MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELLEN CRISTINA FERREIRA MENDES

MARIA THEREZA DO CARMO PEREIRA

PROVANDO EM MATEMÁTICA: uma prática de argumentação

Campos dos Goytacazes/ RJ

Setembro – 2024.1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

***CAMPUS* CAMPOS CENTRO**

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELLEN CRISTINA FERREIRA MENDES

MARIA THEREZA DO CARMO PEREIRA

PROVANDO EM MATEMÁTICA: uma prática de argumentação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues

Campos dos Goytacazes/RJ

Setembro – 2024.1

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

M49p

Mendes, Ellen Cristina Ferreira
PROVANDO EM MATEMÁTICA: uma prática de argumentação / Ellen Cristina Ferreira Mendes, Maria Thereza do Carmo Pereira - 2024.
140 f.: il. color.

Orientadora: Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2024.
Referências: f. 1 a 21.

1. Provas Matemáticas. 2. Ensino Básico. 3. Formação de Professores. 4. Caderno de provas matemáticas. I. Pereira, Maria Thereza do Carmo . II. Rodrigues, Schirlane dos Santos Aguiar, orient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ELLEN CRISTINA FERREIRA MENDES

MARIA THEREZA DO CARMO PEREIRA

PROVANDO EM MATEMÁTICA: uma prática de argumentação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 16 de setembro de 2024.

Banca Examinadora:

Ana Paula Rangel de Andrade

Ana Paula Rangel de Andrade
Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade/UCAM
IFFluminense Campus Campos Centro

Carla Antunes F.

Carla Antunes Fontes
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ
IFFluminense Campus Campos Centro

Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues

Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues (Orientadora)
Mestre em Matemática/UENF
IFFluminense Campus Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Eu, Ellen, agradeço a minha mãe, Cristina Cruz Ferreira, por todo apoio e amor durante a graduação. Eu não teria conseguido sem você, metade das minhas conquistas são suas. Agradeço também a minha dupla, Maria Thereza, por sua amizade, apoio e parceria, neste trabalho e na vida.

Eu, Maria Thereza, agradeço imensamente aos meus pais, meu porto seguro, que sempre me incentivaram, ajudaram e apoiaram todos os meus sonhos, permitindo que eu concluísse esta etapa tão importante. Não poderia deixar de agradecer a minha dupla, Ellen, por acreditar em mim e se fazer presente em todos os momentos, não apenas na elaboração deste trabalho, você me faz melhor.

Nós agradecemos a nossa orientadora Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues por tornar este trabalho possível, pelas horas dedicadas a essa pesquisa, por todo conhecimento compartilhado conosco e pelos laços desenvolvidos. Seremos eternamente gratas por nos ajudar no início de nossa caminhada como pesquisadoras.

Agradecemos, também, à Amanda Jacomini, Juliana Vieira e Matheus de Barros por tornarem a graduação mais leve e estarem presentes em todos os momentos.

"[...] definições sem explicação servem aos matemáticos apenas para dificultar o entendimento aos não-iniciados, e, assim, aumentar a autoridade dos primeiros."

(Vladmir Arnold)

RESUMO

A Matemática na Educação Básica deve contribuir para a formação integral do cidadão. Uma das habilidades necessárias para tal formação é a de construir argumentos. Nesta ótica, a utilização de provas matemáticas em sala de aula pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos. Assim, considerou-se relevante desenvolver o presente trabalho com o objetivo de investigar as percepções de professores de Matemática acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tanto, optou-se por uma pesquisa do tipo qualitativa durante a qual elaborou-se um produto educacional, o "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação", que contém provas matemáticas destinadas aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Aplicou-se, também, um minicurso que teve como público-alvo professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental com o objetivo de expor e diferenciar os conceitos de argumentação, prova matemática e demonstração, exemplificar provas matemáticas e apresentar o "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação". Na implementação da pesquisa foram utilizados como instrumentos de coleta de dados a observação, um questionário e uma entrevista semiestruturada. Deste modo, concluiu-se que os professores participantes desta pesquisa percebem o uso de provas matemáticas em sala de aula como relevante e benéfico ao processo de aprendizagem dos alunos. Eles consideram as provas, principalmente as provas pragmáticas, um importante recurso para esclarecer dúvidas dos alunos. Além disso, na opinião das autoras, o produto educacional desenvolvido no âmbito desta pesquisa tem potencial de repercutir na prática docente dos participantes da pesquisa e de outros que tiverem acesso a esse material.

Palavras-chave: Provas Matemáticas. Demonstração. Ensino Básico. Formação de Professores. Caderno de provas matemáticas.

ABSTRACT

Mathematics in Basic Education must contribute to the integral formation of citizens. One of the skills for such formation is the ability to construct arguments. From this perspective, the use of mathematical proofs in the classroom can contribute to the development of students' argumentative ability. Therefore, it is currently relevant to develop this work with the aim of investigating the perceptions of Math teachers regarding the use of argumentation and mathematical proof in Secondary School. To this end, we opted for qualitative research during which we developed an educational product, the “Mathematical Proof Notebook: practicing argumentation”, which contains mathematical proofs provided for Secondary School. A mini-course was also carried out with the target audience of Secondary School Math teachers with the aim of exposing and differentiating the concepts of argumentation, mathematical proof and demonstration, exemplifying mathematical proofs and presenting the “Mathematical Proof Notebook: practicing argumentation”. While implementing the research, the following were used as data collection instruments: observation, a questionnaire and a semi-structured interview. Thus, it was concluded that the teachers participating in this research perceived the use of mathematical proofs in the classroom as relevant and beneficial to the students' learning process. They consider proofs, especially pragmatic proofs, an important resource to clarify students’ doubts. Furthermore, in the authors’ opinions, the educational product developed within the scope of this research has the potential to have an impact on the teaching practice of research participants and others who have access to this material.

Keywords: Mathematical Proofs. Demonstration. Basic Education. Teacher Training. Mathematical proof notebook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O interesse em pesquisar sobre argumentação e prova surgiu a partir do momento que as autoras perceberam a curiosidade dos alunos quanto às justificativas matemáticas de determinadas fórmulas e propriedades. Tais percepções ocorreram durante as experiências das autoras em sala de aula, nos contextos do estágio e da monitoria. Nessas situações, as explicações apresentadas aguçaram o interesse dos alunos, que mostraram empolgação em compreender os "por quês" matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ressaltam o papel da Matemática na formação integral dos cidadãos (Brasil, 1998, 2018). No Ensino Fundamental, esta disciplina, de acordo com a BNCC, objetiva "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (Brasil, 2018, p. 267).

Todavia, Rigo (2021) aponta que o ensino de Matemática tem sido baseado em procedimentos mecânicos e repetitivos, nos quais chega-se a um resultado sem a compreensão do processo utilizado para tanto. Tal método de ensino apresenta prejuízos ao desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade do aluno.

Deste modo, é pertinente que se trabalhe a argumentação em Matemática a fim de estimular a curiosidade dos alunos e o interesse nas justificativas e "por quês" matemáticos (Brasil, 1998), dado que "a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação [...]" (Brasil, 1998, p.70). Sendo o professor quem possui contato direto com os alunos e conduz a aula, Rigo (2021) afirma que:

> O grande mentor e o único que será capaz de mudar essa história será o professor de matemática, que ensina os seus alunos a utilizar as fórmulas matemáticas, mas não ensina a sua origem e como chegar até elas. Assim sendo, a argumentação é um dos caminhos para os alunos atingirem uma formação efetivamente matemática (Rigo, 2021, p. 11).

Deste modo, a questão de pesquisa deste trabalho é: Quais as percepções de professores de Matemática participantes do minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" e da análise do "Caderno de Provas Matemáticas:

praticando a argumentação” acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental?. Para responder à questão de pesquisa, elaborou-se o seguinte objetivo geral: investigar as percepções de professores de Matemática participantes do minicurso “Provando em Matemática: uma prática de argumentação” e da análise do “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Portanto, aplicou-se o minicurso “Provando em Matemática: uma prática de argumentação” para professores atuantes nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Este minicurso tem como intuito expor e exemplificar os conceitos de argumentação, prova e demonstração, apresentar o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” aos participantes e, após o minicurso, aplicar os instrumentos de coleta de dados para obter as opiniões desses professores.

O “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” trata-se de um produto educacional elaborado pelas autoras deste trabalho e é destinado a professores de Matemática. O caderno contém provas matemáticas referentes a conteúdos dos Anos Finais dos Ensino Fundamental de Geometria, Álgebra e Aritmética. O caderno contém provas pragmáticas e intelectuais, apresentando mais de uma prova para alguns enunciados.

Na elaboração do caderno, optou-se pelo uso de uma linguagem informal para se aproximar do contexto da sala de aula. Além disso, o caderno possui sugestões para o professor e etiquetas com o ano de escolaridade para o qual cada prova é recomendada.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro esta Introdução. O segundo capítulo, Revisão da Literatura, é dividido em três seções: i) Definição e diferenciação de argumentação, prova e demonstração; ii) Tipos de prova; e iii) Argumentação e prova matemática na Educação Básica.

O terceiro capítulo trata dos procedimentos metodológicos adotados durante o presente trabalho. Sua primeira seção caracteriza a pesquisa explicitando: o tipo de pesquisa; suas etapas; o público-alvo; e os instrumentos de coleta de dados. Em sequência, a segunda seção contém o detalhamento das etapas da pesquisa .

No quarto capítulo, são apresentados os resultados dos testes exploratórios, na primeira seção, e da implementação, na segunda seção. Sobre os testes exploratórios, são destacadas as mudanças sugeridas pelos participantes nos materiais elaborados, bem como as justificativas para aceitação ou rejeição de cada uma delas. Na segunda seção, a implementação do minicurso é descrita e os dados coletados pelo questionário e pela entrevista são apresentados. Além disso, os resultados obtidos em toda a implementação da pesquisa são analisados e discutidos à luz do referencial teórico deste trabalho.

O quinto e último capítulo, Considerações Finais, trata das conclusões extraídas a partir dos dados obtidos durante a pesquisa. Apresenta, também, contribuições para a trajetória acadêmica e prática docente das autoras e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica do presente trabalho de conclusão de curso e é dividido em três seções. A primeira objetiva definir e diferenciar argumentação, prova e demonstração. Na segunda, são apresentados os tipos de provas e, na terceira seção, é abordada a argumentação e a prova no contexto da Educação Básica.

2.1 Definição e diferenciação de argumentação, prova e demonstração

Nesta seção serão abordadas as definições, com base em Balacheff[1], de argumentação, prova e demonstração, bem como as relações entre elas. Balacheff (2022a) aponta que a definição de argumentação é controversa no meio científico. No entanto, pode-se entendê-la como um meio de convencimento da veracidade de uma afirmativa. Neste âmbito, o processo de desenvolvimento da argumentação é individual, ou seja, intrínseco àquele que elabora o argumento (Balacheff, 2022a).

A argumentação também é definida como um organismo lógico formado por premissas e pelas conclusões que podem ser obtidas por meio de uma sequência de inferências lógicas aplicadas às premissas (Maritain, 2001 *apud* Rosale, 2018). Todavia, as conclusões podem ser falsas se as inferências lógicas forem utilizadas de maneira equivocada devido à interpretação errônea das premissas ou à adoção de premissas falsas por parte de quem produz o argumento (Balacheff, 2022a; Matheus, 2016).

Uma argumentação matemática passa a ser reconhecida como prova matemática quando seu valor epistêmico, ou seja, o valor atribuído a ela por meio da interpretação de quem produz o argumento, coincide com o seu valor ôntico, ou seja, seu valor factual. Deste modo, uma argumentação matemática verídica é uma

---

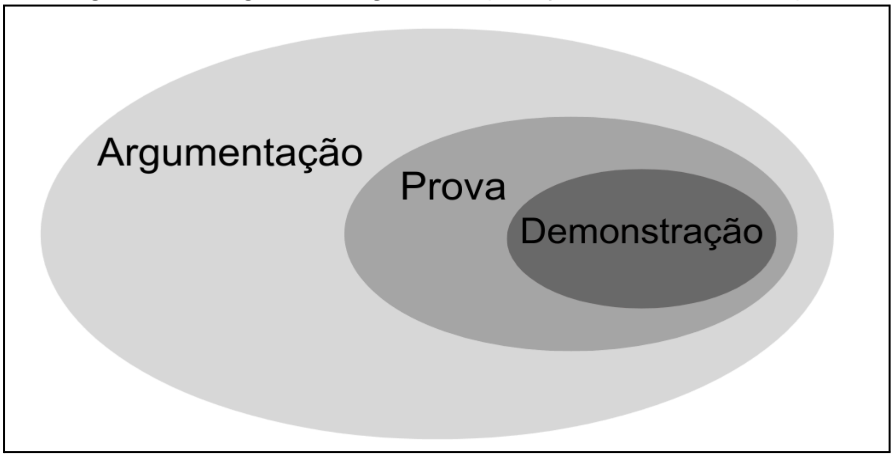
[1] Nicolas Balacheff é formado em Matemática Pura e em Informática Teórica. Possui doutorado em Didática Matemática com a tese sobre Aprendizagem de prova em Matemática. Atualmente é diretor emérito de pesquisa do Centre national de la recherche scientifique (CNRS) e membro da equipe de Modelos e Tecnologias para Aprendizagem Humana (MeTAH) no Laboratório de Informática Grenoble (LIG) (PUC-SP, [s.d]).

prova matemática. A prova é o único tipo de argumentação admitido no meio matemático (Balacheff, 2022a).

Matheus (2016, p. 26) destaca que “[...] a prova em matemática é vista como uma forma de argumentação compartilhada socialmente; devendo ser aceita por uma comunidade (uma turma escolar e seu professor, por exemplo)”, relacionando argumentação e prova pelo alcance de sua aceitação. A prova pode ser aceita apenas por uma determinada comunidade ou grupo em determinado contexto (Matheus, 2016; Balacheff, 2022a).

Já a demonstração é uma prova aceita por toda a comunidade matemática científica, uma vez que atende aos requisitos técnicos e formais de uma estrutura padronizada. Esta estrutura é capaz de garantir a validade de um argumento (Balacheff, 2022a). Sendo assim, uma demonstração é um tipo de prova matemática, que por sua vez, é um tipo de argumentação matemática (Balacheff, 2022a). A relação entre estas é evidenciada na Figura 1.

Figura 1 - Diagrama: Argumentação, prova e demonstração

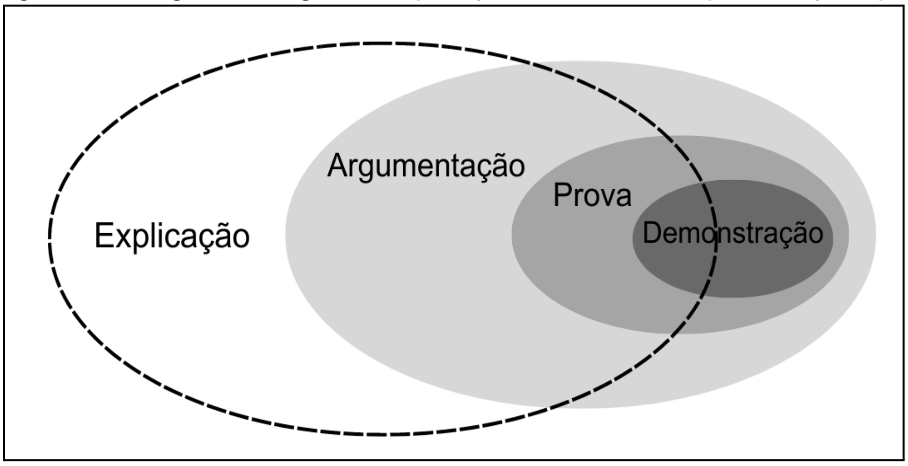


Fonte: Elaboração própria a partir de Balacheff (2022a, p. 832).

Todas estas são formas de validação matemática e possuem potencial explicativo, que pode ou não se concretizar. Segundo Balacheff (1987, p. 147-148 *apud* Matheus 2016, p. 20), a explicação é “[...] um discurso que visa tornar compreensível a veracidade de uma proposição em que crê o sujeito que explica”.

Sendo assim, diz-se que a argumentação, a prova ou a demonstração são explicativas quando são inteligíveis, conforme ilustrado na Figura 2. Destas, Balacheff (2022a) aponta a demonstração como a mais suscetível à perda do caráter explicativo devido ao rigor de sua estrutura. Neste trabalho, pretende-se utilizar provas matemáticas com caráter explicativo.

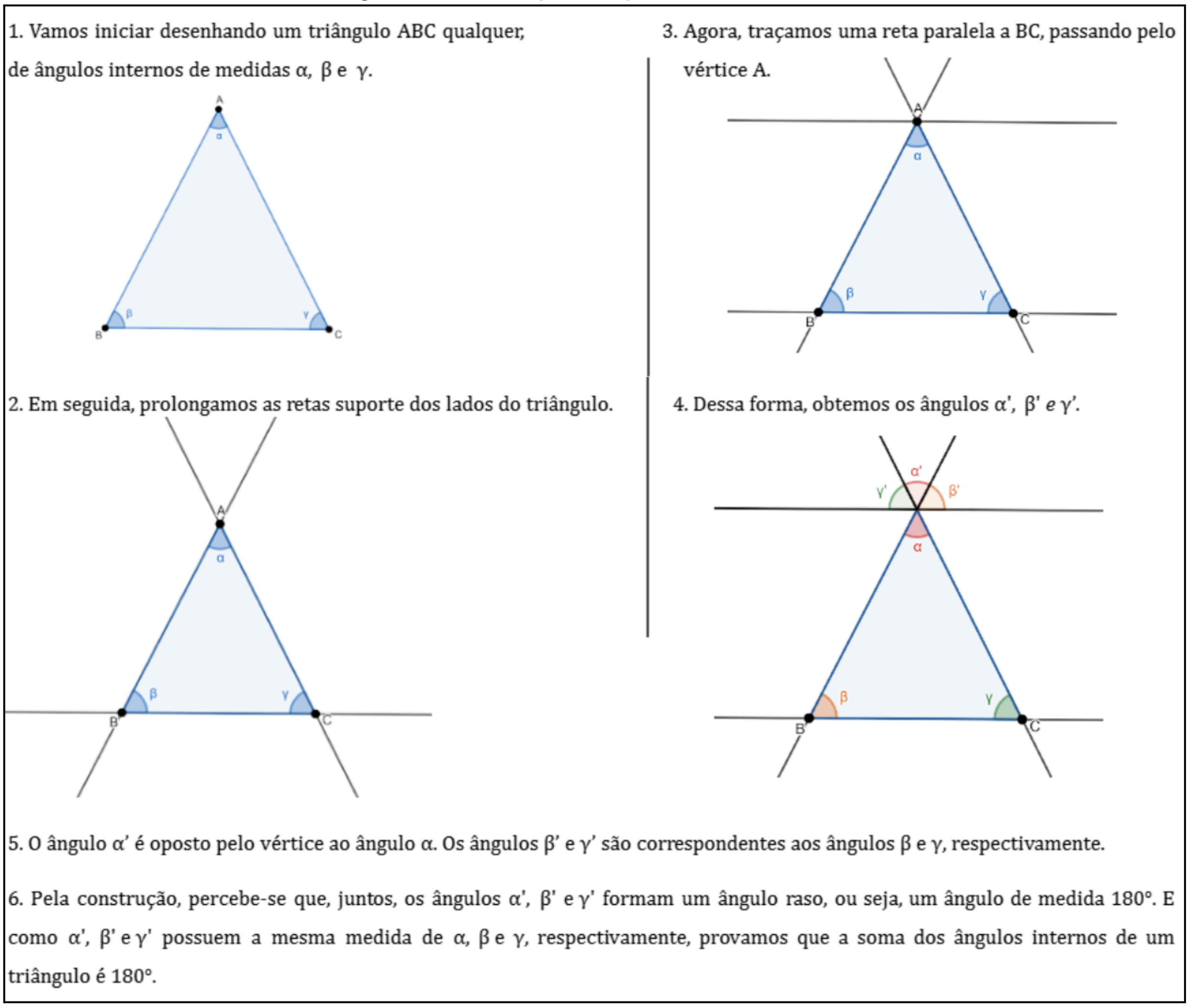
Figura 2 - Diagrama: Argumentação, prova, demonstração e explicação



Fonte: Elaboração própria a partir de Balacheff (2022a, p. 832).

A fim de elucidar a diferença entre uma prova matemática e uma demonstração, segue um exemplo de uma prova matemática (Figura 3) e de uma demonstração do teorema “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Figura 3 - Exemplo de prova matemática



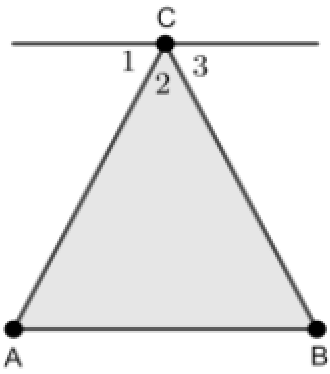
Fonte: Elaboração própria.

A demonstração deste mesmo teorema (Figura 4) utiliza as mesmas propriedades, porém possui uma linguagem matemática mais rigorosa e possui menor potencial explicativo.

Figura 4 - Exemplo de uma demonstração

Teorema 6.6 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.*

Demonstração: Considere o triângulo ABC. No ponto C considere uma reta paralela ao lado AB, como na figura e enumere os ângulos formados



Observe que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$. Note que AC é transversal a duas paralelas. Assim, $\hat{A} = \hat{1}$. Analogamente, $\hat{B} = \hat{3}$. Desta forma, $\hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$ ∎

Fonte: Holanda (2020, p. 31-32).

2.2 Caracterização das provas matemáticas

Esta seção trata das definições e diferenças entre as categorias e os tipos de prova matemática e aborda algumas funções da prova matemática.

2.2.1 Categorias de prova

Esta pesquisa tem enfoque nas provas matemáticas, em detrimento das demonstrações, visto que “[...] é excessivo esperar que alunos da Educação Básica elaborem demonstrações, especialmente se não houver um trabalho contínuo e de longo prazo nesse sentido” (Matheus, 2016, p. 33). Trabalho este que não está presente na realidade escolar brasileira (Matheus, 2016).

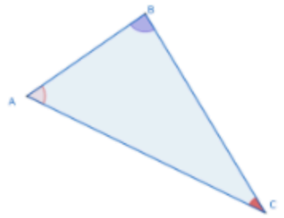
Deste modo, é pertinente definir as categorias de prova a fim de elucidar quais serão abordados. Balacheff (2022b) classifica as provas em duas categorias: provas pragmáticas e provas intelectuais. “Denominamos provas pragmáticas aquelas provas que dependem da ação, e de provas intelectuais aquelas que utilizam verbalizações das propriedades dos objetos e de suas relações” (Balacheff, 2022b, p.705).

A caracterização das provas pragmáticas dá-se pela natureza prática de seu desenvolvimento. Tais provas não precisam de uma linguagem específica, podendo ser construídas por meio da visualização de exemplos, de desenhos (nos quais se observam padrões) ou da linguagem materna (natural ao indivíduo), como exemplificado na Figura 5. Por isso, consideram-se estas provas com alcance limitado, imposto pelas barreiras de generalização advindas da linguagem utilizada e de terem como base saberes práticos, sem fundamentação teórica (Balacheff, 2022b).

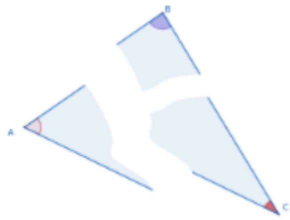
Figura 5 - Exemplo de prova pragmática

Materiais necessários: folha branca, régua, tesoura, lápis de cor e cola.

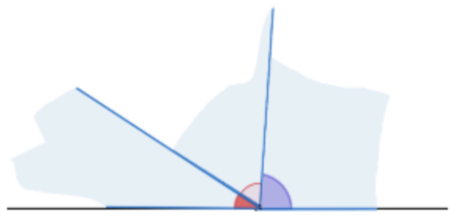
1. Distribua uma folha para cada aluno e peça que cada um deles desenhe um triângulo com o auxílio da régua.
2. Peça que eles pintem os ângulos dos triângulos, um de cada cor.



3. Em seguida, solicite que eles rasguem os triângulos em 3 partes, de modo que cada ângulo fique em uma das partes.



4. Peça para que os alunos desenhem uma reta em outra folha e marquem um ponto sobre essa reta.
5. Instrua-os a colar as partes do triângulo sobre um dos lados da reta, de modo que cada vértice do triângulo coincida com o ponto marcado, sem que as partes se sobreponham, como na figura.



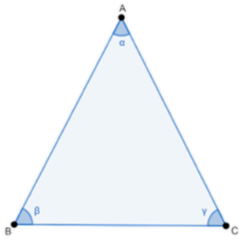
6. Peça aos alunos que olhem as figuras formadas por eles e digam qual é a medida do ângulo formado pela junção dos três ângulos internos do triângulo.
7. Formalize, então, com eles que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

Fonte: Elaboração própria.

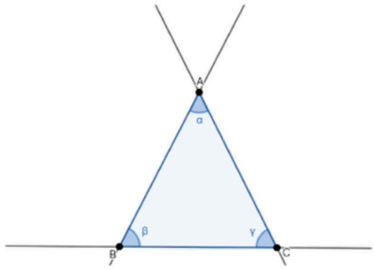
Quanto às provas intelectuais, caracterizam-se pela necessidade de uma base de conhecimentos teóricos que, juntamente à apropriação de uma linguagem adequada, possibilita a abstração e generalização, como exemplificado pela prova na Figura 6. Compreende-se como linguagem adequada ao processo de prova aquela que possibilita a apresentação dos elementos e suas propriedades e a elucidação das relações entre eles (Balacheff, 2022b).

Figura 6 - Exemplo de prova intelectual

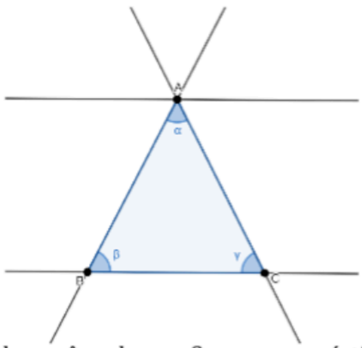
Desenhamos um triângulo ABC qualquer, de ângulos desconhecidos α, β e γ.



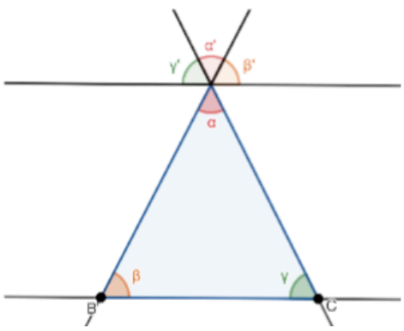
Em seguida, prolongamos as retas suporte dos lados do triângulo.



Agora, traçamos uma reta paralela a BC, passando pelo vértice A.



Agora iremos transladar os ângulos α, β e γ para o vértice A.



O ângulo α' é oposto pelo vértice ao ângulo α. Os ângulos β' γ'' são correspondentes aos ân respectivamente.

Pela construção, percebe-se que, juntos, os ângulos α', β' e γ' formam um ângulo raso. E co mesma medida de de α, β e γ, respectivamente, provamos que a soma dos ângulos interno

Fonte: Elaboração própria.

Vale ressaltar que durante o desenvolvimento de uma prova pragmática podem ocorrer equívocos que levem a resultados falsos. Neste caso, o processo desenvolvido não será caracterizado como uma prova, visto que em uma prova o resultado obtido deve ser verdadeiro (Balacheff, 2022a; Matheus, 2016).

2.2.2 Funções da prova matemática

De Villiers (1990) entende que a prova matemática pode ter diferentes funções. Algumas destas funções são: a verificação, a explicação, a sistematização, a descoberta e a comunicação. A função assumida por uma prova depende da percepção, do conhecimento prévio e da intenção de quem está provando (De Villiers, 2001).

Tradicionalmente, as provas matemáticas são utilizadas com a função de verificação, tendo o objetivo de atestar a veracidade de um resultado. Em geral, há uma confiança prévia na veracidade deste resultado que motiva o desenvolvimento da prova para a confirmação (De Villiers, 1990).

Ao utilizar uma prova com a função de explicação não se questiona a veracidade do resultado, mas pretende-se compreender o porquê deste resultado ser verdadeiro. Neste momento, a atenção de quem prova está voltada para o esclarecimento do processo de prova, uma vez que seu resultado já é conhecido (Matheus, 2016). Destaca-se que é pertinente utilizar a prova com este intuito na sala de aula, mostrando aos alunos que a prova vai além de um instrumento de verificação (De Villiers; Mudaly, 2000).

A função de sistematização tem o papel de relacionar e organizar, por meio do sistema lógico-dedutivo, verdades matemáticas que não necessariamente possuíam relação prévia, de modo a chegar em outras verdades matemáticas (Rosale, 2018). A função de descoberta da prova dá-se por meio de um processo investigativo, no qual, através da análise de axiomas e teoremas, chega-se a uma nova verdade matemática (De Villiers, 1990).

De Villiers (1990) também aponta a prova como uma forma de interação social, um meio de comunicação dos saberes matemáticos e de construção de conhecimentos. Neste momento de interação, trabalha-se a capacidade argumentativa e crítica, levando o indivíduo à compreensão do que é um argumento aceitável. Os indivíduos envolvidos podem ser matemáticos, alunos, professores ou externos à comunidade acadêmica (Rosale, 2018).

2.3 A argumentação e a prova matemática na Educação Básica

Os PCN (Brasil, 1998) atribuem ao ensino da Matemática o dever de desenvolver a capacidade de argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio ligadas à construção de argumentos por meio de induções, deduções, analogias e estimativas. Com isso, pretende-se incentivar os alunos a buscarem justificativas para as respostas e afirmações obtidas, não apenas aceitando sem questionar o que lhes é proposto (Brasil, 1998).

Nesta perspectiva, Rosale (2018, p. 28) afirma que “[...] para conhecer uma coisa não é meramente suficiente se acreditar nela. É necessário ter razões convincentes”. A aplicação de tal criticidade estende-se para além da Matemática. Dessa forma, o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos também é relevante fora do contexto escolar (Rosale, 2018). Além disso, incluir a argumentação desde o início da formação matemática do aluno possibilita a ruptura com práticas mecanicistas, como a repetição de exercícios e memorização irrefletida de fórmulas (Rigo, 2021).

Rosale (2018) também critica o mecanicismo e descreve o modelo de aula tradicional como aquele no qual o aluno aprende a seguir um algoritmo apenas replicando o exemplo do professor. O autor defende a ruptura com este modelo por não favorecer o uso do raciocínio, e assim, não propiciar o desenvolvimento da argumentação matemática.

Os PCN (Brasil, 1998) evidenciam a importância da argumentação na Educação Básica e a BNCC (Brasil, 2018) trata a capacidade de produzir argumentos convincentes como uma competência a ser desenvolvida nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Em contrapartida, Rosale (2018) ressalta que verificou em sua experiência em sala de aula que as provas matemáticas não são incluídas na prática pedagógica da Educação Básica.

Sob esta ótica, Matheus (2018) observa uma contradição entre a prática pedagógica de professores de Matemática que não utilizam a argumentação em suas aulas e o fato destes concordarem quanto à importância do desenvolvimento do raciocínio lógico na Educação Básica. Tal contradição deve-se à ligação intrínseca entre raciocínio lógico e argumentação (Matheus, 2018).

A esse respeito, Matheus (2018) também afirma que embora em sua pesquisa não tenham sido encontrados dados que assegurem numericamente a ausência de provas matemáticas na Educação Básica, "[...] em muitos dos textos brasileiros parece haver um consenso tácito sobre essa ausência" (Matheus, 2018, p. 67).

Além disso, a autora aponta o mau resultado da avaliação de larga escala Programme for International Student Assessment (PISA) no Brasil como uma evidência indireta da ausência da argumentação na Educação Básica, uma vez que o PISA avalia aspectos relacionados à argumentação, raciocínio e ao letramento matemático (Matheus, 2018).

Esta ausência contribui para "a dificuldade de muitos alunos em justificar o seu raciocínio, ou até mesmo seguir uma linha básica de argumentação" (Rosale, 2018, p.15). Nesta perspectiva, Caldato, Utsumi e Nasser (2017, p. 76) afirmam que "os alunos explicitam melhor seus argumentos matemáticos quando são colocados em contato com atividades, currículo e professor preparados para a construção desta habilidade".

Rigo (2021) reforça esta afirmação ao apontar que a capacidade argumentativa não tem sido desenvolvida na Educação Básica e propõe explicações para tal problemática. A autora relaciona essa carência à prática dos professores, destacando como possíveis empecilhos o ensino mecanicista e a indisposição do professor, que opta pelo comodismo. Reconhece, porém, que há mais trabalho envolvido em promover uma aula com argumentação e prova, na qual se faz necessário escutar e compreender o aluno (Rigo, 2021).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo está dividido em duas seções. A primeira apresenta a caracterização da pesquisa, esclarecendo o tipo da pesquisa, suas etapas, os instrumentos de coleta de dados e o público-alvo. A segunda traz o detalhamento das etapas da pesquisa, sendo elas: i) planejamento, que inclui a elaboração de um caderno de provas matemáticas, de um minicurso e dos instrumentos de coleta de dados; ii) testes exploratórios e; iii) implementação.

3.1 Caracterização da pesquisa

Este trabalho consiste em uma pesquisa do tipo qualitativa, uma vez que esta "[...] se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais" (Fonseca, 2002, p. 20). Os aspectos da pesquisa qualitativa de maior destaque neste trabalho são: os dados não serem numéricos, uma vez que estes terão como base a vivência e opinião dos professores participantes da pesquisa; e a maior proximidade do pesquisador com o objeto de estudo (Fonseca, 2002).

Com esta pesquisa pretende-se alcançar o seguinte objetivo: investigar as percepções de professores de Matemática participantes do minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" e da análise do "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação" acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Sendo assim, o público-alvo são professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Estes professores participam de um minicurso que tem por objetivo expor e diferenciar os conceitos de argumentação, prova matemática e demonstração, exemplificar provas matemáticas e apresentar o Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação. Este caderno contém sugestões de provas matemáticas e orientações ao professor de como utilizá-las em sala de aula.

Durante o minicurso, um dos instrumentos de coleta de dados adotado é a observação que "[...] consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar" (Gerhardt *et al*., 2009, p. 74). Como a observação utilizada ocorre de maneira espontânea e sem utilizar do rigor de mecanismos técnicos para a coleta de dados, é classificada como observação do tipo simples (Gerhard *et al*., 2009).

Por meio da observação, busca-se captar as opiniões dos professores participantes sobre: a possibilidade de uso de provas matemáticas em sala de aula, potenciais dificuldades dos alunos com as provas matemáticas e as dificuldades do professor em desenvolver e relacionar as provas matemáticas com o conteúdo programático e o tempo em sala de aula.

Após o minicurso, aplica-se um questionário dividido em dois blocos. Entende-se por questionário “[...] um instrumento de coleta de dados constituído por uma série ordenada de perguntas que devem ser respondidas por escrito pelo informante [...]” (Gerhardt *et al*., 2009, p. 69). Destaca-se que as respostas não possuem influência dos pesquisadores.

O primeiro bloco deste questionário objetiva traçar o perfil dos participantes da pesquisa, com perguntas relacionadas ao tempo de docência e ao contato prévio com os conceitos matemáticos de argumentação, prova e demonstração. O segundo bloco visa investigar a opinião destes professores acerca do uso da prova matemática em sala de aula e da relevância do “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação”.

Optou-se pelo questionário como um dos instrumentos de coleta de dados, pois este “objetiva levantar opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas” (Gerhardt *et al*., 2009, p. 69). Por ser respondido de forma individual e sem a influência dos pesquisadores, o questionário evita dados distorcidos (Gerhardt *et al*., 2009). Além de possibilitar que respostas de diversas pessoas sejam coletadas simultaneamente (Moreira; Caleffe, 2008).

Com o objetivo de complementar as respostas obtidas no questionário, optou-se, também, pelo uso de uma entrevista que “é uma técnica de interação social, uma forma de diálogo assimétrico, em que uma das partes busca obter dados, e a outra se apresenta como fonte de informação [..]” (Gerhardt *et al*., 2009, p. 72).

Por meio da entrevista é possível obter dados ainda não documentados. Além disso, este instrumento de coleta de dados potencializa a obtenção de respostas mais elaboradas e esclarecedoras, portanto acredita-se que os dados obtidos possuem maior nível de profundidade (Gerhard *et al*., 2009).

O tipo de entrevista adotado foi entrevista semiestruturada. Neste tipo de entrevista

> o pesquisador organiza um conjunto de questões (roteiro) sobre o tema que está sendo estudado, mas permite, e às vezes até incentiva, que o entrevistado fale livremente sobre assuntos que vão surgindo como desdobramentos do tema principal (Gerhard *et al*., 2009, p. 72).

Diante do exposto e com o objetivo de responder a questão de pesquisa deste trabalho: “Quais as percepções de professores de Matemática que participaram do minicurso “Provando em Matemática: uma prática de argumentação” e da análise do “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental?”, foram traçadas as seguintes etapas da pesquisa:

i) Revisão Bibliográfica;

ii) Planejamento, que consta da elaboração do minicurso, do caderno de provas matemáticas e dos instrumentos de coleta de dados;

v) Testes exploratórios;

vi) Análise dos resultados dos testes;

vii) Implementação das ações propostas com o público alvo;

viii) Análise dos dados coletados;

ix) Escrita da monografia.

3.2 Detalhamento das Etapas da Pesquisa

Esta seção descreve o planejamento, os testes exploratórios A e B e a implementação da pesquisa.

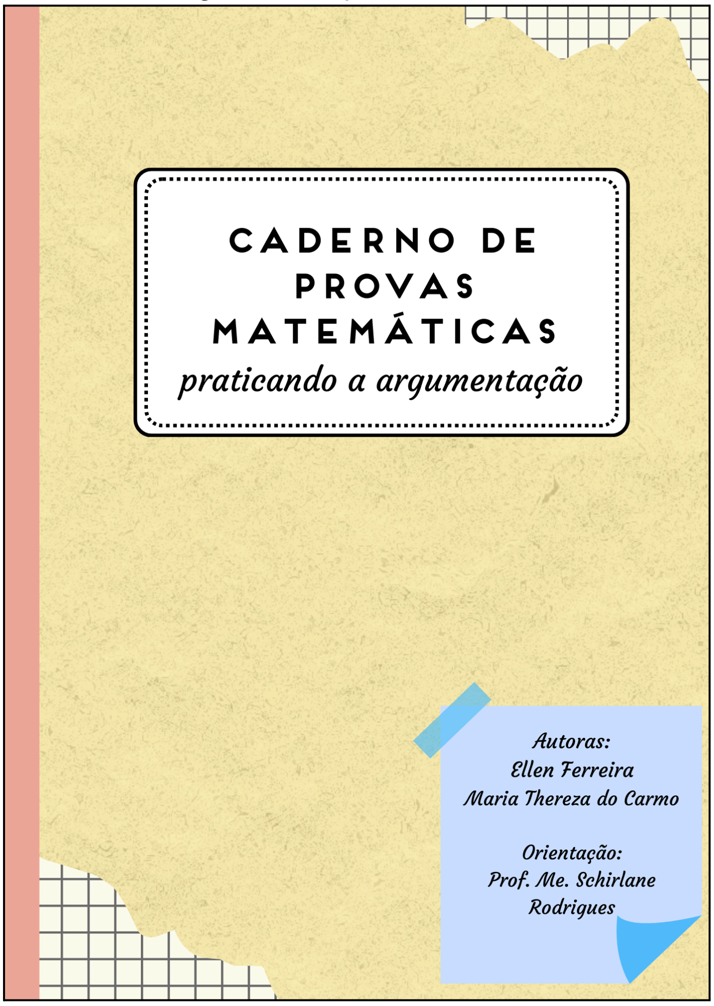
3.2.1 Planejamento

O planejamento constitui-se da elaboração: i) do caderno; ii) do minicurso; e iii) dos instrumentos de coleta de dados.

3.2.1.1 Elaboração do caderno

O “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” (Apêndice A), desenvolvido ao longo deste trabalho, tem como objetivo facilitar o acesso de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental a provas matemáticas, ampliando seu repertório e fornecendo exemplos utilizáveis em sala de aula (Figura 7).

Figura 7 - Capa do caderno



Fonte: Elaboração própria.

Este caderno se constitui em um produto educacional. De acordo com a definição da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) (Brasil, 2022),

> Serão considerados produtos educacionais as seguintes categorias: i) Material didático/instrucional (propostas de ensino,

> envolvendo sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficinas; **material textual, como manuais, guias, textos de apoio**, [...] (BRASIL, 2022, p. 10, grifo nosso).

Freitas (2021, p. 13) ressalta a importância de pensar um produto educacional “[...] como um objeto que facilita uma experiência de aprendizagem, ou seja, uma experiência de mudança e enriquecimento em algum sentido: conceitual ou perceptivo, afetivo, de habilidades ou atitudes [...]”.

Nesta ótica, com este caderno busca-se impactar a prática docente de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Pretende-se que estes utilizem provas matemáticas em suas aulas, uma vez que estas possuem o potencial de ressignificar os conceitos matemáticos aprendidos pelos alunos (Matheus, 2016).

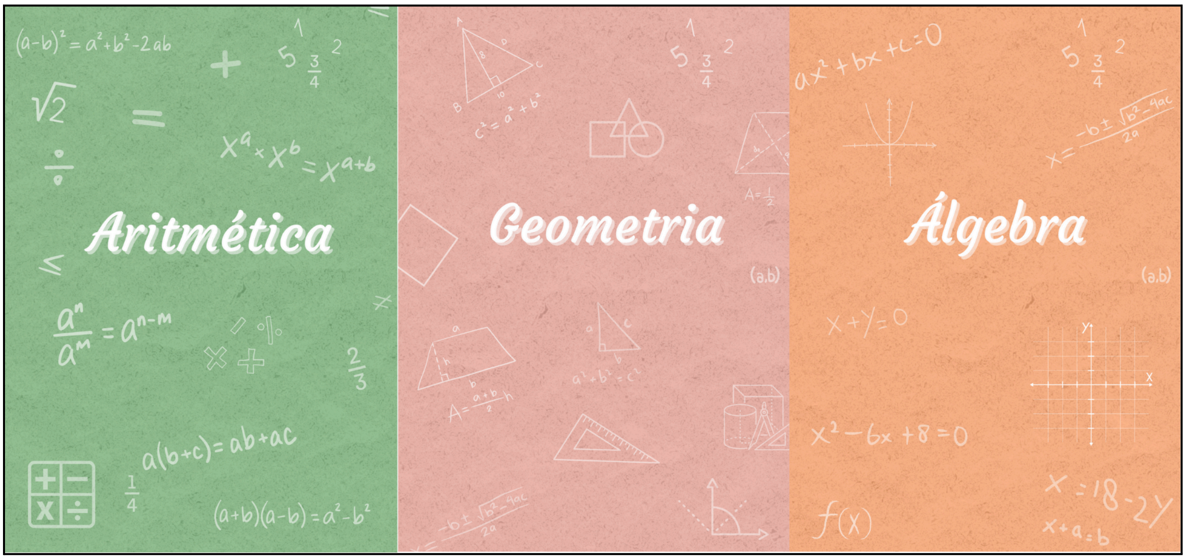
Além disso, o formato do “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação”, que pode ser utilizado nas versões digital[2] ou impressa, facilita o seu acesso. Com isso, permite-se que este seja compartilhado por professores de Matemática, promovendo sua aplicabilidade e criando uma rede que alcance, por fim, os alunos dos Anos Finais da Educação Básica. Assim, busca-se que este produto educacional não tenha um fim em si mesmo mas, conforme defendido por Pagán (1995 *apud* Freitas, 2021) favoreça uma mentalidade positiva dos professores acerca da argumentação e provas matemáticas e, consequentemente, seu uso na Educação Básica.

O caderno é dividido em dois tópicos principais: Apresentação e Provas Matemáticas. A apresentação visa esclarecer ao professor a finalidade do produto educacional elaborado, sua organização e trazer uma breve definição de prova matemática, com base em Balacheff (2022a). Já as provas matemáticas são divididas em capítulos (Figura 8) referentes aos seguintes campos da Matemática: Geometria, Aritmética e Álgebra.

---

[2] Link do caderno: https://drive.google.com/file/d/1_wAT0VS03O_4AzZzkgseZU8iWAsWBs2V/view

Figura 8 - Folhas de divisão dos capítulos do caderno



Fonte: Elaboração própria.

O "Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação" possui uma linguagem informal com o objetivo de dialogar diretamente com o professor. Esta característica é evidenciada pela forma com que as provas são enunciadas, simulando a pergunta de um aluno, como apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Título das provas matemáticas contidas no caderno

Campos da Matemática	Título da prova
. Aritmética	Por que "mais com menos dá menos" na multiplicação?
	Por que "menos com menos dá mais" na multiplicação?
	Por que somamos os expoentes na multiplicação de potências de mesma base?
	Por que subtraímos os expoentes na divisão de potências de mesma base?
	Por que a^0=*1*?
	Por que $\sqrt{2}$ é irracional?
	Por que fazemos " $m \times n$ " no princípio fundamental da contagem?

(continua)

Quadro 1 - Título das provas matemáticas contidas no caderno (continuação)

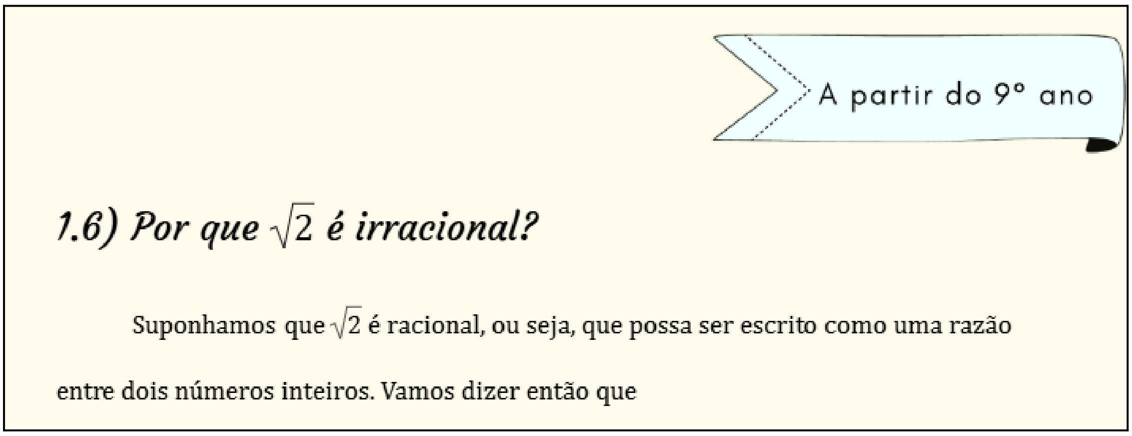
Campos da Matemática	Título da prova
Geometria	Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°? - Prova pragmática
	Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°? - Prova intelectual
	Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$? - Prova pragmática partindo da área do retângulo
	Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$? - Prova intelectual partindo da área do retângulo
	Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$? - Prova intelectual partindo da área do paralelogramo
	Por que a fórmula da área do trapézio é $A = \frac{(B+b) \times h}{2}$?
	Por que a fórmula da área do losango é $A = \frac{D \times d}{2}$?
	Por que o teorema de Pitágoras é $a^2 = b^2 + c^2$? - Prova intelectual partindo da área do quadrado
	Por que o teorema de Pitágoras é $a^2 = b^2 + c^2$? - Prova intelectual partindo das relações métricas no triângulo retângulo
	Por que o seno de 30° é $\frac{1}{2}$, o cosseno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e a tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$?
	Por que o seno de 45° é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, o cosseno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a tangente é 1?
Álgebra	Por que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
	Por que a fórmula de “Bhaskara” dá as raízes da equação de segundo grau?
	Por que a soma das raízes de uma equação do 2° grau é $\frac{-b}{a}$?
	Por que o produto das raízes de uma equação do 2° grau é $\frac{c}{a}$?
	Por que o x do vértice de uma parábola é dado por $\frac{-b}{2a}$?
	Por que o y do vértice de uma parábola é dado por $\frac{-\Delta}{4a}$?

Fonte: Elaboração própria.

O caderno contém provas para sete diferentes enunciados de Aritmética, sete de Geometria e seis de Álgebra, contendo um total de vinte e quatro diferentes provas. Estas provas abrangem conteúdos de todos os anos de escolaridade dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Ressalta-se que, neste caderno, as provas possuem a função explicativa, uma vez que buscam esclarecer ao aluno o porquê das fórmulas e propriedades enunciadas serem verdadeiras (De Villiers, 1990).

No início de cada prova há uma etiqueta (Figura 9) especificando o ano de escolaridade para o qual recomenda-se aquela prova.

Figura 9 - Exemplo de etiqueta indicando o ano de escolaridade



A partir do 9º ano

1.6) Por que $\sqrt{2}$ é irracional?

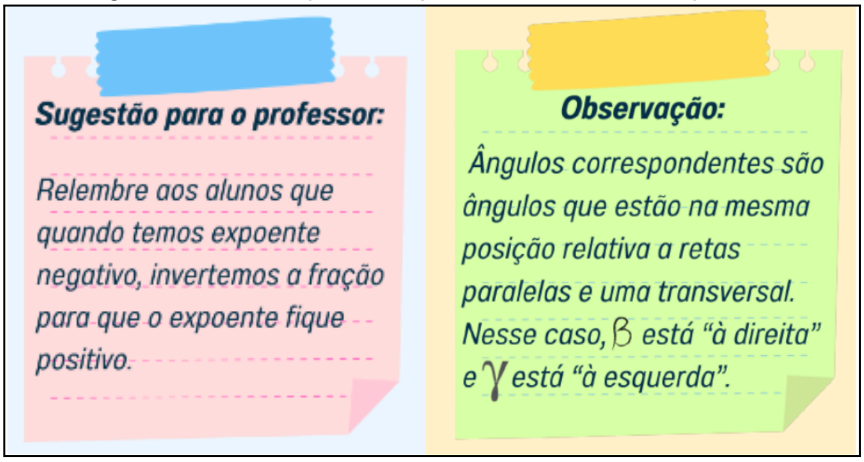
Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, que possa ser escrito como uma razão entre dois números inteiros. Vamos dizer então que

Fonte: Elaboração própria.

Esta recomendação é baseada na indicação da BNCC (Brasil, 2018) do ano de escolaridade no qual o conteúdo referente à prova é estudado. Considera-se, também, a necessidade do aluno ter conhecimento prévio dos conteúdos utilizados ao longo do desenvolvimento da prova.

Nas provas existem alguns quadros de texto (Figura 10) com observações e sugestões para os professores, visando auxiliar na elaboração da prova em sala de aula. Com isso, pretende-se promover uma interação com os alunos e relembrar propriedades e conceitos pertinentes ao desenvolvimento da prova.

Figura 10 - Exemplos de quadros de texto nas provas



Fonte: Elaboração própria.

Na elaboração do caderno optou-se pelo uso de provas pragmáticas e intelectuais, de acordo com a definição de Balacheff (2022b). Para este autor, provas pragmáticas são provas que dependem da ação, de natureza prática e que não precisam de uma linguagem matemática específica, podendo ser constituída por exemplos, desenhos ou outras representações. Já as provas intelectuais utilizam uma base de conhecimentos de objetos matemáticos e suas propriedades, bem como uma linguagem adequada que possibilite a abstração e generalização (Balacheff, 2022b).

Para algumas propriedades e fórmulas são apresentadas, primeiramente, provas pragmáticas e, posteriormente, provas intelectuais para o mesmo enunciado, como pode-se observar na Figura 11.

Figura 11 - Trechos com a indicação de prova pragmática e intelectual para o mesmo enunciado

2.1) Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°?

2.1.1) Prova pragmática

2.1) Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°?

2.1.2) Prova intelectual

Fonte: Elaboração própria.

Nos enunciados que possuem tanto uma prova pragmática quanto uma intelectual, optou-se por posicionar as pragmáticas antes das intelectuais. Foi sugerido, na parte de apresentação do caderno, que os professores realizassem as provas nesta ordem com os alunos. Essa escolha deu-se pela possibilidade dos alunos compreenderem melhor as razões da veracidade de uma afirmativa por meio de um exemplo genérico ao invés de uma prova intelectual, devido à possível falta de familiaridade com a linguagem matemática mais formal (Matheus, 2016).

No início das provas pragmáticas estão listados os materiais necessários para seu desenvolvimento (Figura 12).

Figura 12 - Lista de materiais necessários para a prova 2.2.1

2.2) Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$ *?*

2.2.1) Prova pragmática partindo da área do retângulo

Materiais necessários: retângulos de cartolina, fita adesiva , régua e lápis.

Fonte: Elaboração própria.

Para alguns dos enunciados, o caderno apresenta mais de uma forma de provar, conforme exemplificado na Figura 13.

Figura 13 - Exemplo de duas formas de provar o mesmo enunciado

3.1) Por que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ***?***

A expressão algébrica $(a + b)^2$ representa o quadrado da soma de dois termos. Vamos provar a igualdade apresentada no enunciado de duas formas.

- 1ª. forma:

$$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$$

- 2ª. forma:

Dados dois segmentos, de medidas a e b, vamos construir um quadrado de lado $(a + b)$.

Para calcular a área (A) desse quadrado, basta fazermos

$$A = (a + b)^2$$

Fonte: Elaboração própria.

As distinções das provas abrangem tanto as categorias de prova, que podem ser pragmáticas ou intelectuais, quanto a principal área da matemática utilizada em seu desenvolvimento, bem como a utilização de propriedades ou entes matemáticos diferentes como ponto de partida.

O caderno elaborado é um produto educacional destinado a todos os professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. As provas nele contidas podem ser realizadas em diferentes turmas, escolas e contextos, cabendo ao professor definir aquela que seja mais adequada aos alunos em questão.

3.2.1.2 Elaboração do minicurso

O minicurso intitulado “Provando em Matemática: uma prática de argumentação” tem como intuito expor e diferenciar os conceitos de argumentação, prova matemática e demonstração, exemplificar provas matemáticas e apresentar o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação”. O minicurso é dividido em três etapas (Quadro 2).

Quadro 2 - Etapas do minicurso

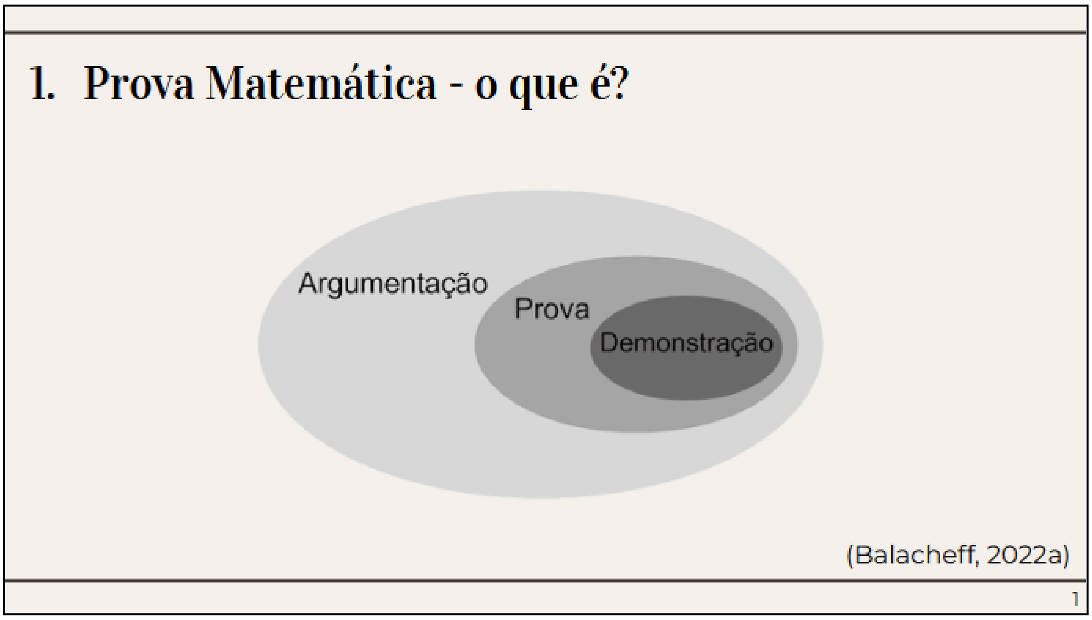
Etapas	Objetivos
1. Definição e diferenciação de argumentação, prova matemática e demonstração	Garantir que os professores considerem a mesma definição de prova matemática na qual se baseia o minicurso, o caderno e o questionário.
2. Exemplificação de provas matemáticas	Consolidar a definição de provas matemáticas; Desenvolver algumas provas matemáticas destinadas aos Anos Finais do Ensino Fundamental.
3. Entrega e análise do caderno	Ampliar o repertório de provas matemáticas dos professores.

Fonte: Elaboração própria.

Todas as etapas do minicurso são conduzidas por meio de uma apresentação de slides (Apêndice B).

A etapa 1 é iniciada com um questionamento aos participantes. Pergunta-se se eles já haviam tido contato prévio com os termos “demonstração” e “prova matemática”. Em seguida, esses conceitos são explicados (Figura 14), juntamente com o conceito de “argumentação matemática".

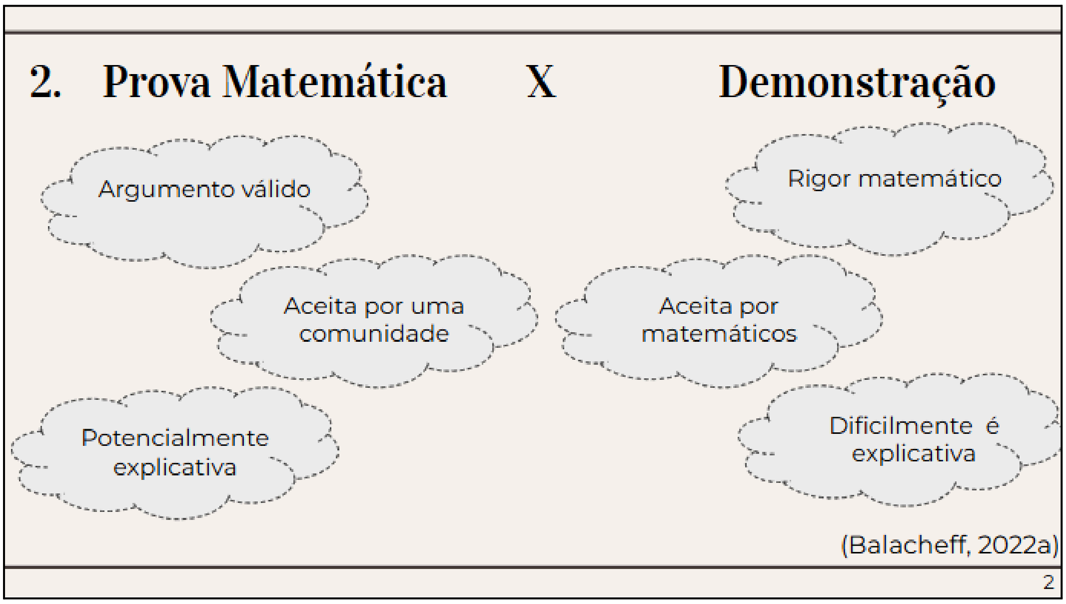
Figura 14 - Slide 1 do minicurso



Fonte: Elaboração própria a partir de Balacheff (2022a, p. 832).

Dando continuidade, são explicitadas as principais diferenças quanto aos conceitos de “prova matemática” e “demonstração” (Figura 15) a fim de que estes conceitos sejam bem compreendidos.

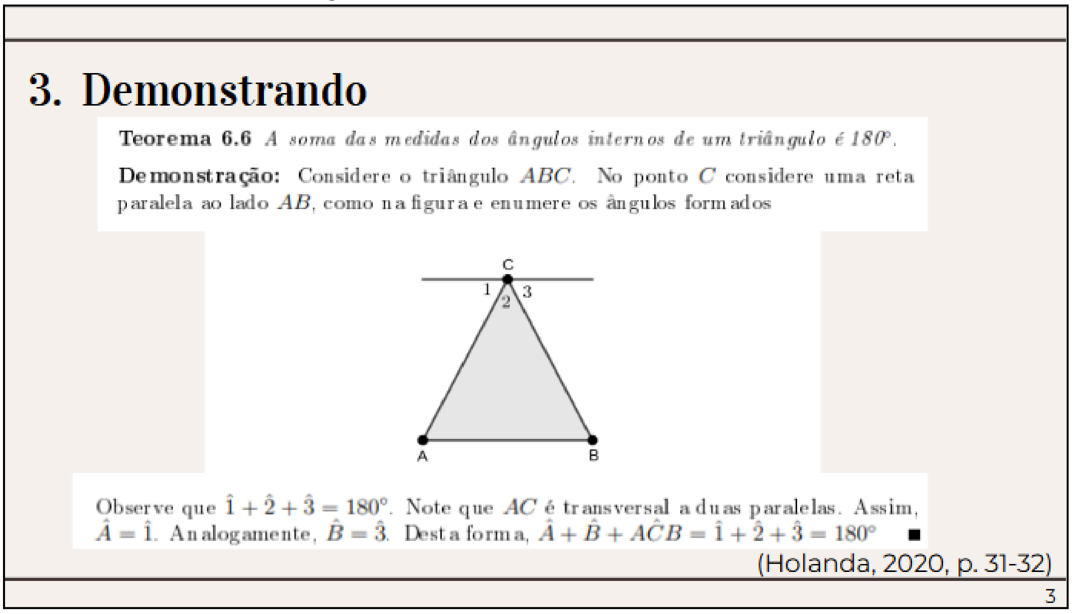
Figura 15 - Slide 2 do minicurso



Fonte: Elaboração própria a partir de Balacheff (2022a, p. 832).

Ainda para ressaltar a diferença entre os conceitos apresentados anteriormente, é apresentada uma demonstração de que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180° (Figura 16). Neste momento, é feito o destaque para o rigor matemático presente na demonstração, bem como o fato de ser pouco explicativa.

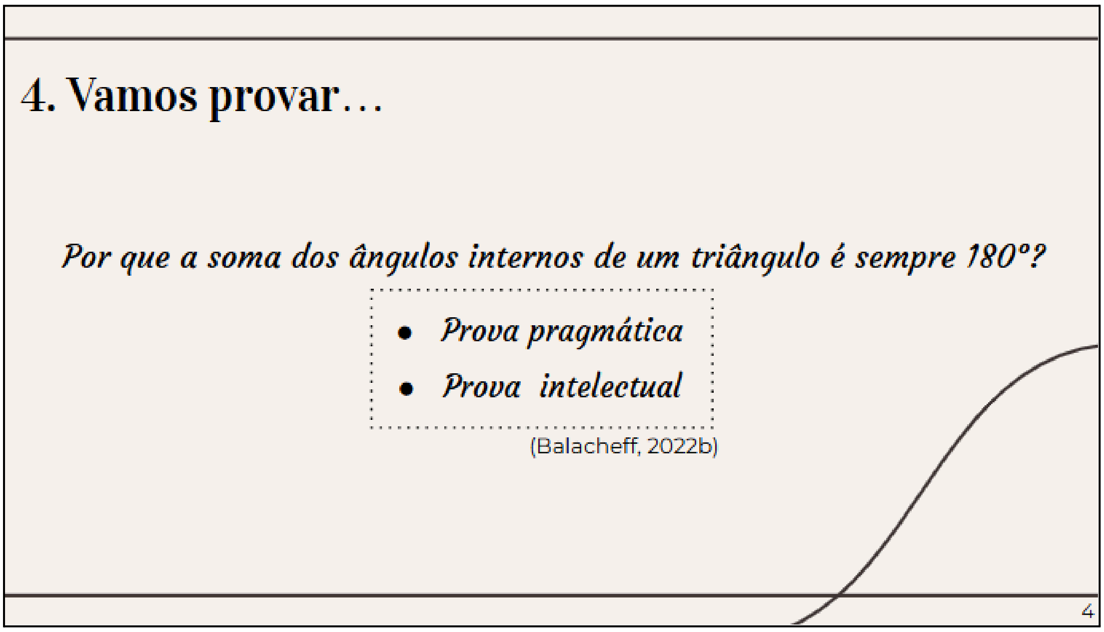
Figura 16 - Slide 3 do minicurso



Fonte: Elaboração própria a partir de Holanda (2020, p. 31-32).

Em seguida, são realizadas duas provas matemáticas, sendo uma pragmática e uma intelectual, do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Este teorema, agora, é apresentado em forma de pergunta, que simula uma dúvida apresentada por um aluno (Figura 17).

Figura 17 - Slide 4 do minicurso

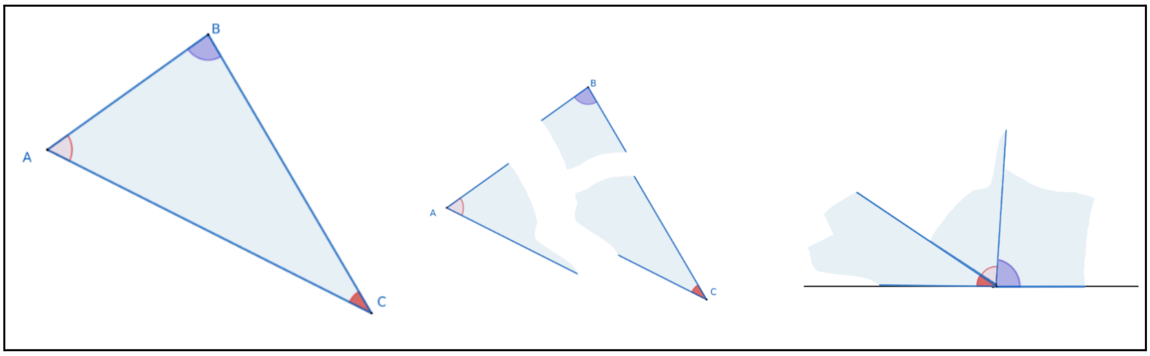


Fonte: Elaboração própria.

Para a prova pragmática deste enunciado, utiliza-se uma folha A4 dividida em duas partes, régua, tesoura e canetas de três cores diferentes. Estes materiais são disponibilizados previamente para cada participante, para que eles possam acompanhar o desenvolvimento da prova.

Esta prova, ilustrada pela Figura 18, é iniciada desenhando um triângulo qualquer em uma das metades da folha. Em seguida, destaca-se cada um de seus ângulos internos com cores diferentes. Recorta-se este triângulo e ele é rasgado em três partes, de modo que cada um de seus ângulos fique em uma parte. Então, traça-se uma linha reta na outra metade da folha e posiciona-se as três partes do triângulo sobre essa linha de modo que os ângulos fiquem adjacentes e que não haja sobreposição.

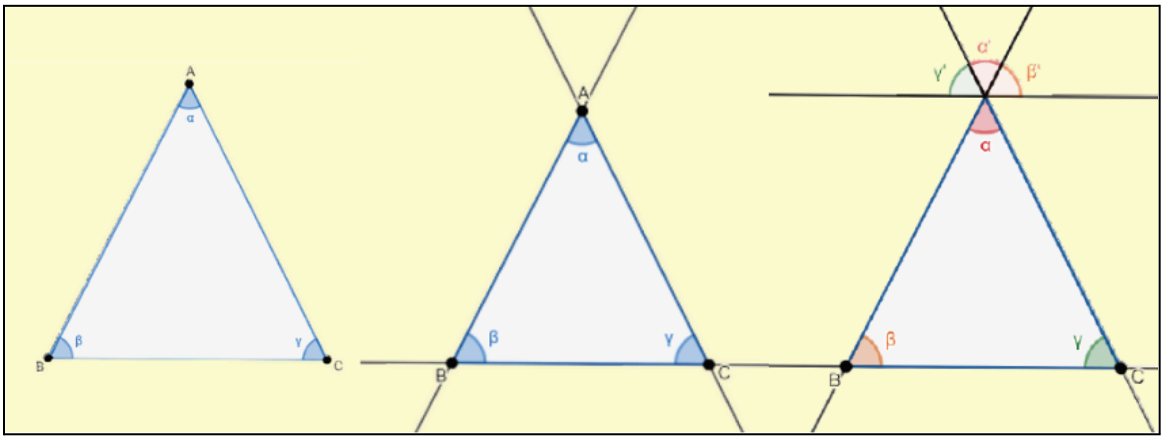
Figura 18 - Ilustração da prova pragmática da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Elaboração própria.

A prova intelectual do mesmo enunciado é realizada no quadro branco, utilizando canetas coloridas e régua. Os participantes são convidados a realizarem a prova, concomitantemente, utilizando uma folha de papel no tamanho A4, canetas e régua recebidos anteriormente (Figura 19).

Figura 19 - Ilustração da prova intelectual da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



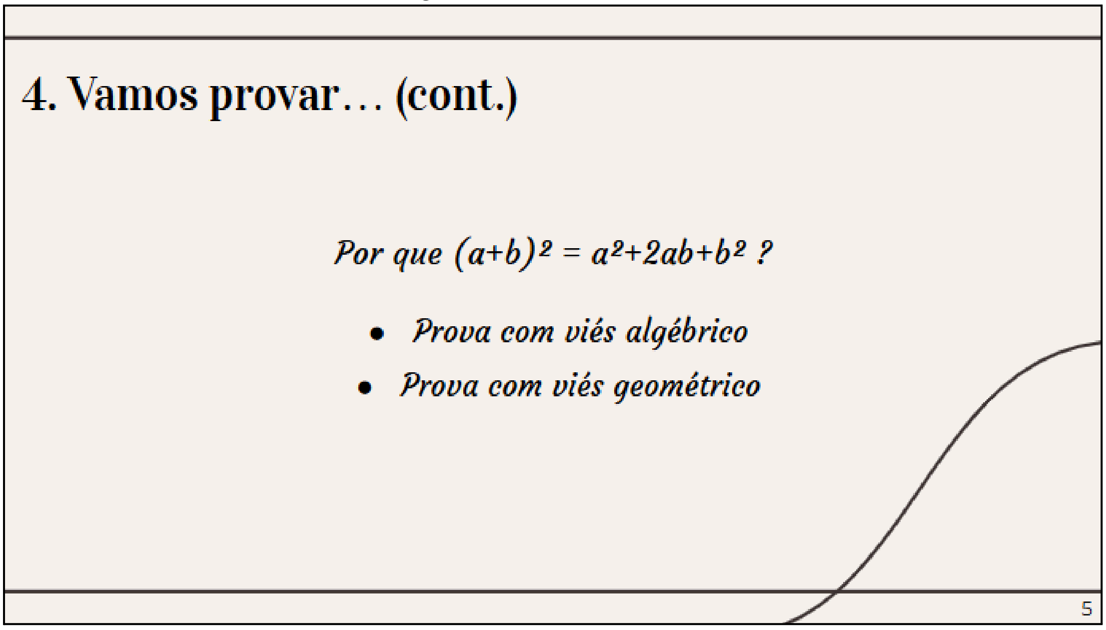
Fonte: Elaboração própria.

Esta prova é iniciada desenhando um triângulo qualquer de vértices A, B e C. Em seguida, destacam-se e nomeiam-se seus ângulos internos e traçam-se as retas suportes dos três lados do triângulo. Escolhe-se um dos lados e traça-se a reta paralela que passa pelo vértice oposto ao lado escolhido. Observa-se, então, os ângulos formados pelas retas suportes e a paralela traçada.

Dando continuidade ao desenvolvimento da prova, são destacadas as relações de congruência dos ângulos, decorrentes da propriedade de retas paralelas cortadas por uma transversal e dos ângulos opostos pelo vértice. Com isso, conclui-se que a soma dos ângulos internos do triângulo forma uma meia volta e, portanto, é igual a 180°.

Na etapa 2 do minicurso, são desenvolvidas quatro provas, sendo uma pragmática e três intelectuais. Para o enunciado “Por que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?” desenvolve-se duas provas intelectuais, a primeira pelo viés algébrico e a segunda pelo viés geométrico (Figura 20).

Figura 20 - Slide 5 do minicurso



Fonte: Elaboração própria.

A primeira prova é realizada no quadro branco com auxílio de canetas coloridas. Em seu desenvolvimento, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação para "resolver" o quadrado da soma de dois termos (Figura 21).

Figura 21 - Ilustração da prova do quadrado da soma de dois termos pelo viés algébrico

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$$

$$a.a + a.b + b.a + b.b$$

$$a^2 + ab + ba + b^2$$

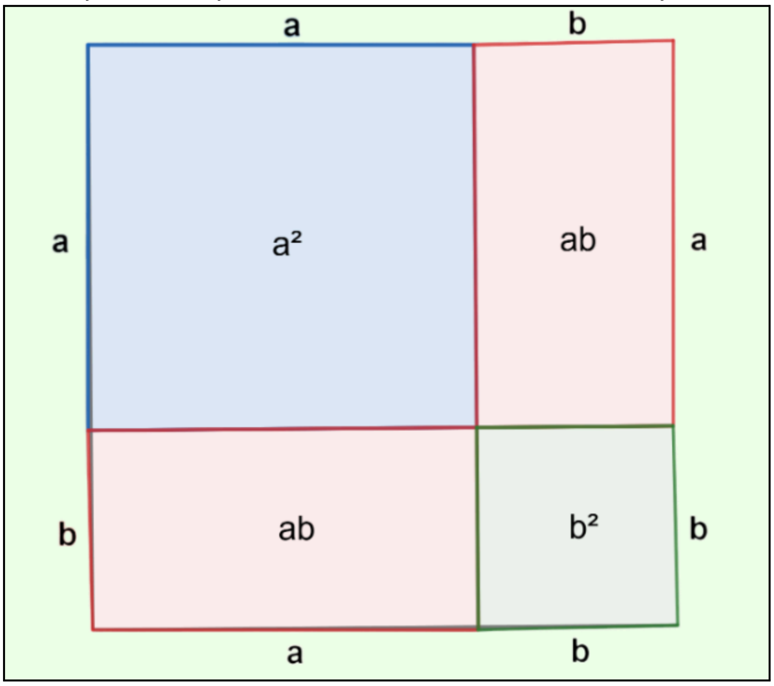
Como $ab = ba$, temos

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Fonte: Elaboração própria.

A segunda prova deste mesmo enunciado também é realizada no quadro branco usando canetas coloridas e régua. Para o desenvolvimento da prova pelo viés geométrico, ilustrado pela Figura 22, utiliza-se a noção de área de figuras compostas. Para tanto, inicia-se desenhando um quadrado de lado $(a+b)$, composto por um segmento de medida a e um segmento de medida b. Estes segmentos são diferenciados pelo tamanho e pela cor. Para dispor cada um destes segmentos, considera-se que o quadrado final deve ser composto por um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e dois retângulos de lados a e b, que são destacados em seguida.

Figura 22 - Ilustração da prova do quadrado da soma de dois termos pelo viés geométrico



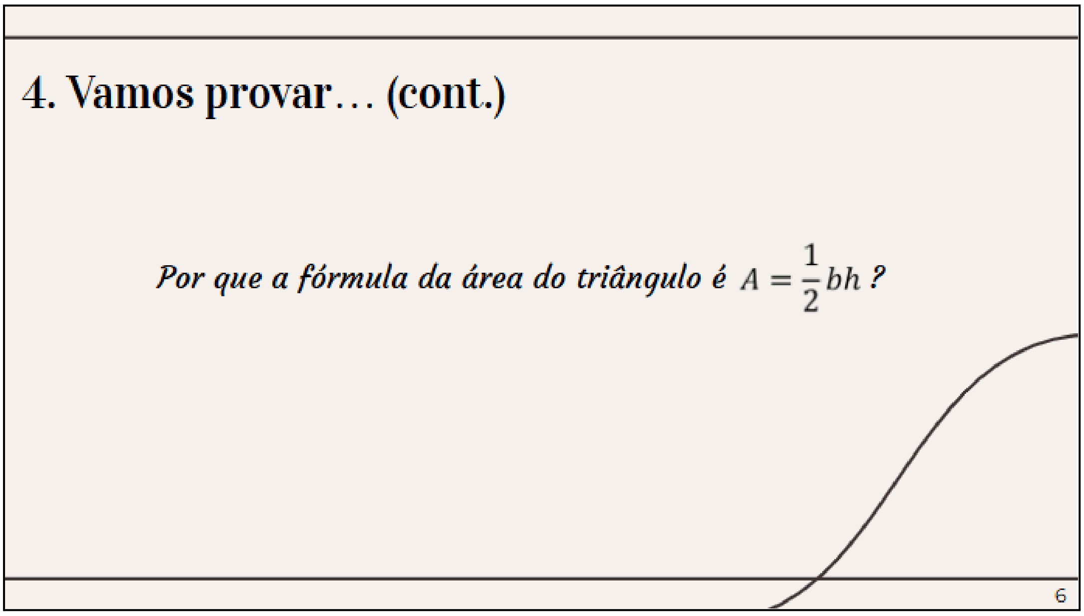
Fonte: Elaboração própria.

Expressa-se a área do quadrado de lado $(a + b)$ como $(a + b)^2$. Calcula-se as áreas das figuras destacadas que compõem o quadrado e observa-se que a soma destas áreas resulta na área do quadrado de lado $(a + b)$. Assim, iguala-se as expressões da soma das áreas com a expressão $(a + b)^2$.

Dando continuidade ao minicurso, é realizada uma prova pragmática para deduzir a fórmula da área de um triângulo dada por A = $\frac{b \times h}{2}$, sendo b a medida da base e h a medida da altura (Figura 23).

]

Figura 23 - Slide 6 do minicurso



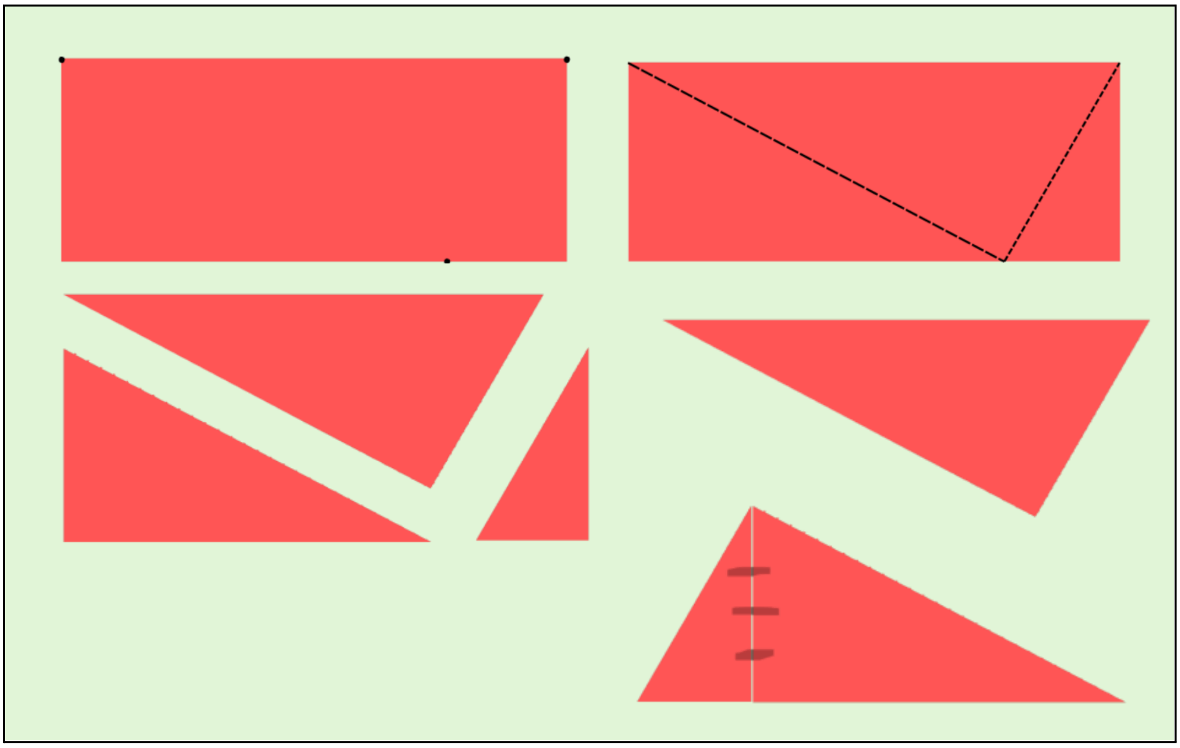
Fonte: Elaboração própria.

Para o desenvolvimento desta prova são utilizados os seguintes materiais: metade de uma folha A4 colorida, régua, tesoura, caneta e fita adesiva. Como citado anteriormente, todos os materiais ficam à disposição dos participantes para que estes acompanhem o desenvolvimento da prova. Os participantes são informados que devem considerar a metade da folha recebida como um retângulo.

Inicia-se a prova escolhendo um dos lados do retângulo e destacando com a caneta os vértices que o compreendem. Em seguida, marca-se um ponto qualquer pertencente ao lado oposto ao primeiro lado escolhido. Traça-se, então, com o auxílio da régua, dois segmentos de reta ligando o ponto marcado aos vértices do primeiro lado.

Os segmentos traçados são utilizados como suporte para recortar três triângulos. Dos triângulos obtidos, selecionam-se os dois triângulos menores, unindo-os com fita adesiva de modo a formar um novo triângulo, congruente ao triângulo maior. Verifica-se esta congruência pela sobreposição do novo triângulo e do triângulo maior (Figura 24).

Figura 24 - Ilustração da prova pragmática da fórmula da área do triângulo

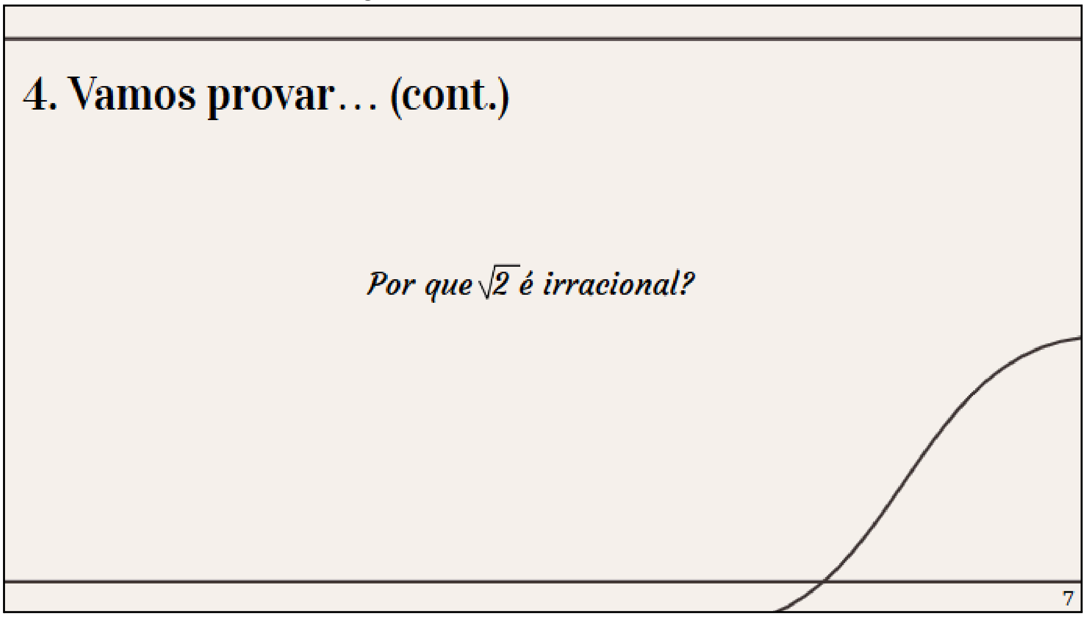


Fonte: Elaboração própria.

Por fim, observa-se que, ao final do processo, o retângulo inicial foi decomposto em dois triângulos congruentes. Como os triângulos são congruentes, ambos têm a mesma área, que é, portanto, metade da área do retângulo. Como a área do retângulo é dada pela fórmula $A = b \times h$, a fórmula da área de cada um dos triângulos, que possuem a mesma base e a mesma altura do retângulo inicial, é dada por A = $\frac{b \times h}{2}$.

Para finalizar a etapa de exemplificação de provas matemáticas do minicurso, desenvolve-se a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ (Figura 25).

Figura 25 - Slide 7 do minicurso



Fonte: Elaboração própria.

A prova é iniciada, no quadro branco, com a suposição de que o número $\sqrt{2}$ é racional e, portanto, pode ser escrito como uma fração irredutível, de numerador e denominador inteiro com o denominador diferente de zero (Figura 26).

Figura 26 - Ilustração da prova que $\sqrt{2}$ é irracional

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Logo, a é par.

$$a = 2n$$

$$2b^2 = (2n)^2$$

$$2b^2 = 4n^2$$

$$b^2 = 2n^2$$

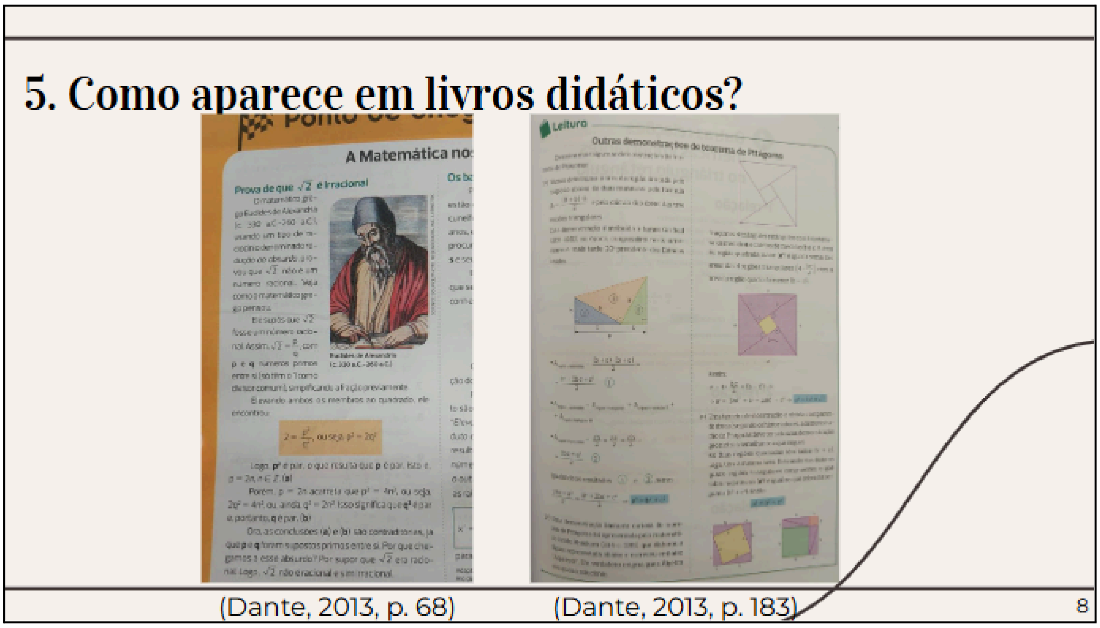
Logo, b é par.

Fonte: Elaboração própria.

Estabelece-se, primeiramente, uma igualdade entre $\sqrt{2}$ e a fração irredutível $\frac{a}{b}$. Eleva-se ambos os membros desta igualdade ao quadrado e conclui-se que o numerador a é par. De forma análoga, conclui-se que o denominador b é par. Como a e b são pares, a fração pode ser simplificada, o que contradiz a suposição inicial de que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de uma fração irredutível de numerador e denominador inteiro, e não pode, portanto, ser um número racional. Conclui-se, então, que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Após este momento, é abordado como as provas matemáticas aparecem em livros didáticos e são feitos comentários sobre as divergências quanto aos termos "demonstração" e "prova matemática" na comunidade acadêmica matemática (Figura 27). Essa discordância é evidenciada por Matheus (2016, p. 21), ao afirmar que "[...] as palavras *prova* e *demonstração* frequentemente são tomadas como equivalentes".

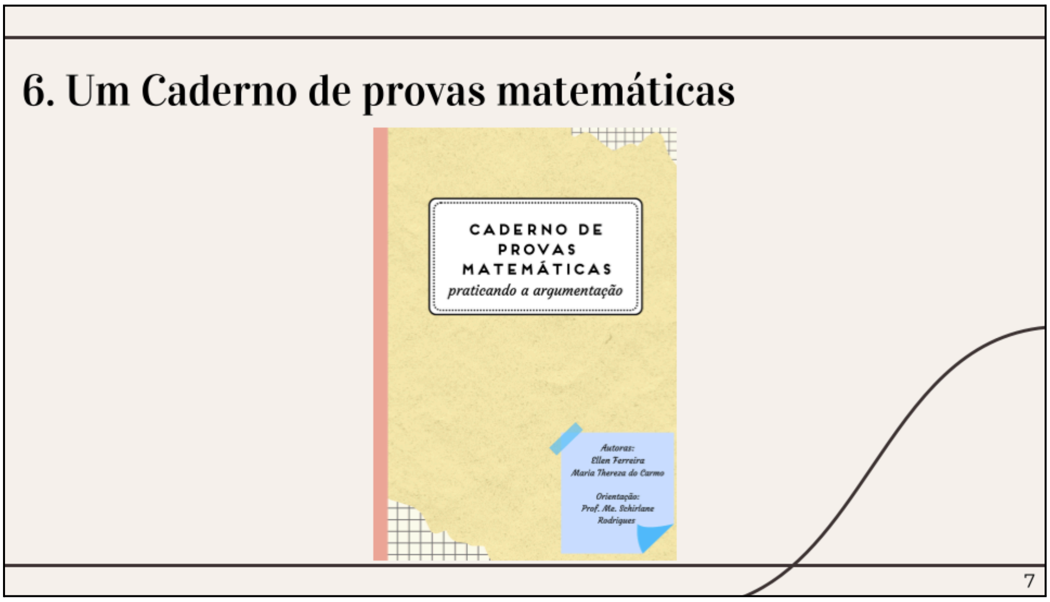
Figura 27 - Slide 8 do minicurso



Fonte: Elaboração própria.

Na última etapa do minicurso é apresentado o "Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação" (Figura 28), distribuindo um para cada participante a fim de que eles possam manuseá-lo.

Figura 28 - Slide 9 do minicurso



Fonte: Elaboração própria.

Enquanto os participantes estão recebendo e observando o caderno, é dado destaque especial às informações contidas na apresentação do mesmo, explicando que o título das provas simula a pergunta de um aluno e também que a linguagem adotada no desenvolvimento das provas visa ser acessível aos alunos.

São evidenciadas, também, as etiquetas presentes no início de cada prova, que indicam o ano de escolaridade a partir do qual cada prova pode ser utilizada, bem como os quadros de texto que trazem observações e sugestões para os professores. É destacado que o caderno contém provas pragmáticas e provas intelectuais, apresentando mais de uma prova para alguns enunciados.

3.2.1.3 Elaboração dos instrumentos de coleta de dados

Nesta seção são descritas a elaboração do questionário e da entrevista utilizados na aplicação deste trabalho. As respostas obtidas por meio destes instrumentos de coleta de dados são utilizadas com autorização dos participantes da pesquisa, expressa por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C).

O questionário (Apêndice D) foi estruturado com a ferramenta *Google Docs* e entregue impresso aos participantes do minicurso. Em sua elaboração optou-se, majoritariamente, por perguntas fechadas, visando praticidade no momento de resposta. Todavia, para a obtenção de dados mais detalhados, em algumas perguntas foi solicitado que o participante comentasse sua resposta. Este questionário é composto por dois blocos de perguntas, sendo o primeiro o “Bloco A - Perfil” e o segundo "Bloco B - Provas Matemáticas” (Quadro 3).

Quadro 3 - Divisão em blocos do questionário da pesquisa

<table>
<tr><td rowspan="3">Questionário</td><th>Blocos</th><th>Objetivos</th><th>Público-alvo</th></tr>
<tr><td>Bloco A</td><td>Traçar o perfil dos participantes da pesquisa.</td><td rowspan="2">Professores de Matemática que atuem ou já tenham atuado nos Anos Finais do Ensino Fundamental participantes do minicurso.</td></tr>
<tr><td>Bloco B</td><td>Investigar a opinião destes quanto ao uso de argumentação e prova matemática em sala de aula.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria.

O “Bloco A - Perfil” tem como objetivo traçar o perfil dos participantes da pesquisa, coletando informações sobre sua formação e docência, os anos de escolaridade e as redes de ensino nas quais atua ou já atuou. Além disso, neste bloco os participantes são questionados quanto ao contato prévio com os termos “prova matemática” e "demonstração”.

Já o “Bloco B - Provas Matemáticas” tem por objetivo investigar a opinião dos participantes da pesquisa quanto ao uso de argumentação e prova matemática em sala de aula. Para isso, foram feitas perguntas que abrangem: a utilização prévia de provas matemáticas na trajetória docente dos participantes; os contextos, anos de escolaridade e áreas da Matemática em que o participante considera relevante utilizar provas matemáticas; a diferença de viabilidade do uso de provas matemáticas nas redes pública e privada; entre outras questões.

A entrevista tem o objetivo de complementar as respostas obtidas por meio do questionário, visando dados mais detalhados. Para tanto, elaborou-se um roteiro de entrevista semiestruturada (Apêndice E) contendo cinco perguntas.

A primeira e a segunda perguntas tratam, respectivamente, de como foi a abordagem de argumentação e prova matemática na formação inicial dos professores e como esta abordagem influencia em sua prática docente. A terceira pergunta investiga a opinião destes professores quanto à possibilidade de provas matemáticas serem compreendidas pelos alunos. A quarta pergunta tem como objetivo verificar se as provas matemáticas estão presentes nos livros didáticos utilizados por esses professores. A última pergunta busca coletar a opinião dos professores acerca da utilidade do “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação”.

Todos os materiais e instrumentos de coleta de dados elaborados, com exceção da entrevista, foram submetidos a testes exploratórios que são descritos na seção seguinte.

A entrevista não foi submetida a teste exploratório uma vez que foi incluída neste trabalho, após o seminário de acompanhamento dos Trabalhos de Conclusão de Curso, ocasião posterior à aplicação dos testes exploratórios. Neste seminário, um professor, membro do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática, sugeriu a inclusão da entrevista como instrumento de coleta de dados a fim de complementar as informações colhidas por meio do questionário.

3.2.2 Testes exploratórios

Durante a elaboração do presente trabalho foram realizados dois testes exploratórios, Teste exploratório A e Teste exploratório B. Para coletar as observações dos participantes destes testes exploratórios utilizaram-se dois questionários, intitulados Questionário do teste exploratório A (Apêndice F) e Questionário do teste exploratório B (Apêndice G).

Os objetivos e públicos-alvo dos questionários são apresentados no quadro 4.

Quadro 4 - Objetivos e públicos-alvo dos questionários dos testes exploratórios

Questionários	Objetivo	Público-alvo
Questionário do teste exploratório A	Coletar as opiniões dos participantes sobre o termo de consentimento, minicurso, caderno e questionário.	Alunos, a partir do 6°. período, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro.
Questionário do teste exploratório B	Coletar as opiniões dos participantes sobre o caderno.	Professores dos componentes curriculares específicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro.

Fonte: Elaboração própria.

O teste exploratório A teve como objetivo submeter o termo de consentimento livre e esclarecido, o minicurso, o caderno e o questionário à avaliação para identificar possíveis erros e obter sugestões de melhorias. O público-alvo deste teste foram alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro que estivessem cursando a partir do 6º. período e já houvessem iniciado os componentes curriculares de estágio supervisionado obrigatório.

A escolha deste público-alvo deu-se por considerar-se importante que os alunos tenham vivência em sala de aula para analisar os materiais elaborados e a aplicabilidade das provas matemáticas sob a ótica do contexto escolar.

O questionário do teste exploratório A foi elaborado com a ferramenta *Google Forms* e enviado para o e-mail dos participantes. Este é dividido em seções (Quadro 5), que avaliam, respectivamente, o termo de consentimento livre e esclarecido, o minicurso, o caderno e o questionário.

Quadro 5 - Seções do questionário do teste exploratório A

Seções	Objetivos
Seção 1	Avaliar a clareza do termo de consentimento livre e esclarecido.
Seção 2	Avaliar a clareza das explicações e da apresentação de slides utilizadas no minicurso, bem como a seleção de provas matemáticas e seu tempo de duração.
Seção 3	Avaliar a clareza das provas matemáticas contidas no "Caderno de provas matemáticas : praticando a argumentação".
Seção 4	Avaliar a clareza das perguntas do questionário e sua consonância com o objetivo da pesquisa, além de coletar sugestões quanto às perguntas.

Fonte: Elaboração própria.

O teste exploratório A ocorreu no dia 08 de fevereiro de 2024, teve duração de três horas e contou com a participação de dez licenciandos, os quais fizeram anotações e responderam ao questionário do teste exploratório A.

O público-alvo do teste exploratório B foram professores dos componentes curriculares específicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro. Este teste teve como objetivo identificar possíveis erros matemáticos nas provas contidas no caderno, portanto apenas o "Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação" foi analisado.

O teste exploratório B teve início no dia 06 de fevereiro de 2024 e foi finalizado no dia 25 de fevereiro de 2024. Foi enviado um e-mail para os professores contendo em anexo um convite (Figura 29) para participar do teste exploratório, um arquivo em pdf do "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação" e um link para responder ao questionário do teste exploratório B, que foi elaborado com a ferramenta *Google Forms*.

Figura 29 - Convite para o teste exploratório B

Fonte: Elaboração própria.

Além dos arquivos citados anteriormente, o e-mail continha as informações sobre as datas de início e fim do teste, bem como uma explicação do tema desta pesquisa e comunicava a possibilidade de solicitar uma versão impressa do caderno para a análise. Três professores aceitaram participar deste teste exploratório e responderam ao questionário do teste exploratório B.

O relato, os resultados e as discussões de ambos os testes exploratórios encontram-se na seção 4.1 do capítulo 4.

3.2.3 Implementação

Esta seção aborda a implementação do minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" com professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, público-alvo deste trabalho, bem como a aplicação do questionário e a realização da entrevista.

Optou-se pela aplicação do minicurso na Escola de Formação de Educadores Municipais (EFEM) do município de Campos dos Goytacazes, pois, dessa forma, professores de todas as escolas, públicas e privadas, poderiam participar. Buscou-se, assim, não restringir o público-alvo a professores de uma única escola ou rede de ensino.

A EFEM desenvolve atividades que fazem parte do Programa de Aprendizagem Eficiente (PAE), da Secretaria Municipal de Educação Ciência e Tecnologia (SEDUCT) do município de Campos de Goytacazes. As atividades promovidas por esta escola de formação visam proporcionar uma formação continuada para professores da Educação Básica através de cursos, oficinas, palestras e treinamentos, uma vez que

> É preciso o Educador continuar o seu processo formativo para os novos saberes resultantes do desenvolvimento social e educativo, desdobrando-os em sua atuação, modificando, criticando, construindo, criando caminhos emancipados (SEDUCT, c2024).

A EFEM publicou em seu site[3] um convite para o minicurso (Figura 30). Os professores interessados em participar poderiam realizar a inscrição diretamente por meio deste site, porém havia a possibilidade de realizar a inscrição, presencialmente, no momento da aplicação do minicurso, diretamente na secretaria da EFEM.

[3] https://seduct.campos.rj.gov.br/efem/?p=eventos&id=503

Figura 30 - Convite para o minicurso

Fonte: SEDUCT (c2024).

Outro ponto considerado para escolha da aplicação do minicurso na EFEM é a emissão de um certificado para os participantes e de uma declaração de presença para os professores que participarem do minicurso em horário de trabalho. Este fator foi considerado relevante, visto que o minicurso ocorre em dia e horário letivos.

Para a implementação do trabalho, dividiu-se o tempo de duas horas e meia disponibilizado pela EFEM em 5 momentos, conforme o quadro 6.

Quadro 6 - Tempo destinado a cada etapa da implementação

Momentos	Tempo
Definição e diferenciação de argumentação, prova matemática e demonstração	40 minutos
Exemplificação das provas matemáticas	1 hora
Entrega e análise do caderno	10 minutos
Preenchimento do questionário	20 minutos
Realização da entrevista	20 minutos

Fonte: Elaboração própria.

O relato da implementação, bem como os resultados obtidos por meio dos instrumentos de coleta de dados aplicados durante esta pesquisa são apresentados e analisados na seção 4.2 do capítulo 4.

4 Resultados e Discussões

Este capítulo tem o objetivo de descrever e analisar os dados obtidos nos testes exploratórios e na fase de implementação e está dividido em duas seções. Na primeira seção são apresentados os resultados dos testes exploratórios, destacando as mudanças feitas no minicurso e caderno com base nas sugestões dos participantes, bem como as sugestões não acatadas e as justificativas para estas decisões. A segunda seção traz o relato da implementação do minicurso e a análise dos dados obtidos por meio dos instrumentos de coleta de dados.

4.1 Resultados dos testes exploratórios

Esta seção apresenta e discute os resultados do teste exploratório A, ao qual foram submetidos o termo de consentimento livre e esclarecido, o minicurso, o caderno e o questionário, e do teste exploratório B, ao qual foi submetido o caderno. Como citado anteriormente, a entrevista não foi submetida a um teste exploratório.

4.1.1 Resultados do teste exploratório A

Este teste teve a presença de dez licenciandos que, para fins de análise dos resultados, serão chamados de L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L9 e L10.

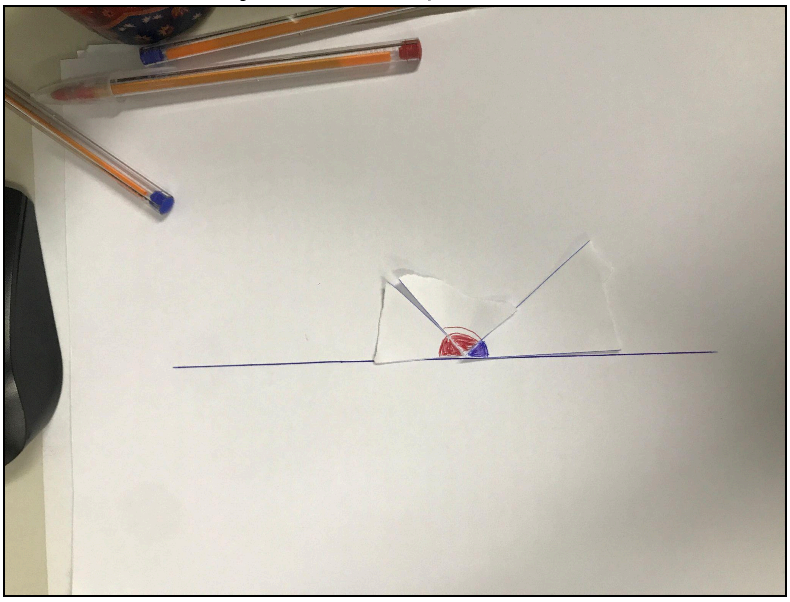
O encontro foi iniciado com a apresentação do título e do objetivo da pesquisa. Em seguida, distribuiu-se o termo de consentimento livre e esclarecido para ser analisado pelos participantes. Quanto a esse termo, não houve sugestões de alteração.

Após este momento, os participantes receberam folhas de anotações para que pudessem registrar suas observações acerca do minicurso. Foram distribuídos, também, os materiais necessários para o desenvolvimento das provas pragmáticas, sendo eles folhas, canetas, tesoura, régua e fita adesiva. Em seguida, iniciou-se a aplicação do minicurso, conduzido por meio da apresentação de slides.

Os participantes deste teste exploratório fizeram sugestões, tanto durante sua aplicação, oralmente e por meio da folha de anotações, quanto após seu fim, respondendo ao questionário do teste exploratório A.

A etapa um do minicurso foi iniciada com a explicação e diferenciação dos conceitos de argumentação, prova matemática e demonstração. Para elucidar essa diferença, mostrou-se um slide com a demonstração do teorema "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°" e, em seguida, os participantes foram convidados a executar a prova pragmática deste mesmo teorema (Figura 31). Para tanto, foi apresentado um outro slide que trazia o enunciado do teorema em forma de pergunta com uma linguagem informal, que simula a linguagem utilizada pelos alunos da Educação Básica.

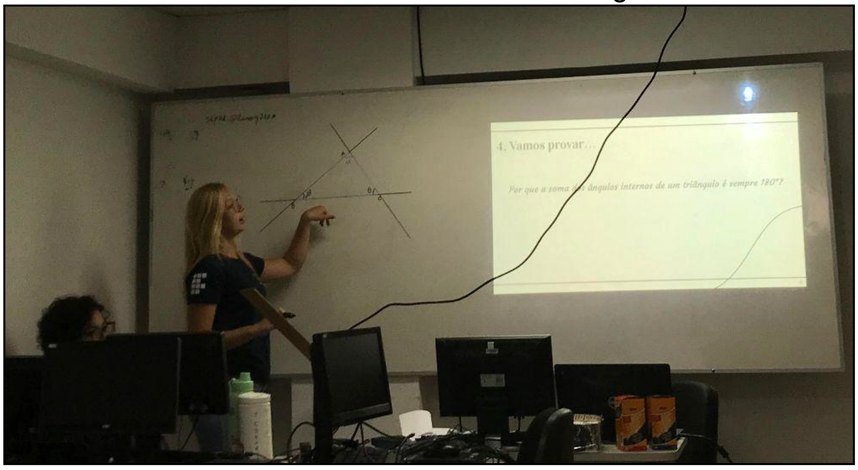
Figura 31 - Prova pragmática da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo realizada por L5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na sequência, desenvolveu-se a prova intelectual deste mesmo teorema (Figura 32).

Figura 32 - Prova intelectual da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Protocolo de pesquisa.

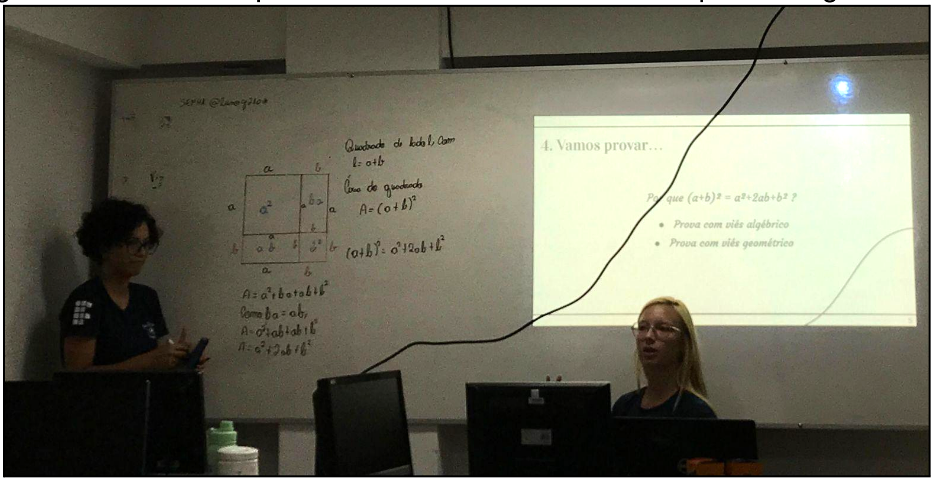
Ao fim do desenvolvimento, foi explicado o que caracteriza uma prova pragmática e uma prova intelectual. Por fim, comparou-se a prova intelectual, realizada no quadro e a demonstração apresentada anteriormente. Com o desenvolvimento das duas lado a lado, foi possível evidenciar as diferenças entre prova matemática e demonstração.

Com o objetivo de consolidar o entendimento dos participantes acerca da definição de provas matemáticas, iniciou-se a etapa dois do minicurso, de forma expositiva e dialogada. Nela foram desenvolvidas provas pragmáticas e intelectuais de conteúdos matemáticos relativos aos Anos Finais do Ensino Fundamental. As provas intelectuais foram desenvolvidas no quadro branco e as provas pragmáticas foram desenvolvidas, juntamente com os participantes, utilizando os materiais previamente entregues.

O enunciado de cada prova, apresentado por meio de slides, foi escrito em forma de pergunta, simulando a forma com que um aluno expressa sua dúvida acerca da justificativa de um teorema, propriedade ou fórmula ser válido.

A primeira prova da etapa dois respondia a pergunta “Por que $(a + b)^2 = a^2$+ + $2ab$ + b^2? ” (Figura 33). Esta prova foi desenvolvida por viés algébrico, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, e por viés geométrico, utilizando a composição de figuras.

Figura 33 - Prova do quadrado da soma de dois termos pelo viés geométrico

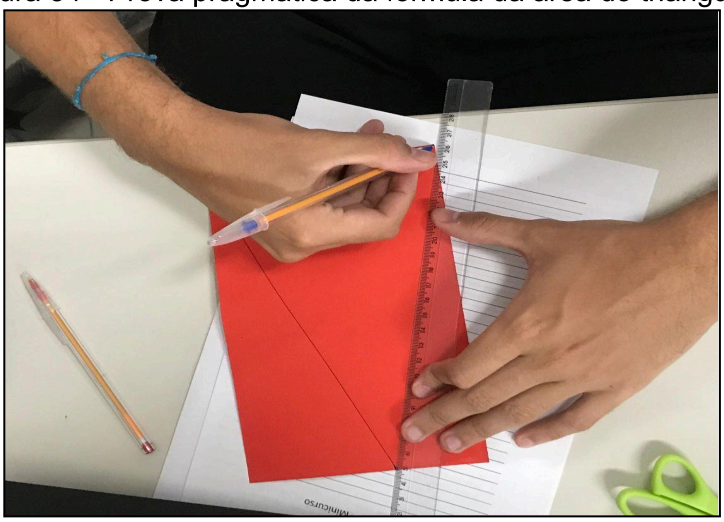


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após o desenvolvimento desta prova, L1 sugeriu que fosse utilizado um molde de quadrado já pronto, para que não fosse necessário desenhá-lo no quadro. Essa sugestão não foi aceita, uma vez que as autoras consideram que utilizar o molde poderia criar a falsa impressão de que ele é necessário para a elaboração da prova em sala de aula.

Em seguida apresentou-se o enunciado “Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$?”. Para este enunciado foi desenvolvida uma prova pragmática (Figura 34), partindo da área de um retângulo. Esta prova foi elogiada por diversos participantes, que afirmaram que utilizariam essa prova ao ministrarem aulas sobre a área do triângulo.

Figura 34 - Prova pragmática da fórmula da área do triângulo por L7



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A prova elaborada na sequência respondia a pergunta “Por que $\sqrt{2}$ é irracional?” e utilizava o método de prova por redução ao absurdo. Todavia, as autoras desenvolveram a prova sem mencionar o método, uma vez que o objetivo do minicurso não é abordar métodos de prova.

Após o desenvolvimento desta prova, o participante L5 sugeriu que fosse dado um exemplo numérico para ilustrar uma propriedade utilizada nesta prova, que pode ser enunciada como “se o quadrado de um número inteiro é par, então este número é par”. Como as autoras observaram que, com o exemplo numérico dado, os participantes demonstraram melhor entendimento, esta sugestão foi aceita visando melhorar a explicação da prova e facilitar sua compreensão.

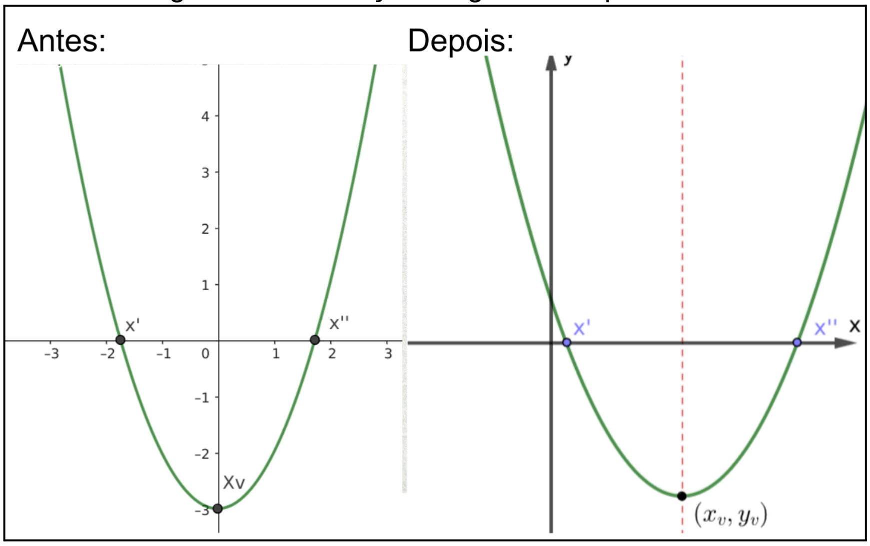
Além dos exemplos desenvolvidos, foi apresentado um slide contendo duas fotos de páginas de livros didáticos contendo provas matemáticas. Foi destacado que, em um dos livros, o autor se refere às provas matemáticas como demonstrações, evidenciando a divergência quanto às nomenclaturas na comunidade matemática.

O participante L3 sugeriu que fosse recomendado aos professores que, ao utilizar as provas matemáticas em sala de aula, relembrassem os símbolos matemáticos com os alunos. Essa sugestão foi aceita, pois acredita-se que o entendimento dos símbolos matemáticos impacta diretamente na compreensão da prova matemática por parte dos alunos.

Foi sugerido por L4 que, ao longo da aplicação do minicurso, fosse perguntado aos professores participantes se o ritmo da explicação estava satisfatório. Essa sugestão foi aceita visando adequar a comunicação ao público, facilitando o acompanhamento do minicurso.

Em seguida, iniciou-se a etapa três do minicurso com a entrega do “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação”. Os participantes analisaram o caderno e elogiaram o material. Apenas o participante L7 deu sugestões, sendo a maioria delas acerca da formatação e do *design* do caderno. Destaca-se sua observação de um erro na construção de um gráfico, que não mostrava a orientação dos eixos das abscissas e das ordenadas. Sendo assim, o gráfico foi corrigido (Figura 35).

Figura 35 - Alteração no gráfico da prova 3.5



Fonte: Elaboração própria.

As sugestões de ortografia e gramática de L7 foram todas aceitas. Já as sugestões de diagramação, com viés estético, foram rejeitadas, uma vez que os demais participantes aprovaram a versão apresentada.

O questionário do teste exploratório A foi respondido por todos os participantes. Não houve comentários ou sugestões por meio do questionário, exceto pelo participante L8 que alegou ter sentido dificuldade em compreender a prova 1.6, intitulada "Por que $\sqrt{2}$ é irracional?". Ao ser questionado oralmente sobre o momento da prova em que sentiu essa dificuldade, o licenciando não soube responder. Portanto, a prova foi mantida sem alterações devido à compreensão dos demais participantes.

No geral, o resultado deste teste exploratório foi muito satisfatório. Além de contribuir com o trabalho, por meio das sugestões, os participantes elogiaram as explicações das provas realizadas no minicurso e, principalmente, a elaboração do caderno.

4.1.2 Resultados do Teste exploratório B

O teste exploratório B consistiu no envio, por e-mail, do "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação" e do Questionário do teste exploratório B para os professores das disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática. O envio ocorreu no dia 07 de fevereiro de 2024 e o prazo para a resposta do questionário foi 25 de fevereiro de 2024. Três professores, servidores do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro, responderam ao teste. A fim de preservar o anonimato destes servidores, refere-se a cada um deles como S1, S2 e S3.

O participante S1 sugeriu que, na prova 1.1, intitulada "Por que "mais com menos dá menos" na multiplicação?", a primeira frase fosse reescrita, para explicar corretamente a ideia de multiplicar utilizando a noção de adição (Figura 36). Esta sugestão foi aceita pois a escrita anterior não estava completa e poderia gerar confusão durante a leitura.

Figura 36 - Alteração na prova 1.1

Antes:

1.1) Por que "mais com menos dá menos" na multiplicação?

Sabemos que multiplicar por n é o mesmo que somar n vezes. Assim, observamos que

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

Depois:

1.1) Por que "mais com menos dá menos" na multiplicação?

Sabemos que multiplicar por n é o mesmo que somar o mesmo número n vezes. Assim, observamos que

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Fonte: Elaboração própria.

Na prova 1.2, intitulada "Por que "menos com menos dá mais" na multiplicação?", foi sugerido pelo participante S2 que $(3 - 3)$ fosse substituído por $[3 + (-3)]$ e, na generalização, $(b - b)$ por $[b + (-b)]$. Porém essa sugestão não foi aceita, pois acredita-se que a forma utilizada pelas autoras aproxima-se mais da linguagem matemática utilizada na Educação Básica (Figura 37).

Figura 37 - Trecho da prova 1.2

Agora, no lugar do 0 colocaremos uma expressão que resulta em 0 e aplicaremos a propriedade distributiva.

$$(-\ 2) \times (3\ -\ 3)\ =\ 0$$

$$(-\ 2) \times (3) + (-\ 2) \times (-\ 3)\ =\ 0$$

Sugestão para o professor:

Peça para os alunos escolherem uma expressão qualquer que resulte em zero. Exemplos: (2-2), (10-10), etc

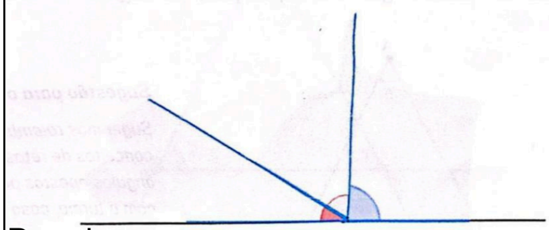
Fonte: Elaboração própria.

O participante S2 sugeriu que no subitem 2.1.1 do enunciado “Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°?” a expressão “sobre um dos lados da reta” fosse substituída por “no semiplano superior definido pela reta”, e que a expressão “sem que as partes se sobreponham” fosse substituída por “todos os ângulos sejam adjacentes”. Estas sugestões foram aceitas visando a utilização da linguagem matemática correta (Figura 38).

Figura 38 - Alterações na prova 2.1.1

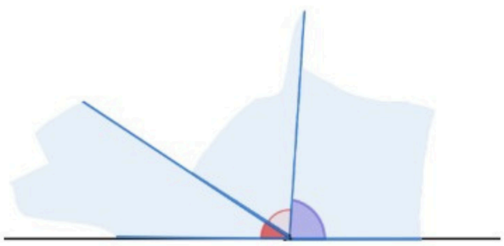
Antes:

5. **Instrua-os a colar as partes do triângulo sobre um dos lados da reta, de modo que cada vértice do triângulo coincida com o ponto marcado, sem que as partes se sobreponham, como na figura.**



Depois:

5. Instrua-os a colar as partes do triângulo no semiplano superior definido pela reta, de modo que os vértices dos ângulos coincidam com o ponto marcado na reta e todos os ângulos sejam adjacentes (os lados coincidem e não existem pontos internos em comum)



Fonte: Elaboração própria

Foi sugerido pelo participante S2, no subitem 2.2.1 do enunciado “Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$?”, a substituição da expressão “que eles escolheram os vértices” por “com extremidades nos vértices escolhidos anteriormente”. A substituição foi realizada devido à segunda expressão detalhar os objetos matemáticos envolvidos (Figura 39).

Figura 39 - Alterações na prova 2.2.1

Antes:

1. Distribua um retângulo de cartolina para cada aluno e peça que escolham, individualmente, dois vértices adjacentes deste retângulo.
2. Solicite que marquem um ponto em cada um dos vértices escolhidos.
3. Diga então, para escolherem e marcarem um ponto qualquer (que não seja vértice) no lado opo*sto ao lado que* eles escolheram os vértices.

Depois:

1. Distribua um retângulo feito de cartolina para cada aluno e peça que escolham, individualmente, dois vértices consecutivos deste retângulo.
2. Solicite que marquem um ponto em cada um dos vértices escolhidos.
3. Diga então, para escolherem e marcarem um ponto qualquer (que não seja vértice) no lado oposto ao lado com extremidades nos vértices escolhidos anteriormente.

Fonte: Elaboração própria

O participante S2 também sugeriu a mudança na ordem das provas do capítulo de Geometria, uma vez que a prova “Por que o seno de 30° é $\frac{1}{2}$, o cosseno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e a tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$?” utiliza o Teorema de Pitágoras em seu desenvolvimento. Todavia esta prova encontrava-se antes da prova “Por que o teorema de Pitágoras é $a^2 = b^2 + c^2$?”. A ordem das provas foi alterada, conforme sugerido, visando tornar o material coeso e sua leitura linear.

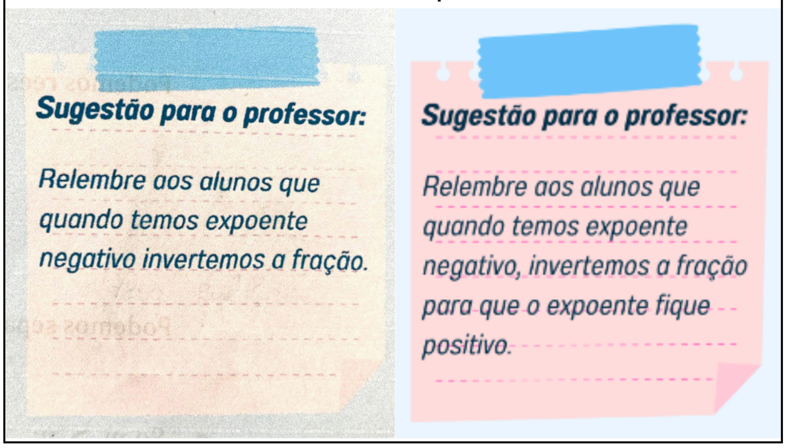
Nas provas 2.2.3 e 2.4 o participante S2 sugeriu que fossem feitas, respectivamente, as provas da fórmula da área do paralelogramo e da propriedade que afirma que as diagonais do losango se intersectam em seus respectivos pontos médios. Porém, no entendimento das autoras, adicionar provas dentro de outras provas acarretaria em um material menos acessível devido ao seu nível de complexidade, tendo em vista que objetiva-se que este caderno seja utilizado no contexto dos Anos Finais da Educação Básica.

O participante S3 não sugeriu alterações. Além disso, nenhum dos participantes fez sugestões quanto à capa, contracapa, apresentação e ao sumário.

Após o teste exploratório B, percebeu-se que na prova 1.4, “Por que subtraímos os expoentes na divisão de potências de mesma base?”, a “Sugestão para o professor” (Figura 40) estava incompleta, portanto acrescentou-se uma explicação.

Figura 40 - Alteração na “Sugestão para o professor” da prova 1.4

Antes: Depois:

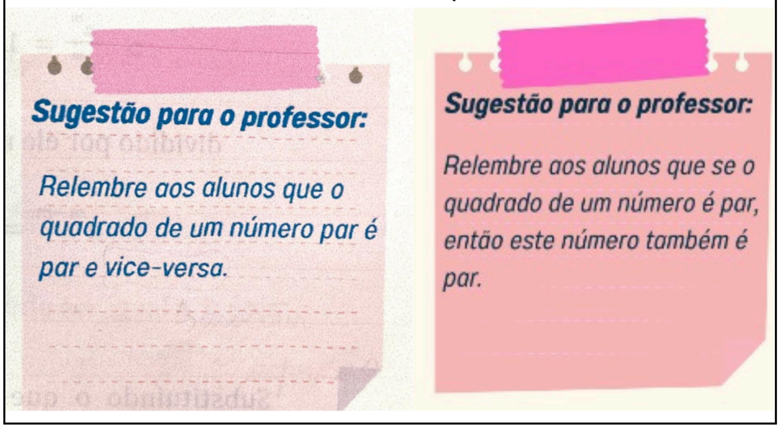


Fonte: Elaboração própria.

Na prova 1.6 intitulada “Por que $\sqrt{2}$ é irracional?”, percebeu-se que na “Sugestão para o professor” a expressão “vice-versa” era insuficiente para a compreensão da propriedade enunciada, podendo gerar confusão em sua interpretação. Dessa forma, esta expressão foi substituída (Figura 41).

Figura 41 - Alteração no quadro de texto da prova 1.6

Antes: Depois:



Fonte: Elaboração própria.

Os resultados deste teste exploratório foram de extrema importância para garantir a qualidade do produto educacional, uma vez que as sugestões dadas pelos participantes contribuíram para a correção de erros e aperfeiçoamento da escrita.

4.2 Resultados e discussões da implementação

Nesta seção são apresentados e analisados os dados obtidos na implementação do minicurso e nas respostas do questionário e entrevista com base no referencial teórico descrito no capítulo 2.

4.2.1 Análise da implementação do minicurso

O minicurso intitulado “Provando em Matemática: uma prática de argumentação”, desenvolvido durante o presente trabalho, tem como objetivos: expor os conceitos de argumentação, prova e demonstração; diferenciá-los; apresentar exemplos de provas matemáticas e entregar o Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação.

A aplicação do minicurso ocorreu no dia 23 de maio de 2024 na Escola de Formação de Educadores Municipais do município de Campos dos Goytacazes (EFEM) e teve duração de duas horas e meia, no turno da tarde. Inscreveram-se para participar do minicurso dezesseis professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, porém cinco professores compareceram. A fim de preservar a identidade destes participantes, utilizou-se P1, P2, P3, P4, P5 para referir-se a cada um deles.

Como o minicurso foi aplicado durante a tarde de um dia letivo, optou-se por aplicá-lo em um local que emitisse uma declaração de presença e um certificado de participação, reconhecido pelas escolas, visando possibilitar a participação dos professores. Todavia, os participantes relataram dificuldade em conseguir liberação de suas respectivas escolas para participar de cursos em horário letivo mesmo que estes forneçam declaração de presença. Isso pode justificar a ausência dos professores que se inscrevem, mas não compareceram.

A sala, na qual ocorreu a aplicação do minicurso, foi organizada dispondo as mesas e cadeiras em formato de semicírculo, visando facilitar a interação entre os participantes e as pesquisadoras (Figura 42).

Figura 42 - Organização da sala para o minicurso

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Sobre cada uma das mesas foi disposto um kit contendo todo o material necessário para acompanhar as provas do minicurso, sendo estes: tesoura; régua; duas canetas; uma folha A4; uma folha A4 partida ao meio; e meia folha A4 colorida (Figura 43).

Figura 43 - Mesa de um participante do minicurso

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A implementação da pesquisa iniciou-se com a apresentação das pesquisadoras, explicitando que estas são concluintes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, bem como que a aplicação do minicurso faz parte do desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso destas.

Em seguida, deu-se início à etapa 1 do minicurso, com a explicitação da motivação para a escolha do tema da pesquisa. A partir deste momento, todo o minicurso foi guiado pela apresentação de slides. Foram definidos e diferenciados os conceitos de argumentação, prova e demonstração (Figura 44), utilizando um slide com um diagrama e um slide comparativo entre características da prova matemática e da demonstração.

Figura 44 - Diferenciação de argumentação, prova e demonstração

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para evidenciar a diferença entre prova matemática e demonstração, foi exibido um slide contendo uma demonstração matemática do teorema “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.” (Figura 45). Destaca-se que a demonstração não foi desenvolvida junto com os participantes, encontrando-se pronta no slide.

Figura 45 - Explicação das características de uma demonstração

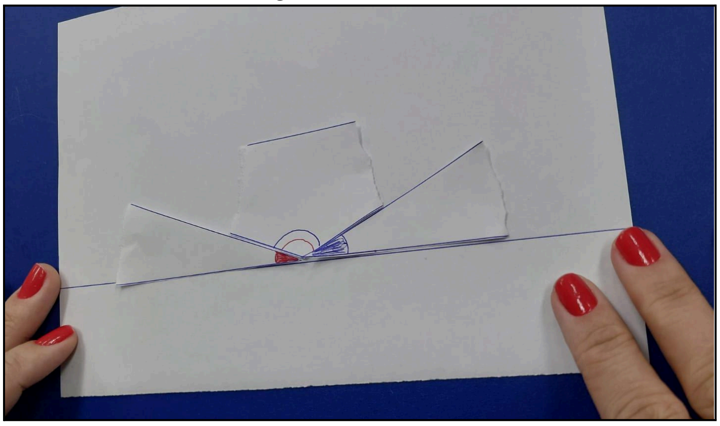
Fonte: Protocolo de pesquisa.

A fim de aprofundar o conceito de prova matemática, explicou-se as definições de prova pragmática e intelectual, segundo Balacheff (2022b). Estas definições foram apresentadas neste momento, visto que seriam desenvolvidas duas provas, uma pragmática e uma intelectual, para o mesmo teorema.

Para o desenvolvimento destas provas, apresentou-se o enunciado “Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°?”. Foi esclarecido aos participantes que este enunciado tem como objetivo simular a forma com que os alunos perguntam em sala de aula, e que os demais enunciados também seriam nesse formato de pergunta.

Em seguida, os participantes foram convidados para acompanhar o desenvolvimento da prova pragmática (Figura 46) utilizando os materiais dispostos na mesa. Neste momento, o passo a passo foi realizado junto aos participantes.

Figura 46 - Prova pragmática da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo no minicurso

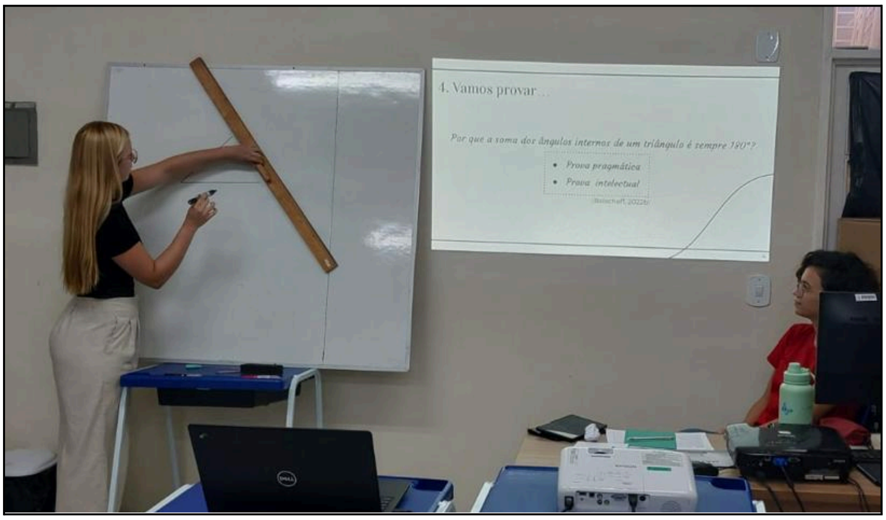


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao fim desta prova, os participantes P1, P2, P3 e P4 relataram que já haviam utilizado esta prova em sala de aula e que os alunos haviam demonstrado interesse. O participante P2 relatou, ainda, que costuma desenvolver uma prova semelhante a esta, porém sem utilizar régua e tesoura, uma vez que muitos alunos não possuem estes materiais e, muitas vezes, as escolas também não têm para fornecer.

Em seguida, iniciou-se o desenvolvimento da prova intelectual desse mesmo enunciado (Figura 47), convidando os participantes a acompanharem na folha branca.

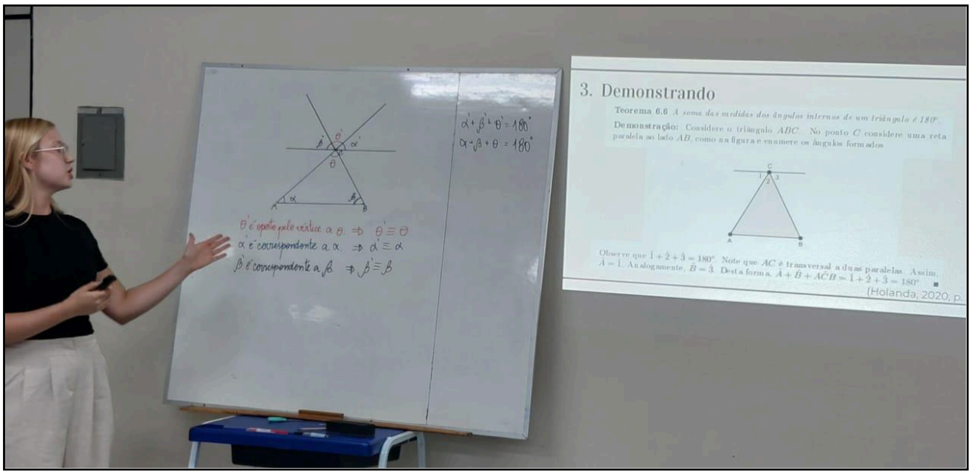
Figura 47 - Prova intelectual da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo no minicurso



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final da prova, retornou-se ao slide da demonstração (Figura 48), explicado anteriormente, para destacar as diferenças entre a prova intelectual e a demonstração do mesmo teorema.

Figura 48 - Explicitação das diferenças entre prova intelectual e demonstração



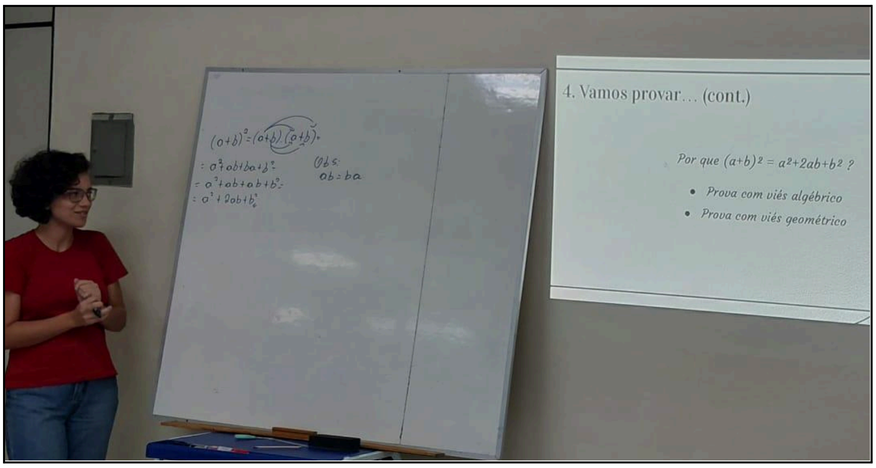
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Neste momento, recomendou-se aos participantes que, sempre que possível, desenvolvessem primeiro a prova pragmática com os alunos, e, em seguida, a prova intelectual da mesma propriedade. Os participantes P1, P2 e P3 relataram que desenvolviam algumas provas pragmáticas com seus alunos, porém não acreditavam que os alunos se interessariam pelas provas intelectuais.

A crença no desinteresse dos alunos por “demonstrações”, manifestada por P1, P2 e P3, também foi uma queixa de um dos professores participantes da pesquisa de Caldato, Utsumi e Nasser (2017). Na pesquisa de Matheus (2016, p. 122), as professoras participantes também “[...] deixaram entrever a crença de que provas ou demonstrações não seriam capazes de despertar o interesse dos alunos”.

Foi comunicado aos participantes que seriam desenvolvidas diversas provas matemáticas a fim de consolidar sua definição por meio de exemplos aplicáveis em sala de aula. A primeira prova da etapa 2 foi enunciada como “Por que $(a + b)^2 = a^2$ + $2ab$ + b^2?”. Para este enunciado desenvolveram-se duas provas, sendo a primeira delas pelo viés algébrico (Figura 49).

Figura 49 - Prova do quadrado da soma de dois termos pelo viés algébrico no minicurso



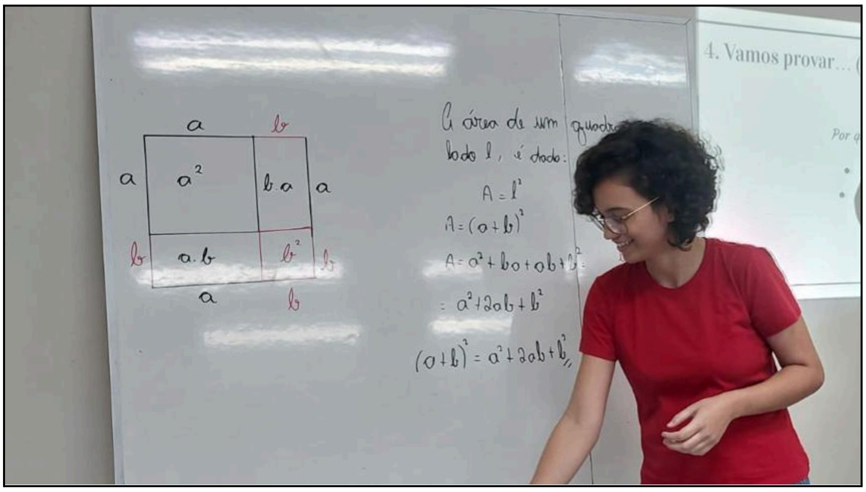
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Neste momento, os participantes P3 e P4 relataram que seus alunos se confundiam ao aplicar a fórmula dos produtos notáveis, principalmente a do quadrado da diferença, devido ao sinal da fórmula e do termo. Por isso, P3 afirmou que instrui seus alunos a aplicarem a propriedade distributiva do produto e não decorar a fórmula. O participante P1 também alegou instruir seus alunos a utilizarem a distributividade. Nota-se que, quando estes alunos utilizam esta prova matemática para conferirem o produto notável, a prova assume a função de verificação (De Villiers, 1990).

Após o desenvolvimento desta prova pelo viés algébrico, foi ressaltado que nem sempre uma prova intelectual precisa ser complexa. O desenvolvimento do produto notável do quadrado da soma por meio da propriedade distributiva do produto configura uma prova.

Em seguida, foi iniciada a segunda prova para este enunciado, desenvolvida pelo viés geométrico (Figura 50).

Figura 50 - Prova do quadrado da soma de dois termos pelo viés geométrico no minicurso

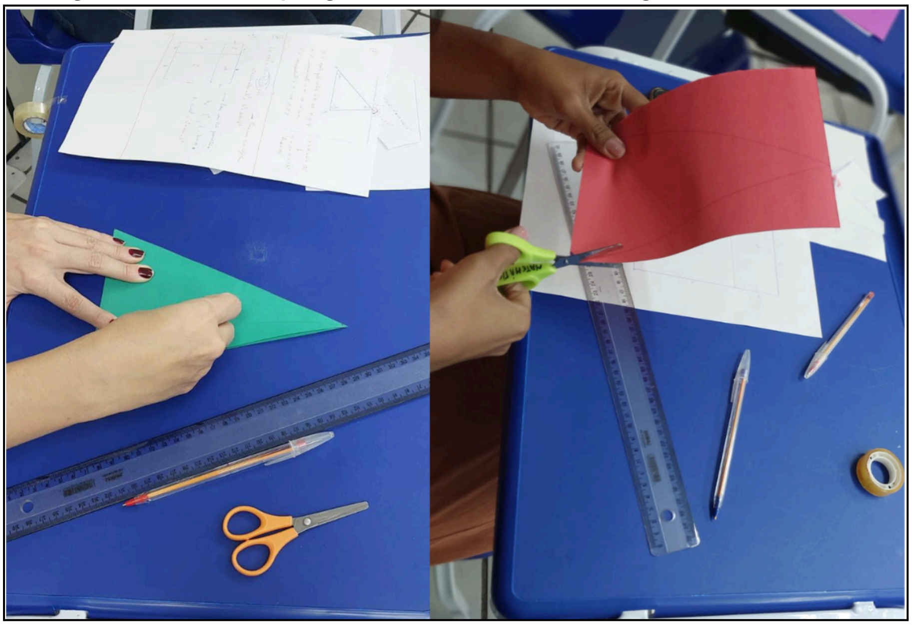


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após o desenvolvimento desta prova, o participante P1 afirmou que já havia tido contato com ela em um livro didático. Os outros participantes também relataram conhecer esta prova. P3 afirmou que a escola na qual ele leciona possui material concreto para desenvolver esta prova. Os participantes não explicitaram se já haviam utilizado este material ou desenvolvido esta prova.

Em seguida, iniciou-se a prova pragmática do enunciado “Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{b \times h}{2}$?”. Os participantes acompanharam o passo a passo desta prova utilizando os materiais dispostos na mesa (Figura 51).

Figura 51 - Prova pragmática da área do triângulo no minicurso



Fonte: Protocolo de pesquisa

Durante o desenvolvimento da prova, os participantes iniciaram uma conversa sobre o uso de provas pragmáticas e intelectuais com os alunos.

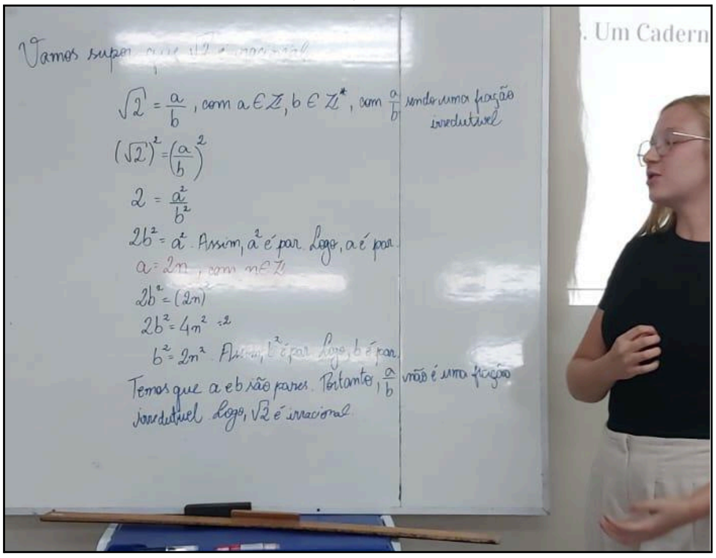
> Eu confesso a vocês que a prova intelectual eu não faço muito, nem no Ensino Médio. E eu faço muito mais pragmática (Participante P1).
>
> Os alunos gostam mais das pragmáticas. As intelectuais, infelizmente, assim, eles não acompanham (Participante P3).

A falta de crença no potencial de compreensão dos alunos de provas matemáticas por parte de professores é destacada por Rosale (2018, p. 25) ao afirmar que “muitos professores acreditam que argumentação, prova e demonstração não sejam práticas da sala de aula, com a justificativa de que é algo raramente compreendido na Educação Básica [...]”.

Ao final desta prova, os participantes alegaram não conhecê-la anteriormente, contudo afirmaram que passariam a utilizá-la em sala de aula pois acreditavam que os alunos se interessariam. Além disso, o participante P2 afirmou que, por não conhecer a prova, teve uma experiência de descoberta, se sentindo empolgado e surpreendido com o resultado final. Os demais participantes concordaram e se identificaram com a experiência.

A próxima prova desenvolvida referia-se ao enunciado “Por que $\sqrt{2}$ é irracional?”. Esta prova foi feita no quadro branco e em todo o seu desenvolvimento houve diálogo e interação com os participantes (Figura 52).

Figura 52 - Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional no minicurso



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante P1 afirmou que não acreditava que seus alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental conseguiriam acompanhar o desenvolvimento desta prova. Tampouco acreditava que demonstrariam interesse, devido à sua natureza algébrica e formal. Os demais participantes concordaram com essa afirmação, reafirmando a crença, trazida por Rosale (2018) em suas pesquisas, de que os alunos da Educação Básica não compreendem bem as provas intelectuais.

Dando continuidade à etapa 2 do minicurso, foram exibidos dois exemplos de como as provas matemáticas aparecem em livros didáticos. Em um dos livros, o autor utilizou o termo “prova matemática” para se referir a uma prova matemática, já em outro livro, o mesmo autor utilizou o termo “demonstrações” para se referir a provas matemáticas, evidenciando a divergência na comunidade matemática quanto a essas nomenclaturas (Matheus, 2016).

Na etapa 3 do minicurso, foi apresentado o “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação” como um produto educacional desenvolvido ao longo deste Trabalho de Conclusão de Curso. Esta apresentação destacou a organização do caderno, que é dividido em três áreas da Matemática, e a estruturação das provas, que inclui sugestões para os professores e observações (Figura 53).

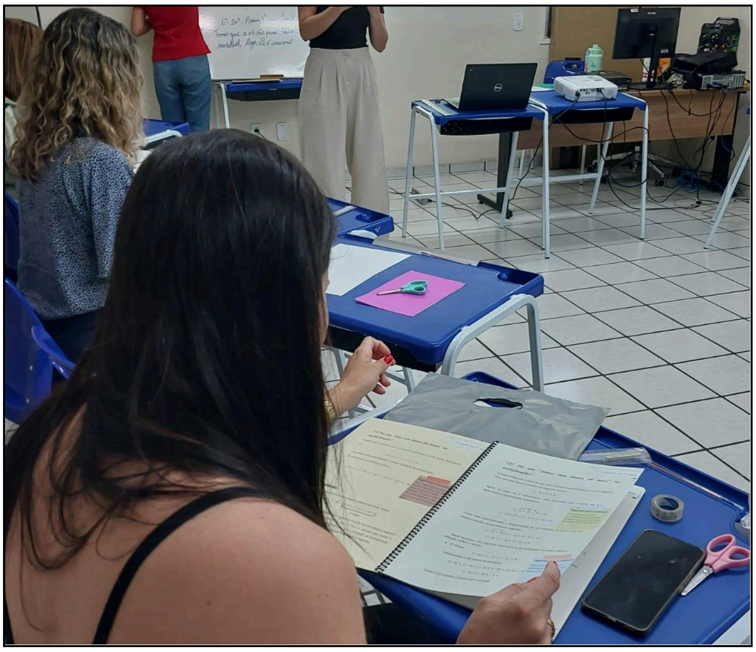
Figura 53 - Apresentação do caderno durante o minicurso

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Além disso, evidenciou-se que as etiquetas presentes no início de cada prova tem por objetivo especificar o ano de escolaridade a partir do qual recomenda-se o desenvolvimento da prova de acordo com os conteúdos previstos pela BNCC.

Após este momento de apresentação, foi entregue um caderno para cada participante, pedindo-lhes para analisar (Figura 54), e informado que as pesquisadoras estariam disponíveis para esclarecer eventuais dúvidas. Vale ressaltar que os cadernos foram doados aos participantes e que alguns participantes levaram mais de um exemplar para distribuir aos colegas de profissão.

Figura 54 - Participantes analisando o caderno



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao receberem o caderno, os participantes elogiaram tanto sua estética quanto a variedade de provas nele contidas, dizendo que seria interessante que esse material fosse disponibilizado de forma online para alcançar um número maior de professores. A participante P2 afirmou que seria interessante ter o caderno em formato digital para facilitar o seu uso em sala de aula, pela praticidade de tê-lo em um celular. Foi informado a este participante que o "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação" seria disponibilizado na versão digital após a publicação do presente trabalho.

Durante os dez minutos destinados à análise do caderno, os participantes comentaram que já conheciam algumas provas contidas nele e que as utilizavam em sala de aula. Neste momento, o participante P1 reafirmou que não considerava as provas intelectuais atrativas para seus alunos.

Indo de encontro à afirmação de P1, o participante P3 relatou que considerava algumas provas intelectuais interessantes para serem utilizadas em sala de aula. Outras provas, que ele já utilizou no início de sua carreira, como a prova da fórmula de "Bhaskara", atualmente ele considera inviável de utilizar devido à sua extensão.

Foi ressaltado que a escolha de utilizar, ou não, uma determinada prova em sala de aula requer que o professor considere as especificidades da turma. Todavia, mesmo que a turma não esteja preparada para receber determinada prova, é válido que o professor conheça a prova caso algum aluno apresente uma dúvida quanto ao "porquê" da propriedade ou fórmula. Sobre este assunto, o participante P2 afirmou que "sempre tem aquele aluno mais curioso", e concordou que era importante ter conhecimento da prova.

Complementando a fala de P2, o participante P3 afirmou que:

> A demonstração ela dá um sentido maior para o aluno sabe, não é demonstração, a prova né, ela dá um sentido muito maior, eles sentem a necessidade disso. E eles podem não reconhecer, mas quando a gente pega, faz, mostra, aquilo realmente dá um sentido. (Participante P3).

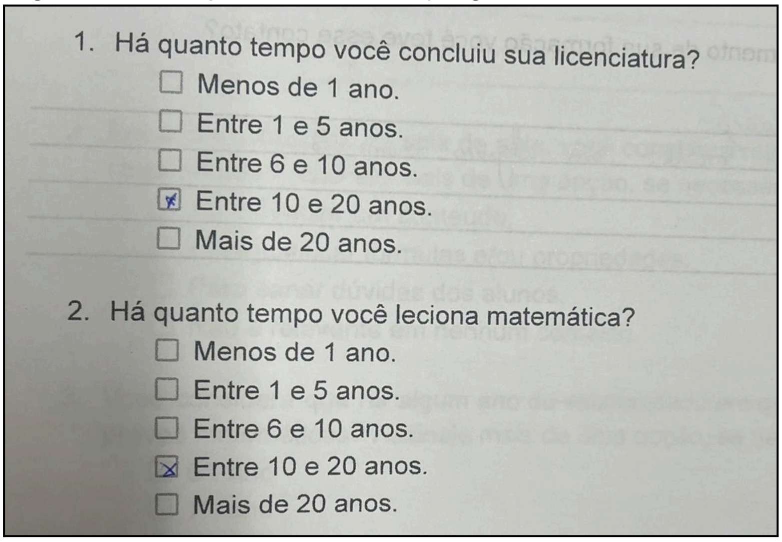
Passado este momento de contribuições, distribuiu-se o questionário para que os participantes respondessem enquanto prosseguiam na análise do caderno.

4.2.2 Análise do questionário

Como mencionado no capítulo 3, o questionário é dividido em dois blocos. O bloco A tem como objetivo traçar o perfil dos participantes da pesquisa e o bloco B tem por objetivo investigar a opinião dos participantes quanto ao uso de argumentação e prova matemática em sala de aula.

Por meio das respostas obtidas nas duas primeiras perguntas do Bloco A, exemplificadas na Figura 55, constatou-se que os participantes P1 e P2 concluíram o curso de licenciatura e lecionam entre 10 e 20 anos , P3 e P4 concluíram e lecionam há mais de 20 anos e P5 concluiu há menos de um ano, porém leciona há mais de um ano.

Figura 55 - Respostas de P1 às perguntas 1 e 2 do bloco A



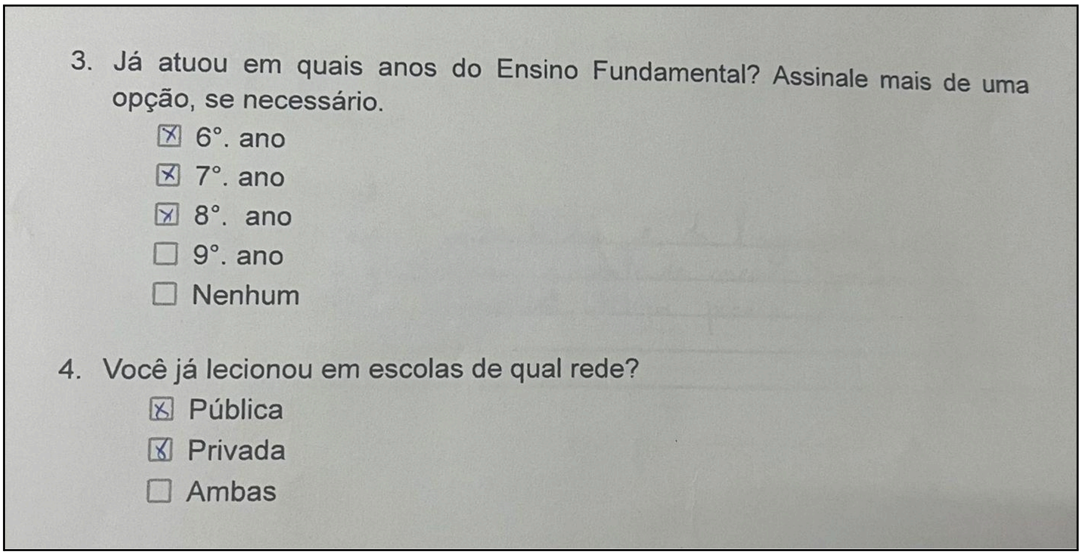
1. Há quanto tempo você concluiu sua licenciatura?
   - ☐ Menos de 1 ano.
   - ☐ Entre 1 e 5 anos.
   - ☐ Entre 6 e 10 anos.
   - ☒ Entre 10 e 20 anos.
   - ☐ Mais de 20 anos.

2. Há quanto tempo você leciona matemática?
   - ☐ Menos de 1 ano.
   - ☐ Entre 1 e 5 anos.
   - ☐ Entre 6 e 10 anos.
   - ☒ Entre 10 e 20 anos.
   - ☐ Mais de 20 anos.

Fonte:Protocolo de pesquisa.

Todos os participantes afirmaram já terem atuado em todos os anos de escolaridade dos Anos Finais do Ensino Fundamental, com exceção de P5, que atuou em todos os anos, exceto no 9°. ano. Quanto à rede de ensino, todos os participantes responderam, como exemplificado na Figura 56, que atuaram nas redes pública e privada.

Figura 56 - Respostas de P5 às perguntas 3 e 4 do bloco A



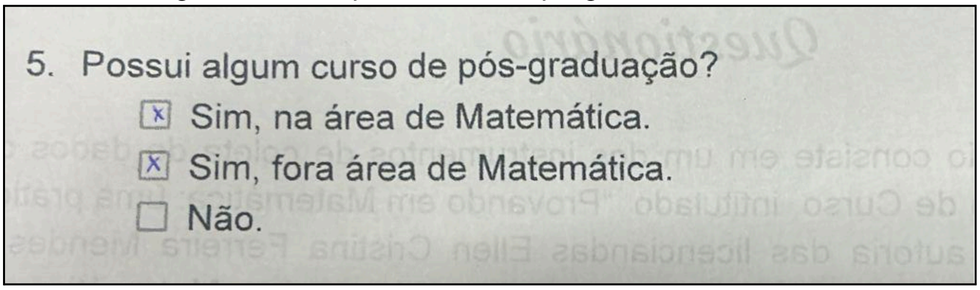
3. Já atuou em quais anos do Ensino Fundamental? Assinale mais de uma opção, se necessário.
   - ☒ 6°. ano
   - ☒ 7°. ano
   - ☒ 8°. ano
   - ☐ 9°. ano
   - ☐ Nenhum

4. Você já lecionou em escolas de qual rede?
   - ☒ Pública
   - ☒ Privada
   - ☐ Ambas

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação aos cursos de pós-graduação, P1 e P3 afirmaram que seus cursos relacionam-se com a Matemática, embora não sejam especificamente na área de Matemática. Estes participantes questionaram oralmente o que deveriam marcar para indicar estes cursos. Foi indicado que marcassem as duas opções na pergunta, como exemplificado na Figura 57. Os participantes P2 e P4 possuem uma pós-graduação na área de Matemática e P5 não possui curso de pós-graduação.

Figura 57 - Resposta de P1 à pergunta 5 do bloco A



5. Possui algum curso de pós-graduação?
- [x] Sim, na área de Matemática.
- [x] Sim, fora área de Matemática.
- [ ] Não.

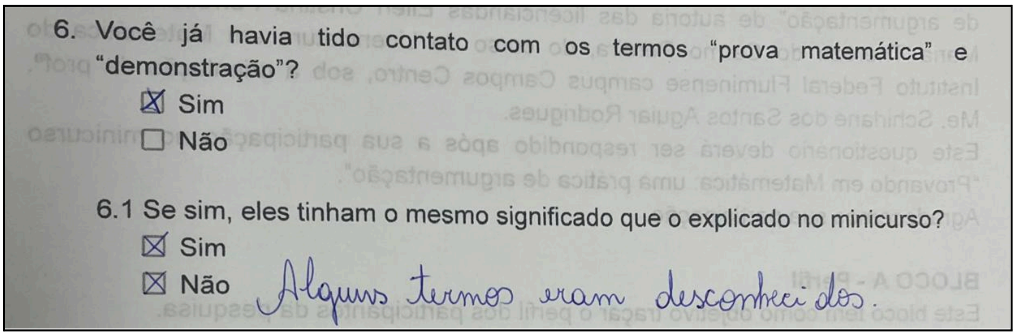
Fonte: Protocolo de Pesquisa.

Ao serem questionados se já haviam tido contato prévio com os termos “prova matemática” e “demonstração”, todos os participantes responderam “Sim”. Todavia, P1, P3 e P4 afirmaram que, neste contexto, estes termos não possuíam os mesmos significados que os apresentados no minicurso. Já P5 afirmou que possuíam o mesmo significado.

Observa-se que, mesmo após o minicurso, os participantes P1, P2, P3 e P4 continuaram utilizando os termos “prova matemática” e “demonstração” como sinônimos. O tratamento desses termos, bem como de “argumentação” e “explicação” como sinônimos, também é apontado por Caldato, Utsumi e Nasser (2017).

Em sua resposta, P2 escreveu (Figura 58) que “Alguns termos eram desconhecidos”, referindo-se ao desconhecimento de algumas nomenclaturas utilizadas para explicar os conceitos de “prova matemática” e “demonstração”.

Figura 58 - Respostas de P2 às perguntas 6 e 6.1 do bloco A



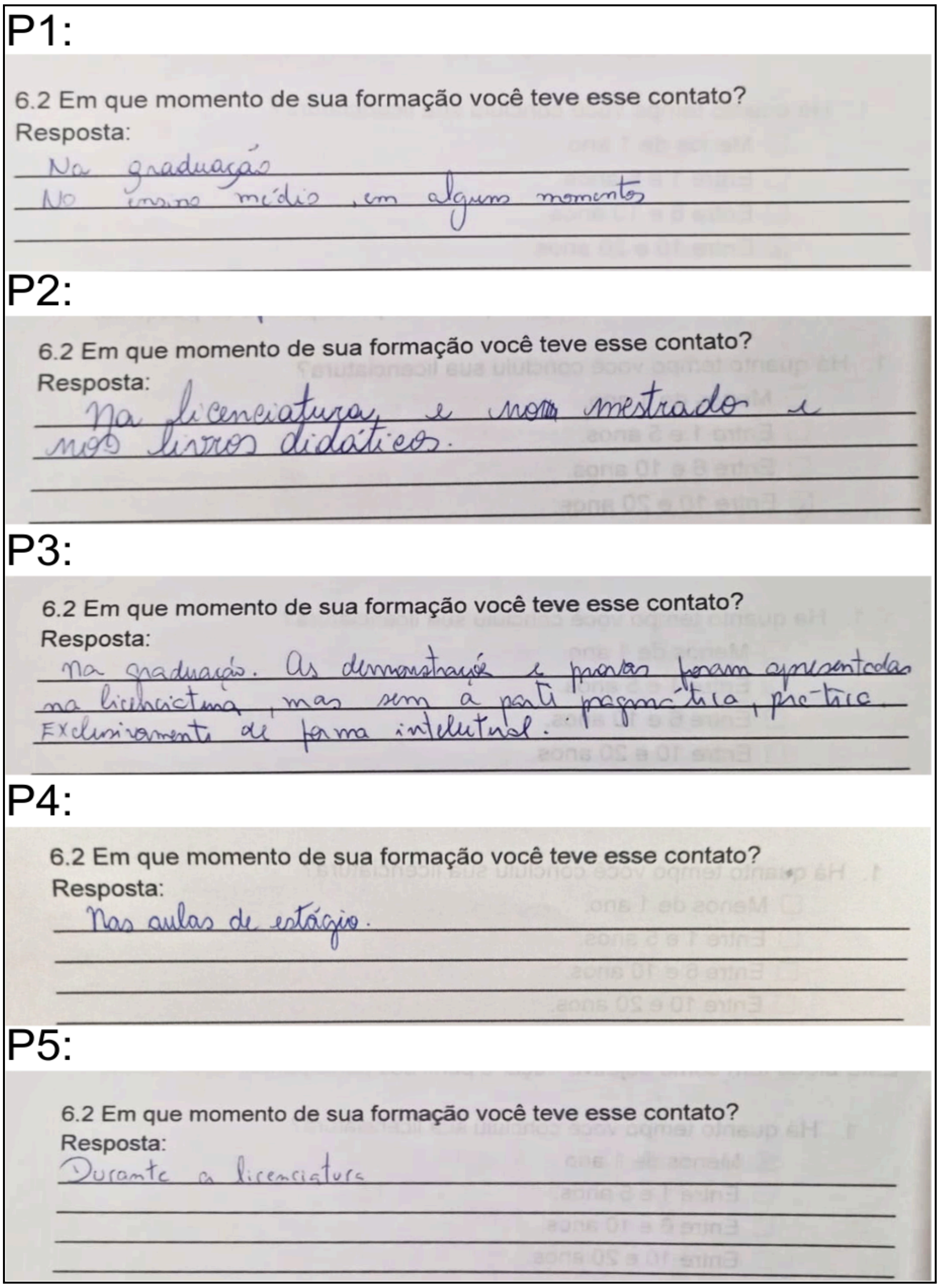
6. Você já havia tido contato com os termos “prova matemática” e “demonstração”?
- [x] Sim
- [ ] Não

6.1 Se sim, eles tinham o mesmo significado que o explicado no minicurso?
- [x] Sim
- [x] Não Alguns termos eram desconhecidos.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quanto ao momento de sua formação no qual os participantes tiveram contato com os termos “prova matemática” e “demonstração”, P1 declarou que teve contato em alguns momentos do Ensino Médio e na graduação. O participante P2 teve contato durante a graduação, o mestrado e em alguns livros didáticos. P3 afirmou que teve contato durante a graduação, porém apenas com provas intelectuais (Figura 59).

Figura 59 - Respostas dos participantes à pergunta 6.2 do bloco A


P1:

6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
Resposta:
Na graduação
No ensino médio, em alguns momentos

P2:

6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
Resposta:
Na licenciatura, e no mestrado e
nos livros didáticos.

P3:

6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
Resposta:
na graduação. As demonstrações e provas foram apresentadas
na licenciatura, mas sem a parte pragmática, prática.
Exclusivamente de forma intelectual.

P4:

6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
Resposta:
Nas aulas de estágio.

P5:

6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
Resposta:
Durante a licenciatura

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante P4 respondeu que havia tido contato “nas aulas de estágio”, não especificando se, neste contexto, o participante atuava como estagiário ou supervisor. Já P5 declarou que teve contato durante a graduação.

As respostas dos participantes às perguntas do Bloco A do questionário estão sintetizadas no Quadro 7.

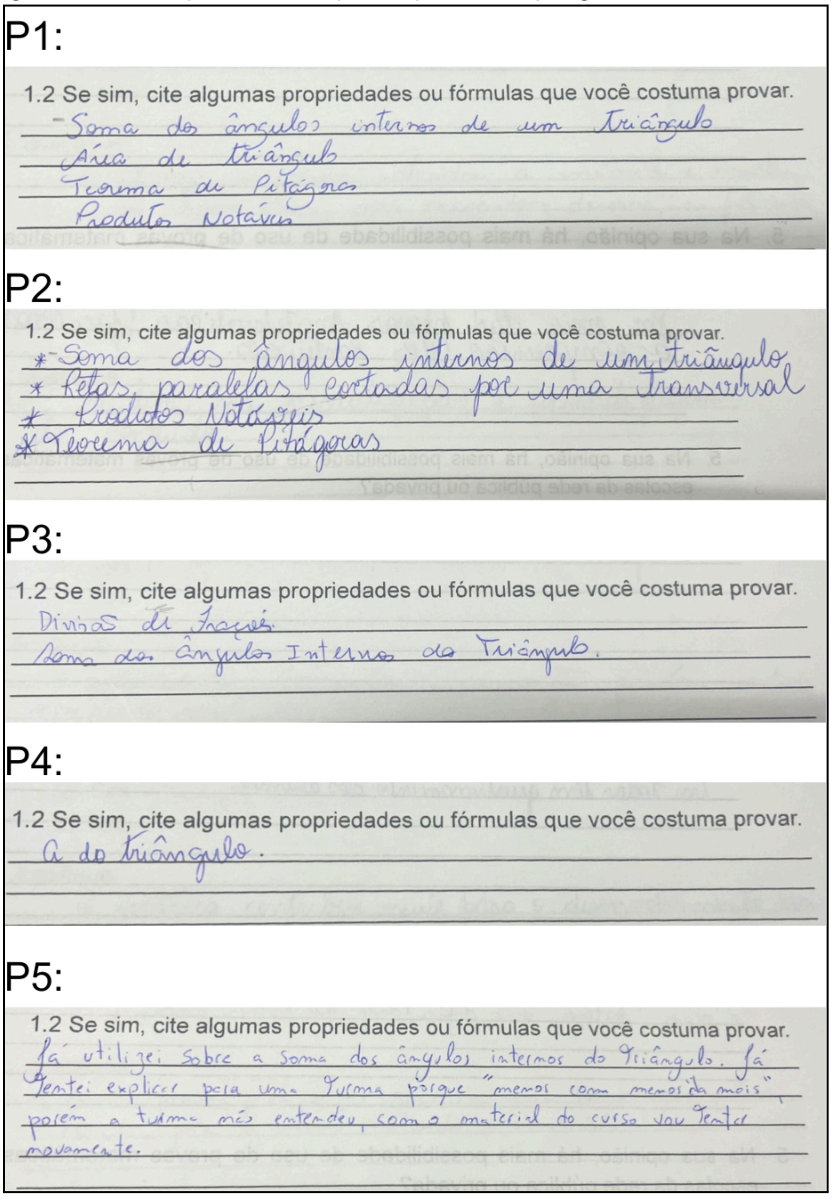
Quadro 7 - Perfil dos participantes da pesquisa

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Tempo de conclusão da licenciatura e tempo de docência	Entre 10 e 20 anos	Entre 10 e 20 anos	Mais de 20 anos	Mais de 20 anos	Menos de 1 ano
Anos Finais do Ensino Fundamental nos quais atuou/atua	Todos	Todos	Todos	Todos	Todos, exceto, 9°. ano
Rede de Ensino nas quais atuou/atua	Pública e privada	Pública e privada	Pública e privada	Pública e privada	Pública e privada
Curso de Pós-graduação que possui	Em área afim à Matemática	Na área de Matemática	Em área afim à Matemática	Na área de Matemática	Não possui
Contato prévio com os termos “prova” e “demonstração”	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaboração própria.

O bloco B inicia-se questionando aos participantes se eles utilizam ou já utilizaram provas matemáticas em sua prática docente. Todos os participantes responderam que “Sim”. Os participantes P1, P2, P3 e P5 afirmaram que costumam provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, P1 e P2 também afirmaram que costumam provar “Produtos Notáveis” e “Teorema de Pitágoras”. Outra prova que P1 costuma desenvolver é a da fórmula da área do triângulo (Figura 60).

Figura 60 - Respostas dos participantes à pergunta 1.2 do bloco B



P1:

1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

- Soma dos ângulos internos de um triângulo
Área do triângulo
Teorema de Pitágoras
Produtos Notáveis

P2:

1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

*- Soma dos ângulos internos de um triângulo
* Retas paralelas cortadas por uma transversal
* Produtos Notáveis
* Teorema de Pitágoras

P3:

1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

Divisão de frações
Soma dos ângulos Internos do Triângulo.

P4:

1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

a do triângulo.

P5:

1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

Já utilizei sobre a soma dos ângulos internos do triângulo. Já tentei explicar para uma turma porque "menos com menos da mais", porém a turma não entendeu, com o material do curso vou tentar novamente.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por meio destas respostas e de declarações feitas durante o minicurso, ficou evidente que os participantes desta pesquisa já utilizavam provas matemáticas em sua prática docente. Portanto, pode-se considerar que eles acreditam que argumentação e provas matemáticas são utilizáveis em sala de aula. Esta percepção diverge das opiniões dos professores participantes das pesquisas de Rosale (2018) e Matheus (2016).

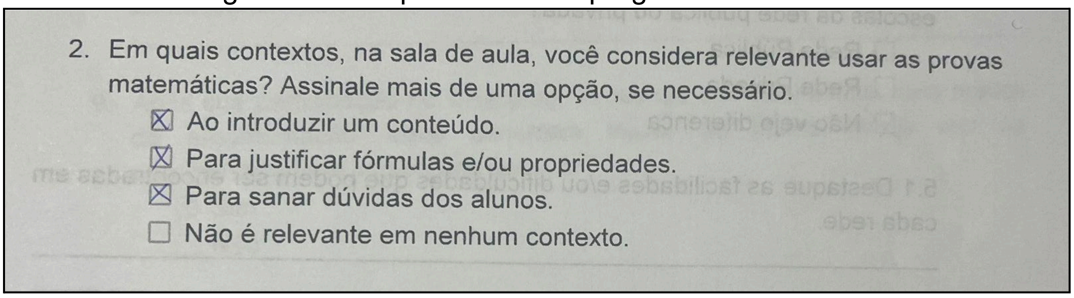
O participante P2 declarou que costuma provar "retas paralelas cortadas por uma transversal", não especificando qual propriedade. P3 citou a prova de "divisão de frações” e P4 respondeu apenas com “a do triângulo”, não evidenciando a que propriedade deste ente matemático referia-se.

O participante P5 relatou que tentou utilizar uma prova para explicar por que “menos com menos dá mais”, porém a turma não compreendeu. Contudo, este participante afirmou que tentaria novamente utilizando o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação”. Percebeu-se que, neste caso, o produto educacional elaborado cumpriu seu objetivo de facilitar o acesso dos professores a provas matemáticas, ampliar seu repertório e fornecer exemplos utilizáveis em sala de aula.

Vale ressaltar que uma propriedade pode ser provada de diversas maneiras. Para a propriedade citada por P5, o caderno apresenta duas maneiras para provar, cabendo ao participante decidir qual se adequa à turma em questão.

Ao serem questionados sobre o momento em que consideram relevante utilizar provas matemáticas em sala de aula, os participantes P1, P2, P3 e P5 assinalaram “ao introduzir um conteúdo”. Todos os participantes afirmaram que consideram relevante para justificar fórmulas e/ou propriedades. Os participantes P2, P4 e P5 também assinalaram “para sanar dúvidas dos alunos”. Nenhum dos participantes assinalou “não é relevante em nenhum contexto” (Figura 61).

Figura 61 - Resposta de P2 à pergunta 2 do bloco B



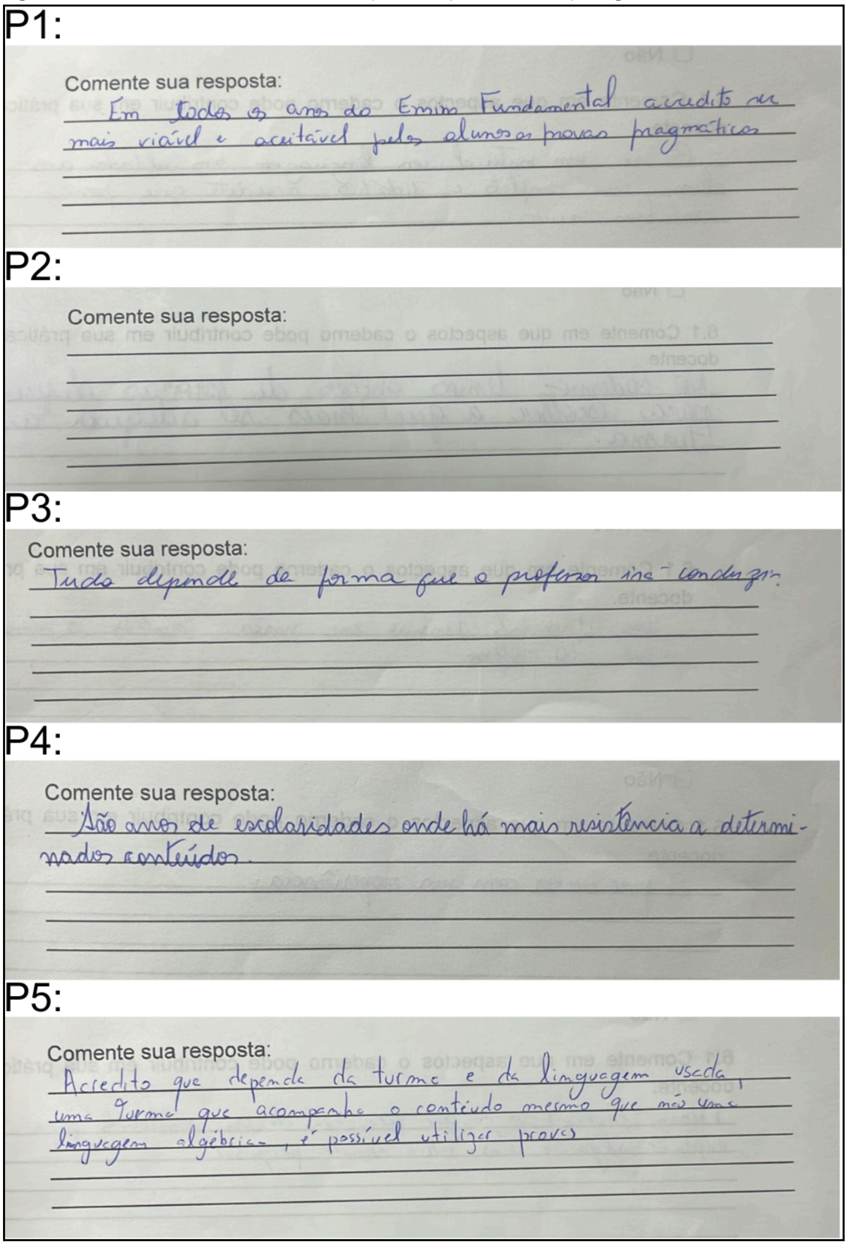
2. Em quais contextos, na sala de aula, você considera relevante usar as provas matemáticas? Assinale mais de uma opção, se necessário.

☒ Ao introduzir um conteúdo.
☒ Para justificar fórmulas e/ou propriedades.
☒ Para sanar dúvidas dos alunos.
☐ Não é relevante em nenhum contexto.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Acerca dos anos de escolaridade dos Anos Finais do Ensino Fundamental em que os participantes consideram mais viável utilizar provas matemáticas, os participantes P1, P3 e P5 afirmaram que consideram igualmente viável em todos os anos de escolaridade. Os participantes P2 e P4 assinalaram “8°. ano” e “9°. ano”. Com exceção de P2, todos os participantes comentaram sua resposta (Figura 62).

Figura 62 - Comentários dos participantes à pergunta 3 do bloco B

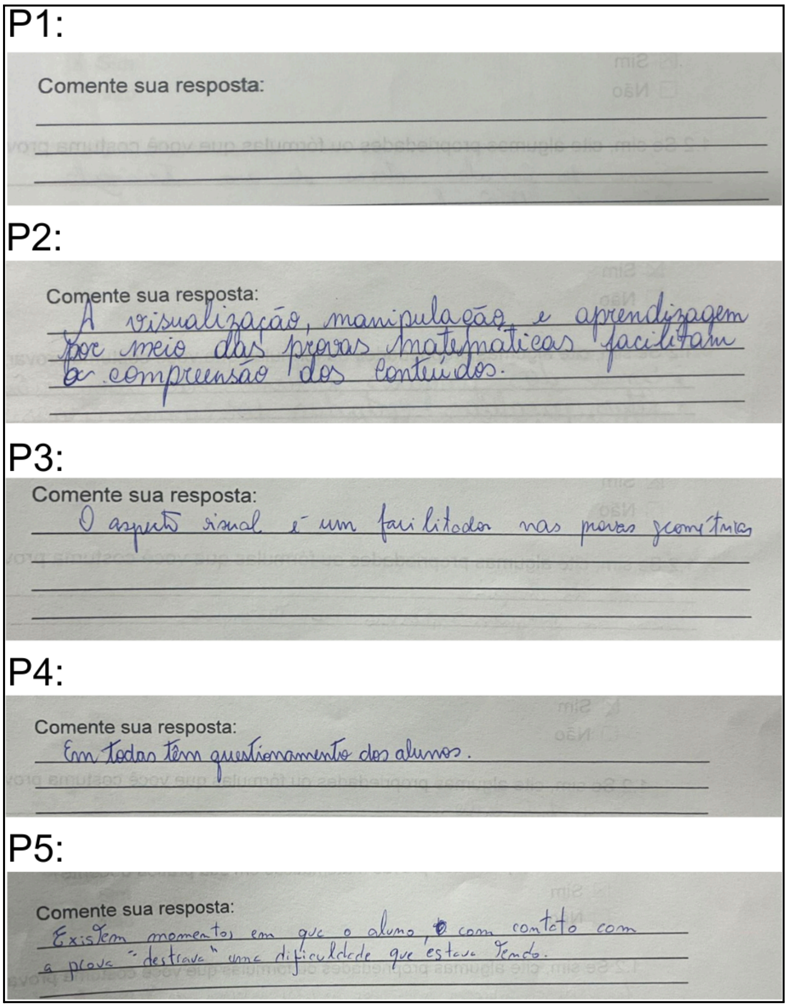


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Uma concepção semelhante à resposta de P5 foi identificada por Caldato, Utsumi e Nasser (2017) em um questionário aplicado para professores de Matemática da Educação Básica. Estes também acreditam que o uso de provas matemáticas em sala de aula depende da turma e de suas características, como "[...] grau de abstração e generalização, conhecimentos prévios e vontade por aprender algo novo" (Caldato, Utsumi, Nasser, 2017, p. 82).

Ao serem questionados sobre os campos da Matemática em que consideram o uso das provas matemáticas mais viável nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os participantes P2, P4 e P5 assinalaram "igualmente viável em todas". O participante P3 afirmou que considera Geometria o campo no qual o uso de provas matemáticas é mais viável. Estes participantes comentaram suas respostas, conforme ilustrado na Figura 63.

Figura 63 - Comentários dos participantes à pergunta 4 do bloco B


P1:
Comente sua resposta:

P2:
Comente sua resposta:
A visualização, manipulação e aprendizagem por meio das provas matemáticas facilitam a compreensão dos conteúdos.

P3:
Comente sua resposta:
O aspecto visual é um facilitador nas provas geométricas

P4:
Comente sua resposta:
Em todas tem questionamento dos alunos.

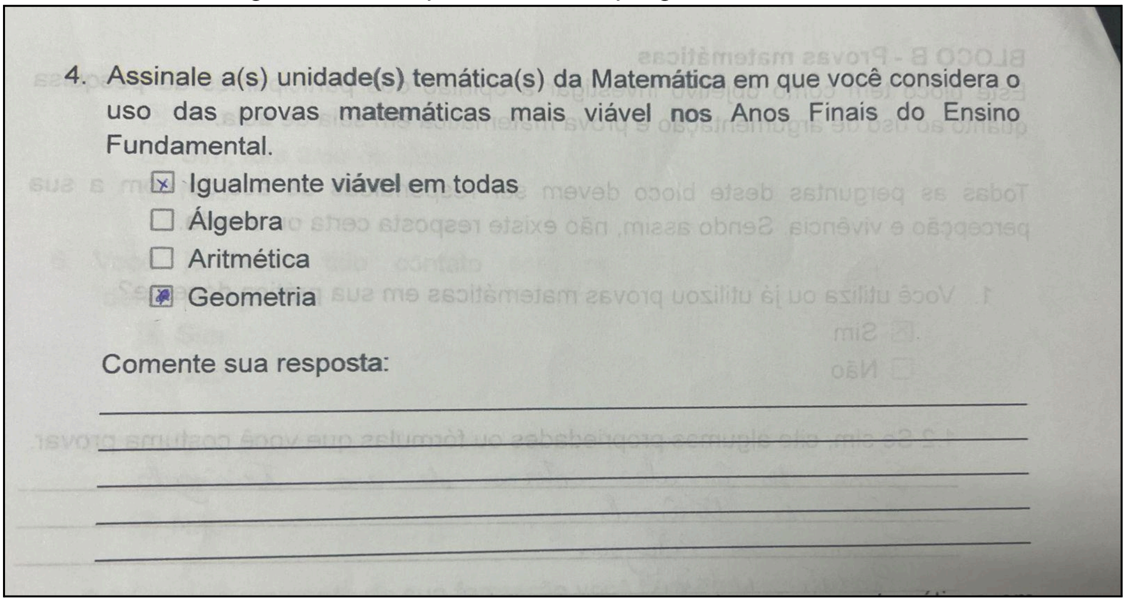
P5:
Comente sua resposta:
Existem momentos em que o aluno, com contato com a prova "destrava" uma dificuldade que estava tendo.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os participantes que consideram igualmente viável em todos os campos da Matemática, P2, P4 e P5, ressaltaram o potencial explicativo das provas, para facilitar a compreensão dos alunos. P4 e P5 enxergam a prova matemática como uma estratégia para responder às dúvidas dos alunos. Já o participante P3 julga mais viável utilizar em Geometria por considerar que o aspecto visual é um facilitador nas provas.

Quanto ao participante P1, não foi possível identificar se ele considera igualmente viável em todas ou mais viável em Geometria, uma vez que o participante assinalou as duas opções e não comentou sua resposta (Figura 64).

Figura 64 - Resposta de P1 à pergunta 4 do bloco B


4. Assinale a(s) unidade(s) temática(s) da Matemática em que você considera o uso das provas matemáticas mais viável nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

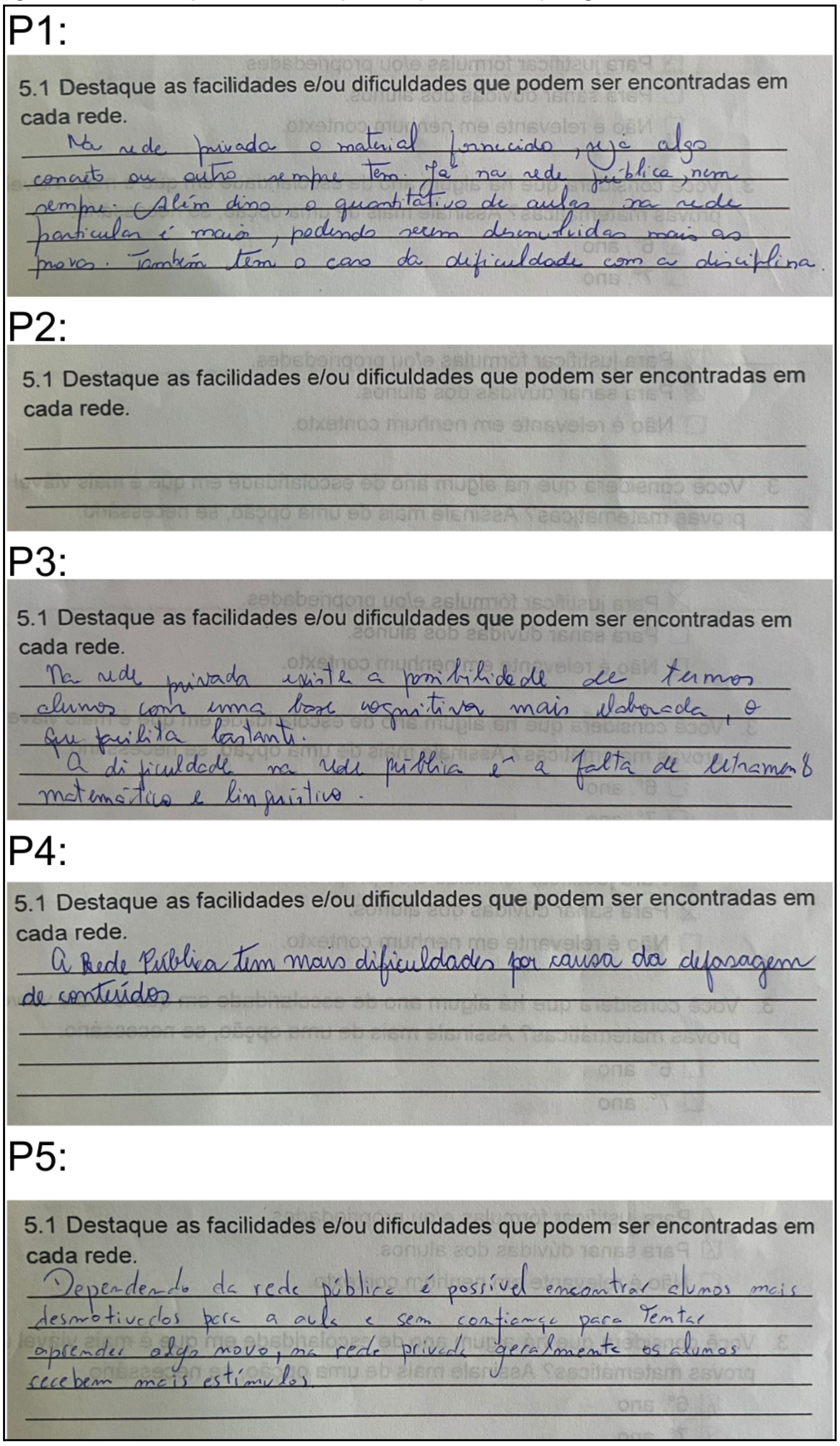
- [x] Igualmente viável em todas
- [ ] Álgebra
- [ ] Aritmética
- [x] Geometria

Comente sua resposta:

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quando questionados quanto à diferença de possibilidade de uso de provas matemáticas em escolas da rede pública e privada, os participantes P1 e P2 afirmaram não ver diferença. P4 e P5 consideram que há maior possibilidade de uso nas escolas da rede privada. Em seguida, os participantes responderam uma pergunta discursiva na qual destacaram facilidades e dificuldades no uso de provas matemáticas em cada rede (Figura 65).

Figura 65 - Respostas dos participantes à pergunta 5.1 do bloco B



P1:

5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

Na rede privada o material fornecido, seja algo concreto ou outro sempre tem. Já na rede pública, nem sempre. Além disso, o quantitativo de aulas na rede particular é maior, podendo serem desenvolvidas mais as provas. Também tem o caso da dificuldade com a disciplina.

P2:

5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

P3:

5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

Na rede privada existe a possibilidade de termos alunos com uma base cognitiva mais elaborada, o que facilita bastante.
A dificuldade na rede pública é a falta de letramento matemático e linguístico.

P4:

5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

A Rede Pública tem mais dificuldades por causa da defasagem de conteúdos

P5:

5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

Dependendo da rede pública é possível encontrar alunos mais desmotivados para a aula e sem confiança para tentar aprender algo novo, na rede privada geralmente os alunos recebem mais estímulos.

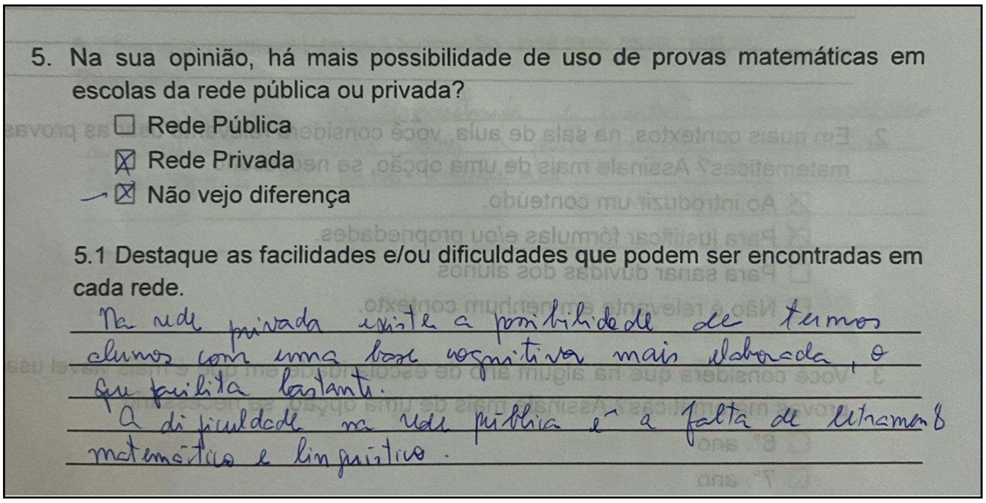
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os participantes P1, P3 e P4 mencionaram como obstáculos para o uso de provas matemáticas em sala de aula as dificuldades dos alunos em Matemática, como a falta de letramento matemático e de afinidade com a linguagem matemática, além da defasagem de conteúdos. Rigo (2021, p.16) aponta que “[...] para fazer uma argumentação correta, o aluno precisa ter uma base matemática muito boa e saber articular os mesmos [...]", reafirmando os obstáculos mencionados pelos participantes.

Embora os participantes tenham apontado estes obstáculos no contexto de escolas da rede pública, eles afirmaram oralmente durante o minicurso que estas dificuldades também são encontradas, em menor proporção, em escolas da rede privada.

Não foi possível identificar se P3 considera que há mais possibilidade de uso na rede privada ou que não há diferença entre as redes, dado que o participante assinalou ambas as opções (Figura 66). Todavia, na resposta discursiva da pergunta seguinte, ele destacou apenas facilidades na rede privada e dificuldades na rede pública.

Figura 66 - Respostas de P3 às perguntas 5 e 5.1 do bloco B



5. Na sua opinião, há mais possibilidade de uso de provas matemáticas em escolas da rede pública ou privada?

- ☐ Rede Pública
- ☒ Rede Privada
- ☒ Não vejo diferença

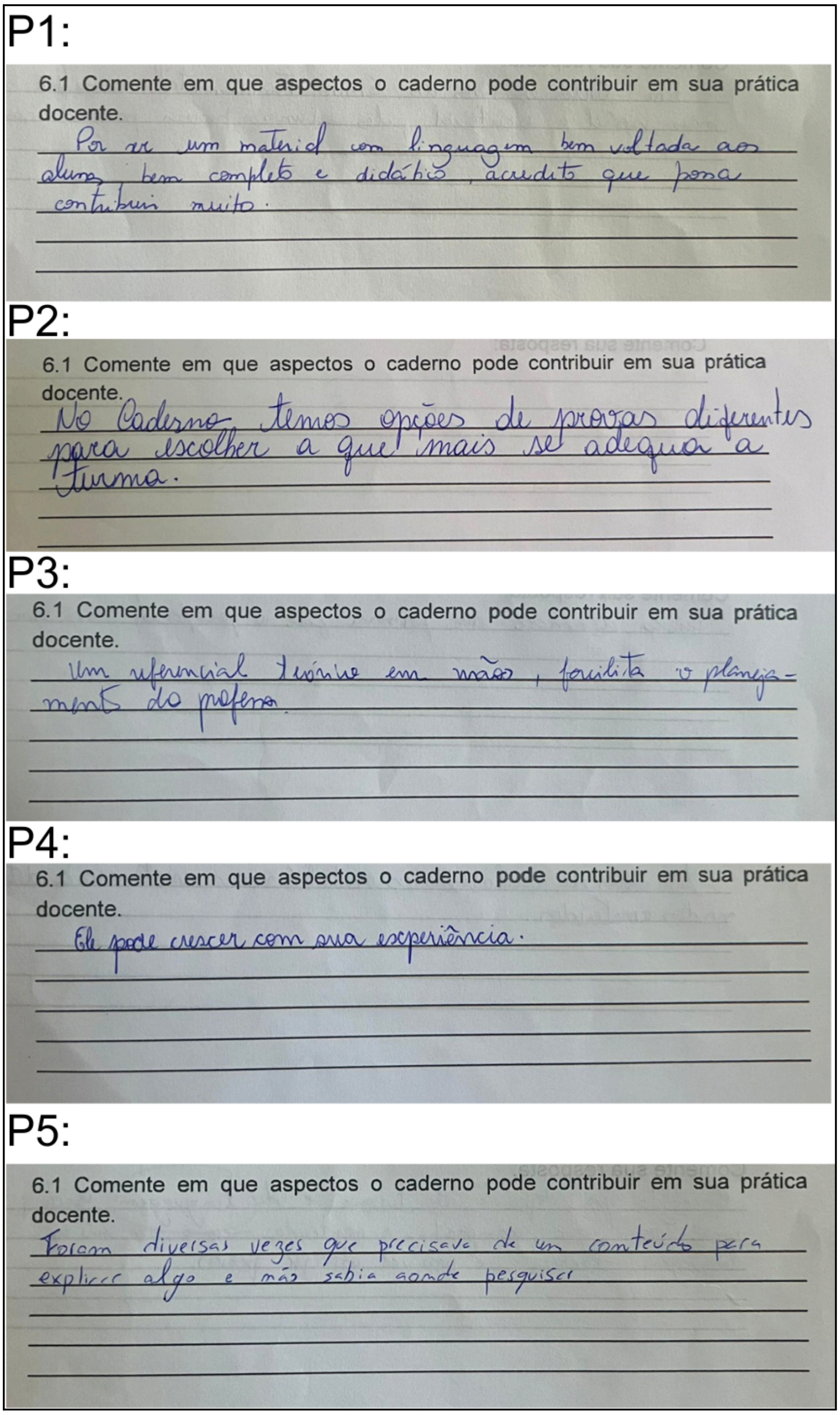
5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.

Na rede privada existe a possibilidade de termos alunos com uma base cognitiva mais elaborada, o que facilita bastante.
A dificuldade na rede pública é a falta de letramento matemático e linguístico.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Acerca do "Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação", foi perguntado se os participantes consideram que este material auxilia no uso de provas matemáticas em sala de aula. Todos os participantes responderam que sim e comentaram sobre os aspectos nos quais o caderno pode contribuir na prática docente (Figura 67).

Figura 67 - Respostas dos participantes à pergunta 6.1 do bloco B



P1:

6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.

Por ser um material com linguagem bem voltada aos alunos, bem completo e didático, acredito que possa contribuir muito.

P2:

6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.

No Caderno temos opções de provas diferentes para escolher a que mais se adequa a turma.

P3:

6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.

Um referencial teórico em mãos, facilita o planejamento do professor.

P4:

6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.

Ele pode crescer com sua experiência.

P5:

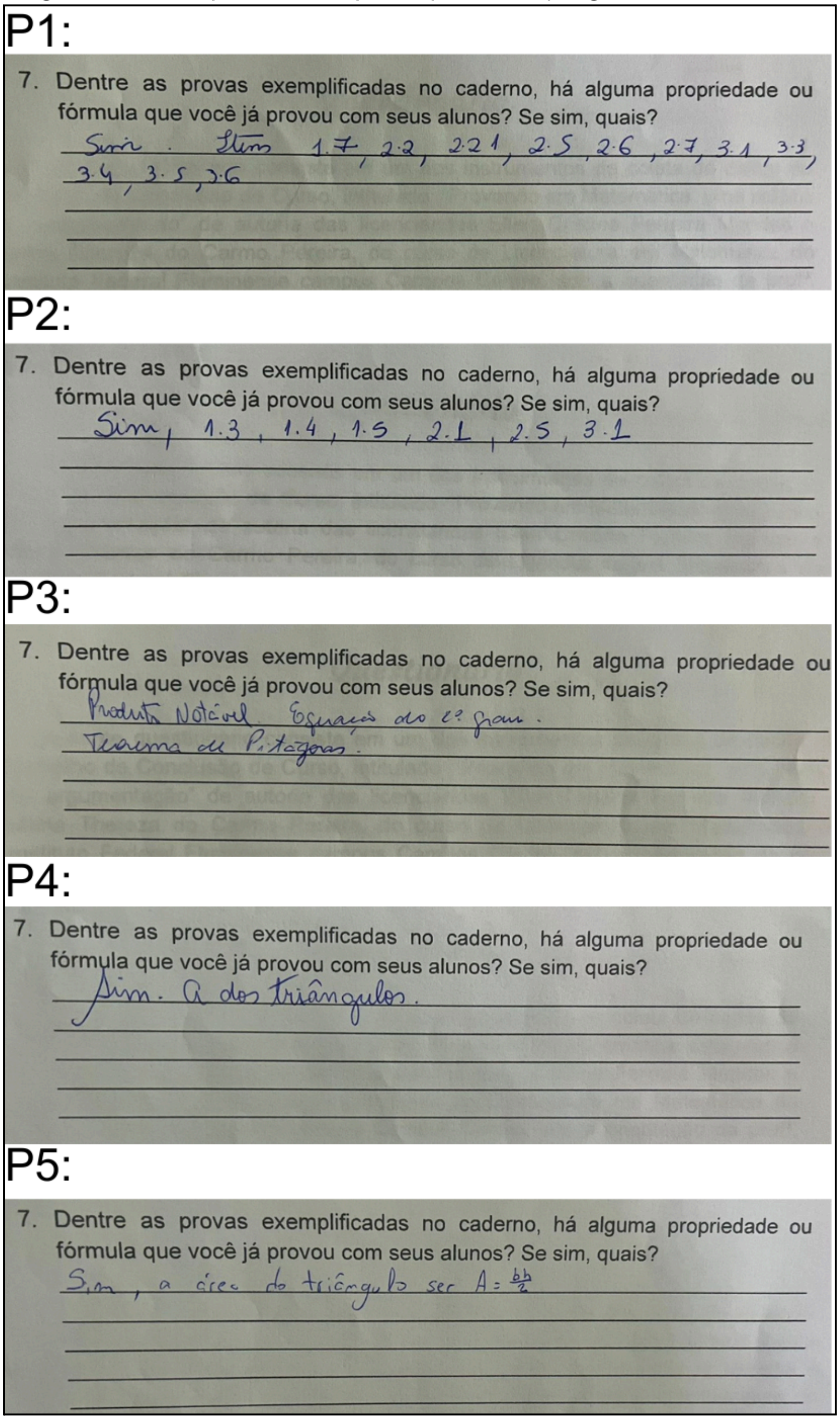
6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.

Foram diversas vezes que precisava de um conteúdo para explicar algo e não sabia aonde pesquisar

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os participantes foram questionados se já haviam utilizado alguma das provas presentes no “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” em sala de aula. Em caso afirmativo, foi solicitado que eles citassem as provas utilizadas (Figura 68). Todos os participantes já utilizaram pelo menos uma das provas presentes no caderno.

Figura 68 - Respostas dos participantes à pergunta 7 do bloco B


P1:

7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?

Sim. Itens 1.7, 2.2, 2.2.1, 2.5, 2.6, 2.7, 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

P2:

7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?

Sim, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.5, 3.1

P3:

7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?

Produto Notável. Equação do 2º grau.
Teorema de Pitágoras.

P4:

7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?

Sim. A dos triângulos.

P5:

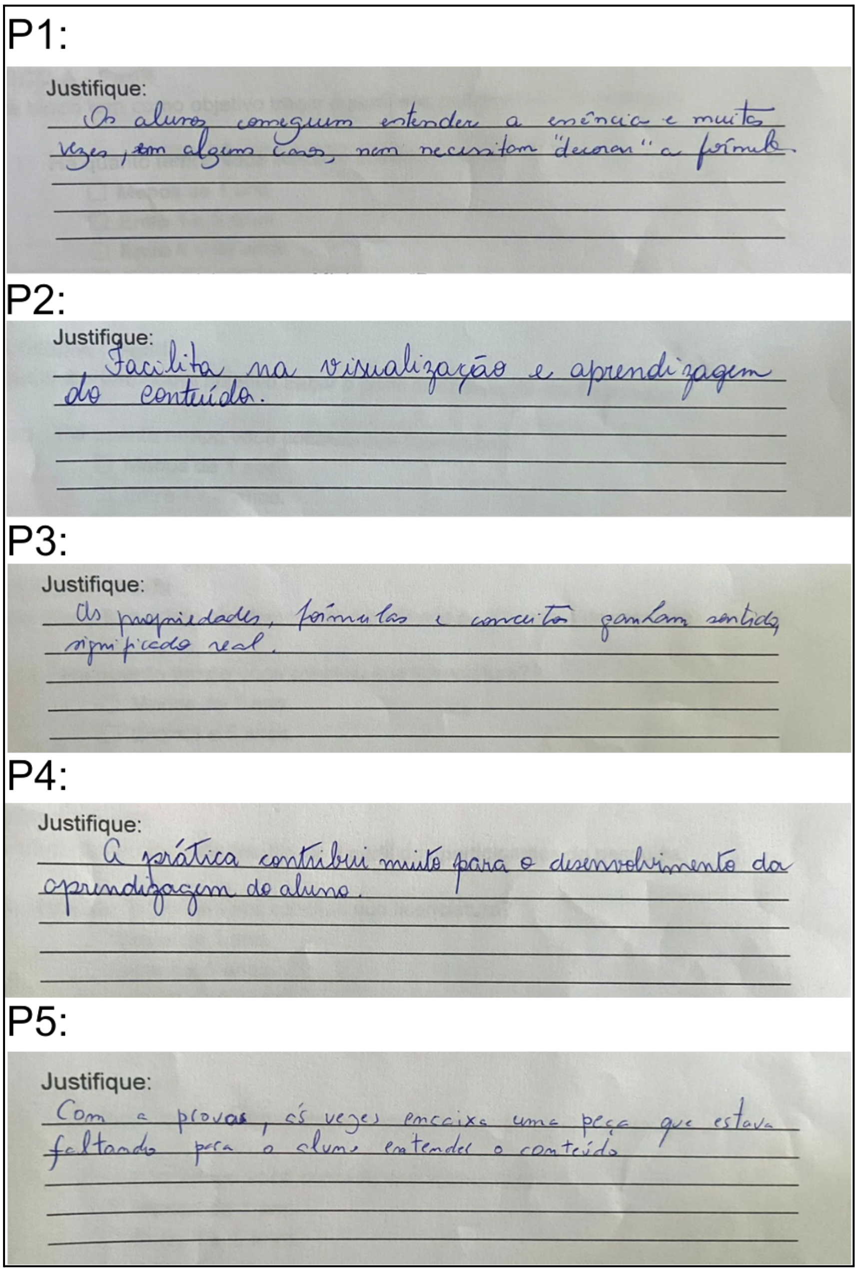
7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?

Sim, a área do triângulo ser $A = \frac{bh}{2}$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quando questionados se acreditam que o uso de provas matemáticas pode contribuir para a aprendizagem dos alunos, com base na experiência em sala de aula de cada um, todos assinalaram "Sim". Foi solicitado que os participantes justificassem suas respostas (Figura 69).

Figura 69 - Justificativas dos participantes à pergunta 8 do bloco B


P1:

Justifique: Os alunos conseguem entender a essência e muitas vezes, em alguns casos, nem necessitam "decorar" a fórmula.

P2:

Justifique: Facilita na visualização e aprendizagem do conteúdo.

P3:

Justifique: As propriedades, fórmulas e conceitos ganham sentido, significado real.

P4:

Justifique: A prática contribui muito para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

P5:

Justifique: Com a provas, ás vezes encaixa uma peça que estava faltando para o aluno entender o conteúdo

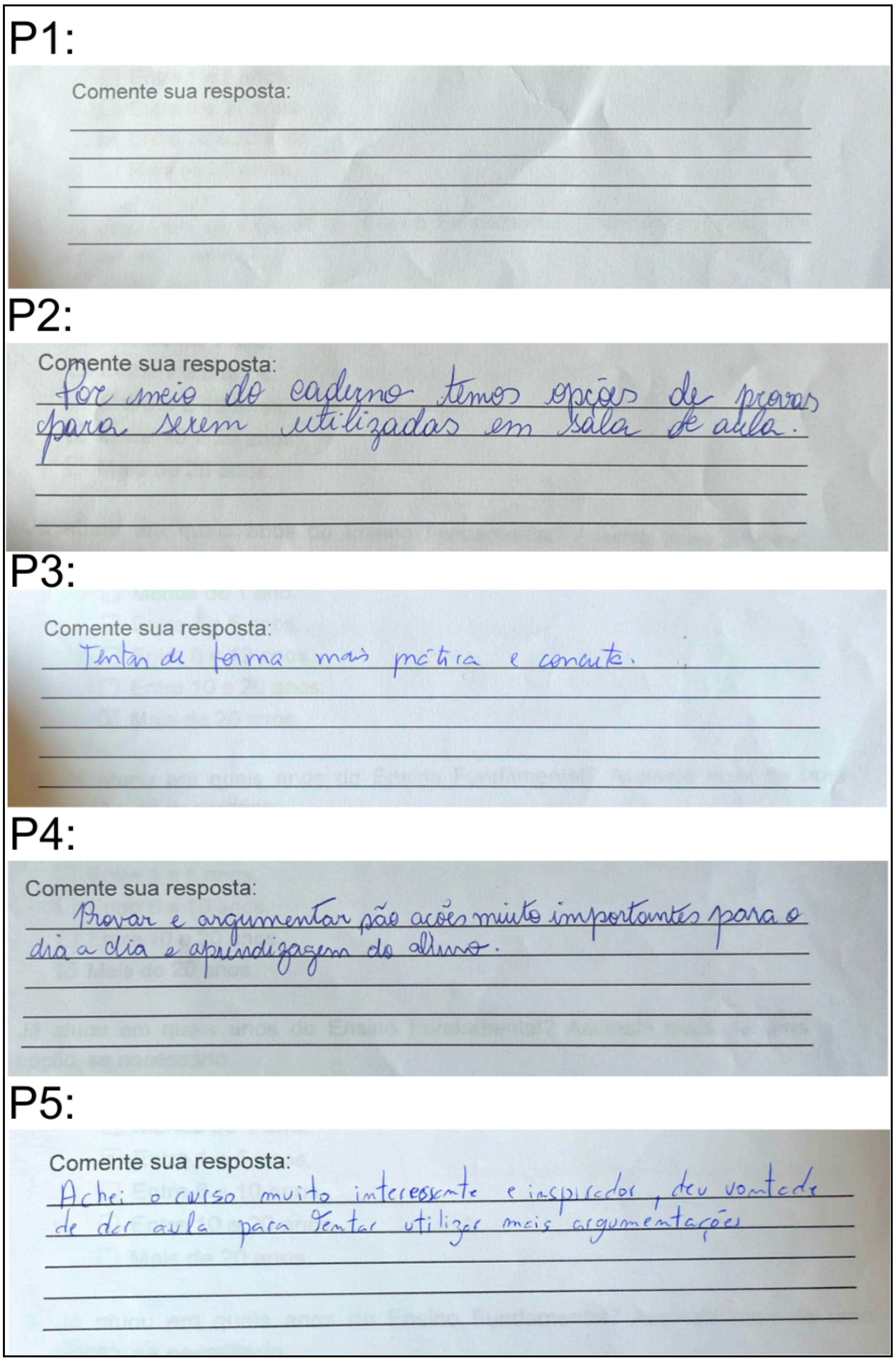
Fonte: Protocolo de pesquisa.

A partir dessas justificativas, concluiu-se que, na visão dos participantes, o uso de provas matemáticas facilita a visualização, aprofunda o aprendizado, contribui para o desenvolvimento da aprendizagem de Matemática, atribui sentido, significado e promove o entendimento das propriedades e fórmulas provadas.

Essas observações corroboram com Matheus (2016) que defende que o uso de provas matemáticas em sala de aula auxilia os alunos a compreenderem o processo de construção do conhecimento matemático. Além disso, Rigo (2021, p. 60) afirma que “[...] estudar proposições com a preocupação de argumentar, pode levar a aprendizagens mais consistentes do que aprendizagens mecânicas ou ingênuas (aquelas que aceitam a veracidade sem verificação)”, destacando, assim como os participantes do minicurso, que o uso de provas matemáticas traz benefícios à aprendizagem para além do mero entendimento da prova.

Foi solicitado aos participantes que considerassem se, após sua participação no minicurso “Provando em Matemática: uma prática de argumentação”, eles iniciariam ou intensificariam o uso da argumentação em sua prática docente. Todos os participantes assinalaram “Sim” e, com exceção de P1, comentaram suas respostas (Figura 70).

Figura 70 - Comentários dos participantes à pergunta 9 do bloco B


P1:

Comente sua resposta:

P2:

Comente sua resposta:
Por meio do caderno temos opções de provas para serem utilizadas em sala de aula.

P3:

Comente sua resposta:
Tentar de forma mais prática e concreta.

P4:

Comente sua resposta:
Provar e argumentar são ações muito importantes para o dia a dia e aprendizagem do aluno.

P5:

Comente sua resposta:
Achei o curso muito interessante e inspirador, deu vontade de dar aula para tentar utilizar mais argumentações

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O participante P2 ressaltou que o “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação” fornece opções de prova para serem utilizadas em sala de aula.

Em seguida, os participantes engajaram-se em uma conversa espontânea. Essa conversa iniciou-se com comentários do participante P1 sobre a falta de tempo para finalizar o conteúdo programático de Matemática. Foi citado o exemplo do 2°. ano do Ensino Médio, que nas unidades escolares das redes Estadual e Federal em Campos dos Goytacazes tem apenas dois horários semanais para a disciplina de Matemática. Este obstáculo também foi observado por Matheus (2016), dado que as professoras participantes de sua pesquisa apontaram a falta de tempo como um dos fatores que dificultam, podendo até mesmo impedir, o uso de provas matemáticas em sala de aula.

O participante P3 ressaltou que a falta de tempo o impedia de realizar construções geométricas necessárias para o entendimento do conteúdo. Destacou também que, neste contexto, o *software* GeoGebra[4] é um "facilitador absurdo". Observa-se que a construção geométrica, no contexto de explicar e mostrar ao aluno a justificativa de fórmulas ou propriedades, configura uma prova matemática (Balacheff, 2022b).

Após esta conversa, iniciou-se a entrevista semiestruturada com base no roteiro elaborado.

4.2.3 Análise da entrevista

No início da entrevista foi explicitado aos participantes que esta tinha como objetivo complementar as respostas obtidas a partir do questionário. Em seguida, foi perguntado aos participantes se eles haviam tido contato com argumentação e prova matemática durante sua formação e como foi este contato. Foi reforçado que argumentações e provas matemáticas voltadas para o Ensino Básico possuem maior potencial explicativo do que as demonstrações presentes no Ensino Superior (Balacheff, 2022a).

Os participantes P1, P2, P3 e P5 afirmaram que, durante sua graduação, viram "muitas demonstrações". P1 reforçou que estas demonstrações eram extensas e complexas. Destaca-se que estas demonstrações estão distantes das provas matemáticas utilizadas no contexto escolar, principalmente quanto ao nível de rigor matemático e formalidade. Em seu trabalho, Rosale (2018, p. 89) aponta "a

[4] Trata-se de um "software dinâmico, que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística. [...] O software apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo" (Lopes, 2013).

necessidade de mudanças na formação inicial dos professores de Matemática quanto a um conceito mais amplo de prova e demonstração na Matemática escolar".

O participante P2 relatou que, durante o Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT[5]), um componente curricular de sua graduação, desenvolveu um trabalho sobre provas matemáticas dos produtos notáveis utilizando material concreto. Destacou, ainda, que a escolha pelo uso de material concreto em detrimento de *softwares* deu-se devido a maioria das escolas de sua região não possuírem recursos tecnológicos.

No âmbito desta discussão perguntou-se aos participantes se a presença ou ausência de argumentação e provas matemáticas em sua formação influencia a prática docente de cada um deles.

O participante P2 respondeu "quando a gente vê, a gente tende a utilizar depois". Destaca-se que, de acordo com a pergunta anterior, os participantes P1, P3 e P5 tiveram contato principalmente com demonstrações, que são mais rigorosas e formais, em sua formação inicial, e não com provas matemáticas destinadas ao Ensino Básico. Reitera-se, assim, que

> para que venha a desenvolver um trabalho significativo com argumentação e prova, seria necessário que esse futuro professor superasse, possivelmente de forma autônoma, o abismo entre o rigor com que a prova lhe é apresentada em sua própria formação e as reais possibilidades de argumentação de seus jovens alunos (Matheus, 2016, p. 75-76).

Em seguida, o participante P2 complementou sua fala anterior dizendo que agora que conhecia a prova pragmática da fórmula da área do triângulo, apresentada no minicurso, seria uma opção para utilizar com os alunos, pois ela é "mais fácil". Porém, disse que provas "mais difíceis" como a da irracionalidade do número $\sqrt{2}$, também apresentada no minicurso, não considera utilizável na sala de aula.

[5] O LEAMAT é um componente curricular do 2°. período da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense Campus Campos Centro no qual "o professor em formação desenvolve atividades que o encaminham a vivenciar situações de sala de aula que possibilitarão a ênfase no trabalho de investigação de materiais instrucionais, concorrendo significativamente para o desenvolvimento da inteligência lógico-matemática dos alunos" (Brasil, c2024).

Respondendo à mesma pergunta, o participante P3 afirmou que “é obrigação do professor saber provas conceituais, factuais, para ele poder na hora de uma dúvida ter respaldo que não é só intuitivo”. A visão deste participante corrobora com Matheus (2016), que observa a importância de professores de Matemática terem conhecimento acerca de provas matemáticas para terem a possibilidade de utilizá-las em sala de aula.

O participante P4 complementou a resposta de P3 dizendo que “é uma outra opção, porque às vezes você vai para uma parte e o aluno não entendeu, aí você propõe uma outra forma de ensinar”. Observa-se que a fala desse participante enfatiza a função explicativa das provas matemáticas, na qual são utilizadas para auxiliar no entendimento dos alunos (De Villiers, 1990).

Complementando a fala de P4, o participante P5 afirmou que “se você explicou pela Álgebra a pessoa não entendeu, você vai pela Geometria”. Ressaltando, assim, que existem várias formas de explicar, porém não ficou claro se o participante se referiu à utilização de provas matemáticas.

Em seguida, perguntou-se aos participantes, de acordo com a experiência deles em sala de aula, se eles consideravam que seus alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental conseguiriam acompanhar e compreender provas matemáticas e se estas os auxiliariam no processo de aprendizagem.

Respondendo a essa pergunta, o participante P1 afirmou que “quando é algo concreto eles se interessam muito, mas quando é uma prova mais formal eu não vejo interesse deles”. P1 complementou sua resposta dizendo que utilizou a prova intelectual dos produtos notáveis aplicando a propriedade distributiva poucos dias antes da entrevista e, nesta ocasião, os alunos demonstraram interesse.

Embora a prova utilizada por P1 seja formal, o participante considera que existem provas “mais formais e complexas”. Esta fala evidenciou que, na opinião do participante, quanto mais formal e complexa a prova matemática, menor o interesse dos alunos. Este participante deixou explícito neste, em outros momentos do minicurso e nas respostas do questionário, que considera as provas pragmáticas mais atrativas para os alunos do que as provas intelectuais.

Neste âmbito, Rosale (2018, p. 51) aponta que “o que acontece, na realidade, é uma dificuldade muito grande em se descolar da prática e, como consequência, trabalhar com provas intelectuais”. O autor ressalta, ainda, que para utilizar provas pragmáticas basta conhecer as propriedades do conteúdo matemático em questão, mas para utilizar as provas intelectuais é necessário saber justificar estas propriedades e utilizá-las para deduzir outras propriedades, o que muitas vezes não acontece.

Neste momento, o participante P2 mencionou que a prova dos produtos notáveis que utiliza áreas de figuras compostas aparece em alguns livros didáticos, porém, nestes livros, as provas são introduzidas com um problema e desenvolvidas com números, não com variáveis. Observa-se que este tipo de prova trata-se de um exemplo genérico, que está na transição entre uma prova pragmática e uma intelectual (Balacheff, 2022a).

Acerca dos livros didáticos, P1 comentou que, em sua percepção, estes “mudaram bastante, se tornando mais didáticos”. Destacou, ainda, que os livros da época que estudava não abordavam argumentação e provas matemáticas, já os livros atuais abordam.

Foi perguntado aos participantes se os materiais didáticos utilizados por eles abordam argumentação e provas matemáticas. Os participantes P1, P2 e P3 responderam que sim e citaram exemplos de livros como “A Conquista da Matemática”. Complementando esta pergunta, foi indagado em que outros meios eles buscam por provas matemáticas que não estão presentes nesses materiais.

O participante P2 respondeu que procura na internet e os demais participantes concordaram. Ele destacou a importância de ter materiais disponíveis no formato digital dizendo que “o livro tem seu valor, mas nada como acessar de qualquer lugar” e solicitou que o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” fosse disponibilizado em versão digital. O participante P1 mencionou o portal PAE[6] como um dos locais que procura provas matemáticas.

Para concluir a entrevista, perguntou-se aos participantes se o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” facilitaria no uso de provas matemáticas em sala de aula. Todos os participantes afirmaram que sim, e

[6] Programa de Aprendizagem Eficiente - PAE é um programa da prefeitura de Campos dos Goytacazes que tem por objetivo promover a melhoria da educação através da formação continuada de profissionais da educação, utilizando tecnologias digitais e buscando parcerias, relacionadas à educação, no âmbito público e privado. (Campos dos Goytacazes, 2021)

complementaram dizendo que utilizarão este produto educacional. O participante P2 referiu-se ao caderno como “um banco de provas à disposição”. P5 compartilhou seu receio quanto à veracidade das informações obtidas através da internet e destacou que considera o material do caderno “mais confiável”. Ressaltou que até mesmo em livros didáticos existem erros. Os demais participantes concordaram com ele.

O participante P2 acrescentou que nas ocasiões em que o livro didático utilizado contém erros, é importante que o professor saiba mostrar aos alunos o porquê deste erro. Utiliza-se, então, provas matemáticas para mostrar o caminho e resultado correto. Neste contexto, as provas matemáticas assumem a função de verificação, definida por De Villiers (1990), uma vez que pretende-se comprovar a veracidade do que está sendo provado, mesmo contrariando o livro didático.

Este participante também ressaltou que, com o “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação", ele continuaria utilizando as provas matemáticas que já utilizava. Quanto às provas que não utilizava, iria “pesquisar e adequar à nossa escola”.

As considerações finais decorrentes dos dados obtidos por meio da observação, do questionário e da entrevista são apresentadas no capítulo seguinte.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A capacidade de argumentar é apontada como uma das competências necessárias para a formação integral do cidadão, devendo ser desenvolvida durante a Educação Básica (Brasil, 2018). Assim, uma possibilidade para desenvolver tal habilidade no contexto das aulas de Matemática é por meio da utilização de provas matemáticas, uma vez que estas são um tipo de argumentação na qual o resultado deve ser válido e aceito pela comunidade da sala de aula (Balacheff, 2022a).

Sob esta perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo: investigar as percepções de professores de Matemática participantes do minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" e da análise do "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação" acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tanto, optou-se por uma pesquisa do tipo qualitativa, durante a qual utilizou-se a observação, o questionário e a entrevista semiestruturada como instrumentos de coleta de dados.

Considerou-se relevante a elaboração de um caderno de provas matemáticas para que todos os participantes da pesquisa tivessem um repertório de provas matemáticas destinadas aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Julgou-se necessário, também, a aplicação de um minicurso que visa expor e exemplificar os conceitos de argumentação, prova matemática e demonstração. Com essas medidas, buscou-se garantir que os professores participantes da pesquisa considerassem as definições utilizadas neste trabalho e conhecessem exemplos de provas utilizáveis em sala de aula ao responderem às perguntas da entrevista e do questionário.

Destaca-se que, mesmo após a explicação e diferenciação dos conceitos citados, os professores continuaram se referindo às provas matemáticas como "demonstrações", embora se corrigissem posteriormente, mostrando terem compreendido a diferença.

Por meio dos instrumentos de coleta de dados utilizados durante e depois da implementação do minicurso foi possível responder a questão de pesquisa "Quais as percepções de professores de Matemática que participaram do minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" e da análise do "Caderno de Provas

Matemáticas: praticando a argumentação” acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental?”.

Os dados obtidos durante o presente trabalho apontam que os professores participantes utilizam ou já utilizaram provas matemáticas e têm uma perspectiva favorável ao uso de provas matemáticas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Foi constatado que os professores consideram que tanto as provas pragmáticas quanto as intelectuais são relevantes no contexto da sala de aula, porém acreditam que os alunos não possuem interesse nas provas intelectuais. Além disso, julgam que algumas provas intelectuais, ditas “mais complexas”, não serão compreendidas pelos alunos.

Os professores percebem as provas matemáticas, sobretudo as pragmáticas, como uma importante forma de esclarecer dúvidas dos alunos, elucidando o porquê de uma fórmula ou propriedade ser válida. Assim, observa-se que, na visão dos professores, a função explicativa das provas é predominante.

As percepções favoráveis dos professores participantes desta pesquisa em relação ao uso de provas matemáticas difere dos resultados encontrados por Matheus (2016) e Rosale (2018), que observaram em seus respectivos trabalhos uma crença, por parte dos professores de Matemática, de que as provas matemáticas não são pertinentes à Educação Básica.

Quanto ao “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação”, constatou-se que este ampliou o repertório de provas matemáticas, destinadas aos Anos Finais do Ensino Fundamental, dos professores participantes. Conclui-se que o produto educacional em questão possui potencial de impactar a prática docente dos participantes da pesquisa, uma vez que estes afirmaram que pretendem utilizar as provas nele contidas.

Como o público-alvo desta pesquisa são professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, a principal dificuldade encontrada foi a disponibilidade de professores para participarem de cursos de formação continuada. Destaca-se que dezesseis professores se inscreveram e apenas cinco compareceram, sendo relatado pelos professores presentes a dificuldade de conseguir liberação das escolas.

A presente pesquisa contribuiu para o desenvolvimento das habilidades de escrita e pesquisa das autoras. Além disso, a elaboração do “Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação” intensificou a utilização de provas matemáticas com a finalidade explicativa na prática docente das autoras. Ressalta-se, também, que o contato direto com os professores participantes possibilitou a compreensão dos desafios atrelados à sala de aula e da formação continuada.

Espera-se que o minicurso e o caderno promovam reflexões aos professores participantes que impactem sua prática docente, de modo que as provas matemáticas alcancem os alunos da Educação Básica por intermédio destes. Outra expectativa é que estes professores compartilhem o caderno com seus colegas de profissão, expandindo o alcance deste produto educacional.

Para trabalhos futuros, sugere-se uma pesquisa que verifique as percepções de professores de Matemática quanto ao uso de provas matemáticas no Ensino Médio. Sugere-se, também, uma pesquisa que verifique o impacto do uso de provas matemáticas na habilidade de argumentação dos alunos de uma turma da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, Nicolas. Controle, prova e demonstração. Três regimes de validação. Tradução Saddo Ag Almouloud; Méricles Tadeu Moretti. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.24, n.1, p. 816-871, abr. 2022a. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668. Acesso em: 28 jul. 2023.

BALACHEFF, Nicolas. Estudo dos processos de prova dos alunos no colégio. Tradução Saddo Ag Almouloud; Méricles Tadeu Moretti. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.24, n.1, p. 698-721, abr. 2022b. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57663. Acesso em: 28 jul. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.p .Acesso em: 29 ago. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Documento Orientador de APCN.** Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/documentos/avaliacao/ENSINO_ORIENTACOESAPCN_publicar.pdf. Acesso em: 29 ago. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Instituto Federal Fluminense** - IFF. Brasília, DF: MEC, c2024. Disponível em: https://portal1.iff.edu.br/nossos-campi/campos-centro/cursos-nova-interface/cursos-superiores/licenciatura-matematica. Acesso em: 10 jun. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso em: 20 jul. 2023.

CALDATO, João; UTSUMI, Miriam Cardoso; NASSER, Lilian. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. **Revista Triângulo**, Uberaba, v.10, n. 2, p. 74-93, jul. - dez. 2017. Disponível em: https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583. Acesso em: 31 jul. 2024.

CAMPOS DOS GOYTACAZES. Decreto nº 65, de 11 de janeiro de 2021. Aprova o Programa de Aprendizagem Eficiente. Campos dos Goytacazes, [2021]. Disponível em: https://leismunicipais.com.br/a/rj/c/campos-dos-goytacazes/decreto/2021/7/65/decreto-n-65-2021-aprova-o-programa-de-aprendizagem-eficiente-pae. Acesso em: Acesso em: 31 jul. 2024.

DE VILLERS, Michael; MUDALY, Vimolan. Pupils' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. **Pythagoras**, Durban, v. 52, jan. 2000. Disponível em:. https://www.researchgate.net/publication/238724117_PUPILS%27_NEEDS_FOR_CONVICTION_AND_EXPLANATION_WITHIN_THE_CONTEXT_OF_DYNAMIC_GEOMETRY. Acesso em: 20 jul. 2023.120

DE VILLERS, Michael. The Role and Function of Proof in Mathematics. **Pythagoras**, Durban, v. 24, n. 24, p. 17-24, nov. 1990. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/264784642_The_Role_and_Function_of_Proof_in_Mathematics. Acesso em: 20 jul. 2023.

DE VILLERS, Michael. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62/63, p. 31-36, mar./abr./maio/jun. 2001. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1013. Acesso em: 20 jul. 2023.

FONSECA, João José Saraiva. **Apostila de metodologia da pesquisa científica**.Fortaleza: Editora da Universidade Estadual do Ceará, 2002. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=oB5x2SChpSEC&oi=fnd&pg=PA6&dq=fonseca+metodologia+cient%C3%ADfica&ots=ORXU1qemm2&sig=1CNx2rf8i5t2Ctar_zPNSdNOiyU#v=onepage&q=fonseca%20metodologia%20cient%C3%ADfica&f=false. Acesso em: 10 ago. 2023.

FREITAS, Rony. Produtos Educacionais na área de ensino da CAPES: o que há além da forma?. **Educação Profissional e Tecnológica em Revista,** [S. l.], v. 5, n. 2, p. 5-20, 2021.Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/ept/article/view/1229. Acesso em: 20 jul. 2024.

GERHARDT, Tatiana Engel *et al.* Estrutura do projeto de pesquisa. In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 10 ago. 2023.

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 26, p. 631-644, ago. 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/7jbBvcDtcR7tG7qGYwXzMQM/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 22 ago. 2024.

MATHEUS, Aline dos Reis. **Argumentação e prova na matemática escolar.** 2016. 146 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto da Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em:https//teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-04112016-170425/pt-br.php . Acesso em: 28 jul. 2023.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

PUC-SP. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. EMP - **Educação Matemática Pesquisa:** revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo: PUC-SP, [s. d.]. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/about. Acesso em: 24 jul. 2023.

RIGO, Franciele Simionato. **Argumentação e Aprendizagem de Matemática:** uma experiência de geometria no Ensino Fundamental. 2021. 78 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira do Sul, Chapecó, 2021. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/bitstream/prefix/4146/1/RIGO.pdf. Acesso em: 15 ago. 2023.

ROSALE, André Rodrigues. **Argumentação e prova na Educação Básica**. 2018. 133 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto da Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-13052019-130421/pt-br.phpAcesso em: 28 jul. 2023.

SEDUCT - Secretaria Municipal de Educação, Ciência e Tecnologia. **Portal PAE - Programa de Aprendizagem Eficiente**, Campos dos Goytacazes: SEDUCT, [s. d.]. Disponível em: https://www.pae-seduct-campos.com/efem. Acesso em: 10 maio 2024.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Código QR do “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação”

APÊNDICE B – Slides do minicurso

PROVANDO EM MATEMÁTICA:

uma prática de argumentação

Licenciandas:
Ellen Ferreira e Maria Thereza
Orientadora:
Prof[a]. Me. Schirlane Rodrigues

2. Prova Matemática X Demonstração

Argumento válido

Aceita por uma comunidade

Potencialmente explicativa

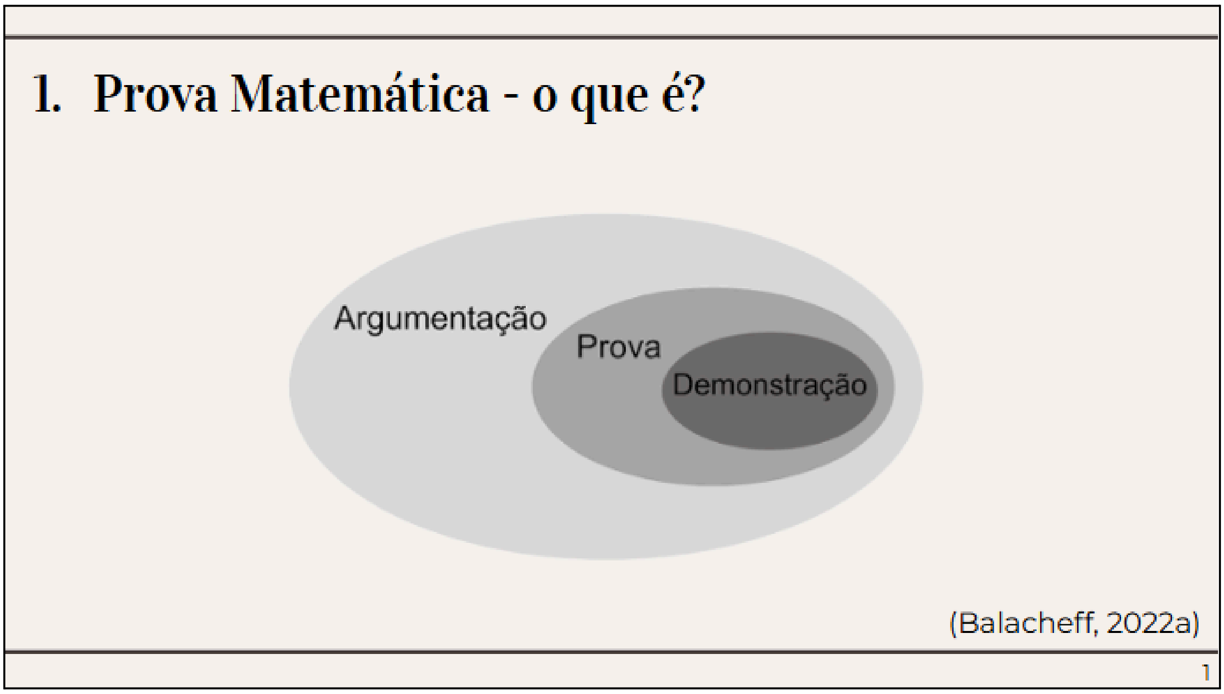
Rigor matemático

Aceita por matemáticos

Dificilmente é explicativa

(Balacheff, 2022a)

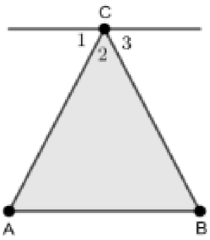
2


1. Prova Matemática - o que é?
Argumentação
Prova
Demonstração
(Balacheff, 2022a)
1

3. Demonstrando

Teorema 6.6 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.*

Demonstração: Considere o triângulo ABC. No ponto C considere uma reta paralela ao lado AB, como na figura e enumere os ângulos formados



Observe que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$. Note que AC é transversal a duas paralelas. Assim, $\hat{A} = \hat{1}$. Analogamente, $\hat{B} = \hat{3}$. Desta forma, $\hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$ ■

(Holanda, 2020, p. 31-32)

3

4. Vamos provar…

Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°?

- *Prova pragmática*
- *Prova intelectual*

(Balacheff, 2022b)

4

4. Vamos provar… (cont.)

Por que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$?

- *Prova com viés algébrico*
- *Prova com viés geométrico*

5

4. Vamos provar… (cont.)

Por que a fórmula da área do triângulo é $A = \frac{1}{2}bh$ *?*

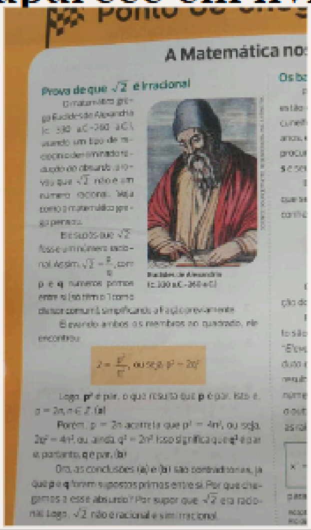
6

4. Vamos provar… (cont.)

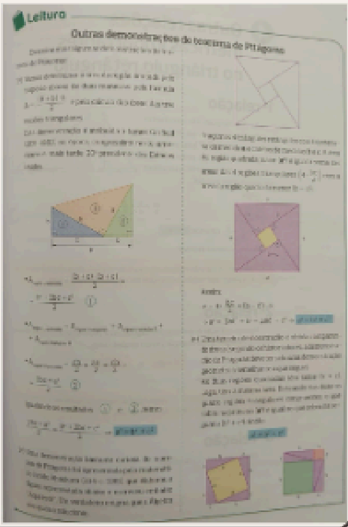
Por que $\sqrt{2}$ *é irracional?*

7

5. Como aparece em livros didáticos?



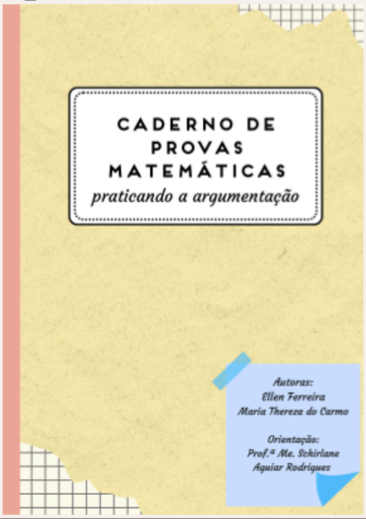
(Dante, 2013, p. 68)



(Dante, 2013, p. 183)

8

6. Um Caderno de provas matemáticas



9

Referências

BALACHEFF, Nicolas. Controle, prova e demonstração. Três regimes de validação. Tradução Saddo Ag Almouloud; Méricles Tadeu Moretti. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.24, n.1, p. 816-871, abr. 2022a. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668. Acesso em: 28 jul. 2023.

BALACHEFF, Nicolas. estudo dos processos de prova dos alunos no colégio. Tradução Saddo Ag Almouloud; Méricles Tadeu Moretti. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.24, n.1, p. 698-721, abr. 2022b. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57663. Acesso em: 28 jul. 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris Matemática 9° ano**. ed. 1. São Paulo: Ática, 2013.

10

Referências

HOLANDA, Marcos Douglas Medeiros. **Demonstração do Teorema de Pitágoras via Semelhança de Triângulos**. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020.

APÊNDICE C - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Prezado(a) participante,

Nós, Ellen Cristina Ferreira Mendes e Maria Thereza do Carmo Pereira, alunas da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *Campus* Campos Centro, estamos realizando uma pesquisa no âmbito do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), sob a orientação da profª. Me. Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues.

Nosso TCC, intitulado “Provando em Matemática: uma prática de argumentação”, tem como objetivo investigar as percepções de professores de Matemática acerca do uso da argumentação e prova matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Ressaltamos que essa é uma pesquisa de participação voluntária, portanto, caso deseje retirar-se, a qualquer momento, terá a liberdade de fazê-lo. A referida pesquisa não possui fins lucrativos e as informações obtidas durante o minicurso, com o questionário e com a entrevista, serão usadas exclusivamente para a pesquisa. Esclarecemos que sua identidade e de todos os outros participantes será mantida em sigilo na publicação dos resultados.

Caso tenha alguma dúvida, estamos à disposição para respondê-lo(a) nos seguintes endereços de email:

ellen.mendes@gsuite.iff.edu.br

maria.thereza@gsuite.iff.edu.br

schirlane.rodrigues@gsuite.iff.edu.br

Desde já agradecemos a sua colaboração com a nossa pesquisa.

Eu, ____, aceito participar, voluntariamente, da pesquisa descrita acima após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura: ____

Campos dos Goytacazes, ___ de _____________ de 2024

APÊNDICE D - Questionário

Questionário

O presente questionário consiste em um dos instrumentos de coleta de dados do Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado "Provando em Matemática: uma prática de argumentação" de autoria das licenciandas Ellen Cristina Ferreira Mendes e Maria Thereza do Carmo Pereira, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense campus Campos Centro, sob a orientação da profª. Me. Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues.
Este questionário deverá ser respondido após a sua participação no minicurso "Provando em Matemática: uma prática de argumentação".
Agradecemos sua participação.

BLOCO A - Perfil
Este bloco tem como objetivo traçar o perfil dos participantes da pesquisa.

1. Há quanto tempo você concluiu sua licenciatura?
   - ☐ Menos de 1 ano.
   - ☐ Entre 1 e 5 anos.
   - ☐ Entre 6 e 10 anos.
   - ☐ Entre 10 e 20 anos.
   - ☐ Mais de 20 anos.

2. Há quanto tempo você leciona matemática?
   - ☐ Menos de 1 ano.
   - ☐ Entre 1 e 5 anos.
   - ☐ Entre 6 e 10 anos.
   - ☐ Entre 10 e 20 anos.
   - ☐ Mais de 20 anos.

3. Já atuou em quais anos do Ensino Fundamental? Assinale mais de uma opção, se necessário.
   - ☐ 6°. ano
   - ☐ 7°. ano
   - ☐ 8°. ano
   - ☐ 9°. ano
   - ☐ Nenhum

4. Você já lecionou em escolas de qual rede?
   - ☐ Pública
   - ☐ Privada
   - ☐ Ambas

5. Possui algum curso de pós-graduação?
   - ☐ Sim, na área de Matemática.
   - ☐ Sim, fora área de Matemática.
   - ☐ Não.

6. Você já havia tido contato com os termos “prova matemática” e “demonstração”?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   6.1 Se sim, eles tinham o mesmo significado que o explicado no minicurso?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   6.2 Em que momento de sua formação você teve esse contato?
   Resposta:
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

BLOCO B - Provas matemáticas

Este bloco tem como objetivo investigar a opinião dos participantes da pesquisa quanto ao uso de argumentação e prova matemática em sala de aula.

Todas as perguntas deste bloco devem ser respondidas de acordo com a sua percepção e vivência. Sendo assim, não existe resposta certa ou errada.

1. Você utiliza ou já utilizou provas matemáticas em sua prática docente?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   1.2 Se sim, cite algumas propriedades ou fórmulas que você costuma provar.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

2. Em quais contextos, na sala de aula, você considera relevante usar as provas matemáticas? Assinale mais de uma opção, se necessário.
   - ☐ Ao introduzir um conteúdo.
   - ☐ Para justificar fórmulas e/ou propriedades.
   - ☐ Para sanar dúvidas dos alunos.
   - ☐ Não é relevante em nenhum contexto.

3. Você considera que há algum ano de escolaridade em que é mais viável usar provas matemáticas? Assinale mais de uma opção, se necessário.
   - ☐ 6°. ano
   - ☐ 7°. ano
   - ☐ 8°. ano
   - ☐ 9°. ano
   - ☐ Não há diferença.

   Comente sua resposta:

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

4. Assinale a(s) unidade(s) temática(s) da Matemática em que você considera o uso das provas matemáticas mais viável nos Anos Finais do Ensino Fundamental.
   - ☐ Igualmente viável em todas
   - ☐ Álgebra
   - ☐ Aritmética
   - ☐ Geometria

   Comente sua resposta:
   ____
   ____
   ____

5. Na sua opinião, há mais possibilidade de uso de provas matemáticas em escolas da rede pública ou privada?
   - ☐ Rede Pública
   - ☐ Rede Privada
   - ☐ Não vejo diferença

   5.1 Destaque as facilidades e/ou dificuldades que podem ser encontradas em cada rede.
   ____
   ____
   ____

6. Você considera que o “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação” auxilia no uso de provas matemáticas em sala de aula?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   6.1 Comente em que aspectos o caderno pode contribuir em sua prática docente.
   ____
   ____
   ____

7. Dentre as provas exemplificadas no caderno, há alguma propriedade ou fórmula que você já provou com seus alunos? Se sim, quais?
   ____
   ____
   ____

8. De acordo com sua experiência em sala de aula, você acredita que o uso de provas matemáticas pode contribuir para a aprendizagem dos alunos?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   Justifique:

   ____
   ____
   ____
   ____

9. Após sua participação no Minicurso “Provando em matemática: uma prática de argumentação” você considera iniciar ou intensificar o uso da argumentação em sua prática docente?
   - ☐ Sim
   - ☐ Não

   Comente sua resposta:

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

APÊNDICE E - Roteiro de perguntas para entrevista

Roteiro para entrevista semiestruturada

1. Como foram trabalhadas a prática da argumentação e as provas matemáticas na sua formação inicial?

2. Você considera que a presença/ausência de argumentação e provas matemáticas na sua formação inicial influencia na sua prática docente atualmente?

3. Você considera que seus alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental conseguem acompanhar e compreender uma prova matemática? Comente.

4. Os livros e/ou apostilas adotados pela escola onde você leciona aborda argumentação e provas matemáticas? Se não, que materiais você consulta para encontrar provas que possam justificar as propriedades e fórmulas trabalhadas?

5. Qual sua opinião sobre o "Caderno de Provas Matemáticas: praticando a argumentação"? Considera útil na sua prática docente?

APÊNDICE F - Questionário do teste exploratório A

Questionário - teste exploratório

Os dados obtidos através deste questionário serão utilizados exclusivamente para a realização da pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "**Provando em Matemática: uma prática de argumentação**". Esta pesquisa é de autoria das licenciandas Ellen C. F. Mendes e Maria Thereza do C. Pereira do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense C*ampus* Campos Centro, sob a orientação da professora Me. Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues. Esclarecemos que sua identidade e de todos os outros participantes será mantida em sigilo na publicação dos resultados.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *

____

2. Nome

____

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

O objetivo desta seção é avaliar a escrita e a clareza do "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido".

3. 1. Na sua opinião, o "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido" está claro? *

Marcar apenas uma oval.

( ) Sim

( ) Não

4. 1.1 Se "Não", dê sugestões.

Minicurso

O objetivo desta seção é avaliar a clareza das explicações, a apresentação de slides, a seleção de provas matemáticas e o tempo de duração do Minicurso “Provando em Matemática: uma prática de argumentação”.

Observações adicionais sobre o Minicurso devem ser anotadas na folha recebida.

5. 2. Você considera que os conceitos de "argumentação", "prova matemática" e "demonstração" foram bem explicados? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

6. 2.1 Se "Não", comente qual conceito precisa ser melhor definido.

7. 3. Você considera que a diferença entre os conceitos de "prova matemática" e "demonstração" ficou clara? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

8. 4. Você teve dificuldade para compreender as provas elaboradas no minicurso? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. 4.1 Se "Sim", qual foi sua dificuldade?

10. 5. Na sua opinião, a duração do minicurso foi: *

Marcar apenas uma oval.

- Muito longa
- Muito curta
- Ideal

11. 6. Você tem alguma observação acerca dos slides? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

12. 6.1 Se "Sim", qual sua observação?

____

____

____

____

____

Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação

O objetivo desta seção é avaliar a clareza das provas matemáticas contidas no Caderno “Provando em Matemática: uma prática de argumentação”.

Observações adicionais sobre o Caderno devem ser anotadas na folha recebida, especificadas pela numeração e página.

13. 7. Você considera que as provas contidas no caderno estão bem explicadas? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

14. 7.1 Se "Não", qual foi a prova? Dê sugestões de como podemos deixá-la mais explicativa.

Questionário

O objetivo desta seção é avaliar a clareza das perguntas do questionário e sua consonância com o objetivo da pesquisa, além de coletar sugestões quanto às perguntas.

Para responder essa seção, considere o objetivo da pesquisa que é "Investigar as percepções de professores de Matemática acerca do uso de argumentação e provas matemáticas nos Anos Finais do Ensino Fundamental". Considere também o objetivo de cada bloco do questionário.

15. 8. Você teve dificuldade em compreender alguma das perguntas do questionário? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

16. 8.1 Se "Sim", indique a pergunta e comente a dificuldade encontrada.

17. 9. Considerando o objetivo do trabalho, você incluiria alguma pergunta no questionário? Qual? *

18. 10. Considerando o objetivo do trabalho, você excluiria alguma pergunta no questionário? Qual? Justifique. *

APÊNDICE G - Questionário do teste exploratório B

Teste exploratório

Os dados obtidos através deste questionário serão utilizados exclusivamente para a realização da pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “**Provando em Matemática: uma prática de argumentação**”. Esta pesquisa é de autoria das licenciandas Ellen C. F. Mendes e Maria Thereza do C. Pereira do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *Campus* Campos Centro, sob a orientação da professora Me. Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues. Esclarecemos que sua identidade e de todos os outros participantes será mantida em sigilo na publicação dos resultados.

Este questionário faz parte do teste exploratório da referida pesquisa e tem como objetivo avaliar as provas matemáticas que compõem o “Caderno de provas matemáticas: praticando a argumentação“. Este caderno trata-se de um produto educacional elaborado pelas autoras no contexto desta pesquisa.

Caso tenha alguma sugestão, observação, correção ou dúvida que seria melhor esclarecida pessoalmente, estamos à disposição. Além das respostas a este questionário, gostaríamos que enviasse o arquivo do pdf do caderno com seus comentários, caso tenha algum. Se preferir o caderno em versão impressa, envie um e-mail e te entregaremos.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *

____

2. Nome:

____

3. Caso tenha feito algum comentário no arquivo em pdf do caderno, anexe-o aqui.

Arquivos enviados:

4. 1. Você identificou erros no uso das propriedades matemáticas em alguma das provas do caderno? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. 1.1 Se “Sim”, em qual prova? Descreva o erro ou, se preferir, anexe fotos na próxima perguntas.

6. Anexe fotos

Arquivos enviados:

7. 2. Você identificou erros de escrita em alguma das provas do caderno? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

8. 2.1 Se “Sim”, em qual prova? Descreva o erro ou, se preferir, anexe fotos.