cuja soma das medidas dos segmentos da elipse formada não resultava em 10,74. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam que existe uma inclinação/aptidão dos alunos a aceitarem as conjecturas depois de terem verificado para poucos casos. Nessa situação, o professor deve estimular os alunos a encararem o teste de conjecturas, estimulando-os a procurarem contraexemplos.

Com essa intervenção, os participantes conseguiram refinar a conjectura formulada, e concluir que a soma deveria ser constante e poderia variar de acordo com a posição dos focos da elipse. Evidencia-se, novamente, a terceira etapa do processo de Investigação Matemática: Testes e reformulação, no qual há o refinamento de uma conjectura já formada. De acordo com Ponte (2003), o professor deve dar aos alunos "[...] a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática" (Ponte, 2003, p.47).

A resposta do aluno A_3, transcrita abaixo, evidencia essas percepções:

> *Ao mexer no ponto "P", os valores do ponto PF1 e PF2 mudam, ao dar uma volta completa de 360º, os valores tem uma diferença, quando gira para direita o valor do F2 é maior e quando giramos para esquerda o valor F1 é maior, quando somamos esses valores o total é aproximadamente 10,75 ou 10,74. Ao fazer outra análise, dependendo da posição as somas desses valores mudam (Aluno A_3).*

Observa-se, ainda, que estes alunos tiveram erros de escrita matemática, tais como: confusão de ponto com segmento e vice-versa.

Depois de todos os alunos terem respondido o item **a**, foi possível continuar a investigação. No item **b**, os alunos ativaram a exibição dos segmentos $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$ e do ponto P'. Movimentaram este ponto e deveriam observar o valor de $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$ e responder se o ponto P' pertence ou não à elipse. Este item leva os alunos a explorarem, novamente, uma nova situação problema, que compõe a primeira etapa do processo de Investigação Matemática.

Houve respostas afirmando que o ponto P' pertencia à elipse. Esses alunos conjecturaram, erroneamente, que a soma de P'F1 e P'F2 também é constante, como no item **a**, e, portanto, o ponto P' também pertence à elipse. As respostas dos alunos A_{14} e A_{18}, transcritas abaixo, representam esse erro.

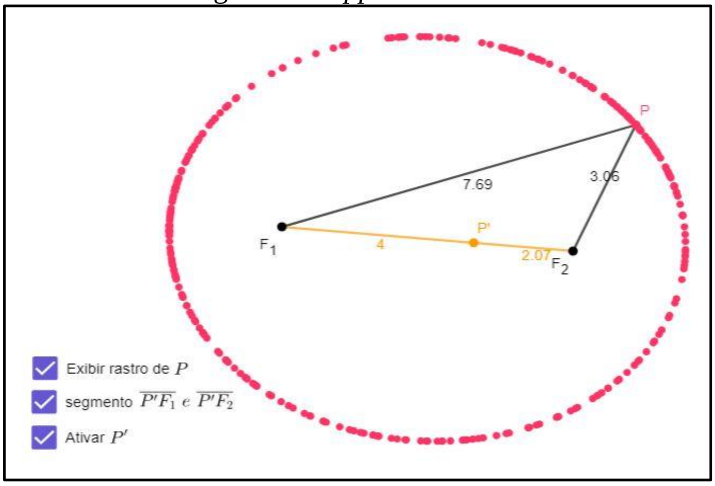
> *Sim, pois a soma está constante (Aluno* A_{14}*).*

> *Sim por conta de acontecer a mesma coisa na pergunta a quando as duas medidas da linha P são somadas só dar dois resultados 6,07 e 6,08 (Aluno* A_{18}*).*

Considerando a quantidade de alunos que participaram da implementação, as autoras não conseguiram dar atenção a todas as respostas e, por isso, algumas conjecturas só foram percebidas na leitura posterior à aplicação das atividades. Como, por exemplo, nesta situação em que as conjecturas realizadas não foram ouvidas durante a aplicação e, portanto, as autoras não puderam ajudar.

Apesar disso, se houvesse ciência da situação pelas autoras, seria interessante comentar com o aluno que o *applet* apresenta uma elipse, formada pelo movimento do ponto P, sendo, portanto, a figura destacada na cor rosa. Assim, o aluno deveria conseguir observar que o ponto P' não pertence à elipse (Figura 47). Esta dificuldade pode ter sido ocasionada devido a ausência do 1º. momento (Seções cônicas).

Figura 47 - *Applet* 2 alterado



Fonte: Elaboração própria.

Algumas respostas feitas pelos alunos não foram compreendidas pelas autoras, como a do aluno A_5:

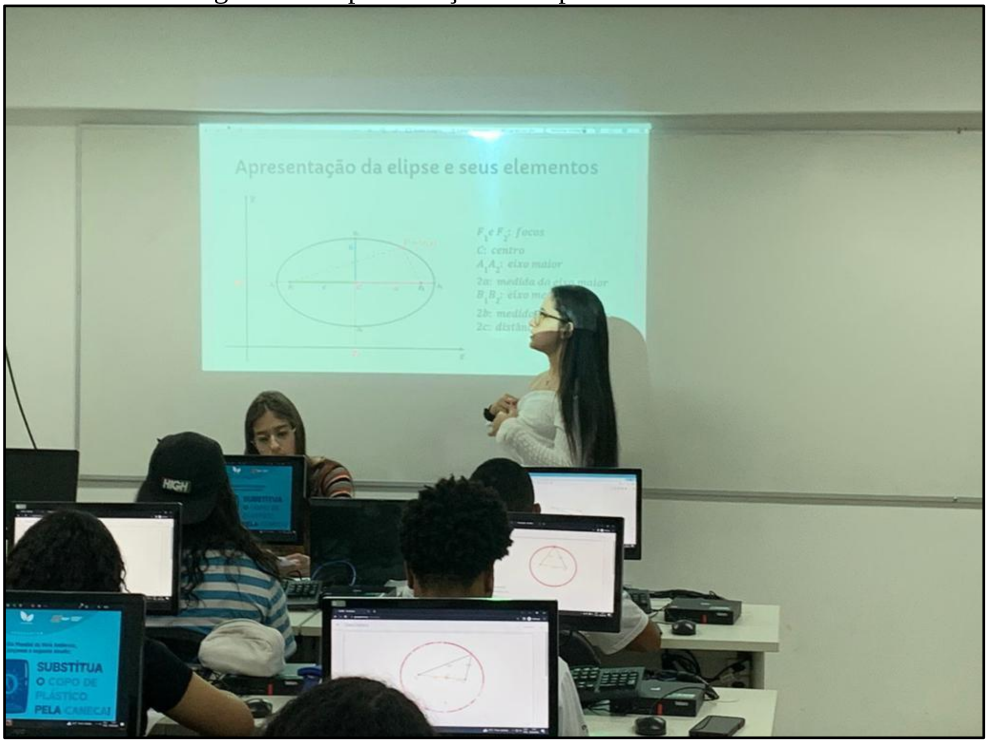
> *Não vai pertencer porque a elipse tem ângulo maior do que a do ponto F1 e F2 (Aluno A_5).*

No item **c**, os alunos deveriam observar as respostas dos itens anteriores e investigar a condição que existe para que um ponto P pertença à elipse. As respostas se dispersaram do objetivo, como as dos alunos A_3: “Quando o ponto ‘P’ se movimenta até concluir uma volta completa” e A_{18}: “A condição do ponto P é ter duas medidas iguais no mesmo jeito da pergunta a que obteve dois resultados 10,74 e 10,75 e igual a pergunta b que obteve dois resultados também”.

Até este momento, já havia se passado uma hora e cinco minutos desde o início da Atividade Investigativa 1. Devido ao tempo, as autoras pediram para os alunos entregarem a atividade mesmo sem responder o item **d**, que nenhum aluno havia respondido. Neste ponto, é importante ressaltar que a resposta do item **c**, de certa forma, indica uma possível resposta para o item **d**.

As folhas da Atividade Investigativa 1 foram recolhidas e a apostila sobre os elementos da elipse e as suas equações foram distribuídas. Nesse momento, as autoras apresentaram e explicaram, por meio dos slides, o conteúdo do material da apostila (Figura 48). Nenhum aluno apresentou dúvida. Ao final, a Atividade Investigativa 2 foi entregue aos participantes.

Figura 48 - Apresentação da elipse e seus elementos



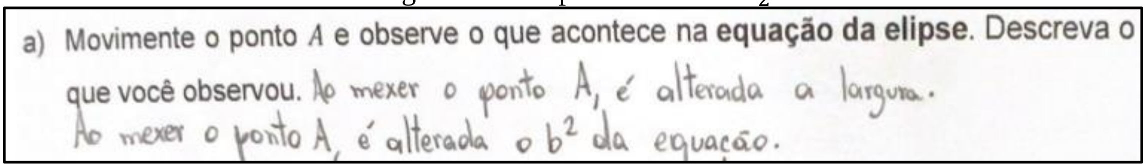
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante a realização da Atividade Investigativa 2, as autoras ouviram o relato de um aluno, que dizia: “Eu não aprendi isso antes”. Essa fala demonstra uma certa resistência ao método de Investigação Matemática, o qual não estão acostumados. De acordo com Ponte (2003, *apud* Corradi, 2011), uma importante característica da investigação é a sua contribuição para a construção do conhecimento, pois leva o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar, e reforça sua atitude de autonomia nas aulas. Skovsmose (2000, *apud* Corradi, 2011) também afirma que:

> [...] é importante que um cenário para investigação convide os alunos a formular questões e procurar explicações e quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem onde os alunos são responsáveis pelo processo (Skovsmose, 2000 *apud* Corradi, 2011, p. 164).

A seguir, serão analisadas as respostas dos alunos na Questão 1 desta atividade. No item **a**, dezoito alunos acertaram, quatro alunos erraram e um aluno não respondeu. Nela, deveria ser observada qual alteração o movimento do ponto A gera na equação da elipse, apontando a conversão, presente na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval. Alguns alunos perceberam que, ao realizar esse movimento, a largura da elipse é alterada, porém confundiram o “a²” com o “b²” (Figura 49).

Figura 49 - Resposta do aluno A_2


a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na **equação da elipse**. Descreva o que você observou. Ao mexer o ponto A, é alterada a largura.
Ao mexer o ponto A, é alterada o b^2 da equação.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros alunos, entretanto, conjecturaram corretamente, conseguindo associar o desenho geométrico com a equação da elipse, ou seja, associaram a representação geométrica à algébrica, mobilizando os dois registros de representação (conversão). Destacam-se aqui as respostas dos alunos A_{11} e A_{20}, transcritas abaixo:

> *Ao movimentar o ponto A o denominador da primeira fração muda de acordo com a forma em que posicionamos o ponto A (Aluno A_{11}).*
>
> *Tendo como ponto inicial o valor determinado pelo C, o valor do a² é determinado de acordo com o movimento feito de forma horizontal (Aluno A_{20}).*

O aluno A_{22} observou, mesmo sem precisão na escrita matemática, que, ao movimentar o ponto A, o denominador da equação da elipse é modificado, porém o seu resultado não muda. O aluno não sinalizou qual denominador é modificado; e, foi entendido pelas autoras como "resultado" o segundo membro da equação da elipse, que possui constante o número 1.

Os alunos foram capazes, pela manipulação do *applet,* de explorar a situação e formular conjecturas sobre o eixo que contém os focos de uma elipse, relacionando-o com sua equação. Observa-se, assim, a primeira e segunda etapas do processo de Investigação Matemática.

No item **b,** em que deveria ser observada qual alteração o movimento do ponto B gera na equação da elipse, as respostas foram semelhantes às do item anterior. Neste item, dezoito alunos acertaram, três alunos erraram e dois alunos não responderam. Destaca-se a resposta do aluno A_{11}, transcrita abaixo:

> *Ao movimentar o ponto B o denominador da segunda fração muda de acordo com a forma em que posicionamos o ponto B (Aluno A_{11}).*

Os alunos A_6 e A_{18}, apesar de terem observado corretamente a alteração gerada pelo movimento do ponto B, usaram erroneamente a linguagem Matemática. O aluno A_6 não diferenciou o ponto B do b como medida do semieixo menor. O aluno A_{18}, por sua vez, se referiu ao denominador da segunda fração como “segunda casa”. Suas respostas estão transcritas abaixo:

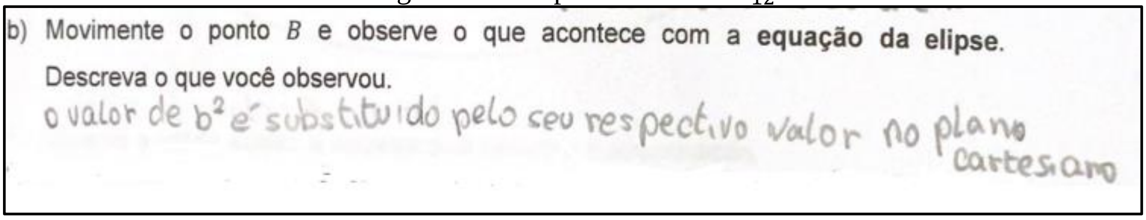
Que muda o B da equação pela medida do centro ao B (Aluno A_6).

O valor da segunda casa sempre muda na equação e na elipse (Aluno A_{18}).

Lorenzato (2010) afirma que as características atuais da linguagem Matemática a tornam muito útil, entretanto, “ela pode tornar-se um forte complicador para a aprendizagem da matemática e, por isso, demanda especial atenção do professor” (Lorenzato, 2010, p. 48).

Observou-se, também, que alguns alunos não souberam diferenciar b e b² (Figura 50).

Figura 50 - Resposta do aluno A_{12}


b) Movimente o ponto *B* e observe o que acontece com a **equação da elipse**.
Descreva o que você observou.
o valor de b² é substituido pelo seu respectivo valor no plano cartesiano

Fonte: Protocolo de pesquisa.

As autoras, ao perceberem a confusão dos alunos para diferenciarem ponto e segmento, e os valores de a e b com a² e b², intervieram pedindo para que eles analisassem novamente o material teórico, observando o que A, B, a, b, a² e b² representavam, e verificassem se o pensamento apresentado estava correto.

Alguns alunos refinaram a conjectura apresentada, atendendo à terceira etapa do processo de Investigação Matemática, entretanto, outros alunos não foram capazes de reformular o pensamento, devido à grande dificuldade em Matemática Básica. Sobre o processo de Investigação Matemática e sua relação com a importância da Matemática Básica, Ponte (2010) afirma que:

> [...] há problemas que se vão colocando. Esses problemas têm a ver com aspectos referentes ao envolvimento dos alunos no trabalho (que, por vezes, é muito difícil de conseguir), com as suas capacidades e conhecimentos (frequentemente, abaixo do que seria de desejar) [...] (Ponte, 2010, p.26).

Além disso, houve comentários equivocados os quais não foram explicitadas a resposta, como: “O ponto B começa no 1 e vai até o 4,3”.

Muitos alunos apresentaram dificuldades na identificação das coordenadas de um ponto, não sabendo diferenciar abscissa e ordenada; na identificação, no plano cartesiano, da medida de um segmento paralelo ao eixo x ou y (pela forma algébrica ou geométrica); e na diferença entre ponto e segmento de reta. Por isso, as autoras reforçaram a conclusão de que muitos alunos possuíam dificuldades na Matemática Básica, o que dificultou a formulação de conjecturas corretas. Para Corradi (2011), "É importante destacar que as atividades investigativas devem provocar a capacidade de raciocínio, além de possibilitar o emprego de conceitos matemáticos para trabalhar nas atividades propostas" (Corradi, 2011, p.169).

No item **c**, dezessete alunos acertaram, três alunos erraram e três alunos não fizeram. A maior parte dos alunos visualizou corretamente a mudança que o movimento do ponto C acarreta na equação da elipse, realizando a primeira e segunda etapas do processo de Investigação Matemática: exploração da situação problema e formulação de conjecturas, além da conversão apresentada na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval. Destaca-se a resposta do aluno A_5:

> *Só muda os números da parte superior da equação, não muda a parte inferior nem o resultado (Aluno A_5).*

As autoras não observaram essa resposta durante a aplicação do trabalho. Caso contrário, poderiam ter intervido, questionando que mudança é essa que ocorre. Dessa forma, o aluno teria a condição de refinar sua conjectura, de acordo com a terceira etapa do processo de Investigação Matemática.

Observa-se, ainda, a resposta do aluno A_6, que analisou os sinais das coordenadas do centro dependendo do quadrante em que ele estivesse posicionado: "Que colocando o ponto C no X e Y positivo X e Y da formula fica negativo e colocando X e Y no ponto negativo o ponto X e Y da formula fica positivo" (Aluno A_6). De acordo com Ponte (2003),

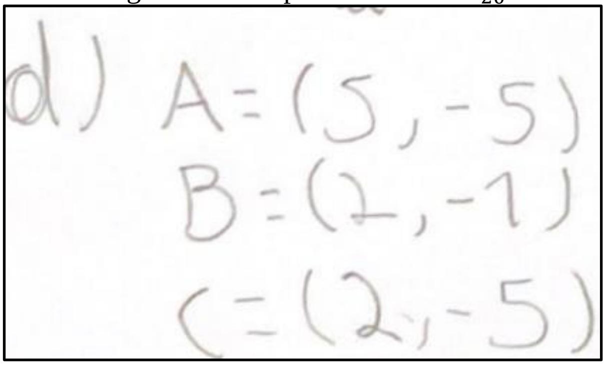
> Os alunos estão habituados a escrever respostas sintéticas em Matemática, quando muito apresentando os cálculos, usados para obtê-las e, por isso, faz-lhes muitas vezes confusão o pedido de descrever os processos usados, em especial no que respeita às estratégias tentadas e abandonadas e as conjecturas testadas e rejeitadas (Ponte, 2003, p. 116).

No item **d**, os alunos deveriam dizer quais as coordenadas do centro da elipse, considerando a equação dada. Onze alunos acertaram, nove alunos erraram e três alunos não responderam. Foi possível verificar que muitos alunos não conheciam o conceito de coordenadas de um ponto. As autoras ficaram surpresas com o índice de dificuldade em Matemática Básica. A resposta do aluno A_6 está transcrita abaixo e apresenta esta dificuldade.

> *O x fica colado no x3 do gráfico e o 49 fica colado no y do gráfico, o xc fica +2 e o yc fica no -5 (Aluno A_6).*

Muitos alunos utilizaram o *applet* para realizar essa questão, e colocaram as coordenadas dos três pontos como resposta, não identificando que C era o ponto que representava o centro, apesar da apostila e explicação. A resposta do aluno A_{20} (Figura 51) mostra esse equívoco.

Figura 51 - Resposta do aluno A_{20}



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os participantes A_{11} e A_7 responderam corretamente. O primeiro deles apresentou a resposta final correta, entretanto, se equivocou ao tentar explicar os valores e a posição das coordenadas do ponto, usando os termos “eixo x” e “eixo y”, o que se fez por entender que aqueles valores estariam representados sobre cada um dos eixos. Abaixo está transcrita a resposta do aluno A_{11}:

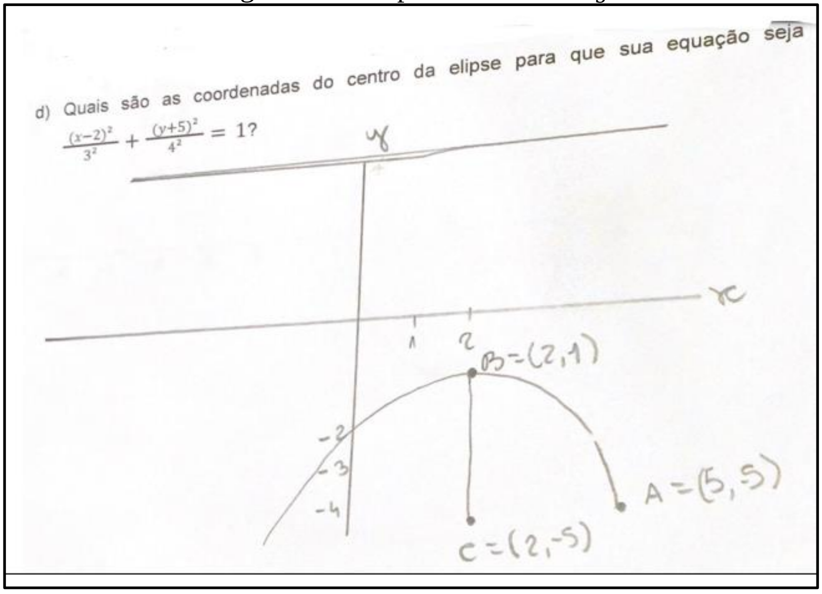
> *O ponto C deve estar posicionado em 2 (eixo x) e -5 (eixo y) C = (2,-5) (Aluno A_{11}).*

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), a Matemática possui linguagem própria e o aluno deve ser capaz de conseguir se expressar tanto oralmente quanto graficamente e em sua escrita.

O aluno A_5 fez o esboço de um desenho (Figura 52), que as autoras interpretaram como uma forma encontrada para melhorar a observação da posição do centro. Sobre esta conversão do registro algébrico para o registro geométrico, Pantoja, Campos e Salcedos (2013) citam Duval quando ele diz que:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação (Duval, 2003 *apud* Pantoja; Campos; Salcedos, 2013).

Figura 52 - Resposta do aluno A_5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com isso, pode-se observar a importância da Geometria no ensino e como a sua presença pode ser positiva para alguns alunos. Pavanello (2004) afirma que:

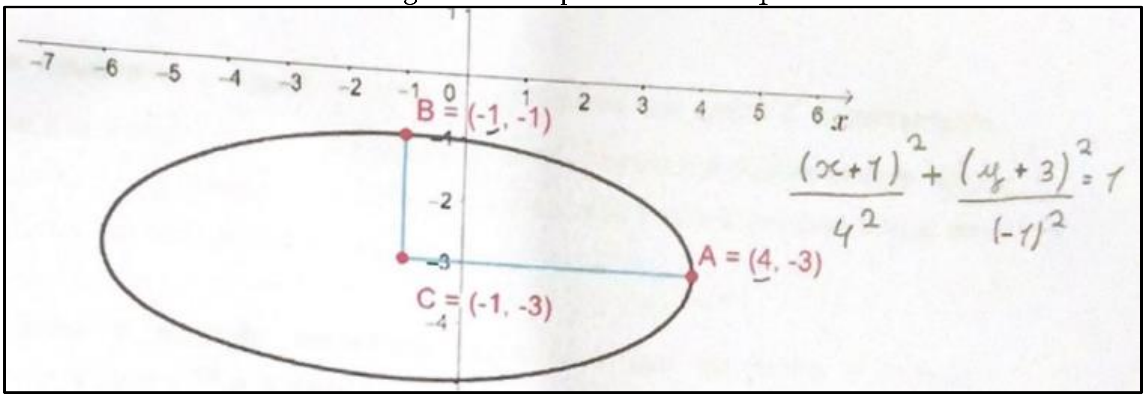
> A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da "capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" – que é um dos objetivos do ensino da matemática – oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados (Pavanello, 2004, p. 5).

Nascimento (2017) afirma que a transformação da natureza de um problema pode levar o aluno a simplificar a sua resolução:

> Com a introdução do plano cartesiano por René Descartes, no início do século XVII, problemas de outras áreas da Matemática, como os da Álgebra, puderam ser transformados em problemas de Geometria (e vice-versa), muitas vezes conduzindo à simplificação das soluções (Nascimento, 2017, p. 2).

Os itens **e** e **f** tratavam da mudança do registro geométrico para o algébrico. No item **e**, nove alunos acertaram, dez alunos erraram e quatro alunos não responderam. Já no item **f**, dois alunos acertaram, dezessete alunos erraram e quatro não responderam. A maior parte destes erros foi porque os alunos não identificaram que o eixo focal da elipse estava paralelo ao eixo y e, portanto, a medida do semieixo maior ao quadrado deveria ser o denominador da fração que contém o x_c no numerador e quatro alunos não responderam. Alguns alunos confundiram o valor de a e b (medidas dos semieixos maior e menor, respectivamente) com a abscissa do ponto A e do ponto B. A resposta do aluno A_1 (Figura 53) apresenta este erro.

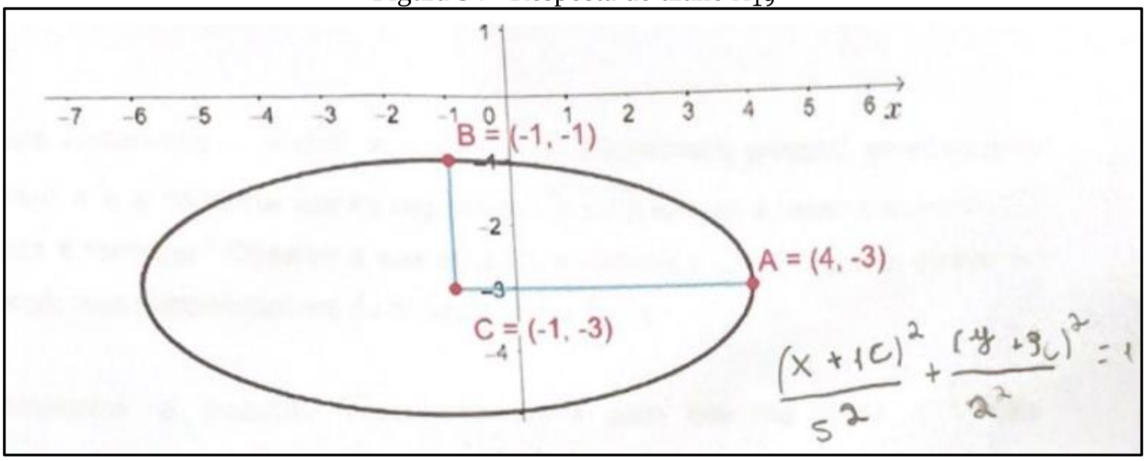
Figura 53 - Resposta do aluno A_1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O aluno A_{19} (Figura 54), ao escrever a equação da elipse representada, registrou o “c”, subscrito da representação das coordenadas do ponto C, junto aos valores 1 e 3 (x_c e y_c, respectivamente).

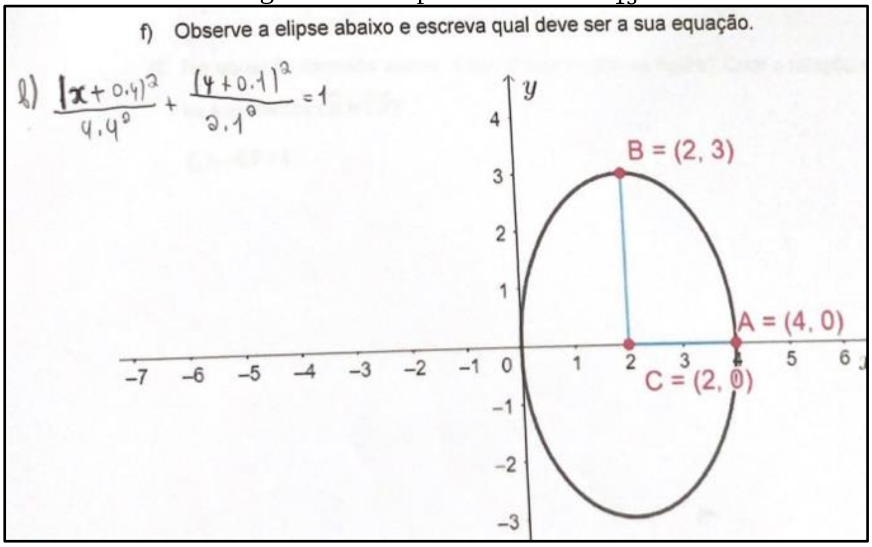
Figura 54 - Resposta do aluno A_{19}



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Houve respostas cujo raciocínio obtido pelo aluno não foi entendido pelas autoras (Figura 55).

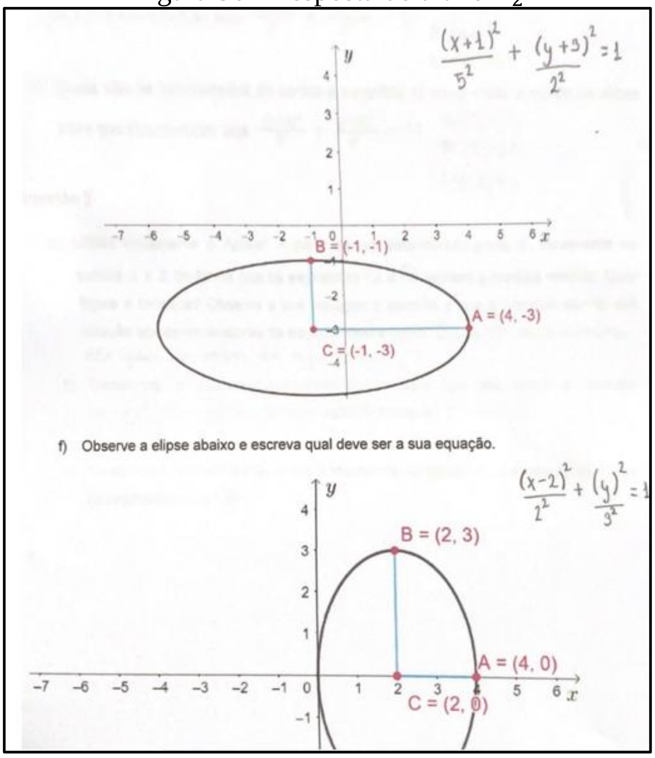
Figura 55 - Resposta do aluno A_{13}



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Muitos alunos, entretanto, acertaram as respostas, pois observaram corretamente as coordenadas do centro e inverteram os denominadores. A resposta do aluno A_2 apresenta um desses acertos (Figura 56).

Figura 56 - Resposta do aluno A_2

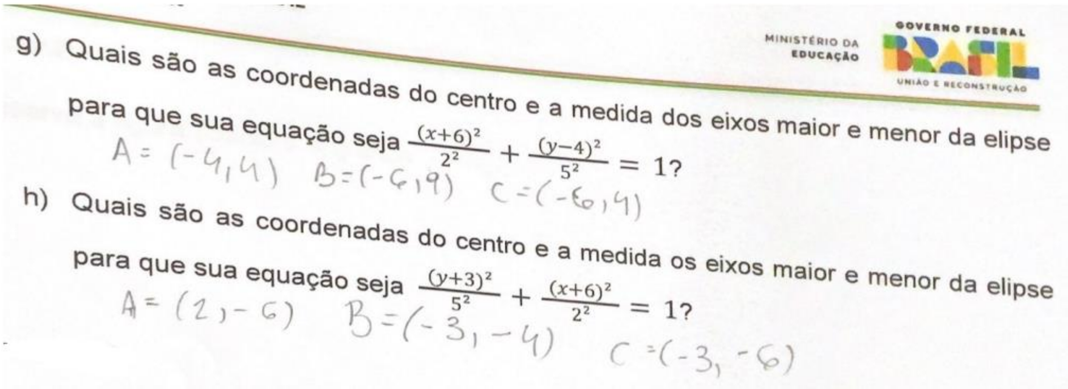


Fonte: Protocolo de pesquisa.

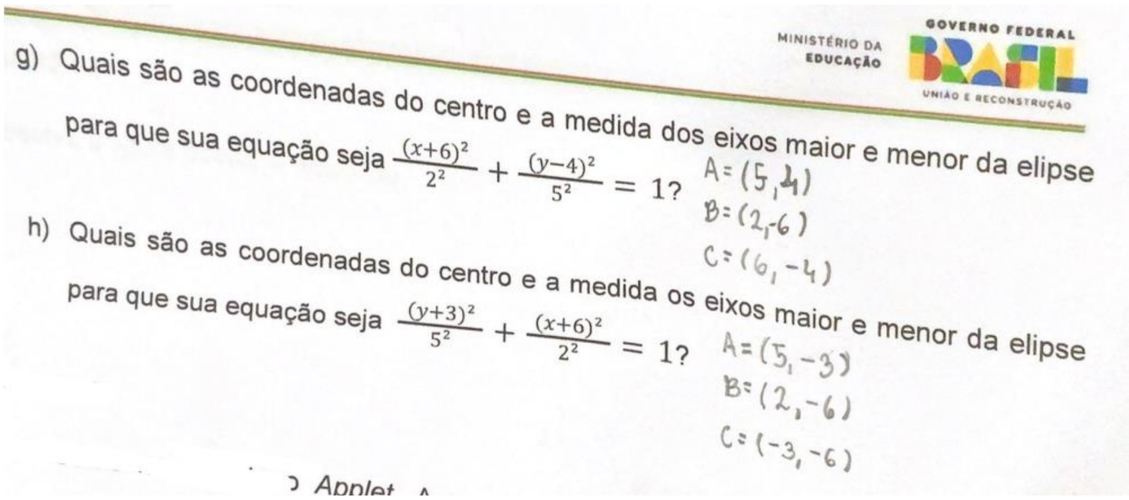
Nos itens **g** e **h**, os alunos deveriam dizer quais as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor de uma elipse cuja equação foi dada. No item **g**, apenas um aluno acertou, quatorze alunos erraram (alguns destes alunos acertaram o centro da elipse e erraram as medidas dos eixos) e oito alunos não responderam. Já no item **h**, nenhum aluno acertou, quinze alunos erraram e oito alunos não responderam. Como nos itens anteriores, alguns alunos confundiram os pontos A e B com a medida dos eixos maior (2a) e menor (2b), respectivamente.

Os alunos A_9 (Figura 57 (i)) e A_2 (Figura 57 (ii)), além de se equivocarem quanto à medida dos eixos, erraram as coordenadas do centro no item **h**, ao inverter a ordem das parcelas na equação.

Figura 57 - Respostas dos alunos A_9 (i) e A_2 (ii)



(i)

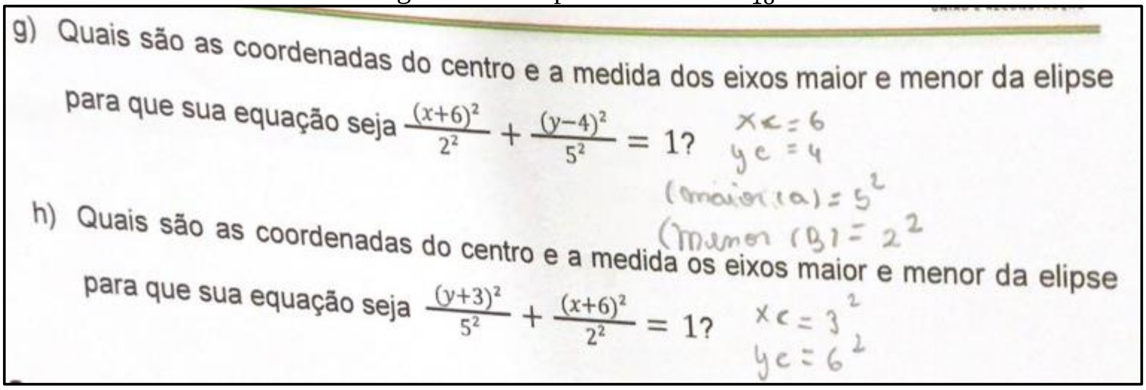


(ii)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O aluno A_{18} (Figura 58) confundiu eixo com semieixo e errou as coordenadas do centro. Nota-se, também, a utilização incorreta do expoente “2” existente no valor dos eixos menor e maior, na equação da elipse.

Figura 58 - Resposta do aluno A_{18}



g) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(x+6)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1$?

$xc = 6$
$yc = 4$
(maior (a) $= 5^2$
(menor (b) $= 2^2$

h) Quais são as coordenadas do centro e a medida os eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(y+3)^2}{5^2} + \frac{(x+6)^2}{2^2} = 1$?

$xc = 3^2$
$yc = 6^2$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Abaixo, a Tabela 1 apresenta os dados quantitativos da Questão 1 para uma melhor visualização e análise dos dados.

Tabela 1 – Dados quantitativos da Questão 1

Questão 1		
Item	Diagnóstico	Número de alunos
a	Resolução correta	9
	Resolução incorreta	7
	Sem resolução	1
	Resolução não compreendida	6
b	Resolução correta	8
	Resolução incorreta	5
	Sem resolução	2
	Resolução não compreendida	8
c	Resolução correta	13
	Resolução incorreta	2
	Sem resolução	3
	Resolução não compreendida	5
d	Resolução correta	7
	Resolução incorreta	12
	Sem resolução	3
	Resolução não compreendida	1
e	Resolução correta	9
	Resolução incorreta	10
	Sem resolução	4
	Resolução não compreendida	0
f	Resolução correta	1
	Resolução incorreta	18
	Sem resolução	4

	Resolução não compreendida	0
g	Resolução correta	0
	Resolução incorreta	9
	Sem resolução	6
	Resolução incompleta	8
h	Resolução correta	0
	Resolução incorreta	12
	Sem resolução	6
	Resolução incompleta	5

Fonte: Elaboração própria.

Com base na análise dos dados obtidos, como muitos alunos não acertaram ou não responderam os itens **g** e **h**, as autoras consideram que eles tiveram mais facilidade na mudança do registro geométrico para o algébrico do que na mudança do registro algébrico para o geométrico. Lorenzato (2010) afirma que:

> [...] todos os campos da matemática previstos no currículo oficial devem ser ensinados, e mais, de modo integrado. Se concordarmos com as vantagens do ensino interdisciplinar, com mais forte razão devemos professar o ensino intradisciplinar, o qual pode ser reduzido, sinteticamente, ao ensino integrado da aritmética, geometria e álgebra (Lorenzato, 2010, p. 60).

Na Questão 2, o aluno deveria movimentar os pontos A e B de forma que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ ficassem com a mesma medida para obterem uma circunferência. Depois, deveria realizar a atividade de "Tratamento" para transformar a equação apresentada no *applet* na equação da circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ e identificar que o segundo membro dessa equação representa o valor do raio ao quadrado.

Os alunos apresentaram confusão quanto à diferença entre círculo e circunferência. As autoras não observaram isso durante a aplicação, e, portanto, não puderam intervir. Pode-se observar, também a partir das respostas obtidas, que os alunos erraram ao dizer que os denominadores são iguais às medidas dos segmentos $\overline{CA}$ ou $\overline{CB}$, visto que os denominadores são iguais à medida do segmento ao quadrado.

A Tabela 2 apresenta os dados quantitativos referentes à Questão 2.

Tabela 2 – Dados quantitativos da Questão 2

Questão 2		
Item	Diagnóstico	Número de alunos
a	Resolução correta	3
	Resolução incorreta	5
	Sem resolução	13
	Resolução não compreendida	2
b	Resolução correta	2
	Resolução incorreta	3
	Sem resolução	17
	Resolução não compreendida	1
c	Resolução correta	0
	Resolução incorreta	2
	Sem resolução	21
	Resolução não compreendida	0

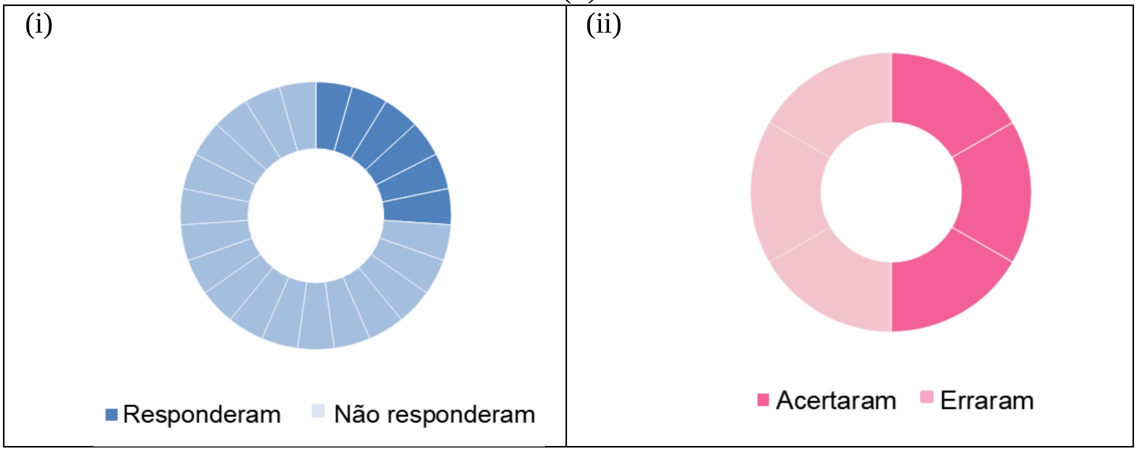
Fonte: Elaboração própria.

A partir do código de identificação de cada aluno, as autoras puderam analisar o desenvolvimento de cada um durante o processo investigativo, além de identificar os itens nos quais eles tiveram maiores dificuldades ou facilidades.

Neste contexto, destaca-se o aluno A_2, que se equivocou na resposta do item **d**, na Questão 1, a qual, dada a equação de uma elipse, perguntava seu centro. Em contrapartida, o aluno acertou o item **e** da mesma questão, que, dado o desenho de uma elipse no plano cartesiano, pedia para que o aluno escrevesse a sua equação. Vale ressaltar que, para escrever a equação da elipse, é preciso identificar o seu centro. Assim, as autoras acreditam que este aluno teve maior facilidade na mudança do registro geométrico para o algébrico e, por outro lado, maior dificuldade em relacionar elementos geométricos com o registro algébrico.

Na Questão 3, o número de respostas obtidas foi de aproximadamente 25% em relação ao total de participantes, e apenas metade das respostas obtidas estavam corretas, como mostra o Gráfico 1.

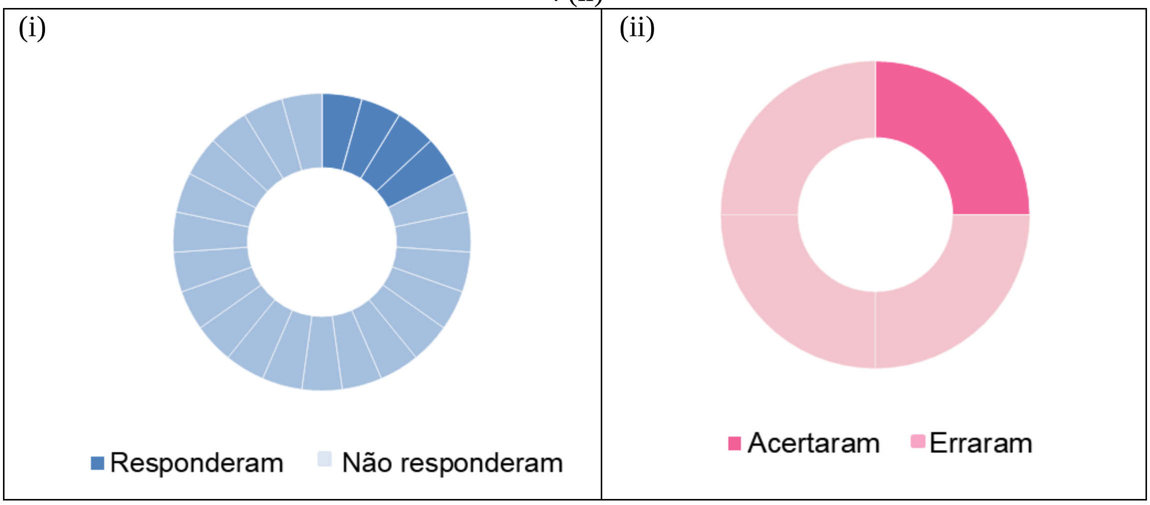
Gráfico 1 - Quantidade de alunos que responderam à Questão 3 (i) e que acertaram/erraram à Questão 3 (ii)



Fonte: Elaboração própria.

Na Questão 4, o número de respostas obtidas e de acertos foi ainda menor, como mostra o Gráfico 2.

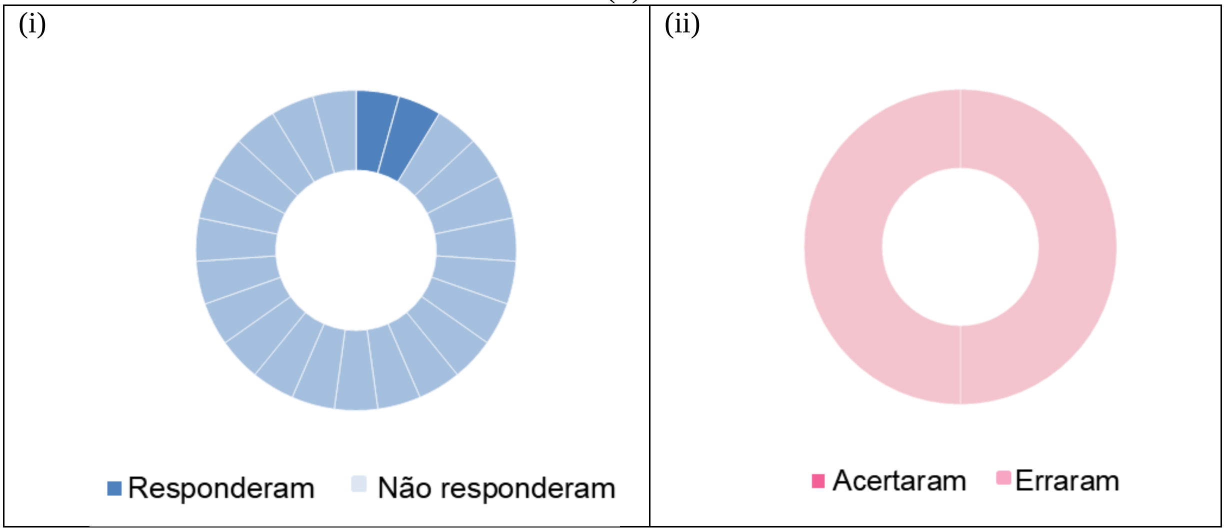
Gráfico 2 - Quantidade de alunos que responderam à Questão 4 (i) e que acertaram/erraram à Questão 4 (ii)



Fonte: Elaboração própria.

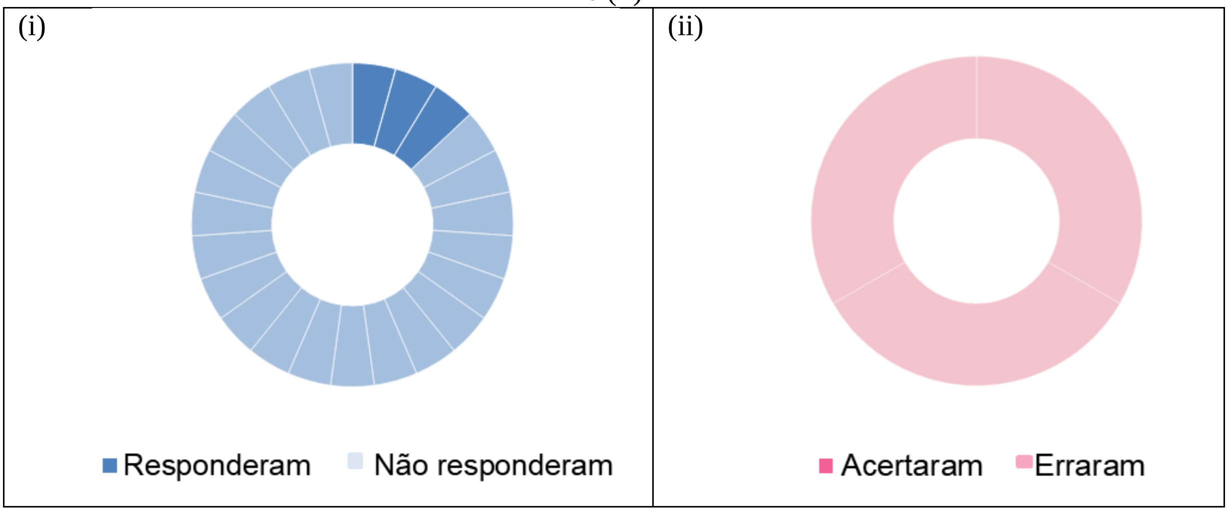
Na Questão 5 foram obtidas apenas duas respostas e na Questão 6, apenas quatro respostas. Em ambas questões, nenhum aluno respondeu corretamente, como mostram os Gráficos 3 e 4.

Gráfico 3 - Quantidade de alunos que responderam à Questão 5 (i) e que acertaram/erraram à Questão 5 (ii)



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 4 - Quantidade de alunos que responderam à Questão 6 (i) e que acertaram/erraram à Questão 6 (ii)



Fonte: Elaboração própria.

Devido ao tempo, foi pedido aos alunos que entregassem a Atividade Investigativa 2 mesmo sem finalizá-la. Os alunos foram liberados para o intervalo e o tempo restante foi dedicado à apresentação da propriedade refletora da elipse. Por este motivo, a maior parte deles (indicada nos gráficos abaixo) não conseguiu responder às questões 2, 3, 4, 5 e 6.

Após a análise dos dados obtidos nas atividades investigativas e na aplicação da sequência didática, a utilização da Investigação Matemática na sala de aula propiciou às autoras uma visão imprescindível do que de fato é uma aula investigativa. Foi desafiador pela necessidade de lidar com muitas situações que não haviam sido previstas, e, principalmente, por não poderem interferir no processo de investigação dos alunos. Por muitas vezes, sentiam necessidade de ir ao quadro para auxiliá-los. Além disso, tinha-se a visão de que a aula investigativa seria tranquila, pelo fato dos alunos experimentarem, sozinhos, as situações propostas. Entretanto, a experiência mostrou-se mais desafiadora.

Os alunos, por sua vez, apresentaram muita dificuldade em conceitos de Matemática Básica, não possuindo noções essenciais de Geometria, como ponto, segmento de reta, plano cartesiano, etc. Além disso, não apresentaram conhecimento sobre a linguagem matemática, se equivocando ao escrever símbolos e representações. Pode-se observar, também, pouca dominância na Língua Portuguesa, visto que eles não conseguiram se expressar com clareza nas questões discursivas.

Foi observado também que alguns alunos possuíram resistência ao processo de Investigação Matemática, visto que os mesmos, de início, não conseguiram entender o que deveriam fazer nas questões. Entretanto, isto proporcionou aos alunos uma certa autonomia no estudo.

As autoras, por sua vez, se sentiram muitas vezes, durante a aplicação, inseguras com a variedade de percursos e de caminhos que os alunos poderiam seguir, incluindo os questionamentos que poderiam surgir.

Apesar das dificuldades encontradas, a implementação gerou resultados positivos, como apresentar aos alunos um método de ensino pouco utilizado e que, na visão deles, apesar de mais complexo, é mais esclarecedor. As autoras também consideram positivo o resultado obtido com a manipulação que os alunos realizaram nos *applets*, visto que esta ação permitiu-lhes afirmar e provar conjecturas, propiciando mais autonomia no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, foi possível observar a importância da Geometria para a visualização e compreensão de conceitos matemáticos, e como é valioso oportunizar aos alunos, nas aulas de Matemática, o ensino dessa área de conhecimento.

4.2.2 Entrevista semiestruturada

Ao final da aplicação da sequência didática, foi realizada uma entrevista semiestruturada com os alunos, tendo como base um roteiro de perguntas previamente estabelecido. Também foi entregue uma folha com a última parte da entrevista, que deveria ser respondida por escrito e entregue às autoras. Era pedido: “Avalie o trabalho, apontando críticas e sugestões. Ressalte o que lhe chamou atenção e contribuiu para o seu processo de investigação do assunto abordado”. As respostas obtidas na entrevista e as respostas escritas serão apresentadas abaixo, de acordo com os temas: estudo da Álgebra e da Geometria durante a Educação Básica; contribuições e dificuldades durante o processo de investigação no estudo da elipse; e a importância da Tecnologia Digital.

- Estudo da Álgebra e da Geometria durante a Educação Básica;

No contexto do estudo da Álgebra e da Geometria, dezoito alunos afirmaram que durante a Educação Básica, o estudo da Álgebra foi predominante. Com isso, foi perguntado se alguém estudou Geometria e em que condições. Um aluno disse que estudou um pouco das duas áreas, outro aluno disse que só estudou Geometria no final do nono ano do Ensino Fundamental II e três alunos disseram que não tiveram Geometria nesta fase escolar.

Lorenzato (2010) afirma ser necessário e desejável que o ensino da Geometria seja fortemente enfatizado para que seja possível raciocinar geometricamente, pois sua ausência no ensino gera “uma visão capenga, falaciosa e incompleta da Matemática” (Lorenzato, 2010, p. 70).

O aluno A_4, cuja resposta está transcrita abaixo, comenta sobre a dificuldade que encontrou em visualizar a figura e relacioná-la com sua respectiva equação.

> *O trabalho foi importante o que me chamou atenção foi a dificuldade de ver a imagem e interpretar na formula. Sugestão: Que trabalhos como esse continue sendo abordado em sala de aula (Aluno A_4).*

A dificuldade observada na passagem da Geometria para a Álgebra não é desejada, pois, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, toda representação é restrita em relação ao que ela retrata, e, ao fazer a mudança de um registro a outro, as características da situação representada não são as mesmas.

Duval (2012) afirma que é possível observar um isolamento de registro de representação na maioria dos alunos em todos os níveis de ensino, pois eles não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes. Entretanto, o autor afirma que utilizar muitos registros de representação é uma característica do pensamento humano e a conversão desempenha um papel essencial na aprendizagem, sendo fundamental mobilizar ao menos dois registros de representação para a compreensão conceitual de objetos. E afirma:

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito (Duval, 2012, p. 283).

Lorenzato (2010) afirma que ao ensinar integradamente Aritmética, Geometria e Álgebra, apesar de cada uma possuir diferentes características, os alunos conseguem perceber harmonia, coerência e beleza na Matemática, tal qual uma orquestra. O aluno A_9 apresenta em seu comentário uma visão sobre essa relação entre "as partes" da Matemática. Sua resposta está transcrita abaixo:

> *Eu achei ótimo gostei muito, e uma atividade bem construtiva, para mim foi uma experiência mara, eu conheci e identifiquei que há uma elipse achei criativo quando a gente movimenta o appile e aparecia os números nas equações, só não sou boa em contas, por isso não consegui olhar o gráfico e fazer as equações, talvez, com mais tempo conseguiria. Parabéns a todas as meninas pela criatividade (Aluno A_9).*

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam que a Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino baseado na exploração de situações de natureza exploratórias e investigativas, constituindo experiências de aprendizagem importantes, além de estar relacionada à observação, experimentação e construção. Além disso, Ponte (2009) afirma que a utilização de programas de geometria dinâmica facilita a exploração de conjecturas, contribuindo para a obtenção de explorações mais organizadas e completas.

O aluno A_6, por sua vez, apresentou dificuldade com a Álgebra, ao dizer que teve dificuldade com as "fórmulas". Seu comentário está transcrito abaixo:

> *Aprendi muito com a aula. Adorei mexer nos sites, mas tive dificuldade com as fórmulas. A primeira investigação foi difícil, mas bem divertida (Aluno A_6).*

Em seu estudo sobre os obstáculos que os alunos enfrentam na aprendizagem da Álgebra, Gil (2008) afirma que apesar da Álgebra possuir um lugar de destaque no currículo escolar, os alunos possuem dificuldades nos conceitos e procedimentos que a cercam. O autor afirma que a Matemática contempla um conjunto de símbolos que precisa de um entendimento de seus significados, o que assusta os alunos, visto que parece mais difícil do que realmente é. Gil (2008) também afirma que os livros didáticos focam num trabalho mecânico baseado em técnicas e listas de exercícios, privilegiando resoluções sem problematização, não propiciando uma aprendizagem significativa.

Prosseguiu-se com a entrevista, questionando os alunos sobre aspectos do processo de Investigação no estudo sobre a elipse.

- Contribuições e dificuldades durante o processo de investigação no estudo da elipse

Ao perguntar aos alunos, durante a entrevista, qual a opinião deles em relação ao processo de investigação, apenas um aluno respondeu à pergunta. Ele disse: “Eu achei mais difícil, mas é questão de prática”.

Depois, muitos alunos comentaram que o método é mais cansativo, mas que o que o foi aprendido, dificilmente será esquecido. Um aluno completou: “[...] o que a gente vê a gente guarda mais”. No que diz respeito ao potencial do “ver”, Lorenzato (2010) afirma que “Palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticos ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar” (Lorenzato, 2010, p.17).

Ponte (2010) afirma que tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos na Matemática. O comentário do aluno A_1, transcrito abaixo, corrobora com esta ideia.

> *O que mais chamou minha atenção foi o fato de aprendermos “sozinhos”, acho que deu mais vontade de saber do que se tratava. Poderia ter mais aulas, pois não deu pra mim terminar os exercícios [...] (Aluno A_1).*

O comentário do aluno A_9, por sua vez, apresenta uma dualidade de sentimentos em relação a metodologia, apresentando satisfação no processo de Investigação, mesmo que com dificuldade no percurso. Ele afirmou:

> *Eu achei bem estressante e ao mesmo tempo interessante (Aluno A_9).*

Ainda tratando das dificuldades encontradas no processo de Investigação, um aluno respondeu: “[...] Eu só consegui interpretar quando as meninas me explicaram. Eu não consegui só visualizando”, o que mostra que os alunos possuem dificuldade na interpretação dos enunciados. Ponte (2003) afirma que o primeiro passo de uma investigação é a identificação do problema a ser resolvido, entretanto, o professor pode auxiliar o aluno a compreender corretamente um enunciado ao fazer uma leitura conjunta do mesmo, esclarecendo termos com que não estão familiarizados.

Houve um equilíbrio na turma quanto ao número de alunos que apresentaram dificuldade na Atividade Investigativa 1 e na Atividade Investigativa 2. Ao serem perguntados se ao final das duas atividades eles conseguiriam, tendo a fórmula, enxergar a figura, ou, tendo a figura, enxergar a fórmula, eles afirmaram que ainda possuíam dificuldades. Esta pergunta não estava planejada, entretanto, a entrevista do tipo semiestruturada, utilizada neste trabalho, é flexível e permite a inserção de perguntas no decorrer da entrevista.

As autoras perguntaram, então, o que faltou, uma aula "padrão", em que o professor explica o conteúdo, ou mais tempo para a realização das atividades, e um aluno respondeu: "Um pouco dos dois", enquanto outro aluno afirmou: "Mais prática". Esse estranhamento encontrado pelos alunos pode ser entendido como uma dificuldade ao experimentar o novo, e, além disso, dificuldade em ser protagonista, porque o processo de Investigação "[...] pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo" (Ponte, 2010, p.28).

Neste contexto, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, *apud* Corradi, 2011), afirmam que a Investigação Matemática:

> Ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p.23 *apud* Corradi, 2011, p.163).

O aluno A_7 também apresentou uma insegurança em relação a metodologia adotada, seu comentário, transcrito abaixo, evidencia este fato. As autoras acreditam que a retirada do primeiro momento da sequência didática para a Implementação pode ter intensificado essa insegurança.

> *[...] Acho que seria bem interessante se as meninas explicassem um pouco do assunto antes de fazermos, mas entendi a lógica da proposta [...] (Aluno A_7).*

Para Ponte (2009; 2017), numa aula com investigação, deve-se valorizar o papel ativo do aluno na aprendizagem, portanto, o professor deve adotar uma postura interrogativa, dando forma às ideias incompletas ou mal formuladas dos alunos, transformando-as em ideias matemáticas mais precisas, e contemplando ações de selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas deles. Corradi (2011) afirma que a integração das atividades de Investigação no currículo de Matemática:

> [...] justifica-se por levar os alunos a desenvolver capacidades por meio de experiências matemáticas como o desenvolvimento do pensamento matemático, capacidade do estudante de trabalhar de forma autônoma ao atribuir novos significados aos conhecimentos (Corradi, 2011, p.163).

Neste sentido, Ponte (2010), afirma que o ensino da Matemática como um produto acabado é um problema, pois muitos alunos não veem sentido na disciplina, além de acharem que não vale a pena se esforçarem para aprendê-la. Outros alunos, por sua vez, desenvolvem significados parciais para resolver alguns tipos de questões, cometendo equívocos.

Referindo-se ainda sobre o processo de investigação, obteve-se dos alunos, sugestão por mais tempo de aula para a realização do processo investigativo. O aluno A_{11} afirma que o método lhe "chamou atenção" e sugere, posteriormente, que a aplicação deva ocorrer em mais tempo do que foi possível. Os alunos A_{12}, A_{15}, A_{17} e A_{20} também fizeram uma sugestão por mais tempo. Suas respostas estão transcritas abaixo:

> *Me chamou atenção justamente o método utilizado, foram passadas atividades mas sem antes a explicação, respondemos de acordo com o que já sabíamos ou tentamos entender por conta própria. Pelo modo aplicado e pela turma ter níveis de entendimento diferentes sobre o assunto, acho que o tempo ideal seria um pouco mais de 4 horas de duração (Aluno A_{11}).*
>
> *Achei o trabalho bem didático e as aplicadoras bem atenciosas, se eu tivesse mais tempo com o conteúdo dado, acredito que dominaria-o (Aluno A_{12}).*
>
> *Gostei da aula, tive dificuldade em algumas questões da atividade por conta da Álgebra, talvez se tivesse mais tempo eu conseguiria fazer. Aprendi muito com a aula sobre a elipse da soma dos valores nunca vou esquecer desse conhecimento (Aluno A_{15}).*
>
> *Foi interessante por ser diferente. Deu pra deixar bem clara a logica por trás disso, porém acredito que o tempo poderia melhorar, aumentar, e ter algumas pausas a mais para relaxar a cabeça, mas fora isso foi bom, nunca mais eu esqueço o que é elipse (Aluno A_{17}).*

> *Ótimo método de ensino, tive problema apenas com o tempo, infelizmente não consegui completar ambas as listas por falta de tempo. Sobre o método de ensino, ele te ajuda a fixar mais a matéria na cabeça, sem duvidas aprendi muito mais com esse método (Aluno A_{20}).*

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) afirmam que a aula de Investigação comporta diferentes fases, e por isso, deve-se haver uma boa gestão de tempo para a realização das atividades, discussão e reflexão. Para isso, ao preparar uma aula investigativa, deve ser levado em consideração a estrutura da aula, a organização dos momentos da aula, os materiais utilizados, etc.

Para finalizar a entrevista, foi abordado sobre a utilização da Tecnologia Digital unida ao processo de Investigação Matemática.

- A importância da Tecnologia Digital

Os alunos foram questionados, nesse momento, quanto ao uso dos *applets* do GeoGebra no processo de investigação e dos vídeos na compreensão da propriedade refletora. Os alunos afirmaram terem gostado dos vídeos apresentados sobre a propriedade refletora. O aluno A_2 disse que se não houvesse o *applet* “Ia dificultar muito”, enquanto outros alunos disseram que o *applet* ajudou na relação da figura com a equação e vice-versa.

Oliveira, Guimarães e Andrade (2012) afirmam que o GeoGebra “[...] é uma ferramenta que potencializa o desenvolvimento de objetos de aprendizagem que permitem apresentar/estudar um determinado conceito matemático por meio de diferentes registros de representação obtidos por sua interface básica [...]” (Oliveira; Guimarães; Andrade, 2012, p. 268). Eles afirmam ainda que com o software é possível trabalhar conceitos cuja compreensão seria mais difícil sem a exploração ou visualização. Os alunos A_2 e A_{19} apresentam esta ideia quando comentam:

> *O site utilizado ajudou na compreensão, otimizando o tempo que seria gasto tentando entender em um pedaço de papel [...] (Aluno A_2).*
>
> *O trabalho foi muito bom, gostei bastante desse método e o applet contribuiu bastante para compreensão, me estressei um pouco com a segunda atividade mas fora isso foi bom (Aluno A_{19}).*

O aluno A_3 apresentou uma boa avaliação sobre o uso da Tecnologia Digital, afirmando que o ajudou a entender melhor. Ele destacou a manipulação a possibilidade de “modificar o formato” da figura, no GeoGebra. Sua resposta está transcrita abaixo:

> *O que mais me chamou atenção foi o uso da tecnologia, as atividades pelos sites foram ótimas, pois me ajudou a entender melhor e poder modificar o formato das figuras. Sugestão: Fazer explicações mais detalhadamente, iria ajudar a entender melhor (Aluno A_3).*

Sobre esta possibilidade de manipulação que o software permite, Oliveira, Guimarães e Andrade (2012) afirmam que o GeoGebra tem grande importância no processo de ensino e aprendizagem, por propiciar novas maneiras de compreender conceitos abstratos, principalmente por meio da visualização e manipulação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como motivação a observação das autoras sobre a falta da abordagem geométrica no estudo das cônicas durante a graduação, assim como a sua ausência durante os anos de escolarização da Educação Básica. Assim, considerando a necessidade de evidenciar a importância da Geometria no ensino, optou-se por utilizar a Investigação Matemática como metodologia de ensino e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval como um dos referenciais, no desenvolvimento de uma sequência didática para o estudo da elipse, relacionando seus registros geométrico e algébrico.

Neste processo, desenvolveu-se uma sequência didática que foi aplicada em uma turma da segunda série do Ensino Médio, permitindo aos alunos a exploração de situações propostas acerca da elipse. Os alunos foram capazes de formular conjecturas e, a partir dos testes realizados por meio dos *applets* e auxílio das autoras deste trabalho, refiná-las. Assim, trabalhou-se a definição da elipse, a apresentação de seus elementos e a relação da sua equação com o seu desenho geométrico.

Com base no teste exploratório, na implementação da sequência didática e nos comentários feitos pelos licenciandos e pelos alunos, as autoras observaram que a Investigação Matemática auxiliou na obtenção de resultados positivos no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o uso da Tecnologia Digital, por meio dos *applets*, contribuiu para o estudo da cônica elipse, pois permitiu a exploração e a construção de conjecturas ao longo do processo investigativo.

O alinhamento da Investigação Matemática com a Tecnologia Digital para o estudo da elipse, pôde contribuir positivamente, pois os alunos do Ensino Médio puderam se beneficiar da visualização e da relação entre os registros algébrico e geométrico, evidenciado nos *applets* utilizados na sequência didática. Desta forma, pode-se afirmar que o objetivo geral da pesquisa: investigar as contribuições da Investigação Matemática e da Tecnologia Digital para o estudo da elipse no Ensino Médio, foi alcançado.

As autoras, entretanto, identificaram que os alunos apresentaram dificuldades em relacionar os registros algébricos e geométricos, devido a alguns fatores: superficialidade com que a Geometria é tratada na Educação Básica, quando é estudada; dificuldade dos alunos com a Matemática Básica, alcançando o primeiro objetivo específico: Investigar as dificuldades dos alunos entre a Álgebra e a Geometria.

Foi observado que os alunos, após participarem da sequência didática, aproximaram-se da Geometria, utilizando a Tecnologia Digital no processo de investigação, reduzindo o nível de abstração, cumprindo, desta forma, o segundo objetivo específico: Realizar investigações matemáticas que aproximem os alunos à Geometria.

A partir do desenho geométrico da elipse e a manipulação nos *applets*, os participantes foram capazes de formular conjecturas sobre o comportamento desta curva e a interferência de seus elementos na sua equação e desenho, cumprindo o último objetivo específico: Desenvolver nos alunos, a habilidade de formular conjecturas a respeito da elipse, a partir do seu desenho geométrico.

Os alunos que participaram da implementação da sequência didática apresentaram muita dificuldade em conceitos da Matemática Básica, além de utilizarem uma linguagem matemática inadequada. Notou-se também grande dificuldade em externalizar o raciocínio e as conclusões obtidas. Além disso, alguns alunos manifestaram uma certa resistência à Investigação Matemática, visto que não estão acostumados a terem aula neste formato, mas este desconforto foi minimizado ao longo da aula. Em geral, as autoras consideraram que, ao final, os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática foram positivos.

Foi possível verificar o quanto a visualização, que a Geometria propicia, auxilia no processo de ensino e aprendizagem, por diminuir a necessidade de abstração, e como é prejudicial ao ensino que essa área seja abandonada. Destaca-se o processo de Investigação Matemática pela capacidade de levar o aluno a raciocinar e criar autonomia no seu estudo, gerando um cenário valioso na sala de aula e os tornando mais confiantes, visto que nesta perspectiva, o acerto e a descoberta têm um valor especial. A Tecnologia Digital, por sua vez, mostrou-se muito proveitosa, quando utilizada da forma correta, por ser dinâmica e auxiliar na relação entre diferentes áreas do conhecimento matemático.

Com este trabalho, foi possível, portanto, olhar com mais atenção para a trajetória da Geometria no ensino de Matemática, suas complicações e benefícios; aproximar o ensino da Tecnologia Digital e conhecer diferentes metodologias de ensino, além de concluir como é importante estimular os alunos a pensarem, exporem suas ideias e descobrirem um pouco da Matemática por si só. Em suma, considerando os benefícios do processo de pesquisa e o desenvolvimento da sequência didática que, apesar de árduo, gerou bons resultados. As autoras consideram o desenvolvimento e o resultado deste trabalho valioso e o caminho percorrido até aqui, muito enriquecedor.

Para trabalhos futuros, sugere-se a elaboração de sequências didáticas para o estudo das cônicas Hipérbole e Parábola, com base na Investigação Matemática, e utilizando a Tecnologia Digital. Sugere-se, também, a exploração da Propriedade Refletora utilizando a Investigação Matemática.

REFERÊNCIAS

BERND, Arthur Barcellos. Registros de Representações Semióticas e a utilização de ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, p. 1-9, 2016. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/70663. Acesso em: 17 jul. 2023.

BONOMI, Maria Cristina. **Matemática:** objetos e representações. 2007. 14 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, Butantã, 2007. Disponível em: https://nilsonjosemachado.net/20070525.pdf. Acesso em: 1 set. 2023.

BOTELHO, Lutieli Rodrigues; MORAES, João Carlos Pereira de. Potencialidades e dificuldades do material concreto não estruturado para o ensino de matemática nos anos finais. *In*: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2021, Pampa. **Anais eletrônicos** [...]. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2021. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/037.pdf. Acesso em: 15 ago. 2023.

BRASIL. **Lei nº. 4024, de 20 de dezembro de 1961**. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF: Presidência da República, [1961].

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação. Brasília, 1997.

CASTRO, Carlos Eduardo Leal de. A importância do Desenho Geométrico no ensino da Geometria. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática**, Santa Catarina, n.15, p.80-87, dez. 2019.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. Investigações matemáticas. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Ouro Preto, v. 1, p. 162-175, nov. 2011. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/redumat/article/view/2017/1555. Acesso em: 15 ago. 2023.

COSTA, Marcelo de Moura. **Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do GeoGebra**. 2013. 61 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1SzG4nXZaFFdJCmK4Ch0_Yx3wogzF319z/view. Acesso em: 1 ago. 2023.

CUNHA, Ricardo Fagundes Freitas; TORT, Alexandre Carlos. O estudo de processão da órbita de mercúrio no ensino médio. **Revista do Professor de Física**, Brasília, v. 1, n. 2, p. 13-24, dez. 2017. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/7069/5720. Acesso em 22 set. 2023.

DAMIANI, Magda Floriana *et al*. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, mai./ago., 2013. Disponível em:

https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/caduc/article/view/3822/3074. Acesso em: 22 set. 2023.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2000. p. 167-188.

DUVAL, Raymond. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática?. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, maio. 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus Editora, 2011. cap. 1, p. 11-33.

FONSECA, Helena; BRUNHEIRA, Lina; PONTE, João Pedro da. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat**, v. 99, p. 97-110, 1999. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/254647012_As_actividades_de_investigacao_o_professor_e_a_aula_de_Matematica. Acesso em: 22 set. 2023.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2009. (Série Educação à Distância). Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf . Acesso em: 27 out. 2022.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. 118 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3318/1/401324.pdf. Acesso em: 1 set. 2023.

KALLEF, Ana Maria Martensen Roland. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. *In*: LORENZATO, Sergio. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2021. cap. 6.

LOPES, Sandra Pereira. Sequência didática para o estudo das secções cônicas com o auxílio do software GeoGebra na Matemática. *In*: ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE, 2., 2012, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2012.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, Sergio. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2021. cap. 1.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Editora Autores Associados LTDA, 2010. 140 p.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Álgebra linear e geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.

MUNIZ JUNIOR, Felix Horacio Munoz. **Seções cônicas**. 2018. 78 p. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/20709/1/textocompleto.pdf. Acesso em: 22 set. 2023.

NASCIMENTO, Elimar Moreira do. **Integração entre álgebra e geometria no ensino da matemática**. 2017. 117 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2017.

NUNES, Ginete Cavalcante; NASCIMENTO, Maria Cristina Delmondes do; LUZ, Maria Aparecida Carvalho Alencar. Pesquisa científica: conceitos básicos. **Revista Multidisciplinar e de Psicologia**, Pernambuco, v. 1, n. 29, p. 144-151, fev. 2016. Disponível em: file:///C:/Users/Win/Downloads/390-Texto%20do%20Artigo-780-1085-10-20160412.pdf. Acesso em: 22 set. 2023.

OLIVEIRA, Iara Letícia Leite de; GUIMARÃES, Simone Uchôas; ANDRADE, José Antônio Araújo. As potencialidades do GeoGebra em processos de investigação matemática: uma análise do desenvolvimento de objetos de aprendizagem da EaD no ensino presencial. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 266-279, jan. 2012. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/32304/1/OliveiraIaraAs_potencialidades.pdf. Acesso em: 15 ago. 2023.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos; CAMPOS, Nadja Fonseca da Silva Cutrim; SALCEDOS, Rocio Rubi Calla. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistema de equações algébricas lineares. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais eletrônicos** [...] Canoas: Comunicação científica, 2013. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1423 Acesso em: 15 out. 2022.

PAVANELLO, Regina Maria. Por que ensinar/aprender geometria. *In*: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais eletrônicos** [...]. 2004.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 157 p.

PONTE, João Pedro da. Explorar e investigar em matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **UNIÓN**, n.21, p. 13-30, mar. 2010. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3043/1/10-Ponte-Union_21.pdf. Acesso em: 15 ago. 2023.

PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. 365 p.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460. Acesso em: 1 ago. 2023.

SANTOS, Marcelo Honório dos. **Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à Álgebra**. 2014. 63 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3197/5/MARCELO%20HONORIO-%20MESTRADO%20tcc_conicas.pdf. Aceso em: 18 dez. 2022.

SCHEFFER, Nilce Fátima. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias: dobradura e *software* dinâmico. *In*: LORENZATO, Sergio. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2021. cap. 5.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática**. 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf. Acesso em: 22 set. 2023.

SILVA, Willamy Adriano Matias da. **O desenho geométrico do ensino da geometria:** uma sequência didática. 2019. 69 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2019. Acesso em: https://repositorio.ufersa.edu.br/bitstream/prefix/5408/1/WillamyAMS_DISSERT.pdf. Disponível em: 18 dez. 2022.

TOMAZ, Elisama Costa; LIMA, Francisco José de. Proposições ao ensino de Geometria: uma proposta de sequência didática para o estudo de cônicas utilizando o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 61-84, abr. 2022.

VARHIDY, Charles Georges Joseph Louis. **Desenho Geométrico:** uma ponte entre a Álgebra e a Geometria Resolução de Equações pelo Processo Euclidiano. 2010. 92 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/3315/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O_DesenhoGeom%c3%a9tricoPonte.pdf. Acesso em: 18 dez. 2022.

VASCONCELOS, Cleverton da Silva.**Uma abordagem de curvas no ensino médio**. 2013. 76 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas; JESUS, Paulo Cesar Cruvinel de. Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software GeoGebra. **Estudos**, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 59-75, jan./mar. 2014. Disponível em: https://seer.pucgoias.edu.br/index.php/estudos/article/view/3365/1952. Acesso em: 1 ago. 2023.

VIANNA, Heraldo Marelim. **Pesquisa em educação**: a observação. Brasília: Plano Editora, 2003. 108 p.

VITOR, Cláudio Barros. **Cônicas:** lugares geométricos e construções dinâmicas. 2013. 55 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4790/2/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Cl%c3%a1udio%20Barros%20Vitor.pdf. Acesso em: 18 dez. 2022.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Apresentação dos elementos e das equações da elipse

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Este material faz parte da experimentação que integra o TCC elaborado pelas licenciandas Ester da Silva Roberto e Maria Fernanda Oliveira Pinto, sob a orientação das professoras Ana Paula Rangel de Andrade e Paula Eveline da Silva dos Santos.

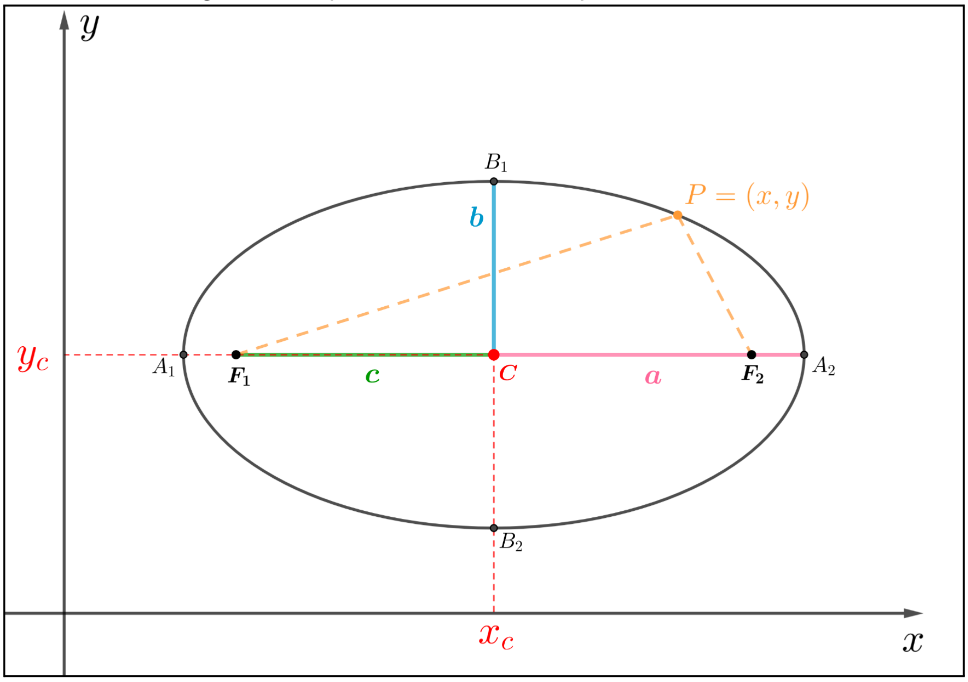
Apresentação dos elementos e equações da elipse[1]

Definição:

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante, maior que a distância entre os pontos fixos (MACHADO, 1982).

A Figura 1 representa uma elipse cujos pontos F_1 e F_2 estão em uma reta paralela ao eixo x.

Figura 1 - Elipse com o eixo focal paralelo ao eixo x



Fonte: Elaboração própria.

[1] Este texto tem como referências: Machado (1982) e Santos (2014).
MACHADO, Antonio dos Santos. **Álgebra linear e Geometria analítica**. São Paulo: Atual editora, 1980.
SANTOS, Marcelo Honório dos. **Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à Álgebra**. 2014. 63 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

Os elementos da elipse são:

$F_1 e\, F_2$: $focos$
C: $centro$
A_1A_2: $eixo\ maior$
$2a$: $medida\ do\ eixo\ maior$
B_1B_2: $eixo\ menor$
$2b$: $medida\ do\ eixo\ menor$
$2c$: $distância\ entre\ os\ focos$

A equação dessa elipse, cuja reta focal (reta que contém os focos) é paralela ao eixo x, está representada na Figura 2.

Figura 2 - Equação da elipse com o eixo focal paralelo ao eixo x

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

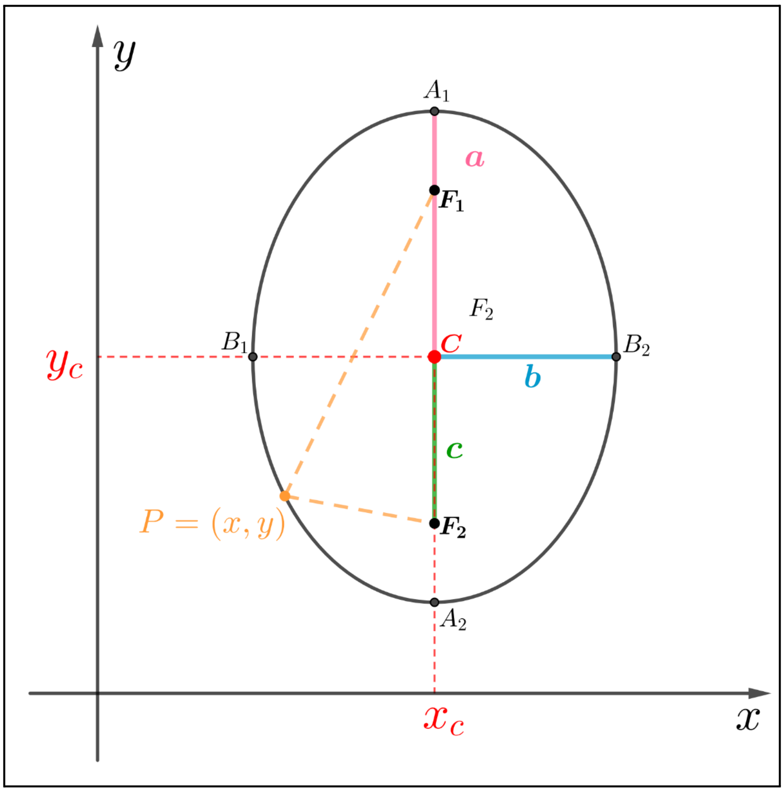
Fonte: Elaboração própria.

Os elementos da equação da elipse são:

x_c: $abscissa\ do\ centro$
y_c: $ordenada\ do\ centro$
a: $medida\ do\ semieixo\ maior$
b: $medida\ do\ semieixo\ menor$

A Figura 3 representa uma elipse cujos pontos F_1 e F_2 estão em uma reta paralela ao eixo y.

Figura 3 - Elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y



Fonte: Elaboração própria.

A equação dessa elipse está representada na Figura 4 abaixo.

Figura 4 - Equação da elipse com o eixo focal paralelo ao eixo y

$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

Fonte: Elaboração própria.

Os elementos da equação da elipse são:

x_c: *abscissa do centro*
y_c: *ordenada do centro*
a: *medida do semieixo maior*
b: *medida do semieixo menor*

APÊNDICE B – Atividade de investigação 1 do teste exploratório

Atividade Investigativa 1

Esta atividade faz parte do teste exploratório que integra o TCC elaborado pelas licenciandas Ester da Silva Roberto e Maria Fernanda Oliveira Pinto, sob a orientação das professoras Ana Paula Rangel de Andrade e Paula Eveline da Silva dos Santos.

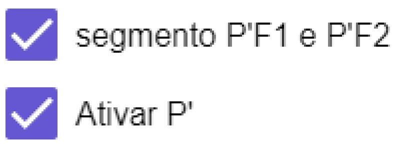
Nome: ____

O *Applet* https://www.geogebra.org/m/ag2gu65v apresenta uma elipse. Utilize-o para responder à questão 1.

Questão 1

a) Movimente o ponto P e investigue o comportamento dos segmentos PF1 e PF2 na formação da elipse. O que é possível afirmar sobre a relação dos segmentos PF1 e PF2?

b) Clique na caixa de exibição para ativar o segmento P'F1 e P'F2 e para ativar P', conforme o exemplo abaixo:



Movimente P' e observe o valor de P'F1 e P'F2. O que você conclui?

c) Nessa circunstância, qual deve ser a condição para que um ponto P pertença a elipse?

d) Considerando todas as condições discutidas, como você define a elipse?

APÊNDICE C – Atividade de investigação 2 do teste exploratório

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Atividade Investigativa 2

Esta atividade faz parte do teste exploratório que integra o TCC elaborado pelas licenciandas Ester da Silva Roberto e Maria Fernanda Oliveira Pinto, sob a orientação das professoras Ana Paula Rangel de Andrade e Paula Eveline da Silva dos Santos.

Nome: ____

Utilize o *Applet* https://www.geogebra.org/m/vd5arpzf para responder às questões.

Questão 1

a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na equação da elipse. Descreva o que você observou.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a equação da elipse. Descreva o que você observou.

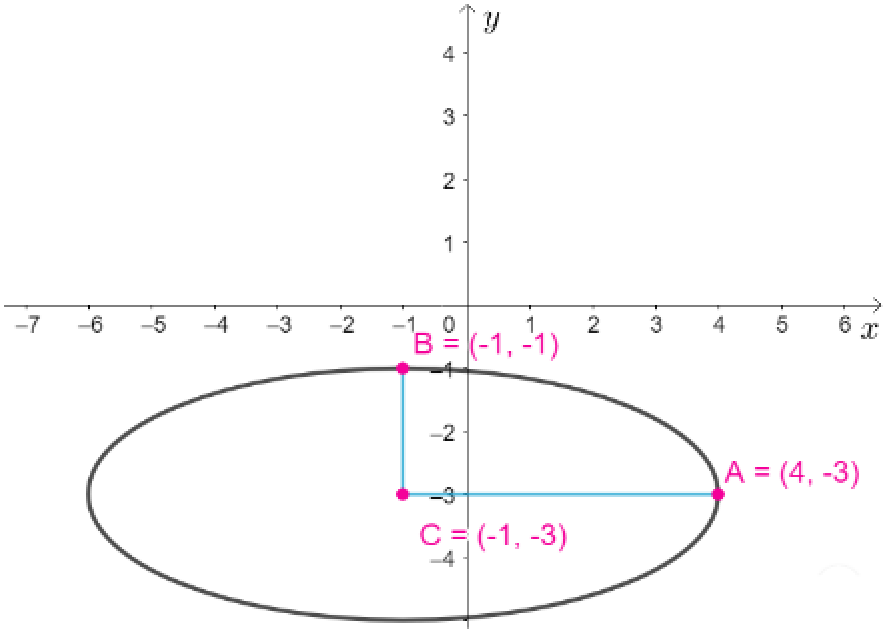
c) Movimente o ponto C e observe o que acontece com a equação da elipse. Descreva o que você observou.

d) Quais são as coordenadas do centro da elipse para que sua equação seja $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+5)^2}{4^2} = 1$?

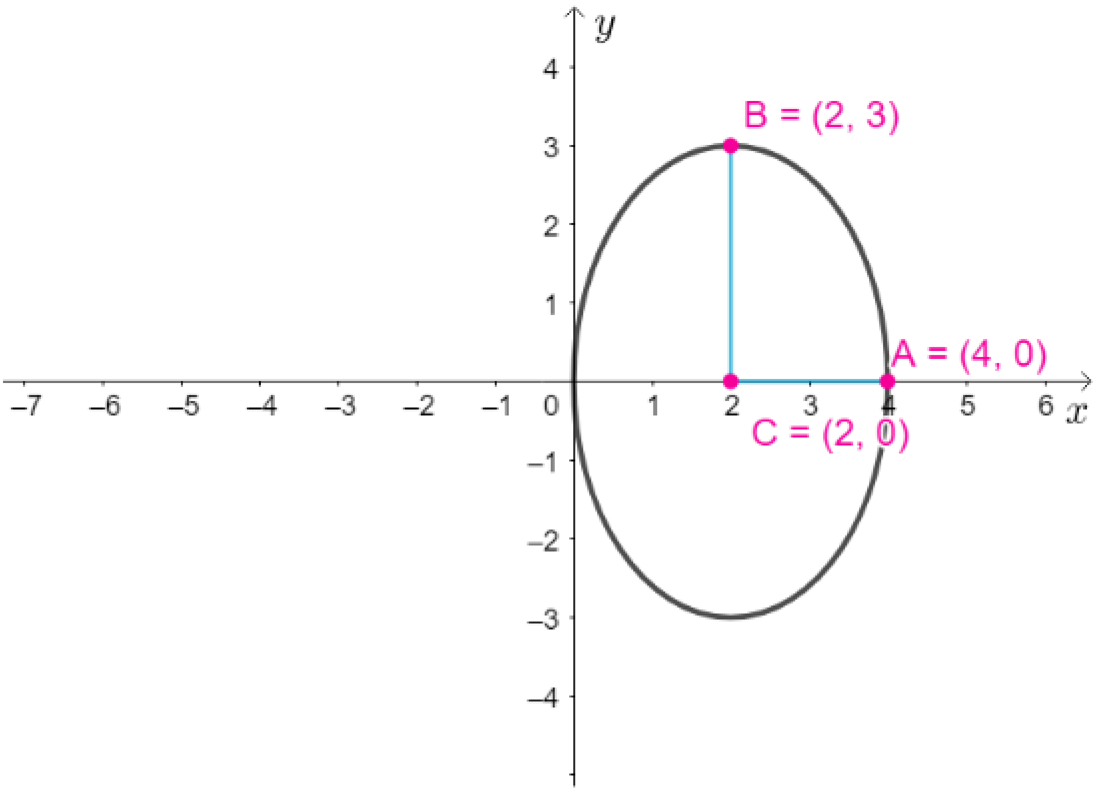
e) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(y-4)^2}{2^2} + \frac{(x+6)^2}{5^2} = 1$?

f) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(y+3)^2}{5^2} + \frac{(x+6)^2}{2^2} = 1$?

g) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



h) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



i) Utilize novamente o *Applet.* Movimente os pontos A e B de forma que os segmentos CA e CB tenham a mesma medida. Qual figura é formada? O que é possível observar na equação da elipse?

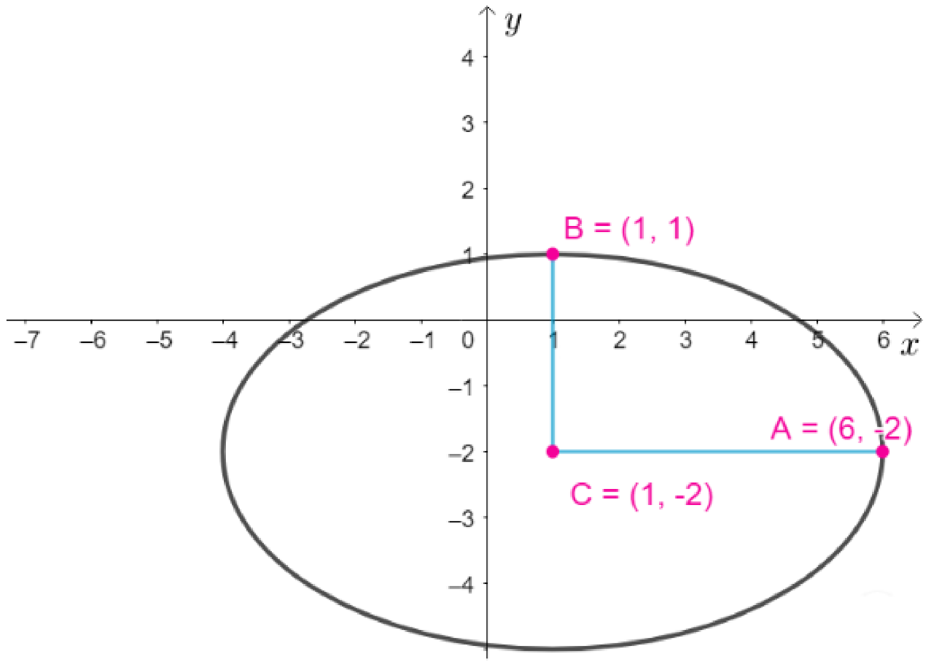
j) Transforme essa equação para que ela tenha o formato $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = z$. Qual equação foi formada?

k) Na equação formada acima, o que z representa na figura formada? Qual a relação de z com os segmentos CA e CB?

l) O que você conclui a respeito da relação entre a elipse e o que foi observado nos itens i), j) e k)?

Questão 2

Observe a figura abaixo e responda.



A equação que melhor representa a elipse formada é:

a) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

b) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$

c) $\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$

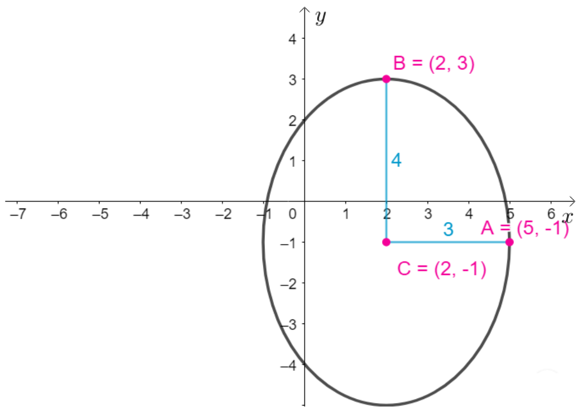
d) $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$

e) $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

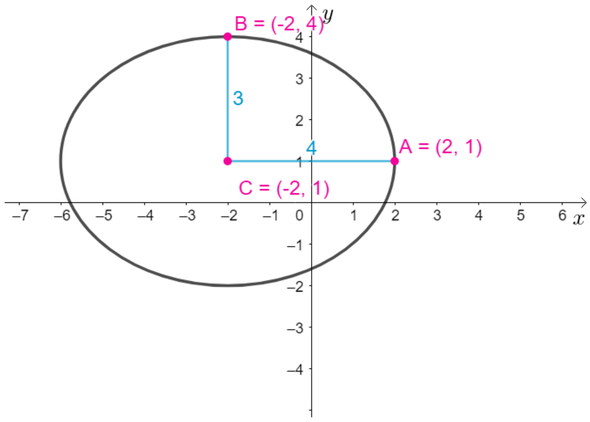
Questão 3

A equação $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ representa a elipse:

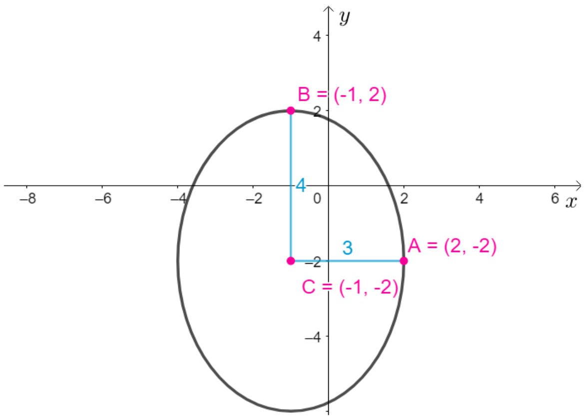
a)



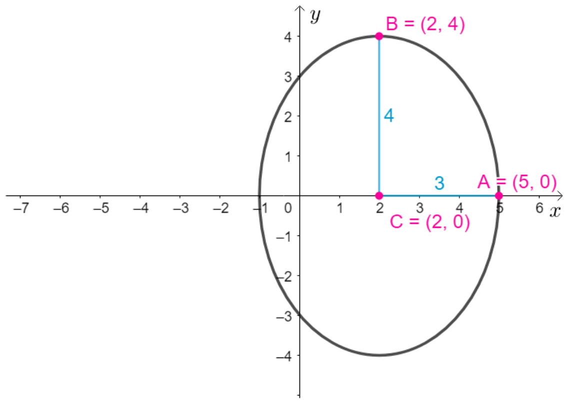
b)



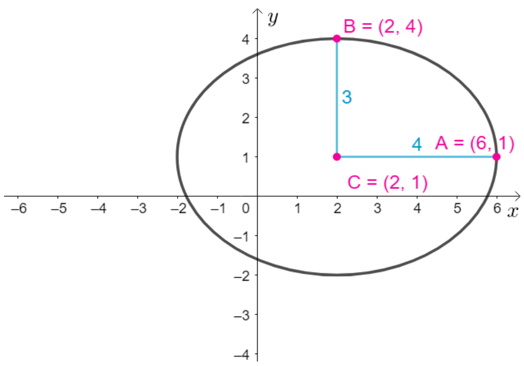
c)



d)



e)

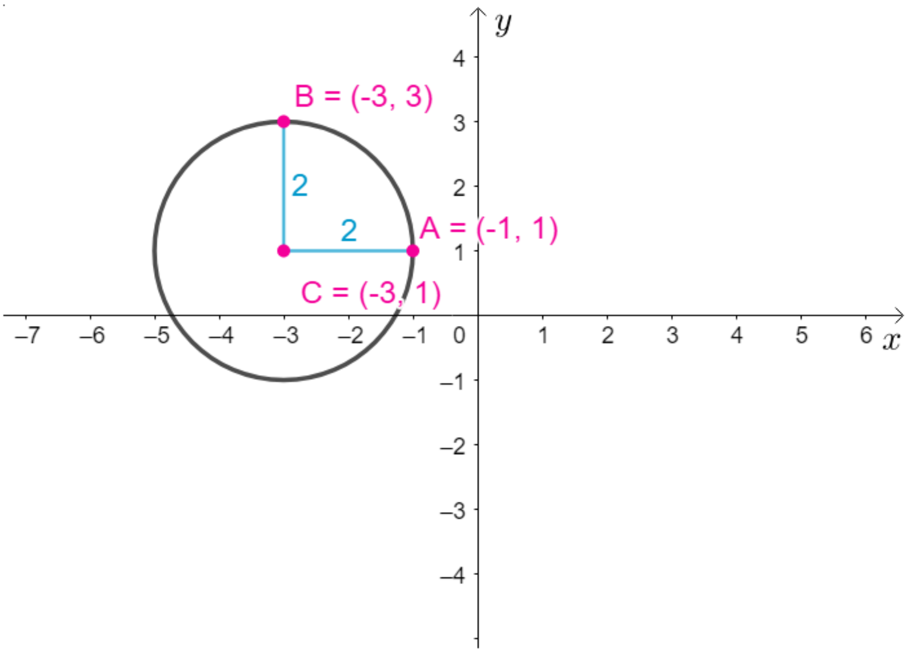


Questão 4

A equação $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ representa uma elipse. Faça o esboço dessa elipse, indicando seus eixos maior e menor e seu centro.

Questão 5

Observe a figura abaixo e responda.



A equação que melhor representa a figura formada é:

a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

c) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$

d) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$

e) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

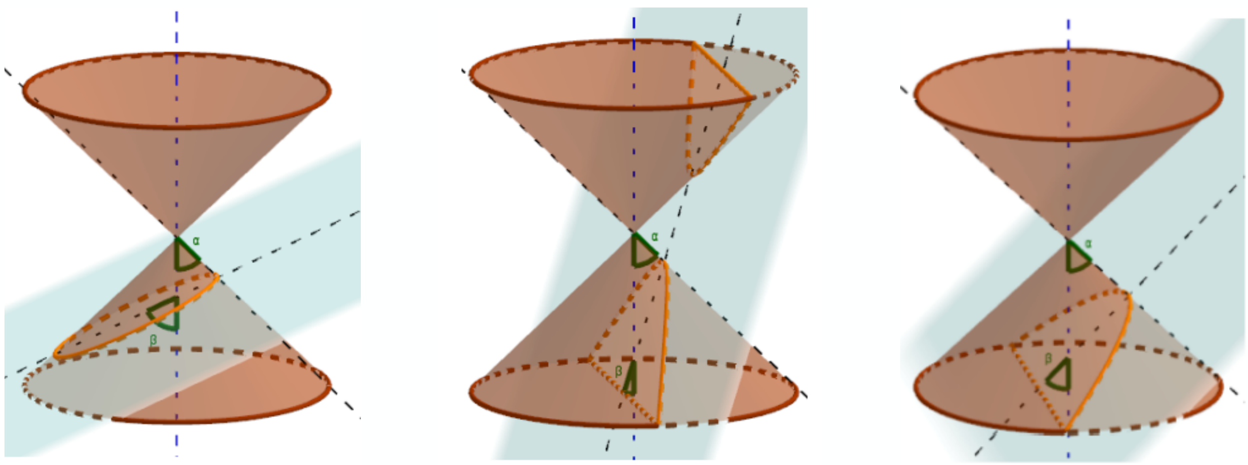
APÊNDICE D – Slides do teste exploratório

ELIPSE

Ester da Silva Roberto
Maria Fernanda Oliveira Pinto

Orientadoras: Ana Paula Rangel e Paula Eveline dos Santos

1) Seções Cônicas

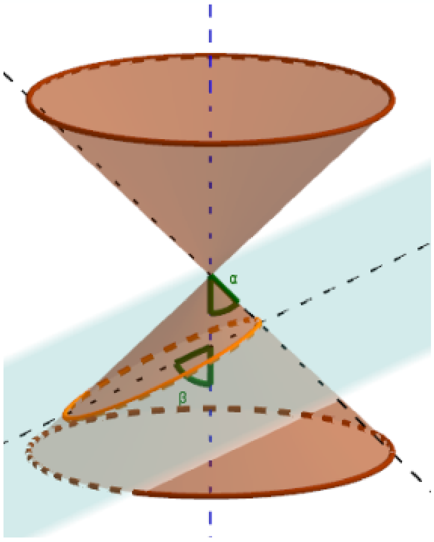


(a) Seção cônica tipo Elipse (b) Seção cônica tipo Hipérbole (c) Seção cônica tipo Parábola

(Muniz Junior, 2018, p. 8)

1.1) Elipse

O plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e intersecta as geratrizes em uma única folha da superfície.

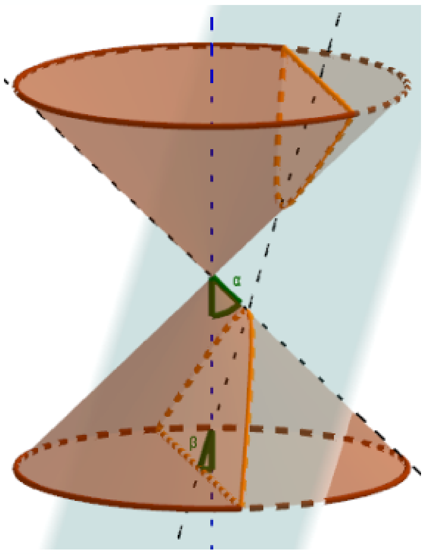


(Fainguelernt, 1980, p.171)

3

1.2) Hipérbole

O plano de seção intersecta as duas folhas da superfície cônica.

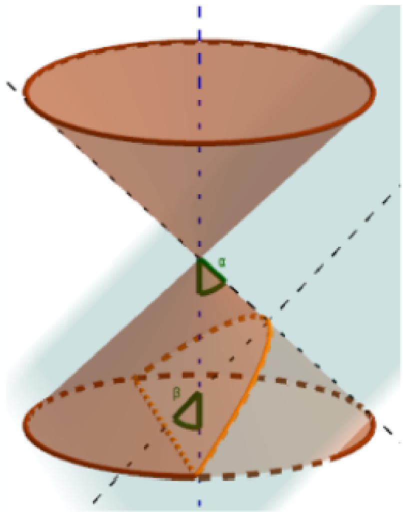


(Fainguelernt, 1980, p.171)

4

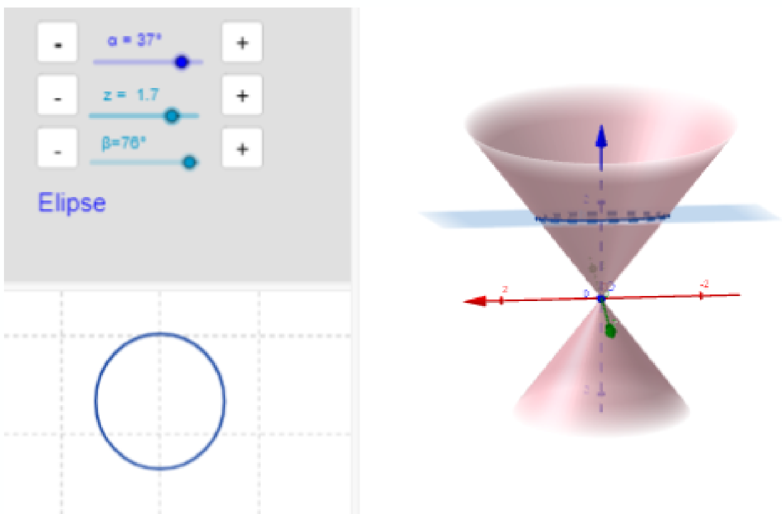
1.3) Parábola

O plano de seção é paralelo a uma geratriz da superfície.



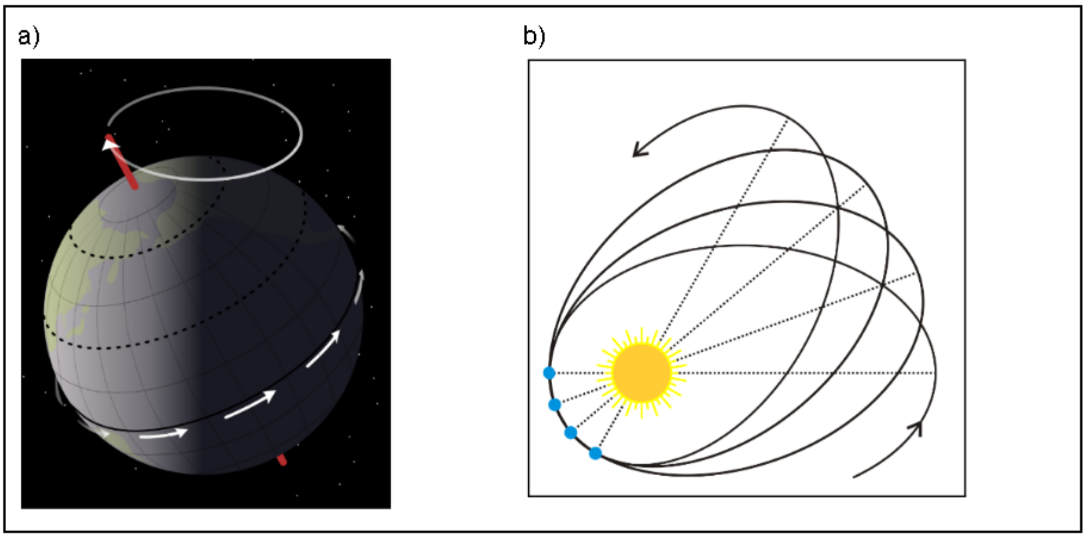
(Fainguelernt, 1980, p.171)

GeoGebra-Seções Cônicas



https://www.geogebra.org/m/tz9h7rwk

2) Presença da elipse no cotidiano



(Cunha, 2017, p.17)

7

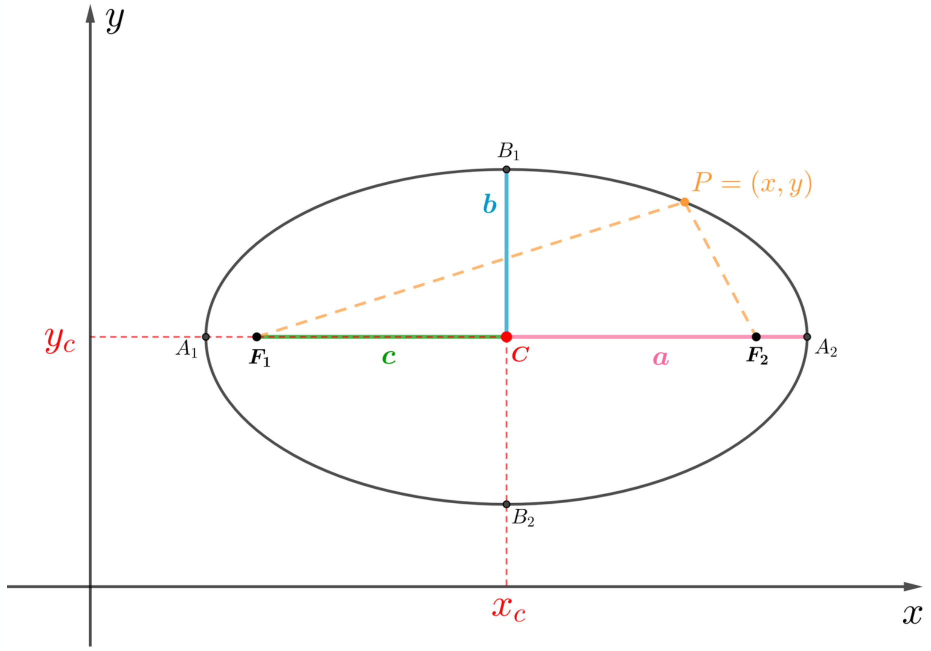
3) Atividade investigativa 1

8

Definição da elipse

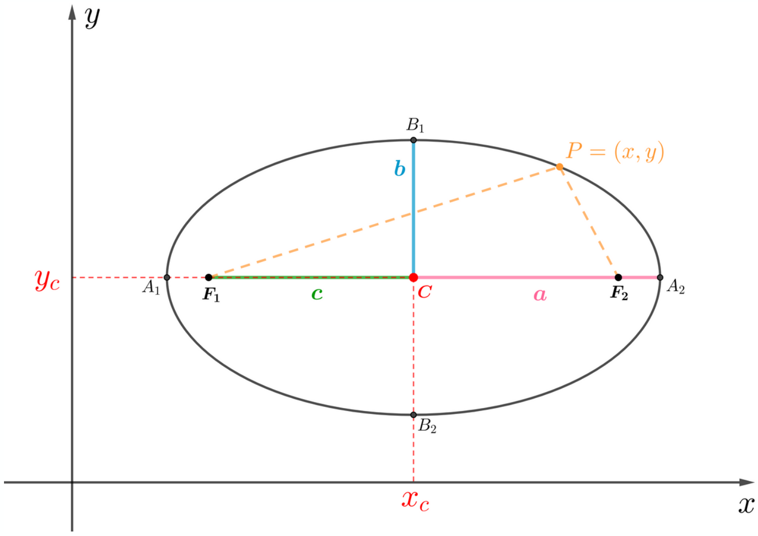
A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante, maior que a distância entre os pontos fixos (Machado, 1982).

4) Apresentação da elipse e seus elementos



F_1 e F_2: *focos*
C: *centro*
A_1A_2: *eixo maior*
$2a$: *medida do eixo maior*
B_1B_2 ou $2b$: *eixo menor*
$2b$: *medida do eixo menor*
$2c$: *distância focal*

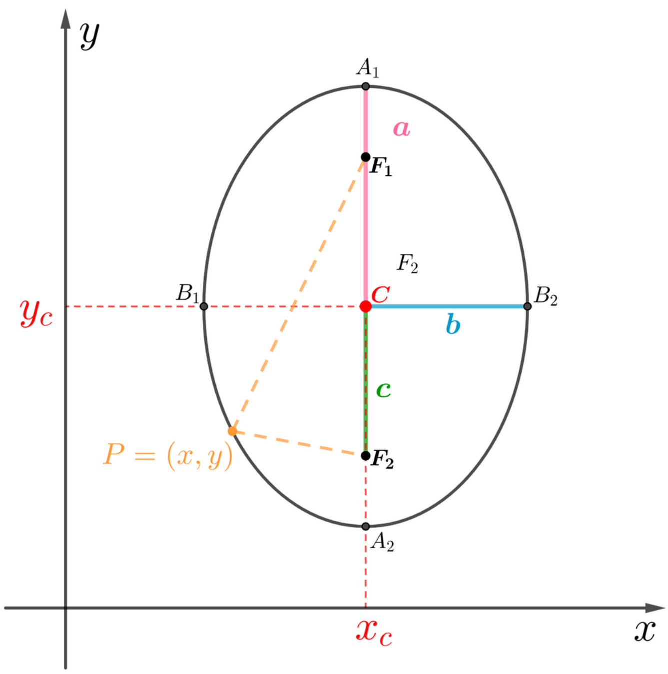
4) Apresentação da elipse e seus elementos (cont.)



$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

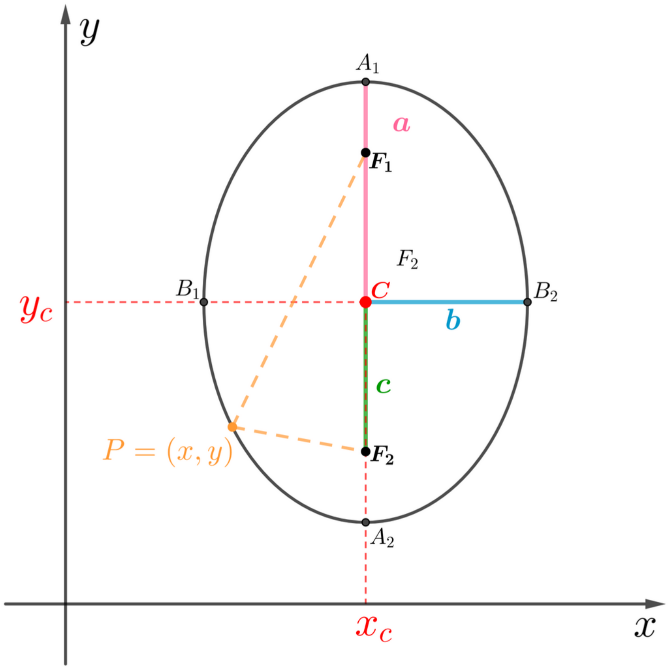
x_c: *abscissa do centro*
y_c: *ordenada do centro*
a: *medida do semieixo maior*
b: *medida do semieixo menor*

4) Elementos da elipse (cont.)



F_1 e F_2: *focos*
C: *centro*
A_1A_2: *eixo maior*
$2a$: *medida do eixo maior*
B_1B_2 ou $2b$: *eixo menor*
$2b$: *medida do eixo menor*
$2c$: *distância focal*

5) Equação da elipse (cont.)



$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

x_c: *abscissa do centro*

y_c: *ordenada do centro*

a: *medida do semieixo maior*

b: *medida do semieixo menor*

6) Atividade investigativa 2

Equação da circunferência

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

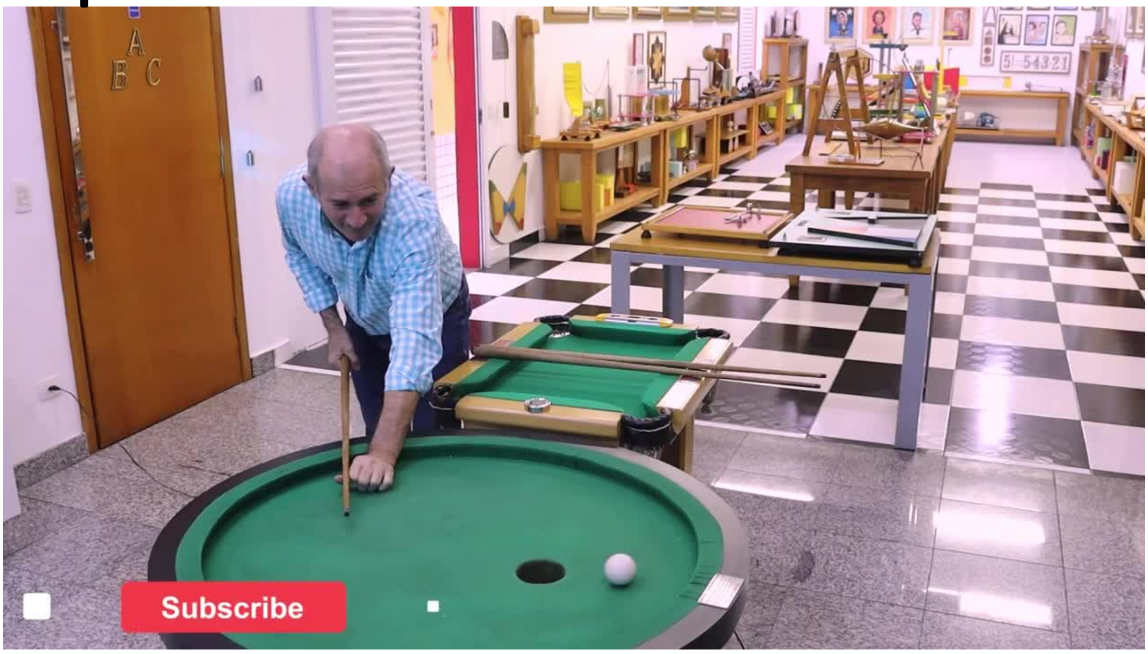
x_c: *abscissa do centro*

y_c: *ordenada do centro*

r: *raio da circunferência*

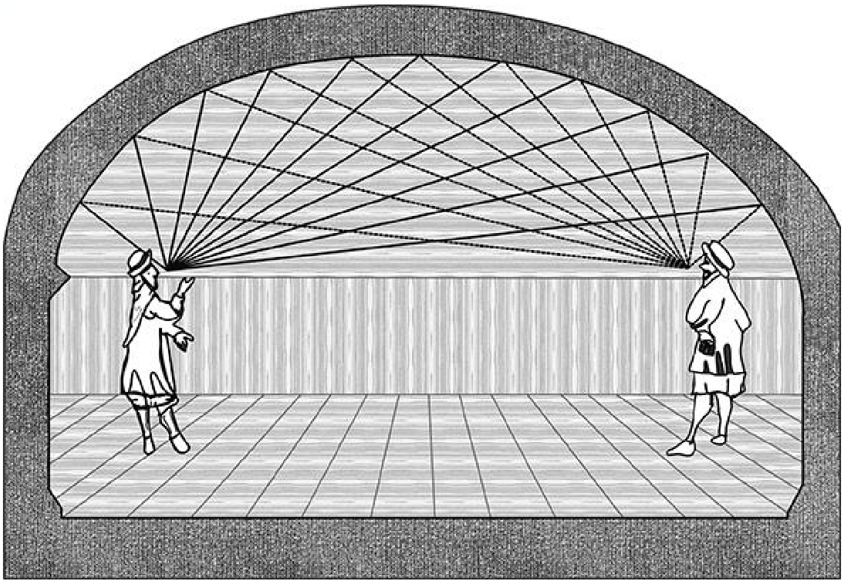
15

7) Propriedade refletora



16

7) Propriedade refletora (cont.)



7) Propriedade refletora (cont.)

7) Propriedade refletora (cont.)

https://www.geogebra.org/m/keas2ygj

7) Propriedade refletora (cont.)

Casa Branca

Referências

CUNHA, Ricardo Fagundes Freitas da. **O estudo de precessão da órbita de Mercúrio no Ensino Médio**. Revista do Professor de Física, Brasília, v. 1, n. 2, p. 13-24, 2017. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/7069/5720. Acesso em: 8 abr. 2023.

FAINGUELERNT, Estela K.; BORDINHÃO, Noelir de C. **Algebra linear e Geometria analítica**. São Paulo: Editora Moderna, 1980.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Algebra linear e Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1980. 209 p.

MUNIZ JUNIOR, Felix Horacio Munoz. **Seções cônicas**. 2018. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/20709/1/textocompleto.pdf. Acesso em: 8 abr. 2023.

APÊNDICE E – Roteiro de perguntas para a entrevista do teste exploratório

Roteiro de entrevista - Teste exploratório

(i) Sobre os aspectos gerais da proposta didática

1) Avalie:

• o tempo para realização de cada momento da aula (Seções Cônicas, Atividade Investigativa 1, Elipse no cotidiano, Apresentação da elipse, Atividade Investigativa 2 e Propriedade refletora);

• a clareza nos enunciados das questões;

• o grau de dificuldade das atividades desenvolvidas;

• a qualidade dos materiais utilizados: slides, atividades, applets, material manipulável, etc.

(ii) Sobre os seis momentos da proposta didática

1) Seções cônicas

1) Como você avalia a apresentação dos elementos presentes no cone de duas folhas (eixo vertical, geratriz, interseção do plano com o cone)?

2) O applet e o material manipulável auxiliaram na compreensão de cada corte, formando as cônicas?

2) Atividade Investigativa 1

1) Como você avalia o seu processo de investigação na formalização da equação da elipse? Houve dificuldades? Em caso afirmativo, quais foram?
2) O *applet* utilizado ajudou na formalização da equação da elipse?

3) Elipse no cotidiano

1) Como você avalia o exemplo utilizado para mostrar a presença da elipse no cotidiano?

2) Você considera este momento importante para a apresentação?

4) Apresentação da elipse

1) Como você avalia o uso das imagens para apresentar a elipse, em relação aos seus elementos e à sua equação?

5) **Atividade Investigativa 2**

1) Como foi o processo de investigação? Houve dificuldade? Em caso afirmativo, quais foram?
2) Você considera que o *applet* ajudou na visualização da equação da elipse por meio da sua representação geométrica e vice-versa?
3) O *applet* utilizado ajudou na compreensão da passagem da Álgebra para a Geometria e vice-versa? (Relação da álgebra com a geometria)
4) Você sugere alguma alteração para o *applet* utilizado?
5) Como você avalia as perguntas feitas nesta atividade? Estão adequadas?
6) Você sugere alguma alteração nas perguntas realizadas na atividade investigativa 2?

6) Propriedade refletora

1) Como você avalia o vídeo apresentado? Ele esclarece a propriedade refletora da elipse?
2) O que achou sobre o applet utilizado para mostrar a propriedade refletora? Foi interessante apresentá-lo? E quanto à ordem, melhor deixá-lo depois do vídeo?

(iii) Sobre o processo de investigação

1) Como você avalia o processo de investigação para abordar o tema elipse, como foi feito na proposta didática?

(iv) Sobre o uso da tecnologia digital

1) De que forma o uso da tecnologia digital (*applets* e vídeo) contribuiu para o estudo da elipse?

(v) Sobre os objetivos específicos da pesquisa

1) O estudo tem potencial para atingir os objetivos específicos da pesquisa?

Objetivos específicos:

- Investigar, no contexto de um estudo sobre a elipse, as dificuldades dos alunos na relação entre a Álgebra e a Geometria;
- Realizar investigações matemáticas que aproximem o alunos da Geometria;
- Desenvolver a habilidade nos alunos de formar conjecturas a respeito da equação da elipse a partir do seu desenho geométrico.

APÊNDICE F – Atividade de investigação 1 da Implementação

Esta atividade faz parte da experimentação que integra o Trabalho de Conclusão de Curso elaborado pelas licenciandas Ester da Silva Roberto e Maria Fernanda Oliveira Pinto, sob a orientação das professoras Ana Paula Rangel de Andrade e Paula Eveline da Silva dos Santos.

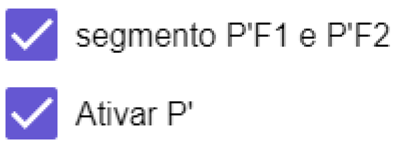
Atividade Investigativa 1

O *Applet* https://www.geogebra.org/m/ensk6t6s apresenta uma elipse. Utilize-o para responder a questão 1.

Questão 1

a) Considerando que os pontos $F1$ e $F2$ são distintos e fixos em um plano, movimente o ponto P e investigue o comportamento dos segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ na formação da elipse. O que é possível afirmar sobre a relação entre os segmentos $\overline{PF1}$ e $\overline{PF2}$ e esta formação?

b) Clique na caixa de exibição para ativar o segmento $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$ e para ativar P', conforme o exemplo abaixo:



Movimente P' e observe o valor de $\overline{P'F1}$ e $\overline{P'F2}$. O ponto P' pertence à elipse?

c) Considerando o que foi observado nos itens a) e b), qual deve ser a condição para que um ponto P pertença a uma elipse?

d) Com base na investigação realizada, complete o texto abaixo:

Considerando $F1$ e $F2$ dois pontos distintos e fixos em um plano, pode-se afirmar que um ponto P deste plano pertencerá a uma elipse quando ____

APÊNDICE G – Atividade de investigação 2 da Implementação

Esta atividade faz parte da experimentação que integra o Trabalho de Conclusão de Curso elaborado pelas licenciandas Ester da Silva Roberto e Maria Fernanda Oliveira Pinto, sob a orientação das professoras Ana Paula Rangel de Andrade e Paula Eveline da Silva dos Santos.

Atividade Investigativa 2

Utilize o *Applet* https://www.geogebra.org/m/vd5arpzf para responder às questões 1 e 2.

Questão 1

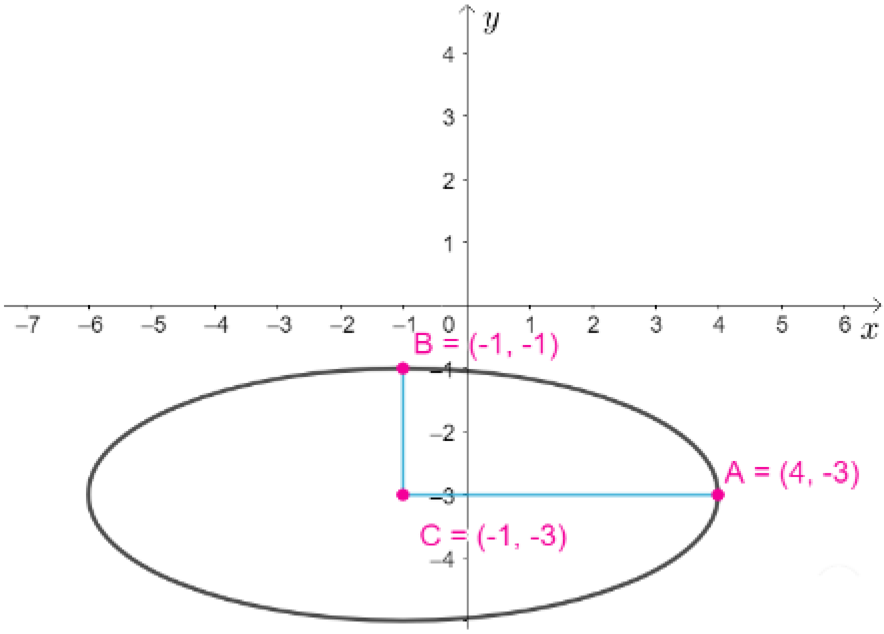
a) Movimente o ponto A e observe o que acontece na **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

b) Movimente o ponto B e observe o que acontece com a **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

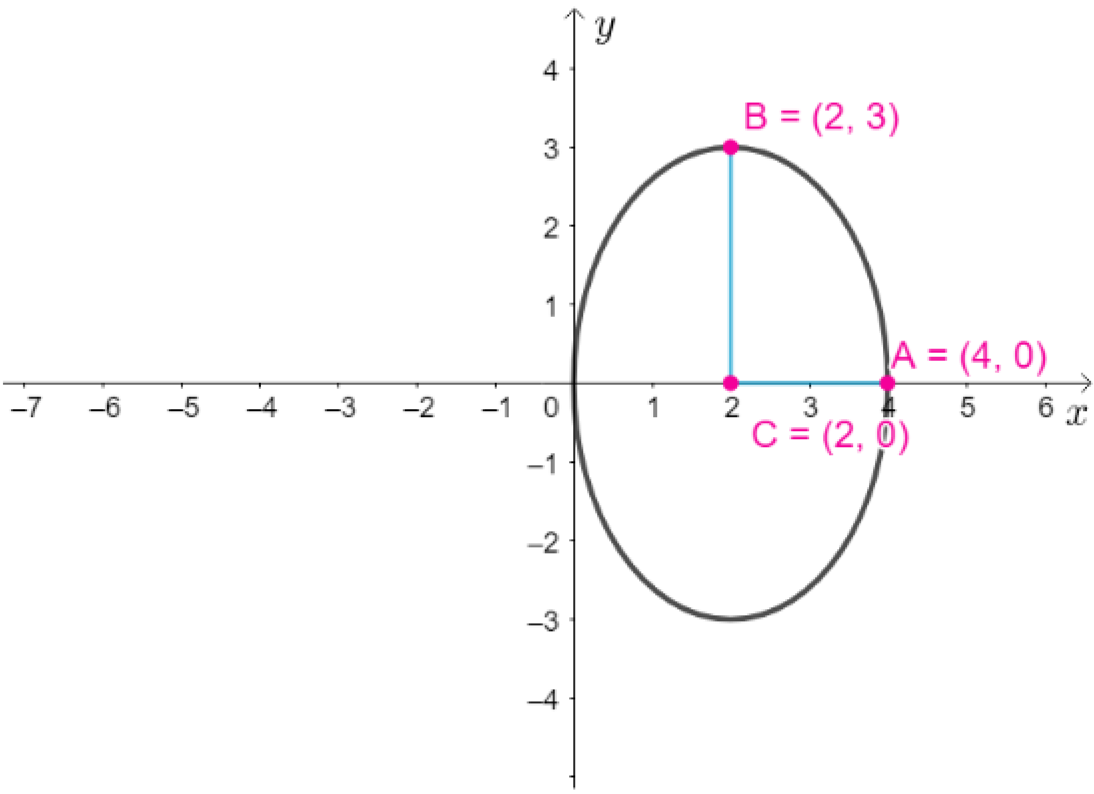
c) Movimente o ponto C e observe o que acontece com a **equação da elipse**. Descreva o que você observou.

d) Quais são as coordenadas do centro da elipse para que sua equação seja $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+5)^2}{4^2} = 1$?

e) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



f) Observe a elipse abaixo e escreva qual deve ser a sua equação.



g) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(x+6)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1$?

h) Quais são as coordenadas do centro e a medida dos eixos maior e menor da elipse para que sua equação seja $\frac{(y+3)^2}{5^2} + \frac{(x+6)^2}{2^2} = 1$?

Questão 2

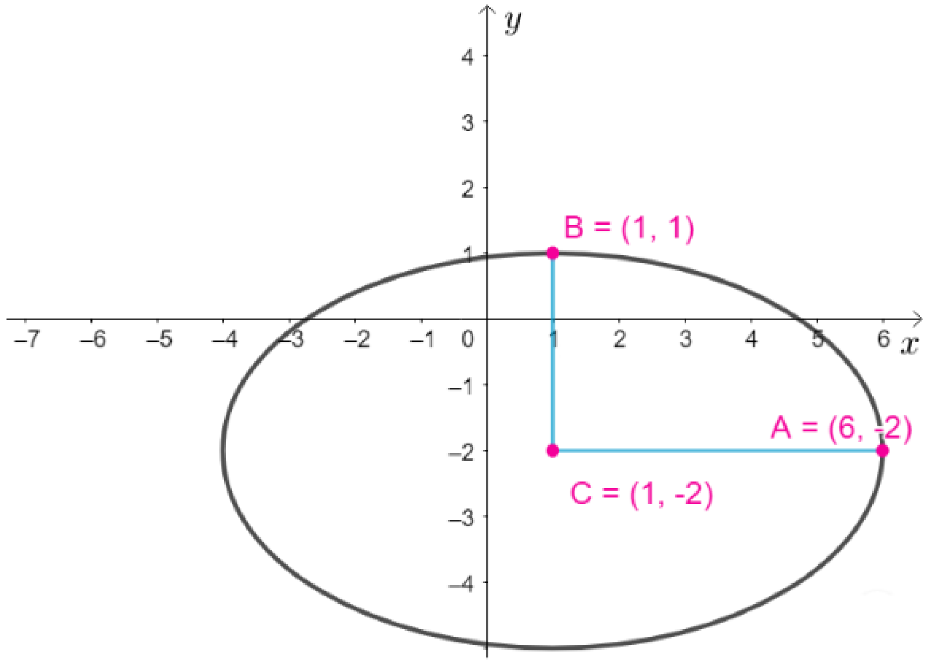
a) Utilize novamente o *Applet.* A partir de um determinado ponto C, movimente os pontos A e B de forma que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ tenham a mesma medida. Qual figura é formada? Observe a sua equação e escreva o que é possível afirmar em relação aos denominadores da equação dessa figura?

b) Transforme a equação encontrada acima para que ela tenha o formato $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = k$. Qual equação foi formada?

c) Na equação formada acima, o que k representa na figura? Qual a relação de k com os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$?

Questão 3

Observe a figura abaixo e responda.



A equação que melhor representa a elipse formada é:

a) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

b) $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$

c) $\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$

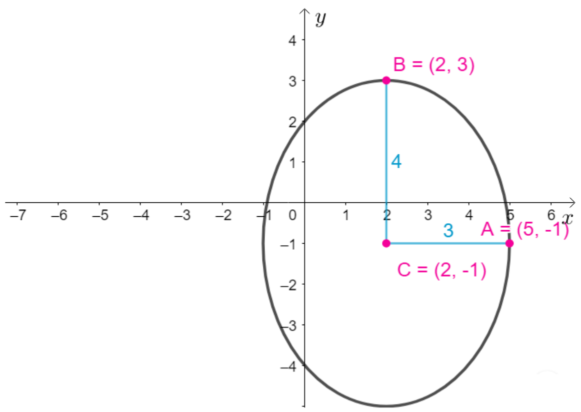
d) $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$

e) $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$

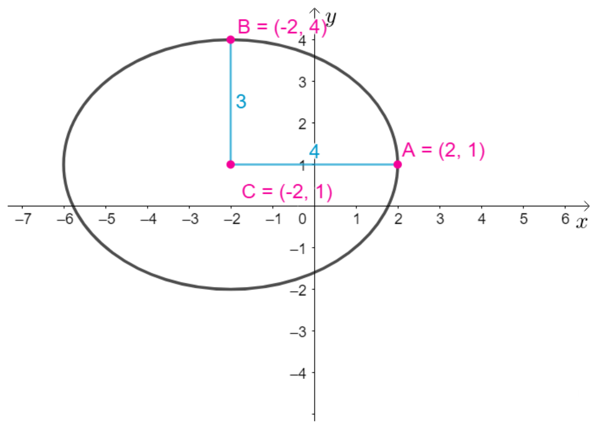
Questão 4

A equação $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ representa a elipse:

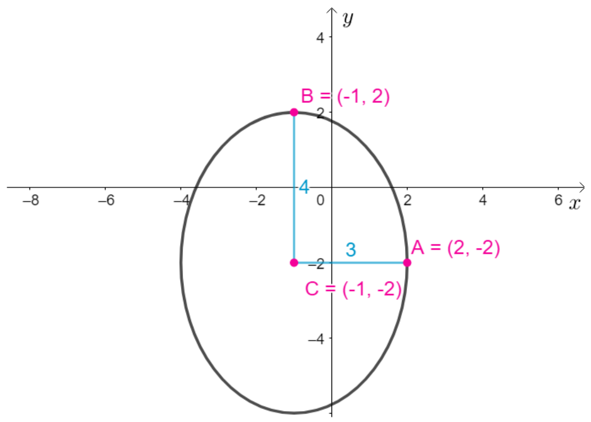
a)



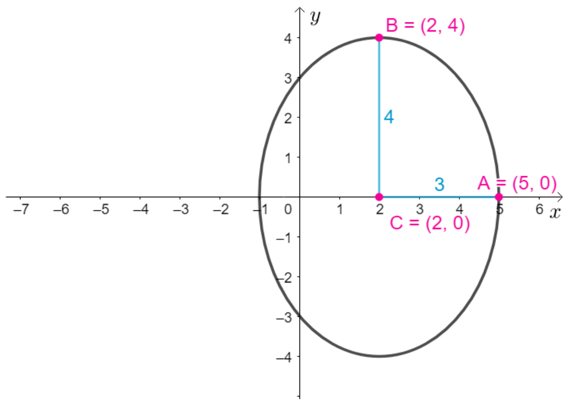
b)



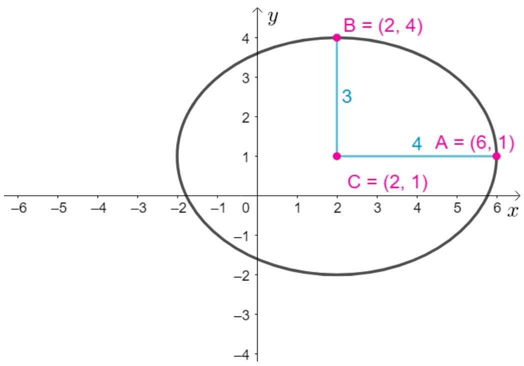
c)



d)



e)



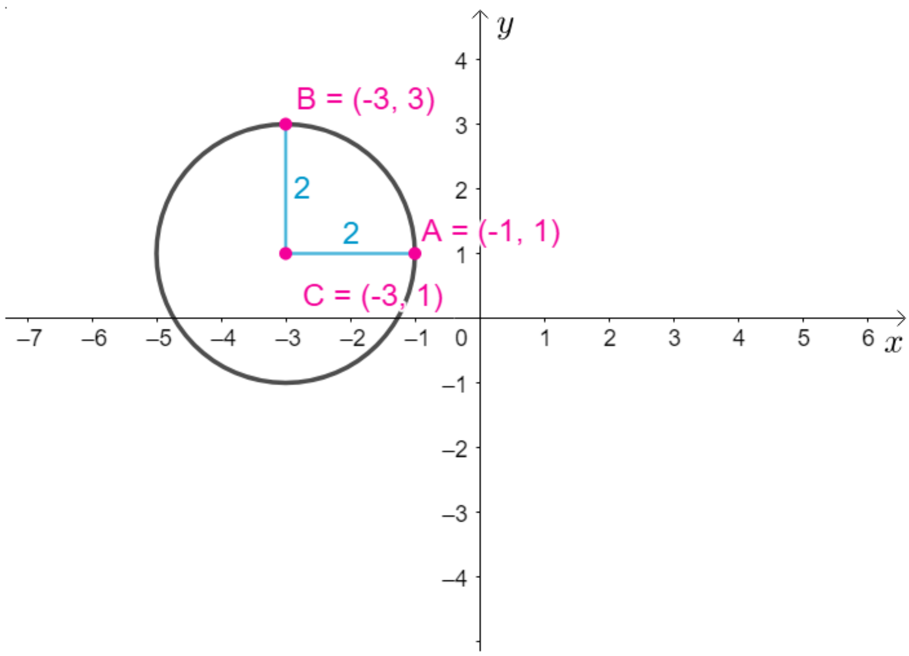
Questão 5

A equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ representa uma circunferência. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.

a) ( ) O centro dessa circunferência é $(-3, 2)$.
b) ( ) A medida dos semieixos (maior e menor) são iguais e medem 6.
c) ( ) O centro dessa circunferência é $(3, -2)$.
d) ( ) O raio dessa circunferência mede 36.

Questão 6

Observe a figura abaixo e responda.



A equação que melhor representa a figura formada é:

a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
c) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$
d) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$
e) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

APÊNDICE H – Slides da Implementação

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

ELIPSE

Ester da Silva Roberto
Maria Fernanda Oliveira Pinto

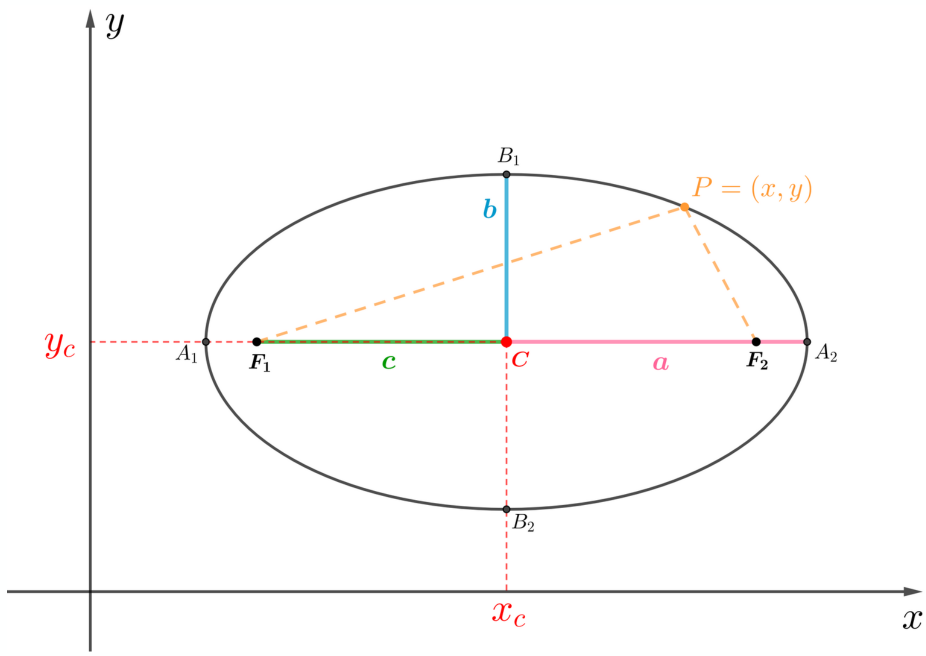
Orientadoras: Ana Paula Rangel e Paula Eveline dos Santos

Atividade investigativa 1

Definição de elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante, maior que a distância entre os pontos fixos (Machado, 1982).

Apresentação da elipse e seus elementos



F_1 e F_2: *focos*

C: *centro*

A_1A_2: *eixo maior*

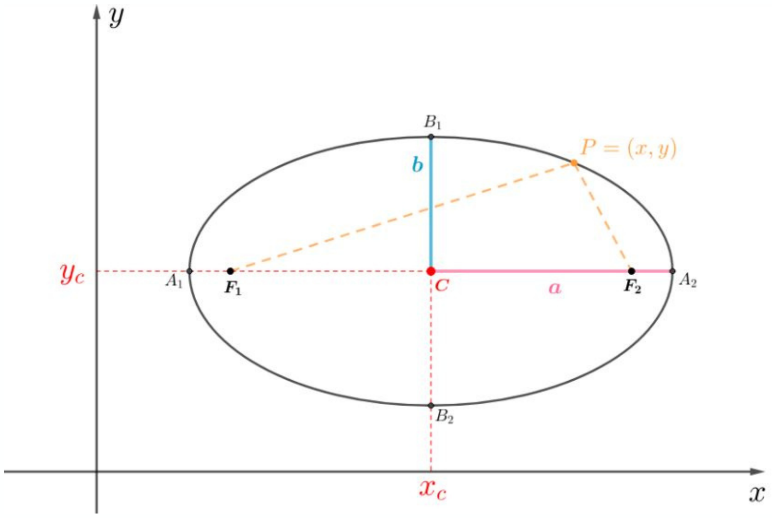
$2a$: *medida do eixo maior*

B_1B_2: *eixo menor*

$2b$: *medida do eixo menor*

$2c$: *distância focal*

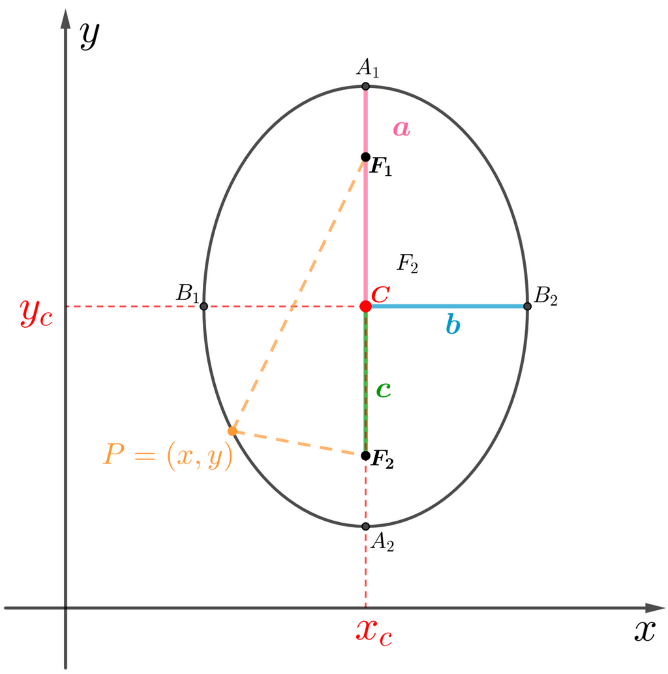
Apresentação da elipse e seus elementos (cont.)



$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

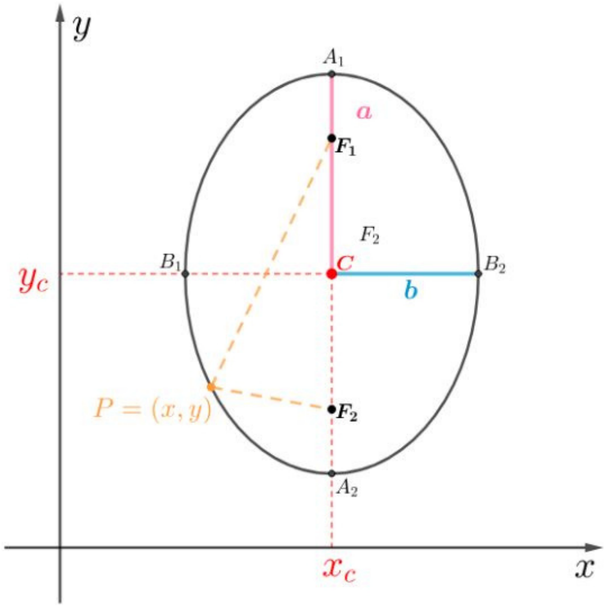
x_c: abscissa do centro
y_c: ordenada do centro
a: medida do semieixo maior
b: medida do semieixo menor

Elementos da elipse (cont.)



F_1 e F_2: focos
C: centro
A_1A_2: eixo maior
$2a$: medida do eixo maior
B_1B_2: eixo menor
$2b$: medida do eixo menor
$2c$: distância focal

Equação da elipse (cont.)



$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

x_c: abscissa do centro
y_c: ordenada do centro
a: medida do semieixo maior
b: medida do semieixo menor

Atividade investigativa 2

Equação da circunferência

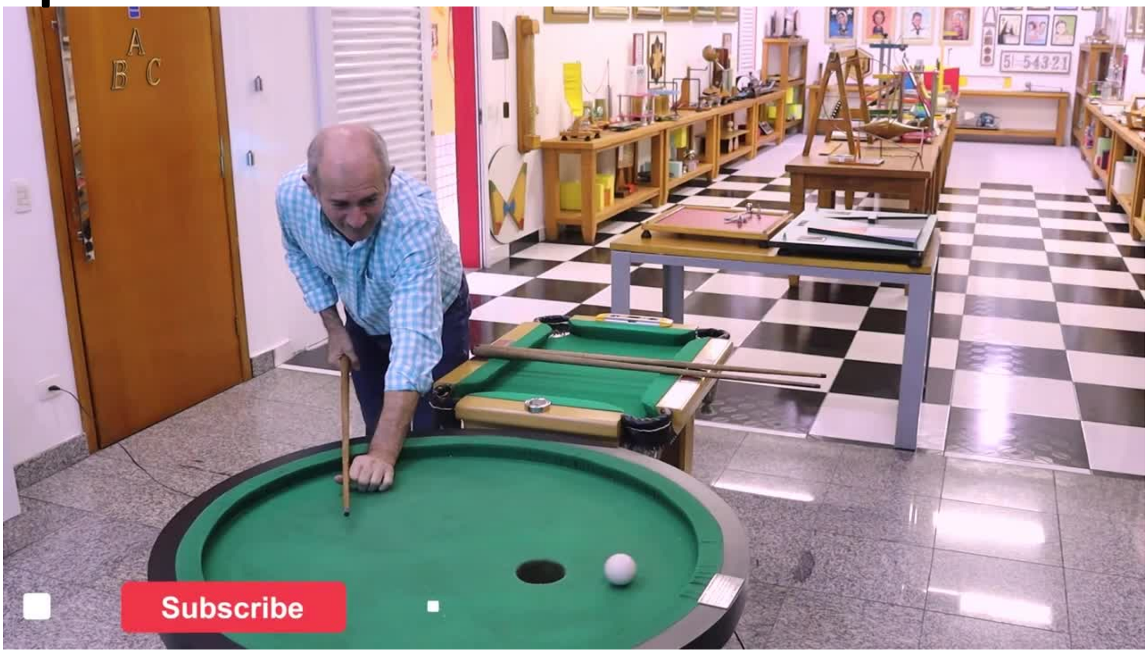
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

x_c: *abscissa do centro*

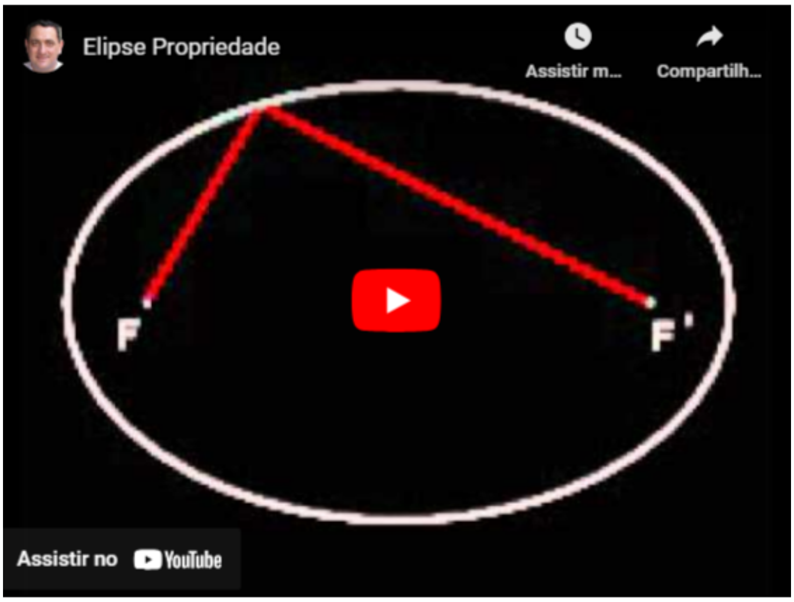
y_c: *ordenada do centro*

r: *raio da circunferência*

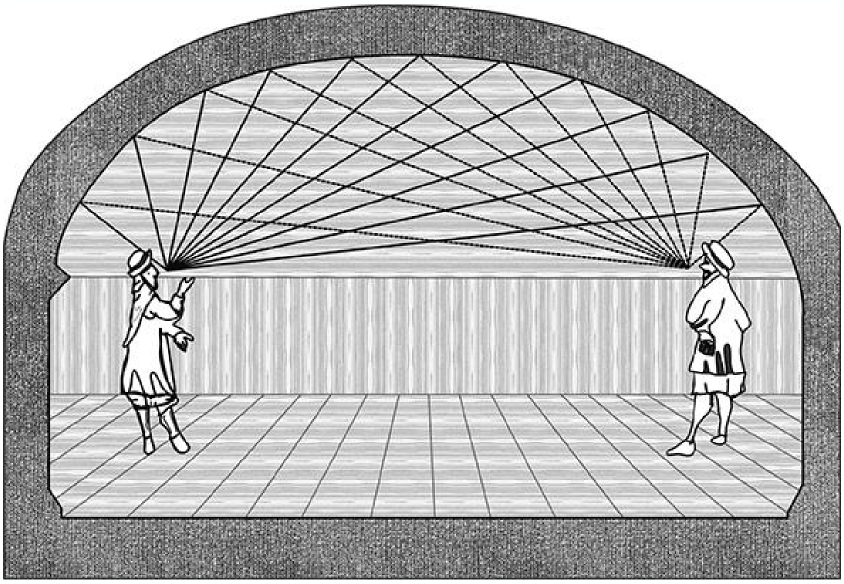
Propriedade refletora



Propriedade refletora (cont.)



Propriedade refletora (cont.)



Propriedade refletora (cont.)

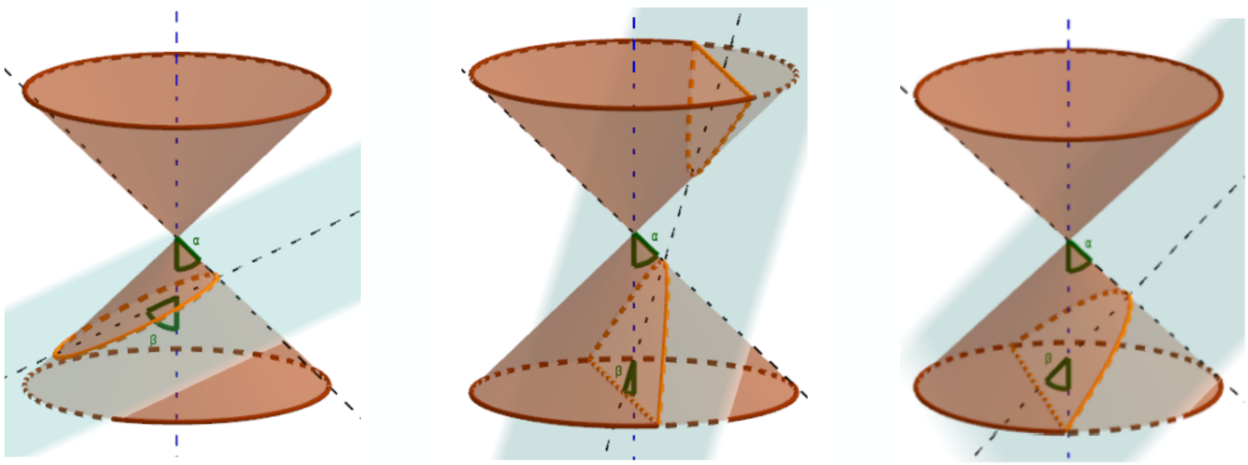
Propriedade refletora (cont.)

https://www.geogebra.org/m/keas2ygj

Propriedade refletora (cont.)

Casa Branca

Seções Cônicas

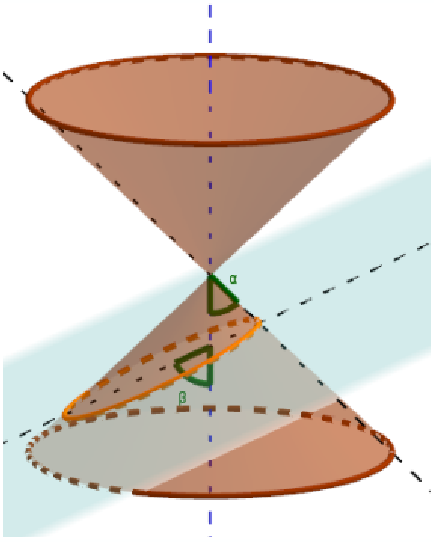


(a) Seção cônica tipo Elipse (b) Seção cônica tipo Hipérbole (c) Seção cônica tipo Parábola

(Muniz Junior, 2018, p. 8)

Elipse

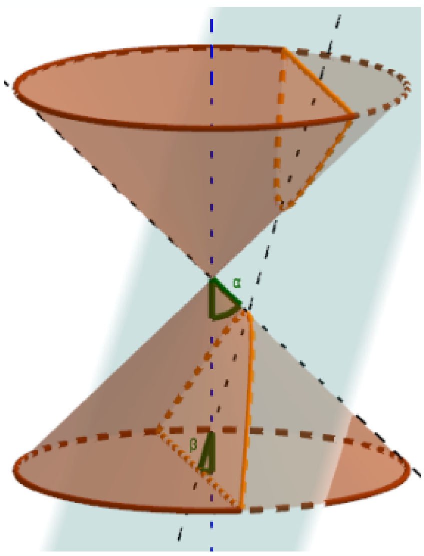
O plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e intersecta as geratrizes em uma única folha da superfície.



(Fainguelernt, 1980, p.171)

Hipérbole

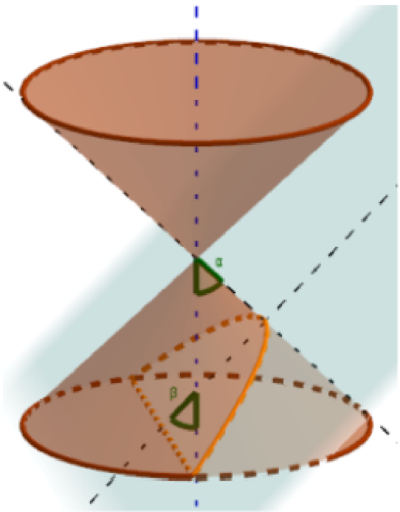
O plano de seção intersecta as duas folhas da superfície cônica.



(Fainguelernt, 1980, p.171)

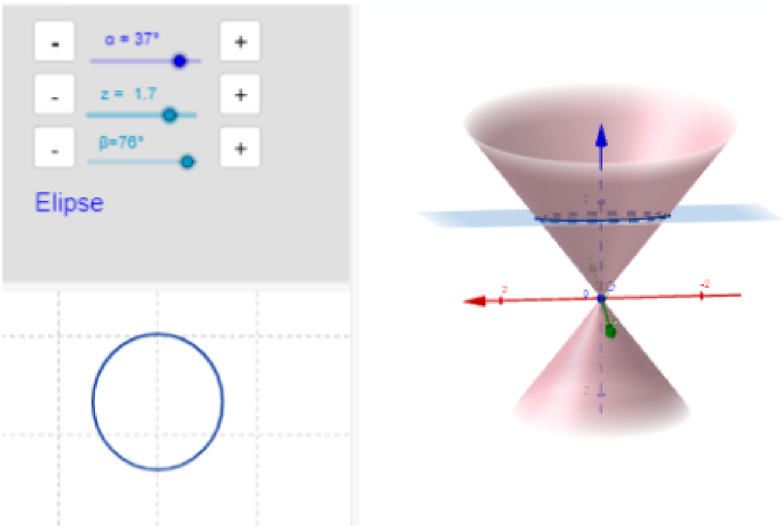
Parábola

O plano de seção é paralelo a uma geratriz da superfície.



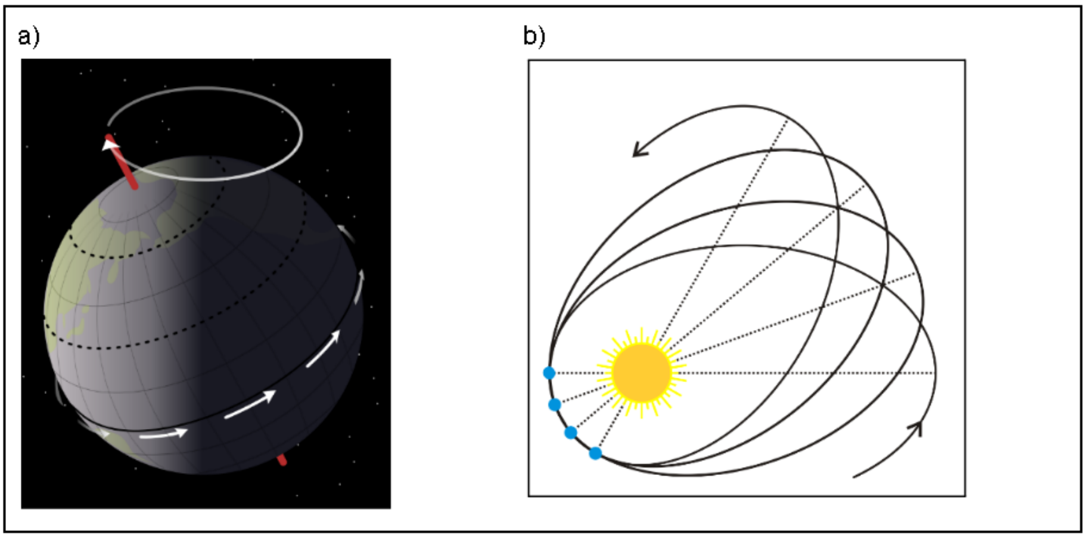
(Fainguelernt, 1980, p.171)

GeoGebra-Seções Cônicas



https://www.geogebra.org/m/tz9h7rwk

Presença da elipse no cotidiano



(Cunha, 2017, p.17)

Referências

CUNHA, Ricardo Fagundes Freitas da. **O estudo de precessão da órbita de Mercúrio no Ensino Médio**. Revista do Professor de Física, Brasília, v. 1, n. 2, p. 13-24, 2017. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/7069/5720. Acesso em: 8 abr. 2023.

FAINGUELERNT, Estela K.; BORDINHÃO, Noelir de C. **Algebra linear e Geometria analítica.** São Paulo: Editora Moderna, 1980.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Algebra linear e Geometria analítica.** 2. ed. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1980. 209 p.

MUNIZ JUNIOR, Felix Horacio Munoz. **Seções cônicas**. 2018. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/20709/1/textocompleto.pdf. Acesso em: 8 abr. 2023.

APÊNDICE I – Roteiro de perguntas para a entrevista da Implementação

Roteiro de entrevista

1) Durante estes anos que você está na Educação Básica, você estudou mais Álgebra do que Geometria?

2) Quais as contribuições do processo de investigação neste estudo sobre a elipse? Houve dificuldades neste processo? Em caso afirmativo, quais foram?

3) Como vocês avaliam a importância da tecnologia digital na realização deste trabalho?

4) Avalie o trabalho, apontando críticas e sugestões. Considere o processo investigativo e os materiais utilizados na aula.