MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARINA MARTINS DE OLIVEIRA DE JESUS

OPERAÇÕES DE DIVISÃO E POTENCIAÇÃO ENVOLVENDO O ZERO:

Uma proposta didática para abordagens de indeterminações matemáticas no âmbito do Ensino Fundamental.

Campos dos Goytacazes/ RJ

Março – 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARINA MARTINS DE OLIVEIRA DE JESUS

OPERAÇÕES DE DIVISÃO E POTENCIAÇÃO ENVOLVENDO O ZERO:

Uma proposta didática para abordagens de indeterminações matemáticas no âmbito do Ensino Fundamental.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Me. Leandro Sopeletto Carreiro

Campos dos Goytacazes/RJ

Março – 2024

Biblioteca
CIP - Catalogação na Publicação

J58o

Jesus, Marina Martins de Oliveira de
Operações de divisão e potenciação envolvendo o zero: Uma proposta didática para abordagens de indeterminações matemáticas no âmbito do Ensino Fundamental. / Marina Martins de Oliveira de Jesus - 2024.
140 f.: il. color.

Orientador: Leandro Sopeletto Carreiro

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Anton Dakitsch, RJ, 2024.
Referências: f. 93 a 95.

1. Zero. 2. Indeterminação. 3. Divisão. 4. Potenciação. 5. Obstáculos Epistemológicos. I. Carreiro, Leandro Sopeletto, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MARINA MARTINS DE OLIVEIRA DE JESUS

OPERAÇÕES DE DIVISÃO E POTENCIAÇÃO ENVOLVENDO O ZERO:

Uma proposta didática para abordagens de indeterminações matemáticas no âmbito do Ensino Fundamental.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 13 de Março de 2024.

Banca Examinadora:

Carla Antunes F.

Carla Antunes Fontes (Examinador)
Mestre em Matemática Aplicada - UFRJ - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Paula Eveline da Silva dos Santos

Paula Eveline da Silva dos Santos (Examinador)
Mestre em Matemática (PROFMAT) - UENF - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Leandro Sopeletto Carreiro

Leandro Sopeletto Carreiro (Orientador)
Mestre em Matemática (PROFMAT) - UENF - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Dedico este trabalho a minha mãe Fátima Maria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pois sem Ele seria impossível finalizar esta etapa da minha vida.

Agradeço a minha mãe por ser minha melhor amiga, sempre me incentivando e apoiando todos os meus projetos, nunca me deixando desistir. Ao meu pai, por todo zelo em me proporcionar o privilégio de apenas estudar, tornando assim essa jornada acadêmica menos árdua. A minha tia Zilma, que está a todo tempo torcendo por mim e apoiando os meus planos.

Agradeço ao meu orientador Leandro, por ter aceitado o convite para esta orientação, pela dedicação e incentivo acadêmico. Obrigada por ser meu ponto de equilíbrio com sua calma e paciência.

Agradeço aos colegas, feitos durante o período de faculdade, por cada risada que compartilhamos, tornando essa caminhada mais leve.

Agradeço às professoras Carla Antunes Fontes e Paula Eveline da Silva dos Santos, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

Agradeço aos professores da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *Campus* Campos Centro que contribuíram para minha formação acadêmica.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo analisar as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no âmbito do Ensino Fundamental (EF). Entende-se que os passos iniciais de aprendizagem das operações matemáticas são instituídos por professores que se formam no curso Normal Médio – Formação de Professores. Sendo assim, definiu-se como público alvo da pesquisa os alunos do 3º ano de um Instituto Superior de Educação em Campos dos Goytacazes, os quais cursam o Normal Médio – Formação de Professores. O trabalho divide-se em duas etapas. A primeira etapa envolve uma pesquisa de caráter qualitativo, para a qual foi elaborado um questionário objetivando investigar as dificuldades dos alunos, os quais são futuros professores, perante as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação. Neste primeiro momento da pesquisa, também tem-se a intenção de analisar os obstáculos epistemológicos que são barreiras perante a aprendizagem das operações que envolvem o zero. A segunda etapa caracteriza-se por uma intervenção pedagógica por meio de uma oficina pedagógica, para a qual foi elaborada uma sequência didática com o intuito de elucidar a compreensão dos professores em formação quanto a aplicação de um estudo sobre indeterminações matemáticas no EF. Por meio deste trabalho, conclui-se que os futuros professores dos anos iniciais do EF não possuem os conhecimentos matemáticos adequados para o ensino da divisão e as particularidades envolvendo o zero nesta operação. Também foi possível notar que os participantes não detêm o domínio da operação de potenciação envolvendo o zero.

Palavras-chave: Zero. Indeterminação. Divisão. Potenciação. Obstáculos Epistemológicos.

ABSTRACT

This undergraduate thesis aims to analyze the contributions of a didactic proposal, in initial teacher training, which discusses mathematical indeterminates involving zero, in division and power, in Elementary School. The initial steps in learning mathematical operations are instituted by teachers who graduate from the Normal Medium – Teacher Training course. Therefore, the target audience for the research was defined as 3rd year students at a Higher Education Institute in Campos dos Goytacazes, who are studying the Normal Medium – Teacher Training. The work is divided into two stages. The first stage involves qualitative research, for which a questionnaire was prepared to investigate the difficulties faced by students, who are future teachers, in the face of mathematical indeterminates involving zero, in division and power. In addition, at this first moment, the intention is also to analyze the epistemological obstacles that are barriers to learning operations involving zero.The second stage is characterized by a pedagogical intervention through a pedagogical workshop, for which a didactic sequence was developed. The goal of that is to elucidate the future teachers' understanding about the application of a study on mathematical indeterminates in Elementary School. Through this work, it is concluded that future Elementary School teachers do not have the appropriate mathematical knowledge to teach the particularities of division method with zero. Furthermore, it was possible to verify that the students don't have mastery of calculus involving power operation with zero.

Keywords: Zero. Indeterminate. Division. Power. Epistemological Obstacles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Signos numéricos dos babilônios.. 19
Figura 2- Representação babilônica do número 75..19
Figura 3- Representação babilônica do número 174.012..20
Figura 4- Representação babilônica dos números 25, 615 e 36.605.......................................20
Figura 5- Representação para espaço vazio.. 21
Figura 6- Representação babilônica do 3645..21
Figura 7- Representação babilônica do 60..22
Figura 8- Representação dos algarismos Maias..23
Figura 9- Número 7215 no sistema de numeração Maia... 23
Figura 10- Representação do zero Maia.. 24
Figura 11- Algarismos hindus..25
Figura 12- Representação hindu número 9100.. 26
Figura 13 - Primeira questão, item a...42
Figura 14 - Primeira questão, item b...43
Figura 15 - Afirmações da questão 2.. 43
Figura 16 - Item B, questão 2..44
Figura 17 - Item C, questão 2..44
Figura 18 - Enunciado questão 3...45
Figura 19 - Operações de divisão iniciais... 47
Figura 20 - Situação número 3...48
Figura 21 - Definição da divisão..48
Figura 22 - Generalização 0 ÷ d...49
Figura 23 - Generalização D ÷ 0..50
Figura 24 - Indeterminação matemática...51
Figura 25 - Número de retângulos sendo dobrados.. 52
Figura 26 - Dinâmica com folha A4.. 53
Figura 27 - Conceituando potência.. 53
Figura 28 -Enunciado divisão de potências de mesma base.. 54
Figura 29 - Generalizando a0=1...55
Figura 30 - Generalizando 00...56

Figura 31 - Respostas questão 1 do questionário (parte 1).. 60
Figura 32 - Respostas questão 2 do questionário (parte 1).. 60
Figura 33 - Respostas questão 3 do questionário (parte 1).. 61
Figura 34 - Respostas questão 4 do questionário (parte 1).. 62
Figura 35 - Respostas questão 5 do questionário (parte 1).. 62
Figura 36 - Respostas questão 6 do questionário (parte 1).. 63
Figura 37 - Respostas questão 7 do questionário (parte 1).. 64
Figura 38 - Respostas questão 8 do questionário (parte 1).. 65
Figura 39 - Respostas questão 9 do questionário (parte 1).. 65
Figura 40 - Respostas questão 10 do questionário (parte 1).. 66
Figura 41 - Resposta do aluno G, questão 1.a...67
Figura 42 - Resposta do aluno H, questão 1.a...68
Figura 43 - Resposta dos Alunos D e H, questão 1.b...68
Figura 44 - Respostas dos alunos D e E, questão 3.a...70
Figura 45 - Operação de divisão no formato inicial...71
Figura 46 - Operação de divisão no formato após mudanças... 72
Figura 47 - Apresentação do algoritmo da divisão inicialmente... 72
Figura 48 - Apresentação do algoritmo da divisão após mudanças...73
Figura 49 - Divisão entre um número qualquer e zero... 73
Figura 50 - Divisão entre um número qualquer e zero após alterações.................................... 74
Figura 51 - Explicação 30=1 versão inicial... 74
Figura 52 - Explicação 30=1 após alteração... 75
Figura 53 - Exercício abordando a divisão entre um número real e o zero.............................. 76
Figura 54: Aplicação da proposta didática...77
Figura 55- Iniciando explicação sobre a indeterminação matemática...................................... 79
Figura 56 - Dobras folha A4 e retângulos...80
Figura 57 - Analogia retângulos, dobras e potências.. 81
Figura 58 - Propriedades de potência..82
Figura 59 - Mostração divisão potência de bases iguais...82
Figura 60 - a0=1, sendo base não nula...83
Figura 61 - Apresentação de uma nova indeterminação matemática..83
Figura 62 - 00 é uma indeterminação..84

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Representações numéricas dos egípcios, gregos e romanos.................................18

Quadro 2 - Representação oral hindu dos números 31, 301 e 3000...25

Quadro 3 - Artigos e trabalhos de origem..33

Quadro 4 - Parte 1 do questionário.. 40

Quadro 5 - Etapas, títulos e objetivos... 46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **14**

2 REVISÃO DA LITERATURA **18**

2.1 A abordagem histórica do zero na matemática **18**

2.2 Indeterminações matemáticas envolvendo o Zero **26**

2.3 Obstáculos Epistemológicos **29**

2.4 Trabalhos Relacionados **32**

2.4.1 Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática. 34

2.4.2. A compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero. 35

2.4.3 A indeterminação zero elevado a zero: saberes disciplinares e pedagógicos na formação inicial de professores de matemática. 36

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **38**

3.1 Caracterização da pesquisa **38**

3.2 Elaboração do Questionário **40**

3.3 Elaboração da Sequência Didática **45**

4 RESULTADO E DISCUSSÕES **57**

4.1 Questionário **57**

4.1.1 Teste exploratório do Questionário 57

4.1.2 Aplicação do questionário 58

4.1.3 Análise dos dados do questionário 59

4.2 Sequência Didática **70**

4.2.1 Teste exploratório da sequência 70

4.2.2 Aplicação da sequência 76

4.2.3 Análise da Entrevista em Grupo 85

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **89**

REFERÊNCIAS **93**

APÊNDICES **96**

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO PARTE I **97**

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO PARTE II **100**

APÊNDICE C - TERMO CONSENTIMENTO I **105**
APÊNDICE D - APOSTILA **107**
APÊNDICE E - SLIDES **119**
APÊNDICES F - ROTEIRO DA ENTREVISTA EM GRUPO **131**
APÊNDICES G - TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA EM GRUPO **133**
APÊNDICE H - TERMO CONSENTIMENTO II **139**

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina que amedronta boa parte dos alunos que frequentam as escolas. Sendo assim, o professor que leciona matemática tem um papel fundamental ao estabelecer a relação entre esta disciplina e seus educandos. As metodologias empregadas por ele na prática de ensino matemático será um meio direcionador para o comportamento dos estudantes perante esta matéria (Lorenzato, 2010).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam que o professor deve ter conhecimento dos entraves que comprometem os alunos na construção dos conceitos matemáticos. Assim, o docente conseguirá compreender algumas particularidades da aprendizagem dos alunos (Brasil, 1997).

Carvalho (1994) destaca que a sala de aula deve ser um ambiente de troca de conhecimentos entre aluno e professor. Os indivíduos vão à escola carregando em sua bagagem intelectual conhecimentos de senso comum, assim cabe ao professor introduzir aos discentes o conhecimento sistematizado.

Lorenzato (1993) ressalta que, no ensino-aprendizagem da matemática, é comum o surgimento de perguntas provenientes das dúvidas dos alunos em relação ao "por quê" de determinados processos matemáticos. Assim, cabe ao professor explicar as raízes da técnica matemática que está sendo estudada naquele momento, ou seja indicar o "porquê". No entanto, ainda segundo o mesmo autor, um número significativo de professores não possuem embasamentos e conhecimentos matemáticos para sanar as dúvidas geradas a partir desses "por quês".

De acordo com os PCN (Brasil, 1997, p. 22), "decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória."

Diante do exposto acima, a motivação para este trabalho deu-se perante a curiosidade desta autora em questionar-se sobre possíveis dúvidas dos seus futuros alunos. Duas dessas indagações, que originaram o tema que será abordado neste trabalho, foram "por que não podemos dividir um número por zero?" e "por que zero dividido por zero não resulta em um?". A partir da busca por respostas para essas perguntas, foi desenvolvida uma afeição pelo estudo do algarismo zero, em particular as indeterminações que o envolvem.

Desanti (2017) indica em seu trabalho que a maioria dos livros didáticos não expõe em seu conteúdo a explicação matemática que o ocasiona a não divisão de um número por zero, assim quando esta dúvida surge no Ensino Fundamental (EF), cabe ao professor explicar ao estudante a impossibilidade desta operação. O autor aponta outros questionamento que surgem durante esta fase do ensino:

> O que significa matematicamente a expressão 0/0? Por que essa expressão é dita indeterminada? Essas são questões que causam uma certa curiosidade no estudante ao mesmo tempo que causa desconforto ao professor em fornecer-lhe explicações de forma adequada e didática (Desanti, 2017, p. 16).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) no 5.º ano do Ensino Fundamental o aluno deve estar apto a trabalhar as operações de multiplicação e divisão com números naturais e racionais, sendo o multiplicador um número natural e o divisor natural e diferente de zero.

Segundo Carvalho (1994) os professores que lecionam nas séries iniciais do Ensino Fundamental (1.º ano ao 5.º ano), são os que se formam no curso de habilitação ao Magistério, atual curso de formação de professor normal médio. Curi (2004) e Lima (2007) evidenciam a ideia de que esses professores serão os norteadores dos primeiros contatos dos alunos com conhecimentos de várias áreas. Assim, é um desafio na formação destes profissionais a construção de competências para trabalhar com essas áreas de conhecimento diversificadas.

Os alunos que buscam formação de professor - Nível Médio, em geral, compartilham pelo desprezo em relação à matemática (Carvalho, 1994). Tal aversão a esta disciplina acarreta em uma atuação indesejada no ensino da matemática durante os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os conhecimentos matemáticos destes professores, em geral, são limitados, pois durante seus anos escolares pouco lhes foi ensinado (Lima, 2007). Sendo assim, "para organizar suas aulas, valem-se de livros-texto, nos quais são obrigadas a crer pois não têm outra alternativa" (Lima, 2007, p. 163).

Lorenzato (2010, p.3) diz que “ninguém consegue ensinar o que não sabe, decorre que ninguém aprende com aquele que dá aulas sobre o que não conhece.” Tal fala corrobora com Carvalho (1994) que reforça que o aluno, em preparação para lecionar nas séries iniciais do EF, precisa experienciar durante a sua formação a sua capacidade de entender matemática e construir conhecimento a partir desta disciplina, só assim este futuro professor compreenderá a sua capacidade de transpor as noções matemáticas.

Curi (2012) considera que os concluintes dos cursos de formação de professor, se formam sem o conhecimento necessário dos conteúdos matemáticos que irão lecionar. Assim, Lorenzato (2010) afirma que o professor em formação, tal qual o que já está formado, precisa se manter atualizado, sempre na busca por informações que acrescentem nas suas práticas pedagógicas.

Brolezzi (2000) ressalta que a matemática é uma ciência em construção, assim a história que a envolve tem competência de incrementar os conteúdos a serem ensinados, lapidando a formação do conhecimento educacional.

Para Lorenzato (2010), o professor pode repercutir algumas dúvidas dos alunos, por meio da história da matemática. O autor indica que tratando-se de determinados questionamentos em torno do “zero”, os elementos históricos detém explicações importantes e plausíveis para o enriquecer o processo de compreensão do aluno.

Diante do exposto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no âmbito do Ensino Fundamental?

Sendo assim, para responder a questão de pesquisa traçou-se o seguinte objetivo geral: Analisar as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no âmbito do Ensino Fundamental.

Para alcançar o objetivo geral, traçou-se os objetivos específicos expostos abaixo:

- Investigar as dificuldades dos alunos concluintes do curso Normal Médio - Formação de Professores em relação às operações de divisão e potenciação envolvendo o zero;

- Identificar obstáculos epistemológicos enfrentados por alunos do curso Normal Médio - Formação de Professores em relação às indeterminações matemáticas envolvendo o zero.

- Proporcionar reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem referente às indeterminações matemáticas que resultam-se das operações de divisão e potenciação envolvendo o zero.

Este trabalho divide-se em 5 capítulos, dos quais o primeiro consiste nesta introdução. Os capítulos seguintes são: Revisão de Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões e por fim as Considerações Finais.

O capítulo de Revisão de Literatura é dedicado a apresentar o aporte teórico utilizado para desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso. Posteriormente, o capítulo dos Procedimentos Metodológicos contará com a exposição do público alvo, o tipo de pesquisa, juntamente com os instrumentos de coleta de dados e as etapas executadas durante o desenvolvimento do trabalho. No capítulo de Resultados e Discussões são apresentadas as análises dos dados coletados no decorrer da pesquisa. Por fim, no último capítulo com as Considerações Finais, retomam-se os objetivos deste trabalho bem como a questão de pesquisa norteadora, apresentando os últimos comentários relativos à temática abordada.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 A abordagem histórica do zero na matemática

O surgimento do zero tem uma relevância significativa nos estudos historiográficos da matemática, haja visto que este nasce para preencher um "vazio" existente na história dos números. Nesta seção, serão abordados os caminhos históricos percorridos para o reconhecimento do algarismo zero, assim como as intercorrências causadas por ele ao longo da evolução aritmética matemática até os dias atuais.

Ao longo da história, os povos antigos tinham diferentes modos de representar seus sistemas numéricos. Segundo Guimarães (2008), os egípcios, gregos e romanos empregavam símbolos com valores fixos para representar seus números.

Os egípcios usavam figuras para indicar sua linguagem numérica. Os gregos representavam os números através de letras gregas. Os romanos empregavam letras maiúsculas relacionando-as com quantidade. Estes povos usavam o princípio aditivo nas suas representações numéricas (Quadro 1). Sendo assim, a posição em que estes símbolos se encontravam, não tinha relevância, pois bastava somar o valor fixo de cada representação simbólica que estava agrupada. Para estes povos, a presença do zero em seu sistema de numeração, era irrelevante.

Quadro 1 - Representações numéricas dos egípcios, gregos e romanos.

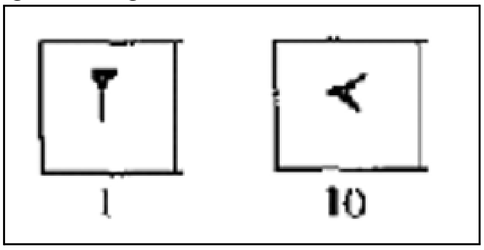
Sistema de numeração	Simbologia	Número no Sistema hindu-arabico
Egípicio	𓍢𓎆𓎆𓏺 [1]	100 + 10 + 10 + 1 = **121**
Grego	ριια [2]	100 + 10 + 10 + 1 = **121**
Romano	CXXI	100 + 10 + 10 + 1 = **121**

Fonte: Adaptado de Guimarães, 2008

[1] Fonte do símbolo: Guimarães, 2008.
[2] Fonte do símbolo: Guimarães, 2008.

O início da história do zero na matemática permeia as civilizações da antiguidade que usavam o sistema de numeração posicional. Os povos babilônicos, como aponta Ifrah (1997), usavam o sistema numérico herdado dos seus predecessores sumérios, no qual dois signos compunham o conjunto de algarismos, sendo estes um prego vertical e uma cava (Figura 1), equivalentes a uma unidade e ao número 10, nesta ordem.

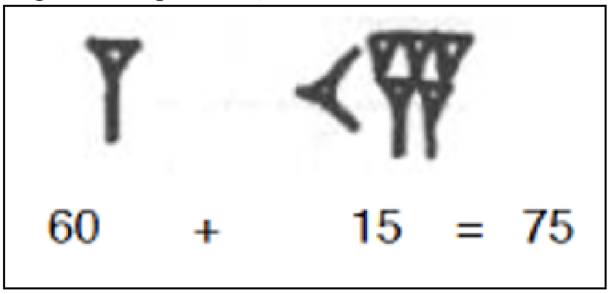
Figura 1- Signos numéricos dos babilônios.



Fonte: (Ifrah, 1997, p.295)

Guimarães (2008, p. 38) indica que na Babilônia “para além do 59 o sistema passava a ser posicional, e um espaço era deixado entre os símbolos.” (Figura 2). Ou seja, os babilônios careciam de um sistema decimal, usando o método aditivo para formação de números até 59. Em contrapartida para os maiores de 59, era admitido um sistema de base 60, chamado de sexagesimal, que seguia a regra numeral de posição.

Figura 2- Representação babilônica do número 75.



Fonte: (Guimarães, 2008, p. 38)

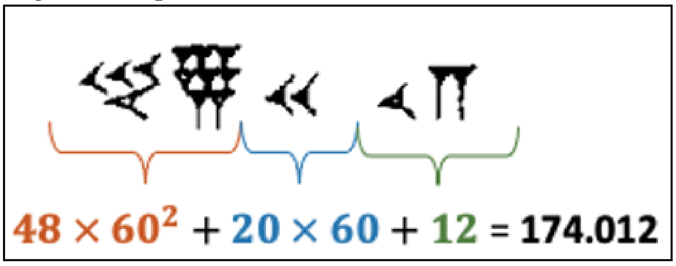
Sobre o princípio das posições usado no nosso atual sistema decimal de numeração, que é análogo ao utilizado pelos babilônios, Ifrah (1997) diz:

> A superioridade e a engenhosidade de nossa numeração escrita, na realidade, da admissão do princípio segundo o qual os algarismos empregados tem um valor variável que depende da posição que ocupam na escrita dos números; um algarismo dado será associado às unidades simples, às dezenas, às centenas ou aos milhares segundo ocupe o primeiro, o segundo, o terceiro, ou o quarto lugar na expressão de um número (partindo para tanto da direita para a esquerda) (Ifrah, 1997 ,p. 286).

Logo, na escrita numérica do povo babilônico a ordem em que os algarismos se encontravam dispostos era de relevância significativa para leitura do número representado, “o valor de um algarismo variava segundo a posição que esse ocupava na escrita dos números.” (Ifrah, 1997, p. 296).

A Figura 3 traz a representação do número 174.012 usando o sistema posicional sexagesimal babilônico.

Figura 3- Representação babilônica do número 174.012.

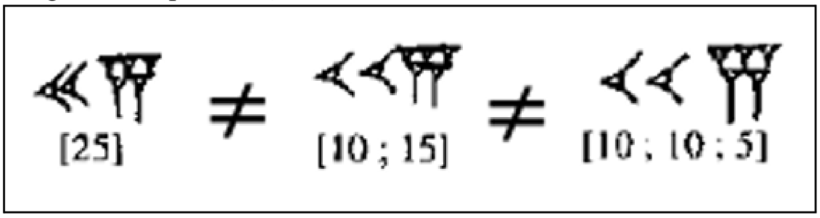


Fonte: Adaptado de Ifrah, 1947, p. 298

Havia entre os babilônios uma dificuldade ao se tratar da leitura da representação de determinados números, pois estes levavam o leitor à dúvida de qual valor estava sendo representado pelos símbolos em questão. Um exemplo de números que causavam ambiguidade diante de sua escrita são 25 e 615, os quais ainda podiam ser confundidos com 36.605. Veja suas representações na Figura 4.

Ifrah (1997) destaca que a ausência do zero na numeração babilônica gerava, por sua vez, essa imprecisão de leitura numérica. É possível notar na Figura 4 que há a tentativa de introduzir um espaço entre os símbolos na escrita do número 615, com a finalidade de separar as “ordens”. Todavia, nem sempre esse espaçamento era notado pelo leitor.

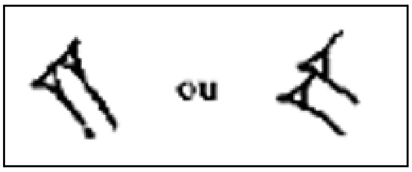
Figura 4- Representação babilônica dos números 25, 615 e 36.605



Fonte: Adaptado de Ifrah, 1995, p.301

Ainda segundo Ifrah (1997), por muito tempo a civilização babilônica ignorou a ausência de um signo representativo para indicar o espaço vazio entre as posições dos algarismos. No entanto, em uma determinada época posterior ao século IV a.C., astrônomos e matemáticos babilônios começaram a usar o duplo prego (Figura 5) para assinalar a ausência de algarismos em determinada ordem sexagesimal.

Figura 5- Representação para espaço vazio.

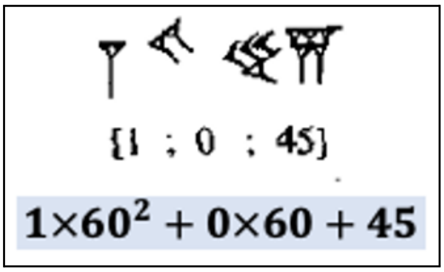


Fonte: (Ifrah, 1995, p.309)

É importante destacar que o zero babilônico representa um espaço vazio, não sendo este o zero usado nos dias atuais. Em sua obra Ifrah (1997) pontua que os matemáticos da Babilônia empregavam o duplo prego apenas em posições intermediárias.

Um exemplo é a representação no número 3645, onde o vazio na segunda ordem é indicado com o uso da nova simbologia (Figura 6).

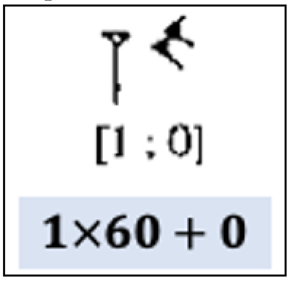
Figura 6- Representação babilônica do 3645.



Fonte: Adaptado de Ifrah, 1995, p.310

Já os astrônomos babilônicos admitiam também o uso deste símbolo, nas posições finais e iniciais. A Figura 7 apresenta a representação do número 60 por estes estudiosos.

Figura 7- Representação babilônica do 60.



Fonte: Adaptado de Ifrah, 1995, p.310

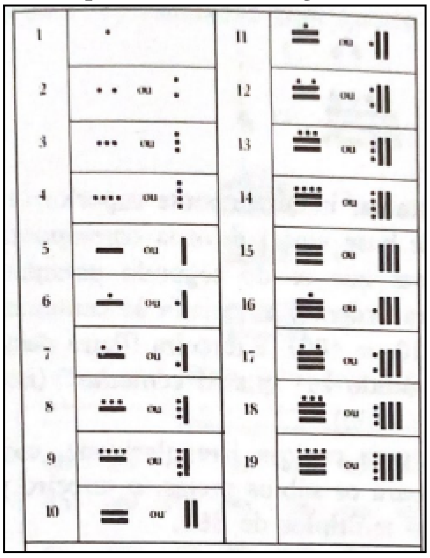
Segundo Ifrah (1997), tempos depois da descoberta do zero babilônico, no I milênio d.C., os astrônomos e sacerdotes da civilização maia, que residiam na América Central, também idealizaram o princípio matemático de posição, assim como o uso do zero.

Vale ressaltar, que os maias não tinham influência externa em suas descobertas, as quais abrangiam diversas áreas: matemática, arquitetura, educação, comércio, arte e astronomia (Ifrah, 1997).

O sistema de numeração maia era posicional de base 20 e estes possuíam um zero para ocupar as posições vazias, conforme ressalta Ifrah (2001). De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2010), a civilização maia detinha um sistema de numeração análogo ao babilônio, no entanto não possuíam a irregularidade de leitura de determinados números, pois tinham um representativo de posição vazia.

Os maias usavam dois símbolos para indicar sua numeração, sendo estes um ponto “.”, o qual representava o número um e uma barra “__” simbolizando o número 5. Como a base desse sistema era vigesimal, até o número 19 as representações seguiam conforme a Figura 8.

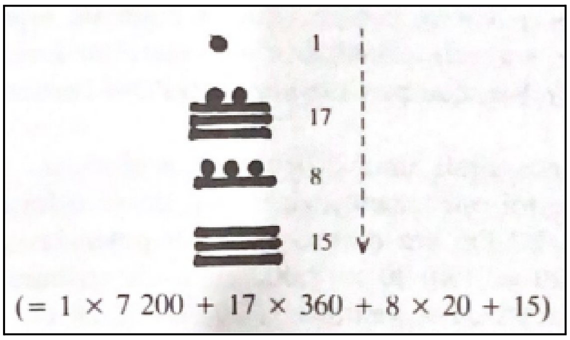
Figura 8- Representação dos algarismos Maias.



Fonte: (Ifrah, 2001, p. 251)

Ifrah (2001) destaca que os números a partir de 20 eram escritos organizando os algarismos em uma coluna. Na primeira fila da parte de baixo encontravam-se as unidades simples, nas linhas posteriores acima encaixavam-se as vintenas de acordo com a ordem ocupada. Destaca-se que a terceira fileira, a qual deveria corresponder aos múltiplos de 400, na realidade, correspondia aos múltiplos de 360 (Figura 9).

Figura 9- Número 7215 no sistema de numeração Maia.



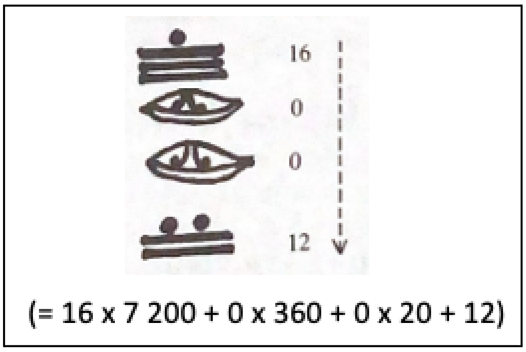
Fonte: (Ifrah, 2001, p. 253)

Logo, conforme explica Berlingoff e Gouvêa (2010, p. 68), a leitura dos números maias seguia a seguinte regra:

> O grupo mais embaixo representava unidades; o valor do segundo grupo era multiplicado por 20, o valor do terceiro por 18 x 20, o do quarto por 18 x 20 x 20, o quinto por 18 x 20 x 20 x 20 e assim por diante. Desse modo, o sistema dos maias era essencialmente baseado em vinte, exceto pelo uso peculiar de 18 (Berlingoff; Gouvêa, 2008, p. 68).

Conforme dito anteriormente, os maias possuíam um símbolo que indicava a representatividade posicional do zero. Ifrah (2001) destaca que os sábios maias criaram o zero, para que os algarismos ocupassem as devidas posições, mesmo quando alguma fila estivesse desocupada (Figura 10). O ícone usado para indicá-lo era análogo a uma concha ou até mesmo casinha de caracol.

Figura 10- Representação do zero maia.



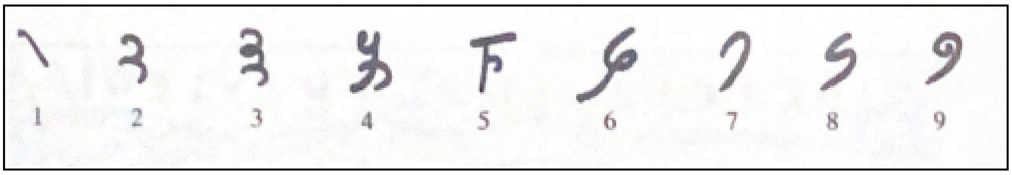
Fonte: (Ifrah, 2001, p. 253)

Berlingoff e Gouvêa (2010) pontuam que os maias não tiveram influência no progresso evolutivo dos números no ocidente, pois sua cultura ficou restrita à sua região na América Central e não foi conhecida pelos europeus nos séculos passados. No entanto, para Ifrah (2001, p. 254), os maias além de terem elaborado uma numeração de posição, eles certamente criaram o zero. O fato de a numeração desse povo não ter sido estritamente vigesimal, fez com que este zero perdesse a função de operador aritmético, sendo assim a civilização maia deixou de ser a detentora da criação de um dos marcos da evolução matemática.

De acordo com Ifrah (2001), em meio ao século V d.C., na Índia, os hindus iniciaram o uso de um sistema de numeração eficaz, o qual é o embasamento para o sistema que usamos atualmente. Esses habitantes da Índia traziam em seu histórico uma escrita independente para simbolizar os nove primeiros algarismos do seu agrupamento de números (Figura 11).

No entanto, os sábios hindus sentiam-se limitados com tais representações. Logo, para exprimir os números, eles passaram a usar uma notação por extenso: *eka, dvi, tri, catur, pañca, sat, sapta, asta, nava* que são sinônimos de um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove, nesta ordem (Ifrah, 2001).

Figura 11- Algarismos hindus.



Fonte: (Ifrah, 2001, p. 265)

De acordo com Ifrah (2001), os estudiosos hindus elaboraram uma numeração oral posicional usando a base 10, com leitura das potências na ordem crescente da esquerda para a direita. Com a finalidade de evitar as confusões de leitura quando houvesse ausência de unidades em uma determinada ordem, os hindus usavam a palavra "*sunya"*, a qual tem o significado de vazio (Ifrah, 2001). O Quadro 2 traz a exemplificação da representação oral hindu para os números: 31, 301 e 3000.

Quadro 2 - Representação oral hindu dos números 31, 301 e 3000

Número	**Representação oral posicional hindu**
31	"UM. TRÊS" – [1 + 3x10]
301	"UM. VAZIO. TRÊS" – [1 + 0x10 + 3x100]
3000	"VAZIO. VAZIO. VAZIO. TRÊS" – [0 + 0x10 + 0x100 + 3x1000]

Fonte: Elaboração própria.

No início do século VI d.C., segundo Ifrah (2001), os 9 algarismos hindu passaram a ser usados de forma posicional para a representação numérica. Diante disso, o vazio passou a ser representado por um ponto ou por um pequeno círculo. Inicia-se assim, o surgimento do zero usado nos dias atuais. Os números, nesta ocasião, eram escritos na base 10 obedecendo o sentido decrescente das potências da esquerda para direita (Figura 12).

Posto isto, em conformidade com Berlingoff e Gouvêa (2010), os hindus têm expressiva participação na evolução do sistema de numeração posicional usado nos dias atuais.

Figura 12- Representação hindu número 9100.

Fonte: (IFRAH, 1985, p. 285)

É importante destacar que ao final do século VI d.C., os sábios hindus reconheceram o zero, tendo ele sentido de "nada", assim neste momento com que esse algarismo possa ser expressado como um número. Tal feito foi de suma importância para os matemáticos hindus aprimorarem seus cálculos aritméticos (Ifrah, 1998). Ou seja, os hindus passaram a reconhecer "*sunya*, a ausência de quantidade, como uma quantidade de direito próprio!" (Berlingoff; Gouvêa, 2010, p. 80).

2.2 Indeterminações matemáticas envolvendo o Zero

No âmbito da matemática são reconhecidas sete operações classificadas como indeterminadas, as quais segundo Desanti (2017) são:

$$\frac{0}{0}, 0^0, \frac{\infty}{\infty}, \infty^0, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty - \infty$$

Nesta seção, serão abordadas as duas primeiras indeterminações destacadas acima, sendo elas a divisão de zero por zero e a potência de base zero e expoente zero.

Em um contexto histórico, os matemáticos indianos, no século IX, não consideravam o zero apenas um símbolo indicador de espaço vazio entre outros símbolos. Nesse período o zero já era considerado um número, assim como os outros, sendo usado nos cálculos indianos (Stewart, 2016).

As indeterminações matemáticas são pouco exploradas no Ensino Médio, já que neste período escolar não são apresentadas as noções de cálculo como limites e derivadas (Desanti, 2017). Sendo assim, para abordagem destas indeterminações matemáticas neste capítulo será usado o princípio da divisão dos números reais.

O autor Elon Lages Lima, traz um seu livro "Meu professor de matemática e outras histórias" uma interpretação das indeterminações matemáticas, que ocorrem na divisão do zero por ele mesmo e na potência de base zero com expoente zero, a qual está de acordo com o conhecimento prévio, esperado, do público alvo deste projeto.

Lima (2012) destaca que a explicação para ausência de significado da expressão zero dividido por zero, produz a justificativa para o resultado indeterminado da potência de base zero elevada ao próprio.

Matias (2020) aborda em seu trabalho o fato da não comutatividade da operação de divisão. Sendo assim, ao operar o zero como dividendo e um número, diferente de zero, como divisor obtém-se resultado nulo. No entanto, ao expor o zero na função de divisor, obtém-se uma impossibilidade na resposta.

A fim de indicar o porquê do resultado "impossível" destacado anteriormente, Lima (2012), indica uma mostração a partir da definição da divisão, tal qual é:

$$\frac{a}{b} = c \Rightarrow c \times b = a$$

Diante desta característica matemática, Lima (2012) e Stewart (2016) sugerem que se pense no dividendo sendo 1 e o divisor o 0. Segue abaixo a representação desta operação no formato fracionário:

$\frac{1}{0} = x$, sendo o valor de x um número qualquer.

Logo neste caso tem-se que, $x \times 0 = 1$.

A partir do resultado exposto acima, ambos os autores, Lima (2012) e Stewart (2016) indicam a inexistência de valor para a incógnita x que satisfaça a operação, já que o produto entre um número qualquer e zero resulta em 0.

$x \times 0 = 0$, assim como $0 \times x = 0$, respeitando a propriedade comutativa da multiplicação.

Sendo assim, os autores mostram que o resultado da divisão $\frac{1}{0}$ é impossível. Logo, ao efetuar $\frac{n}{0}$, sendo $n \neq 0$, obtém-se uma impossibilidade.

Tratando-se da divisão em que 0 é o dividendo e divisor, Lima (2012) indica que este resultado é um indeterminação, a qual também pode ser comprovada diante da definição de divisão apresentada anteriormente. Logo, tem-se que:

$\frac{0}{0} = y$, sendo o valor de y um número qualquer.

A partir da definição de divisão, indica-se que $0 = y \times 0$.

Lima (2012) indica que o resultado obtido acima é válido para qualquer valor numérico atribuído a incógnita y, justificando assim classificar $\frac{0}{0}$ como uma indeterminação matemática.

Este mesmo autor, também discorre sobre a indeterminação 0^0 apontando que a explicação para este caso é análoga ao exposto anteriormente. Lima (2012) destaca inicialmente a propriedade da divisão de potências de mesma base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Considera-se então que $m = n$, assim como $a^n = a^m = b$, diante disto pode-se afirmar que:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow \frac{b}{b} = b^0 \Rightarrow 1 = b^0, \text{ sendo } b \neq 0.$$

Em caso de $b = 0$, Lima (2012) faz a seguinte observação para provar a indeterminação que será gerada:

$\frac{b}{b} = b^0 \Rightarrow \frac{0}{0} = 0^0$. Como mostrado anteriormente, o resultado para $\frac{0}{0}$ é indeterminado. Posto isto, afirma-se que o resultado 0^0 também será indeterminado.

É importante ressaltar que Lima (2012) corrobora com Dessanti (2017) ao indicar que as indeterminações expostas acima possuem explicações aprofundadas provenientes da teoria dos limites.

2.3 Obstáculos Epistemológicos

Ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento científico, verifica-se o surgimento de falhas e conflitos causadores de uma estagnação no progresso da aprendizagem. Tais perturbações são qualificadas como obstáculos epistemológicos (Igliori, 2008). Segundo Silva (2022), estes obstáculos manifestam-se quando um indivíduo dispõe de um conhecimento, o qual ao ser empregado em um contexto de forma errônea torna-se uma barreira à formação do saber.

O precursor dos estudos que envolvem a noção de um obstáculo epistemológico na formação do pensamento científico é o epistemólogo Gaston Bachelard (Igliori, 2008). De acordo com Bachelard (1996, p.19), "um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado". O autor ressalta que com o passar do tempo, alguns hábitos intelectuais podem causar um bloqueio no andamento da pesquisa científica. Sendo assim, há a possibilidade do indivíduo acreditar saber um conceito e este acarretar o bloqueio do conhecimento válido (Bachelard, 1996).

Bachelard (1996) discorre em sua obra, "A formação do espírito científico", sobre onze obstáculos epistemológicos Neste trabalho será dado destaque aos obstáculos da experiência primeira, o obstáculo generalista e o obstáculo verbal, visto que os mesmos possuem correlação com os obstáculos associados às indeterminações matemáticas envolvendo o zero nas operações de divisão e potenciação.

Conforme Bachelard (1996),o **obstáculo da experiência primeira** surge quando o indivíduo toma o conhecimento primário como verdadeiro, recusando o desenvolvimento de novas ideias que exprimem contradição ao que é conhecido. A observação primeira está interligada a opinião formada a partir do senso comum, que se apresenta de um modo fácil e pitoresco.

Bachelard (1996) usa as experiências realizadas em uma aula de química para ilustrar o obstáculo da primeira experiência. Os alunos tendem a observar as reações químicas apresentadas e não as questionam. Eles aceitam a ideia visual que lhes é apresentada, sem contestar sobre o que de fato ocorre por detrás daquelas experimentações. “Não é pois de admirar que o primeiro conhecimento objetivo seja um primeiro erro.” (Bachelard, 1996, p.68).

Já o **obstáculo generalista ou do conhecimento geral**, ocorre quando os conceitos são generalizados, deixando assim de observar as particularidades. A busca exagerada pela generalização das situações pode acarretar em uma disseminação de uma generalidade equivocada (Bachelard, 1996). "Há de fato um perigoso prazer intelectual na generalização apressada e fácil. A psicanálise do conhecimento objetivo deve examinar com cuidado todas as seduções da facilidade." (Bachelard, 1996, p.69).

Igliori (2008, p.129) destaca um obstáculo na generalização que traz a "concepção de que multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui". Deste modo, o conjunto dos números naturais torna-se um obstáculo epistemológico em relação a aprendizagem do conjunto dos números racionais (Artige, 1990 *apud* Igliori, 2008).

O **obstáculo verbal,** de acordo com Bachelard (1996), se dá por meio das adaptações, usando palavras elucidativas, feitas para explicar uma ideia. Tais adaptações podem acarretar uma falsa interpretação do conhecimento. O obstáculo verbal é posto como um dos mais difíceis de se superar. É válido o uso de analogias para facilitar a compreensão. Porém este meio explicativo é perigoso para a formação do espírito científico, já que as metáforas nem sempre são passageiras. (Bachelard, 1996).

Para Igliori (2008), o obstáculo epistemológico caracteriza um dos fatores que promove a dificuldade de aprendizagem matemática. Segundo Bachelard (1996), a história da matemática é regular, não tendo em seu histórico períodos de erro. Deste modo, nas pesquisas de Bachelard não são destacados obstáculos relacionados à matemática. No entanto, em 1976, Guy Brousseau introduziu nos estudos de Educação Matemática a noção de obstáculos epistemológicos (Igliori, 2008).

Brousseau (2008) afirma que algumas concepções matemáticas quando adquiridas são resistentes ao surgimento de novas concepções. Segundo o autor, os conhecimentos anteriores precisam ser reorganizados, possibilitando assim a aprendizagem do novo. Deste modo, um conhecimento pode tornar-se um obstáculo, ocasionando assim erros no processo de ensino. Paias (2019) corrobora com as ideias de Brousseau ao afirmar que:

> No caso da Matemática, os obstáculos aparecem com maior frequência na fase de aprendizagem. Durante esta etapa, os obstáculos podem intervir no fenômeno cognitivo. Ao começar a ter contato com um novo conceito, o aluno deve passar por rupturas do saber cotidiano acontecendo , assim, uma revolução interna que leva o aluno a passar do antigo conhecimento para o novo (Paias, 2019, p. 204).

Compreende-se então o obstáculo como um saber mal adaptado, sendo assim destaca-se a importância de análise dos erros recorrentes e não aleatórios cometidos por alunos (Igliori, 2008). A noção de obstáculo epistemológico deve ser usada tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico, quanto na prática educacional (Bachelard, 1996).

Voltando-se para a educação matemática, Paias (2019) enfatiza um processo de três etapas, desenvolvido por Brousseau, para identificação de obstáculos. (1) Deve-se encontrar os erros sistemáticos e observar em quais concepções estes se agrupam. (2) Analisar a história da Matemática para encontrar os obstáculos. (3) Fazer a comparação entre os obstáculos históricos e os obstáculos didáticos.

Segundo Silva (2022) o significado do número zero, assim como suas propriedades perante as operações podem acarretar em um obstáculo epistemológico, quando mal compreendidos.

O processo que ocorreu para a introdução do zero, como número foi um acontecimento histórico marcado por obstáculos (Igliori, 2008). Alguns alunos compreendem o zero como "nada". Sendo assim, na operação de potenciação, ignoram a existência deste número como expoente de uma potência. Logo, ao ser questionado sobre qual resultado de uma potência com expoente zero, o aluno tende a responder que a solução é a própria base (Paias, 2019).

Paias (2019, p. 233) revela que "ao considerarmos o estudo epistemológico sobre o objeto matemático potência, observamos que o expoente zero surgiu apenas no século XV com Chuquet [...]", deste modo há um obstáculo instaurado que envolve o zero na operação de potenciação.

Tratando-se do zero na operação de divisão, Silva (2022) alega que os matemáticos hindus tiveram resultados precisos em relação às operações que envolvem o zero. Porém, por meio de uma generalização dos resultados, consideraram que a divisão $0 \div 0 = 0$.

Conforme afirma Bachelard (1996), no estudo da epistemologia, uma interpretação errônea em determinada época da história, gera um pensamento contrário ao correto, gerando assim um obstáculo.

Silva (2022) enfatiza que no contexto da educação básica é possível notar que diante dos quocientes $0 \div 0$ e $x \div 0$ (sendo $x \neq 0$) há um obstáculo, que surge quando as regras da operação de divisão são apresentadas aos alunos de forma generalizada, sem indicar seus porquês.

De acordo com Brousseau (2008), um obstáculo epistemológico não desaparece a partir do momento em que se aprende um novo conhecimento. De maneira oposta, o obstáculo tende a retardar a compreensão do novo fundamento apresentado. É importante destacar que não se deve ignorar um obstáculo, eles devem ser expostos a contraexemplos de modo que sejam refutados (Brousseau, 2008).

2.4 Trabalhos Relacionados

Com o intuito de explorar os trabalhos publicados, os quais possuem a temática relacionada com a proposta deste trabalho, foi realizada uma pesquisa no Google Acadêmico no dia 10 de fevereiro de 2023. As palavras chaves utilizadas foram: "zero" AND "indeterminações" AND "divisão por zero". Foram retornados 122 trabalhos, assim sendo para refinar a pesquisa, filtrou-se os trabalhos escritos na língua portuguesa e publicados no período de 2016-2023. Logo, obteve-se uma amostragem de 66 trabalhos.

Baseado na leitura dos títulos e resumos, foram selecionados 3 trabalhos, sendo estes artigos. Diante disto, foi feita uma busca no Google usando o nome dos autores de cada artigo: Rogério Starich Silva e José Lucas Matias de Eça. A finalidade desta foi de encontrar os trabalhos que deram origem a tais artigos.

Ressalta-se que, 2 destes trabalhos encontrados são do mesmo autor. É importante destacar que para ter acesso ao trabalho que deu origem aos artigos do José Lucas Matias de Eça, foi necessário fazer contato com o mesmo via email. Este autor demonstrou-se solícito e no dia 17 de fevereiro nos enviou seu Trabalho de Conclusão de Curso. O Quadro 3 indica os títulos dos artigos e os trabalhos nos quais foram embasados.

Quadro 3 - Artigos e trabalhos de origem

Artigo	Trabalho de origem
“A formação inicial e os conceitos sobre dois temas controversos na prática do professor de matemática; indeterminação e divisão por zero” Autor: Rogério Starich Silva	Tese de mestrado “Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática” Autor: Rogério Starich Silva
“Os diferentes olhares sobre o zero por licenciandos em Matemática” Autor: José Lucas Matias Eça	Trabalho de Conclusão de Curso “A compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero” Autor: José Lucas Matias Eça
“Restrições aritméticas na multiplicação e na divisão envolvendo zero: reflexões sobre conhecimentos de licenciandos em matemática” Autor: José Lucas Matias de Eça	Trabalho de Conclusão de Curso “A compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero” Autor: José Lucas Matias Eça

Fonte: Elaboração própria.

No dia 01 de março de 2023 uma nova busca foi feita no Google Acadêmico, utilizando as seguintes *strings*: "zero"AND "potenciação"AND "indeterminação". Esta pesquisa resultou em 206 trabalhos. Este quantitativo foi reduzido para 72, utilizando filtros que restringiram o resultado a trabalhos na língua portuguesa e publicados no período entre 2018-2023.

Por meio da leitura dos títulos e dos resumos apresentados nesta nova investigação, selecionou-se um trabalho, intitulado "A indeterminação zero elevado a zero: saberes disciplinares e pedagógicos na formação inicial de professores de matemática", autoria de Fabio Antunes Brun de Campos. Este trabalho é um artigo publicado na Revista Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo.

É de relevância salientar que nos dias 10 de fevereiro e 01 de março também foram realizadas pesquisas no catálogo de teses e dissertações da CAPES e no portal de periódicos da CAPES, usando as mesmas palavras chaves destacadas anteriormente. Estas buscas não foram satisfatórias. Sendo assim, fica notório a dificuldade em encontrar trabalhos, como teses e dissertações, com temáticas semelhantes ao tema deste projeto.

A seguir serão comentados os trabalhos relacionados selecionados, estes serão apresentados nesta ordem: “Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática", "A compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero" e "A indeterminação zero elevado a zero: saberes disciplinares e pedagógicos na formação inicial de professores de matemática".

2.4.1 Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática.

Esta é uma dissertação, desenvolvida por Rogério Starich Silva e orientada por Maria Aparecida Roseane Ramos, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

A pesquisa foi feita com 55 estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) - Campus Mucuri, de períodos distintos, com o intuito de detectar como os problemas em relação aos conceitos dos números, juntamente com as operações que os envolvem, se fazem presentes na formação inicial de professores, assim como observar os efeitos dessa deficiência conceitual.

Para coletar os dados necessários para pesquisa, a autora aplicou um questionário situacional, traçando assim o perfil de cada participante e um teste de dez questões abertas, envolvendo a matemática básica com números e operações. Os resultados obtidos foram analisados de forma qualitativa e quantitativa.

Dentre as dez questões do teste, que foi aplicado aos estudantes, duas são pertinentes à temática disposta neste projeto. A questão 1 aborda os saberes do aluno a respeito da indeterminação matemática 0^0. A expectativa é que o aluno reconheça que diante das regras de potenciação existe uma exceção, no qual é identificada uma indeterminação.

Já a questão 2 analisa o conhecimento do estudante em relação a divisão de um número por zero, espera-se que o aluno saiba que esta é uma operação impossível de ser realizada e explique o porquê matematicamente. Ressalta-se, que esta etapa do teste deu origem ao artigo desta autor anteriormente citado neste trabalho.

Ao analisar as respostas das questões apontadas acima, Silva (2015) detectou que há uma dificuldade no que tange aos conhecimentos dos licenciandos em relação a operação 0^0. Eles sabem que esta potência não resulta em 1 ou em 0, no entanto não o reconhecem como uma indeterminação matemática.

A respeito da divisão por zero, a autora constatou que os alunos não possuem argumentos matemáticos formais para exprimir a impossibilidade desta operação. As considerações acerca das oito questões restantes do teste, mostram que os futuros professores entrevistados carecem de maior domínio conceitual no que compete a operações da matemática básica.

A dissertação de Silva (2015) equipara-se a este trabalho no que diz respeito à investigação dos saberes dos professores em formação em relação às operações matemáticas básicas, englobando os porquês matemáticos destas. Todavia, o enfoque deste projeto são as operações de potenciação e divisão envolvendo o zero. Os trabalhos também se diferenciam na escolha do público a ser entrevistado, no qual Silva (2015) optou por alunos de Licenciatura em Matemática, enquanto a presente pesquisa elegeu os alunos do curso de formação de professor a nível médio.

2.4.2. A compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero.

Esta pesquisa é um trabalho de conclusão de curso, da licenciatura em matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB, de autoria de José Lucas de Eça sob orientação de Anderon Melhor Miranda.

O objetivo deste trabalho é, através de uma pesquisa de caráter qualitativo, investigar qual é a compreensão dos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática sobre o número zero. Para tal propósito, foram feitas entrevistas semiestruturadas, a qual permite que o entrevistador tenha liberdade para fazer adaptações necessárias ao longo da conversa.

Eça (2014) indica que por meio do diálogo a interação com o entrevistado é mais fluida, o que não aconteceria usando um questionário. O instrumento utilizado para coleta de dados foi um gravador. Os participantes desta pesquisa foram 6 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB. O pré-requisito para participação do estudo foi estar nos anos finais do curso, a partir do sexto período.

Para a análise dos dados coletados foram estipuladas 4 categorias, as quais serão listadas a seguir:

i) A compreensão de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática sobre o zero no âmbito acadêmico.

ii) A compreensão dos estudantes sobre o zero no livro didático.

iii) A compreensão dos estudantes do zero correlacionado a nada.

iv) A compreensão dos estudantes sobre o zero matemático

- ➔ O zero pertence ou não ao conjunto dos números naturais;
- ➔ O zero é um número par ou não;
- ➔ O zero como valor absoluto;
- ➔ O zero como valor posicional;
- ➔ O zero como origem;
- ➔ O zero como dado operatório.

Baseado na primeira categoria acima "A compreensão de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática sobre o zero no âmbito acadêmico" e na subcategoria "O zero como dado operatório", Eça (2014) publicou os artigos que foram relatados anteriormente neste projeto.

Eça (2014) concluiu que os licenciandos em matemática não possuem compreensão total dos diferentes sentidos do zero. Destaca-se que ao longo da pesquisa, detectou-se a dificuldade que os estudantes têm em operar com o número zero. Assim, o autor reservou um tópico em seu trabalho direcionado a abordagem das operações de potenciação, divisão e multiplicação envolvendo este número.

O trabalho de Eça (2014) assemelha-se com a presente pesquisa no âmbito de abordagem das operações de multiplicação e potenciação envolvendo o zero. Além disto, ambas as pesquisas são de cunho qualitativo, porém Eça (2014) trabalhou com entrevistas gravadas, enquanto neste projeto a coleta de dados será por meio de questionário e entrevista em grupo. Os trabalhos também se diferenciam no que tange às diversas questões envolvendo o zero abordado pelo autor, além dos problemas aritméticos. Haja vista que este projeto tratará apenas das indeterminações envolvendo o zero na potenciação e divisão.

2.4.3 A indeterminação zero elevado a zero: saberes disciplinares e pedagógicos na formação inicial de professores de matemática.

Este trabalho é um artigo escrito por Fábio Antunes Brun de Campos e publicado na Revista Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo. O trabalho originou-se a partir de uma atividade elaborada pelo autor, na qual os alunos, do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Mato Grosso - Unemat, deveriam elaborar um material didático que abordasse algum conceito de matemática básica.

Diante desta proposta, um grupo composto por 4 acadêmicos elaborou um vídeo sobre Potência. Estes estudantes foram levados ter a reflexões referentes a indeterminação matemática 0^0. Diante disto, o artigo busca entender a relação desse grupo de alunos com a potência "zero elevado a zero", verificando quais os conhecimentos desses quatro acadêmicos ao se tratar desta indeterminação.

A pesquisa se caracteriza por um caráter qualitativo, sendo a coleta de dados feita a partir das interações entre o professor e os alunos via Whatsapp e em sala de aula. Também foi aplicado um questionário a esses estudantes após concluírem a atividade proposta.

A questão que aguçou a inquietação do professor relacionado a este grupo de quatro alunos, foi a fala destes indicando que todo número elevado a zero resulta em um. Campos (2020) reforça a ideia de que as indeterminações matemáticas são encontradas no currículo da educação básica e devem fazer parte dos saberes dos professores de matemática. A falta de conhecimento sobre tal tema faz com que este assunto não seja repassado de forma correta aos alunos.

O autor concluiu a partir de sua investigação que a carência de saberes disciplinares por parte dos professores acarreta abismos no conhecimento matemático dos alunos, o que justifica o fato de muitos estudantes compreenderem que 0^0resulta em 1, ao invés de identificarem nesta potência uma indeterminação.

Em seu artigo, Campos (2015) observa e analisa os saberes disciplinares de futuros professores, o que se assemelha ao que será feito nesta pesquisa. Em contrapartida, o público que foi usado como objeto de estudo foram estudantes de Licenciatura em Matemática, já neste projeto serão observados alunos no curso de formação de professores a nível médio.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Caracterização da pesquisa

Nesta seção serão apresentados os caminhos metodológicos que serão utilizados neste trabalho. Logo, aqui serão descritos o tipo de pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, o público alvo e as etapas desta pesquisa.

Com a finalidade de contextualizar esta seção, retoma-se o objetivo deste trabalho que é analisar as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no âmbito do Ensino Fundamental.

O público alvo ao qual esta pesquisa direciona-se, são os alunos do 3.º ano do Ensino Médio do curso Normal Médio - Formação de Professores de um Instituto Superior de Educação em Campos dos Goytacazes.

Esta pesquisa será classificada como de caráter qualitativo paralelamente com uma intervenção pedagógica. Segundo Silveira e Córdova (2009, p.31), "A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.".

Damiani *et al*. (2013) indicam que pesquisas do tipo intervenção pedagógica são utilizadas com o intuito de aplicação, para assim contribuir com uma possível solução de um problema prático. Damiani *et al.* (2013) definem a intervenção pedagógica do seguinte modo:

> [...] são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências. (Damiani *et al.,* 2013, p. 58)

Para coletar os dados necessários para o desenvolvimento da pesquisa, em um primeiro contato com os participantes, será aplicado um questionário formado de perguntas fechadas e abertas, com intuito de identificar a percepção e conhecimento dos alunos em relação à temática abordada na pesquisa.

No segundo contato, será realizada uma oficina pedagógica, a fim de explanar sobre as indeterminações matemáticas que envolvem o zero nas operações de divisão e potenciação, mostrando que estas podem ser abordadas no Ensino Fundamental. Ao final, desta oficina será realizada uma entrevista em grupo buscando captar a percepção dos participantes em relação ao que foi apresentado.

Ressalta-se que o questionário é uma "técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com propósito de obter informações sobre conhecimentos [...]" (Gil, 2021, p. 12).

Este mesmo autor, Gil (2021), destaca que nas questões abertas de um questionário, são solicitadas que os participantes respondam usando suas próprias palavras, enquanto nas questões fechadas são expostas alternativas, dentre as quais os respondentes devem escolher uma.

A entrevista consiste em uma técnica para coletas de informações, "é uma técnica de interação social, uma forma de diálogo assimétrico, em que uma das partes busca dados, e a outra se apresenta como fonte de informação" (Gerhardt *et. al*, 2009, p.72).

Para Gil (2002), a entrevista apresenta um caráter flexível e pode assumir vários formatos. Esta característica é indicada por Gerhardt *et. al*, 2009 como um ponto positivo, já que o entrevistador tem a possibilidade de se adaptar às circunstâncias que se desenvolvem ao longo do processo.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a entrevista em grupo em razão do quantitativo de alunos ser reduzido, proporcionando a estes um ambiente mais confortável e acolhedor para expor suas opiniões. Neste formato, "pequenos grupos de entrevistados respondem simultaneamente às questões, de maneira informal" (Gerhardt *et. al*, 2009, p.72). Os autores Gil (2002) e Gerhardt *et. al* (2009) partilham da ideia que indica que a entrevista deve ter um roteiro, o qual não precisa ser usado na ordem da disposição das perguntas, porém este serve para nortear a conversa.

Esta pesquisa foi dividida nas seguintes etapas: i) Revisão bibliográfica; ii) elaboração do questionário; iii) teste exploratório referente ao questionário; iv) aplicação do questionário; v) elaboração da oficina pedagógica; vi) teste exploratório referente a oficina; vii) aplicação da oficina pedagógica; viii) análise dos dados coletados; ix) escrita das considerações finais e; x) defesa da monografia.

3.2 Elaboração do Questionário

Na primeira etapa desta pesquisa, foi elaborado um questionário com a finalidade de coletar dados relativos aos conhecimentos prévios do público alvo em relação à temática abordada no presente trabalho. Tal instrumento divide-se em duas secções, as quais serão descritas a seguir.

I. Primeira secção do questionário

A primeira parte do questionário é formada por 10 questões fechadas. O Quadro 4 exibe o questionamento feito em cada item, juntamente com as opções oferecidas para respostas. Na terceira coluna, desse quadro, destacam-se os objetivos que nortearam a elaboração de cada questão conforme o propósito desta pesquisa.

Quadro 4 - Parte 1 do questionário

Questionamento	Opções de resposta	Objetivo
1. Qual sua relação com a matemática?	( ) Gosto de matemática. ( ) Não gosto de matemática. ( ) É indiferente.	Observar a afeição que o participante tem com a disciplina de matemática, já que este irá lecionar conteúdos matemáticos nos anos iniciais do EF.
2. Usando uma escala de 0 a 5, onde 0 representa nenhuma dificuldade e 5 representa extrema dificuldade, como você classificaria sua dificuldade em Matemática?	( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5	Identificar como o participante classifica sua dificuldade em matemática. Levando em consideração, que este é um professor em formação, o qual irá lecionar a disciplina de matemática nos anos iniciais do EF.
3. Você conhece a história da origem do número zero?	( ) Conheço. ( ) Já ouvi falar, mas não sei narrá-la. ( ) Não conheço.	Identificar se o participante já teve contato com a história do zero em algum momento da sua trajetória escolar ou fora dela.
4. Qual o resultado da seguinte divisão $0 \div 2$?	( ) 2 ( ) 1 ( ) 0 ( ) Impossível de se obter.	Identificar o conhecimento do participante no que tange a divisão envolvendo o zero como dividendo, sendo o divisor um número não nulo.

		Espera-se que o participante encontre zero como resposta para esta operação.
5. Qual o resultado da seguinte divisão 4 ÷ 0	( ) 4 ( ) 0 ( ) 1 ( ) Impossível de se obter.	Detectar se o participante tem o conhecimento que é impossível de se obter resultado quando a operação de divisão possui o dividendo sendo um número não nulo e o divisor zero.
6. Qual o resultado da seguinte divisão 0 ÷ 0	( ) 0 ( ) 1 ( ) Impossível de se obter. ( ) Indeterminado.	Identificar se o participante reconhece a indeterminação matemática que ocorre no processo de divisão do número zero, por ele próprio.
7. Qual o resultado da seguinte potência 5^0?	( ) 5 ( ) 0 ( ) 1 ( ) Indeterminado	Identificar se o participante admite o número 1 como resultado da potência de base não nula e expoente zero.
8. Qual o resultado da seguinte potência 0^5?	( ) 0 ( ) 1 ( ) 5 ( ) Indeterminado	Observar se o participante compreende que 0 é o resultado de uma potência de base 0 e expoente positivo.
9. Qual o resultado da seguinte potência 0^{-2}?	( ) 0 ( ) -2 ( ) Impossível de se obter ( ) Indeterminado	Identificar se o participante reconhece a impossibilidade de efetuar a operação de potenciação quando a base for nula e o expoente negativo.
10. Qual resultado da seguinte potência 0^0?	( ) 0 ( ) 1 ( ) Impossível de se obter ( ) Indeterminado	Observar se o participante reconhece a indeterminação matemática gerada a partir da potência de base zero e expoente zero.

Fonte: Elaboração própria

II. Segunda secção do questionário

A segunda parte do questionário é composta por 3 questões, sendo estas abertas e fechadas. A primeira questão aberta subdivide-se em dois itens. No item A (Figura 13) tem-se a intenção de identificar se os alunos são capazes de explicar, por meio de texto, ilustração/desenho ou exemplos numéricos, o porquê ocorre uma mensagem de erro ao digitar $5 \div 0$ na calculadora.

Espera-se que eles respondam que o motivo da mensagem de erro é devido à impossibilidade de se obter solução para a operação de divisão digitada. Além disso, é esperado que uma justificativa matemática seja dada para este caso da operação de divisão.

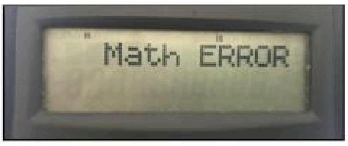
Figura 13 - Primeira questão, item A

QUESTÃO 1

1. A) Durante uma aula de matemática do 5.° ano do Ensino Fundamental, o professor Gepetto distribui calculadoras para seus alunos, com a finalidade de ensiná-los a manusear a máquina e utilizá-la para resolver operações básicas.
Um dos alunos insere na calculadora a seguinte operação de divisão:

$$5 \div 0$$

Após apertar a tecla $=$, uma mensagem "*Math ERROR*" (**ERRO de Matemática**) aparece no *display* da calculadora:



Como o professor Gepetto poderia explicar ao aluno a mensagem de erro no *display*?

Fonte: Elaboração própria

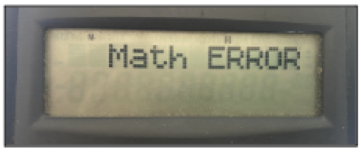
O item B da primeira questão (Figura 14) tem a finalidade de investigar se o aluno tem conhecimentos para explicar o motivo da aparição de uma mensagem de erro na calculadora, na tentativa de efetuar a divisão $0 \div 0$. Logo, é requerido que por meio de um texto, exemplos numéricos ou ilustrações, o estudante esboce sua interpretação para esclarecer a mensagem "Math ERROR" no visor da máquina. Tem-se a expectativa de que os alunos reconheçam a indeterminação matemática e saibam mostrar o porquê da sua ocorrência.

Figura 14 - Primeira questão, item b

1. B) No decorrer da aula, desta mesma turma do 5.° ano, outro aluno insere na calculadora a seguinte operação de divisão:

$$0 \div 0$$

Após apertar a tecla = , uma mensagem "*Math ERROR*" (**ERRO de Matemática),** idêntica à mostrada no item anterior, aparece no *display* da calculadora.



Nesta situação, como o professor Gepetto poderia explicar ao aluno a mensagem de erro no *display*?

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão do questionário, traz em seu enunciado duas afirmações, conforme ilustrado na Figura 15. Os itens que seguem no desenvolvimento da questão, são formados por perguntas fechadas.

O item A tem o intuito de descobrir se o aluno já escutou alguma das afirmações durante as aulas de matemática ao longo do EF e EM. Para resposta apresenta-se quatro opções, sendo estas "nunca ouvi nenhuma das afirmações", "ouvi apenas a afirmação I", "ouvi apenas a afirmação II" e "já ouvi as duas afirmações". O objetivo é apurar se os conceitos de potenciação foram repassados de forma correta para estes alunos.

Figura 15 - Afirmações da questão 2

I.	II.
Todo número elevado a zero é igual a um. Por exemplo:	**Zero elevado a qualquer número é igual a zero. Por exemplo:**
$3^0=1$	$0^2=0$
$\left(\frac{2}{5}\right)^0=1$	$0^5=0$
$100000^0=1$	$0^{100}=0$
$(-5)^0=1$	

Fonte: Elaboração própria.

O item B (Figura 16) tem como propósito averiguar se o aluno concorda com a afirmação I - "todo número elevado a zero é igual a um". Espera-se que o aluno opte pela opção que indica que ele não está de acordo com a afirmação. Tal afirmação é errônea, pois nem todo número elevado a zero resulta em 1. Haja visto que o zero elevado a zero é caracterizado como uma indeterminação matemática.

Figura 16 - Item B, questão 2

2. B) Você concorda com a **afirmação I**?

( ) Sim
( ) Não
( ) Estou em dúvida.

Fonte: Elaboração própria.

Já no item C (Figura 17), o aluno é questionado se ele está em concordância com a afirmação II - “zero elevado a qualquer número é igual a zero”. Espera-se que o estudante, novamente, responda que não concorda com a afirmação feita. Sendo assim, cria–se a expectativa que o aluno reconheça o erro nesta generalização, já que 0^0 é uma indeterminação.

Figura 17 - Item C, questão 2

2. C) Você concorda com a **afirmação II**?

( ) Sim
( ) Não
( ) Estou em dúvida.

Fonte: Elaboração própria.

A última questão do questionário (Figura 18), possui o formato de perguntas abertas e é composta por dois itens. A questão apresenta em seu enunciado uma definição de potenciação, seguida de uma situação que envolve a operação $2^0 = 1$.

Figura 18 - Enunciado questão 3

QUESTÃO 3

Em muitos livros didáticos, o significado de expoente de um número é a quantidade de vezes em que a base aparece se repetindo na multiplicação por si própria.

- "Toda potência de expoente inteiro maior que 1 é igual ao produto de tantos fatores iguais à base quantas forem as unidades do expoente." (IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2018, p. 46)

A professora Elza ao apresentar que $2^0=1$, recebeu os seguintes questionamentos:

I. *"Como que 2 não se repete nenhuma vez e o resultado é igual a 1?"*
II. *"Zero elevado a zero também é igual a 1?"*

Fonte: Elaboração própria.

Segue-se para o item A da questão 3, no qual é perguntado ao aluno “como você explicaria o resultado $2^0 = 1$?”. É indicado que as ideias podem ser expostas por meio de texto, assim como ilustrações e exemplos numéricos. É esperado que os alunos utilizem seus conhecimentos sobre as propriedades que envolvem a potenciação para explicar a ocorrência deste resultado.

Já no item B, é feito o seguinte questionamento “estaria correto afirmar para o aluno que $0^0 = 1$?”. As respostas devem ser justificadas, novamente utilizando texto, exemplos numéricos ou desenhos. Anseia-se que os alunos reconheçam que existe um erro nesta operação, indicando assim que 0^0 é uma indeterminação matemática, podendo utilizar seus conhecimentos de potenciação para explicar tal operação.

3.3 Elaboração da Sequência Didática

A sequência didática descrita a seguir apresenta uma proposta didática que abrange a temática das indeterminações envolvendo o zero na operação de divisão ($0 \div 0$) e potenciação (0^0).

A presente proposta didática é destinada, em especial, a professores em formação do curso Normal Médio - Formação de Professores. Tem-se como principal objetivo a explanação das indeterminações destacadas, de maneira que estas possam ser incorporadas às aulas de matemática do Ensino Fundamental. A sequência está dividida em 2 etapas, conforme descrito no Quadro 5.

Quadro 5 - Etapas, títulos e objetivos

Etapa	Título	Objetivos
I	Zero na operação de divisão	Explanar, por meio de atividades, as particularidades envolvendo o zero perante a operação de divisão: possibilidade e impossibilidade de executar a operação, assim como a indeterminação matemática decorrente da divisão operada com zero.
II	Zero na operação de potenciação	Explicitar a ocorrência da indeterminação matemática envolvendo o zero, diante da operação de potenciação, utilizando propriedades e conceitos da potenciação.

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, será detalhado o desenvolvimento pedagógico de cada uma das etapas descritas acima.

I. Zero na operação de divisão

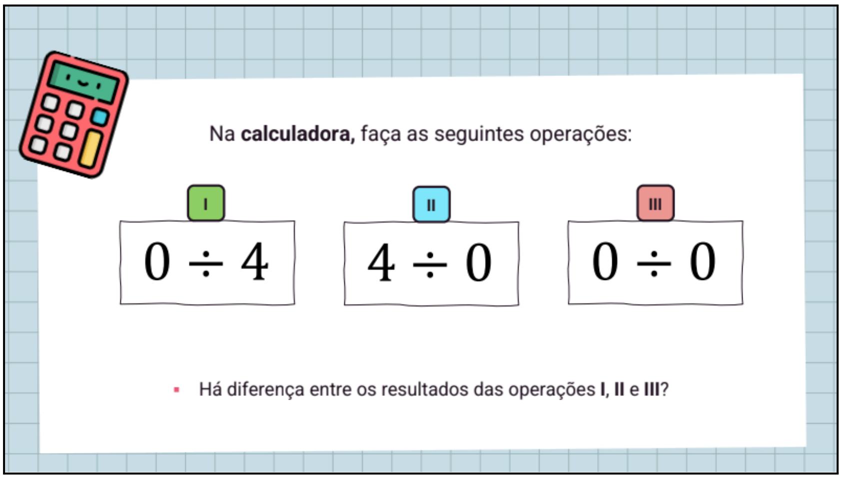
Inicialmente é apresentado aos futuros docentes a importância deste trabalho no que tange à concepção do conhecimento relativo a divisão envolvendo o zero. Posteriormente, de acordo com a BNCC, são apontados os momentos nos quais os alunos dos anos iniciais do EF têm seus primeiros contatos com as operações básicas da matemática, em que se enquadra a operação de divisão.

Ressalta-se que o público-alvo desta pesquisa são os professores em fase de conclusão do curso Normal Médio-Formação de Professores, os quais estarão aptos a lecionar nos anos iniciais do EF após formados.

Em seguida, são apresentadas três operações de divisão que envolvem o zero (Figura 19). Com o auxílio de uma calculadora, é indicado que estes cálculos sejam feitos.

Posteriormente, os resultados indicados no visor da calculadora serão observados e analisados. O propósito desta dinâmica é aguçar a curiosidade dos participantes, pois estes encontrarão uma mensagem de "erro"na calculadora ao efetuar os seguintes cálculos: $4 \div 0$ e $0 \div 0$.

Figura 19 - Operações de divisão iniciais



Fonte: Elaboração própria.

Sequencialmente, são enunciadas duas assertivas importantes para a condução da proposta didática:

- "Dividir zero por um número qualquer não nulo é uma operação possível que resulta em zero";
- "Dividir um número qualquer não nulo por zero é uma operação impossível".

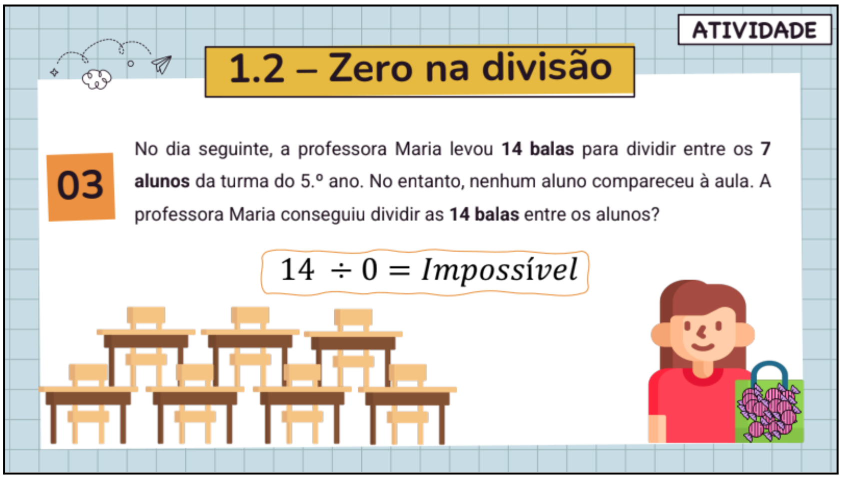
Questiona-se então, o porquê do zero não poder atuar como divisor na operação de divisão. Para explicar indica-se a execução de uma atividade envolvendo situações que se aproximam da vivência dos alunos. São apresentadas três circunstâncias que podem ocorrer dentro de uma sala de aula e abrangem explicações dinâmicas para as assertivas indicadas.

Na primeira situação, uma professora reparte uma quantidade de balas em números iguais entre os indivíduos presentes na classe. Pretende-se descobrir quantas balas cada estudante recebeu, indicando a resolução por meio de desenhos.

No segundo cenário, a professora não possui balas porém ela tem dois alunos para receber os doces. Nesta situação, os dois alunos não receberão as balas, sendo assim pretende-se, por meio do lúdico, explicar que ao dividir zero por um número não nulo, o resultado é zero.

Já na terceira conjectura (Figura 20), a professora possui uma quantidade de balas para dividir igualmente por toda a turma, mas nenhum estudante compareceu à aula. Neste exemplo, o aluno consegue visualizar, por meio da história apresentada, a impossibilidade da divisão entre um número não nulo e zero.

Figura 20 - Situação número 3

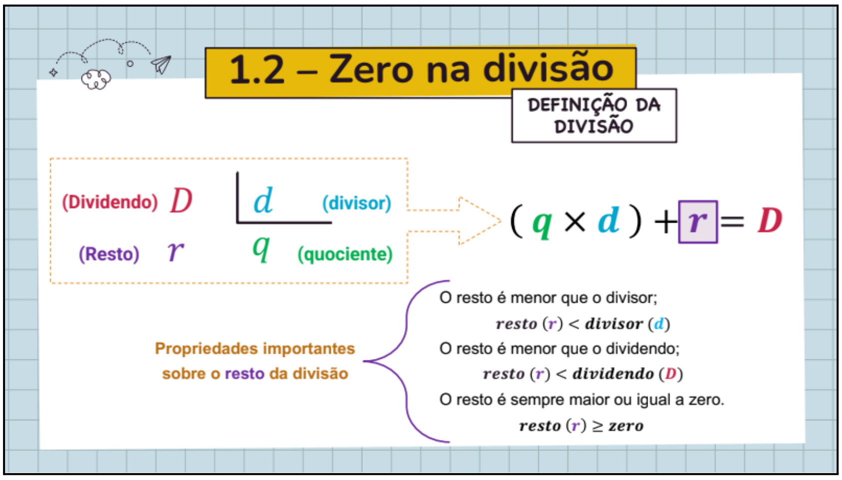


Fonte: Elaboração própria.

A questão do porquê o zero não atuar como divisor na operação de divisão é retomada, porém a explicação para este ponto é feita usando o algoritmo da divisão. Tem-se como objetivo indicar para o público que as explicações, que serão mostradas a seguir, podem ser aplicadas ao longo de todo o EF.

Sendo assim, é realizada uma revisão do algoritmo da divisão (Figura 21), recordando os elementos que o compõem e indicando propriedades do resto da divisão, as quais são consideradas importantes para o desenvolvimento deste trabalho. São feitos dois exemplos numéricos, 10 ÷ 2 e 23 ÷ 3, usando o algoritmo apresentado, com o intuito de fixação do conteúdo.

Figura 21 - Definição da divisão



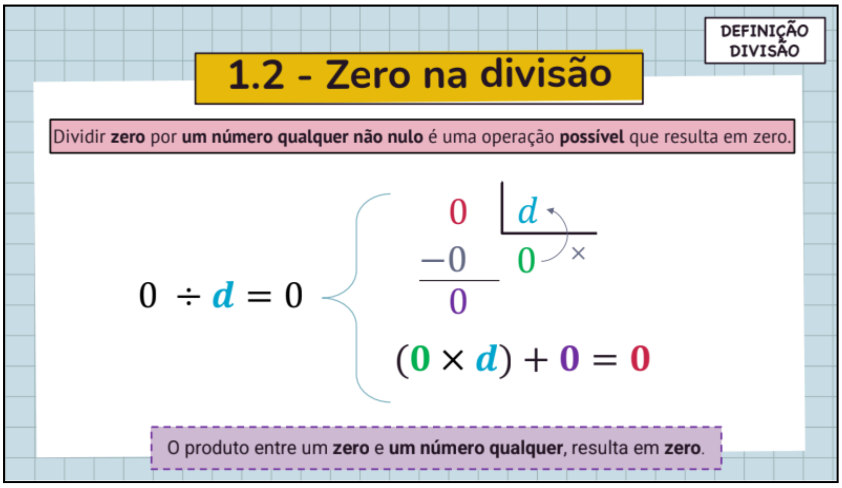
Fonte: Elaboração própria.

Dando continuidade, é feita a seguinte afirmação: "dividir zero por um número qualquer não nulo é uma operação possível que resulta em zero". Inicialmente, são propostas duas operações: $0 \div 5$ e $0 \div 12$. A partir do desenvolvimento destes cálculos, usando a definição da divisão, é possível mostrar o porquê da afirmação anterior ser verdadeira.

Considerando $0 \div 5$, deve-se indagar ao aluno qual o número (quociente) multiplicado por 5 (divisor), tem como resultado o zero (dividendo). Assim, o aluno é direcionado a perceber que o zero é o único número que pode ocupar o espaço do quociente nesta operação.

A mesma dinâmica é utilizada para $0 \div 12$. Os exemplos numéricos são considerados importantes para a visualização e entendimento do aluno. No entanto, a generalização de maneira algébrica também é utilizada, deixando evidente que independente do valor do divisor (não nulo), quando o dividendo for zero o resultado da operação será sempre igual a zero (Figura 22).

Figura 22 - Generalização $0 \div d$



Fonte: Elaboração própria.

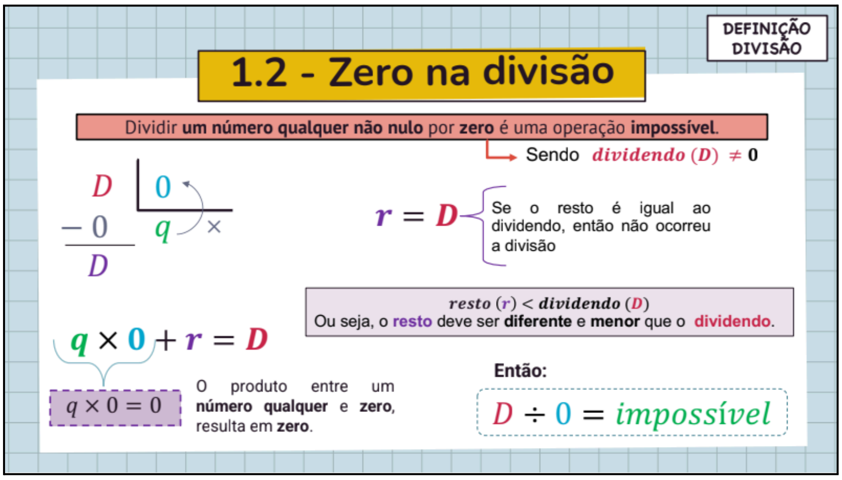
Logo após, afirma-se que "dividir um número qualquer não nulo por zero é uma operação impossível". Novamente, a explicação é iniciada por meio de exemplos numéricos.

O primeiro exemplo utilizado é $2 \div 0$. Usando o algoritmo da divisão é possível mostrar a impossibilidade de efetuar esta operação. O aluno deve ser instigado a descobrir um número (quociente) multiplicado por zero (divisor), resulta em dois (dividendo).

Sabe-se que o produto entre um número qualquer e zero, tem como resultado zero. Logo, qualquer número que ocupe o posto do quociente ao ser multiplicado por zero (divisor) terá resultado diferente de dois (dividendo). Deste modo, esta operação tem como resto o próprio dividendo, o número dois. Isto é contraditório a uma das propriedades do resto da divisão, a qual restringe o resto a ser menor que o dividendo. Sendo assim, fica justificado que 2 ÷ 0 é uma operação impossível de resolver.

O mesmo procedimento é utilizado no desenvolvimento do exemplo 15 ÷ 0, que também caracteriza uma operação impossível. Utiliza-se a generalização algébrica (Figura 23), para indicar que, qualquer que seja o valor, não nulo, especificado para o dividendo, se o divisor é zero a operação classifica-se como impossível de se resolver.

Figura 23 - Generalização D ÷ 0



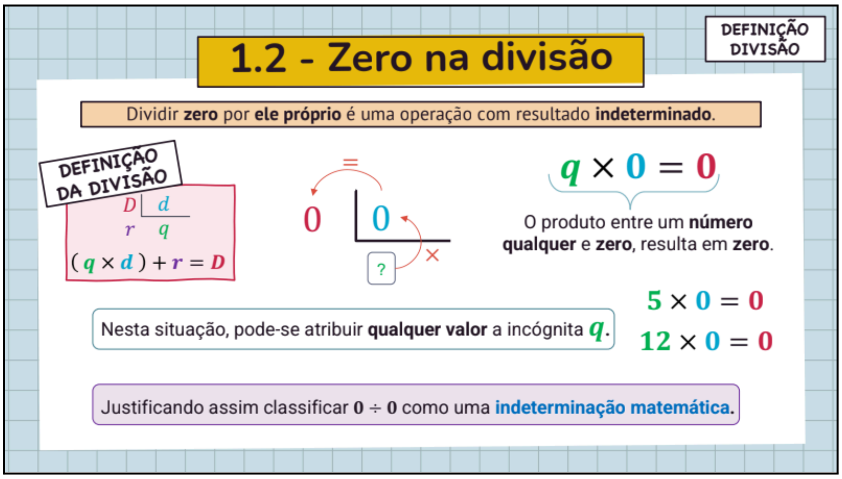
Fonte: Elaboração própria.

A primeira parte da sequência é finalizada com a identificação da indeterminação matemática, ocasionada no processo de divisão. Dessa forma, é afirmado que “dividir zero por ele próprio é uma operação com resultado indeterminado”.

Imediatamente, o porquê dessa indeterminação é exposto novamente por meio da utilização do algoritmo da divisão. É questionado qual número deve ocupar o posto de quociente, de modo que a multiplicação entre este e zero (divisor), resulte em zero (dividendo). Recorda-se que o produto entre um número qualquer e zero, é igual a zero.

Deste modo, fica evidente que qualquer número poderá assumir o posto de quociente desta divisão, ou seja, não é possível determinar um só número. Dito isto, conclui-se que 0 ÷ 0 possui um resultado indeterminado, como foi afirmado inicialmente. Assim sendo, esta operação de divisão é classificada como uma indeterminação matemática.

Figura 24 - Indeterminação matemática



Fonte: Elaboração própria.

Ao final desta etapa, espera-se que os alunos tenham compreensão dos porquês que englobam os resultados das operações de divisão envolvendo o zero, sendo $0 \div x = 0$ ($x \neq 0$) e $y \div 0$ como um resultado um impossível de se obter ($y \neq 0$). Além disso, é esperado que os participantes entendam a justificativa para a classificação da operação $0 \div 0$ como uma indeterminação matemática.

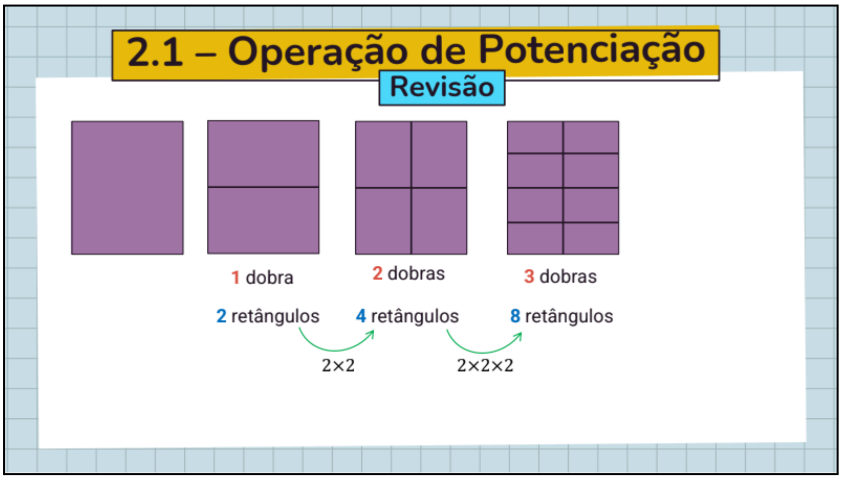
II. Zero na operação de potenciação

A segunda parte da sequência é iniciada, salientando que conforme consta na BNCC o conteúdo de potenciação é introduzido no 6.º ano do EF. Destaca-se que apesar do público alvo ser composto por professores em formação que irão atuar nos anos iniciais do EF, o tópico de potência já foi estudado por eles ao longo dos anos escolares. Além disso, considerando que os participantes da pesquisa irão atuar na área de educação, todo conhecimento adquirido é um bônus na sua formação profissional.

Uma folha A4 é distribuída aos estudantes. Por meio de dobras, feitas nesta folha, é construído de forma dinâmica e concreta a noção de potenciação utilizando a base 2. Os alunos devem dobrar a folha ao meio, inicialmente. O número de retângulos formados a partir desta dobra deve ser observado. Em seguida, é feita uma segunda dobradura, partindo da primeira. Novamente, se faz importante notar quantos retângulos se formam. Por fim, os alunos devem dobrar a folha mais uma vez, executando a terceira dobra e se atentando a formação dos retângulos.

Neste momento, espera-se que os estudantes notem que o número de retângulos, formados diante de cada dobradura, está sendo multiplicado por 2 (Figura 25). É importante questioná-los quantos retângulos se formariam caso uma quarta dobra fosse feita. Espera-se que a resposta seja 16 retângulos.

Figura 25 - Número de retângulos sendo dobrados



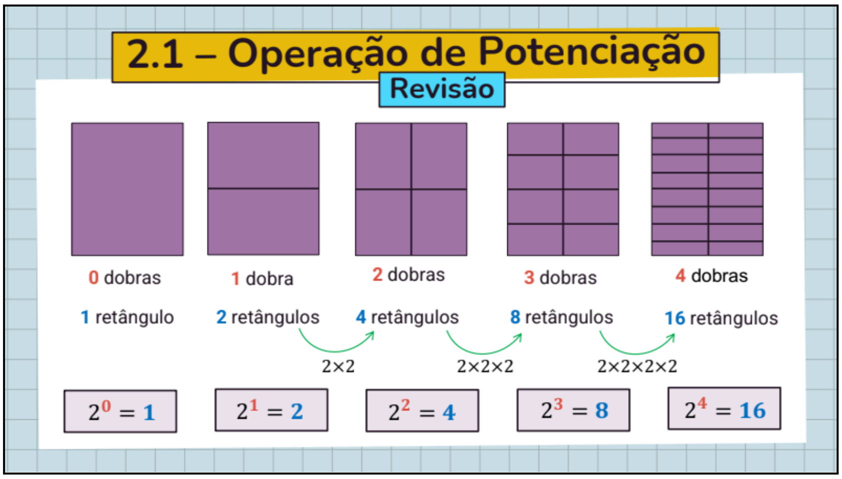
Fonte: Elaboração própria.

Sendo assim, é possível associar a potência de base 2 com o número de dobras e retângulos formados. Ao iniciar a dinâmica dobrando a folha ao meio, os dois retângulos que se formam determinam a base da potência.

Fazendo constantes dobraduras, sempre dividindo ao meio a dobra anterior, obtém-se um produto de fatores 2, no qual o fator repete-se de acordo com o número de dobras feitas. Ou seja, o expoente da potência é determinado pelo número de dobras.

Para análise da potência de base 2 e expoente zero, deve-se retomar a folha A4 sem apresentar dobras. Questiona-se “quando a folha não possuía dobraduras, quantos retângulos tínhamos?”. Espera-se que a resposta seja 1 retângulo. Deste modo, conclui-se que $2^0 = 1$ (Figura 26).

Figura 26 - Dinâmica com folha A4

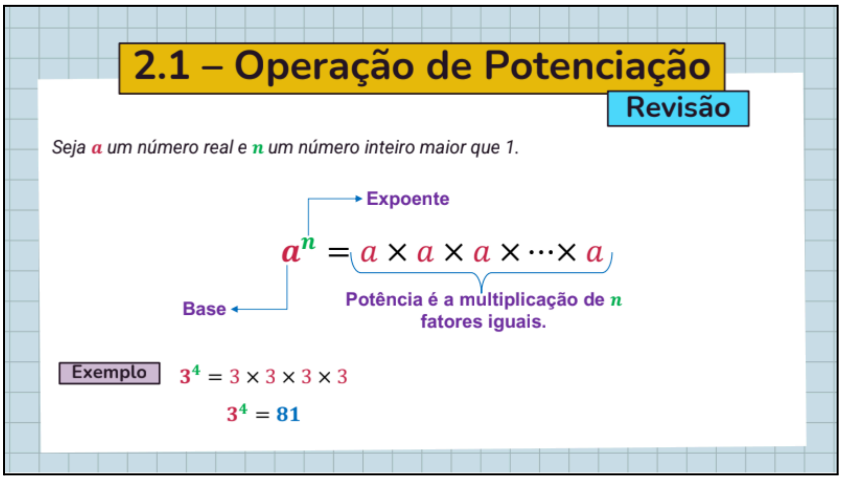


Fonte: Elaboração própria.

Então o conceito de potência, sendo a base um número real e o expoente um número inteiro maior ou igual a 1, é formalizado (Figura 27). Indica-se a realização de um exemplo numérico para melhor visualização e compreensão.

Em seguida, é feita uma revisão na qual são apresentadas duas propriedades da potenciação, sendo estas: $a^1 = a$ (sendo a um número real) e $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$). A partir deste momento, deve-se indagar se os alunos sabem o porquê desta última propriedade apresentada.

Figura 27 - Conceituando potência

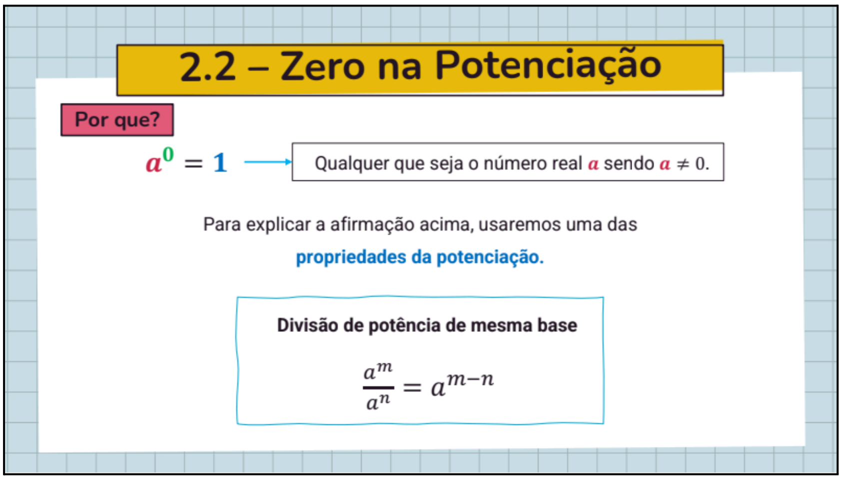


Fonte: Elaboração própria.

Para mostrar a veracidade da afirmação que indica que um número não nulo elevado a zero tem como resultado 1, faz-se necessário recordar a propriedade de divisão de potências de mesma base (Figura 28).

Elucida-se, por meio de um exemplo numérico, o motivo pelo qual esta propriedade é comumente enunciada por “repete-se a base e subtraem-se os expoentes”.

Figura 28 -Enunciado divisão de potências de mesma base

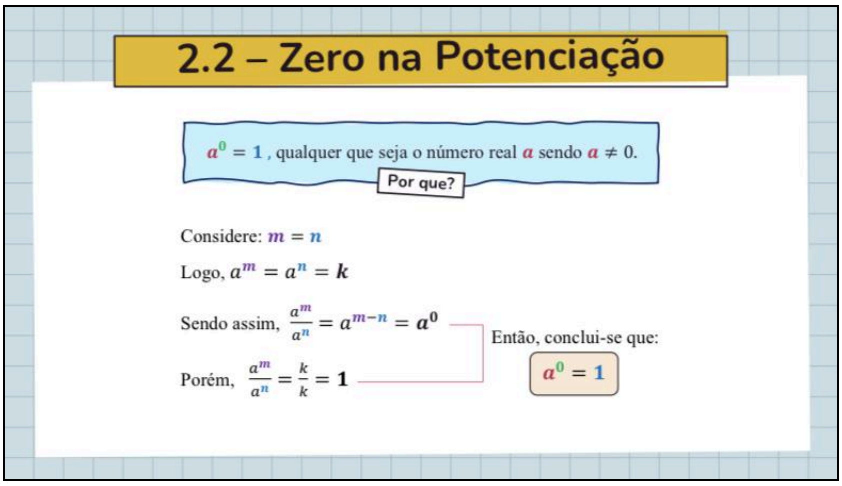


Fonte: Elaboração própria.

Segue-se então para a explicação que comporta o motivo de um número não nulo elevado a zero, resultar em 1. Inicialmente, utiliza-se um exemplo numérico para dar suporte à hipótese.

Indica-se que a divisão $3^4 \div 3^4$ resulta em 1. No entanto, utilizando a divisão de potências de mesma base, também pode-se dizer que esta divisão resulta em 3^0. Logo, conclui-se que $3^0 = 1$. Sendo assim, faz-se a generalização (Figura 29), mostrando que tal propriedade é válida para qualquer base, sendo esta diferente de zero.

Figura 29 - Generalizando $a^0 = 1$



Fonte: Elaboração própria.

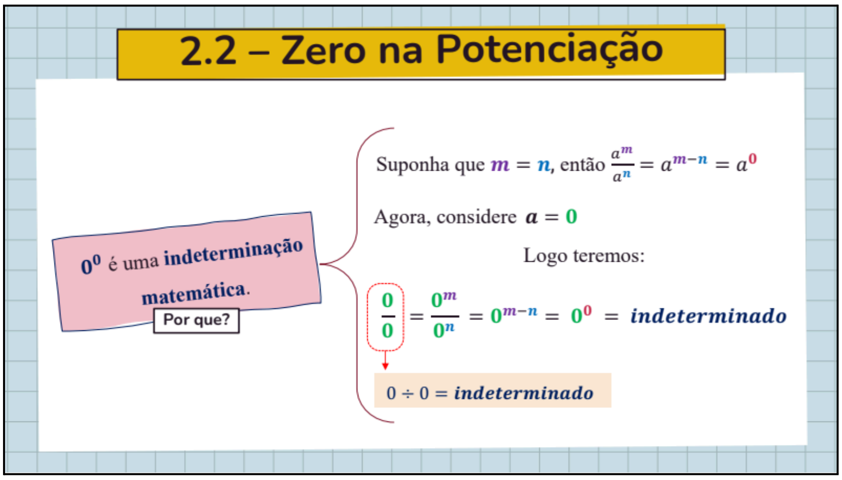
Para a abordagem da indeterminação 0^0, é feita a seguinte indagação "Todo número elevado a zero resulta em 1?". Espera-se obter como resposta que não, atentando-se para a discriminação da base ser diferente de zero. A situação que ocorre da base ser zero com expoente zero, caracteriza-se como uma indeterminação matemática.

A fim de explicar a ocorrência dessa indeterminação, recorre-se a um exemplo numérico. Considera-se a divisão, $\frac{0^5}{0^5}$, enunciada no formato fracionário.

Inicialmente, resolve-se a operação utilizando a propriedade da divisão de potências de mesma base. Assim sendo, a divisão resulta em 0^0. Em um segundo momento, desenvolvendo as potências que compõem o numerador e o denominador, conclui-se que a operação é equivalente a $0 \div 0$ (indeterminação matemática).

Deste modo, utilizando este exemplo, conclui-se que 0^0 é também uma indeterminação. Finaliza-se a sequência, apresentando a explicação anterior de modo generalizado (Figura 30).

Figura 30 - Generalizando 0^0



Fonte: Elaboração própria.

Ao finalizar esta etapa, almeja-se que o participante tenha o conhecimento do comportamento do zero perante a operação de potenciação. Sendo assim, espera-se que os alunos compreendam a justificativa para $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$ e entendam o motivo da ocorrência da indeterminação matemática 0^0.

É importante ressaltar que esta sequência não apresenta informações históricas sobre o número zero, apesar da temática histórica ter sido abordada no questionário aplicado na primeira etapa da pesquisa. Tal fato, decorreu em virtude da extensão desta sequência didática. No entanto, acreditamos na importância da história da matemática para nortear as aulas da disciplina.

4 RESULTADO E DISCUSSÕES

4.1 Questionário

4.1.1 Teste exploratório do Questionário

No dia 5 de abril de 2023 ocorreu o teste exploratório relacionado à primeira etapa desta pesquisa, a qual estrutura-se por meio de um questionário. Ressalta-se que este questionário foi elaborado e aplicado no momento inicial desta pesquisa, haja visto que para o desenvolvimento do trabalho na escola escolhida, foi necessário respeitar o calendário de atividades das escolas estaduais do estado do Rio de Janeiro.

O teste exploratório da primeira etapa da pesquisa contou com a participação de 13 licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense - IFF.

Buscando obter contribuições significativas para o instrumento de coleta de dados, optou-se pela seleção de alunos que estavam cursando a disciplina de Trabalho Conclusão de Curso I ou que cursaram o componente curricular Laboratório de Ensino e Aprendizagem Matemática no semestre 2021.1. O critério adotado se justifica pelo fato dos participantes estarem em fase intermediária do curso de Licenciatura, possuindo relativa experiência com pesquisas, leituras e elaboração de textos científicos.

Os principais objetivos do teste exploratório foram analisar a clareza e o número de questões contidas no questionário, bem como verificar se o tempo destinado à sua aplicação seria suficiente.

Foi solicitado aos participantes que lessem as questões e as respondessem. Caso houvesse sugestões, para melhoria do questionário, estas deveriam ser identificadas no próprio documento. É importante destacar que as respostas obtidas neste momento não serão analisadas.

Para avaliar o tempo de aplicação, inicialmente foi entregue a parte I do questionário, contendo apenas perguntas objetivas. À proporção e, que os participantes finalizaram esta etapa, a parte II do questionário, formada por perguntas discursivas e objetivas, foi entregue. Em relação ao tempo para aplicação do questionário, observou-se que 2 tempos de aula (50 minutos cada) seriam suficientes para o desenvolvimento das questões abordadas.

Ao final do teste exploratório, os participantes não tiveram sugestões de mudanças nas seções do questionário e afirmaram que as questões estavam coerentes com o tema e de fácil compreensão.

4.1.2 Aplicação do questionário

A aplicação do questionário que compõe a primeira etapa desta pesquisa ocorreu no dia 17 de abril de 2023 e contou com a participação de 11 estudantes do 3.º ano do E.M. de um Instituto Superior de Educação, localizado em Campos dos Goytacazes.

Os participantes encontravam-se na sala de aula correspondente à turma, dispostos em fileiras e assim permaneceram durante a aplicação. Neste primeiro contato, a autora conversou com os alunos explicando-lhes a proposta da pesquisa a ser realizada. Foi comunicado à turma que a pesquisa estava dividida em duas etapas e que no primeiro encontro a tarefa seria responder ao questionário.

Os alunos evidenciaram em suas falas a repulsa por conteúdos que envolvem matemática, contudo mostraram-se interessados em participar. Sendo assim, foi disponibilizado um termo de consentimento (Apêndice C), o qual todos os participantes deveriam preencher e assinar caso estivessem de acordo.

Em seguida, foi distribuída a parte I do questionário (Apêndice A) e esclarecido que não era necessário colocar o nome na folha, haja visto que não há o interesse em identificar os autores das respostas. É importante destacar que esta seção do questionário é composta apenas por questões de múltipla escolha. Os alunos não demonstraram dificuldades e responderam às 10 questões em um curto espaço de tempo.

Após todos os participantes finalizarem a parte I, lhes foi entregue a parte II (Apêndice B) contendo perguntas discursivas e objetivas. Neste momento, houve uma inquietude por parte de alguns alunos pois estes queriam debater as questões entre o grupo. A professora de matemática da turma, a qual encontrava-se presente durante a aplicação, interveio exigindo um bom comportamento dos alunos. Para contornar a situação, a autora pediu que cada um respondesse o que soubesse e reafirmou que as respostas ali dadas não teriam a identificação nominal do participante.

Notou-se que para responder às questões discursivas, os alunos usaram um espaço temporal maior. No entanto, um tempo de aula, com duração de 50 minutos, foi suficiente para a aplicação de ambas as partes do questionário.

4.1.3 Análise dos dados do questionário

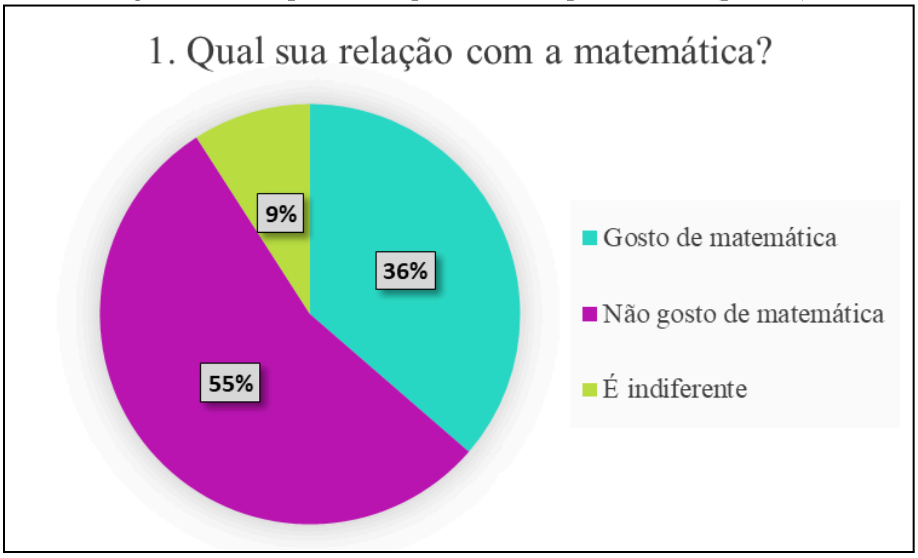
O questionário, que tem como finalidade verificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação à temática que envolve o zero na divisão e potenciação, será analisado em duas subseções. O tópico 4.1.3.1 destina-se para os resultados alcançados com a primeira seção do questionário, a qual é composta por 10 questões fechadas. Em seguida, no tópico 4.1.3.2, serão expostos os dados obtidos a partir da segunda seção do questionário, sendo esta formada por três questões abertas e fechadas. Os 11 participantes que responderam ao questionário foram nomeados de: A, B, C, …, K.

4.1.3.1 Análise da primeira seção do questionário

A primeira parte do questionário tem a finalidade de reconhecer se os alunos sabem responder corretamente o resultado de algumas operações de divisão e potenciação que envolvem o zero.

A questão 1 tem o intuito de conferir o apreço do aluno ao tratar da disciplina de matemática. A maior parte dos participantes responderam que não gostam desta disciplina (Figura 31).

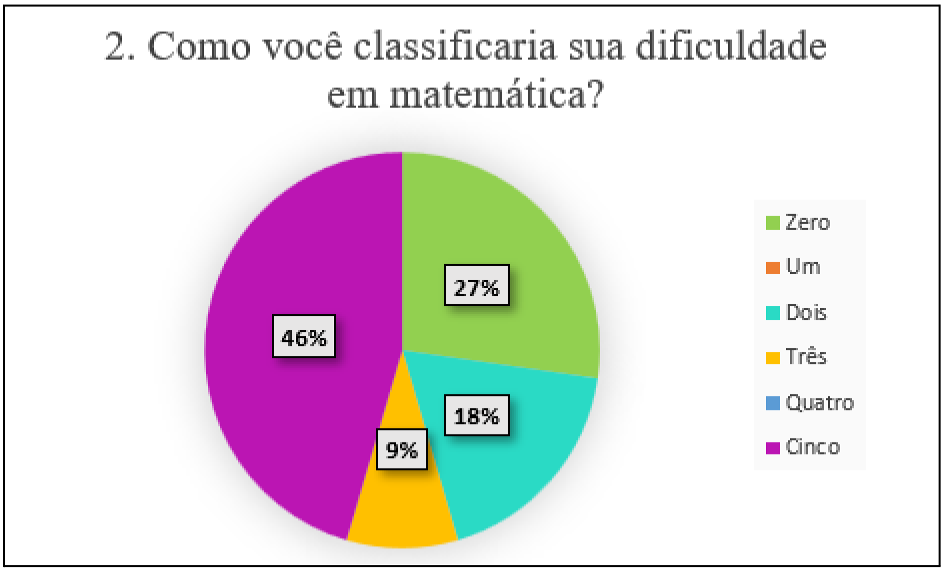
Figura 31 - Respostas da questão 1 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

A questão 2 tem como objetivo analisar como o estudante classifica a sua dificuldade em matemática, usando uma escala de 0 a 5, sendo 0 representante de nenhuma dificuldade e 5 para extrema dificuldade. Alguns participantes indicaram não ter dificuldade na disciplina, no entanto a maioria declarou uma dificuldade acentuada (Figura 32).

Figura 32 - Respostas da questão 2 do questionário (parte 1)

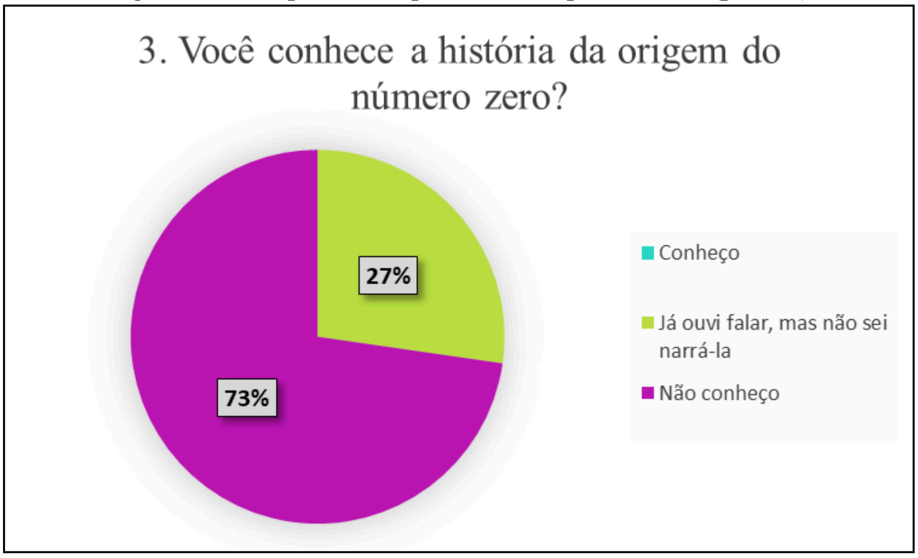


Fonte: Elaboração própria

Foi possível observar que a maior parte dos alunos, os quais serão futuros professores dos anos iniciais do EF, não possuem afeição com a matemática e alegam possuir dificuldades em relação a esta disciplina. Para a autora Gómez-Chacón, “os estudantes acreditam que a matemática é criada por pessoas inteligentes e criativas e que outras pessoas têm que aprender o que os mais inteligentes já sabem” (Gómez-Chacón, 2022 *apud* Curi, 2004, p.113).

A questão 3 destina-se a verificar o conhecimento do participante em relação a história do zero na matemática. Notou-se que dos 11 participantes, apenas 3 responderam que já ouviram sobre a história do zero, porém não saberiam conta-la (Figura 33). D’Ambrosio (2021) destaca a importância da apresentação da história da Matemática aos alunos, pois assim estes passam a compreender a origem do que é estudado na escola.

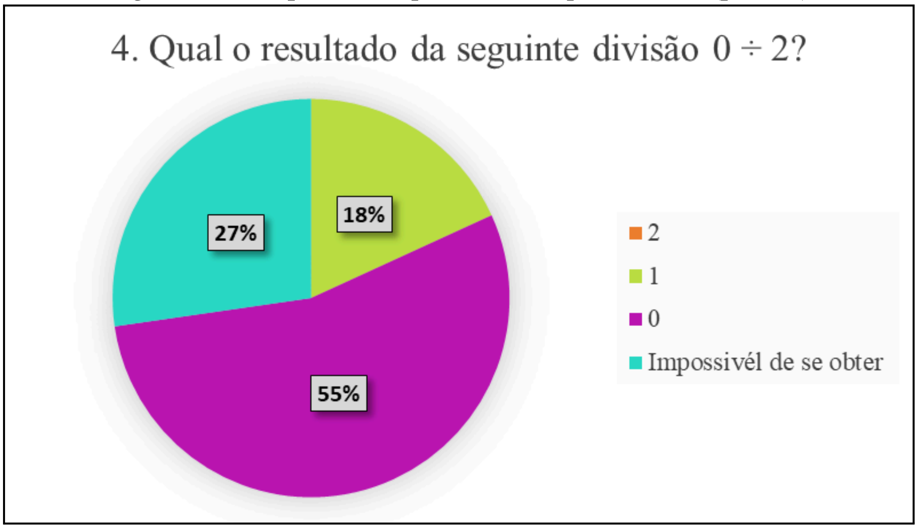
Figura 33 - Respostas da questão 3 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

A questão 4 tem o propósito de verificar se o aluno tem conhecimento do resultado de uma divisão entre zero e um divisor não nulo. Constatou-se que 6 alunos responderam corretamente o resultado de $0 \div 2$ (Figura 34).

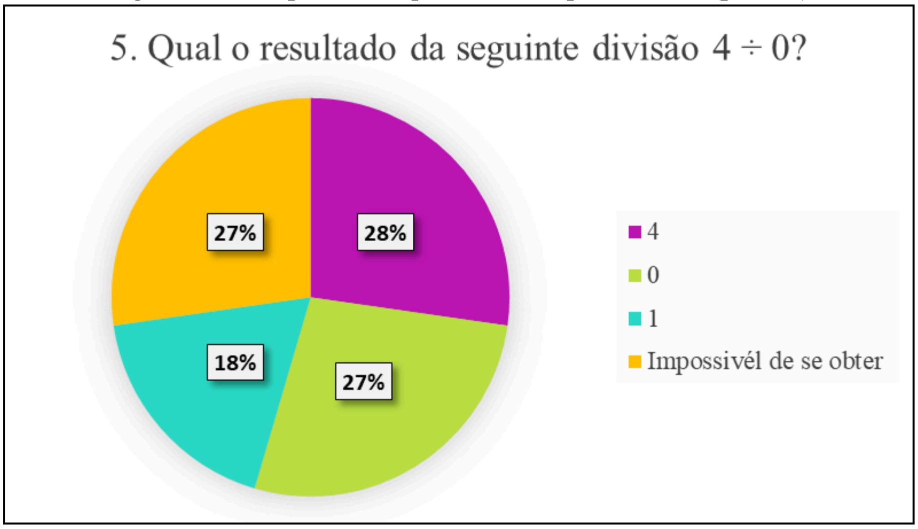
Figura 34 - Respostas da questão 4 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

O objetivo da questão 5 é identificar o conhecimento do aluno quanto a impossibilidade da divisão de um número não nulo por zero. Apenas 3 alunos marcaram a resposta correta quando questionados sobre o resultado de 4 ÷ 0 (Figura 35).

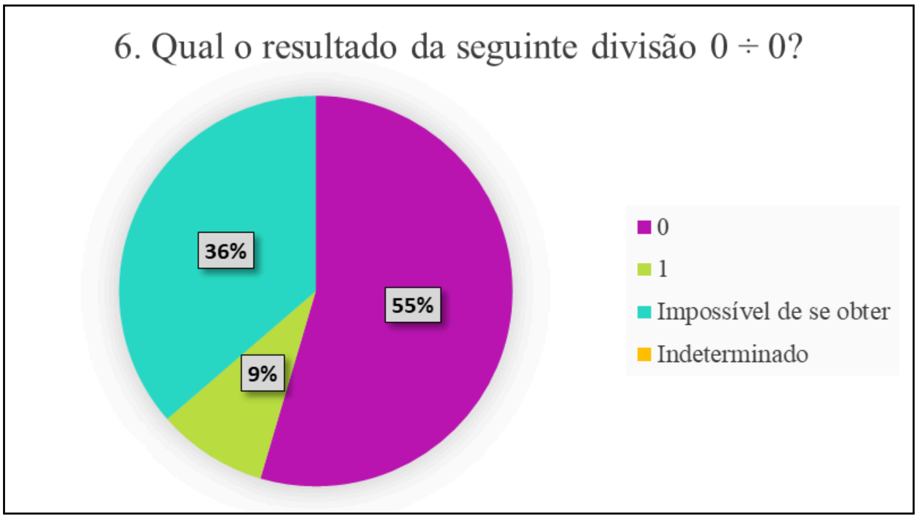
Figura 35 - Respostas da questão 5 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

A questão 6 busca conferir se o estudante reconhece o resultado da divisão 0 ÷ 0 como indeterminado. Nenhum estudante respondeu corretamente a questão. A maior parte dos alunos indicaram que zero seria a resposta correta para tal operação.

Figura 36 - Respostas da questão 6 do questionário (parte 1)



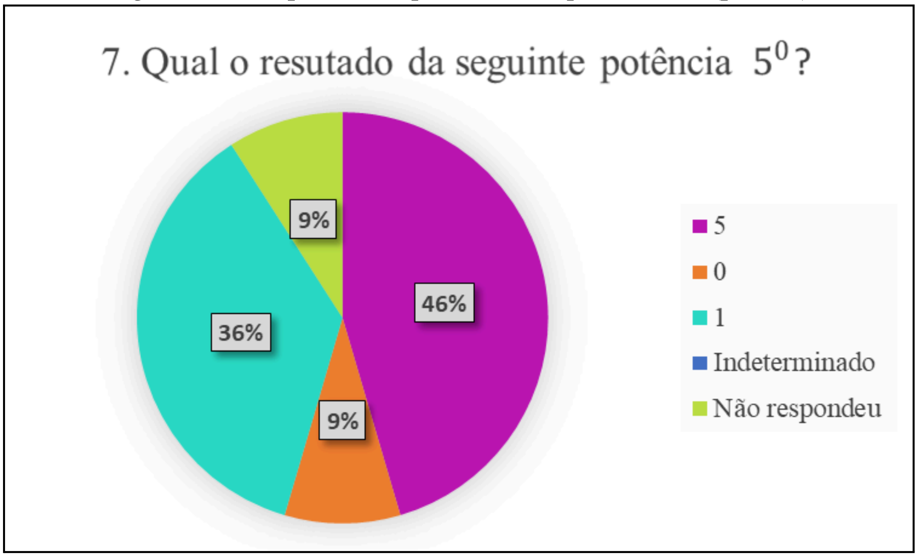
Fonte: Elaboração própria

Quando os alunos responderam que a divisão $0 \div 0 = 0$, identificamos um erro que possivelmente foi gerado pelo uso da generalização a qual diz “dividir zero por qualquer número, resulta em zero”. O mesmo acontece quando os estudantes indicaram que $0 \div 0 = 1$. Muito se escuta que “todo número dividido por ele mesmo, tem resultado 1”. Desta forma, acredita-se que há neste contexto um obstáculo epistemológico generalista, o qual segundo Bachelard (1996) são barreiras ocasionadas por conceitos explicados de forma geral, sem ênfase nas particularidades.

Bachelard (1996) alega que as interpretações errôneas que ocorreram ao longo da história, reproduzem um pensamento incorreto e geram um obstáculo epistemológico. Segundo Silva (2022) no trabalho do matemático e astrônomo hindu Brahmasphuta “a divisão de zero por qualquer número resulta em zero, até mesmo a divisão pelo ‘próprio zero’, mas quando um número era dividido por zero o resultado era tido como indefinido” (Silva, 2022, p.49).

A questão 7 deseja conferir se o estudante reconhece que uma potência de base não nula e expoente zero, resulta em 1. Observou-se que 4 alunos responderam corretamente a questão. No entanto, o maior percentual dos participantes indicaram que 5^0 resulta em 5 (Figura 37).

Figura 37 - Respostas da questão 7 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

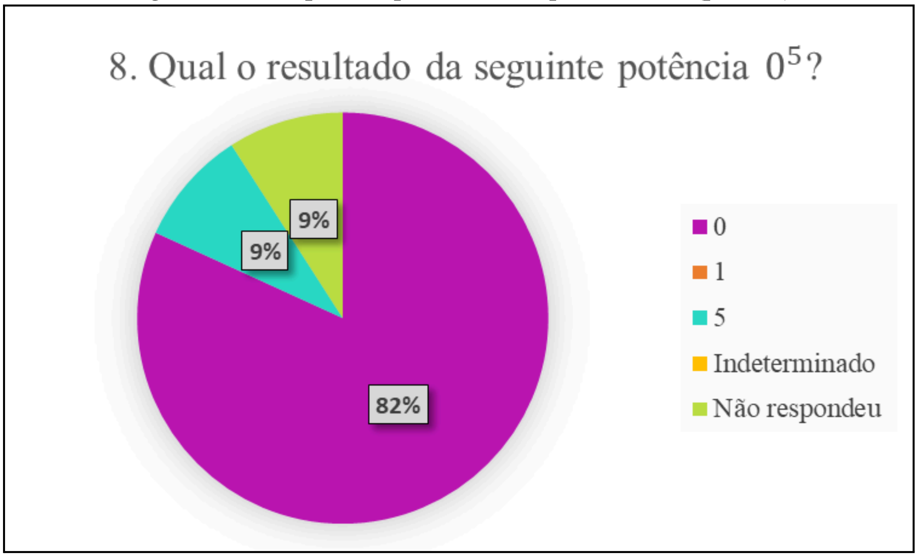
Considerando a resposta da maior parte da turma, acredita-se que há um obstáculo epistemológico verbal na questão 7. Como constatado por Paias (2019), os alunos consideram o zero como "nada", por este motivo tendem a ignorar a existência do zero como expoente de uma potência.

A associação do zero com a inexistência ou vazio é o motivo de muitos erros relacionados a operações matemáticas que envolvem este número (Almouloud, 2007 *apud* Silva, 2022).

Brousseau (2008) considera que as concepções matemáticas podem ser determinadas como um conjunto de saberes e conhecimentos. As adaptações de um sujeito acarretam noções diferentes de uma mesma concepção. Sendo assim, as concepções adquiridas são resistentes e provocam erros, criando barreiras na aprendizagem e tornando-se obstáculos.

Com a questão 8 pretende-se descobrir se o aluno tem a compreensão de que uma potência de base zero e expoente positivo, resulta em zero. Dos 11 participantes, 9 afirmaram corretamente que $0^5 = 0$ (Figura 38).

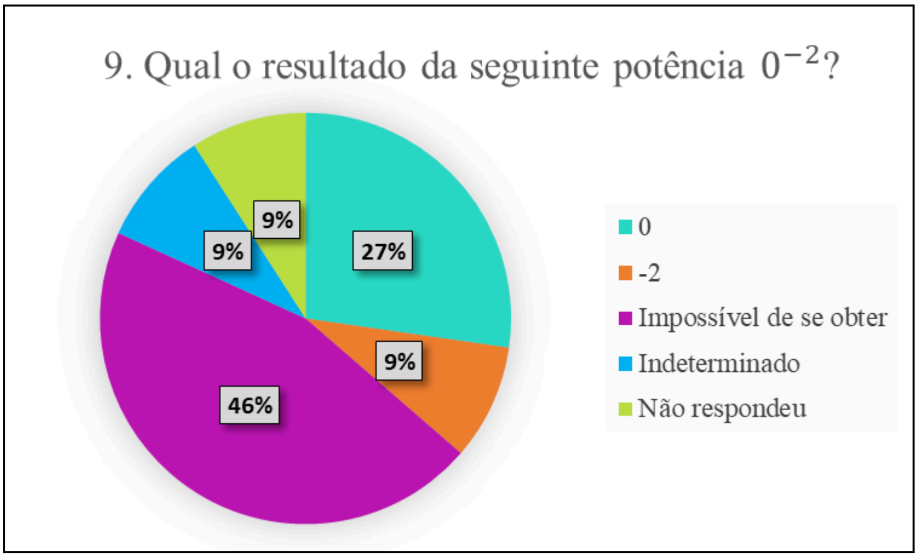
Figura 38 - Respostas questão 8 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

A questão 9 tem o intuito de verificar se o aluno entende que a potência de base zero e expoente negativo é uma operação impossível. O maior percentual dos alunos que responderam corretamente a questão, indicando que 0^{-2} é impossível (Figura 39)

Figura 39 - Respostas questão 9 do questionário (parte 1)

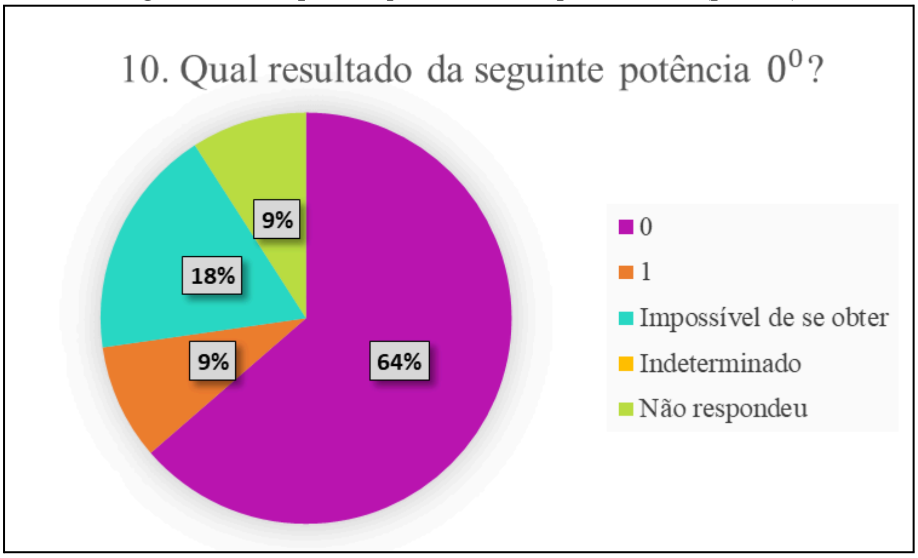


Fonte: Elaboração própria

No entanto, acredita-se que há nesta questão um obstáculo epistemológico generalista. Observamos que alguns alunos consideram que a operação 0^{-2} resulta em zero. Tal erro pode ser acarretado pela generalização, onde se diz que "zero elevado a qualquer número resulta em zero".

A questão 10 busca identificar se o estudante conhece que 0^0 possui um resultado indeterminado. Nenhum aluno respondeu corretamente a esta questão (Figura 40)

Figura 40 - Respostas questão 10 do questionário (parte 1)



Fonte: Elaboração própria

Notou-se que a maior parte dos alunos consideram erroneamente que $0^0 = 0$. Novamente, é possível que neste erro coexista um obstáculo epistemológico verbal, o qual Bachelard (1996) indica que ocorre pelo uso excessivo de analogias para explicação de um tema. Neste caso, o aluno associa o zero a "nada", sendo assim repete a base da potência como resposta.

Observou–se também que um aluno respondeu que $0^0 = 1$. Tal erro pode se dar pela generalização em que "todo número elevado a zero resulta em 1". Deste modo, acredita-se identificar novamente um obstáculo epistemológico generalista ao tratar do zero.

Os erros com relação ao zero na operação de potenciação tem um caráter histórico. Paias (2019) indica que o zero como expoente na potência, surgiu apenas no século XV com Nicolas Chuquet, um matemático francês. Deste modo, "[...] o expoente zero teve um obstáculo instaurado, pois não havia sentido para ele, inicialmente, uma vez que não havia produto de dois fatores iguais, nenhuma vez, entendo que o zera era como nada" (Paias, 2019, p.231)

Ao longo desta análise, foi observado que em todas as questões que foram identificados obstáculos epistemológicos, o obstáculo da experiência primeira também poderia ser inserido no contexto. Já que os alunos tendem a memorizar a informação que lhes foi passada no primeiro contato que tiveram com a divisão e a potenciação. Bachelard (1996, p.26) indica que “os obstáculos à cultura científica se apresentam sempre aos pares".

4.1.3.2 Análise da segunda seção do questionário

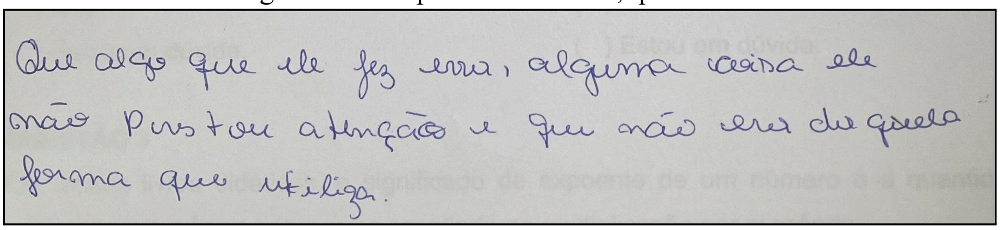
A segunda parte do questionário tem como finalidade investigar se os alunos possuem conhecimentos para desenvolver explicações matemáticas que justifiquem os resultados de determinadas operações de divisão e potenciação envolvendo o zero.

A questão 1 é dividida em itens A e B. No item A da primeira questão, é esperado que os estudantes expliquem de acordo com seus conhecimentos, o motivo de ao usar a calculadora a operação de divisão de um número não nulo por zero resultar em um erro ($5 \div 0 = Math\, Error$).

Nenhum participante alcançou o objetivo deste item, reconhecendo a impossibilidade de ocorrer tal divisão e a justificando. Dois participantes deixaram a questão em branco, enquanto o restante tentou esboçar alguma resposta para a pergunta.

O aluno G entendeu que o uso da máquina de calcular foi incorreto, por isso o visor da calculadora apresentou a mensagem de erro (Figura 41).

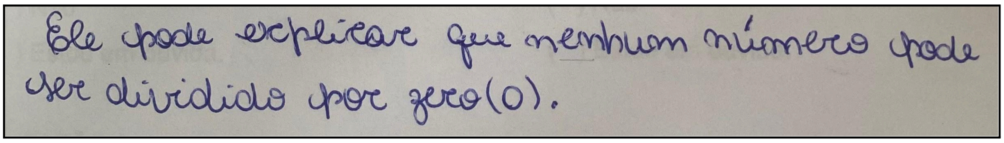
Figura 41 - Resposta do aluno G, questão 1.a


Que algo que ele fez erra, alguma coisa ele não Prestou atenção e que não era daquela forma que utiliza.

Fonte: Protocolo de pesquisa

O aluno H apresentou uma resposta que decorre das generalizações usadas ao estudar o conteúdo de divisão (Figura 42).

Figura 42 - Resposta do aluno H, questão 1.a


Ele pode explicar que nenhum número pode ser dividido por zero(0).

Fonte: Protocolo de pesquisa

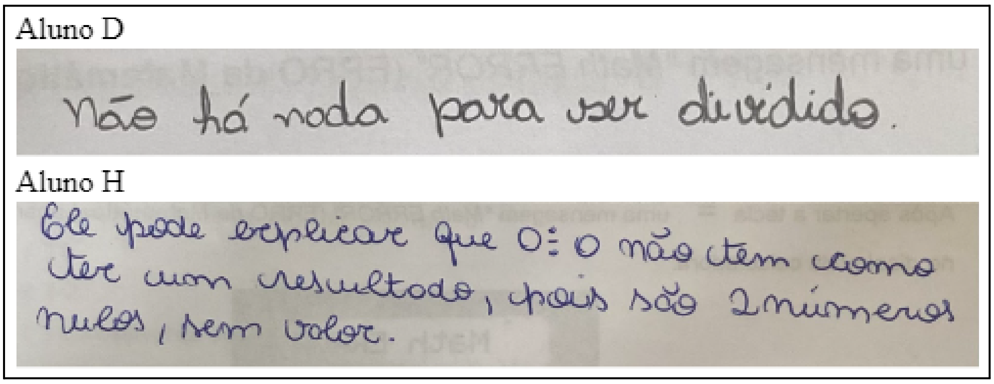
No item B da primeira questão é requerido uma explicação para a mensagem de erro na calculadora ao efetuar a operação 0 ÷ 0, buscando assim entender se os alunos reconhecem a indeterminação matemática.

Notou-se que dois alunos não responderam ao item. Os participantes, que tentaram justificar o erro da calculadora, não obtiveram êxito na justificativa

O aluno B indicou que “Nada divide para nada, sempre vai ser nada”, ou seja este aluno considera o zero como algo inexistente. Os alunos D e H compartilham deste pensamento (Figura 43). Por meio destas respostas, considera-se a existência de um obstáculo epistemológico da experiência primeira e verbal.

Igliori (2008, p.139) ressalta uma ideia de Glorian (1987) dizendo que “as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino das aprendizagens anteriores”

Figura 43 - Resposta dos Alunos D e H, questão 1.b


Aluno D

Não há nada para ser dividido.

Aluno H

Ele pode explicar que 0÷0 não tem como ter um resultado, pois são 2 números nulos, sem valor.

Fonte: Protocolo de pesquisa

Após análise da questão 1 entende-se que os alunos não detém os conhecimentos esperados para operar com o zero na divisão. Ao relacionar os obstáculos epistemológicos com a matemática, temos que essas barreiras ocasionam erros comuns a muitos alunos. Sendo estes, causados por noções matemáticas inadequadas que persistem ao passar do tempo (Brousseau, 2003 *apud* Paias, 2019).

Foi possível notar que os estudantes não souberam justificar os questionamentos feitos, reproduzindo assim a falta de conhecimento matemático que estes possuem. Curi (2004) considera que parte dos alunos concluintes dos cursos de formação se formam sem conhecimento dos conteúdos matemáticos, os quais irão lecionar.

A questão 2 é dividida em três itens, sendo perguntas fechadas. São feitas duas afirmações, as quais estão expostas abaixo, e em seguida é questionado o conhecimento do aluno em relação às assertivas.

1) “Todo número elevado a zero é igual um”
2) “Zero elevado a qualquer número é igual a zero”

Apenas um aluno deixou esta questão em branco. Dentre os outros 10 participantes, todos já ouviram falar de pelo menos uma das afirmações. A maior parte dos alunos indicaram que já escutaram as duas afirmativas e concordam com ambas.

Observou-se que todos os alunos que responderam a questão concordam com ao menos uma das afirmações. Apenas um aluno disse não concordar com a afirmação 2.

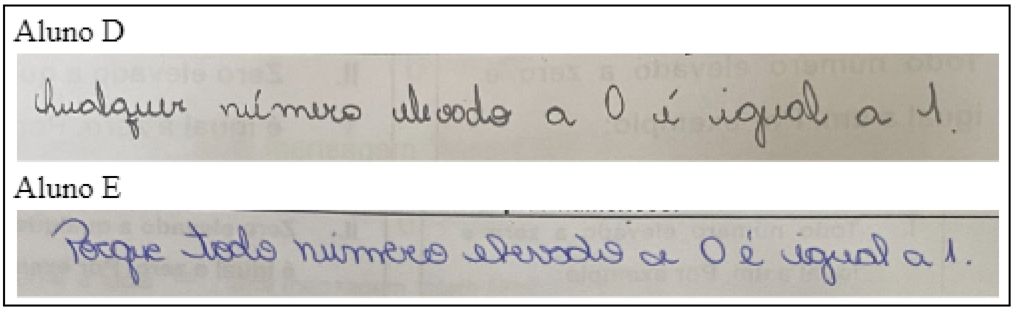
Nota-se que estes participantes aprenderam os conceitos de potenciação de forma generalizada, sem especificar as particularidades que envolvem o zero nesta operação. Mais uma vez acredita-se na existência de um obstáculo epistemológico generalista, no qual a generalização de um conceito acarretou o erro.

A questão 3 é composta por dois itens, sendo esta uma questão aberta. No item A pede-se que o aluno explique o resultado $2^0 = 1$, para que assim possamos verificar quais informações sobre as propriedades de potenciação o estudante possui.

Apenas um aluno deixou este item em branco. Dentre os 10 alunos que responderam, 6 escreveram como resposta “Não sei”. Nas respostas dos alunos D e E (Figura 44), foi possível detectar uma barreira de aprendizagem, em decorrência da generalização.

Ao indicar, de forma geral, que todo/qualquer número elevado a zero é 1, é possível considerar a presença de um obstáculo epistemológico generalista. Novamente, ao generalizar o aluno deixa de reconhecer as particularidades da potência de expoente zero.

Figura 44 - Respostas dos alunos D e E, questão 3.a



Fonte: Protocolo de pesquisa

No item B da questão 3 espera-se que o aluno reconheça que 0^0 é uma indeterminação matemática. Assim questiona-se a veracidade da igualdade $0^0 = 1$, a qual o aluno deve justificar o porquê da sua resposta.

No item B da terceira questão, dois alunos não responderam. Oito alunos indicaram “Não sei” como resposta. Apenas o aluno E colocou uma resposta diferente, a qual dizia apenas que “Porque todo número elevado a 0 é 1”.

Percebe-se que o aluno decorou uma frase que aprendeu durante sua vida escolar, “todo número elevado a zero”, e a tomou como verdade absoluta. Para Silva (2022) o que é verdadeiro e o senso comum formam parte do nosso conhecimento prévio, estando este vinculado a nossa percepção de alguns resultados matemáticos.

A partir das questões 2 e 3, conclui-se que os estudantes não possuem as noções esperadas ao tratar do zero na operação de potenciação. Silva (2022) expõe que um obstáculo não se traduz pela falta de conhecimento, mas sim pelo emprego do conhecimento em situações impróprias, o que o torna um dificultador na formação do saber. Este pensamento está em consonância com os obstáculos observados nestas questões.

4.2 Sequência Didática

4.2.1 Teste exploratório da sequência

No dia 20 de Julho de 2023 foi realizado o teste exploratório da segunda etapa da pesquisa, a qual consiste em uma sequência didática abordando as indeterminações matemáticas envolvendo o zero na divisão e potenciação. Esta sequência é dividida em duas partes, a primeira abordando o zero na divisão e a segunda discorrendo o zero na potenciação.

Foram convidados para participar deste teste exploratório, os alunos que participaram da aplicação do teste exploratório referente ao questionário da pesquisa. Apenas 6 licenciandos puderam comparecer na data e horário estipulados.

Os objetivos do teste exploratório relativo à segunda etapa deste trabalho foram analisar se o tempo proposto para aplicação da sequência seria suficiente, além de averiguar a compreensibilidade, clareza, dinamismo e objetividade da sequência exposta.

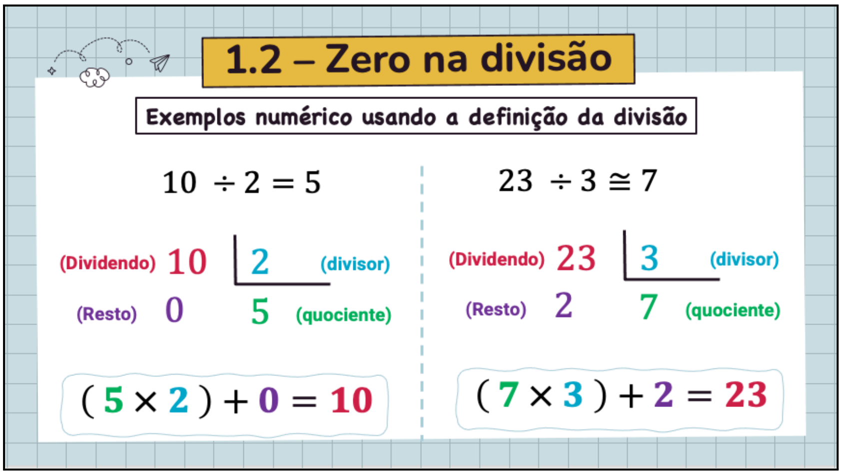
Inicialmente a autora expôs aos licenciandos presentes o objetivo e o público alvo da pesquisa. Foi importante destacar que o intuito da referida sequência didática é apresentar uma proposta viável para abordar, no Ensino Fundamental (EF), as indeterminações matemáticas envolvendo do zero na divisão e potenciação.

Os licenciandos receberam uma apostila, a qual abrangia o conteúdo a ser estudado. Destaca-se que a apresentação é formatada conforme a exposição dos conteúdos da apostila. Também foi entregue aos participantes uma folha para que anotassem sugestões para melhoria do trabalho.

Nos próximos parágrafos, serão narradas as sugestões e mudanças ocorridas no trabalho. Salienta-se que todas as observações feitas pelos participantes foram acatadas pela autora.

Ao longo da primeira parte da sequência didática, são apresentadas operações de divisão usando o método da chave (Figura 45).

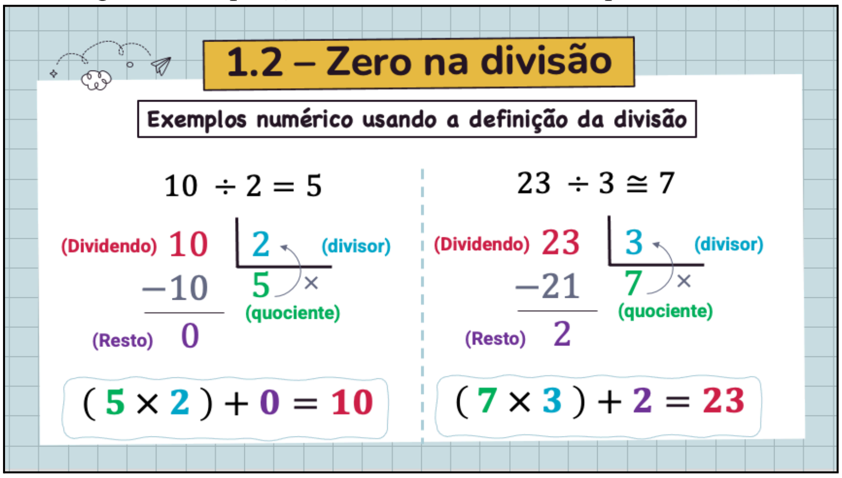
Figura 45 - Operação de divisão no formato inicial



Fonte: Elaboração própria.

Foi sugerido indicar no desenvolvimento das operações de divisão, a técnica usada para a obtenção do resto da divisão. A figura 46 abaixo expõe o modo a ser apresentado após a mudança.

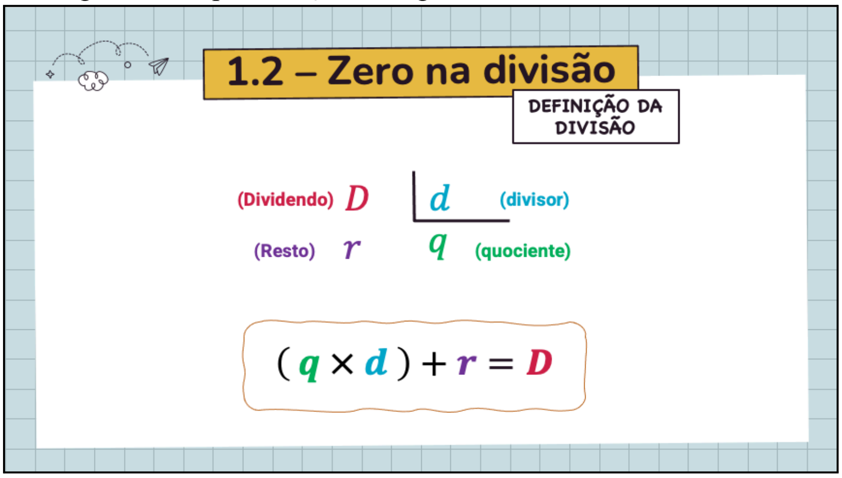
Figura 46 - Operação de divisão no formato após mudanças



Fonte: Elaboração própria.

Também foi sugerido indicar as propriedades referentes ao resto da divisão, ao apresentar o algoritmo da divisão (Figura 47). Esta sugestão decorreu no momento em que foi abordado a explicação do porquê é impossível obter-se resultado a partir da divisão de um número qualquer (diferente de zero) por zero.

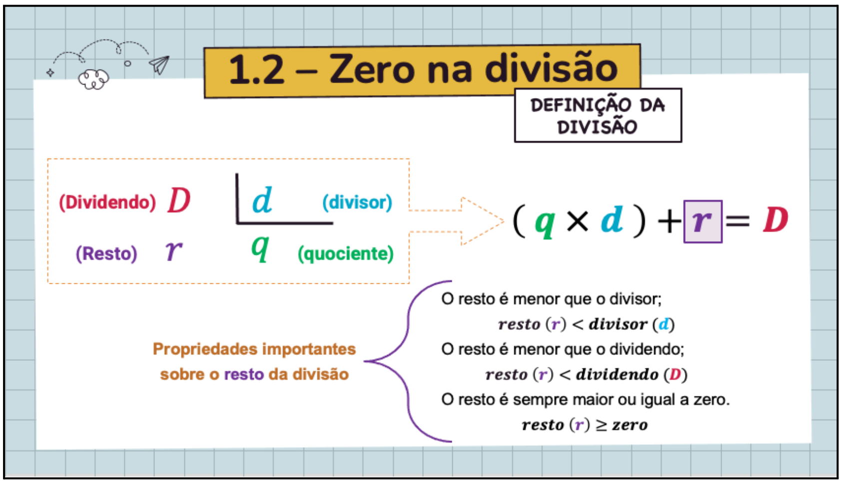
Figura 47 - Apresentação do algoritmo da divisão inicialmente



Fonte: Elaboração própria.

Para tal explicação, o aluno é conduzido a observar o resto da divisão, o qual nesta situação é igual ao dividendo. Faz-se necessário que o aluno detenha o conhecimento das propriedades do resto, para assim classificar esta operação como impossível (Figura 48).

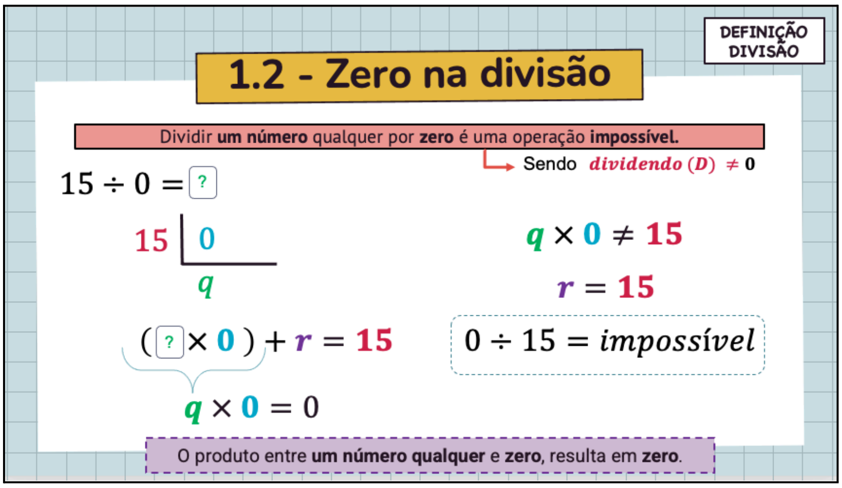
Figura 48 - Apresentação do algoritmo da divisão após mudanças



Fonte: Elaboração própria.

Baseando-se na sugestão abordada anteriormente, fez-se necessário alterar o modo usado inicialmente na sequência para explanar sobre a impossibilidade de dividir um número (diferente de zero) por zero. A figura 49 indica a maneira apresentada no teste exploratório.

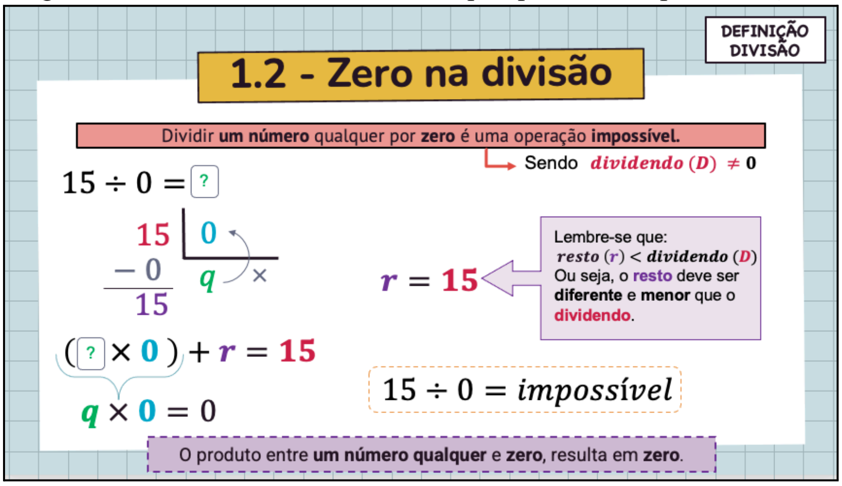
Figura 49 - Divisão entre um número qualquer e zero



Fonte: Elaboração própria.

Optou-se por indicar por meio de um lembrete a propriedade a qual aponta a necessidade do resto ser diferente do dividendo. A figura 50 aponta as mudanças feitas para facilitar a compreensão do aluno.

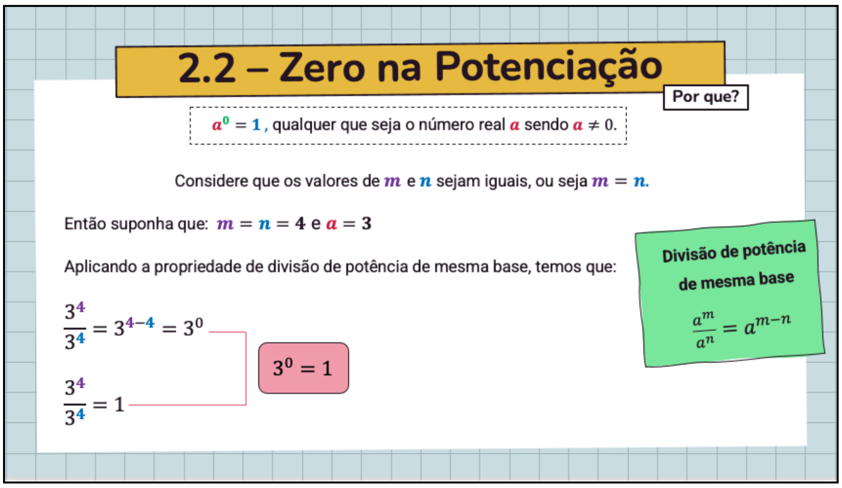
Figura 50 - Divisão entre um número qualquer e zero após alterações



Fonte: Elaboração própria.

Em relação à segunda etapa da sequência didática, os participantes sugeriram apenas uma alteração. Na explicação relacionada ao porquê 3^0 resulta em 1, a autora apresentou a explanação conforme indicada na figura 51.

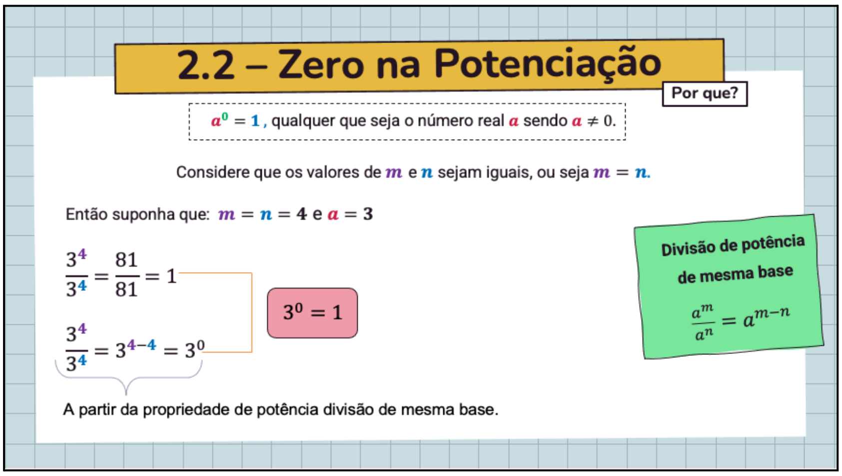
Figura 51 - Explicação 3^0=1 versão inicial



Fonte: Elaboração própria.

No entanto, após apontamentos feitos no teste exploratório o formato desta explicação foi remodelado (figura 52). Os licenciandos afirmaram que para facilitar a compreensão dos alunos, seria indicado apresentar inicialmente a divisão entre um número real (diferente de zero) por ele mesmo resultando em 1, para assim finalizar a explicação por meio da propriedade de divisão de potência de mesma base.

Figura 52 - Explicação $3^0=1$ após alteração

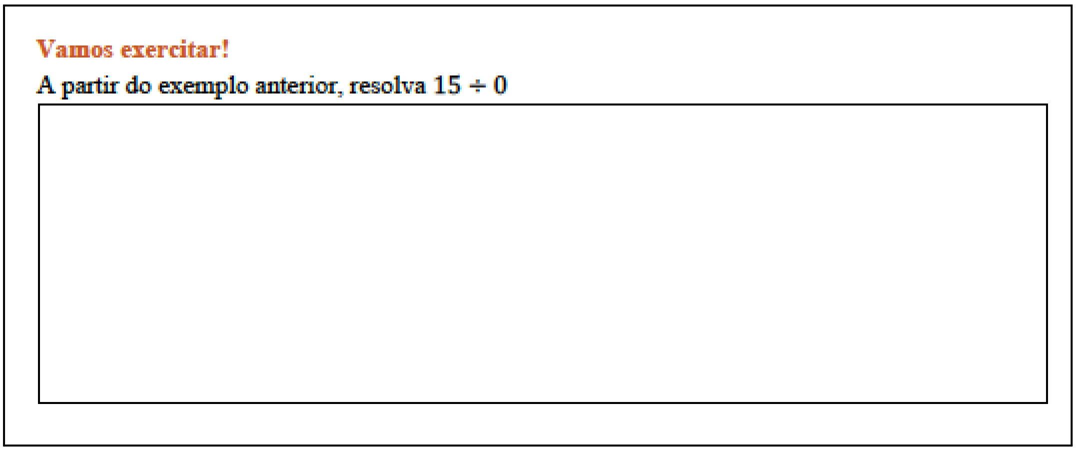


Fonte: Elaboração própria.

Tratando-se da apostila, todas as alterações feitas nos slides da apresentação também foram realizadas no material em questão.

Além disso, optou-se por inserir na apostila uma questão (Figura 53) na seção de abordagem do zero na divisão, ao tratar da impossibilidade da divisão de um número qualquer (diferente de zero) por zero. A operação proposta no exercício estava presente anteriormente no slide. O intuito da modificação foi evitar a inatividade dos alunos durante a apresentação, fazendo assim com que os estudantes anotem a resposta da atividade na apostila.

Figura 53 - Exercício abordando a divisão entre um número real e o zero



Fonte: Elaboração própria.

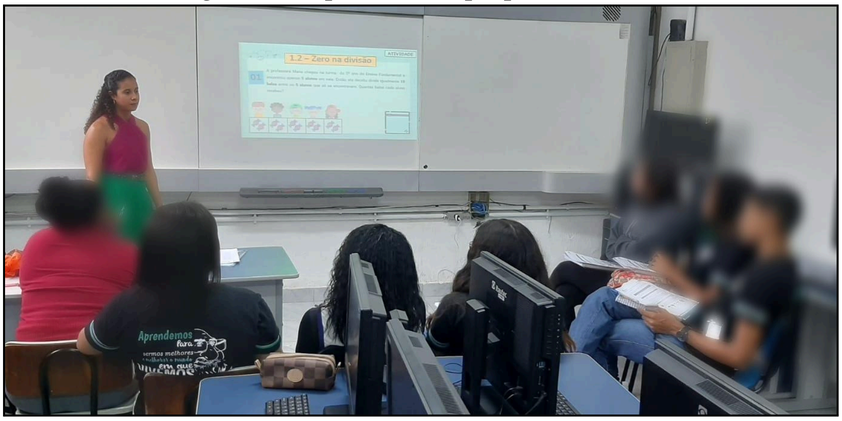
Os participantes teceram comentários positivos, ao final do teste exploratório. A organização e exposição dos slides, assim como da apostila, foi um ponto muito elogiado. Todos os presentes apreciaram a temática abordada e afirmaram que antes desta apresentação eles não saberiam explicar, para um aluno, o porquê dos resultados das operações de divisão e potenciação envolvendo o zero. Logo, os licenciandos presentes sugeriram que este trabalho deveria ser divulgado para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

4.2.2 Aplicação da sequência

A sequência didática, que integra a segunda etapa da pesquisa, foi aplicada no dia 02 de outubro de 2023 em um Instituto Superior de Educação em Campos dos Goytacazes. Participaram da aplicação 7 alunos do 3.º ano do EM em fase de conclusão do curso Normal Médio - Formação de professores.

O encontro aconteceu no laboratório de informática do Instituto, sendo esta a única sala com equipamento de projeção de imagem disponível naquele momento. Organizou-se as cadeiras da sala em um semicírculo, evitando assim que os alunos usassem os computadores e desviassem o foco da apresentação (Figura 54).

Figura 54: Aplicação da proposta didática



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No dia desta aplicação, a turma contava com uma quantidade reduzida de alunos em relação ao primeiro encontro. Os alunos indicaram que durante o decorrer deste ano letivo o excesso de alunos faltosos vem ocorrendo com frequência.

A professora de matemática da turma optou por acompanhar a apresentação da proposta didática, sentando-se afastada do semicírculo formado para não interferir nas respostas dos estudantes. É importante destacar que apesar de solícitos em participar da pesquisa, os alunos chegaram ao local de aplicação pronunciando o desgosto relacionado a disciplina de matemática.

Inicialmente, a autora recordou com os alunos sobre a primeira etapa da pesquisa e explicou que naquele momento aconteceria a segunda etapa, a qual tem o objetivo de explicar os questionamentos feitos a eles anteriormente. Dentre os 7 alunos, apenas um deles não estava presente na aplicação do questionário. O restante da turma lembrou da pesquisa e alguns demonstraram curiosidade em relação às respostas das questões feitas na primeira etapa.

Em seguida, foi entregue aos participantes o termo de consentimento (Apêndice H) referente à segunda fase. Após recolher os termos devidamente assinados, foi entregue uma apostila para todos que encontravam-se no ambiente.

Iniciando a apresentação foi informado aos alunos que o trabalho tratava-se de uma proposta didática, a qual subdivide-se em duas partes. A proposta é destinada a auxiliá-los futuramente nas suas atividades como docentes.

A primeira parte aborda o tópico “zero na operação de divisão”. Foi apresentado aos participantes, conforme a BNCC, que a operação de divisão é introduzida nos anos iniciais do EF. Assim destaca-se a importância desta pesquisa, pois eles vão precisar estar aptos a lecionar este conteúdo futuramente.

Em sequência, foram distribuídas 7 calculadoras entre os alunos. Seguindo a apostila (Apêndice D), eles deveriam efetuar 3 operações de divisão envolvendo o zero ($0 \div 4$; $4 \div 0$; $0 \div 0$) e comentar a diferença entre os resultados obtidos. A turma não hesitou em participar da dinâmica, todos efetuaram os cálculos na calculadora e comentaram os resultados encontrados. Houve indagações a respeito da mensagem de “erro” que apareceu no visor da calculadora ao efetuar $4 \div 0$ e $0 \div 0$. Nesta circunstância, foi despertado nos alunos o interesse no assunto a ser trabalhado ao longo da apresentação.

Dando continuidade às operações efetuadas na calculadora, questionou-se aos alunos "Por que o zero não pode atuar como divisor na operação de divisão?" . Logo, a autora fez duas afirmações: "dividir zero por um número qualquer não nulo é uma operação possível que resulta em zero" e "dividir um número qualquer não nulo por zero é uma operação impossível".

Para esclarecer as afirmativas, inicialmente utilizou-se como recurso uma atividade envolvendo três situações-problemas que compunham uma pequena narrativa. Foi notório que todos os alunos estavam muito atentos e interessados nas situações apresentadas. Neste instante, a autora mencionou que as explicações ilustrativas por meio de histórias são importantes para desenvolver a aprendizagem dos alunos e que devem ser um instrumento de ensino utilizado nos anos iniciais do EF.

No entanto, foi pronunciado para a turma que os resultados das operações matemáticas expostas inicialmente, podem ser explicados por meio do algoritmo da divisão. Desta maneira, este artifício também deve ser usado para explicação nos anos iniciais do EF. A fim de introduzir este tópico, foi feita uma revisão sobre a operação de divisão.

Iniciou-se então, as explicações utilizando a definição da divisão para os seguintes pontos:

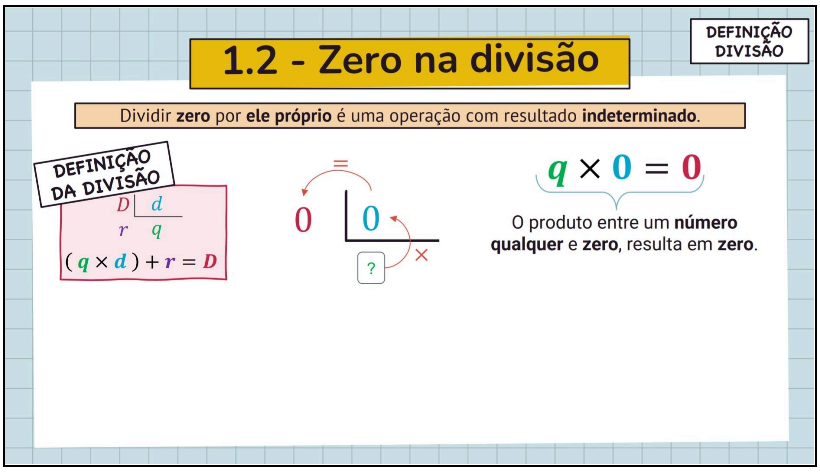
- A possibilidade do zero atuar como dividendo, sendo o divisor não nulo;
- O impossibilidade do zero atuar como divisor, sendo o dividendo não nulo;
- A indeterminação gerada ao efetuar a operação de divisão tendo zero como divisor e dividendo simultaneamente.

Durante todas as explanações feitas em relação aos tópicos, a participação dos alunos era requisitada por meio de perguntas que os conduziam a desenvolver as demonstrações numéricas juntamente com a autora.

Durante o desenvolvimento desta parte da apresentação, os alunos manifestaram que tais explicações nunca tinham-lhes sido apresentadas anteriormente, ao longo do percurso da educação básica.

Ao trabalhar a indeterminação 0 ÷ 0 (Figura 55), foi questionado aos participantes "qual o resultado da multiplicação entre um número qualquer e zero?" e eles responderam que é zero. Logo, para confirmar a resposta dada, os alunos foram incentivados a responder 5 × 0; 12 × 0; 1.000.000 × 0 e para todos esses cálculos a resposta dada foi zero. Sendo assim, conjuntamente com a turma conclui-se que não é possível determinar um valor para o quociente diante a situação apresentada, classificando 0 ÷ 0 como uma indeterminação matemática.

Figura 55- Iniciando explicação sobre a indeterminação matemática



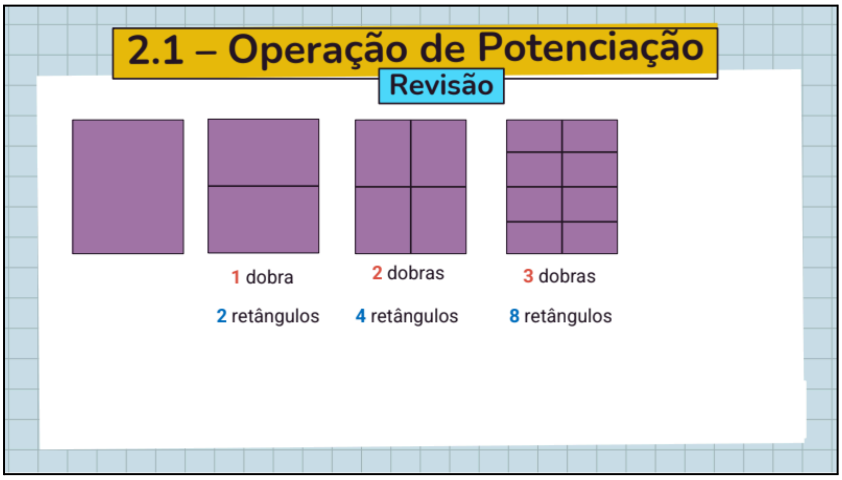
Fonte: Elaboração própria.

Ao final da primeira parte desta aplicação, foi possível concluir que alguns alunos não possuíam conhecimentos relacionados à impossibilidade de dividir um número (diferente de zero) por zero. Por exemplo, muitos disseram que 4 ÷ 0 resultaria em zero. Assim como, não sabiam que 0 ÷ 0 é classificado como uma indeterminação matemática. Quando questionados inicialmente sobre o resultado de 0 ÷ 0, os estudantes responderam que achavam que a resposta também seria zero.

Continuando a apresentação, deu-se início a segunda parte da sequência didática, a qual aborda o zero na operação de potenciação. Segundo a BNCC, os conceitos de potência são introduzidos no 6.º ano do EF. Logo, foi explicado aos participantes que apesar de não ser um conteúdo voltado para os anos iniciais, ou seja, eles não vão lecionar sobre potência, angariar conhecimentos é uma tarefa importante e recorrente na vida do docente.

Foi distribuída uma folha A4 para cada aluno, com o objetivo de iniciar uma dinâmica a fim de apresentar aos participantes a ideia de potência, usando como base o 2. Solicitou-se, então, que dobrassem esta folha ao meio. Questionados sobre a quantidade de retângulos formados, os estudantes rapidamente responderam "dois". Seguimos fazendo dobraduras com a folha. A partir da última dobra, os participantes dobravam a folha ao meio. Foram feitas 3 dobras e a cada nova dobra, os alunos contavam os retângulos formados. (Figura 56)

Figura 56 - Dobras folha A4 e retângulos

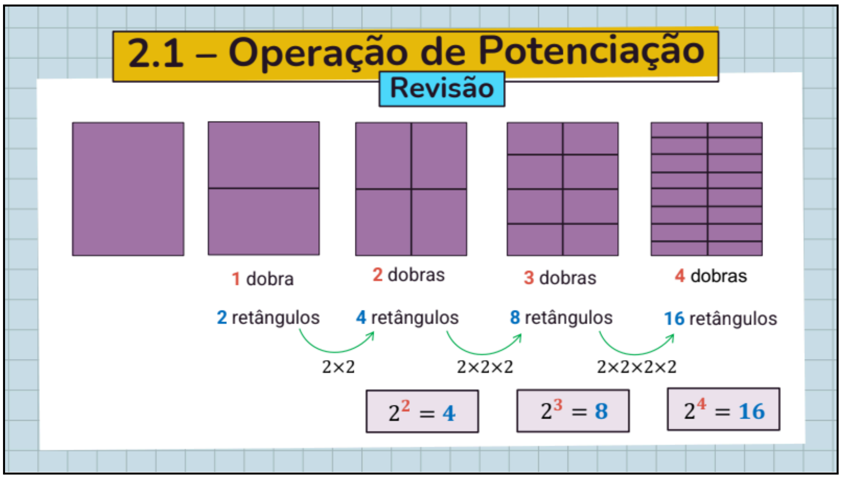


Fonte: Elaboração própria.

Para dar continuidade a dinâmica, questionou-se aos alunos se eles observaram o que estava acontecendo com o número de retângulos obtidos a cada nova dobra realizada na folha. Dois alunos responderam, rapidamente, que a cada nova dobra a quantidade de retângulos era multiplicada por 2. Sendo assim, foi perguntado à turma quantos retângulos se formariam se fizéssemos a quarta dobra, neste momento eles não deveriam efetuar a dobra. Eles logo responderam que 16 retângulos se formariam.

Deste modo, foi apresentado aos alunos que por meio da folha A4 podemos representar a operação de potenciação de base 2 e expoente natural. Sendo assim, foi feita a analogia entre a quantidade de dobras que foi feita inicialmente na folha, a qual determinou a base da potência. O número de dobras feitas, a partir da primeira, indicava os expoentes. (Figura 57)

Figura 57 - Analogia retângulos, dobras e potências



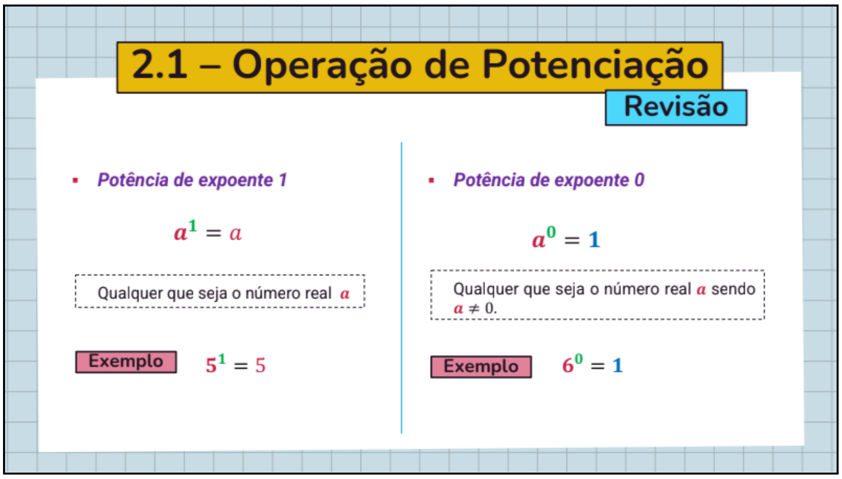
Fonte: Elaboração própria.

Por fim, questionou-se aos alunos quantos retângulos haviam se formado quando não havíamos feito dobras na folha. Os estudantes conseguiram observar que a folha A4 é um retângulo, logo responderam que sem nenhuma dobradura tínhamos 1 retângulo. Neste momento, foi indicado de forma lúdica aos alunos que uma potência de base 2 e expoente zero, resultará em 1.

Seguindo a apresentação, foi definido a operação de potenciação sendo a^n, onde a é um número real e n é um número inteiro maior que 1. Indicou-se que a potência se dá pela multiplicação de n fatores iguais, neste caso o fator é a base a. Foi feita como exemplo a potência 3^4. Neste momento, os alunos indicaram que deveríamos repetir 4 vezes o número 3, fazendo o produto entre os números que se repetiam.

Foram apresentadas duas propriedades da potenciação conforme indicado na Figura 58. Perguntou-se aos alunos se eles sabiam porque um número não nulo, elevado a zero, tem como resultado 1. Eles indicaram que conheciam a propriedade, no entanto não sabiam explicar o motivo da operação resultar em 1.

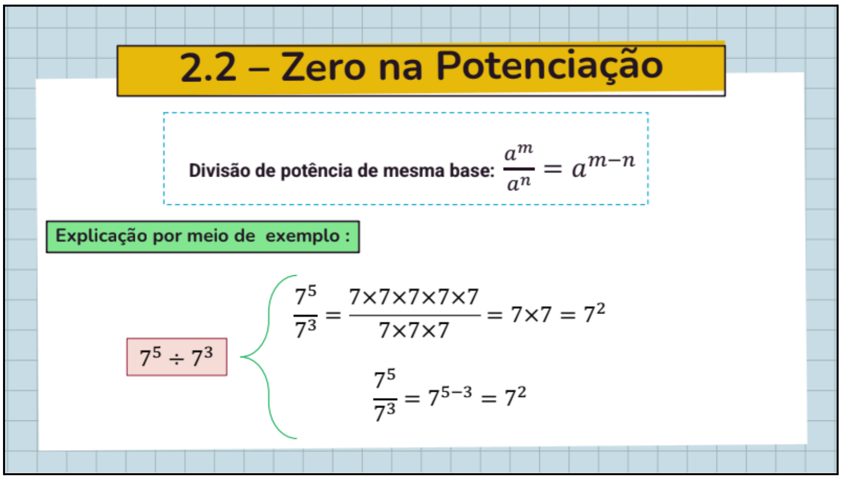
Figura 58 - Propriedades de potência



Fonte: Elaboração própria.

Para explicar o porquê da ocorrência $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$), foi necessário recordar a propriedade de divisão de potências de mesma base. Foi feito um exemplo numérico $7^5 \div 7^2$, para indicar o motivo desta propriedade ser válida (Figura 59). Foi possível notar que, mesmo sem uma demonstração formal, os exemplos numéricos foram importantes para a visualização e levaram os alunos a crer na veracidade da propriedade.

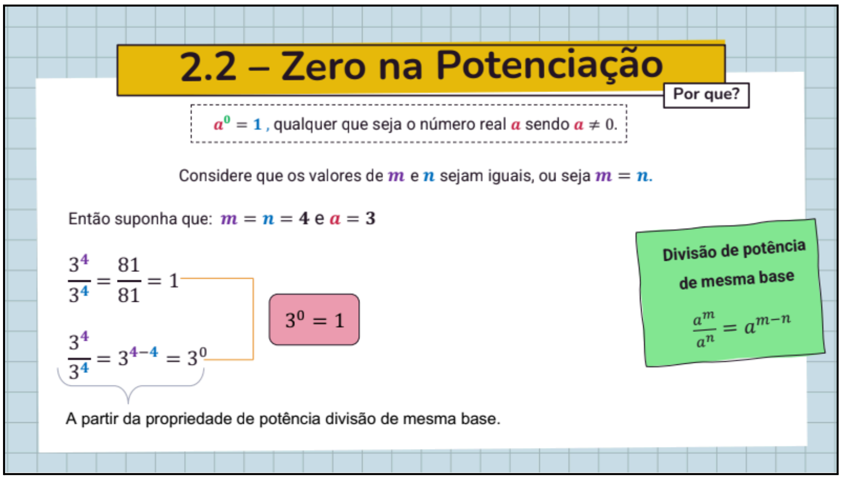
Figura 59 - Mostração divisão potência de bases iguais



Fonte: Elaboração própria.

Iniciou-se a argumentação por meio de um exemplo numérico, $3^4 \div 3^4$, para explicar que realmente, sendo a base não nula e o expoente zero, esta potência resulta em 1 (Figura 60). Os alunos acompanharam atentamente a explicação e ajudaram no desenvolvimento, quando solicitados. Novamente, observou-se que o exemplo numérico foi de extrema importância para o entendimento dos alunos. Ao final desta explicação, foi mostrado aos alunos a generalização, sendo $m = n$ e $a^m \div a^n$. Desenvolvendo esta operação, tal qual o exemplo com números, chegou-se ao que gostaríamos de mostrar: $a^0 = 1$.

Figura 60 - $a^0 = 1$, sendo base não nula.

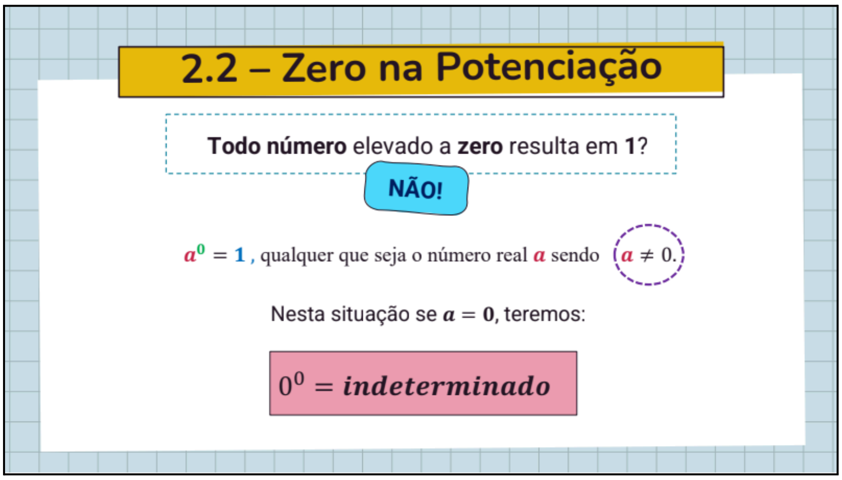


Fonte: Elaboração própria.

Diante do que foi exposto, perguntou-se aos alunos se todo número elevado a zero resultava em 1. Imediatamente, eles responderam que “sim”. Sendo assim, indicou-se que havia um erro na resposta dada e voltamos a analisar a frase utilizada quando foi exposto que $a^0 = 1$ (Figura 61).

Por fim, foi apresentado à turma a existência de mais uma indeterminação matemática, que envolve o zero, sendo esta 0^0.

Figura 61 - Apresentação de uma nova indeterminação matemática

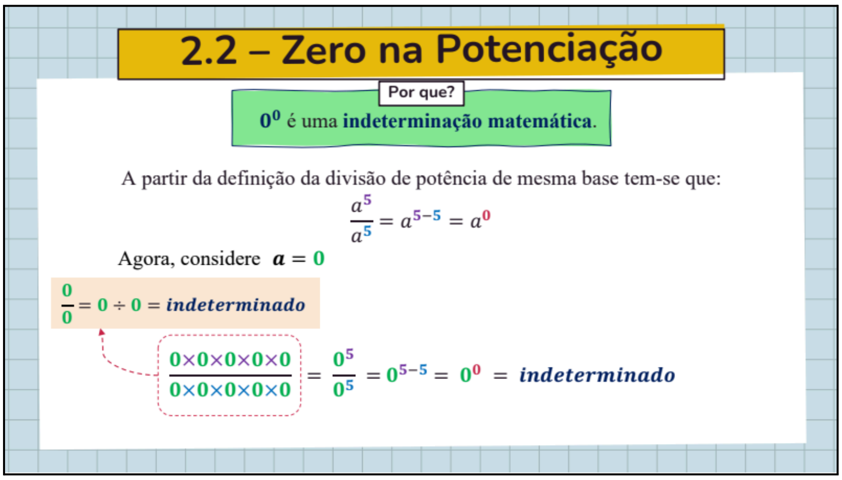


Fonte: Elaboração própria.

Neste momento, os alunos falaram que não tinham conhecimento desta indeterminação matemática, dizendo que na concepção deles 0^0 resultaria em 1. Para comprovar que 0^0 é $indeterminado$, utilizou-se novamente a propriedade da divisão de potências de mesma base.

Inicialmente, a explicação foi dada por meio de um exemplo numérico (Figura 62) e posteriormente utilizou-se a explicação generalizada, por meio algébrico.

Figura 62 - 0^0 é uma indeterminação



Fonte: Elaboração própria.

Destaca-se que, diante da participação dos alunos, compreende-se que estes conseguiram atingir o objetivo, reconhecendo 0^0 como uma indeterminação matemática. Nesta etapa, também foi possível comprovar que os alunos assimilaram a existência da indeterminação matemática envolvendo o zero perante a operação de divisão, pois quando questionados qual seria o resultado de $0 \div 0$, eles responderam "indeterminado".

Para finalizar esta aplicação, foi realizada uma entrevista em grupo. Os alunos já estavam posicionados em semicírculo, logo a autora iniciou a conversa seguindo o roteiro programado. Foi informado aos participantes que toda a conversa estava sendo gravada. A princípio, os participantes se mostraram tímidos. Porém, no decorrer da conversa, todos os alunos colaboraram e participaram da dinâmica, expondo suas opiniões e relatos sobre o assunto abordado durante a apresentação.

4.2.3 Análise da Entrevista em Grupo

A entrevista em grupo foi utilizada neste trabalho visando coletar dados relacionados às opiniões e percepções dos participantes em relação ao que foi apresentado durante a oficina pedagógica. A análise dos dados obtidos foi realizada a partir da transcrição (Apêndice G) da gravação em áudio realizada após a apresentação da proposta didática.

Nomeou-se os 7 participantes de A', B',C',..., G'. Esta nomenclatura foi usada a fim de diferenciá-los dos alunos que responderam o questionário. Esta decisão decorre do fato de que nem todos os alunos que estavam presentes na aplicação do questionário, compareceram à aula no dia da aplicação da proposta didática.

A conversa foi guiada por um roteiro previamente elaborado (Apêndice F), porém usado de forma flexível, de modo que as falas dos alunos também direcionaram a rota do bate-papo.

Foi iniciada a conversa questionando se os alunos tinham noção da problemática relacionada à divisão e a potenciação que envolve o zero. Também foi perguntado se eles já haviam sido levados a refletir sobre a temática anteriormente.

Os alunos indicaram que conheciam alguns dos tópicos apresentados. O aluno C' recordou a aplicação do questionário e ressaltou "Eu só prestei atenção no zero depois que você aplicou aquele testezinho". Este mesmo aluno disse que ele ignorava o zero, dizendo a seguinte frase: "Zero com tudo, zero".

Observa-se a partir destas falas que os estudantes não davam a devida atenção ao número zero nas operações. O que justifica a não percepção das particularidades que envolvem este número ao tratar da divisão e potenciação.

Blanco e Contreras (2002 *apud* Curi, 2004) sugerem que muitos estudantes do curso de formação de professores tendem a ter um descaso, uma espécie de negação e frustração quanto se trata de atividades matemáticas.

O aluno B' fez uma declaração importante que reforça a possibilidade da existência do obstáculo epistemológico generalista associado às operações que envolvem o zero. O aluno declarou que:

> A potência que era assim, todo número elevado a zero vai dar um. Ah aí assim, caia até isso na prova. Eu até gravei isso, todo número elevado a zero, um. Aí eu colocava logo lá, um. (Aluno B)

Dando continuidade a conversa, foi questionado se a partir do que foi apresentado na oficina pedagógica, os alunos saberiam diferenciar uma operação indeterminada de uma impossível, tratando da divisão e potenciação.

Os participantes indicaram que provavelmente saberiam. Mas quando indagado sobre qual seria o resultado da operação $5 \div 0$, apenas dois alunos acertaram a resposta. Os demais participantes acabaram se confundindo quanto ao resultado desta divisão.

Percebeu-se, então, a dificuldade em superar uma barreira formada por erros que vêm sendo cultivados ao longo da vida estudantil. Assim, faz-se importante a fala de Brousseau (2008, p. 48) o qual ressalta que “algumas concepções adquiridas não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então, ‘obstáculos’”.

As lacunas que são formadoras dos erros conceituais cometidos por alunos do curso de formação, não são reflexo da ignorância. Porém, são efeitos de um conhecimento adquirido anteriormente, o qual era um sucesso mas agora representa um conceito falso (Gomes, 2002).

Foi perguntado aos participantes se eles já tinham lecionado matemática durante alguma aula de estágio. Como resposta, nenhum deles tinha trabalhado esta disciplina no decorrer das aulas de estágio.

A resistência dos participantes em lecionar matemática, está em conformidade com a análise de Gomes (2002):

> Na maioria dos cursos de formação de professores, sobretudo dos professores das séries iniciais, são evidentes a resistência e a fobia em relação à matemática. Por isso, ao trabalhar nestes cursos nos deparamos com sujeitos que apresentam enormes lacunas no domínio de conceitos matemáticos fundamentais para o dia-a-dia e acabam por reproduzirem essas lacunas, tornando-se ao invés de um facilitador, um grande obstáculo para aprendizagem de seus alunos. (Gomes, 2002, p.367)

No decorrer da entrevista, a maioria dos alunos declarou não gostar de matemática. Porém, o aluno E’ demonstrou uma grande repulsa com a disciplina em questão e relatou que sua dificuldade com esta matéria ocorre desde o início da sua trajetória escolar.

Quando questionados sobre o entendimento do que foi apresentado na oficina, o aluno E’ disse que acompanhou todo o raciocínio que foi exposto. No entanto, não saberia explicar as operações sozinho, mesmo após a apresentação. Ficou notório que o aluno E’ criou um bloqueio em relação a disciplina de matemática.

Para sondar o ponto de vista dos participantes em relação ao que foi apresentado durante a oficina, foi indagado se a apresentação trouxe um novo olhar para a maneira que poderiam abordar o zero com alunos do ensino fundamental . Os alunos disseram que sim, a oficina teve uma relevância para eles. Abaixo são destacadas algumas falas dos participantes neste momento:

> Aluno B’: Eu não sabia que o zero era tão difícil assim.
>
> Aluno E’: Foi o que eu falei, eu não prestava atenção no zero.
>
> Aluno F’: O zero é excluído.
>
> Aluno C’: Por incrível que pareça, ele é o primeiro e ele sempre foi excluído. Ignorado, coitado.

As falas expostas, mais uma vez, reforçam e justificam os erros cometidos na aplicação do questionário. Na percepção matemática dos alunos, o zero não ocupou lugar de destaque.

Matias (2020, p.12), em seu livro, diz que “por conta do seu comportamento peculiar, o zero costuma ser uma das grandes fontes de controvérsias, mesmo entre matemáticos. A tal ponto que alguns, quando podem, simplesmente o expulsam do jogo”.

Também foi questionado se, na posição de futuros professores, os participantes passariam a destacar a indeterminação e a impossibilidade existente na divisão. Os alunos responderam de forma positiva. Destaca-se a fala do aluno C’:

> E as crianças fazem perguntas de tudo pra gente. Tia, por que tem que ser assim? Porque sim. Não me pergunte o porquê. Eles adoram falar porque. Se for porque em história, em geografia, em português, até vai. Mas agora, em matemática não (Aluno C’).

Quando os professores não possuem vasto conhecimento matemático, a insegurança perante as situações de ensino ficam evidentes. Por este fato, eles tendem a recorrer aos livros didáticos, se apoiando nestes para ensinar (Blanco e Contreras, 2002 *apud* Curi, 2004).

Os participantes indicaram que usariam o material que lhes foi oferecido para preparar uma aula, demonstrando apreço pela apostila que foi elaborada. Os alunos C’ e D’ disseram que fariam uso do conteúdo da apostila para preparação da próxima aula de estágio cuja temática é matemática.

Durante a entrevista, foi feito um questionamento aos alunos com o intuito de saber como a operação de divisão foi ensinada a eles durante as séries iniciais do Ensino

Fundamental. Por meio das respostas dadas, percebeu-se que durante este período escolar nunca houve ênfase nas impossibilidades e indeterminações relacionadas à divisão.

Curi (2004) faz uma reflexão sobre os desafios que se sucedem no curso de formação inicial de professores. A autora observa que tanto os conhecimentos adquiridos ao longo da jornada escolar, quanto a experiência como aluno de um curso de formação, tendem a ter influência na atuação profissional desses futuros professores.

Por fim, ao final da entrevista os alunos teceram elogios à oficina pedagógica. A professora da turma, que também acompanhou a apresentação, mostrou-se entusiasmada com o que foi apresentado. Segue as falas do aluno C' e da professora:

> Aluno C': A explicação foi muito boa.
>
> Professora da turma: Eu achei a explicação muito boa, maravilhoso. O material está perfeito.

Por meio da entrevista em grupo, comprovou-se as ideias de Curi (2004). A autora destaca que a matemática que será aplicada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, assim como os conhecimentos em geral de matemática e sobre a disciplina, são pouco enfatizados durante o curso de formação de professores (Curi, 2004).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A curiosidade desta autora foi o ponto de partida para este trabalho. Sempre fiz muitos questionamentos matemáticos, dentre eles: "porque não podemos dividir um número por zero?" e "porque zero dividido por zero não resulta em 1?". No papel de futura professora, acredito que estas perguntas também poderiam ser dúvidas dos meus futuros alunos. Sendo assim, na busca por estas respostas surgiu a motivação para esta pesquisa.

A matemática é uma disciplina que sofre repulsa por parte dos estudantes que frequentam o ambiente escolar. Este cenário não se faz diferente em meio aos alunos do curso de formação de professores - Normal Médio. Os futuros professores das séries iniciais, que guiarão as aulas de múltiplas disciplinas, concluem o curso de formação com dúvidas nos conteúdos matemáticos, os quais irão lecionar ao longo de sua vida profissional.

Os alunos, de modo geral, carregam em sua bagagem escolar conhecimentos que vão sendo adquiridos e acumulados. No entanto, a aquisição de conceitos mal adaptados geram barreiras na aprendizagem e acarretam futuros erros que se compõem de obstáculos epistemológicos.

O zero é um número que gera imprecisões ao longo dos estudos matemáticos durante os anos escolares. Este objeto matemático possui uma história curiosa, já que nem todas as civilizações precisavam dessa simbologia para operar a matemática e fazer contagens. O zero percorreu uma longa trajetória até ser reconhecido como número.

Algumas operações matemáticas, como a divisão e a potenciação, possuem particularidades no que se refere ao zero. Porém, essas singularidades nem sempre são devidamente destacadas durante o ensino destes cálculos.

A divisão é conteúdo destinado a ser ensinado no 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Logo, desde os primeiros contatos do aluno com esta operação é de suma importância que as nuances envolvendo o zero sejam apresentadas. Diante disto, é esperado que os professores das séries iniciais saibam direcionar as explicações necessárias para a aprendizagem deste cálculo matemático.

Já a potenciação é um conteúdo iniciado no 6.º ano do Ensino Fundamental. Sendo assim, espera-se que os alunos em fase de conclusão do Ensino Médio reconheçam as minúcias que compreendem esta operação.

Essas temáticas foram norteadoras para o processo de elaboração do presente trabalho. A seguinte questão de pesquisa direcionou este projeto: quais as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no âmbito do Ensino Fundamental?

Foram delimitados três objetivos específicos a fim de buscar respostas para a questão de pesquisa delimitada. Para alcançar os dois primeiros objetivos, fez-se necessário aplicar um questionário formado por questões objetivas e discursivas. A análise deste objeto de coleta de dados se deu com base nos obstáculos epistemológicos descritos por Bachelard (1996).

A partir das respostas coletadas por meio do questionário, foi possível observar as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação às operações de divisão e potenciação envolvendo o zero, bem como identificar obstáculos epistemológicos que estes alunos enfrentam diante do número zero nestas operações.

Ficou evidente a dificuldade dos participantes em dar explicações que compreendam o porquê do resultado impossível e indeterminado que sucedem-se ao operar com o zero em determinadas situações na divisão. Deste modo, pode-se inferir que estes futuros professores não tinham embasamento matemático adequado para explicar para um aluno dos anos iniciais do EF, as particularidades que abrangem o zero perante a divisão.

Os alunos também demonstraram dúvidas ao tratar das noções que constituem a operação de potenciação que contém o zero. Ficou evidenciado o desconhecimento da indeterminação matemática que decorre da operação zero elevado a zero.

A partir dos erros cometidos no questionário, notou-se que os alunos tendem a reconhecer o zero como “nada” diante da divisão e da potenciação. O tratamento do zero como “vazio” tem origem histórica, sendo este entrave um obstáculo epistemológico observado ao longo deste trabalho.

Além disso, identificou-se durante a análise do questionário o uso das generalizações de conceitos que geram erros. Sendo assim, esta barreira de aprendizagem também foi classificada como um obstáculo epistemológico, impedindo o desenvolvimento do conhecimento de forma correta.

A fim de atingir o terceiro objetivo específico, foi realizada uma oficina pedagógica para expor as indeterminações matemáticas envolvendo o zero na divisão e na potenciação. Esta oficina foi elaborada com uma abordagem direcionada para o Ensino Fundamental. Ao final desta oficina foi realizada uma entrevista em grupo com os participantes, buscando captar a percepção dos alunos quanto à temática abordada.

A análise dos dados obtidos na entrevista comprovou que os alunos, concluintes do curso de formação - Normal Médio, não tinham os conhecimentos adequados em relação às particularidades, em torno do zero, das operações apresentadas.

Os alunos demonstraram aversão à disciplina de matemática, o que faz com estes evitem lecionar conteúdos matemáticos nas aulas de estágio. No entanto, observou-se que a oficina pedagógica despertou o interesse dos alunos na temática que abarca o número zero.

Também pode ser constatado que antes da proposta didática apresentada, o zero não possuía relevância nos estudos dos participantes. Porém, diante do material que lhes foi entregue, os estudantes passaram a considerar a importância da abordagem minuciosa do zero ao ensinar a operação de divisão nos anos iniciais do EF.

Logo, acredita-se que foi proporcionado a estes estudantes reflexões no que tange ao processo de ensino e aprendizagem das indeterminações matemáticas que envolvem o zero na divisão e potenciação.

Tendo alcançado com êxito os objetivos específicos deste trabalho, cumpriu-se o objetivo geral, o qual consiste em: analisar as contribuições de uma proposta didática, voltada para a formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação no âmbito Ensino Fundamental.

Faz-se necessário ressaltar que os participantes desta pesquisa não possuem em seu curso uma disciplina voltada para o ensino da matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Logo, os resultados encontrados neste trabalho também podem estar relacionados a esta carência.

Em suma, ao desenvolver este trabalho, foi possível aperfeiçoar as técnicas de pesquisa e escrita acadêmica. Além disso, por meio deste estudo pude ampliar meus conhecimentos em relação ao número zero e as operações de divisão e potenciação, assim como entender o porquê das indeterminações matemáticas $0 \div 0$ e 0^0.

Para trabalhos futuros, indica-se o estudo de outros temas matemáticos, relacionando-os ao curso de formação de professores. Haja visto a carência deste público em relação à matemática. Outra sugestão é o desenvolvimento de pesquisas que sejam pautadas pela temática que versa sobre o número zero. Tal como o desenvolvimento de uma sequência didática com ênfase na abordagem histórica do surgimento do zero e os entraves encontrados ao longo dos anos nas diversas civilizações.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento. 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1996. 316 p.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos tempos**: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 296 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso: em 20 mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20 mar. 2023.

BROLEZZI, Antonio Carlos. O acesso à história da matemática pelo professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 35-50, 2000. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/564. Acesso em: 21 mar. 2023.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008. 128 p.

CAMPOS, F. A. B. de. A Indeterminação Zero Elevado a Zero: Saberes Disciplinares e Pedagógicos na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Revista de Educação** Matemática, *[S. l.]*, v. 17, p. 1-17, 2020. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/442. Acesso em: 1 mar. 2023.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2. ed. rev. São Paulo: Cortez, 1994. 119 p.

CURI , Edda. **Formação de professores polivalentes**: uma análise conhecimento para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. Orientador: Célia Maria Carolino Pires. 2004. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação Matemática, PUCSP, São Paulo, 2004.

D‘AMBROSIO, Ubiratan. A interface entre história e matemática uma visão histórico-pedagógica. **Revista de Matemática para Professores**, [*S. l.*], v. 7, n. 1, p. 41-64, 4 jun. 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67. Acesso em: 31 jan. 2024.

DAMIANI , Magda Floriano *et al*. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, n. 45, p. 57-67, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/caduc/article/view/3822. Acesso em: 19 abr. 2023.

DESSANTI , Diego Mathias. **Indeterminações**. Orientador: Roy Wilhelm Probst. 2017. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, 2017. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2758. Acesso em: 20 mar. 2023.

EÇA, J.L.M. **A Compreensão de estudantes de um curso de licenciatura em matemática sobre o número zero**. 2014. 112 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa, 2014.

EÇA, J.L.M. *et al*. Restrições aritméticas na multiplicação e na divisão envolvendo o zero: reflexões sobre os conhecimentos de licenciandos em matemática. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, n. 3, p. 235-255, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/8957. Acesso em: 10 fev. 2023.

EÇA, J.L.M. *et al*. Os Diferentes Olhares sobre o Zero por Licenciandos em Matemática. **INTERMATHS**, Vitória da Conquista, v. 2, n. 2, p. 119-139, 2021. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/8592. Acesso em: 10 fev. 2023

GERHARDT, T. E. et al. Estrutura do projeto de pesquisa. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-87. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 01 fev. 2024.

GIL, Antonio Carlos. Como delinear um levantamento?. *In*: GIL , Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. cap. 10, p. 111-116.

GIL , Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2021. 208 p.

GOMES, Maristela Gonçalves. Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos e o conhecimento matemático nos cursos de formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental. **Revista Contrapontos**, Itajaí - SC, ano 2, n. 6, p. 423-437, set./dez. 2002. Disponível em: https://periodicos.univali.br/index.php/rc/article/view/181. Acesso em: 2 fev. 2024.

GUIMARÃES, Fabiane; **Sentidos do zero**. 2008. 112p. Dissertação (Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11301. Acesso em: 31 mar. 2023.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos**: A inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Kandinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 715 p. v. 1.

IFRAH, Georges. **Os números:** A história de uma grande invenção. 10. ed. São Paulo: Globo, 2001. 367 p.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. *In*: DIAS Alcântara Machado, Silvia (org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 113-142.

LIMA, Elon Lages. Os três níveis da Matemática nas escolas brasileiras. *In*: LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2007. cap. 17, p. 160-174.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 6. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2012. 241 p.

LORENZATO, Sérgio. Os "Por Quês"‘ Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores. **Pro-posições**, Campinas, SP, ano 1993, v. 4, n. 1, ed. 10, p. 73-77, mar. 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/lancamentos/pro-posicoes-v-4-n-1-10-1993. Acesso em: 20 mar. 2023.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. 140 p.

MATIAS, Fernando. **O Tratado do Zero**: Quase tudo que se pode dizer sobre nada. Niterói-RJ: [*s. n.*], 2020. 120 p.

PAIAS, Ana Maria. **Obstáculos no ensino e na aprendizagem do objeto matemático potência**. Orientador: Saddo Ag Almouloud. 2019. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/22519. Acesso em: 31 jan. 2024.

SILVA, Robert Henrique Gonçalves. **Paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica**. Orientador: Marcelo Cristino Gama. 2022. 83 f. Tese (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia, São José dos Campos, 2022.

SILVA, R.S. **Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática**. 2015. 133 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, Vitória da Conquista, 2015. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_ROGERIO_STARICH_SILVA.pdf. Acesso em: 10 fev. 2023

SILVA, R.S. A formação inicial e os conceitos sobre dois temas controversos na prática do professor de matemática: indeterminação e divisão por zero. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. [*s.l.*]: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6574_2664_ID.pdf. Acesso em: 10 fev. 2023

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. *In*: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. cap. 2, p. 31-42. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 19 abr. 2023.

APÊNDICES

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO PARTE I

ALUNO ___

QUESTIONÁRIO - PARTE 1

1. Qual sua relação com a matemática?

( ) Gosto de matemática.

( ) Não gosto de matemática.

( ) É indiferente.

2. Usando uma escala de 0 a 5, onde **0** representa **nenhuma dificuldade** e **5** representa **extrema dificuldade**, como você classificaria sua **dificuldade em Matemática**?

( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5

3. Você conhece a história da origem do número zero?

( ) Conheço.

( ) Já ouvi falar, mas não sei narrá-la.

( ) Não conheço.

4. Qual o resultado da seguinte divisão: $0 \div 2$?

( ) 2

( ) 1

( ) 0

( ) Impossível de se obter.

5. Qual o resultado da seguinte divisão: $4 \div 0$?

( ) 4

( ) 0

( ) 1

( ) Impossível de se obter.

6. Qual o resultado da seguinte divisão: $0 \div 0$?

( ) 0

( ) 1

( ) Impossível de se obter.

( ) Indeterminado.

7. Qual o resultado da seguinte potência: 5^0?

( ) 5

( ) 0

( ) 1

( ) Indeterminado.

8. Qual o resultado da seguinte potência: 0^5?

( ) 0

( ) 1

( ) 5

( ) Indeterminado.

9. Qual o resultado da seguinte potência: 0^{-2}?

( ) 0

( ) -2

( ) Impossível de se obter.

( ) Indeterminado.

10. Qual o resultado da seguinte potência: 0^0?

( ) 0

( ) 1

( ) Impossível de se obter.

( ) Indeterminado.

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO PARTE II

ALUNO ___

QUESTIONÁRIO - PARTE 2

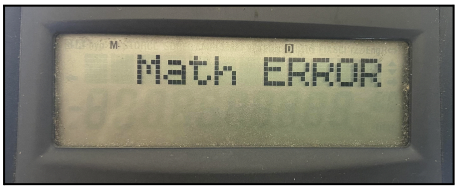
QUESTÃO 1

1. A) Durante uma aula de matemática do 5.º ano do Ensino Fundamental, o professor Gepetto distribui calculadoras para seus alunos, com a finalidade de ensiná-los a manusear a máquina e utilizá-la para resolver operações básicas.

Um dos alunos insere na calculadora a seguinte operação de divisão:

$$5 \div 0$$

Após apertar a tecla $=$, uma mensagem "*Math ERROR*" (**ERRO de Matemática)** aparece no *display* da calculadora:



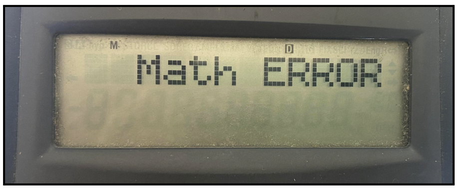
Como o professor Gepetto poderia explicar ao aluno a mensagem de erro no *display*?

Use o espaço abaixo para expor suas ideias por meio de texto, o qual pode ser complementado com ilustração/ desenho e exemplos numéricos.

1. B) No decorrer da aula, desta mesma turma do 5.° ano, outro aluno insere na calculadora a seguinte operação de divisão:

$$0 \div 0$$

Após apertar a tecla **=** , uma mensagem "*Math ERROR*" (**ERRO de Matemática),** idêntica à mostrada no item anterior, aparece no *display* da calculadora.



Nesta situação, como o professor Gepetto poderia explicar ao aluno a mensagem de erro no *display*?

Use o espaço abaixo para expor suas ideias por meio de texto, o qual pode ser complementado com ilustração/ desenho e exemplos numéricos.

QUESTÃO 2

Leia as afirmações a seguir:

I. Todo número elevado a zero é igual a um. Por exemplo: $3^0 = 1$ $\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$ $100000^0 = 1$ $(-5)^0 = 1$	**II. Zero elevado a qualquer número é igual a zero. Por exemplo:** $0^2 = 0$ $0^5 = 0$ $0^{100} = 0$

2. A) Durante as aulas de matemática no Ensino Fundamental e Médio, você já ouviu essas afirmações?

( ) Nunca ouvi nenhuma das afirmações.
( ) Ouvi apenas a afirmação I.
( ) Ouvi apenas a afirmação II.
( ) Já ouvi as duas afirmações.

2. B) Você concorda com a **afirmação I**?

( ) Sim
( ) Não
( ) Estou em dúvida.

2. C) Você concorda com a **afirmação II**?

( ) Sim
( ) Não
( ) Estou em dúvida.

QUESTÃO 3

Em muitos livros didáticos, o significado de expoente de um número é a quantidade de vezes em que a base aparece se repetindo na multiplicação por si própria.

- "Toda potência de expoente inteiro maior que 1 é igual ao produto de tantos fatores iguais à base quantas forem as unidades do expoente." (IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2018, p. 46)

A professora Elza ao apresentar que $2^0 = 1$, recebeu os seguintes questionamentos:

I. "*Como que 2 não se repete nenhuma vez e o resultado é igual a 1*?"
II. *"Zero elevado a zero também é igual a 1?"*

3. A) Como você explicaria o resultado $2^0=1$?

Use o espaço abaixo para expor suas ideias por meio de texto, o qual pode ser complementado com ilustração/ desenho e exemplos numéricos.

3. B) Estaria correto afirmar para o aluno que $0^0=1$? Justifique sua resposta.

Use o espaço abaixo para expor suas ideias por meio de texto, o qual pode ser complementado com ilustração/ desenho e exemplos numéricos.

APÊNDICE C - TERMO CONSENTIMENTO I

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) estudante, este questionário faz parte de uma pesquisa feita por mim, Marina Martins de Oliveira de Jesus, licencianda do curso de Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro (IFF), sob orientação do professor Me. Leandro Sopeletto Carreiro. O objetivo da pesquisa é investigar quais as contribuições de uma proposta didática para auxiliar os professores em formação na abordagem das indeterminações matemáticas no Ensino Fundamental I, envolvendo o zero na divisão e potenciação.

Solicito sua contribuição para responder este questionário, em que estarão contidas perguntas a respeito de suas percepções em relação às operações de divisão e potenciação envolvendo o zero. Por isso, peço sua permissão, por meio do presente termo, para uso dos resultados coletados e posteriormente a sua publicação.

Deixo claro que a sua participação não acarretará em nenhum gasto ou compensação financeira e que sua colaboração é voluntária. Sua identidade será precisamente preservada no momento da divulgação dos dados coletados.

Esclareço ainda que esta pesquisa tem fins exclusivamente acadêmicos e que sua participação será de grande auxílio.

Quaisquer dúvidas ou perguntas a respeito da pesquisa poderão ser elucidadas, por meio do meu email m.marina@gsuite.iff.edu.br. Meu orientador também está disponível no email leandro.carreiro@iff.edu.br. Agradecemos pela sua cooperação nesta pesquisa.

Eu____, inscrito no CPF______________________________, aceito participar da pesquisa acima descrita, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do participante

APÊNDICE D - APOSTILA

APOSTILA

OPERAÇÕES DE DIVISÃO E POTENCIAÇÃO ENVOLVENDO O ZERO:

UMA PROPOSTA PARA ABORDAGEM DAS INDETERMINAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Marina Martins de Oliveira de Jesus
Orientador: Leandro Sopeletto Carreiro

Aluno (a):______________________

Outubro - 2023

1. Zero na operação de divisão

1.1. Operação de divisão – Base Nacional Comum Curricular

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF) iniciam o contato com as operações básicas da matemática. A operação de divisão entre números naturais é apresentada ao aluno durante o 3.º ano do EF e desenvolvida ao longo dos 4.º e 5.º anos do EF. Veja o quadro abaixo, elaborado de acordo com a BNCC.

3.º ano do Ensino Fundamental	4.º ano do Ensino Fundamental	5.º ano do Ensino Fundamental
(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.	**(EF04MA04)** Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. **(EF04MA05)** Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo. **(EF04MA07)** Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	**(EF05MA08)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

1.2. Zero na divisão

Observe as duas afirmações, a seguir, em relação ao comportamento do zero na divisão atuando como dividendo e divisor.

Dividir **zero** por **um número qualquer não nulo** é uma operação **possível** que resulta em **zero**.

Exemplo:

$$0 \div 4 = 0$$

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível.**

Exemplo:

$$4 \div 0 = \boxed{\nexists}$$

Símbolo matemático para “NÃO EXISTE"

A partir destas assertivas é feito o seguinte questionamento:

Por que o zero não pode atuar como divisor na operação de divisão?

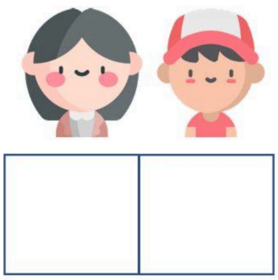
É possível responder tal indagação por meio da **definição de divisão**. No entanto, sugere-se que nos anos iniciais do ensino fundamental, o professor inicie esta explanação por meio de uma **atividade** envolvendo uma situação-problema.

POR QUE O ZERO NÃO PODE ATUAR COMO DIVISOR NA OPERAÇÃO DE DIVISÃO?

ATIVIDADE

1 A professora Maria chegou na turma do 5.º ano do Ensino Fundamental e encontrou apenas **5 alunos** em sala. Então, ela decidiu dividir igualmente **10 balas** entre os 5 **alunos** que ali se encontravam. Quantas balas cada aluno recebeu?

2 Trinta minutos após a divisão das balas, os **2 alunos** que faltavam chegaram para compor a turma. Neste momento, a professora não possuía mais **nenhuma bala**. Quantas balas esses alunos receberam?



3 No dia seguinte, a professora Maria levou **14 balas** para dividir entre os **7 alunos** da turma do 5.º ano. No entanto, nenhum aluno compareceu à aula. A professora Maria conseguiu dividir as **14 balas** entre os alunos?

POR QUE O ZERO NÃO PODE ATUAR COMO DIVISOR NA OPERAÇÃO DE DIVISÃO?

DEFINIÇÃO DA DIVISÃO

Algoritmo da divisão:

(Dividendo) D | d (divisor)

(Resto) r q (quociente)

$$(q \times d) + r = D$$

Propriedades importantes sobre o resto da divisão:

- O resto é menor que o divisor;
  $resto\ (r) < divisor\ (d)$
- O resto é menor que o dividendo;
  $resto\ (r) < dividendo\ (D)$
- O resto é sempre maior ou igual a zero.
  $resto\ (r) \geq zero$

Exemplo numérico usando a definição de divisão

$$10 \div 2 = 5$$

$$\begin{array}{rr|l} \textbf{(Dividendo)} & 10 & 2 \ \textbf{(divisor)} \\ \cline{3-3} & -10 & 5 \ \times \\ \cline{2-2} \textbf{(Resto)} & 0 & \textbf{(quociente)} \end{array}$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{2}) + \mathbf{0} = \mathbf{10}$$

$$23 \div 3 \cong 7$$

$$\begin{array}{rr|l} \textbf{(Dividendo)} & 23 & 3 \ \textbf{(divisor)} \\ \cline{3-3} & -21 & 7 \ \times \\ \cline{2-2} \textbf{(Resto)} & 2 & \textbf{(quociente)} \end{array}$$

$$(\mathbf{7} \times \mathbf{3}) + \mathbf{2} = \mathbf{23}$$

Dividir **zero** por **um número qualquer não nulo** é uma operação **possível** que resulta em **zero**.

***Exemplos numéricos*:**

$$0 \div 5 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \ \times \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(\mathbf{0} \times \mathbf{5}) + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$0 \div 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 12 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \ \times \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(\mathbf{0} \times 12) + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

<u>Importante</u>: O produto entre **zero** e **um número qualquer**, resulta em **zero.**

Generalização:

$$0 \div \boldsymbol{d} = 0 \begin{cases} \begin{array}{r|l} 0 & d \\ \cline{2-2} -0 & 0 \ \times \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \\ \mathbf{0} \times \boldsymbol{d} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível.**

Sendo $\boldsymbol{dividendo\ (D)} \neq \mathbf{0}$

***Exemplos numéricos*:**

$2 \div 0 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 \\ \hline -0 & q \\ 2 & \end{array}$$

$$\underbrace{(\boldsymbol{q} \times \mathbf{0})}_{} + \boldsymbol{r} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{q} \times \mathbf{0} = 0$$

Conclusão:

$\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$

Lembre-se que:
$resto\ (\boldsymbol{r}) < dividendo\ (\boldsymbol{D})$
Ou seja, o **resto** deve ser **diferente** e **menor** que o **dividendo**.
Neste caso, o resto é igual ao dividendo, logo não ocorreu a divisão.

$$\boxed{2 \div 0 = impossível}$$

Vamos exercitar!

A partir do exemplo anterior, resolva $15 \div 0$

Generalização:

$$\begin{array}{l|l} D & 0 \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\underbrace{(\boldsymbol{q} \times \mathbf{0})}_{} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{D}$$

O produto entre um **número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

$$\boxed{\boldsymbol{q} \times \mathbf{0} = 0}$$

Logo:

$\boldsymbol{q} \times \mathbf{0} \neq \boldsymbol{D}$

e

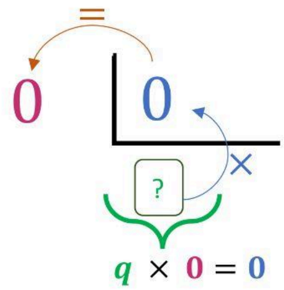
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{D}$

Se o **resto** é **igual** ao **dividendo**, então não ocorreu a divisão. Sendo assim, afirma-se que:

$$D \div 0 = impossível$$

Dividir **zero** por **ele próprio** é uma operação com resultado **indeterminado**.

Classifica-se $0 \div 0$ como uma **indeterminação matemática.** Por meio da definição da divisão é possível explicar o porquê desta indeterminação.



O produto entre um **número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

Exemplo: $5 \times 0 = 0$

$12 \times 0 = 0$

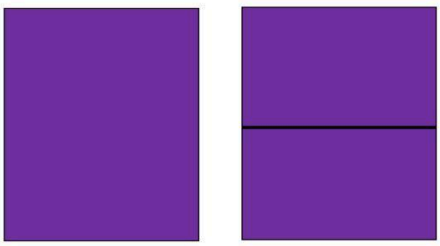
Nesta situação, pode-se atribuir **qualquer valor** a incógnita $\boldsymbol{q}$, ou seja, é um **valor indeterminado**. Justificando assim classificar $\mathbf{0 \div 0}$ como uma **indeterminação matemática.**

2. Zero na operação de potenciação

2.1. Operação de potenciação

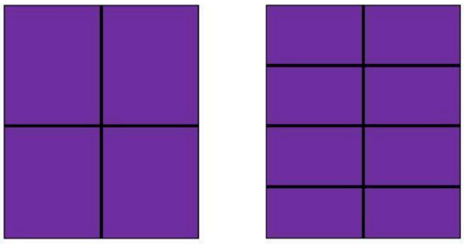
Dinâmica com folha A4:

Pegue uma folha A4 e dobre-a ao meio. Observe quantos retângulos se formou a partir desta dobra.



1 dobra = 2 retângulos

Em seguida, a partir da primeira dobra, dobre a folha ao meio novamente, observando mais uma vez a quantidade de retângulos formados. Posteriormente, partindo da segunda dobra feita anteriormente, faça mais uma dobra, ao meio e indique o número de retângulos gerados.



2 dobras = 4 retângulos 3 dobras = 8 retângulos

Existe uma relação entre a potência de base 2 e as dobraduras feitas na folha A4, juntamente com os retângulos formados por consequência destas. Observe o quadro abaixo:

Número de dobras	Retângulos formados	Potência de base 2
0	1	$2^0 = 1$
1	2	$2^1 = 2$
2	4 = 2 x 2	$2^2 = 4$
3	8 = 2 x 2 x 2	$2^3 = 8$
4		

Exercício: Complete na tabela acima, se a partir da 3.º dobra fosse feita mais uma dobradura que dividisse está ao meio. Quantos retângulos se formariam? Qual é a potência de base 2 análoga a 4.º dobra?

Definição de potência:

Seja $\boldsymbol{a}$ um número real e $\boldsymbol{n}$ um número inteiro maior que 1, temos que:

Expoente

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{Potência é a multiplicação de } n \text{ fatores iguais.}}$$

Base

Exemplo:

$$\mathbf{3^4} = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$\mathbf{3^4} = \mathbf{81}$$

Particularidades da potenciação:

- **Potência de expoente 1**

$a^1 = a$

Qualquer que seja o número real a

Exemplo:

$5^1 = 5$

- **Potência de expoente 0**

$a^0 = 1$

Qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Exemplo:

$6^0 = 1$

2.2. Zero na potenciação

Você sabia que por meio da propriedade de divisão de potência de mesma base, é possível explicar a afirmação apresentada abaixo?

$$a^0 = 1$$

Qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Relembrando a divisão de potência de mesma base:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Exemplo:

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$$

Tal operação pode ser explicada da seguinte maneira:

$$\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7 \times 7 = 7^2$$

$\Rightarrow$ Explicação para $\boldsymbol{a^0 = 1}$, sendo $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Considere que os valores de m e n sejam iguais, ou seja $m = n$.

Então suponha que: $m = n = 4$ e $a = 3$

$$\frac{3^4}{3^4} = \frac{81}{81} = 1$$

$$\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0$$

$$\boxed{3^0 = 1}$$

Generalizando a explicação acima:

Considere: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$

Logo, $a^{m} = a^{n} = \boldsymbol{k}$

Sendo assim, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \boldsymbol{a^0}$

Porém, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{k}{k} = \mathbf{1}$

Então, conclui-se que:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Observa-se a partir da definição que nem todo número elevado a zero, resulta em 1. Pois $a^0 = 1$, se $a \neq 0$. Neste caso, você acha que 0^0 é uma operação possível?

$\mathbf{0^0}$ é uma **indeterminação matemática**.

Por que o resultado de $\mathbf{0^0}$ é indeterminado?

Tal resultado indeterminado pode ser explicado por meio da propriedade de divisão de potência de mesma base. Observe o exemplo numérico abaixo:

$$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$$

Considere $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, deste modo tem-se que:

$$\boxed{\frac{\mathbf{0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0}}{\mathbf{0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0}}} = \frac{\mathbf{0^5}}{\mathbf{0^5}} = \mathbf{0^{5-5}} = \mathbf{0^0} = \boldsymbol{indeterminado}$$

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \mathbf{0 \div 0} = \boldsymbol{indeterminado}$$

Generalizando a explicação para $0^0 = indeterminado$

Suponha que $m = n$, então $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$

Agora, considere $a = 0$

Logo teremos:

$$\frac{0}{0} = \frac{0^m}{0^n} = 0^{m-n} = 0^0 = indeterminado$$

$$0 \div 0 = indeterminado$$

APÊNDICE E - SLIDES

OPERAÇÕES DE DIVISÃO E POTENCIAÇÃO ENVOLVENDO O ZERO:

Uma proposta didática para a abordagem das indeterminações matemáticas no Ensino Fundamental

Marina Martins de Oliveira de Jesus

Orientador: Leandro Sopeletto Carreiro

Outubro - 2023

01

Zero na operação de divisão

Abordagem para o Ensino Fundamental

1.1 - Operação de divisão

BNCC

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**), nos anos iniciais do Ensino Fundamental os alunos tem o primeiro contato com as operações básicas da matemática.

- **3.° ano do Ensino Fundamental** – Resolver e elaborar problemas de **divisão** de um número natural por outro (até 10), com resto zero e diferente de zero.
- **4.° ano do Ensino Fundamental** – Resolver e elaborar problemas de **divisão** cujo divisor tenha no máximo dois algarismos.
- **5.° ano do Ensino Fundamental** – Resolver e elaborar problemas de **divisão** com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita.

Na **calculadora,** faça as seguintes operações:

I	II	III
$0 \div 4$	$4 \div 0$	$0 \div 0$

- Há diferença entre os resultados das operações **I, II** e **III**?

1.2 - Zero na divisão

Dividir **zero** por **um número qualquer não nulo** é uma operação **possível** que resulta em zero.

$$0 \div 4 = 0$$

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível**.

$$4 \div 0 = \boxed{\nexists}$$

Símbolo matemático para **"NÃO EXISTE"**

Por que o zero não pode atuar como divisor na operação de divisão?

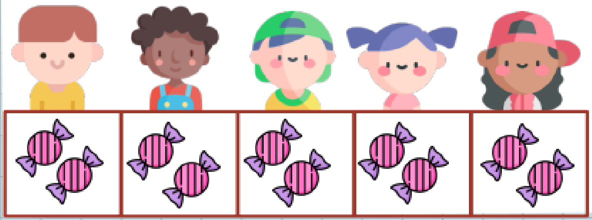
ATIVIDADE

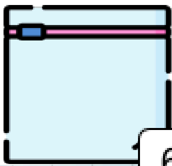
ATIVIDADE

1.2 – Zero na divisão

01 A professora Maria chegou na turma do 5º ano do Ensino Fundamental e encontrou apenas **5 alunos** em sala. Então, ela decidiu dividir igualmente **10 balas** entre os **5 alunos** que ali se encontravam. Quantas balas cada aluno recebeu?

$$10 \div 5 = 2$$

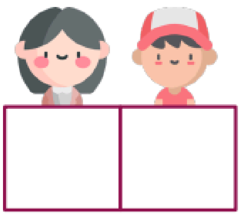




ATIVIDADE

1.2 – Zero na divisão

02 Trinta minutos após a divisão das balas, os **2 alunos** que faltavam chegaram para compor a turma. Neste momento, a professora não possuía mais **nenhuma bala**. Quantas balas esses alunos receberam?



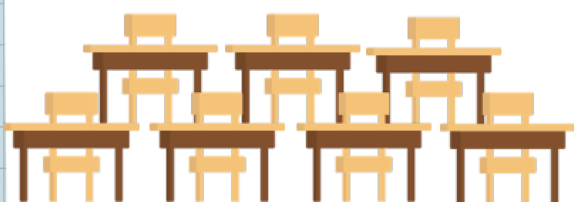
$$0 \div 2 = 0$$

ATIVIDADE

1.2 – Zero na divisão

03 No dia seguinte, a professora Maria levou **14 balas** para dividir entre os **7 alunos** da turma do 5.º ano. No entanto, nenhum aluno compareceu à aula. A professora Maria conseguiu dividir as **14 balas** entre os alunos?

$$14 \div 0 = Impossível$$



Por que o zero não pode atuar como divisor na operação de divisão?

EXPLICAÇÃO POR MEIO DA DEFINIÇÃO DA DIVISÃO

1.2 – Zero na divisão

DEFINIÇÃO DA DIVISÃO

(Dividendo) D | d (divisor)

(Resto) r | q (quociente)

$$(q \times d) + \boxed{r} = D$$

Propriedades importantes sobre o resto da divisão

- O resto é menor que o divisor;
  $\textit{resto}\ (r) < \textit{divisor}\ (d)$
- O resto é menor que o dividendo;
  $\textit{resto}\ (r) < \textit{dividendo}\ (D)$
- O resto é sempre maior ou igual a zero.
  $\textit{resto}\ (r) \geq \textit{zero}$

1.2 – Zero na divisão

Exemplos numérico usando a definição da divisão

$$10 \div 2 = 5$$

(Dividendo) 10 | 2 (divisor)

-10 | 5 (quociente)

(Resto) 0

$$(5 \times 2) + 0 = 10$$

$$23 \div 3 \cong 7$$

(Dividendo) 23 | 3 (divisor)

-21 | 7 (quociente)

(Resto) 2

$$(7 \times 3) + 2 = 23$$

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **zero** por **um número qualquer não nulo** é uma operação **possível** que resulta em zero.

$$0 \div 5 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(\mathbf{0} \times \mathbf{5}) + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$0 \div 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 12 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(\mathbf{0} \times \mathbf{12}) + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

O produto entre **zero** e **um número qualquer**, resulta em **zero**.

12

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **zero** por **um número qualquer não nulo** é uma operação **possível** que resulta em zero.

$$0 \div \boldsymbol{d} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{r|l} 0 & d \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \\ (\mathbf{0} \times \boldsymbol{d}) + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

O produto entre um **zero** e **um número qualquer**, resulta em **zero**.

13

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível.**

Sendo $\boldsymbol{dividendo\ (D)} \neq \mathbf{0}$

$$2 \div 0 = \boxed{?}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 \\ \cline{2-2} -0 & q \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\underbrace{(\boxed{?} \times \mathbf{0})}_{\boldsymbol{q} \times \mathbf{0} = 0} + \boldsymbol{r} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$$

Lembre-se que:
$\boldsymbol{resto\ (r)} < \boldsymbol{dividendo\ (D)}$
Ou seja, o **resto** deve ser **diferente** e **menor** que o **dividendo**.

$$2 \div 0 = impossível$$

O produto entre **um número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

14

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível**.

Sendo $dividendo\ (D) \neq 0$

$$15 \div 0 = \boxed{?}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 0 \\ \cline{2-2} -\ 0 & q \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$r = 15$$

Lembre-se que:
$resto\ (r) < dividendo\ (D)$
Ou seja, o resto deve ser **diferente** e **menor** que o dividendo.

$$\underbrace{(\boxed{?} \times 0)}_{q \times 0 = 0} + r = 15$$

$$15 \div 0 = impossível$$

O produto entre **um número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível**.

Sendo $dividendo\ (D) \neq 0$

$$D \div 0 = impossível$$

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **um número qualquer não nulo** por **zero** é uma operação **impossível**.

Sendo $dividendo\ (D) \neq 0$

$$\begin{array}{r|l} D & 0 \\ \cline{2-2} -\ 0 & q \\ \hline D & \end{array}$$

$r = D$ — Se o resto é igual ao dividendo, então não ocorreu a divisão

$resto\ (r) < dividendo\ (D)$
Ou seja, o resto deve ser **diferente** e **menor** que o dividendo.

$$\underbrace{q \times 0}_{q \times 0 = 0} + r = D$$

O produto entre um **número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

Então:

$$D \div 0 = impossível$$

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **zero** por **ele próprio** é uma operação com resultado **indeterminado**.

Indeterminação matemática

$$0 \div 0 = Indeterminado$$

Por que?

DEFINIÇÃO DIVISÃO

1.2 - Zero na divisão

Dividir **zero** por **ele próprio** é uma operação com resultado **indeterminado**.

DEFINIÇÃO DA DIVISÃO

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

$$(q \times d) + r = D$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 0 \\ \hline & ? \end{array}$$

$$\underbrace{q \times 0 = 0}$$

O produto entre um **número qualquer** e **zero**, resulta em **zero**.

$$5 \times 0 = 0$$

$$12 \times 0 = 0$$

Nesta situação, pode-se atribuir **qualquer valor** a incógnita q.

Justificando assim classificar $\mathbf{0 \div 0}$ como uma **indeterminação matemática**.

02

Zero na operação de potenciação

Abordagem para o Ensino Fundamental

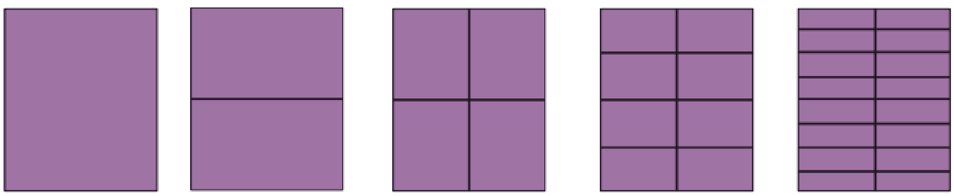
2.1 - Operação de Potenciação

BNCC

Segundo a BNCC, o conteúdo de Potenciação é introduzido aos alunos no 6.º ano do Ensino Fundamental.

2.1 – Operação de Potenciação

Revisão



0 dobras	1 dobra	2 dobras	3 dobras	4 dobras
1 retângulo	2 retângulos	4 retângulos	8 retângulos	16 retângulos
		2×2	$2\times2\times2$	$2\times2\times2\times2$
$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$

2.1 – Operação de Potenciação

Revisão

Seja a um número real e n um número inteiro maior que 1.

Expoente

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{Potência é a multiplicação de } n \text{ fatores iguais.}}$$

Base

Exemplo $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$3^4 = 81$

2.1 – Operação de Potenciação

Revisão

- *Potência de expoente 1*

$$a^1 = a$$

Qualquer que seja o número real a

Exemplo $5^1 = 5$

- *Potência de expoente 0*

$$a^0 = 1$$

Qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Exemplo $6^0 = 1$

2.2 – Zero na Potenciação

Por que?

$a^0 = 1$ → Qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Para explicar a afirmação acima, usaremos uma das **propriedades da potenciação.**

Divisão de potência de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

2.2 – Zero na Potenciação

Divisão de potência de mesma base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Explicação por meio de exemplo :

$7^5 \div 7^3$

$$\frac{7^5}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7\times7 = 7^2$$

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$$

2.2 – Zero na Potenciação

Por que?

$a^0 = 1$, qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Considere que os valores de m e n sejam iguais, ou seja $m = n$.

Então suponha que: $m = n = 4$ e $a = 3$

$$\frac{3^4}{3^4} = \frac{81}{81} = 1$$

$$\underbrace{\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0}$$

$$\boxed{3^0 = 1}$$

A partir da propriedade de potência divisão de mesma base.

Divisão de potência de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

2.2 – Zero na Potenciação

$a^0 = 1$, qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Por que?

Considere: $m = n$

Logo, $a^m = a^n = k$

Sendo assim, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$

Porém, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{k}{k} = 1$

Então, conclui-se que:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

2.2 – Zero na Potenciação

Todo número elevado a **zero** resulta em **1**?

NÃO!

$a^0 = 1$, qualquer que seja o número real a sendo $a \neq 0$.

Nesta situação se $a = 0$, teremos:

$$\boxed{0^0 = \textit{indeterminado}}$$

2.2 – Zero na Potenciação

Por que?

0^0 é uma **indeterminação matemática**.

A partir da definição da divisão de potência de mesma base tem-se que:

$$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$$

Agora, considere $a = 0$

$$\frac{0}{0} = 0 \div 0 = indeterminado$$

$$\frac{0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0}{0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0} = \frac{0^5}{0^5} = 0^{5-5} = 0^0 = indeterminado$$

2.2 – Zero na Potenciação

0^0 é uma **indeterminação matemática**.

Por que?

Suponha que $m = n$, então $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$

Agora, considere $a = 0$

Logo teremos:

$$\frac{0}{0} = \frac{0^m}{0^n} = 0^{m-n} = 0^0 = indeterminado$$

$0 \div 0 = indeterminado$

APÊNDICES F - ROTEIRO DA ENTREVISTA EM GRUPO

Roteiro da entrevista em grupo

I . Vocês tinham noção desses "problemas" nas operações de divisão e potenciação envolvendo o zero? Isso foi apresentado a vocês em algum momento da sua vida como estudante?

II . Depois do que foi apresentado nesta oficina pedagógica, vocês acham que agora conseguem diferenciar o que é impossível e indeterminado nas operações de divisão e potenciação envolvendo o zero?

III. Vocês já deram alguma aula (em estágio, ou aula particular) que abordava a divisão? Como foi a experiência?

IV. Você acredita que esta oficina trouxe um novo olhar para a maneira que você abordaria o zero na hora de lecionar sobre a divisão?

V. Você passaria a destacar nas suas aulas a operação de divisão envolvendo o zero que é impossível e a operação de divisão que é uma indeterminação matemática? Explicando o porquê matemático da impossibilidade e da indeterminação.

VI. Vocês usariam o material aqui apresentado, como material de apoio para a elaboração das suas aulas?

VII. Qual grau de importância essa oficina pedagógica teve na sua construção de conhecimento matemático?

VIII. Quais são as impressões gerais que vocês tiveram em relação à oficina? Vocês acham que existe algo a acrescentar?

APÊNDICES G - TRANSCRIÇÃO ENTREVISTA EM GRUPO

Transcrição da entrevista em grupo

Marina: Vou começar perguntando a vocês se vocês já tinham noção desses problemas que foram apresentados aqui, dessas operações de divisão e de potência, envolvendo o zero. Isso já tinha sido apresentado a vocês? Já tinham visto isso antes?

Aluno A': Alguns sim.

Aluno B': O meu só a potência que não.

Marina: E aí gente? Nunca foi apresentado a vocês isso? Na escola ....

Aluno C': Eu só prestei atenção no zero depois que você aplicou aquele testezinho

Aluno B': Sim, realmente

Marina: Vocês também? Então, vocês nunca tinham visto isso antes, né?

Aluno C': Só ignorava. Zero com tudo, zero…

Marina: Sempre foi falado pra vocês que dividir por zero não pode e acabou. É isso?

Aluno C': É

Aluno B': A potência que era assim, ah, todo número elevado a zero vai dar um. Ah, aí, assim, caia até isso na prova, eu até gravei isso, todo número elevado a zero, um. Aí eu colocava logo, lá um, um.

Marina: Sem restringir?

Aluno B': Sim, sem restringir.

Marina: E aí, depois do que foi apresentado aqui na oficina, vocês acham que vocês agora conseguem diferenciar, tipo, ah, essa operação aqui é impossível, essa aqui é indeterminada, envolvendo a divisão e a potência? Se perguntar pra vocês agora, cinco dividido por zero é o que?

Aluno B': Zero.

Aluno C': Impossível.

Aluno D': Impossível.

Aluno C': Zero vezes cinco daria zero.

Aluno B': Isso.

Marina: Então, vocês vão conseguir diferenciar a partir de agora, será?

Aluna C': Acho que sim. Se a gente não esquecer, acho que sim.

Aluno B': É. Mas a gente olhando a conta, dá pra lembrar, tipo, você falando, ah, vai ser indeterminado.

Marina: E, vocês já deram aula de estágio? Já, né?

Aluno B': Já.

Aluna C': Já

Marina: Já deram alguma aula de matemática no estágio?

[Neste momento, ressalta-se que a maioria da turma fez um sinal com a cabeça indicando negação.]

Aluno B': Já. Minha matéria preferida.

Marina : E como que foi? Trabalhou a divisão, quando você deu a aula?

Aluno B': Não, eu dei, foi o primeiro ano, eu trabalhei soma e vizinhos. Vizinho não, antecessor e sucessor.

Marina: Então, ninguém nunca trabalhou matemática na aula de estágio?

Aluno B': Eu vou trabalhar multiplicação agora, mas não com zero. No quarto ano.

Marina : Mas, vai aparecer um zero lá sim

Aluno B': Eu não lembro se eu coloquei o zero na atividade.

Marina: Então, agora pode colocar

Aluno B': Já tá pronta, já tá até impresso.

Marina: Você já deu aula no estágio?

Aluno E': Já, mas não matemática. Eu corro de matemática.

Aluno A': Não, matemática.

Marina: Ah, você não gosta de matemática? Porque?

Aluno E': Por quê? Porque ela não gosta de mim. Nunca gostou e eu também nunca gostei dela.

Marina : Ah, você achou difícil? O que vimos aqui hoje.

Aluno E': Não.

Marina: Conseguiu acompanhar?

Aluno E': Consegui. Mas, se mandar eu fazer, eu não sei fazer.

Marina: Ah, então você acha que se você for olhar agora uma conta, para diferenciar se ela é indeterminada ou se ela é impossível, você não vai conseguir?

Aluno E': Não. Você vê que eu to em dependência em matemática, menina. Tô na beira do poço, tô quase perdendo de série por causa da matemática do ano passado, quem dirá desse ano.

Marina: Então, é mais um pavor que você tem de matemática? Criou um bloqueio? É isso?

Aluno E': É...

Aluno E': Eu tenho dificuldade de matemática desde pequena. E todos os professores chamaram minha mãe na escola. Minha mãe sempre ia na escola por causa da matemática. Eu sempre fui chamada em todos os conselhos de classe. Reuniões de professor, de mãe, por causa de matemática. Já fiz aula de reforço de matemática. Dia de sábado eu estudava só matemática. Mas é minha negação. Eu acho que eu tenho um "laudozinho". É porque eu nunca fiz exame melhor. Mas eu acho que eu tenho um laudo.

Marina: Vocês também não gostam de matemática?

[A maioria dos alunos respondeu a pergunta indicando que não gostam da disciplina]

Aluno B': Eu amo.

Aluno C': Eu penso que não amo. Eu sei o suficiente pra passar.

Marina: Vocês também não?

Aluno D': Negação também.

Aluno F': Negação também.

Marina: Então ninguém nunca deu uma aula que envolveu divisão, né?

Aluno C': Mas agora a gente vai ser obrigado, né? A gente tem que dar uma aula de português e uma aula de matemática

Marina: Então, olha eu dei um tema pra vocês

Aluno C': Eu dei até uma olhada nessa apostila aqui, se a gente usar não vai ser plágio?

Marina: Pode usar

Marina: Todo mundo trabalhando divisão agora . E aí, vocês acreditam que essa oficina aqui trouxe pra vocês um novo olhar da maneira que se aborda o zero. Da abordagem do zero para lecionar a divisão. Trouxe um novo olhar para vocês?

Aluno C': Sim

Aluno B': Eu não sabia que o Zero era tão difícil assim.

Aluno E': Foi o que eu falei, eu não prestava atenção no zero

Aluno F': O Zero é excluído

Aluno C': Por incrível que pareça ele é o primeiro e ele sempre foi excluído. Ignorado, coitado.

Marina: Nas aulas que vocês vão dar futuramente, como professores dos anos iniciais, vocês vão ter que trabalhar a divisão. Vocês destacariam o zero? A indeterminação e a impossibilidade de dividir por Zero?

Aluno B': Sim e Tipo, eu vejo em todas as estágios que não é destacado o zero.

Aluno C': E as crianças fazem perguntas de tudo pra gente . Tia, por que que tem que ser assim? Porque sim. Não me pergunte o porquê. Eles adoram falar porque. Se for porque em História, em Geografia, em Português, até vai. Mas agora em Matemática não.

Aluno E': Teve um estágio que eu fiz semana passada, que teve aula de Matemática, e a professora pediu pra eu ir ajudar o aluno. Aí eu fui lá ajudar, né? Mas pra mim o aluno sabia fazer atividade. Aí chegou na hora, e ele pegou e falou assim, ô tia, você tá no terceiro ano, você não sabe Matemática. Aí eu, não, a tia não sabe. Aí eu pedi pra professora, falei assim, olha, não pede pra eu ajudar em Matemática, que eu sou uma negação em Matemática. Aí ela, não, não, tudo bem. Mas ele virou a minha cara e falou, ,ô tia, você tá no terceiro ano e você não sabe Matemática.

Marina: Vocês usariam esse material aí, que foi passado pra vocês para preparar uma aula?

Aluno F': Sim

Aluno D': Com certeza

Aluno B': Sim, ta muito explicadinho

Aluno C': Nós vamos usar. Gente, eu já avisei que eu vou usar.

Aluno D': Vamos vê quem usa primeiro

Marina: Então vocês vão dar aula de estágio com esse material. Vocês acham que essa oficina pedagógica contribuiu para construção de conhecimento matemático de vocês?

Aluno C': Sim. Eu gostei da historinha da mariazinha.

Marina: E pode ser usada nas aulas de matemática. Vocês não tinham conhecimento nenhum dessa parte da divisão? Como foi dada a divisão para vocês, nos anos iniciais?

Aluno C': Você tem 10 balinhas, você tem 2 amiguinhas, você tem que dar essas balinhas para todos os amiguinhos. 5 para cada. E você fica com quantas? Zero

Aluno B': Fazia o desenhozinho e dividia.

Aluno E': O meu, pra estudar foi uma conturbação. Porque eu estudava em escola particular, aí, no final, eu fui pra pública, aí, depois, eu voltei pra particular, aí, no final, eu fiquei na pública. A escola particular e pública são totalmente diferentes. Entendeu? Então, ai... Que bagunça.

Marina: E nem na particular, nunca destacaram nada sobre indeterminação, impossibilidade envolvendo o zero?

Aluno E': Não. Eu sempre fui uma negação. Minha mãe sempre estava lá na escola, toda semana ela estava lá. Sempre foi nota vermelha em matemática. É triste, mas é a vida…

Marina: Vocês têm alguma coisa a acrescentar? Quais foram as impressões gerais que vocês tiveram sobre a oficina? O que vocês acharam?

Aluno C': Eu amei seu slide

Aluno E': Eu achei uma gracinha.

Aluno B': A organização perfeita.

Aluna E': Foi bem, tipo, interativo. Parabéns.

Aluna C’: A explicação foi muito boa.

Professora da turma: Eu achei a explicação muito boa, maravilhoso. O material está perfeito.

Marina: Então, eu espero que vocês usem esse material para as aulas de vocês. Não só no estágio, mas nas futuras escolas que vocês forem dar aula. Sintam-se à vontade, a intenção é essa.. que vocês mostrem aos alunos a possibilidade, a impossibilidade e a indeterminação envolvendo o zero na divisão.

APÊNDICE H - TERMO CONSENTIMENTO II

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) estudante, esta oficina pedagógica faz parte de uma pesquisa feita por mim, Marina Martins de Oliveira de Jesus, licencianda do curso de Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro (IFF), sob orientação do professor Me. Leandro Sopeletto Carreiro. O objetivo da pesquisa é analisar as contribuições de uma proposta didática, na formação inicial de professores, que discorre sobre as indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no Ensino Fundamental.

Solicito sua participação nesta oficina pedagógica, na qual será apresentada uma proposta didática para abordagem das indeterminações matemáticas envolvendo o zero, na divisão e potenciação, no Ensino Fundamental.

Para coleta de dados, este encontro será gravado. Ressalto, que as gravações obtidas serão mantidas em sigilo, apenas os pesquisadores desta pesquisa terão acesso.

Por isso, peço sua permissão, por meio do presente termo, para uso dos resultados coletados e posteriormente a sua publicação.

Deixo claro que a sua participação não acarretará em nenhum gasto ou compensação financeira e que sua colaboração é voluntária. Sua identidade será precisamente preservada no momento da divulgação dos dados coletados.

Esclareço ainda que esta pesquisa tem fins exclusivamente acadêmicos e que sua participação será de grande auxílio.

Quaisquer dúvidas ou perguntas a respeito da pesquisa poderão ser elucidadas, por meio do meu email m.marina@gsuite.iff.edu.br. Meu orientador também está disponível no email leandro.carreiro@iff.edu.br. Agradecemos pela sua cooperação nesta pesquisa.

Eu____, inscrito no CPF______________________________, aceito participar da pesquisa acima descrita, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do participante