MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

CAMPUS CAMPOS CENTRO

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEONARDO CORRÊA DE CASTRO

CONCEPÇÕES DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO IRRACIONAL

Campos dos Goytacazes/ RJ

Fevereiro – 2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

CAMPUS CAMPOS CENTRO

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEONARDO CORRÊA DE CASTRO

CONCEPÇÕES DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO IRRACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense c*ampus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Me. Carla Antunes Fontes

Campos dos Goytacazes/RJ

Fevereiro – 2025

Biblioteca Anton Dakitsch
CIP - Catalogação na Publicação

C355c

Castro, Leonardo Corrêa de
Concepções de alunos e professores sobre o conceito de número irracional / Leonardo Corrêa de Castro - 2005.
138 f.: il. color.

Orientadora: Carla Antunes Fontes

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2005.
Referências: f. 121 a 126.

1. Números irracionais. 2. História da Matemática. 3. Transposição didática. 4. Livros didáticos. 5. Formação de professores. I. Fontes, Carla Antunes, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da Biblioteca Anton Dakitsch do IFF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LEONARDO CORRÊA DE CASTRO

CONCEPÇÕES DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO IRRACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Ana Paula Rangel de Andrade

Prof^a. Ana Paula Rangel de Andrade (Examinadora)
Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade – UCAM - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Paula Eveline da Silva dos Santos

Prof^a. Paula Eveline da Silva dos Santos (Examinadora)
Mestre em Matemática (PROFMAT) – UENF - RJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

Carla Antunes F

Prof^a. Carla Antunes Fontes (Orientadora)
Mestre em Matemática Aplicada - UFRJ
IFFluminense *Campus* Campos Centro

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me dar força e sabedoria ao longo dessa jornada acadêmica. Sua presença em minha vida tem sido uma fonte constante de inspiração e coragem.

À minha família, que sempre foi meu pilar de apoio incondicional. Ao meu pai, minha eterna gratidão por sua confiança e apoio. Seus conselhos sábios me motivaram a sempre buscar o melhor. À minha mãe, por todo o amor e dedicação, por estar sempre ao meu lado nos momentos de alegria e de desafio. Seu suporte é inestimável, e cada gesto seu foi fundamental para que eu pudesse realizar este sonho. À minha querida avó Margarida, por todo o seu carinho e orações.

Um agradecimento especial aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, cujos ensinamentos e experiências compartilhadas moldaram meu percurso acadêmico e profissional. Suas orientações foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para meu crescimento como futuro educador.

À minha orientadora, professora Carla, expresso minha mais profunda gratidão. Sua dedicação na minha orientação foi essencial para a realização deste trabalho. Sua capacidade de dividir conhecimentos e inspirar pensamentos críticos é verdadeiramente admirável. Obrigado por acreditar no meu potencial e por compartilhar comigo sua sabedoria.

Aos meus colegas de turma, por todos os momentos de aprendizado e amizade. Nossa jornada conjunta foi enriquecedora, e levo comigo as memórias de cada desafio superado.

Por fim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho, minha sincera gratidão.

A todos vocês, o meu muito obrigado.

“A essência da matemática está em sua liberdade."

(Georg Cantor)

RESUMO

O estudo dos números irracionais traz desafios inerentes ao seu caráter abstrato e à sua pouca utilização em atividades cotidianas corriqueiras. Este trabalho tem por objetivo investigar as concepções dos alunos e professores do primeiro ano do Ensino Médio acerca do conceito de número irracional. Para isso, foi realizada uma pesquisa com abordagem qualitativa, de caráter exploratório. O estudo propõe-se a identificar as concepções e dificuldades em torno desse tema, tanto na visão dos estudantes quanto na perspectiva dos professores. A pesquisa inclui uma revisão bibliográfica acerca do desenvolvimento histórico dos números irracionais e das práticas de ensino-aprendizagem relacionadas, com especial atenção à transposição didática presente nos livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e à formação dos professores. A metodologia abrange a elaboração de um questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio e um roteiro de entrevista para os professores regentes das turmas desses alunos, seguido pela aplicação e análise dos resultados obtidos nos instrumentos de coleta de dados. A revisão bibliográfica revelou uma abordagem superficial nos livros didáticos, privilegiando atividades que são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual, e com poucas atividades que explorem o raciocínio abstrato. Além disso, apontam inadequações na formação dos professores com vistas à atuação na Educação Básica. A análise dos dados revelou a precariedade dos conhecimentos dos alunos em relação aos números irracionais. As respostas dos alunos indicaram concepções equivocadas com relação à cardinalidade dos conjuntos numéricos, em especial quando se trata dos números irracionais, além de associação dos números irracionais “com números negativos” e com números “que não tem sentido”. Na perspectiva dos professores regentes, ficou evidente que os alunos consideram o estudo dos números irracionais como um conteúdo abstrato e, por isso, esses docentes preferem focar em atividades práticas e na resolução de exercícios, sem aprofundar o entendimento conceitual. A ênfase excessiva na prática de resolução de exercícios acaba por limitar o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos números irracionais, tornando o aprendizado mecânico e pouco significativo para os alunos, evidenciando a necessidade de uma reformulação na maneira como o tema é abordado na Educação Básica. Dessa forma, é primordial aprimorar as práticas de ensino e desenvolver estratégias pedagógicas mais eficazes que promovam uma compreensão mais profunda e significativa dos números irracionais entre os alunos, tanto na Educação Básica quanto nos cursos de Licenciatura em Matemática, o que evidencia a importância de futuras investigações.

Palavras-chave: Números irracionais. História da Matemática. Transposição didática. Livros didáticos. Formação de professores.

ABSTRACT

The study of irrational numbers brings challenges inherent to their abstract nature and their limited use in everyday activities. This study aims to investigate the conceptions of first-year High School students and teachers regarding the concept of irrational numbers. To achieve this, qualitative research with an exploratory approach was conducted. The study seeks to identify the conceptions and difficulties surrounding this topic, both from the students' viewpoint and from the teachers' perspective. The research includes a literature review on the historical development of irrational numbers and the related teaching-learning practices, with particular attention to the didactic transposition present in the textbooks of the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) and teacher training. The methodology includes the preparation of a questionnaire for first-year High School students and an interview guide for the class teachers of these students, followed by the application and analysis of the results obtained from the data collection instruments. The literature review revealed a superficial approach in textbooks, favoring activities that are treated mechanically with little to no conceptual depth and few activities that encourage abstract reasoning. Additionally, it points to inadequacies in teacher training to work in Basic Education. Data analysis revealed the inadequacy of students' knowledge regarding irrational numbers. Students' responses indicated misconceptions regarding the cardinality of numerical sets, particularly irrational numbers, along with associations of irrational numbers with "negative numbers" and numbers "that don't make sense." From the teachers' perspective, it became clear that students consider the study of irrational numbers an abstract topic, leading these teachers to focus on practical activities and exercises rather than on deepening conceptual understanding. The excessive emphasis on exercise-solving practice ultimately limits the development of a deeper understanding of irrational numbers, making learning mechanical and less meaningful for students, thus highlighting the need for reformulation in how the topic is addressed in Basic Education. Therefore, the need to improve teaching practices and develop more effective pedagogical strategies to promote a deeper and more meaningful understanding of irrational numbers among students, both in Basic Education and in Mathematics Teaching Degree courses, underscores the importance of future investigations.

Keywords: Irrational numbers, History of Mathematics, Didactic transposition, Textbooks, Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na Educação Básica, espera-se que os alunos adquiram habilidades para resolver problemas que envolvam números naturais, inteiros e racionais, com uma compreensão das operações matemáticas e o uso de estratégias diversas. Para aprofundar sua compreensão sobre números, é fundamental apresentá-los a problemas, especialmente os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para a resolução, levando-os a reconhecer a necessidade de outros números: os irracionais (Brasil, 2018).

A literatura referente ao ensino e à aprendizagem de números irracionais aponta para deficiências e inadequações relacionadas a esse tema, tanto nos livros didáticos quanto na formação do professor de matemática, com vistas à sua atuação na Educação Básica (Broetto, 2016).

Nos currículos escolares, geralmente há pouco tempo dedicado ao estudo de números irracionais, e os conceitos muitas vezes não são abordados com o devido aprofundamento. Como afirma Souto (2010), os livros didáticos costumam priorizar definições baseadas na representação decimal, propondo tarefas que envolvem a classificação de números em racionais ou irracionais e a determinação de frações geratrizes, utilizando registros simbólico-algébricos e notas históricas que destacam nomes e datas. No entanto, essas atividades são apresentadas de maneira mecânica, com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.

A complexidade dos números irracionais e a importância dos sistemas numéricos exigem uma reavaliação das práticas de ensino. Kindel (1998 *apud* Corbo, 2012) argumenta que, de maneira convencional, a matemática escolar apresenta os conjuntos numéricos de forma hierárquica, com ênfase na relação $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, que leva tanto os professores quanto os alunos a acreditarem que se 'entendemos bem' os números naturais, a construção dos outros conjuntos numéricos ocorre de forma natural, com os estudantes supondo que podem aplicar diretamente as propriedades dos números naturais a outros conjuntos. De acordo com Kindel:

> [...] o aluno é levado a achar que o conjunto dos racionais funciona exatamente como o conjunto dos naturais, com a diferença que agora podemos fazer a divisão entre dois números naturais quaisquer, desde que o denominador não seja zero. Não fica evidenciado que se trata de um novo campo de saber onde outras formas de pensar devem ser legitimadas (Kindel, 1998, p.137 *apud* Corbo, 2012, p.25).

Soares, Ferreira e Moreira (1999) destacam que as definições mais comuns encontradas nos livros didáticos da Educação Básica apresentam os números irracionais como "números que não podem ser expressos como fração" ou como "números cuja representação decimal é infinita e não periódica". Embora corretas, essas definições geralmente partem do pressuposto de que os alunos já compreendem claramente o conceito de número real, o que nem sempre ocorre.

Dessa forma, ensinar o conjunto dos números reais como a união entre os racionais e irracionais pode não fazer sentido para estudantes que ainda não assimilaram os conceitos básicos. Segundo Moreira e David (2010, p. 90) essa discussão não é condizente com a análise real, porque “os irracionais não são os (novos) entes que serão acrescentados aos (conhecidos) racionais para a obtenção dos reais. Eles são simplesmente os reais que não são racionais”.

A compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos tem sido amplamente debatida no campo da educação matemática. Soares, Ferreira e Moreira (1999) destacam a importância de identificar as concepções que os alunos desenvolvem sobre esses conceitos, alertando que, se tais concepções forem desconsideradas no ensino, podem acabar se tornando barreiras para a aprendizagem.

Para tentar facilitar a compreensão dos conceitos relacionados aos conjuntos numéricos, utiliza-se com bastante frequência na Educação Básica a representação por meio de diagramas de Venn. Contudo, esse recurso não é apropriado para representar conjuntos infinitos, uma vez que pode suscitar impressões errôneas sobre suas cardinalidades (Almeida, 2015).

Pode-se destacar ainda que os números irracionais têm conexões profundas com muitas áreas da matemática, como análise matemática, álgebra e geometria. Eles desempenham um papel fundamental em várias teorias matemáticas e são essenciais para entender conceitos mais avançados. Além disso, a sua natureza não repetitiva e a sua relação com diversos ramos da matemática tornam o seu estudo um campo rico e desafiador para explorar, e essencial para entender a complexidade da reta numérica (Broetto; Santos-Wagner, 2019).

No entanto, os números irracionais são abordados de forma superficial no Ensino Fundamental e Médio, sem o aprofundamento conceitual necessário, o que resulta em alunos que ingressam no ensino superior sem uma compreensão adequada sobre os números irracionais (Broetto; Santos-Wagner, 2019).

Discutir as necessidades relacionadas à ampliação do conceito de número e o significado dos números irracionais é essencial no ensino da Matemática. A abordagem frequentemente utilizada na formação de professores, que trabalha com a estrutura abstrata dos números reais (como um corpo ordenado completo) e seus axiomas, tende a desconectar o conhecimento acadêmico das demandas práticas enfrentadas pelos professores do ensino básico. Na sala de aula, o professor precisa lidar com desafios concretos, como ensinar os alunos a compreenderem números que não podem ser expressos como frações de inteiros, enfrentando as dificuldades cognitivas e pedagógicas relacionadas a essa nova noção de número (Moreira, 2004).

Diante disso, Soares, Ferreira e Moreira (1999) propõem uma reformulação na formação de professores, com uma nova abordagem para o ensino dos sistemas numéricos na educação básica.

A motivação para a escolha do tema do presente trabalho surge do desejo de verificar as deficiências no ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental e Médio. Cabe salientar que essas deficiências foram observadas primeiramente pelo autor durante uma aula de graduação com a professora e agora orientadora do presente trabalho, Profª Me. Carla Antunes Fontes, na qual considerou muito relevante a explicação sobre como são ensinados os conjuntos numéricos para as crianças. A Profª Carla explicou que os livros didáticos normalmente abordam o tema utilizando a representação por meio de diagramas de Venn, que foi criticada, uma vez que o uso de tais diagramas é apropriado apenas para conjuntos finitos. Quando se trabalha com conjuntos numéricos infinitos, o diagrama de Venn não é fiel à realidade, uma vez que suscita impressões errôneas sobre a cardinalidade de cada conjunto.

O autor, com o presente estudo, pretende contribuir para o refinamento do ensino dos números irracionais, e para uma melhoria de sua apresentação, em especial investigando o impacto no processo de ensino/aprendizagem das representações visuais inadequadas observadas nos diagramas de Venn. É importante considerar que, apesar de não apresentar os conjuntos racionais e irracionais com suas cardinalidades corretas, o diagrama de Venn pode desempenhar um papel importante para a visualização dos conjuntos numéricos por parte dos estudantes da Educação Básica.

Além disso, é importante compreender se o processo da transposição didática do conhecimento está desempenhando o seu papel fundamental na tradução dos conhecimentos matemáticos complexos em um formato que permita a aprendizagem dos números irracionais por parte dos alunos da Educação Básica. Segundo Pommer (2011, p. 2 *apud* Jesus; Oliveira, 2018, p. 334), a compreensão dos números irracionais constitui um desafio, exigindo mais pesquisas e esclarecimentos no ensino da Matemática. A transposição didática desse tema é apontada como uma das dificuldades, com a tendência de dividir os números reais em racionais e irracionais. O conjunto dos números reais é tratado como a união de dois conjuntos disjuntos: os números racionais e os números irracionais; em seguida, o conjunto dos números irracionais é apresentado como sendo formado pelos números reais não racionais, criando uma circularidade. Isto pode ser uma simplificação exagerada que não reflete a riqueza dos números reais, impedindo os alunos de compreender a verdadeira natureza dos números irracionais e como eles se relacionam com os racionais.

Diante do exposto, surgiu a questão de pesquisa que norteia o presente trabalho: Quais são as concepções de alunos e professores do primeiro ano do Ensino Médio em relação ao conceito de número irracional? A partir disso, estabelece-se então, como objetivo geral, investigar as concepções dos alunos e professores do primeiro ano do Ensino Médio acerca do conceito de número irracional.

A escolha do primeiro ano do Ensino Médio como público-alvo desta pesquisa levou em consideração alguns fatores, como a retomada e finalização do estudo dos conjuntos numéricos, que inclui o estudo dos números irracionais, cujo entendimento é fundamental para o estudo de intervalos de números reais e tópicos mais avançados em matemática. Além disso, os alunos do Ensino Médio geralmente possuem uma maturidade matemática maior em comparação com os do Ensino Fundamental, onde os números irracionais começam a ser estudados.

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram elencados:

- Analisar como o conceito de números irracionais é apresentado nos livros didáticos presentes no PNLD 2024 - Ensino Fundamental Anos Finais e no PNLD 2021 - Ensino Médio;
- Analisar o processo da transposição didática no estudo dos números irracionais;

- Investigar como o conceito de número irracional é apresentado e compreendido nos diferentes níveis de ensino, incluindo na formação de professores.

O presente trabalho está dividido nos seguintes capítulos: Introdução, Revisão da Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões e Considerações Finais.

No capítulo da Revisão da Literatura é analisada a transposição didática, é descrito o desenvolvimento histórico dos números irracionais, é feita a análise das coleções do Plano Nacional do Livro Didático quanto à introdução dos números irracionais, além de considerações sobre a formação do professor na Licenciatura em Matemática. O capítulo de Procedimentos Metodológicos traz o tipo de pesquisa, o instrumento para a coleta de dados e as etapas da pesquisa. No capítulo de Resultados e Discussões, são analisados os dados coletados ao longo da investigação, em consonância com os referenciais teóricos que fundamentam o estudo. Por fim, o capítulo de Considerações Finais apresenta as conclusões alcançadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Transposição Didática

2.1.1 Conceito

Segundo Almeida (2011), o termo Transposição Didática[1] foi introduzido inicialmente por Michel Verret em 1975. Mais tarde, Yves Chevallard[2] refinou e apresentou o termo de maneira mais aprofundada. Chevallard, em seu livro *La transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné* propõe que:

> A transposição didática é composta por três partes distintas e interligadas: o *savoir savant* (saber do sábio), que no caso é o saber elaborado pelos cientistas; o *savoir a ensigner* (saber a ensinar), que no caso é a parte específica aos professores e que está diretamente relacionada à didática e à prática de condução de sala de aula; e por último, o *savoir ensigné* (saber ensinado), aquele que foi absorvido pelo aluno mediante as adaptações e as transposições feitas pelos cientistas e pelos professores (Chevallard, 1991 *apud* Almeida, 2011, p. 10).

Segundo Dominguini (2008), o conhecimento científico consiste em um saber sistematizado ("saber sábio"), que busca explicar a ordem dos fenômenos naturais ou sociais de forma racional, produto de uma atividade metódica de investigação. Um dos diferenciais entre o conhecimento científico e o conhecimento escolar é a sua forma de apresentação. O conhecimento científico é predominantemente apresentado por meio de publicações científicas em revistas especializadas, destinadas a um público alvo restrito. Já o conhecimento a ser ensinado em sala de aula é um saber didaticamente adaptado para a atividade educativa ("saber a ensinar"). A passagem do conhecimento científico para a forma de conteúdos escolares, didaticamente elaborados para permitir sua transmissão por parte do professor e uma possível assimilação por parte do aluno, é o fenômeno denominado transposição didática (Dominguini, 2008).

Na transposição didática, Dominguini (2008) destaca a importância da seleção e organização dos conteúdos para formar o currículo e os programas, considerando as atividades, as áreas de estudo e as disciplinas mais apropriadas para se alcançar os objetivos da escola. Depois de selecionados, os conteúdos sofrem um processo de adaptação, ou seja,

---

[1] Yves Chevallard: "o fenômeno da transposição didática – eu encontrei a expressão em um pequeno texto que Michel Brossard nos levou a conhecer, extraindo-o da obra em dois volumes de Michel Verret (1927-2017), intitulada "*Le temps des études*" (1976, Paris, Champion)" (Bittar; Freitas, 2022, p. 17).

[2] Yves Chevallard é um professor e pesquisador francês, considerado um dos principais expoentes em Didática da Matemática. Na década de 1980 ficou conhecido por suas contribuições para a teoria da Transposição Didática e no início da década de 1990 desenvolveu a Teoria Antropológica do Didático. Atualmente é professor emérito da Universidade de Aix-Marseille (Bittar; Freitas, 2022).

uma transmutação do conhecimento científico para conhecimento escolar, onde uma nova linguagem, mais próxima da utilizada pelos alunos, é empregada para facilitar o processo de ensino-aprendizagem.

Chevallard (1991 *apud* Almeida, 2011) destaca que para possibilitar o ensino de um determinado elemento de saber seja possível, este deverá ter sofrido certas deformações que o tornam apto para ser ensinado. Almeida (2011) nos diz que, neste processo de transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar, é importante definir as prioridades, e adaptar o conhecimento para uma linguagem mais acessível, permitindo, com isso, a compreensão dos conteúdos pelos alunos. Destaca a importância de respeitar o código de linguagem dos alunos e considerar as variações linguísticas e os diferentes níveis de linguagem.

> É preciso que haja uma transmutação dos conhecimentos para uma linguagem mais próxima daquela usada pelos alunos. Os alunos possuem um código de linguagem que precisa ser respeitado. Assim, antes de interferir em um novo código, é necessário lembrar-se das variações linguísticas, das variações dos níveis de linguagem e do tempo que o aluno precisa ter para absorver o código mais formal, principalmente em se tratando do ensino superior. Na educação básica o professor tem de ter ainda mais cuidado, porque o distanciamento entre o conhecimento científico e o conhecimento escolar pode ser muito grande, e tudo isso pode ser uma questão de adaptação da linguagem (Almeida, 2011, p. 46).

Ainda segundo Almeida (2011), a transposição didática apresenta evolução ao longo do tempo, uma vez que a própria didática também está em um constante processo de mudanças e adaptações, influenciadas pelas transformações sociais e tecnológicas, que impactam a condução do trabalho educacional. Neste sentido, a transposição didática do conhecimento deve considerar as transformações teóricas, as transformações de estruturas e os recursos educativos, principalmente os que envolvem as mídias interativas, os equipamentos de informática, os softwares e os hardwares.

Almeida (2011) destaca a importância do ambiente educativo como um elemento essencial para potencializar o processo de ensino-aprendizagem. Neste contexto, a transposição didática refere-se à habilidade de transformar um espaço em um ambiente propício para aprendizagem, explorando suas potencialidades ao máximo. Argumenta que nenhum sistema de ensino ou método pode funcionar por si só, destacando que materiais como livros, computadores e laboratórios são importantes, mas não suficientes para garantir uma experiência educativa completa. Destaca a necessidade de um elemento equivalente ao "software" para dar vida ao processo educativo, e este elemento é representado pelo professor, que possui inteligência, capacidade de raciocínio e experiência para criar interações significativas em sala de aula. A transposição didática está diretamente relacionada ao ensino e aprendizagem, e para isso é importante a criação de ambientes educativos, que podem ser desde salas de aula e laboratórios, até supermercados ou bosques, podendo-se aproveitar estes locais para realizar visitas técnicas, explorar detalhes e ir além do óbvio. É importante entender o ambiente como um espaço humanizado e passível de exploração. O professor deve aproveitar ao máximo as potencialidades que cada lugar oferece. A transposição didática se caracteriza como uma dinâmica que vai além da simples ocupação de espaços, buscando explorar todas as potencialidades de um ambiente a fim de permitir o desenvolvimento de um processo de aprendizagem (Almeida, 2011).

Almeida (2011) destaca também a importância das habilidades pedagógicas na transposição didática, ou seja, na adaptação e transmissão do saber científico para o ambiente escolar. A transposição didática é o resultado da combinação de diversos fatores, conhecidos como condições mínimas necessárias para que o professor seja capaz de adaptar e transpor o conhecimento científico para o contexto escolar. Destaca várias etapas para essa transposição, que incluem resgatar o conhecimento prévio dos alunos, sintetizar as informações, motivar o aprendizado, observar a compreensão dos alunos e esclarecer dúvidas. Salienta a necessidade de os alunos serem ouvidos e envolvidos na dinâmica educacional, podendo contribuir com sugestões e ajustes. Destaca ainda a importância do planejamento diário do professor alinhado com o planejamento geral da instituição escolar, permitindo, com isso, a eficácia da transposição didática. Um planejamento diário eficaz envolve identificar os pontos principais e as prioridades dos conteúdos definidos, bem como os objetivos específicos a serem alcançados.

Almeida (2011) salienta a importância do projeto pedagógico como guia fundamental para o funcionamento eficaz das instituições de ensino. Destaca que um projeto bem elaborado define intenções, orienta práticas e viabiliza ações. Enfatiza que o planejamento é a força que sustenta a transposição didática, e está intrinsecamente ligado à atuação do professor e aos resultados obtidos em sala de aula:

> [...] a transposição didática precisa de uma força que a sustente, que lhe dê suporte e que embase a sua construção, esse é o papel do planejamento. O planejamento está diretamente relacionado à atuação do professor e, portanto, está diretamente relacionado aos resultados que ele poderá obter em sala de aula e nos demais ambientes educativos (Almeida, 2011, p. 54).

Almeida (2011) destaca ainda a importância da formação continuada dos professores para facilitar a implementação da transposição didática nas escolas. Ressalta que a formação dos professores é indispensável e precisa acompanhar as mudanças e necessidades da sociedade: antes era importante dominar a datilografia, mas agora é fundamental ter habilidades em informática, além de fluência em língua estrangeira para aprofundar leituras e pesquisas.

2.1.2. Transposição didática no contexto dos números irracionais

Segundo Pomer (2011, p. 2 *apud* Jesus; Oliveira, 2018), a transposição didática é apontada como uma das dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dos números irracionais, uma vez que o conjunto dos números reais é tratado como a união de dois conjuntos disjuntos: os números racionais e os números irracionais; em seguida, o conjunto dos números irracionais é apresentado como sendo formado pelos números reais não racionais, criando uma circularidade. Pommer entende que é necessário repensar o ensino dos números irracionais na Educação Básica.

Pode-se destacar que a construção do conhecimento sobre os Números Irracionais está intimamente ligada à compreensão do conceito de números racionais, conforme destacado por Mosca:

> [...] possuem estreita ligação com o conjunto dos números racionais, principalmente no que tange à sua definição, no sentido de que se o aluno não compreender bem o significado dos assuntos envolvendo o conjunto dos números racionais, torna-se mais difícil se apoderar da compreensão dos significados do conjunto dos números irracionais (Mosca, 2013, p. 15 *apud* Jesus, 2017, p. 15).

Corbo (2012) nos diz que o diagrama de Venn aparece como uma ferramenta que tenta facilitar a compreensão dos conceitos dos conjuntos numéricos apesar de não ser adequado para se representar os números irracionais, uma vez que pode induzir os alunos à formação de concepção incorreta sobre a ampliação dos campos numéricos. Os números irracionais, como a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) ou o número pi (π), são conceitos abstratos que não podem ser representados de maneira exata por frações ou números decimais finitos. A transposição didática implica traduzir essa abstração em uma forma que seja compreensível e acessível aos estudantes. Os números irracionais são representados por sequências infinitas de dígitos decimais não repetitivos, isso pode ser complicado para os estudantes, que muitas vezes não compreendem completamente o conceito de infinitude. Uma das demonstrações possíveis é a prova clássica por redução ao absurdo, cuja estrutura acentua o conflito vivenciado pelos alunos, entre frações e números irracionais.

Conforme Broetto e Santos-Wagner (2019), os números irracionais não recebem o devido tratamento no Ensino Fundamental e Médio, sendo tratados com superficialidade e pouco aprofundamento conceitual, o que leva esses alunos a ingressarem no ensino superior sem uma compreensão adequada dos números irracionais. Da mesma forma, no Ensino Superior, o excesso de formalismo não prepara adequadamente os futuros professores de Matemática para ensinar números irracionais na Educação Básica, resultando desse descompasso a persistência das dificuldades dos alunos da Educação Básica e assim fechando o ciclo, como apontado por Klein (1932) já no século passado. Soares, Ferreira e Moreira (1999) propõem uma forma de romper este ciclo com uma nova abordagem dos sistemas numéricos que deve ser construída especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem teria que partir fundamentalmente da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto IR que efetivamente instrumentalize para o ensino. Normalmente, os professores de Matemática recém formados apresentam dúvidas de como abordar os números irracionais no Ensino Fundamental, optando por trabalhar com exemplos, em detrimento de realizar muitas demonstrações (Broetto; Santos-Wagner, 2019).

Segundo Broetto e Santos-Wagner (2019), os principais problemas dos livros didáticos se referem à parte conceitual de como os números irracionais são tratados, com atividades propostas que são de natureza mecânica e que não favorecem a compreensão. A maioria dos livros didáticos apresentam as dízimas periódicas como resultado da divisão de números inteiros, para depois apresentar as “dízimas não periódicas” como números que não são racionais, normalmente oferecendo como exemplos a raiz de dois ($\sqrt{2}$) e o número pi (π).

Ainda conforme Broetto e Santos-Wagner (2019), o desafio aqui é tratar de um assunto complexo que envolve ideias complexas, como o infinito, de uma forma acessível para os alunos. No contexto da Matemática escolar, uma vez que o conjunto dos números racionais tenha sido estabelecido, é necessário ter uma razão significativa para ampliar novamente o conceito de números. A insuficiência dos racionais para realizar a medida de um segmento qualquer a partir de uma unidade de medida preestabelecida, como a constatação da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao lado, justifica a ampliação do campo numérico. Assim, os números irracionais aparecem como uma ponte que liga os números racionais aos números reais. Contudo, segundo Moreira e David (2010, p. 90) essa discussão não faz sentido dentro de uma análise real, porque “os irracionais não são os (novos) entes que serão acrescentados aos (conhecidos) racionais para a obtenção dos reais. Eles são simplesmente os reais que não são racionais".

Como nos dizem Dominguini (2008), Jesus e Oliveira (2018) e Broetto e Santos-Wagner (2019), o ensino dos números irracionais no ensino fundamental e médio é um desafio devido à complexidade desses números, sendo fundamental que a transposição didática do conhecimento desempenhe o seu papel fundamental na tradução dos conceitos matemáticos complexos em um formato "ensinável". Nesse contexto, o aprimoramento dos livros didáticos é fundamental. Quanto ao professor, requer estratégias pedagógicas cuidadosamente planejadas que permitam que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida do conceito dos números irracionais e sua relevância tanto no mundo da matemática, quanto na vida social.

2.2. O desenvolvimento histórico dos números irracionais

Segundo Ifrah (1989) a matemática faz parte da história humana desde os tempos mais antigos. A ideia de contar surge de forma empírica, quando o homem "primitivo", diante da necessidade de verificar se todos os seus animais retornaram do pasto para o curral, ou diante da necessidade de contabilizar os alimentos guardados, começa a utilizar um artifício de contagem da correspondência um a um. Este método permite comparar duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter necessidade de recorrer à contagem abstrata. Na simples utilização de uma correspondência biunívoca entre a quantidade de animais presentes em seu rebanho com os dedos das mãos ou com pedrinhas, surge a noção intuitiva de contagem, que mais tarde permitiu o desenvolvimento teórico do conceito de número (Ifrah, 1989).

O homem utilizou os números para contar, medir e calcular, surgindo o conceito de números naturais. Posteriormente, diante da expansão comercial, surge a necessidade de expressar lucro ou prejuízo, surgindo a noção de números inteiros. Os números inteiros são conceitos abstratos que surgem da contagem de coleções finitas de objetos. No entanto, as demandas do dia a dia vão além da contagem de objetos individuais, exigindo a medição de diversas quantidades, como comprimento, peso e tempo. Para atender a essas necessidades básicas de medição, são necessárias as frações, pois raramente um comprimento, por exemplo, corresponde exatamente a um número inteiro de unidades. Surgem, assim, os números racionais, representados como o quociente p/q, sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$.

Para estes propósitos o sistema dos números racionais é suficiente, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações (Eves, 2011).

A constatação de que as frações, ou seja, os números racionais, não eram suficientes para abordar as atividades humanas foi realizada pelos gregos por volta do século V a.C. De acordo com Ávila (2006), o primeiro número irracional a ser descoberto, supostamente, foi a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$). Essa importante descoberta emergiu durante o estudo da incomensurabilidade de grandezas, especialmente no contexto do problema que envolvia demonstrar que a diagonal e o lado unitário de um quadrado não compartilhavam uma unidade comum. A partir de desafios como esse, surgiu a necessidade de introduzir novos números, os chamados números irracionais (Barbosa; Sousa; Santos, 2020).

A descoberta dos números irracionais marca um dos grandes marcos na história da matemática e pode ter gerado conflitos entre os Pitagóricos, pois contradizia o paradigma pitagórico de que toda medida deveria ser racional, ou seja, uma fração de números inteiros (Eves, 2011).

> Para os pitagóricos, todas as grandezas (comprimento, área, volume...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. Na qual, acreditava-se que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, segmentos quaisquer de reta. Dados dois segmentos, supunham que existia sempre um segmento que "cabia" um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Nesse caso, os segmentos eram comensuráveis (Bongiovanni, 2005, p. 91 *apud* Barbosa; Sousa; Santos, 2020, p. 442).

Segundo Segundo Ifrah (1989) e Costa (1971) citados por Corbo (2012), e Pommer (2011), a descoberta pelos pitagóricos de que a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado não poderia ser expressa como uma fração de números inteiros causou perturbação e desconcerto entre os pitagóricos, uma vez que isso contrariava o senso comum da época. Para os gregos, essa relação não era possível de ser expressa com palavras, e a solução encontrada foi ocultá-la por meio da Geometria. Boyer (1996) nos diz que para os Pitagóricos "a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de "*arithmos*", ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões" (Boyer, 1996, p. 50, *apud* Jesus, 2017, p. 9).

O problema da incomensurabilidade frustrou os pitagóricos gregos, pois muitas demonstrações geométricas, especialmente aquelas envolvendo razão e proporção, assumiam que quaisquer segmentos sempre possuíam uma unidade de comprimento comum. Essa frustração marcou um episódio que mais tarde ficou conhecido como a "crise dos incomensuráveis". A incomensurabilidade conflitava com a filosofia pitagórica de que "tudo é número", contrariando o senso intuitivo de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Há diversos mitos sobre o impacto dessa descoberta, sugerindo que os pitagóricos tentaram mantê-la em segredo. Uma lenda, embora imprecisa, relata que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro membro) foi lançado ao mar por revelar o segredo a estranhos, ou, de acordo com outra versão, ele foi banido da comunidade pitagórica e teve um túmulo erguido em sua memória, como se estivesse morto (Eves, 2011).

Para aqueles que defendem que a descoberta dos incomensuráveis gerou uma crise, a descoberta da existência de grandezas não comensuráveis, como a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado, foi considerada surpreendente e perturbadora para os pitagóricos, já que não podia ser expressa como razão de inteiros (Gonçalves; Possani, 2009).

De acordo com Gonçalves e Possani (2009), desde a década de 1960, estudos na área indicam uma falta de rigor histórico na ideia de que a descoberta da incomensurabilidade causou uma crise entre os pitagóricos. Esta versão, menos difundida, sugere que as fontes mais confiáveis não apresentam evidências de uma crise, atribuindo essa noção a uma leitura pouco rigorosa de fontes menos fidedignas. A crise da incomensurabilidade só parece existir quando interpretamos textos gregos antigos com nossa própria visão moderna da matemática, sem considerar como os antigos gregos viam a matemática. Quando nos colocamos no ponto de vista dos primeiros pitagóricos, a crise da incomensurabilidade desaparece.

Os pitagóricos reverenciavam os números além de seu uso prático, associando-os a forças cósmicas. Pitágoras acreditava que os números simbolizavam a totalidade do cosmos e que todas as coisas eram, essencialmente, números. Para ele, as propriedades aritméticas das coisas constituíam seu verdadeiro ser (Roque; Pitombeira, 2012).

Os autores que discordam de que a descoberta dos segmentos incomensuráveis tenha causado uma crise no pensamento pitagórico argumentam que comentadores como Aristóteles não a mencionam em seus escritos. O historiador David Fowler apresenta diversos apontamentos sobre como os matemáticos gregos poderiam ter lidado com a incomensurabilidade sem gerar uma crise. Seu argumento principal é que a geometria grega era fortemente desvinculada da aritmética, permitindo a prática da geometria sem a necessidade de associar um número a cada segmento (Fowler, 1999 *apud* Gonçalves; Possani, 2009).

Grattan-Guinness (1997) sugere que os gregos antigos desfrutaram de um período de grandes realizações matemáticas e que a suposta crise de fundamentos não foi evidente na época.

> Outra descoberta famosa atribuída aos pitagóricos é usualmente formulada assim: O número √2 é irracional; mas essa formulação é anacronística[3] em vários modos. [...] a descoberta é tida como tendo provocado uma crise nos fundamentos da matemática daquele tempo; mas comentadores como o próprio Aristóteles não a mencionam, e a ideia pode ser uma interpolação anistórica[4] de alguns gregos posteriores, ou mesmo um malentendido. [...] Assim, longe de experimentar uma crise de fundamentos, os gregos antigos podem ter gozado uma época de grandes jornadas matemáticas (Grattan-Guinness,1997, p. 47–48 *apud* Gonçalves; Possani, 2009, p. 19).

Roque (2012), citando os historiadores Burkert (1972, p.413-20) e Knorr (1975), contesta a ideia de que a descoberta da incomensurabilidade tenha representado uma crise nos fundamentos da matemática grega. Segundo a autora, a Matemática abstrata e a teoria dos números, desenvolvidas pelos pitagóricos, estavam separadas da geometria em dois campos distintos. Em outras palavras, a afirmação “tudo é número” não significava que “todas as grandezas são comensuráveis”. A ideia de que “tudo é número” não implica que todas as grandezas possam ser comparadas por meio de números, já que o problema geométrico da comparação de grandezas aparentemente não fazia parte do pensamento pitagórico. Salienta, ainda, que a descoberta da incomensurabilidade representou, na verdade, uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos.

> Reza a lenda que a descoberta dos irracionais causou tanto escândalo entre os gregos que o pitagórico responsável por ela, Hípaso, foi expulso da escola e condenado à morte. Não se sabe de onde veio essa história, mas parece pouco provável que seja verídica.[...] Burkert desconstruiu uma série de lendas sobre a matemática pitagórica.[...] Para os pitagóricos, que praticavam aritmética com números representados por pedrinhas e estavam preocupados com teorias sobre o cosmos, resumidas pelo enunciado “tudo é número”, a descoberta da incomensurabilidade não deve ter tido nenhuma importância [...] Knorr interpreta as diferentes versões da crise dos incomensuráveis que dominaram a historiografia em meados do século XX como um sinal da influência de pressupostos filosóficos. Os estudos metamatemáticos[5] do período foram marcados pelo questionamento em relação aos fundamentos da matemática, associado aos trabalhos de Dedekind, Cantor e Hilbert. A tentação de ver nos gregos uma crise análoga era um modo de valorizar os trabalhos do início do século XX, encarados como soluções para dilemas não resolvidos por 2500 anos (Roque, 2012, p. 124-126).

---

[3] Erro de cronologia que consiste em situar, em uma época, personalidades, acontecimentos, ideias e sentimentos ou estilos próprios de outra (Michaelis, 2024).

[4] Contrária à história (Michaelis, 2024).

[5] A metamatemática é um conceito formulado por Jacques Herbrand em 1930 e expandido por Tarski e Gödel. Ela cuida do esclarecimento rigoroso através de recurso à própria matemática, de conceitos como o de axioma, regra de inferência e demonstração formal ou dedução, de completude e de interpolação (Gomes, 2023, p. 81).

Atualmente, o rigor historiográfico mais aceito mostra que a versão da história da matemática grega sem a crise dos pitagóricos é a mais compatível com as fontes. No entanto, isso não desvaloriza os trabalhos que defenderam a existência da crise. Pelo contrário, ao analisarmos esses historiadores, é importante entender que sua historiografia estava condicionada a outras conjecturas sobre a matemática grega e a história da Grécia Antiga (Favalli, 2024).

Pode-se observar a impossibilidade de estabelecer uma única explicação sobre as origens da ideia de irracionalidade. O debate sobre a existência dos números irracionais existe desde a Grécia antiga, mas foi somente no século XIX que matemáticos como Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918), com seus teoremas colocaram os números irracionais juntamente com os racionais na reta numérica. Dedekind forneceu em 1872 uma definição precisa para os números irracionais através dos cortes, enquanto Cantor em 1874 começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito, criando uma abordagem dos números irracionais, que utiliza sequências convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind (Eves, 2011).

Por muitos séculos, os números irracionais permaneceram marginalizados e pouco compreendidos. Só nos últimos cem anos é que se obteve uma compreensão matemática mais sólida deles. No entanto, no ensino da Matemática, os números irracionais ainda representam um desafio, o que requer mais pesquisas e esclarecimentos (Pommer, 2011).

Barbosa, Sousa e Santos (2020) destacam a importância da compreensão desses fatos históricos, uma vez que o estudo deles pode contribuir na formulação de abordagens para melhorar o ensino dos números irracionais.

2.3. Análise das coleções do PNLD quanto à introdução dos irracionais

Os livros didáticos que chegam até as escolas públicas atualmente são selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Em 2024 o PNLD será destinado aos Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Considerando as particularidades do programa e a importância do livro didático como material de apoio para o professor e no interesse em saber como o ensino de números Irracionais está sendo realizado, foram consultadas e analisadas as seguintes coleções que constam no Guia de Obras Didáticas (Brasil, 2023):

- A Conquista Matemática;
- Amplitude Matemática;
- Araribá Conecta – Matemática;
- Conexões & Vivências Matemática;
- Desafios da Matemática com Ênio Silveira;
- Geração Alpha Matemática;
- Jornadas: Novos Caminhos – Matemática;
- Matemática e Realidade;
- Matemática – Bianchini;
- SuperAÇÃO! Matemática;
- Teláris Essencial: Matemática;

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), no nono ano do Ensino Fundamental se inicia o conteúdo de números irracionais, que são estudados na unidade temática números junto com os números reais. A BNCC evidencia como habilidade desejada nesses objetos de conhecimento:

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade) (Brasil, 2018, p. 317).
>
> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica (Brasil, 2018, p. 317).

Ao analisar um conjunto de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, e apesar da BNCC sugerir que essa temática seja apresentada no 9°. ano, foi observado que, nas Coleções Araribá Conecta – Matemática, Desafios da Matemática com Ênio Silveira e Jornadas Novos Caminhos – Matemática, o ensino dos números irracionais se inicia no volume do 8°. Ano. Cabe destacar que estas coleções estão entre as aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2024.

O Quadro 1 traz informações sobre o ensino dos números irracionais nas coleções analisadas do PNLD 2024 – Ensino Fundamental Anos Finais:

Quadro 1 – Aspectos analisados em cada coleção, no que diz respeito aos números irracionais.

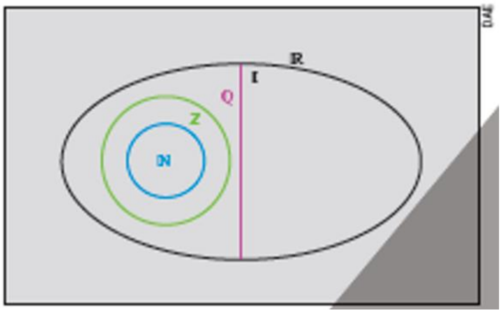
	Coleção	Ano	Abordagem dos Número Racionais	Abordagem dos Número Irracionais	Utiliza a Reta Numérica	Utiliza o Diagrama de Venn	Interação com a Geometria (abordando Raiz de 2 e Pi)
1	A Conquista Matemática	8º	x		x		
2	A Conquista Matemática	9º		x	x		x
3	AMPLITUDE MATEMÁTICA	8º	x			x	
4	AMPLITUDE MATEMÁTICA	9º		x	x		x
5	Araribá Conecta - Matemática	8º	x	x	x	x	
6	Araribá Conecta - Matemática	9º	x	x	x	x	x
7	CONEXÕES & VIVÊNCIAS MATEMÁTICA	8º	x		x	x	
8	CONEXÕES & VIVÊNCIAS MATEMÁTICA	9º	x	x	x	x	x
9	Desafios da Matemática com Ênio Silveira	8º	x	x	x	x	x
10	Desafios da Matemática com Ênio Silveira	9º	x	x	x	x	x
11	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	7º	x		x		
12	GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	9º	x	x	x		x
13	JORNADAS: NOVOS CAMINHOS – MATEMÁTICA	8º	x	x	x	x	x
14	JORNADAS: NOVOS CAMINHOS – MATEMÁTICA	9º					
15	MATEMÁTICA E REALIDADE	8º	x				
16	MATEMÁTICA E REALIDADE	9º	x	x	x	x	x
17	Matemática - Bianchini	9º	x	x	x		x
18	SuperAÇÃO! Matemática	8º	x		x	x	
19	SuperAÇÃO! Matemática	9º		x	x		x
20	TELÁRIS ESSENCIAL: MATEMÁTICA	8º	x		x		
21	TELÁRIS ESSENCIAL: MATEMÁTICA	9º	x	x	x	*	x

* Sugerido pelos autores a utilização do diagrama de Venn na aula

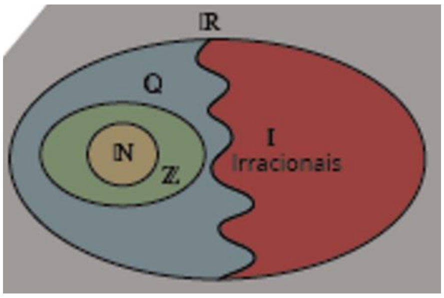
Fonte: Elaboração própria.

Um aspecto analisado foi a utilização do diagrama de Venn como representação do conjunto dos números irracionais. As Coleções Amplitude Matemática, Aribá Conecta – Matemática, Conexões & Vivências Matemáticas, Desafios da Matemática com Ênio Silveira, Jornadas Novos Caminhos – Matemática, Matemática e Realidade, e SuperAÇÃO! Matemática a utilizam. Cabe destacar que o diagrama de Venn não é apropriado para representar conjuntos infinitos, uma vez que pode suscitar impressões errôneas sobre a cardinalidade de cada conjunto (Almeida, 2015). Na Figura 1, encontram-se dois exemplos de diagrama de Venn encontrados em livros do PNLD 2024:

Figura 1 – Representações em diagrama de Venn



Fonte: Bonjorno, 2022, p. 18.



Fonte: Longen, 2022, p. 24.

Fonte: Elaboração própria.

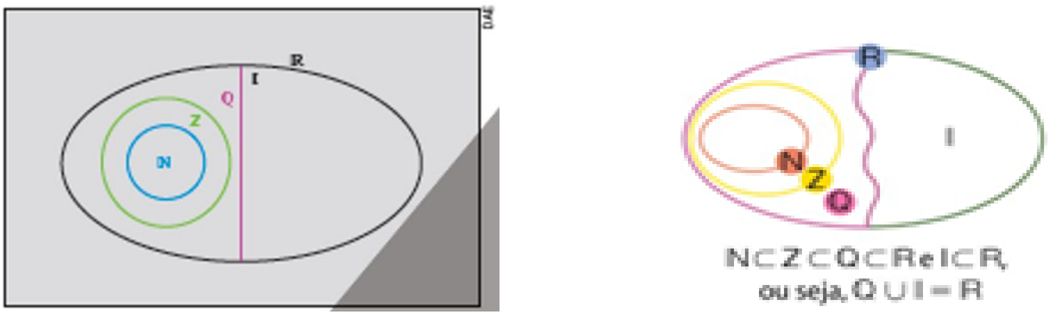
Além dessas coleções, foram analisados cinco livros de Ensino Médio, que fazem parte do PNLD 2021. Escolheu-se os volumes em que são abordados os conjuntos numéricos:

- Conexões – Matemática e suas Tecnologias, vol. 1;
- Diálogo – Matemática e suas Tecnologias, vol. 2;
- Matemática Interligada, vol. 1;
- Multiversos - Matemática, vol. 1;
- Prisma - Matemática, vol. 1.

Cabe salientar que as coleções aprovadas no PNLD 2021 para o Ensino Médio são compostas por seis volumes cada uma. Pode-se observar que o conteúdo que aborda os números irracionais normalmente aparece no 1º volume, sendo exceção a coleção Diálogo – Matemática e suas Tecnologias. Isso ocorre porque no Ensino Médio, normalmente no 1º ano, o estudo dos números irracionais é retomado como parte dos conjuntos numéricos, numa sequência pedagógica que tem por objetivo preparar os estudantes para o estudo de intervalos.

Com relação à utilização do diagrama de Venn no estudo de números irracionais, podemos observar na Figura 2 que o autor Bonjorno (2022) utiliza esta abordagem tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio:

Figura 2 – Diagrama de Venn.



Fonte: Bonjorno, 2022, p. 18. Bonjorno, 2020, p. 42

Fonte: Elaboração própria.

No livro Conexões: matemática e suas tecnologias, que faz parte do PNLD 2021 – Ensino Médio, pode-se observar a resolução de um exercício que pede a demonstração de que a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) é um número irracional (Figura 3). O organizador Leonardo (2020) utiliza a demonstração por absurdo para resolver este exercício:

Figura 3 - Exercício resolvido do livro Conexões: MATEMÁTICA e suas tecnologias.

Exercício resolvido

R7. Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

▶ **Resolução**

Vamos aplicar a **demonstração por absurdo**, um procedimento indireto que consiste em utilizar manipulações lógicas para chegar a uma contradição. Dadas as afirmações A e B, para provar que $A \Rightarrow B$ (A implica B), começamos por supor A verdadeira e B falsa (B falsa é chamada de **hipótese de raciocínio por absurdo**). A suposição de que B é falsa é apenas temporária, até que seja obtida uma contradição e, dessa maneira, concluir que B é verdadeira.

Nesse caso, fazemos a afirmação escrita na forma de implicação: se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional (note que a afirmação A é "$x = \sqrt{2}$" e a afirmação B é "x é irracional"). Para a demonstração por absurdo, vamos supor que a afirmação "x é irracional" é falsa, ou seja, que x é racional. A partir daí, chegamos a uma contradição.

Assim, para a suposição de que x é racional, devem existir p e q, com $q \neq 0$, tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

Simplificando a fração $\dfrac{p}{q}$, se necessário, podemos supor que p e q sejam primos entre si (fração irredutível, ou seja, não possuem divisores comuns diferentes de 1).

Elevando os dois membros ao quadrado e lembrando que todo múltiplo de 2 é um número par, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{(I)}$$

Note que p^2 é par; logo, p é par, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$.

$$p = 2n \Rightarrow p^2 = (2n)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Note que q^2 é par; logo, q é par.

Contudo, as conclusões "p é par" e "q é par" contradizem a hipótese de que $\dfrac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, ou seja, chegamos a um absurdo.

Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma razão de números inteiros; logo, não é um número racional.

Fonte: Leonardo, 2020, p.51.

Como justificativa para o retorno ao estudo dos números irracionais no Ensino Médio, o organizador Leonardo (2020, p.51) destaca a relevância desse exercício salientando que ele evidencia o desenvolvimento da competência específica 5:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões,

> experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p.540).

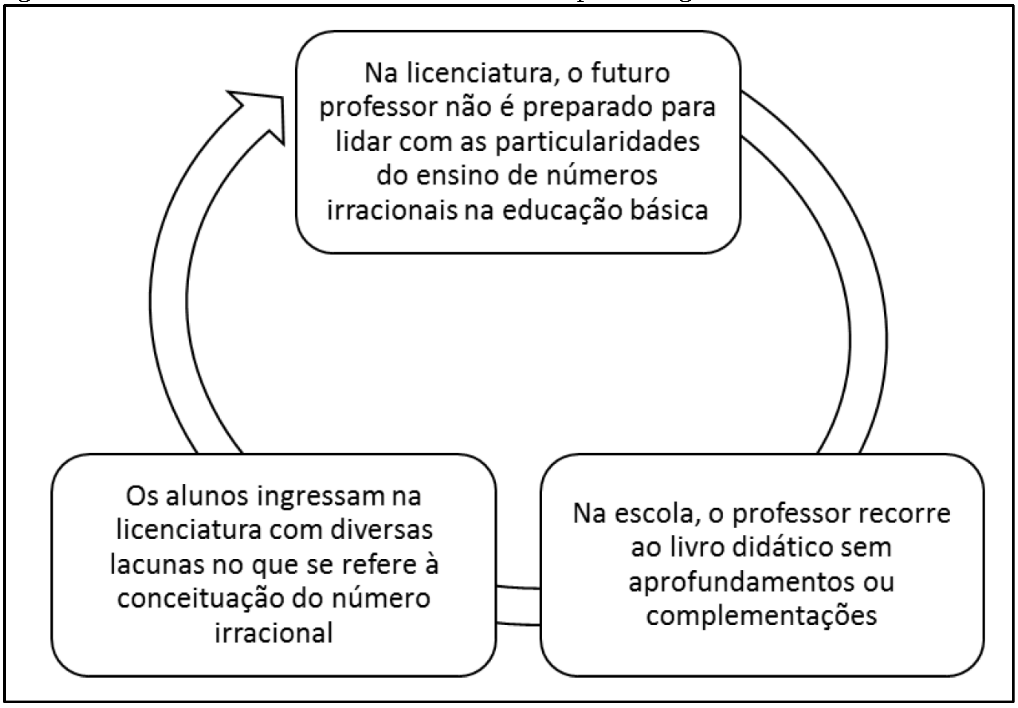
Observa-se nos livros didáticos do PNLD 2024 – Ensino Fundamental Anos Finais - e nos livros didáticos do PNLD 2021 – Ensino Médio - pelo menos uma das seguintes formas de representação dos números irracionais:

- Representação numérica: os números irracionais aparecem representados na sua forma decimal ou simbólica. Por exemplo, a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) pode ser representada numericamente como 1,41421356237... (em forma decimal) ou $\sqrt{2}$ (em forma simbólica);
- Representação geométrica: Os números irracionais também aparecem representados geometricamente. Por exemplo, a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) aparece representada como o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1;
- Representação gráfica: gráficos são usados para ilustrar conceitos relacionados a números irracionais, como a representação gráfica da raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) na reta numérica;
- Representação com figuras: o Diagrama de Venn é utilizado para representar os conjuntos numéricos em algumas coleções.

2.4. Formação do professor na Licenciatura em Matemática

A literatura referente ao ensino e à aprendizagem de números irracionais aponta para deficiências e inadequações relacionadas a esse tema, tanto nos livros didáticos quanto na formação do professor de matemática, com vistas à sua atuação na Educação Básica (Broetto, 2016). A Figura 4 ilustra o processo que ocorre, segundo o autor.

Figura 4 – Ciclo vicioso do não-ensino e da não-aprendizagem dos números irracionais.



Fonte: Broetto, 2016, p. 44.

Os números reais são de extrema importância na formação dos professores de Matemática. De um lado, o aluno que inicia a Licenciatura muitas vezes ainda não possui uma visão teórica abrangente sobre os números reais; por outro lado, ele traz consigo uma experiência escolar acumulada ao longo de vários anos, durante a qual construiu certas "imagens conceituais" – corretas ou não do ponto de vista da teoria matemática – que formam seu entendimento sobre esse conjunto numérico. Identificar essas imagens é essencial do ponto de vista didático-pedagógico, pois elas tendem a ser "psicologicamente resistentes” (Soares; Ferreira; Moreira, 1999).

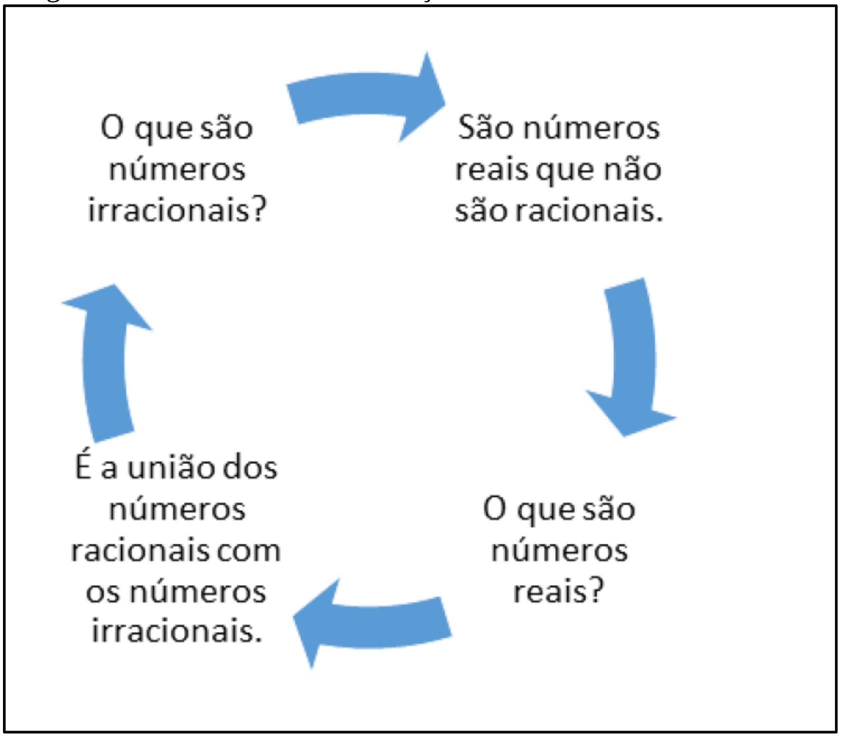
A lógica da matemática escolar segue um caminho distinto da educação superior, na qual um número real pode ser definido como um corte de Dedekind nos racionais. Na Educação Básica, após a definição do conjunto dos números racionais, surge a necessidade de ampliar o conceito de número, e um dos principais motivos para isso é que os racionais são insuficientes para medir qualquer segmento a partir de uma unidade de medida previamente definida. Esse fenômeno é conhecido, tecnicamente, como incomensurabilidade, sendo o exemplo mais comum a incomensurabilidade entre a diagonal de um quadrado e seu lado (Broetto, 2016).

Soares, Ferreira e Moreira (1999) nos lembram que as representações mais comuns encontradas nos livros didáticos da Educação Básica definem os números irracionais como "números que não podem ser escritos como fração" ou como "números cuja representação decimal é infinita e não periódica". Tais definições, embora corretas, frequentemente admitem que os alunos já possuam uma compreensão clara do que seja um número real, o que muitas vezes não é o caso. Assim, o ensino do conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais pode não fazer sentido para os estudantes que ainda não assimilaram os conceitos fundamentais.

> As caracterizações de números irracionais mais encontradas nos livros didáticos da Escola Básica são as seguintes: a) o número que não pode ser escrito como fração; b) o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Em ambas fica pressuposto o entendimento do que seja número, isto é, número real. Apesar disso, em seguida, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais (Soares; Ferreira; Moreira, 1999, p. 99).

Broetto (2016) destaca que a dificuldade dos alunos em compreender o conceito dos números irracionais pode ser atribuída a uma série de fatores conceituais e pedagógicos. Isso acontece porque, enquanto os números racionais têm uma definição mais direta (quociente de dois inteiros), os números irracionais, por sua vez, são definidos normalmente negando a definição dos números racionais, ou seja, como aqueles números que não são racionais. Dessa forma, os estudantes ficam sem uma compreensão clara e intuitiva do que realmente são os números irracionais. Esse tipo de definição gera um desafio no ensino, pois, ao unir conjuntos racionais e irracionais para formar o conjunto dos números reais, a própria definição dos irracionais parece depender da existência dos racionais, o que pode confundir os alunos. Os alunos muitas vezes não conseguem identificar um padrão concreto nos números irracionais, uma vez que não podem ser escritos como frações simples, o que os afasta da experiência prática que já têm com os racionais. Diante disso, a definição dos números reais como a união dos números racionais e irracionais pode gerar uma circularidade no entendimento dos alunos, conforme ilustrado na Figura 5 (Broetto, 2016).

Figura 5 – Circularidade na definição de números reais e irracionais



Fonte: Broetto, 2016, p. 57

Contudo, os números irracionais não devem ser vistos como elementos novos ou adicionais que se somam ao conjunto dos números racionais para formar os reais. Os números reais não são formados por uma simples "adição" dos irracionais aos racionais, mas englobam ambos como categorias dentro de um mesmo conjunto (Broetto, 2016).

> Os irracionais não são os (novos) entes que serão acrescentados aos (conhecidos) racionais para a obtenção dos reais. Eles são simplesmente os reais que não são racionais (Moreira; David, 2010, p. 90 *apud* Broetto, 2016, p. 39-40).

A dificuldade de compreensão do conceito dos números irracionais que se inicia na escola básica, continua no ensino superior. Soares, Ferreira e Moreira (1999) desenvolveram uma pesquisa, na qual 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC responderam um questionário. O que chama a atenção é como alunos que escolheram fazer um curso de Matemática em nível de 3º grau caracterizam os números irracionais. O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passam longe de quase todas as respostas.

> Para você, o que é um número irracional? [...] quase 50% [...] associam os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido. [...] Eis algumas das respostas apresentadas: números difíceis de imaginar; números que não são exatos; são números indefinidos, sei que existem, mas não sei como determiná-los; números que só podem ser representados por i; um número que, depois da vírgula, apresenta infinitas casas decimais; são as frações que não dão exatas (dízimas periódicas) (Soares; Ferreira; Moreira, 1999, p. 100).

Além dessa questão, Soares, Ferreira e Moreira (1999), com o objetivo de aprofundar o conceito de irracionalidade, propuseram a seguinte questão para verificar com que frequência a incomensurabilidade estaria presente nas respostas dos alunos: “você quebra uma barra de chocolate em dois pedaços ao acaso. É sempre possível exprimir a razão entre os “tamanhos” desses dois pedaços (as áreas deles, por exemplo) por um número racional?” (Soares; Ferreira; Moreira, 1999, p. 101). A resposta correta seria "não", uma vez que nem sempre é possível representar tal razão por um número racional. No entanto, os resultados mostram que, embora aproximadamente 64% dos estudantes tenham respondido corretamente, apenas dois deles conseguiram fornecer uma justificativa satisfatória. Por outro lado, cerca de 29% dos alunos deram a resposta incorreta, afirmando que a razão entre os pedaços poderia sempre ser expressa por um número racional. Esses dados revelam tanto uma compreensão limitada quanto dificuldades na explicação do conceito de incomensurabilidade entre segmentos, um tema fundamental para a transição do raciocínio sobre números racionais para irracionais (Soares; Ferreira; Moreira, 1999).

Mas afinal o que é um número real?

> 1) Um número real é um corte de Dedekind nos racionais, isto é, um par (A,B) de subconjuntos não vazios e complementares de Q tais que A não possui um elemento máximo, todo elemento de A é cota inferior para B e todo elemento de B é cota superior para A. 2) Um número real é uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, segundo a seguinte relação: duas sequências são equivalentes se e somente se a diferença entre elas converge para zero. 3) Um número real é um par ordenado (a,b) em que a é um número inteiro e b uma sequência infinita formada por dígitos pertencentes ao conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}[6]. 4) Um número real é uma classe de equivalência de intervalos racionais encaixantes[7], segundo a seguinte relação de equivalência: [an, bn] ~ [cn, dn] se e somente se as sequências de números racionais (an – cn) e (bn – dn) convergem, ambas, para zero (Moreira, 2004, p. 116).

Estas quatro definições apresentadas são formas de conceber os números reais A forma “matematicamente científica” de conhecer os reais é como um conjunto cujos elementos se relacionam segundo a estrutura de corpo ordenado completo, o qual é identificado como $\mathbb{R}$ (Moreira, 2004).

Moreira (2004), em sua tese de doutorado que faz uma análise da formação do professor no curso de Licenciatura em Matemática da UFMG, destaca que o professor de

---

[6] Na verdade, é preciso acrescentar a seguinte condição para as sequências (bn): para todo n, existe um m > n tal que bm não é o dígito 9 (Moreira; David, 2010, p. 80 *apud* Broetto, 2016, p. 38-39).

[7] Os intervalos da forma [an , bn] são encaixantes se an ≤ an+1 e bn ≥ bn+1 para todo n e a sequência (bn - an) converge para zero (Moreira; David, 2010, p. 80 *apud* Broetto, 2016, p. 38-39).

Matemática do Ensino Básico precisa, primeiro, compreender o conceito de número real como número, o que é importante, pois a ideia de número na escola já passou por várias etapas de elaboração e re-elaboração, desde os números naturais, passando pelos inteiros e racionais, até chegar aos reais. Durante esse processo, os alunos precisam reestruturar seus esquemas cognitivos para assimilar cada nova noção de número.

> É fundamental conceber o número real como número, o que faz uma grande diferença, porque, na escola, a ideia de número já possui uma história de elaboração e reelaboração. No processo de ensino-aprendizagem escolar essa história vem se desenvolvendo a partir do trabalho com os naturais e passa pelos inteiros, pelos racionais até chegar aos reais. Ao longo dela, o aluno se vê na condição de reelaborar esquemas cognitivos para, a cada etapa, acomodar a nova noção de número (Moreira; David, 2010, p. 80 *apud* Broetto, 2016, p. 38-39).

Assim, para a matemática escolar, o número real é uma extensão dessa ideia de número, incluindo os naturais e os racionais. Na escola, números como 1, 2, 3, 2/5 e 0,25 são reconhecidos como números, enquanto conceitos mais abstratos, como pares ordenados, cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências (de Cauchy e de intervalos racionais encaixantes), não são. Além disso, à medida que a noção de número é ampliada desde a ideia inicial de número natural, o conjunto dos reais se apresenta como uma construção para superar limitações da noção anterior de número. Postular os números reais como um corpo ordenado completo, como na matemática acadêmica, entra em conflito com o processo de ensino que acontece na escola. Na educação matemática escolar, os números reais inicialmente são vistos como objetos que resolvem problemas que os racionais não conseguem solucionar. A estrutura formal de corpo ordenado completo surge depois, assim como aconteceu na ampliação dos números naturais para os racionais. Por essas razões, discutir as necessidades que levam à ampliação do conceito de número e o significado dos irracionais é fundamental na matemática escolar. A abordagem usada na formação de professores, que destaca a estrutura abstrata dos números reais (corpo ordenado completo) e seus axiomas, muitas vezes desconecta o conhecimento acadêmico das necessidades práticas do professor de ensino básico. Na escola, o professor precisa lidar com desafios práticos, como ensinar alunos a compreender números que não são frações de inteiros, enfrentando dificuldades cognitivas e pedagógicas associadas a essa nova noção de número (Moreira, 2004).

Diante disso, Soares, Ferreira e Moreira (1999) propõem uma reformulação na formação de professores, com uma nova abordagem para o ensino dos sistemas numéricos na educação básica. Essa abordagem deve partir da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos, buscando proporcionar uma visão mais global do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), que possa dar instrumentos aos futuros professores para lidar com esses conceitos no ensino. A proposta de reformulação não visa apenas à apresentação de definições formais, mas à construção de uma compreensão mais profunda dos conceitos numéricos, de modo que o professor possa atuar no processo de ensino/aprendizagem levando em consideração as concepções prévias dos estudantes.

> Uma nova abordagem dos sistemas numéricos deve ser construída especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem teria que partir fundamentalmente da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino (Soares; Ferreira; Moreira, 1999, p. 95).

A compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos tem sido alvo de debates importantes no campo da educação matemática. Segundo Soares, Ferreira e Moreira (1999), identificar as concepções que os estudantes formam sobre esses conceitos é fundamental para o sucesso da aprendizagem. Quando essas concepções são desconsideradas no processo de ensino, podem se converter em barreiras para a aprendizagem. Não se deve esperar que os alunos substituam imediatamente suas concepções previamente estabelecidas, construídas ao longo de sua trajetória escolar, por definições formais oferecidas pelo professor. Em geral, os estudantes tendem a preservar essas concepções e, ao mesmo tempo, incorporar uma versão distorcida da definição formal apresentada. Esse processo resulta em uma espécie de "mosaico", no qual várias representações de um mesmo conceito existem ao mesmo tempo. Dependendo da situação, o aluno utiliza diferentes representações do conceito, adaptando-as à sua necessidade.

> De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito, recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias (Soares; Ferreira; Moreira, 1999, p. 97).

Diante disso, torna-se importante o aprimoramento das práticas de ensino e o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes que ajudem os alunos (tanto na educação básica, como no ensino superior) a desenvolverem uma compreensão mais profunda e significativa dos números irracionais e reais. Tais ações dependem da reformulação dos cursos de Licenciatura em Matemática com o objetivo de formar professores mais capacitados para enfrentar os desafios que surgem ao se lecionar na educação básica.

3 **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Neste capítulo, os procedimentos metodológicos adotados na presente pesquisa serão apresentados em seções distintas. Na primeira seção, será caracterizado do tipo da pesquisa. Na segunda seção, discutiremos a elaboração dos instrumentos de coleta de dados. Na terceira seção, discutiremos as etapas da pesquisa, com a apresentação da versão inicial do questionário e do roteiro das entrevistas dos professores regentes das turmas. Além disso, será descrita a experiência de aplicação do teste exploratório realizado, juntamente com as contribuições significativas obtidas durante esse processo. Também será apresentada a dinâmica da aplicação do questionário em turmas do primeiro ano do ensino médio e das entrevistas realizadas com os professores regentes destas turmas.

Para atingir o propósito de investigar as concepções dos alunos e professores do primeiro ano do Ensino Médio acerca do conceito de número irracional, que é o objetivo geral, planeja-se conduzir a pesquisa em 6 (seis) etapas:

- Revisão bibliográfica;
- Elaboração do questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio e do roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas desses alunos;
- Realização do teste exploratório de ambos os instrumentos de coleta de dados;
- Análise dos dados coletados no teste exploratório e modificações advindas destes, caso necessário;
- Aplicação do questionário para os alunos e entrevista com os professores;
- Análise dos dados coletados após aplicação e entrevista;

3.1. Tipo da pesquisa

Para o desenvolvimento deste trabalho, propõe-se a adoção de uma abordagem qualitativa de caráter exploratório para a pesquisa. Conforme Silveira e Córdova (2009, p. 34), com esta metodologia, busca-se com a abordagem qualitativa: tentar compreender a totalidade do fenômeno, mais do que focar em conceitos específicos; não tentar controlar o contexto da pesquisa, e, sim, captar o contexto na totalidade; e analisar as informações narradas de uma forma organizada, mas intuitiva. Para Gil (2007 *apud* Silveira; Córdova, 2009, p. 35), o caráter exploratório tem como objetivo promover uma maior familiaridade com o problema, visando torná-lo mais explícito ou construir hipóteses. A maioria significativa dessas investigações abrange: (a) revisão bibliográfica; (b) entrevistas com indivíduos que possuem experiência prática relacionada ao problema em estudo; e (c) análise de exemplos que auxiliem na compreensão.

> Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizada especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis (Gil, 2008, p. 27).

3.2 Instrumentos de coleta de dados

Com o objetivo de esclarecer os procedimentos metodológicos a serem seguidos, nesta seção serão discutidos os instrumentos utilizados para a coleta de dados do público-alvo. O primeiro instrumento de coleta de dados será um questionário que deverá ser aplicado para alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Também serão realizadas entrevistas (segundo instrumento de coleta de dados) com os professores regentes das turmas destes alunos.

A elaboração de um questionário envolve a necessidade de observar diversos cuidados, incluindo: avaliação de sua eficácia na verificação dos objetivos, definição da forma e conteúdo das perguntas, determinação da quantidade e ordem das questões, criação das opções de resposta, formatação do questionário e realização de um pré-teste do questionário (Gil, 2008).

A eficácia dos questionários depende das opções de resposta fornecidas em cada pergunta. Por essa razão, é recomendável que a versão final do questionário seja desenvolvida somente após a realização de um estudo exploratório com indivíduos que podem fazer parte da amostra da pesquisa (Gil, 2008).

A aplicação dos questionários em uma pesquisa qualitativa pode trazer diversas vantagens, como a coleta de dados padronizada, permitindo obter respostas de forma sistemática, facilitando a comparação entre diferentes participantes (Gil, 2008) e a eficiência na análise de dados, uma vez que a estrutura padronizada permite um tratamento analítico mais rápido e objetivo, facilitando a categorização das respostas (Bardin, 1979).

Já a entrevista possibilita a obtenção de dados referentes aos mais diversos aspectos, sendo uma técnica muito eficiente para a obtenção de dados em profundidade acerca do comportamento humano. Ela consiste de uma técnica em que o investigador se apresenta frente ao investigado e lhe formula perguntas, com o objetivo de obtenção dos dados que interessam à investigação. É uma forma de interação social e de diálogo assimétrico, em que uma das partes busca coletar dados e a outra se apresenta como fonte de informação. Os dados obtidos são suscetíveis de classificação e quantificação (Gil, 2008).

A entrevista apresenta vantagens e desvantagens em comparação com os questionários. Entre as vantagens estão a obtenção de mais respostas devido à facilidade de não precisar responder a um questionário e a flexibilidade para esclarecer perguntas. No entanto, as desvantagens incluem falta de motivação do entrevistado, compreensão inadequada das perguntas, influência do entrevistador e custos associados. Apesar das limitações, a flexibilidade da entrevista permite contornar algumas dessas dificuldades (Gil, 2008).

3.3 Etapas da pesquisa

3.3.1 Versão inicial do questionário

A elaboração do questionário começou com a leitura de trabalhos relacionados à temática desta pesquisa. Algumas questões foram selecionadas de Broetto (2016) e reformuladas com o objetivo de desenvolver perguntas de fácil interpretação e adaptadas ao contexto do presente trabalho.

O questionário está estruturado em oito questões, das quais seis são perguntas discursivas e duas elaboradas de forma fechada. A primeira questão (Figura 6) tem por objetivo investigar se o estudante se recorda da representação por diagramas.

Figura 6 – 1ª Questão da versão inicial do questionário.

Questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio - teste exploratório

Você já estudou sobre os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e reais (IR). Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão – Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão (Figura 7) tem por objetivo investigar se os alunos conhecem a definição de número irracional.

Figura 7 – 2ª Questão da versão inicial do questionário.

2ª Questão – O que são números irracionais?

Fonte: Elaboração própria.

A terceira questão (Figura 8) tem por objetivo investigar se os alunos fazem alusão à razão entre inteiros.

Figura 8 – 3ª Questão da versão inicial do questionário.

3ª Questão - Qual a diferença entre números racionais e irracionais?

Fonte: Elaboração própria.

A quarta questão (Figura 9) tem por objetivo verificar a percepção dos alunos em relação à cardinalidade dos conjuntos numéricos e verificar se essa percepção é influenciada pela representação em diagramas.

Figura 9 – 4ª Questão da versão inicial do questionário.

4ª Questão - Você acha que existem mais números racionais ou irracionais? Por quê?

Fonte: Elaboração própria.

A quinta questão (Figura 10), dividida em oito itens, objetiva verificar se os alunos reconhecem os principais números irracionais abordados na educação básica.

Figura 10 – 5ª Questão da versão inicial do questionário.

5ª Questão - Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional	
$\sqrt{2}$			
$\sqrt{3}$			
$\sqrt[3]{125}$			
$\frac{\sqrt{5}}{2}$			
3,1416			
$1{,}1333\ldots = 1{,}1\underline{3}$			
π			
$\frac{4\pi}{3}$			

Fonte: Elaboração própria.

A sexta questão (Figura 11) tem por objetivo verificar se os alunos reconhecem a definição do número pi (π).

Figura 11 – 6ª Questão da versão inicial do questionário.

6ª Questão – Em geometria, você estudou a circunferência. O quociente $\frac{c}{2r}$, em que c é o comprimento da circunferência e r é seu raio, é um número racional ou irracional? Você se recorda que número é esse?

Fonte: Elaboração própria.

A sétima questão (Figura 12) objetiva investigar se os alunos conhecem a representação decimal de um número irracional.

Figura 12 – 7ª Questão da versão inicial do questionário.

7ª Questão - Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.
(B) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma parte que se repete (a chamada dízima periódica).
(C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.
(D) não me recordo de ter estudado a representação decimal de um número irracional.

Fonte: Elaboração própria.

A oitava questão (Figura 13) objetiva investigar se os estudantes conhecem outros números irracionais além daqueles que são "classicamente" estudados na educação básica.

Figura 13 – 8ª Questão da versão inicial do questionário.

8ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles que aparecem no quadro da questão 5? Caso conheça, dê algum exemplo.

Fonte: Elaboração própria.

3.3.2 Versão inicial do roteiro da entrevista

A versão inicial do roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio foi estruturado em nove perguntas, e teve por objetivo compreender as estratégias utilizadas e identificar os desafios e dificuldades enfrentadas pelos professores aos ensinar os números irracionais, como a abstração do conceito ou a resistência dos alunos ao aprendizado. Além disso, objetiva-se verificar quais recursos e materiais didáticos são utilizados pelos professores e como os professores conectam o conceito de números irracionais a situações práticas ou problemas do mundo real. A entrevista também tem o objetivo de investigar as percepções e atitudes dos professores em relação ao ensino dos números irracionais e a importância deste estudo para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

A Figura 14 traz a versão inicial do roteiro da entrevista.

Figura 14 – Versão inicial do roteiro da entrevista.

Roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

1) Como o(a) senhor(a) define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?
2) Quais estratégias o(a) senhor(a) utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?
3) Como o(a) senhor(a) aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas? O diagrama de Venn é utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos?
4) Qual sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?
5) Na sua opinião, qual a importância do livro didático no ensino dos números irracionais?
6) Quais são os principais desafios que o(a) senhor(a) enfrenta ao ensinar os números irracionais?
7) Como o(a) senhor(a) avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?
8) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?
9) Como o(a) senhor(a) conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações práticas? (Senos e cossenos, base do log natural, os próprios logaritmos, exponenciais de expoente racional, etc.)

Fonte: Elaboração própria.

3.3.3 Teste exploratório

Para identificar a possibilidade de ajustes no questionário proposto, foi realizado um teste exploratório em duas etapas.

Na primeira etapa, participaram alunos que estão cursando a disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro. Optou-se por este público alvo para a aplicação do teste, por serem, em tese, formandos do curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que esta disciplina é oferecida no 8º período do curso. Além disso, nesta disciplina de tópicos especiais são aprofundados diversos conteúdos matemáticos, sendo, portanto, um ambiente oportuno para a realização de discussões. Além disso, muitos destes licenciandos estão cursando a disciplina de Análise Matemática, cujo um dos principais objetivos é familiarizar os futuros professores com enunciados e demonstrações dos principais teoremas envolvendo os números reais. Em suma, esperava-se que os participantes deste teste exploratório tivessem um bom conhecimento acerca do tema, e que pudessem contribuir de forma satisfatória para o aprimoramento do questionário proposto.

A aplicação do teste ocorreu de forma presencial no dia 26 de março de 2024, iniciando-se às 10 horas e 40 minutos e com a participação de 9 (nove) licenciandos.

Neste encontro, o questionário foi apresentando e explicado pelo aplicador. Foi solicitado aos participantes que respondessem o questionário. Além disso, os participantes deveriam dar suas contribuições, verificando se as perguntas estão apropriadas e propondo adequações ao questionário que deverá ser aplicado em turmas do ensino médio.

A primeira questão do questionário, mostrada na Figura 15, tem por objetivo verificar se o estudante se recorda da representação por diagramas.

Figura 15 – Introdução e 1ª questão do questionário.

Questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio

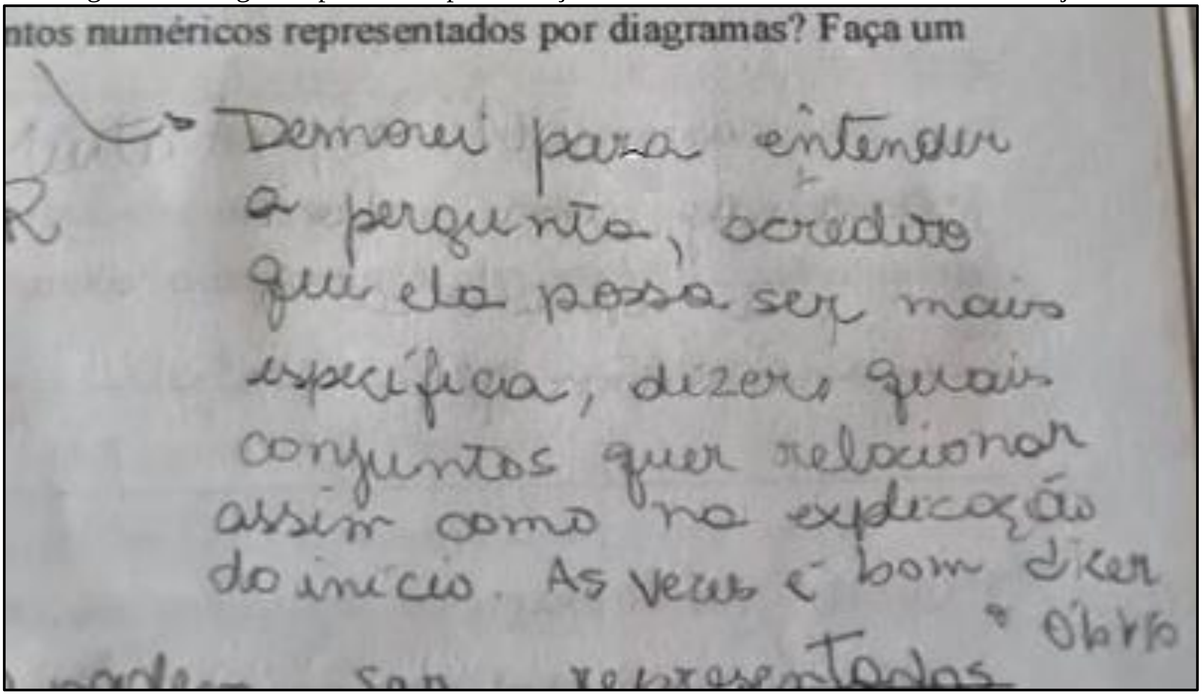
Você já estudou sobre os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros (Z), racionais (Q) e reais (IR) Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão – Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

Fonte: Elaboração própria.

Diante da análise das sugestões propostas, foi considerada pertinente a ilustrada na Figura 16 que se refere à complementação do enunciado com os símbolos dos conjuntos.

Figura 16 – Sugestão para a complementação do enunciado com os símbolos dos conjuntos.



ntos numéricos representados por diagramas? Faça um

Demorei para entender a pergunta, acredito que ela possa ser mais específica, dizer quais conjuntos quer relacionar assim como na explicação do início. As vezes é bom dizer

* Obrig

são representados

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 17 são mostradas a 2ª e a 3ª questão do questionário. A segunda questão teve por objetivo investigar se os alunos conhecem a definição de número irracional. E na terceira questão buscou-se verificar se o aluno faz alusão à razão entre inteiros

Figura 17 – 2ª e 3ª questão do questionário.

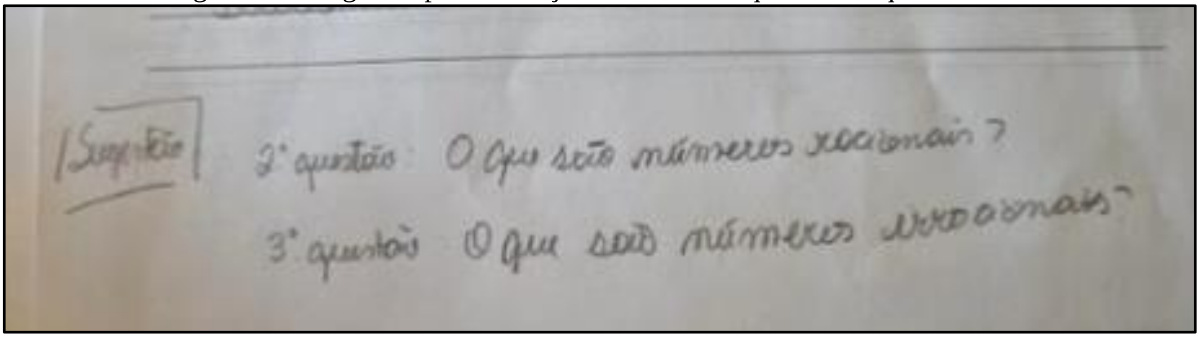
2ª Questão – O que são números irracionais?

3ª Questão - Qual a diferença entre números racionais e irracionais?

Fonte: Elaboração própria.

Dentre as várias sugestões para alteração destas questões, considerou-se pertinente a que sugeriu alterar o enunciado da segunda questão, que passaria a perguntar sobre os racionais e a terceira, sobre os irracionais (Figura 18). Fazendo-se estas alterações no questionário, foi considerado interessante pelo autor, fazer uma restrição com relação à definição dos números irracionais do tipo “Não vale responder que são os números reais que não são racionais”.

Figura 18 – Sugestão para alteração da 2ª e da 3ª questão do questionário.



Fonte: Elaboração própria.

Com relação às outras questões do questionário, não foram sugeridas alterações.

Dando continuidade ao Teste Exploratório, numa segunda etapa, foram escolhidos 5 (cinco) professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro para darem suas contribuições, verificando se as perguntas estão apropriadas e propondo adequações ao questionário que deverá ser aplicado em turmas do ensino médio e ao roteiro de entrevista dos professores regentes das turmas destes alunos.

Com relação ao questionário inicialmente proposto, foi sugerida a atualização do cabeçalho.

Figura 19 – Cabeçalho do questionário do Teste Exploratório.


INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

matemática LICENCIATURA

Curso: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA — 2023.2

Disciplina: TCC I — ORIENTADORA: CARLA

ORIENTANDO: LEONARDO CÔRREA DE CASTRO

TESTE EXPLORATÓRIO

Fonte: Elaboração própria.

Figura 20 – Cabeçalho do questionário para Aplicação.

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

matemática
LICENCIATURA

Curso: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA 2024.1

Disciplina: TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES

ORIENTANDO: LEONARDO CORRÊA DE CASTRO

APLICAÇÃO

Fonte: Elaboração própria.

Com relação a 1ª questão foram sugeridas as seguintes alterações: a) deixar bastante espaço para a resposta da questão; e b) dar um exemplo de representação por diagramas.

Figura 21 – 1ª Questão do questionário do Teste Exploratório.

TESTE EXPLORATÓRIO

Questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio - teste exploratório

Você já estudou sobre os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros (ℤ), racionais (ℚ) e reais (IR). Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão – Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

Fonte: Elaboração própria.

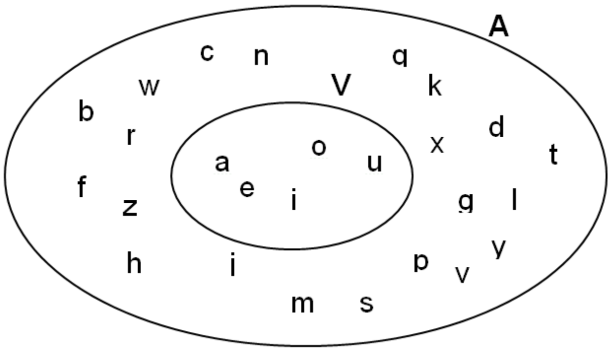
Como foi sugerido que as questões 5, 6, 7 e 8 deveriam ser as primeiras do questionário para aplicação, a 1ª questão do questionário do teste exploratório passou a figurar como questão 4 incorporando as alterações elencadas.

A 6ª questão do teste exploratório foi retirada para a aplicação, uma vez que o autor considerou interessante a retirada desta questão devido a diversas observações destacadas pelos professores.

Figura 22 – 4ª Questão do questionário para Aplicação.

4ª Questão – Em matemática, um conjunto é um grupo de objetos, chamados de elementos, que em geral possuem alguma característica em comum.

Por exemplo, o conjunto das vogais pode ser escrito como **V** = {a, e, i, o, u}, e o conjunto de todas as letras do alfabeto, por **A** = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}. Uma outra representação desses dois conjuntos, ressaltando que **V** está contido em **A**, é o que chamamos de representação por meio de diagramas. A figura a seguir ilustra como essa representação pode ser feita.



Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

Fonte: Elaboração própria.

Atendendo as sugestões dos professores no que se refere a alteração na ordem das questões, a 5ª questão do teste exploratório passou a figurar como a 1ª questão do questionário para aplicação. Esta questão tem por objetivo lembrar os alunos sobre o que são os números racionais e irracionais.

Figura 23 – 1ª Questão do questionário para Aplicação

APLICAÇÃO

Você já estudou os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros (ℤ), racionais (ℚ) e reais (IR). Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre os números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão - Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$		
$\sqrt{3}$		
$\sqrt[3]{125}$		
$\frac{\sqrt{5}}{2}$		
3,1416		
$1,1333\ldots = 1,1\underline{3}$		
π		
$\frac{4\pi}{3}$		

Fonte: Elaboração própria.

A 8ª questão do teste exploratório passou a figurar como 2ª questão do questionário para aplicação.

Figura 24 – 2ª Questão do questionário para Aplicação.

2ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles assinalados por você no quadro da questão 1? Caso conheça, dê algum(ns) exemplo(s).

____

____

Fonte: Elaboração própria.

Atendendo as sugestões dos professores, a 7ª questão passou a ser a terceira. Foi incluída a opção "(A) um número inteiro" e foi excluída a opção "(D) não me recordo de ter estudado a representação decimal de um número irracional".

Figura 25 – 7ª Questão do questionário do Teste Exploratório.

7ª Questão - Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.
(B) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma parte que se repete (a chamada dízima periódica).
(C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.

(D) não me recordo de ter estudado a representação decimal de um número irracional.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 26 – 3ª Questão do questionário para Aplicação.

3ª Questão - Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número inteiro.

(B) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.

(C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente (chamado de dízima periódica).

(D) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.

Fonte: Elaboração própria.

Foi sugerido no teste exploratório que a 2ª, 3ª e 4ª questões fossem reescritas, a fim de atenderem o objetivo de investigar se os alunos conhecem a definição de número irracional e a percepção dos alunos em relação à cardinalidade dos conjuntos, e se essa percepção é influenciada pela representação em diagramas. Estas questões passaram a figurar como 5ª, 6ª e 7ª questões do questionário para Aplicação.

Figura 27 – 2ª, 3ª e 4ª Questões do questionário do Teste Exploratório.

2ª Questão – O que são números irracionais?

3ª Questão - Qual a diferença entre números racionais e irracionais?

4ª Questão - Você acha que existem mais números racionais ou irracionais? Por quê?

Fonte: Elaboração própria.

Figura 28 – 5ª, 6ª e 7ª Questões do questionário para Aplicação.

5ª Questão – Na questão anterior, observou-se que o conjunto V está contido no conjunto A. Também há conjuntos numéricos que estão contidos em outros conjuntos numéricos, como por exemplo, o conjunto dos números irracionais, que está contido no conjunto dos números reais. Você se recorda o que são números irracionais?

____

____

6ª Questão - Da mesma forma que o conjunto dos números irracionais, o conjunto dos números racionais também está contido no conjunto dos números reais. Você saberia dizer qual a diferença entre números racionais e irracionais?

____

____

7ª Questão - Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

____

____

Fonte: Elaboração própria.

A versão inicial e a versão final do questionário elaborado encontram-se nos Apêndices A e B respectivamente.

Com relação ao roteiro de entrevista inicialmente proposto, os professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro escolhidos para participarem do Teste Exploratório deram as seguintes sugestões:

a) usar “você” ao invés de “senhor” e “senhora” e verificar se o conteúdo é lecionado pelo professor;
b) iniciar o roteiro de entrevista pela 2ª questão, para não passar a ideia de que se está querendo verificar se o professor sabe definir os números irracionais, conforme consta na 1ª questão;
c) separar as duas perguntas que constam na 3ª questão e acrescentar a seguinte pergunta com relação ao uso do diagrama de Venn para ensinar os conjuntos numéricos: “Se sim, utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?”;
d) contextualizar a pergunta da 4ª questão;
e) modificar a 5ª questão, fazendo a seguinte pergunta: “Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?”;

f) realocar a 6ª questão mais no início da entrevista, a fim de que o professor se sinta mais à vontade para responder as outras perguntas;

g) na 9ª questão perguntar "se" o professor faz essa conexão, ao invés de "como". Ainda na 9ª questão, perguntar se o professor "conecta o conceito dos números irracionais com alguma aplicação dentro da própria matemática ou fora dela". Excluir da 9ª questão os conteúdos que aparecem entre parênteses.

Figura 29 – Roteiro de entrevista do Teste Exploratório.

Roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

1) Como o(a) senhor(a) define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

2) Quais estratégias o(a) senhor(a) utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

3) Como o(a) senhor(a) aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas? O diagrama de Venn é utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos?

4) Qual sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

5) Na sua opinião, qual a importância do livro didático no ensino dos números irracionais?

6) Quais são os principais desafios que o(a) senhor(a) enfrenta ao ensinar os números irracionais?

7) Como o(a) senhor(a) avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

8) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

9) Como o(a) senhor(a) conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações práticas? (Senos e cossenos, base do log natural, os próprios logaritmos, exponenciais de expoente racional, etc.)

Fonte: Elaboração própria.

Figura 30 – Roteiro de entrevista para Aplicação referenciando o número das questões do Teste Exploratório.

Roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas? (2ª questão do teste exploratório)

2) Quais são os principais desafios que você enfrenta ao ensinar os números irracionais? (6ª questão do teste exploratório)

3) Como você define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio? (1ª questão do teste exploratório)

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas? (3ª questão do teste exploratório)

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos? (3ª questão do teste exploratório)

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos? (4ª questão do teste exploratório)

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais? (5ª questão do teste exploratório)

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais? (7ª questão do teste exploratório)

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais? (8ª questão do teste exploratório)

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam? (9ª questão do teste exploratório)

Fonte: Elaboração própria.

A versão inicial e a versão final do roteiro de entrevista encontram-se nos Apêndices C e D respectivamente.

3.3.4 Dinâmica da aplicação do questionário e das entrevistas com os professores regentes

A aplicação do questionário foi realizada em duas escolas da rede estadual de ensino de Campos dos Goytacazes – RJ. A escolha das escolas levou em consideração estarem ambas localizadas na área central da cidade e a disposição dos professores regentes em participarem da pesquisa respondendo a uma entrevista e disponibilizando um horário de aula para a aplicação do questionário. As duas escolas escolhidas doravante serão denominadas Escola A e Escola B. A aplicação do questionário ocorreu primeiro na Escola A. Nesta escola, participaram desta pesquisa alunos de 03 (três) turmas do primeiro ano do ensino médio, com professores regentes diferentes, denominados daqui em diante como Professor A, B e C. Chamaremos estas turmas de A1, A2 e A3 e os questionários foram aplicados nestas turmas nos dias 11, 12 e 14 de junho de 2024, respectivamente. Nestas datas também foram realizadas as entrevistas com os professores A, B e C. Na turma A1, 5 (cinco) alunos responderam o questionário; na turma A2, 37 alunos responderam o questionário; e na turma A3, o questionário foi respondido por 15 alunos. A aplicação do questionário foi realizada na Escola B no dia 25 de junho de 2024. Alunos de duas turmas da Escola B responderam o questionário. As duas turmas da Escola B, turma B1 e turma B2, tem o mesmo professor regente (Professor D), que respondeu a uma entrevista nesta mesma data, 25 de junho de 2024. Na turma B1, participaram 23 alunos; e na turma B2, o questionário foi respondido por 41 alunos. No total, participaram desta pesquisa, 57 alunos da Escola A e 64 alunos da Escola B.

Inicialmente, em cada turma, o pesquisador se apresentou aos alunos e explicou que a pesquisa fazia parte de um Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do IFF, e que os estudantes que participassem da pesquisa não seriam identificados, nem avaliados. O questionário foi apresentado e os alunos foram orientados no sentido de que as respostas fossem individuais. De modo geral, os alunos seguiram as instruções dadas e demonstraram interesse em participar da pesquisa.

3.3.5 Análise dos dados

Os dados provenientes da pesquisa de abordagem qualitativa necessitam de uma análise diferenciada em relação aos dados da pesquisa quantitativa que, muitas vezes, são analisados por meio de cálculos estatísticos. Miles e Huberman (1994) apresentam três etapas que geralmente são seguidas na análise de dados das pesquisas com abordagens qualitativas: redução, exibição e conclusão/verificação.

O processo de redução de dados envolve a seleção, simplificação e transformação dos dados coletados durante o trabalho de campo. Essa etapa, que começa no início do processo de análise, continua ao longo da redação do relatório final. Durante a redução, decisões importantes são tomadas sobre a codificação, agrupamento e organização das categorias, visando construir conclusões razoáveis e verificáveis de acordo com os objetivos originais da pesquisa (Miles; Huberman, 1994 *apud* Gil, 2008). Bardin (1979) também enfatiza a importância de organizar os dados coletados em categorias como um meio de condensar os dados em unidades que possam ser organizadas e interpretadas.

A exibição de dados envolve a organização dos dados selecionados de maneira que facilite a análise sistemática das semelhanças, diferenças e seus inter-relacionamentos. Essa apresentação pode incluir textos, diagramas, matrizes, e gráficos, proporcionando uma abordagem alternativa para organizar e analisar as informações. Durante esta etapa, é comum definir novas categorias de análise que vão além daquelas identificadas na redução dos dados (Miles; Huberman, 1994 *apud* Gil, 2008).

A terceira etapa do processo compreende a conclusão/verificação. A elaboração da conclusão requer uma revisão considerando o significado dos dados, suas regularidades, padrões e explicações. A verificação, intimamente ligada à elaboração da conclusão, requer revisões dos dados para assegurar a validade das conclusões emergentes. Nesse contexto, a validade significa que as conclusões obtidas dos dados são dignas de crédito, defensáveis, garantidas e capazes de suportar explicações alternativas (Miles; Huberman, 1994 *apud* Gil, 2008).

Esta pesquisa é caracterizada como uma investigação qualitativa, onde utilizou-se como referencial a análise de erros de Cury para o estudo das respostas fornecidas pelos alunos que participaram da pesquisa por meio da aplicação de um questionário. A metodologia de análise de erros é uma tendência da Educação Matemática que se baseia na análise de conteúdo desenvolvida por Bardin. Tanto Cury quanto Bardin buscam entender e interpretar informações qualitativas (Maciel, 2021). No caso de Cury, o foco está nos erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas matemáticos, enquanto a análise de conteúdo da Bardin oferece uma metodologia para a interpretação de qualquer tipo de material.

> A análise de conteúdo pode ser definida como um conjunto de técnicas de análise das comunicações que faz uso de procedimentos sistemáticos e objetivos com o intuito de descrever o conteúdo da mensagem (Bardin, 1979 *apud* Maciel, 2021, p. 93).

Cury (2019), antes de caracterizar sua metodologia de análise de erros, considera importante destacar uma frase de Laurence Bardin muito utilizada por pesquisadores que trabalham com análise de Conteúdo:

> A técnica de análise de conteúdo adequada ao domínio e ao objeto pretendidos, tem que ser reinventada a cada momento, exceto para usos simples e generalizados, como é o caso [...] de respostas a perguntas abertas de questionários cujo conteúdo é avaliado rapidamente por temas (Bardin, 1979, p. 31 *apud* Cury, 2019, p. 65).

A análise de erros de Cury é uma metodologia estruturada que classifica os erros cometidos pelos alunos em diferentes categorias, como erros conceituais, procedimentais ou de interpretação. A análise de erro pode ser utilizada como metodologia de ensino ou de pesquisa. Segundo Cury (2019), na análise das respostas dos alunos, o foco não está apenas no acerto ou erro – normalmente avaliados em uma prova –, mas nas maneiras como os alunos se apropriam de determinado conhecimento, que se revelam na produção escrita e podem indicar possíveis dificuldades de aprendizagem.

De acordo com Cury, o erro, muitas das vezes, é analisado apenas para criticar os estudantes ou o ensino ministrado, não se preocupando com as causas destes erros ou as possíveis formas de aproveitá-los para gerar mudanças (Maciel, 2021).

Ainda segundo Cury, os erros devem ser analisados buscando-se suas causas, origens, obstáculos e as concepções dos alunos em relação ao processo de ensino-aprendizagem. A análise de erros faz crítica à falta da verificação e do estudo dos acertos e erros cometidos pelos alunos nas atividades, pois cada resposta revela como o aluno pensa ou compreende determinado conteúdo. Dessa forma, a análise de erros deveria integrar os planos pedagógicos das instituições. No entanto, sua implementação enfrenta desafios, uma vez que uma avaliação, em muitos casos, é vista apenas como um instrumento de aprovação (Maciel, 2021).

Com relação aos dados obtidos nas entrevistas realizadas com os professores regentes utilizou-se a análise temática que é um método qualitativo usado para identificar, analisar e relatar padrões (ou "temas") dentro de dados. A noção de tema (categoria), largamente utilizada na análise temática, é característica da análise de conteúdo. Esse método é amplamente utilizado em pesquisas qualitativas, especialmente em entrevistas e questionários. O tema é geralmente utilizado como unidade de registro para estudar motivações de opiniões, de atitudes, de valores, de tendências, etc. (Bardin, 1979).

> O tema é a unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura (Bardin, 1979, p. 105).

4 **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

As próximas seções apresentam a análise dos resultados obtidos a partir da aplicação do instrumento de coleta de dados desenvolvido. Esta análise de resultados está fundamentada no referencial teórico adotado para este trabalho.

4.1. Análise dos Resultados dos Questionários Aplicados

Todo o processo de análise de erros e criação das categorias foi realizado de forma a encontrar conceitos não compreendidos pelos alunos. Assim, a Análise de Erros utilizada como metodologia de pesquisa pode nos fornecer respostas verificando se os alunos se apropriaram dos conteúdos, e também a metodologia de ensino dos professores.

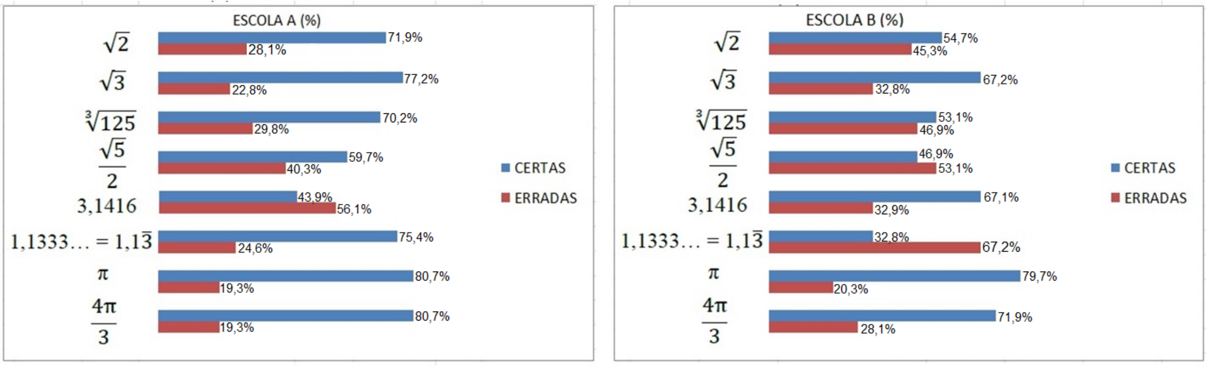
Segundo Cury (2019) para tentar interpretar os resultados da pesquisa, obtidos a partir da análise detalhada dos erros, é essencial começar com a seguinte questão: o que os alunos realmente quiseram expressar? Em outras palavras, o que suas produções escritas podem revelar, não apenas sobre o que eles não sabem, mas também sobre aquilo que eles de fato dominam?

Ressalta-se que, durante a aplicação do questionário, estavam presentes tanto o professor regente como o pesquisador. As turmas encontravam-se tranquilas, não era horário próximo à saída e, principalmente na escola A, observou-se empenho dos alunos ao responder as questões propostas. Relata-se também que os professores regentes tinham um bom relacionamento com os alunos, e que nenhum deles fez intervenções durante a aplicação, no sentido de auxiliar os estudantes nas respostas.

4.1.1 Análise da Questão 1

A primeira questão, dividida em oito itens, teve por objetivo verificar se os alunos reconhecem os principais números irracionais abordados na educação básica (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Respostas dos alunos para a primeira questão



Fonte: Elaboração própria.

Os números √2 e π são protótipos de números irracionais, aceitos e internalizados pelos alunos porque o professor, a autoridade em sala de aula, disse que são (Broetto, 2016, p. 207). Juntamente com √2 e π, a √3 é clássica no ensino dos números irracionais. Diante disso, boa parte dos alunos não tiveram dificuldades para identificá-los na primeira questão do questionário. Além desses números, a √5 foi incluída no questionário (na forma da fração $\frac{\sqrt{5}}{2}$) por se tratar de um número irracional menos explorado nos exemplos dos livros didáticos. Além disso, a forma de fração que aparece no questionário teve por objetivo verificar se os alunos entenderam o conceito e as operações que envolvem os números irracionais.

A representação por meio do radical (usando o símbolo √) é um atributo relevante dos números irracionais, mas não é uma condição necessária para que um número seja classificado como irracional. Considera-se esse atributo como um exemplo prototípico, influenciado pela ideia de que as raízes, especialmente as quadradas, são frequentemente os exemplos mais encontrados em livros didáticos da educação básica, junto com o π (Broetto, 2016).

Contudo, um problema recorrente no ensino dos números irracionais destacado por Bortolossi e Mózer (2016 *apud* Jesus; Oliveira, 2018) é considerar que √2 e √3 são iguais a 1,41 e 1,73, respectivamente. Esse tipo de consideração, frequentemente sugerida por livros didáticos ou professores, pode afastar os alunos da compreensão adequada do conceito de número irracional. Os alunos podem confundir 1,41 e 1,73, que são apenas uma aproximação com duas casas decimais, com √2 e √3, que são números irracionais, com infinitas casas decimais. Na Figura 31, o aluno classifica √2 e √3 como números racionais. Apesar deste tipo de resposta aparecer com menos frequência na aplicação do questionário (aproximadamente

28% e 23% na Escola A e 45% e 33% na Escola B, respectivamente), pode estar corroborando o problema destacado por Bortolossi e Mózer (2016).

Figura 31 – Aluno da Escola A classifica raízes quadradas como números racionais.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$	X	
$\sqrt{3}$	X	
$\sqrt[3]{125}$		X
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	X	
3,1416	X	
$1,1333\ldots = 1,1\overline{3}$		X
π		X
$\frac{4\pi}{3}$		X

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No caso da $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a presença de uma "fração" pode levar o aluno a pensar que esse número é racional (aproximadamente 40% na Escola A e 53% na Escola B). No entanto, o fato de estar escrito como uma fração não é um critério decisivo para determinar se um número é racional ou irracional. Isso, porque podemos representar números racionais como 1,1333..., que equivale à fração 17/15, da mesma forma que podemos expressar um número irracional, como π, na razão C/D, onde C é o comprimento e D é o diâmetro de uma circunferência (Broetto, 2016). Na Figura 32, o aluno classifica $\frac{\sqrt{5}}{2}$ como um número racional.

Figura 32 – Aluno da Escola A classifica $\frac{\sqrt{5}}{2}$ como um número racional apesar de considerar as raízes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{125}$ como números irracionais.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$		X
$\sqrt{3}$		X
$\sqrt[3]{125}$		X
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	X	
3,1416	X	
$1,1333\ldots = 1,1\overline{3}$	X	
π	X	
$\frac{4\pi}{3}$	X	

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O número racional 3,1416 é uma aproximação bastante utilizada do número π e a presença dele no questionário foi importante para verificar se os alunos realmente entendem o conceito de número irracional. Santos (2007 *apud* Jesus; Oliveira, 2018), em sua pesquisa sobre o ensino de números reais na Educação Básica, destaca algumas dificuldades na compreensão do conceito de número irracional. Ela ressalta a confusão entre as representações decimais 3,1416 e π (pi), a classificação equivocada de 3,1416 como um número irracional, e a tendência de confundir um número com sua aproximação, atribuindo a ambos o mesmo significado.

A imagem de π como protótipo de número irracional é tão forte que até algo que não é π, mas que remete a esse número, isto é, cuja representação é um truncamento da representação decimal de π, como o número 3,1416, pode ser considerado pelos alunos como um número irracional. Qual o motivo dessa associação? Normalmente os números irracionais são definidos como aqueles que não podem ser expressos como uma razão entre dois inteiros, e um dos principais exemplos de números irracionais que são mencionados é π. Numa etapa seguinte, é muito comum a apresentação de $\pi = 3{,}1415\ \ldots$, $\pi \sim 3{,}1416$ ou $\pi \sim 3{,}14$, o que acaba fixando e/ou reforçando as primeiras casas da representação decimal do número, como se pode observar em diversas questões de prova em que o enunciado sugere "use $\pi \sim 3{,}14$". Com o tempo, o significado das reticências se perde e, na mente do aluno, π pode até se tornar igual a 3,14 ou 3,1416 (Broetto, 2016).

Na Figura 33, podemos observar que o aluno classificou 3,1416 como número irracional. Os resultados relacionados ao número 3,1416 superaram todas as nossas expectativas. Embora tivéssemos previsto que parte dos alunos classificaria esse número como irracional, não esperávamos que aproximadamente 56% dos alunos da Escola A e 32% dos alunos da Escola B o fizessem. Isso reforça a suspeita de que alguns alunos apenas memorizam que π é irracional e associam erroneamente $\pi = 3{,}1416\ldots$, o que provavelmente os levou a considerar 3,1416 como irracional. Em outras palavras, uma completa falta de compreensão do conceito de número irracional, ou do número π, pelo menos.

Figura 33 – Aluno da Escola A classifica 3,1416 como número irracional.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$		X
$\sqrt{3}$		X
$\sqrt[3]{125}$	X	
$\frac{\sqrt{5}}{2}$		X
3,1416		X
$1{,}1333\ldots = 1{,}1\overline{3}$	X	
π		X
$\frac{4\pi}{3}$		X

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Contudo, Bortoletto (2008 *apud* Jesus, Oliveira, 2018) em sua pesquisa sobre as abordagens do ensino do número π, afirma que a maioria dos professores que introduzem π

no ensino fundamental não o definem como “número irracional”, mas sim como “número resultante de uma razão”. Por outro lado, os professores que ensinam π no 8ª ou 9ª ano do ensino fundamental o definem como “número irracional”. Essa forma de conduzir o estudo do π - primeiro como o número resultante da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, e depois como um número irracional - pode levar o aluno a acreditar que π pode ser expresso como a razão de dois números inteiros.

Na Figura 34, o aluno pode ter feito esta confusão ao definir π como número racional.

Figura 34 – O aluno da Escola A classifica π como número racional.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$		X
$\sqrt{3}$		X
$\sqrt[3]{125}$		X
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	X	
3,1416	X	
$1,1333\ldots = 1,1\overline{3}$	X	
π	X	
$\frac{4\pi}{3}$	X	

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A dízima periódica 1,1333..., que equivale à fração 17/15, foi considerada irracional por aproximadamente 24% dos alunos da Escola A e 67% dos alunos da Escola B, respectivamente (Figura 35). A associação da dízima com número irracional também foi detectada por Broetto (2016). O aluno pode não entender completamente o que caracteriza uma dízima periódica. Para alguns, a ideia de um número com uma parte decimal que se repete infinitamente pode parecer complexa, levando à interpretação errada de que ele é irracional simplesmente por ser infinito, ou não sabem que uma dízima periódica pode ser representada como uma fração, ou seja, é um número racional (Broetto, 2016).

Figura 35 – Aluno da Escola B classifica 1,1333... como número irracional.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$	X	
$\sqrt{3}$	X	
$\sqrt[3]{125}$	X	
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	X	
3,1416		X
$1{,}1333\ldots = 1{,}1\overline{3}$		X
π	X	
$\frac{4\pi}{3}$	X	

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com base no Gráfico 1 referente a 1ª Questão podemos analisar o desempenho geral entre as escolas:

Escola A: A maioria dos alunos acertou em várias das opções, com acertos variando de 44% a 80% por turma, sugerindo uma compreensão moderada a boa sobre a classificação de números.

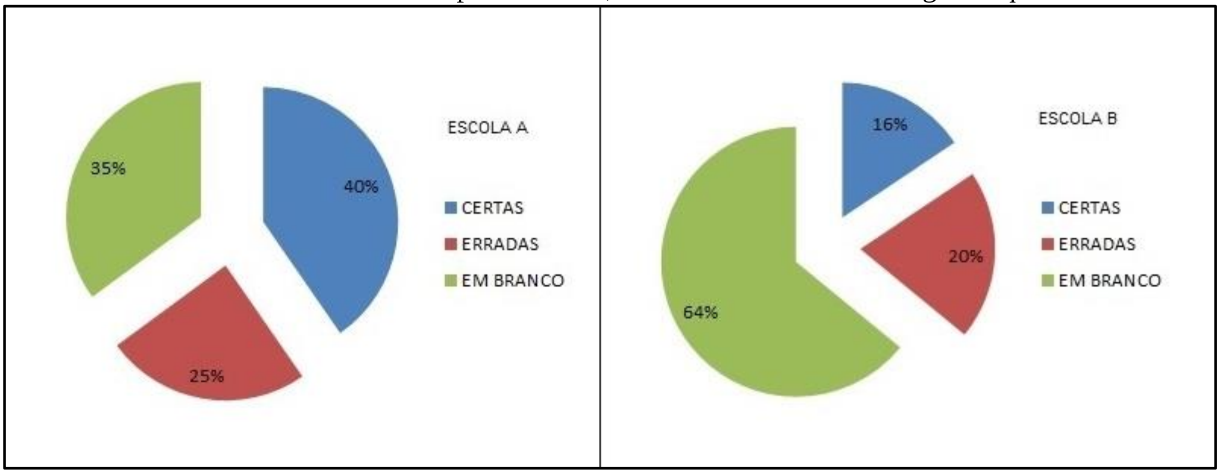
Escola B: Os resultados são um pouco mais variados, com acertos entre 32% e 79%. A maior variação reflete uma compreensão mais irregular sobre o conceito de racionais e irracionais.

Ao analisar os erros cometidos pelos alunos, podemos observar uma confusão entre raízes e irracionalidade, uma vez que muitos alunos parecem associar automaticamente raízes quadradas com números irracionais, sem distinguir quando a raiz resulta em um número racional (por exemplo, $\sqrt[3]{125}$). Podemos observar também dificuldades com números compostos, que envolvem operações mistas (como raízes e divisões, ou múltiplos de π) parecem gerar mais confusão, sugerindo que os alunos podem ter dificuldades em combinar conceitos matemáticos. Podemos observar ainda confusão com aproximações de irracionais: No caso de 3,1416, alguns alunos parecem confundir aproximações (que são números racionais) com o próprio número irracional (π). Na Escola B, a compreensão de dízimas periódicas parece ser particularmente problemática, com 67% das respostas erradas, o que sugere a necessidade de uma revisão mais detalhada sobre o conceito de racionais em forma decimal.

4.1.2 Análise da Questão 2

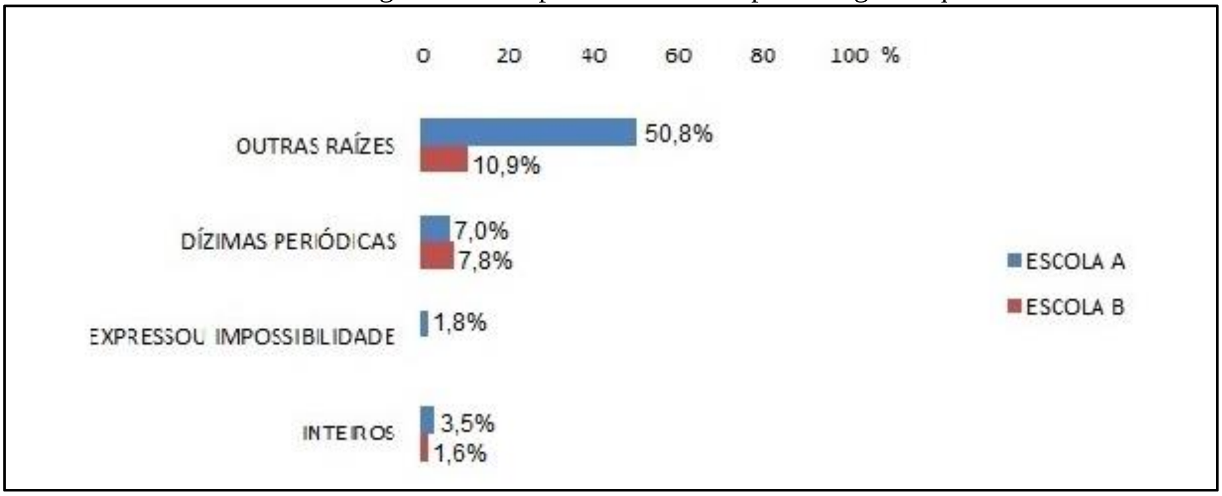
A segunda questão teve por objetivo investigar se os estudantes conhecem outros números irracionais além daqueles que são "classicamente" estudados na educação básica.

Gráfico 2 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na segunda questão.



Fonte: Elaboração própria.

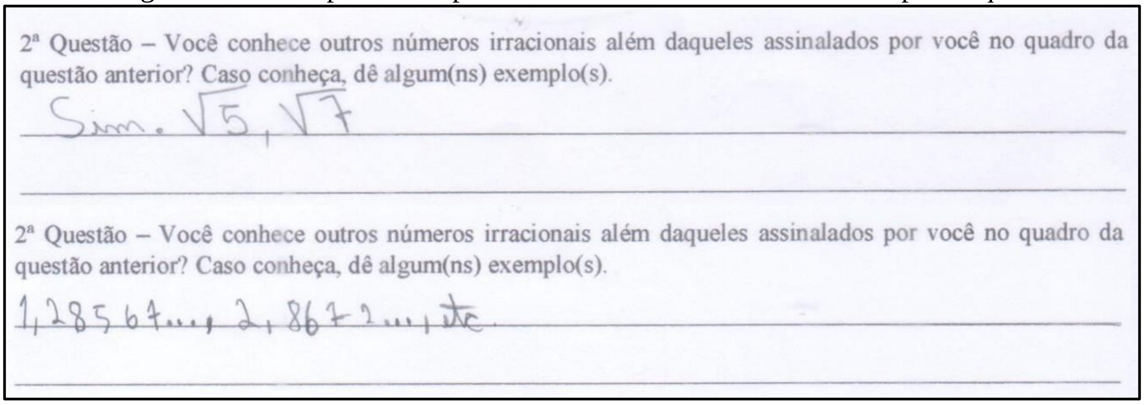
Gráfico 3 – Categorias das respostas dos alunos para a segunda questão.



Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão do questionário, apesar do grande número de respostas erradas e em branco (Gráfico 2), a maioria das respostas válidas foram raízes, principalmente as quadradas, e números com infinitas casas decimais representados pelo sinal de reticências, conforme ilustrado no Gráfico 3 e na Figura 36.

Figura 36 – Exemplos de respostas corretas de alunos da Escola A para a questão 2.


2ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles assinalados por você no quadro da questão anterior? Caso conheça, dê algum(ns) exemplo(s).

Sim. $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$

2ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles assinalados por você no quadro da questão anterior? Caso conheça, dê algum(ns) exemplo(s).

1,28567..., 2,8672..., etc.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com base no Gráfico 2 referente a 2ª Questão podemos analisar o desempenho geral entre as escolas:

Na Escola A, 40% dos alunos acertaram, enquanto na Escola B, apenas 16% conseguiram identificar corretamente números irracionais além dos fornecidos. Isso sugere que os alunos da Escola A têm um entendimento mais desenvolvido do conceito de números irracionais, ou que o ensino nesse tópico foi melhor abordado.

Na Escola A, 35% dos alunos deixaram a questão em branco, contra 64% na Escola B. É importante destacar que esses alunos tentaram de fato responder as questões, mas não conseguiram. O fato da maioria dos alunos da Escola B não terem conseguido responder a questão pode indicar uma lacuna mais profunda no conhecimento ou até mesmo falta de confiança sobre o que são números irracionais.

A maior porcentagem de respostas em branco e de erros na Escola B (totalizando 84%) em comparação à Escola A (60%) pode indicar dificuldades adicionais na compreensão de números irracionais na Escola B, seja pela metodologia de ensino aplicada ou por outros fatores, como material didático disponibilizado ou falta de base matemática dos alunos para compreenderem este tópico.

Com base no Gráfico 3, podemos observar que a maioria dos alunos da Escola A (50,8%) associou números irracionais a outras raízes, o que demonstra um esforço para relacionar a questão a conceitos conhecidos. Na Escola B, essa porcentagem cai para 10,9%, indicando que os alunos não dominam o conceito de números irracionais e não possuem conhecimento para tentar formular respostas relacionadas a outras raízes.

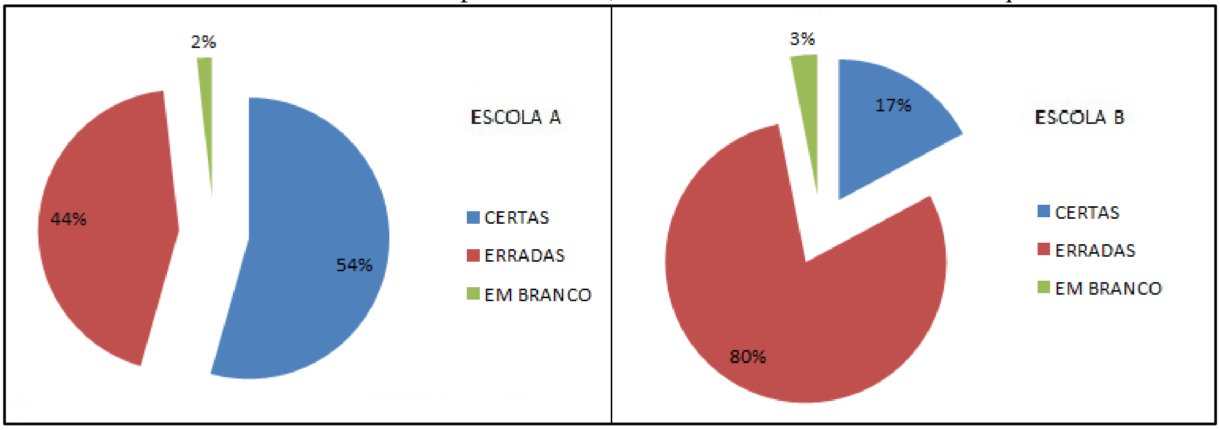
Diante do que foi observado nas primeiras questões do questionário, é importante discutir a necessidade e as consequências do arredondamento de um número com infinitas casas decimais e a aproximação de um irracional por racionais. Além disso, pode-se considerar o fato de que quando é realizado algum cálculo de raízes, utilizando-se, por exemplo, uma calculadora, este fica restrito a algumas poucas casas decimais, e este tipo de procedimento não contribui para a construção do conceito de número irracional, porque a representação infinita e não-periódica é um conceito abstrato, diferente do que os alunos consideram como número (Broetto, 2016).

4.1.3 Análise da Questão 3

A terceira questão teve por objetivo investigar se o aluno conhece a representação decimal de um número irracional.

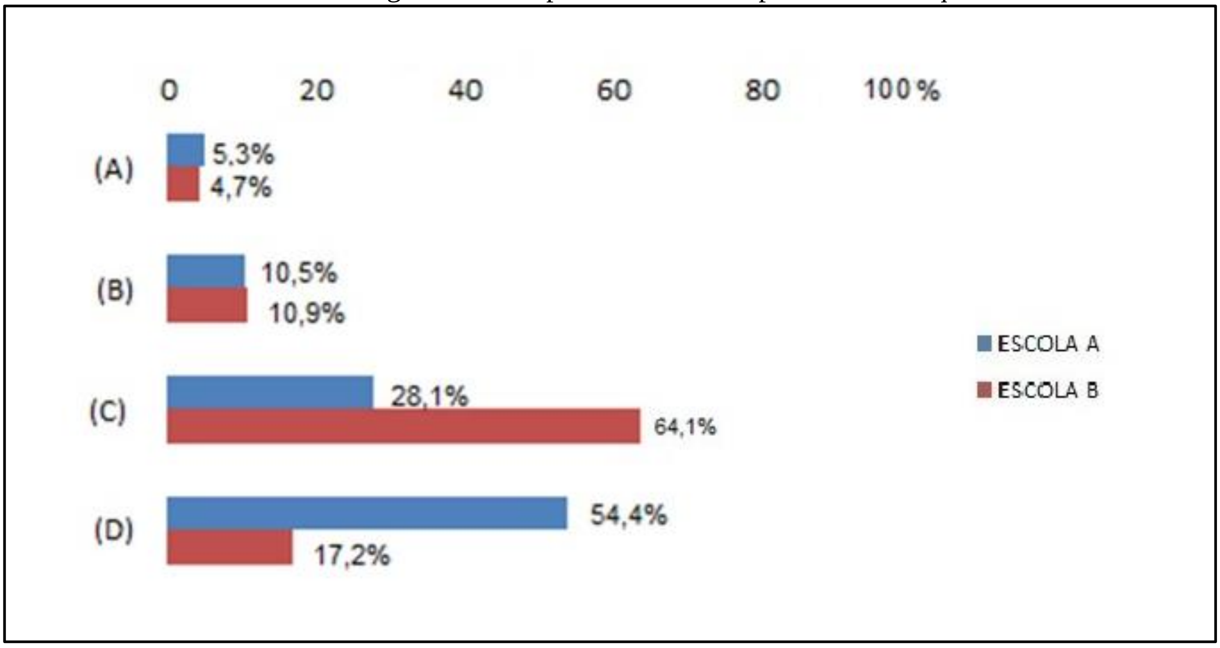
Pode-se observar também um grande número de respostas erradas na terceira questão (Gráfico 4), apesar dos livros didáticos trazerem o número irracional $\sqrt{2}$ como um número cuja representação decimal é infinita e não-periódica, mostrando que este conceito não foi bem assimilado por grande parte dos alunos.

Gráfico 4 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na terceira questão.



Fonte: Elaboração própria.

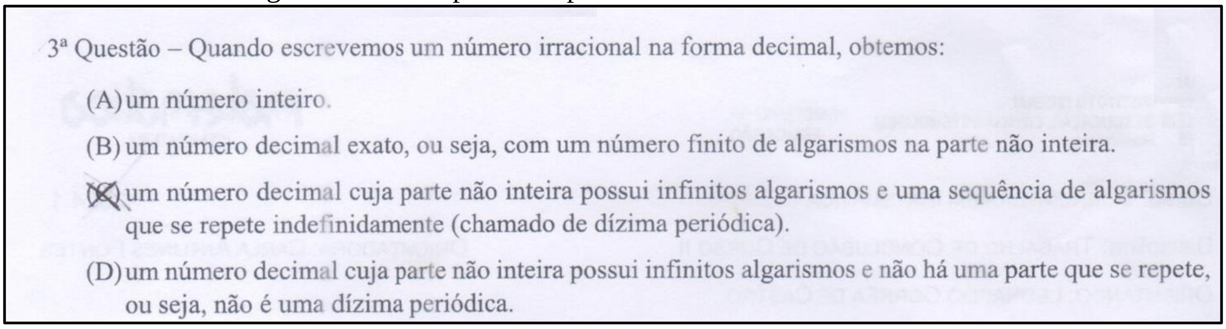
Gráfico 5 – Categorias das respostas dos alunos para a terceira questão



Fonte: elaboração própria

O que chama a atenção na terceira questão é o grande número de respostas erradas com relação à Escola B (Gráficos 4 e 5), onde aproximadamente 64% dos alunos responderam que “Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos (C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente (chamado de dízima periódica)”(Figura 37). Isto mostra que a maioria dos alunos da Escola B não compreendem o que caracteriza uma dízima periódica, nem o conceito de número irracional, o que já foi evidenciado na primeira questão, onde 67% dos alunos da Escola B consideraram a dízima periódica 1,1333..., que equivale à fração 17/15, um número irracional (vide Gráfico 1).

Figura 37 – Exemplo de resposta errada de aluno da Escola B.



3ª Questão – Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número inteiro.

(B) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.

(X) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente (chamado de dízima periódica).

(D) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Embora a Escola A tenha uma maior taxa de acertos, os erros ainda mostram uma falta de clareza em distinguir números decimais racionais e irracionais. A quantidade expressiva de alunos que escolheram a opção (C) (28,1%) sugere que é necessário um reforço na compreensão da diferença entre dízimas periódicas e números irracionais.

A Escola B apresenta desafios maiores, com 64,1% dos alunos escolhendo a alternativa (C). Essa confusão entre dízimas periódicas e números irracionais indica um erro conceitual, provavelmente decorrente de um processo de ensino/aprendizagem insuficiente ou inadequado sobre o tema. A porcentagem de respostas em branco, embora baixa, reflete que uma pequena parcela de alunos não souberam responder, possivelmente por não entenderem o conteúdo.

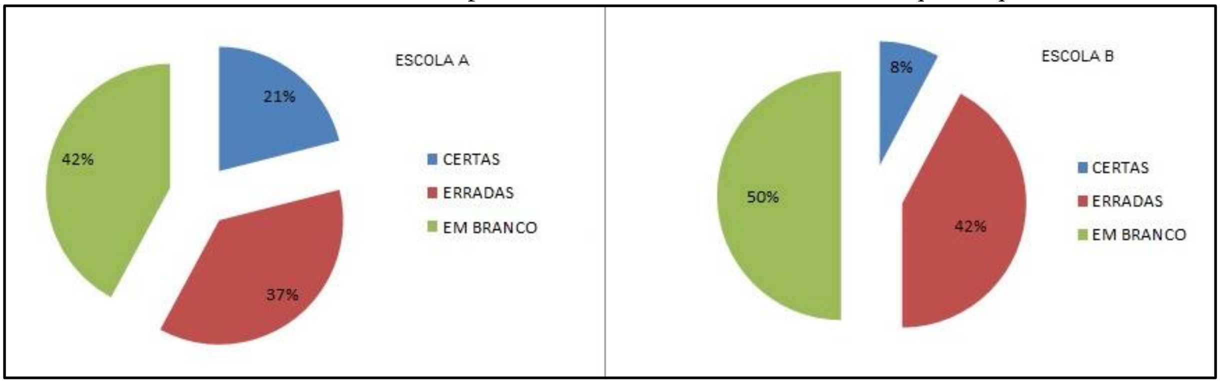
4.1.4 Análise da Questão 4

Na questão quatro buscou-se verificar se os alunos haviam compreendido a representação dos conjuntos numéricos utilizando o diagrama de Venn para demonstrar as relações de inclusão.

Os Diagramas de Venn, desenvolvidos pelo matemático John Venn (1834-1923), consistem de um modelo de diagramas para representar um conjunto com auxílio de uma linha fechada, não-entrelaçada e seus pontos internos. A representação de conjuntos por meio deles difere das outras maneiras de representar conjuntos por sua propriedade semiótica e a facilidade na representação (Santos, 2022).

Contudo, os diagramas de Venn, por sua natureza, são mais adequados para conjuntos finitos e suas interseções. Quando aplicados a conjuntos infinitos, como os números racionais e irracionais, sua eficácia diminui significativamente. Isso ocorre porque o Diagrama de Venn não é adequado para representar conjuntos infinitos, uma vez que pode suscitar impressões errôneas sobre a cardinalidade de cada conjunto (Almeida, 2015).

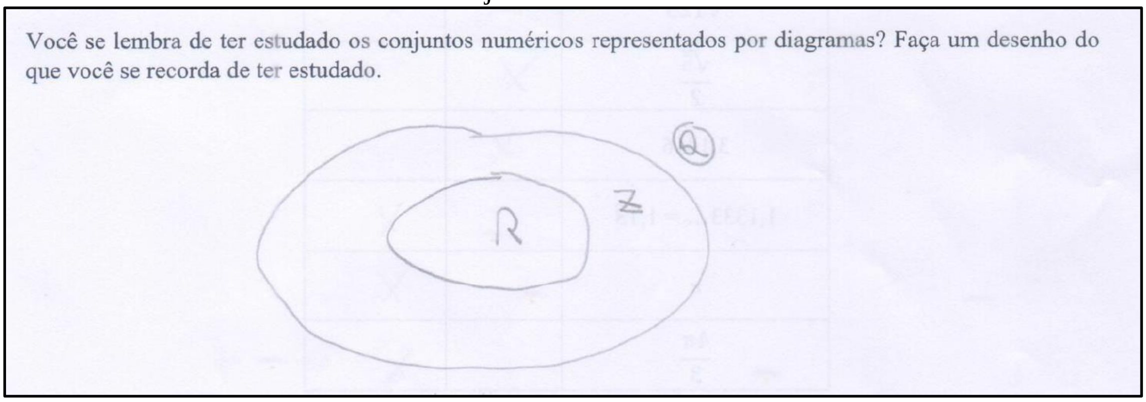
Gráfico 6 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na quarta questão.



Fonte: Elaboração própria.

Pode-se observar, nos questionários aplicados, que o diagrama de Venn, apesar da sua simplicidade, não está cumprindo o seu papel, uma vez que apenas uma pequena porcentagem dos alunos conseguiu acertar a representação (Gráfico 6). Pode-se inferir que os respondentes não conhecem a relação de inclusão entre os conjuntos numéricos. Um exemplo pode ser observado na Figura 38.

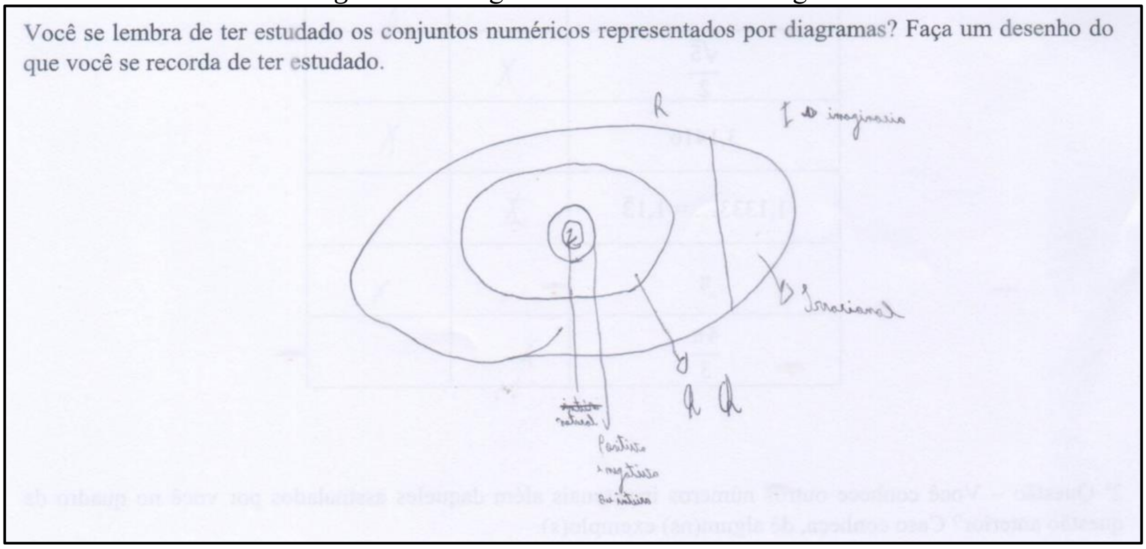
Figura 38 - Diagrama de Venn elaborado por aluno da Escola A com representação de inclusão dos conjuntos numéricos errada.


Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Houve um aluno da Escola A que mencionou números “imaginários” em seu diagrama, apesar de estar no primeiro ano do Ensino Médio (Figura 39).

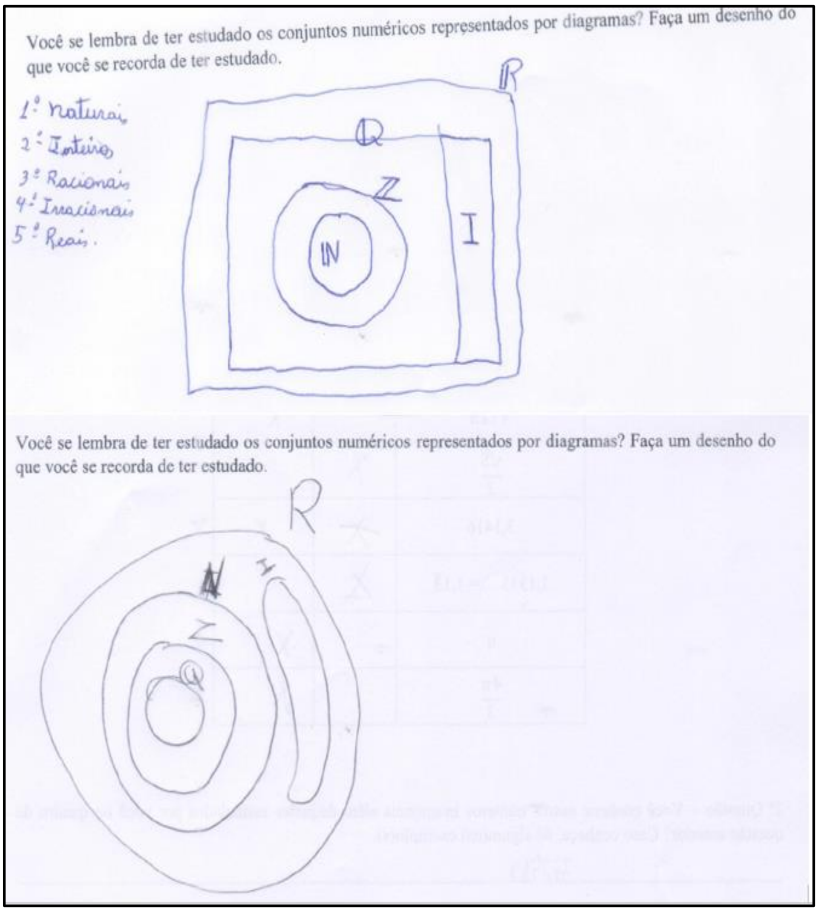
Figura 39 - Diagrama com números "imaginários".



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na Figura 40, podemos observar que aparecem números reais que não são nem racionais, nem irracionais. Notou-se que essa foi uma situação bastante comum entre os respondentes da Escola A.

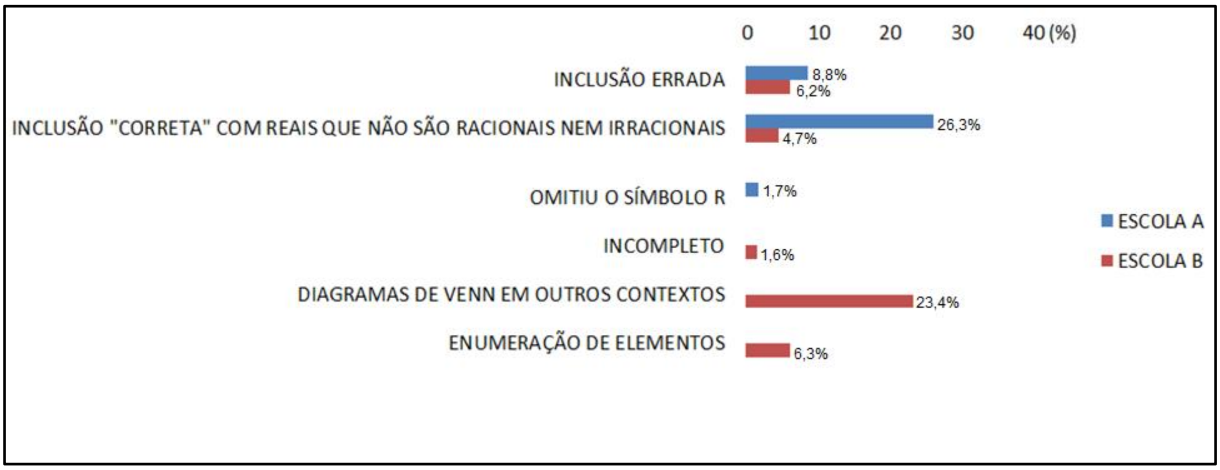
Figura 40 - Diagramas de Venn elaborados por alunos da Escola A, com números reais que não são racionais e nem irracionais.



Fonte: Protocolo de pesquisa

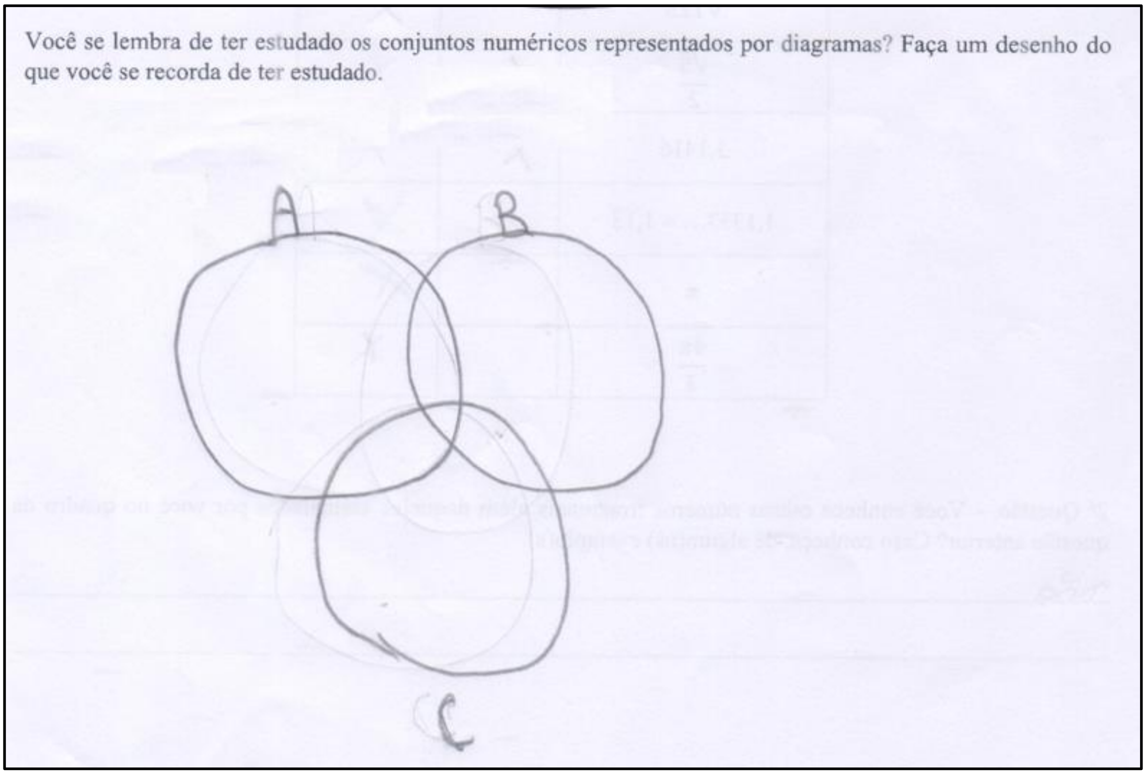
Contudo, o que mais chamou a atenção foi o elevado número de respostas de estudantes da Escola B com o Diagrama de Venn em outro contexto, aproximadamente 23% (Gráfico 7).

Gráfico 7 – Categorias de respostas para a representação dos Conjuntos Numéricos por Diagrama de Venn.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 41 - Diagrama de Venn elaborado por aluno da Escola B com representação do Diagrama de Venn em outro contexto.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A Escola A teve uma taxa de acertos de aproximadamente 21%, enquanto a Escola B apresentou apenas 8%. Isso indica que os alunos da Escola A possuem um melhor entendimento ou lembrança da representação dos conjuntos numéricos por diagramas de Venn. No entanto, ambas as escolas mostram um baixo índice de acertos, sugerindo que esse conceito foi tratado de forma superficial ou que os alunos não compreenderam adequadamente o conteúdo.

A taxa de erro é considerável em ambas as escolas, com 37% na Escola A e 42% na Escola B. A predominância de erros reflete uma dificuldade significativa dos alunos em compreender ou lembrar a representação de conjuntos numéricos, mostrando que talvez haja a necessidade de aulas de reforço para que os alunos possam compreender este conteúdo.

O percentual de respostas em branco foi alto em ambas as escolas: 42% na Escola A e 50% na Escola B. A resposta em branco pode indicar que os alunos não lembram o conteúdo ou um ensino deficiente. A grande quantidade de respostas em branco sugere que esse conteúdo específico precisa ser mais bem trabalhado em sala de aula.

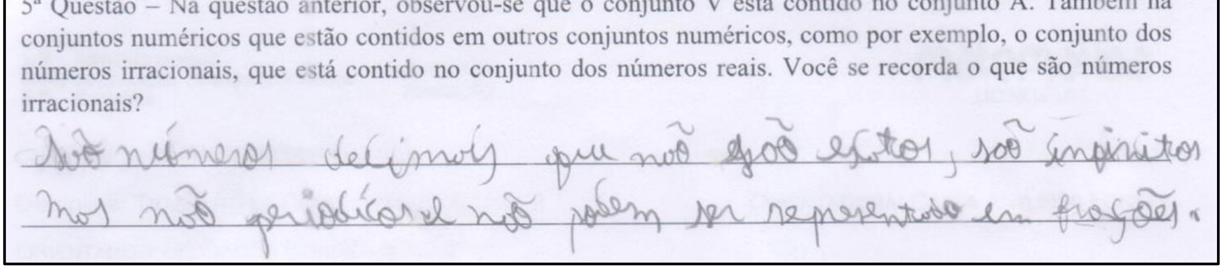
Na Escola B, 23,4% dos alunos fizeram as representações por meio de diagramas de Venn, mas aplicados a outros contextos que não o de conjuntos numéricos. Esse erro indica que os alunos compreendem a estrutura dos diagramas de Venn, mas não sabem aplicá-los corretamente aos conjuntos numéricos.

4.1.5 Análise da Questão 5

A quinta questão teve por objetivo investigar se os alunos conhecem a definição de número irracional.

A dificuldade com os números irracionais começa já na sua introdução. Geralmente, eles são apresentados aos alunos como números não racionais, ou seja, números que não podem ser expressos como a razão de dois inteiros, ou como números com infinitas casas decimais não periódicas (Figura 42).

Figura 42 – Resposta de aluno escola B.



5ª Questão – Na questão anterior, observou-se que o conjunto V está contido no conjunto A. Também há conjuntos numéricos que estão contidos em outros conjuntos numéricos, como por exemplo, o conjunto dos números irracionais, que está contido no conjunto dos números reais. Você se recorda o que são números irracionais?

São números decimais que não são exatos, são infinitos mas não periódicos e não podem ser representados em frações.

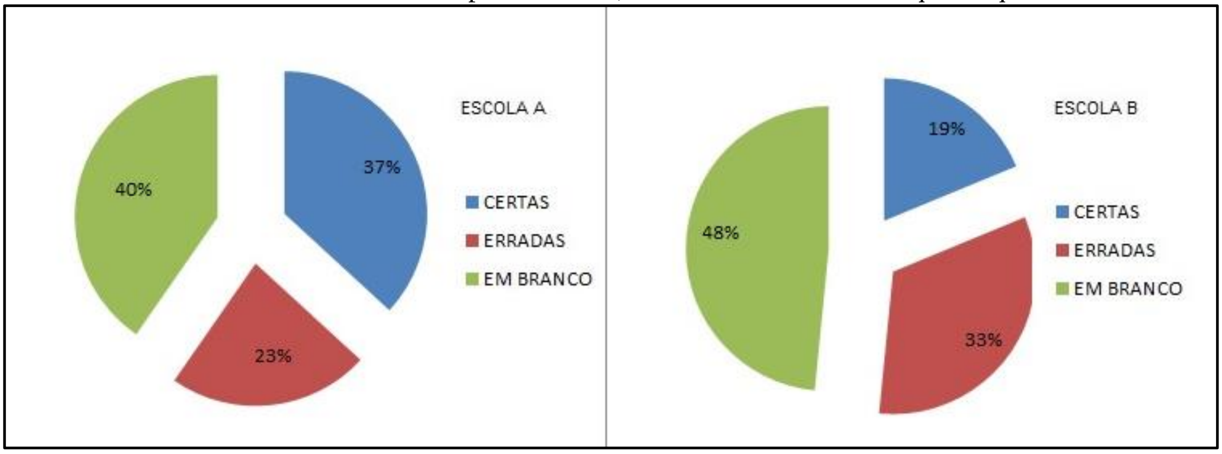
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Moreira e David (2010 *apud* Jesus; Oliveira, 2018) destacam esse problema, argumentando que se o universo numérico dos alunos ainda se restringe ao conjunto dos números racionais, nenhuma dessas caracterizações faz sentido. Quando não se entende o que significa uma forma decimal infinita e não periódica, também não se compreende o que é um número irracional e vice-versa. Da mesma forma, se a concepção escolar de número está ligada à ideia de uma razão de inteiros, os irracionais não são considerados números, pois não podem ser expressos dessa forma. Por fim, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais, fechando assim um ciclo de inconsistências sem esclarecer o significado de considerar os irracionais como números ou o sentido que essa nova categoria de números pode ter.

> Ora, se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado. Quando não se sabe o que significa uma forma decimal infinita não periódica, também não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, na sua acepção mais ampla, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais não são números, já que não são razões de inteiros. Trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam (Moreira; David, 2010, p. 82 *apud* Cury; Vianna, 2012, p. 52).

Corroborando com o que nos dizem Moreira e David (2010), podemos observar no Gráfico 8 que a maioria dos estudantes não conhecem o conceito de número irracional.

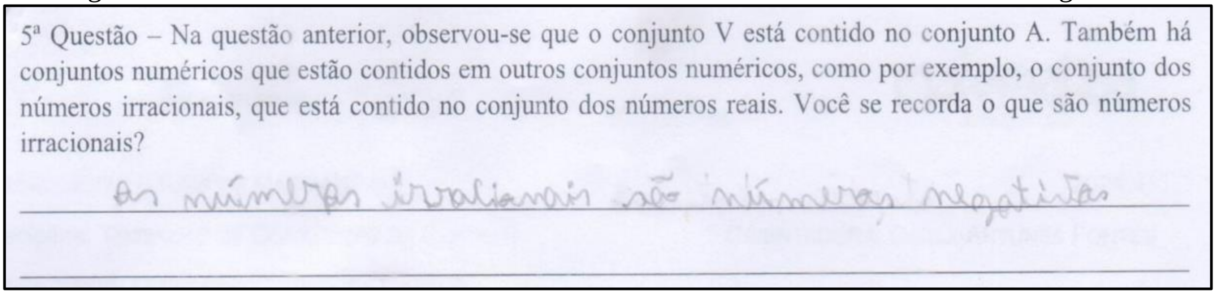
Gráfico 8 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na quinta questão.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 43, um aluno da Escola A define os números irracionais como sendo negativos.

Figura 43 – Confusão de aluno entre o conceito de números irracionais e números negativos.


5ª Questão – Na questão anterior, observou-se que o conjunto V está contido no conjunto A. Também há conjuntos numéricos que estão contidos em outros conjuntos numéricos, como por exemplo, o conjunto dos números irracionais, que está contido no conjunto dos números reais. Você se recorda o que são números irracionais?

Os números irracionais são números negativos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na Escola A, 23% dos alunos erraram, enquanto na Escola B a taxa de erro foi de 33%. O percentual significativo de erros em ambas as escolas mostra que o conceito de números irracionais é pouco compreendido. Essa dificuldade pode ser resultado de um ensino mais superficial ou de pouca ênfase neste conteúdo.

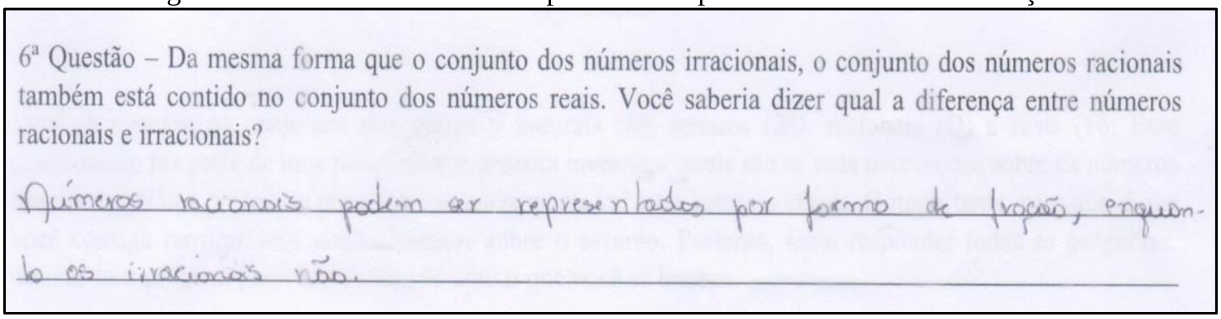
Na Escola A, 40% dos alunos deixaram a questão em branco, enquanto na Escola B esse número foi ainda maior, com 48%. O fato de uma parcela tão significativa dos alunos não responder à questão pode ser indicativo de insegurança ou desconhecimento em relação ao conceito de números irracionais.

4.1.6 Análise da Questão 6

A sexta questão teve por objetivo verificar se os alunos faziam alusão à razão entre números inteiros ao definir números racionais.

Na Figura 44, conforme esperado, o aluno responde que os números racionais podem ser representados na forma de fração, enquanto os irracionais não.

Figura 44 – Os números racionais podem ser representados na forma de fração.


6ª Questão – Da mesma forma que o conjunto dos números irracionais, o conjunto dos números racionais também está contido no conjunto dos números reais. Você saberia dizer qual a diferença entre números racionais e irracionais?

Números racionais podem ser representados por forma de fração, enquanto os irracionais não.

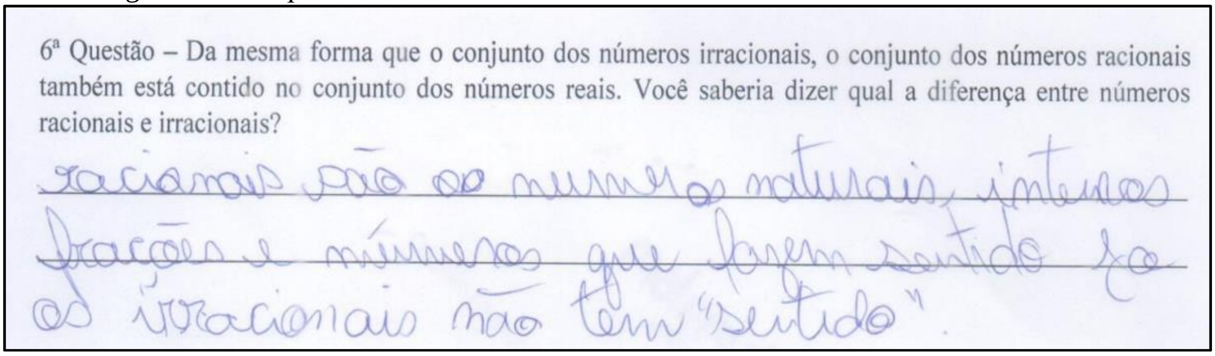
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Contudo, conforme Gomes e Queiroz (2023), o desenvolvimento do conceito de números irracionais pode ser um desafio para os alunos. Em um estudo com alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental, Kindel e Frant (2015, *apud* Gomes; Queiroz, 2023) observaram que os estudantes viam o conjunto dos números reais como desnecessário, pois, para os alunos, os números eram basicamente os racionais, com alguns poucos exemplos de irracionais, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π.

Conforme nos dizem Garcia, Fronza e Soares (2005 *apud* Jesus, Oliveira, 2018), os números irracionais não existem no mundo concreto. São abstrações matemáticas que só pertencem ao mundo das ideias. Para aceitá-los, é necessário imaginar processos infinitos e aproximações que tendem a zero.

Corroborando com o que nos dizem Garcia, Fronza e Soares (2005), Moreira e David (2010), Kindel e Frant (2015), Jesus e Oliveira (2018) e Gomes e Queiroz (2023), na Figura 45 um aluno define os números racionais como números que fazem sentido, e os irracionais como números que não tem "sentido".

Figura 45 – Resposta de aluno da Escola A: os números irracionais não tem “sentido”.

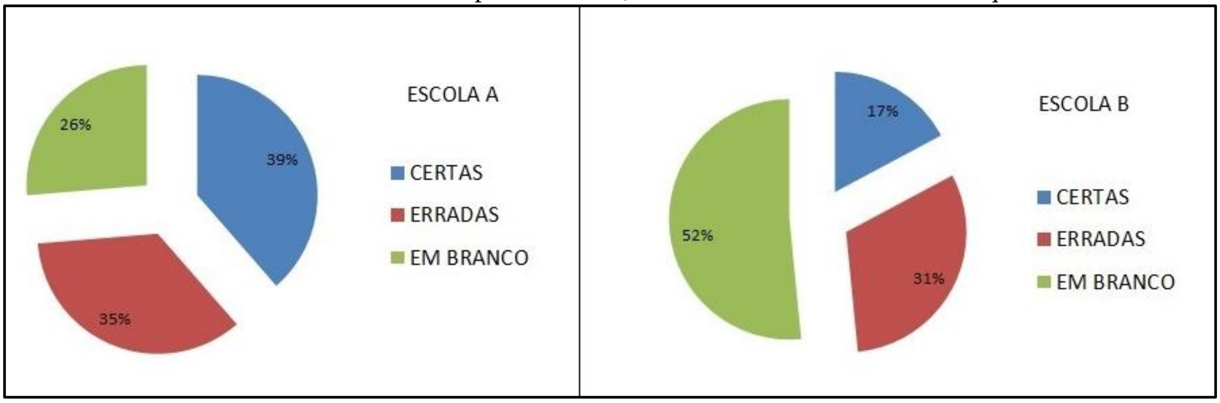


6ª Questão – Da mesma forma que o conjunto dos números irracionais, o conjunto dos números racionais também está contido no conjunto dos números reais. Você saberia dizer qual a diferença entre números racionais e irracionais?

racionais são os numeros naturais, inteiros frações e números que fazem sentido já os irracionais não tem "sentido".

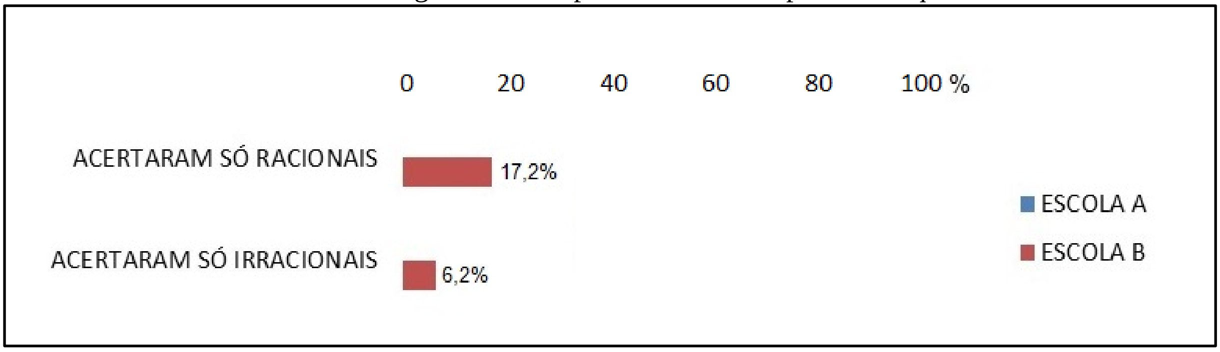
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Gráfico 9 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na sexta questão.



Fonte: Elaboração própria.

Gráfico 10 – Categorias das respostas dos alunos para sexta questão.



Fonte: Elaboração própria.

Observando os Gráficos 9 e 10 podemos observar a diferença de desempenho entre as escolas:

Na escola A, 39% dos alunos acertaram a questão, indicando que uma parcela significativa dos alunos compreende a diferença entre números racionais e irracionais. Porém, 35% erraram, o que ainda representa um percentual significativo, e 26% deixaram a questão em branco. Esses alunos provavelmente não tinham nenhuma compreensão e optaram por não arriscar uma resposta.

Na escola B: Apenas 17% acertaram a questão, o que indica uma maior dificuldade nessa escola em comparação à Escola A. O percentual de erros também é significativo, com 31% de respostas erradas e 52% deixaram a questão em branco, o que revela uma maior falta de conhecimento sobre o assunto nessa escola. 17,2% acertaram apenas os números racionais, demonstrando que esses alunos conhecem o conceito de números racionais, mas não entendem a diferença quando comparados aos irracionais.

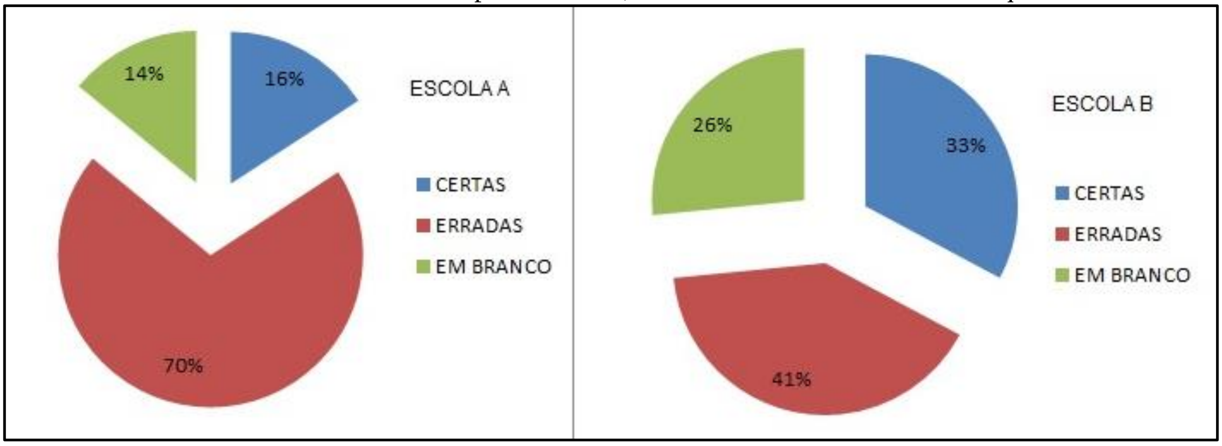
Os alunos que deixaram a questão em branco, especialmente em maior número na Escola B, podem não ter entendido o conceito nem de números racionais nem de irracionais, o que sugere uma lacuna no ensino. A categoria "acertaram só racionais" e "acertaram só irracionais" revela uma compreensão fragmentada. Esses alunos têm um conhecimento parcial, mas não conseguem fazer a distinção clara entre os dois tipos de números.

Essa diferença de desempenho entre as escolas pode ser influenciada por diversos fatores, como o método de ensino utilizado ou o tempo dedicado pelo professor ao conteúdo.

4.1.7 Análise da Questão 7

A questão sete teve por objetivo verificar a percepção dos alunos em relação à cardinalidade dos conjuntos, e investigar se essa percepção é influenciada pela representação em diagramas.

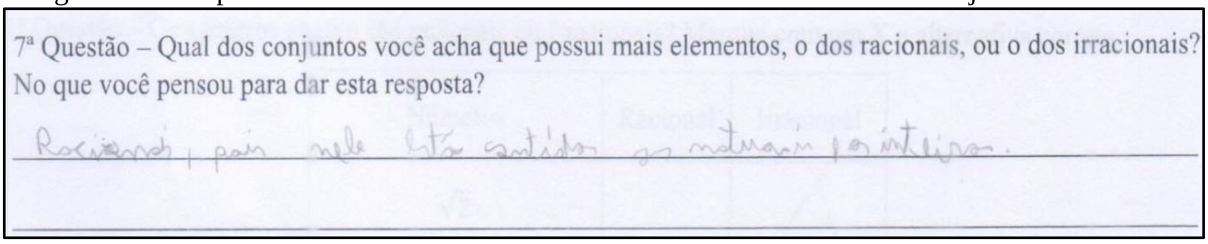
Gráfico 11 – Percentual de respostas certas, erradas e em branco na sétima questão.



Fonte: Elaboração própria.

Considerando o elevado número de respostas erradas dos estudantes da Escola A (70%) e da Escola B (41%) na sétima questão (Gráfico 11), e tendo como exemplos as respostas que aparecem nas Figuras 46 e 47, podemos observar que a representação por diagramas de Venn não permite ao aluno perceber a relação de cardinalidade entre os conjuntos numéricos.

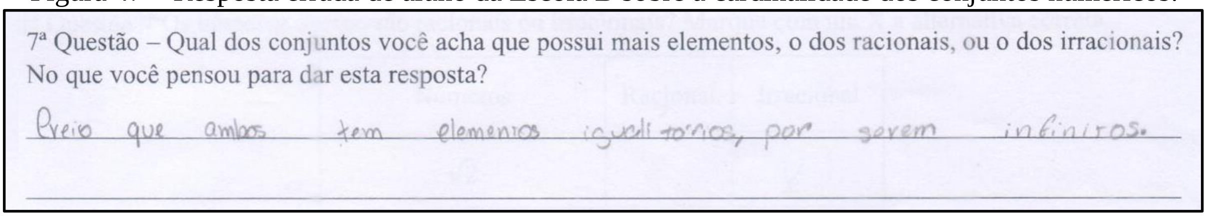
Figura 46 – Resposta errada de aluno da Escola A sobre a cardinalidade dos conjuntos numéricos.


7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

Racionais, pois neles estão contidos os naturais e os inteiros.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 47 – Resposta errada de aluno da Escola B sobre a cardinalidade dos conjuntos numéricos.


7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

Creio que ambos tem elementos igualitários, por serem infinitos.

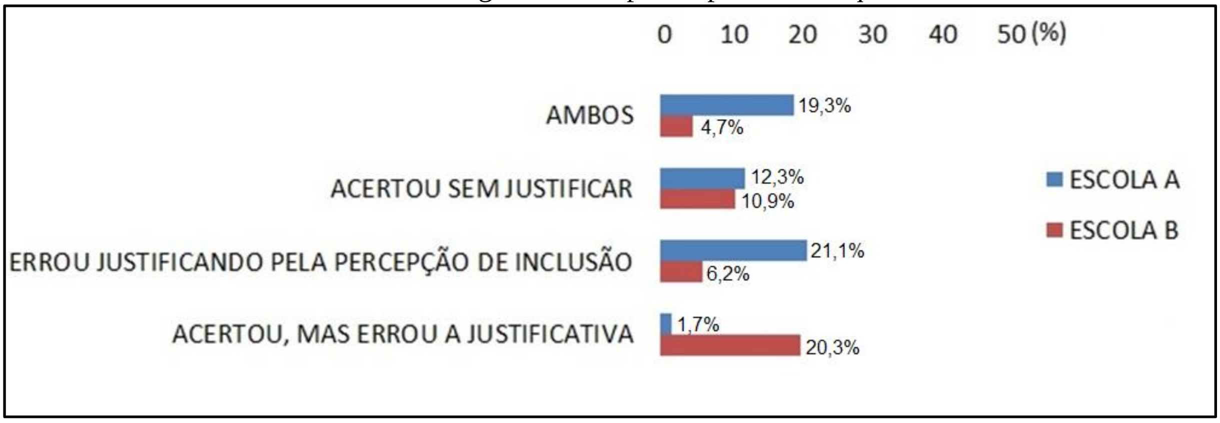
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Alguns alunos não conseguem distinguir entre infinitos contáveis (racionais) e incontáveis (irracionais), o que resulta na resposta errada de que os conjuntos são iguais em quantidade de elementos (Figura 47).

> Cantor [...] desenvolveu o conceito da aritmética dos números transfinitos[8], demonstrando rigorosamente que nem todos os infinitos possuiriam o mesmo "tamanho". Foi constatado, por exemplo, que o conjunto dos números irracionais possui mais elementos que o conjunto dos números racionais (Gomes; Queiroz, 2023, p. 21).

A compreensão de diferentes tipos de infinitos pode ser um desafio abstrato que requer uma maior atenção por parte dos professores.

Gráfico 12 – Categorias de respostas para sétima questão.

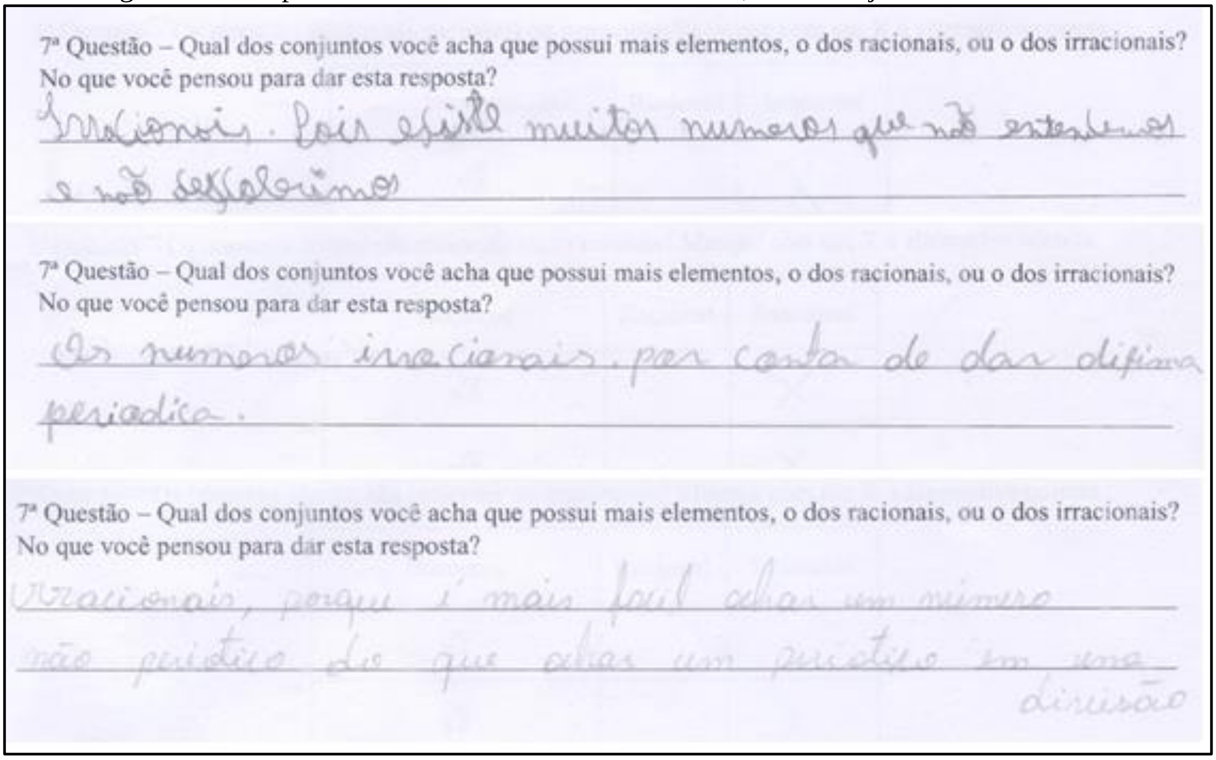


Fonte: Elaboração própria.

Com relação aos alunos da Escola B, podemos observar que muitos acertaram a resposta da questão, mas erraram a justificativa (Gráfico 12), conforme ilustrado na Figura 48.

[8] Números transfinitos ou cardinais transfinitos foi um sistema criado por Cantor para simbolizar a cardinalidade (o "tamanho") de conjuntos infinitos (Lorin, 2018 *apud* Gomes; Queiroz, 2023, p. 21).

Figura 48 – Respostas certas de estudantes da Escola B, mas com justificativas erradas.


7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

Irracionais. Pois existe muitos numeros que não entendemos e não [illegible]

7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

Os numeros irracionais, por conta de dar dízima periodica.

7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

Irracionais, porque é mais facil achar um número não periódico do que achar um periódico em uma divisão

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Analisando o Gráfico 12, podemos observar que aproximadamente 1,7% dos alunos da escola A acertaram a questão, mas erraram na justificativa. Com relação à escola B, temos um percentual significativo, 20,3% dos alunos acertaram a resposta, mas forneceu justificativas incorretas. Este grupo de alunos, exemplificado na Figura 48, mesmo compreendendo que os irracionais são mais numerosos, ainda não domina completamente o conceito de infinito e de cardinalidade. Eles precisam de uma explicação mais aprofundada sobre a natureza dos números irracionais e sua relação com os racionais.

4.1.8. Sugestões de intervenções didáticas

Uma análise detalhada dos erros, segundo o método de Cury, revela onde estão as lacunas no entendimento e permite sugerir intervenções didáticas para minimizar tais deficiências:

> Como base nas sugestões para uso dos erros, destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas (Cury, 2019, p.84)

Seguem, portanto, sugestões de intervenções didáticas que podem ser realizadas a partir das respostas dos alunos a cada questão proposta.

Questão 1

Trabalhar a relação entre raízes e racionalidade, com atividades que explorem exemplos de raízes quadradas e cúbicas que resultam em números racionais e irracionais, poderia ajudar os alunos a distinguir melhor esses conceitos.

Explicar mais claramente o significado de uma aproximação (como 3,1416) em comparação com o número irracional (π) podem reduzir a confusão.

Particularmente em relação à Escola B, é importante revisar o conceito de dízimas periódicas como números racionais, com a apresentação de exemplos e exercícios de fixação.

Questão 2

Trabalhar de forma mais clara a diferença entre números racionais e irracionais, com exemplos e resolução de exercícios.

Trabalhar atividades colaborativas, nas quais os alunos possam discutir o conteúdo em grupo, pode aumentar a confiança dos alunos para tentar responder as questões, diminuindo, com isso, o número de respostas em branco.

> O trabalho em grupo propicia trocas de experiências entre os alunos e favorece a construção do conhecimento. Pesquisas como a de Santos (1993), que estudou vários pesquisadores que focalizaram na aprendizagem que acontece quando alunos estudam e exploram temas matemáticos ao trabalhar em pequenos grupos (2 a 4 alunos), mostram que os alunos aprendem uns com os outros (Broetto, 2016, p. 235).

Ressalta-se que na Escola A parece existir uma abordagem no ensino que permite maior associação com raízes irracionais, mas seria interessante revisar o ensino sobre dízimas periódicas e números inteiros para evitar confusões.

Faz-se ainda necessário investigar mais profundamente as causas da alta taxa de respostas em branco na Escola B. Talvez seja interessante realizar a revisão do conteúdo e propor atividades que incentivem a participação, gerando mais confiança para os alunos.

Questão 3

Seria proveitoso dedicar mais tempo ao ensino da diferença entre dízimas periódicas e números irracionais, cuja representação decimal é infinita e não-periódica;

A alta taxa de erro na Escola B, especialmente com a alternativa (C), sugere que os alunos precisam de atividades mais direcionadas para corrigir essa dificuldade, como exercícios de fixação que ajudem aos alunos a identificar, classificar e comparar números racionais e irracionais.

Questão 4

Revisar os conteúdos referentes aos conjuntos numéricos.

Realização de atividades que envolvam a construção e interpretação de diagramas de Venn, deixando claro para os alunos que os diagramas de Venn são apropriados apenas para representar conjuntos finitos. Quando se trabalha com conjuntos numéricos infinitos, o diagrama de Venn não é fiel à realidade, uma vez que suscita impressões errôneas sobre a cardinalidade de cada conjunto.

> O diagrama de Venn [...] pode induzir alunos à formação de concepção incorreta sobre a ampliação dos campos numéricos (Corbo, 2012, p. 156).

Questão 5

Tanto na Escola A quanto na Escola B, seria importante reforçar o ensino dos números irracionais, com atividades que expliquem claramente o que são e como se diferenciam de outros conjuntos numéricos, especialmente dos números racionais e inteiros. Exemplos práticos e exercícios de comparação entre esses conjuntos podem ajudar a fixar o conteúdo.

Questão 6

Abordar o conceito de números racionais e irracionais de forma mais clara, fazendo listas de exercícios que permitam aos alunos a diferenciação entre esses conjuntos.

Questão 7

Trabalhar o conceito de cardinalidade: as aulas poderiam incluir atividades que explorem a diferença entre conjuntos infinitos contáveis e incontáveis, com foco no conceito de cardinalidade.

Trabalhar a relação entre os conjuntos numéricos, revisando os subconjuntos dos números reais e como eles se relacionam.

4.2. Análise das Entrevistas com os Professores Regentes

A análise dos resultados das entrevistas foi conduzida com base na análise temática, uma abordagem que permite identificar padrões significativos nos dados coletados. Utilizando essa metodologia de pesquisa, as respostas dos professores regentes foram cuidadosamente examinadas, buscando-se palavras-chave ou palavras-tema que refletissem os aspectos mais importantes das falas.

O processo de análise envolveu a leitura das transcrições das entrevistas, destacando termos recorrentes que se relacionavam com o objetivo da pesquisa. As palavras-chave identificadas foram agrupadas em categorias temáticas, que ajudaram a estruturar a interpretação dos dados.

Com base nas palavras-chave ou palavras-tema selecionadas, foi possível analisar as respostas das entrevistas, permitindo o entendimento de como os professores abordam as suas práticas educacionais, bem como os desafios e as estratégias adotadas em sala de aula.

4.2.1 Transcrição editada da entrevista com o Professor A

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

O Professor A explicou que estão enfrentando um problema relacionado a uma redução significativa do número de aulas de matemática no ensino médio. Explicou que ministra aulas também para o 9º ano do ensino fundamental, e que o primeiro semestre inteiro foi dedicado para ensinar os números irracionais. Disse que no primeiro ano do ensino médio é feita uma revisão dos conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, até chegar aos números irracionais. Disse que foram ministradas quatro aulas sobre o conteúdo referente aos números irracionais (para a turma do primeiro ano do ensino médio na qual está sendo realizada esta aplicação). Disse que utiliza a geometria para ensinar os números irracionais, aplicando o teorema de Pitágoras para calcular a diagonal do quadrado de lados unitários. Disse que conta a história da evolução dos números racionais até o surgimento dos números irracionais.

Palavras-chave ou palavras-tema: Retomada, Geometria, História, Tempo em sala.

2) Quais são os principais desafios ao ensinar os números irracionais?

O Professor A explicou que o conteúdo é muito abstrato e fora da realidade dos alunos. Disse que os alunos não conseguem compreender que existem infinitos números irracionais entre dois números inteiros. Disse que os alunos ficam “viajando”, que acham isso um absurdo. Salientou que não realiza demonstrações formais, como a prova de que a raiz quadrada de 2 é irracional.

Palavras-chave ou palavras-tema: Abstrato, Fora da realidade, Não faz demonstração.

3) Como você define os números irracionais para os alunos do Ensino Médio?

O professor A explicou que define os números irracionais como números decimais infinitos e não periódicos. Disse que explica que os números irracionais são o contrário dos racionais. Destaca que eles não se enquadram na definição de números racionais ($\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}\ /\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$).

Disse que no ensino das raízes, fala sobre as raízes que não são exatas. Além disso, menciona exemplos como o número irracional pi (π) e o número de Euler (e).

Palavras-chave ou palavras-tema: Decimais infinitos não periódicos, Não são racionais, Exemplos.

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas?

O Professor A explicou que os números irracionais são abordados quando é feita a revisão dos conjuntos numéricos no primeiro ano do ensino médio. São mostrados os números racionais que existem: naturais, inteiros, decimal exato, infinito periódico. Disse que os irracionais são apresentados como os números que sobram: decimais infinitos não periódicos. Salientou que os números irracionais são estudados, sem que seja feita a sua demonstração formal.

Palavras-chave ou palavras-tema: Revisão, Números que sobram, Decimais infinitos não periódicos, Sem demonstração.

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?

O Professor A respondeu que começa enumerando os conjuntos numéricos: primeiro os Naturais, depois os Inteiros. Com relação aos Racionais disse que apresenta a definição ($\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}\ /\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$). Disse que no final faz um resumo utilizando do diagrama de Venn. Disse que tenta explicar para os alunos que esta representação, utilizando do diagrama de Venn, é para mostrar que um conjunto está contido no outro, e que um não é maior, nem menor do que o outro. Disse que também utiliza a reta numérica para ensinar os números irracionais. Destacou que os alunos acham complicado entender que entre dois números inteiros existem infinitos números racionais e irracionais.

Palavras-chave ou palavras-tema: Diagrama de Venn, Reta numérica.

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de

Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

O Professor A disse que os alunos acham que o conjunto dos números naturais é menor que o conjunto dos números inteiros, que por sua vez é menor que o conjunto dos números racionais ($\mathbb{N}<\mathbb{Z}<\mathbb{Q}$). Disse que tenta mostrar que o diagrama de Venn tem a função de mostrar a relação de inclusão, de que um conjunto está contido no outro.

Palavras-chave ou palavras-tema: Relação de inclusão.

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?

O Professor A explicou que o livro didático é utilizado, mas disse que existem problemas com relação à quantidade de livros disponibilizados para distribuição. Disse que estão utilizando a Coleção Prisma Matemática, da Editora FTD, e que tem como autores: Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo Câmara.

Palavras-chave ou palavras-tema: Utiliza livro didático, Problema distribuição Livro Didático.

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

O professor A afirma que os alunos acham o conteúdo muito abstrato.

Palavras-chave ou palavras-tema: Abstrato.

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

O Professor A considera o estudo dos números irracionais importante para aplicações em geometria plana, geometria espacial e no cálculo de área.

Palavras-chave ou palavras-tema: Geometria plana, Geometria Espacial, Cálculo de área.

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam?

O Professor A disse que os conjuntos numéricos deveriam ser bem trabalhados no ensino fundamental: no sexto ano são estudados os números naturais; no sétimo ano são estudados os números inteiros; no oitavo ano são estudados os números racionais; e no nono ano é feita uma revisão dos conjuntos numéricos estudados nos anos anteriores e são estudados os números irracionais e reais. Disse que no primeiro ano do ensino médio, trabalha e cobra questões envolvendo os conjuntos numéricos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Questões conjuntos numéricos.

4.2.2 Transcrição editada da entrevista com o Professor B

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

O Professor B explicou que trabalha com a definição e depois parte para os exemplos dos números irracionais, devido à questão do tempo em sala de aula.

Palavras-chave ou palavras-tema: Definição, Exemplos, Tempo em sala.

2) Quais são os principais desafios que você enfrenta ao ensinar os números irracionais?

O Professor B explicou que os alunos, geralmente, acham que os números têm que ser inteiros. Quando eles começam a ver números com vírgulas, principalmente estes que não tem uma periodicidade, eles ficam apavorados. Disse que explica aos alunos que os números irracionais têm aplicação, e que inclusive são os números que mais aparecem no nosso cotidiano. Disse que fez engenharia e os números irracionais aparecem nos cálculos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Dificuldade com decimais, Dificuldade c/ não periódicos.

3) Como você define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

O Professor B explicou que vem na linha de raciocínio explicando os números racionais, que são aqueles que podem ser colocados sobre a forma de fração, (então define os números irracionais como) aqueles que não podem ser colocados na forma de fração e também são considerados dízimas não periódicas, vão ser conjuntos infinitos, mas não vão ter um período. Disse que fala sobre o número pi (π), mas eles não questionam, (os alunos) aceitam tranquilamente.

Palavras-chave ou palavras-tema: Não são frações, Dízimas não periódicas, Exemplos.

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas?

O Professor B explicou que utiliza o diagrama de Venn para mostrar que a união dos números racionais com os irracionais vai dar os números reais. Disse que faz esta explicação pelo diagrama de Venn.

Palavras-chave ou palavras-tema: Diagrama de Venn

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?

O Professor B disse que utiliza o diagrama de Venn e que utiliza a forma tabular para os números naturais ($\mathbb{N}$ ={1,2,3,4,5,6,...}), e para os números inteiros ($\mathbb{Z}$ ={...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}), disse que, além disso, não faz outro tipo de representação.

Palavras-chave ou palavras-tema: Diagrama de Venn, Forma tabular.

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

O Professor B disse que observa que o diagrama de Venn torna mais fácil a visualização dos conjuntos numéricos para os alunos. Disse que o desenho do diagrama de Venn facilita aos alunos visualizarem quando um conjunto está contido no outro. Salientou que trabalha com as relações de se um número pertence, ou não pertence a um conjunto, se um conjunto está contido ou não em outro conjunto. Disse que não faz referência a questão da cardinalidade dos conjuntos numéricos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Relação de inclusão, Relação de pertencimento.

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?

O Professor B explicou que utiliza o livro didático para pegar exercícios. Disse que normalmente trabalha com o seu próprio material de ensino. Disse que já preparou uma apostila ao longo do tempo em que leciona. Disse que utiliza nas aulas o livro didático e seu próprio material. Disse que os livros didáticos trazem o quadrado de lado unitário com a diagonal medindo $\sqrt{2}$ e aproveita para estudar geometria, a fim de os alunos terem um entendimento melhor. Salientou que a maioria dos autores trabalha com a $\sqrt{2}$ para introduzir o conceito de número irracional. Disse que não são todos os autores que trabalham com o número pi (π).

Palavras-chave ou palavras-tema: Utiliza livro didático e material próprio.

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

O Professor B disse que os alunos compreendem quando está trabalhando com os exercícios, mas não tem certeza se eles enxergam os números irracionais com uma aplicação para a vida. Disse que explica aos alunos que eles vão ver os números irracionais quando forem estudar cálculos matemáticos em engenharia. Disse que em cálculo de estrutura, o engenheiro não pode jamais fazer aproximações no início do cálculo, por que quando chegar ao final, o resultado final nunca vai representar a realidade, porque foram feitas muitas aproximações durante os cálculos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Exercícios.

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

O Professor B disse que o estudo é importante, visto que são números que aparecem muito mais do que os números naturais e inteiros no nosso dia a dia. Salientou que os alunos têm uma enorme dificuldade de localizar os números irracionais na reta numérica.

Palavras-chave ou palavras-tema: São mais numerosos, dificuldade de compreensão.

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam?

O Professor B disse que, além da engenharia, os números irracionais têm aplicação em estatística.

Palavras-chave ou palavras-tema: Engenharia, Estatística.

4.2.3 Transcrição editada da entrevista com o Professor C

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

O Professor C explicou que no contexto do primeiro ano do ensino médio, os alunos apresentam defasagem no aprendizado, por diversos motivos, fazendo-se necessário a retomada do estudo dos conjuntos numéricos, a partir dos números naturais, inteiro, racionais, com o estudo das frações, até os irracionais. Disse que apresenta o contexto histórico. Disse que utiliza o diagrama de Venn, relacionando a ideia de pertencimento e de está contido e não está contido. No estudo os números irracionais, aparecem números que não seguem um padrão. Destacou que até o estudo dos números racionais, temos números que conhecemos o seu fim, com um determinado número de casas decimais, ou um padrão que se repete. No estudo dos números irracionais, disse que apresenta o número de ouro, da sequência de Fibonacci, e que naturalmente surgem as raízes e vai definindo a ideia dos números irracionais.

Palavras-chave ou palavras-tema: Defasagem, Retomada, História, Exemplos.

2) Quais são os principais desafios que você enfrenta ao ensinar os números irracionais?

O Professor C explicou que os alunos não tem muito domínio sobre radiciação. Então se for utilizar como exemplo $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$, não é tão intuitivo como parece. Disse que por esse motivo, decidiu definir bem os outros conjuntos numéricos, até os racionais, para justamente sobrar esses números que não tem um padrão, que são diferentes, para os alunos chegarem à ideia desses números muito mais pela forma em que eles se apresentam, pela característica principal deles em si, do que pelo conceito da raiz, do que pelo conceito da constante pi (π). Para explicar o número pi (π) é necessário dar uma aula de geometria. Salientou que os alunos da Escola A apresentam uma defasagem que dificulta o aprendizado dos números irracionais, e o que serviria de parâmetro ($\sqrt{2}$ ou pi (π)) é uma coisa abstrata.

Palavras-chave ou palavras-tema: não é intuitivo, não tem padrão, defasagem, abstrato.

3) Como você define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

O Professor C disse que os seus alunos apresentam uma grande defasagem na aprendizagem, e que diante disso, define os números irracionais pelo que eles não são. Disse que conceituar os números irracionais pelo que eles são, mostrando exemplos de raízes, acaba criando mais barreiras ao aprendizado. Disse que prefere o caminho da exclusão, no qual os números irracionais são aqueles que não se enquadram na definição dos números naturais, inteiros, e racionais. Destacou que o que sobra são os números irracionais.

Palavras-chave ou palavras-tema: caminho da exclusão, não são racionais.

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas?

Respondido na questão anterior.

Palavras-chave ou palavras-tema: caminho da exclusão, não são racionais.

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?

O Professor C disse que utiliza o diagrama de Venn porque ele torna mais claro a relação de pertencimento, ainda assim causa dúvidas, do tipo: como o número 2 que pertence ao conjunto dos números naturais também é inteiro. Disse que utiliza outra aplicação do diagrama de Venn, fazendo demonstrações utilizando materiais concretos, como caixa de papelão, caixa de sapato, latinha e lápis. Disse que para demonstrar a relação de pertencimento utilizando exemplos concretos, realiza atividades nas quais coloca um lápis dentro de uma latinha, que é colocada dentro de uma caixa de sapatos, que por sua vez, é colocada dentro da caixa maior. Disse que a maioria dos professores utiliza o diagrama de Venn, que parece ser mais intuitivo do que a reta numérica, embora a reta numérica tenha o seu valor. Disse que utiliza a reta numérica na parte final do conteúdo, mas não dá muita ênfase nela. Salientou que a reta numérica ajuda no ensino dos naturais e dos racionais, permitindo mostrar que entre 0 e 1 existem números. Destacou que para a relação de pertencimento é melhor utilizar o diagrama de Venn. Disse que não sofreu influência do livro didático para a utilização do diagrama de Venn.

Palavras-chave ou palavras-tema: Diagrama de Venn, Demonstrações concretas, Reta numérica.

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

O Professor C disse que o diagrama de Venn tem um impacto positivo, uma vez que o conjunto dos naturais é menor que os inteiros, e assim sucessivamente (relação de inclusão).

Palavras-chave ou palavras-tema: Impacto positivo, relação de inclusão.

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?

O Professor C disse que utiliza muito pouco o livro didático como embasamento teórico. Disse que existe um problema com relação à distribuição do livro didático. Disse que livro didático já foi disponibilizado para os alunos do ensino fundamental, contudo o livro didático ainda não foi entregue para o ensino médio. Disse que alguns professores utilizam apostilas, mas existem problemas com relação à impressão na escola. Disse que prefere utilizar o registro em caderno, além de exemplos concretos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Utiliza pouco o livro didático (LD), registro em caderno, exemplos concretos.

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

O Professor C disse que esta geração de alunos é muito pragmática, que busca utilidade em tudo, o tempo todo. São bombardeados de informação. Enfim tudo tem que ter um porque, senão não faz sentido em fazer. Não existe estudar por estudar. Disse que é um desafio para o professor, seja de matemática, de português, de história, mostrar para o aluno a importância dos conteúdos escolares para a vida. Os alunos acham que é importante estudar somente para o vestibular, e qual é a aplicação para a vida? Disse que os alunos consideram o estudo dos números irracionais como algo inútil, mas percebe que os alunos conseguem observar que os números irracionais existem, principalmente quando se utilizam experimentos práticos. Se não for utilizado o experimento prático, vai ser somente uma coisa abstrata.

Palavras-chave ou palavras-tema: Abstrato, algo inútil.

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

O Professor C disse que o estudo pelo estudo, o aprendizado pelo aprendizado, é importante em si. Destacou a importância para o vestibular, mas salientou que a maior importância está relacionada ao desenvolvimento da abstração, olhar a matemática para além do que é tangível, e perceber que muita coisa que existe na matemática, que parece abstrato, vai ter aplicação prática, tem um contexto histórico, e é um embasamento para outros estudos dentro da própria matemática.

Palavras-chave ou palavras-tema: Vestibular, desenvolver a abstração, aplicação prática, contexto histórico.

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam?

O professor C explicou que o conteúdo é dividido em Matemática, que estuda Álgebra e Aritmética, e RPM, que estuda Geometria. Não é o mesmo professor para ensinar Matemática e RPM, então cada professor tem sua própria abordagem dos conteúdos. Disse que quando tem uma turma que está estudando geometria, ele pede para trazerem objetos circulares, como copo, tampa de garrafa etc. e envolverem estes objetos com barbantes. Disse que leva os alunos para a quadra, que tem o círculo central que é medido pelos alunos com a utilização do barbante; desta forma os alunos podem constatar que existe uma razão (constante), um padrão, entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, tanto no círculo do copo, como no círculo da quadra que é bem maior. Disse que é muito difícil para a criança abstrair o conceito dos números irracionais. Os números irracionais não seguem um padrão, ele é aleatório, no sentido de não se repetir com um período, como ocorre no caso das dízimas. Destacou que o ensino dos números irracionais funciona melhor com exemplos concretos.

Palavras-chave ou palavras-tema: Utiliza exemplos concretos.

4.2.4 Transcrição editada da entrevista com o Professor D

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

O Professor D explicou que utiliza recursos geométricos, com construção de segmentos formados por números irracionais e gerados a partir de demonstração da $\sqrt{2}$, e contradizendo muitas vezes a definição de números racionais.

Palavras-chave ou palavras-tema: Geometria, exemplos, definição.

2) Quais são os principais desafios que você enfrenta ao ensinar os números irracionais?

O Professor D disse que enfrenta na sala de aula a negligência existente nos anos anteriores. Destacou que alguns alunos não fazem nem ideia dos símbolos dos conjuntos numéricos, não dominam o manuseio numérico, não sabem o que são números racionais. Disse que perde muito tempo ensinando o conteúdo referente aos anos anteriores. Os alunos acham dificuldade para entender os números irracionais por ser algo abstrato. Disse que perde algum tempo mostrando que os números irracionais são infinitos. Disse que as reticencias não fazem sentido para os alunos. Destacou que os alunos têm dificuldades para entender a diferença entre dízimas periódicas e não periódicas.

Palavras-chave ou palavras-tema: Negligência - anos anteriores, defasagem, abstrato, dificuldade com o infinito, dificuldade com números não periódicos.

3) Como você define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

O Professor D disse que trabalha com exemplos que contradizem a definição dos números racionais, como por exemplo, $\sqrt{2}$.

Palavras-chave ou palavras-tema: Caminho da exclusão, não são racionais.

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas?

O Professor D disse que a abordagem que tem dado melhor retorno é mostrar os números que podem ser classificados como números racionais e os que se enquadram nos números irracionais. Disse que apresenta o grupo dos números irracionais como os números que não atendem a definição de número racional.

Palavras-chave ou palavras-tema: Não são racionais.

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?

O Professor D disse que utiliza bastante o diagrama de Venn. Disse que também apresenta as propriedades dos conjuntos numéricos, além de enumerar os seus elementos. Disse que utiliza o diagrama de Venn para trabalhar conjuntos que não são situações numéricas. Disse que utiliza o diagrama para mostrar relação binária. Disse que utiliza a reta numérica no final do estudo do conteúdo. Disse que acha o diagrama de Venn muito bom, mas pode limitar a visualização dos os alunos, pois eles precisam ver uma região infinita dentro de uma região finita.

Palavras-chave ou palavras-tema: Diagrama de Venn, propriedade dos conjuntos.

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

O Professor D disse que a maneira como os professores abordam, ou como é exposta nos livros didáticos, pode criar uma limitação na visualização dos alunos. Como cabe um infinito dentro de uma região limitada? Tanto os professores como os alunos não entendem muito bem o que é o infinito.

Palavras-chave ou palavras-tema: Cria limitação, dificuldade de entender o infinito.

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?

O Professor D disse que já utilizou muito o livro didático, mas hoje em dia não utiliza mais. Destacou que os livros têm vindo muito sucateados, muitos conteúdos foram cortados. Disse que os exercícios são muito ruins. Disse que prepara apostilas, com um apanhado de livros antigos e vai montando o material didático, com listas de exercícios também. Disse que indica alguns vídeos no Youtube sobre o conteúdo. Disse que tenta manter contato com os alunos por meio de grupos no Whatsapp para facilitar a transmissão das informações. Disse que o quantitativo de livros didáticos disponibilizados nem sempre é o esperado. Disse que este ano, os livros didáticos chegaram faltando um mês para terminar o semestre, numa quantidade que não atende a demanda de alunos, porque o levantamento é feito pela demanda do ano anterior.

Palavras-chave ou palavras-tema: Não utiliza o livro didático (LD), problemas na distribuição do LD, material próprio, vídeos no Youtube.

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

O Professor D disse que os alunos passam pelo conteúdo de uma maneira superficial, aprendendo alguns símbolos, alguns número que compõem os conjuntos dos números irracionais, mas não percebem a essência e não manipulam tão bem alguns números que deveriam, como por exemplo, raízes não exatas e números que não são quadrados perfeitos. Destacou que não é dada a devida atenção para os números irracionais desde o ensino fundamental.

Palavras-chave ou palavras-tema: Superficial.

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

O Professor D disse que é importante para o estudo da Física, sem contar um outro universo que acabam não desenvolvendo na geometria, na música, por não compreensão numérica.

Palavras-chave ou palavras-tema: Estudo de Física, Geometria, Música.

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam?

O Professor D disse que os alunos conseguem perceber a utilização de alguns números irracionais em Trigonométrica, dando como exemplo, as rampas de acesso.

Palavras-chave ou palavras-tema: Trigonometria, rampas de acesso.

A seguir, apresenta-se o Quadro 2 com as palavras-chave extraídas das entrevistas com os professores regentes.

Quadro 2 – Entrevista com os professores regentes: palavras-chave.

Professor x Palavra-chave	Professor A	Professor B	Professor C	Professor D
Pergunta 1	Retomada Geometria História Tempo em sala	Definição Exemplos Tempo em sala	Defasagem Retomada História Exemplos Definição	Geometria Exemplos Definição
Pergunta 2	Abstrato Fora da realidade Não faz demonstração	Dificuldade com decimais Dificuldade c/ não periódicos	Não é intuitivo Não tem padrão Defasagem Abstrato	Negligência - anos anteriores Defasagem Abstrato Dificuldade c/ infinito Dificuldade c/ não

				periódicos
Pergunta 3	Decimais infinitos não periódicos Caminho da exclusão Exemplos	Caminho da exclusão Não são frações Dízimas não periódicas Exemplos	Caminho da exclusão Não são racionais	Exemplos Caminho da exclusão Não são racionais
Pergunta 4	Revisão Números que sobram Decimais infinitos não periódicos Sem demonstração	Diagrama de Venn	Caminho da exclusão Não são racionais	Caminho da exclusão Não são racionais
Pergunta 5	Diagrama de Venn Reta numérica	Diagrama de Venn Forma tabular	Diagrama de Venn Demonstrações concretas Reta numérica	Diagrama de Venn Propriedade dos conjuntos
Pergunta 6	Relação de inclusão	Relação de inclusão Relação de pertencimento	Relação de inclusão Impacto positivo	Cria limitação Dificuldade de entender o Infinito
Pergunta 7	Utiliza livro didático Problema distribuição LD	Utiliza livro didático Material próprio	Utiliza pouco LD Registro em caderno Exemplos concretos	Não utiliza LD Problema distribuição LD Material próprio Vídeos no Youtube
Pergunta 8	Abstrato	Exercícios	Abstrato Algo inútil	Superficial
Pergunta 9	Geometria plana Geometria Espacial Calculo de área	Mais numerosos Dificuldade de compreensão	Vestibular Desenvolver a Abstração Aplicação prática Contexto histórico	Estudo de Física Geometria Música
Pergunta 10	Questões conjuntos numéricos	Engenharia Estatística	Utiliza exemplos concretos	Trigonometria Rampas de Acesso

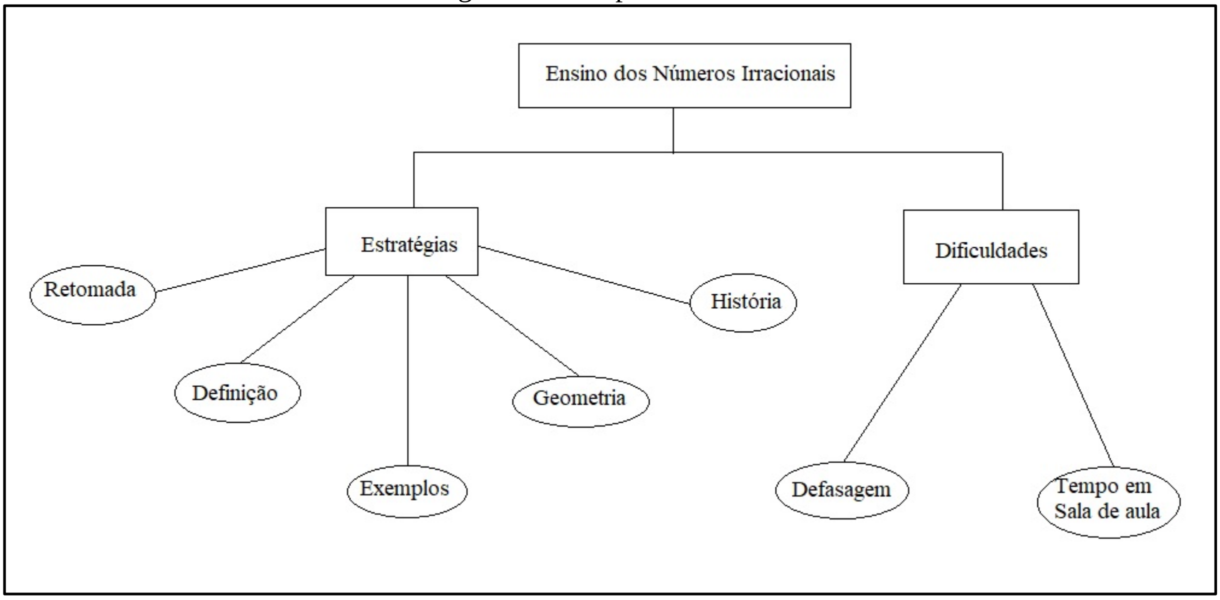
Fonte: Elaboração própria.

Para facilitar a visualização dos pontos levantados pelos professores nas entrevistas, foram feitos mapas temáticos, a partir das respostas dadas a cada pergunta (Figuras 49 a 58).

4.2.5 Análise das respostas da pergunta 1.

Na análise temática das respostas referentes à primeira pergunta da entrevista (Figura 49), podemos identificar diferentes abordagens e estratégias utilizadas pelos professores para ensinar os números irracionais. Podemos identificar alguns padrões e categorias que aparecem nas respostas.

Figura 49 – Mapa temático 1.



Fonte: Elaboração própria.

a. Retomada de Conteúdos Anteriores

Os Professores A e C salientam a necessidade de retomar o estudo dos conjuntos numéricos, com o estudo dos números naturais, inteiros, racionais até chegar aos números irracionais. O Professor C destaca a defasagem de aprendizagem dos alunos, o que torna essa revisão essencial antes de abordar os números irracionais.

b. Geometria como Recurso Didático

Os Professores A e D disseram que utilizam a Geometria como uma estratégia para ensinar os números irracionais. O Professor A utiliza o Teorema de Pitágoras para demonstrar o conceito de números irracionais através da diagonal de um quadrado unitário. O Professor D utiliza construções geométricas, com construção de segmentos formados por números irracionais e gerados "a partir de demonstração da $\sqrt{2}$" (transcrição da fala do professor D).

c. História dos números irracionais:

Professores A e C utilizam o contexto histórico no ensino dos números irracionais, apresentando a evolução dos números racionais até o surgimento dos irracionais. O Professor C relaciona o uso do número de ouro e da sequência de Fibonacci com o surgimento de números irracionais.

d. Definição e Exemplos

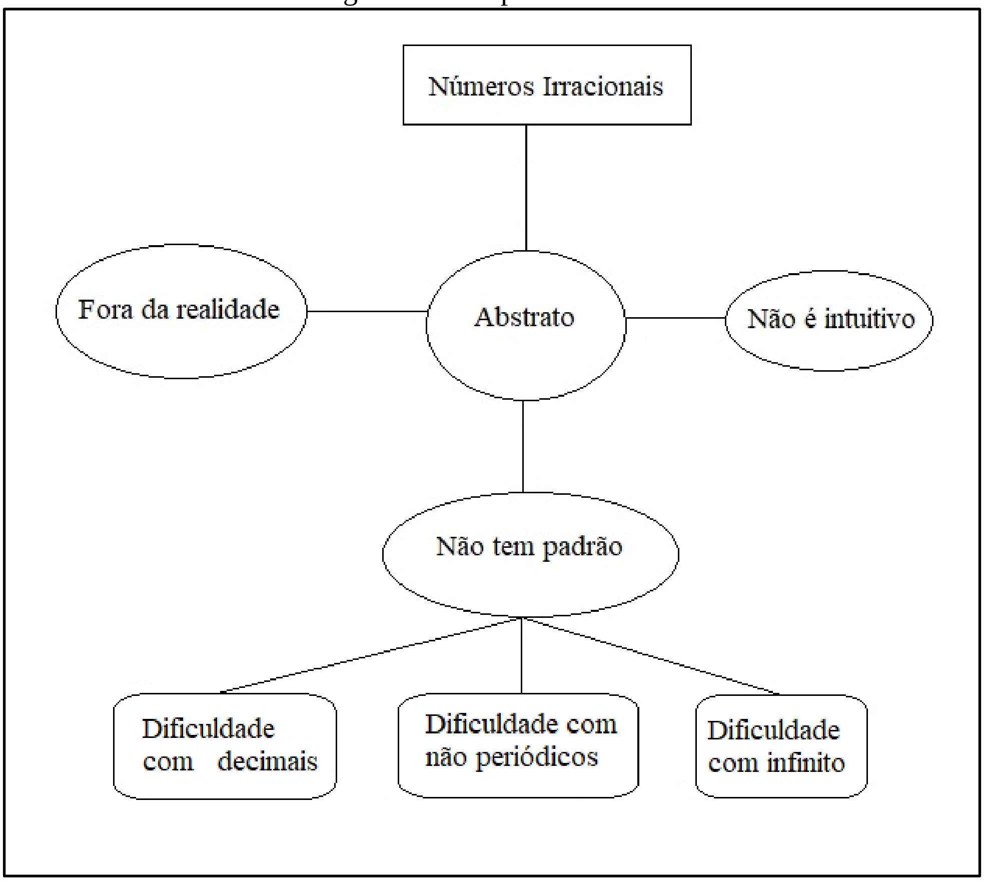
Professores B, C e D utilizam definições e exemplos como base para ensinar o conceito de números irracionais. O Professor B prioriza a definição e a aplicação de exemplos devido à limitação de tempo, enquanto o Professor C utiliza exemplos como o número de ouro e a sequência de Fibonacci. O Professor D prefere apresentar os irracionais contradizendo a definição de números racionais e utiliza exemplos gerados a partir de demonstração geométrica da $\sqrt{2}$.

e. Limitação de Tempo em Sala

Professores A e B mencionaram a limitação de tempo como uma dificuldade. O Professor A destacou a redução das aulas de matemática no ensino médio, e o Professor B apontou que essa limitação influencia a necessidade de se concentrar na definição e nos exemplos de números irracionais.

4.2.6 Análise das respostas da pergunta 2 que trata dos desafios enfrentados pelos professores ao ensinar os números irracionais.

Figura 50 – Mapa temático 2.



Fonte: Elaboração própria.

a. Abstração e Distanciamento da Realidade

Tanto o Professor A quanto os Professores C e D salientaram a dificuldade dos alunos em compreender conceitos abstratos, como a infinidade de números irracionais existentes entre dois números inteiros, destacado pelo Professor A. Para o Professor A, isso parece "fora da realidade" dos alunos, enquanto o Professor C vê a raiz quadrada e o número π como exemplos abstratos que exigem um nível de entendimento maior por parte dos alunos. O Professor D também aborda a abstração ao mencionar que os alunos têm dificuldades com o conceito de infinito.

Jesus (2017) em seu trabalho de conclusão de curso também observou esta dificuldade no ensino/aprendizagem dos números irracionais:

> Nota-se que as ideias intuitivas e abstratas que são requeridas durante a aprendizagem do conteúdo podem ser empecilhos para a compreensão dos alunos [...] dos Números Irracionais (Jesus, 2017, p. 37).

b. Dificuldade com Decimais e Números Não Periódicos

Os Professores B e D destacam que os alunos apresentam dificuldades específicas com números decimais, especialmente os não periódicos. O Professor B relata que muitos alunos ficam "apavorados" ao lidar com esses números, enquanto o Professor D reforça que os alunos têm dificuldade em diferenciar dízimas periódicas de “não periódicas”.

c. Defasagem e Lacunas de Aprendizado

Os Professores C e D apontam defasagens no conhecimento prévio dos alunos como um dos principais obstáculos. O Professor C observa que muitos alunos não têm domínio sobre operações fundamentais como radiciação, o que compromete a compreensão dos números irracionais. O Professor D menciona explicitamente a "negligência" nos anos anteriores e a falta de familiaridade de alguns alunos com os símbolos dos conjuntos numéricos.

d. Ausência de Demonstrações Formais

O Professor A admite que evita fazer demonstrações formais, como a prova de que a raiz quadrada de 2 é irracional, o que pode limitar a profundidade do aprendizado. O foco está em apresentar o conceito de forma simplificada, possivelmente em detrimento de uma abordagem mais rigorosa.

Segundo Broetto (2016), a falta da demonstração de que √2 = 1,4142135... é um número irracional pode ser prejudicial ao ensino:

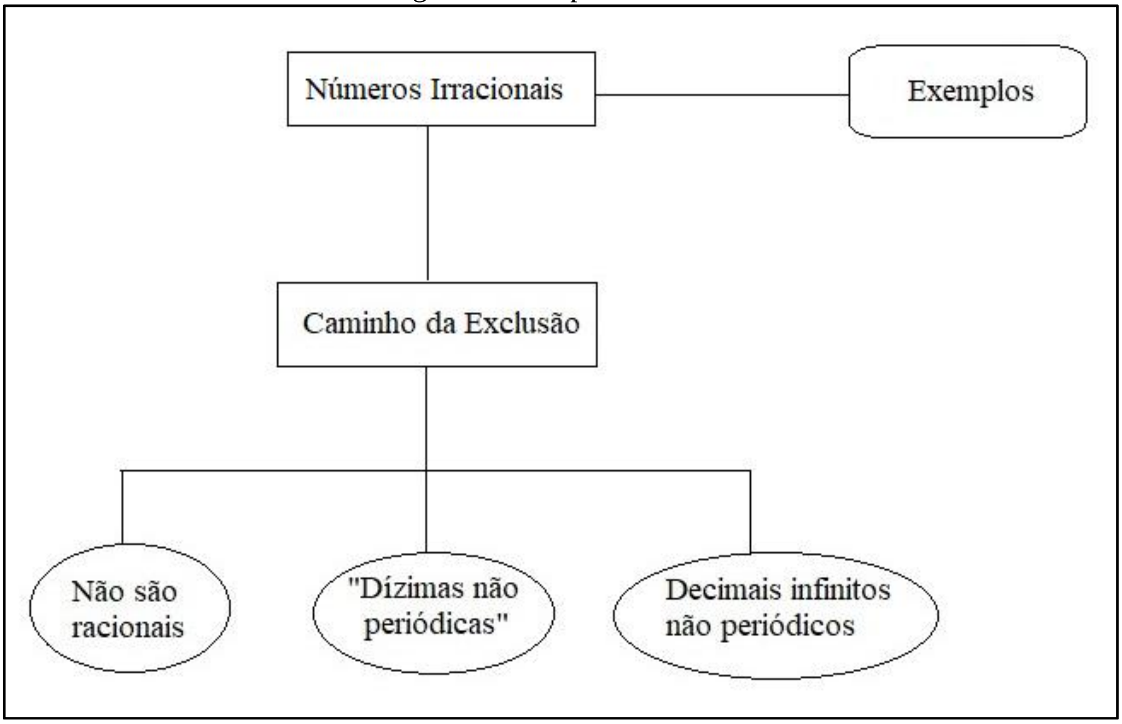
> [...] a partir da representação decimal de √2 , que a princípio apenas parece infinita e não-periódica (mas só uma demonstração poderia garantir isso), afirmou-se que se tratava de um número irracional. Esta prática inclusive pode estar na raiz de algumas dificuldades que detectamos nos estudantes que participaram da nossa pesquisa. Ao serem apresentados a frações de inteiros cuja representação decimal tinha um período grande, e por isso muitas vezes difícil de ser detectado, muitos deles classificaram essas frações como números irracionais (Broetto, 2016, p. 54).

e. Interpretação temática das respostas dos professores

A análise das respostas revela que os maiores desafios enfrentados pelos professores ao ensinar este conteúdo estão relacionados à abstração dos números irracionais, a dificuldade dos alunos em trabalhar com números decimais e números não periódicos, além das defasagens no conhecimento prévio dos alunos acerca dos conjuntos numéricos. Pode-se destacar ainda a ausência de demonstrações formais dos números irracionais. Essas categorias elencadas ajudam a entender os desafios pedagógicos relacionados ao ensino dos números irracionais no ensino fundamental e médio, mostrando que os obstáculos são tanto conceituais quanto metodológicos.

4.2.7 Análise das respostas da pergunta 3 que trata da forma como os professores regentes de turma definem os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio.

Figura 51 – Mapa temático 3.



Fonte: Elaboração própria.

a. Caminho da Exclusão:

Professores A, B, C e D adotam uma abordagem que define os números irracionais com base no que eles não são: o Professor A define os números irracionais como números decimais infinitos e não periódicos e menciona que eles não se enquadram na definição dos números racionais, reforçando a ideia de oposição (os números irracionais são o contrário dos racionais). O Professor B diz que os números irracionais não podem ser colocados na forma de fração e também são considerados “dízimas não periódicas”. O Professor C segue um caminho mais explícito de exclusão, indicando que os irracionais são os números que não pertencem aos conjuntos dos naturais, inteiros e racionais. O Professor D utiliza exemplos que contradizem a definição de números racionais, como $\sqrt{2}$, reforçando também o uso de uma definição por exclusão.

b. Exemplos:

O Professor A cita explicitamente π e o número de Euler (e).

O Professor B menciona o número π.

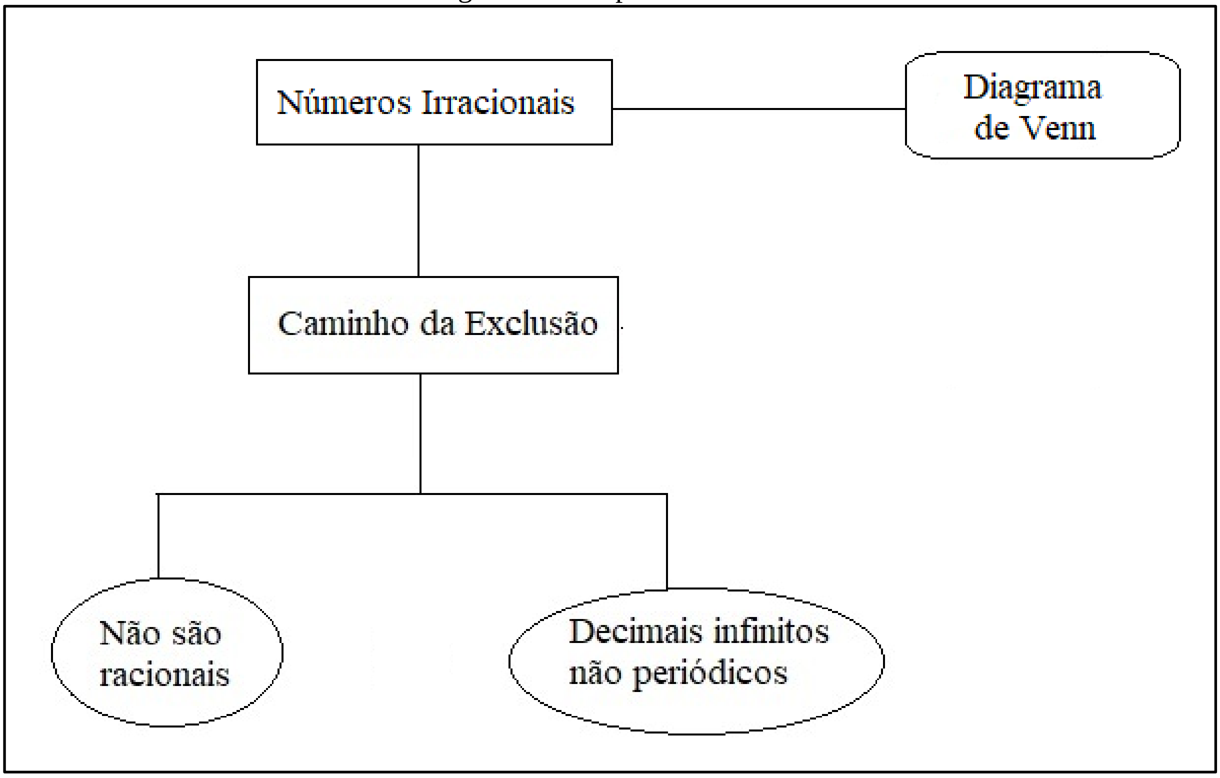
O Professor D usa $\sqrt{2}$ para ilustrar a distinção entre os números racionais e irracionais.

c. Análise Temática

A dificuldade com os números irracionais surge logo na sua definição. Conforme pode ser observado, eles costumam ser apresentados aos alunos como números que não são racionais, ou seja, que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros, ou ainda como números com infinitas casas decimais e não periódicos. Este tipo de abordagem de ensino parece que não está sendo eficiente, visto que na Escola A, onde os professores A, B e C são os regentes das turmas, 63% dos alunos não sabem como definir os números irracionais, enquanto na Escola B, do professor D, a taxa de erro é ainda maior, com 82% dos alunos não compreendendo o conceito de números irracionais (vide análise das respostas à questão 5, páginas 77 a 80).

4.2.8 Análise das respostas da pergunta 4 que trata da forma como os professores regentes das turmas abordam a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas.

Figura 52 – Mapa temático 4.



Fonte: Elaboração própria.

O professor A utiliza uma abordagem de revisão dos conjuntos numéricos e os números irracionais são apresentados como "aqueles que sobram" após definir os números racionais. A falta de uma demonstração formal para os números irracionais indica que a abordagem é mais prática e superficial, sem explorar a formalização do conceito.

O Professor B utiliza o diagrama de Venn para mostrar a relação entre racionais e irracionais dentro do conjunto dos números reais. O foco está em uma explicação visual, contudo, este tipo de abordagem carece de profundidade no que tange a explicação conceitual dos números irracionais.

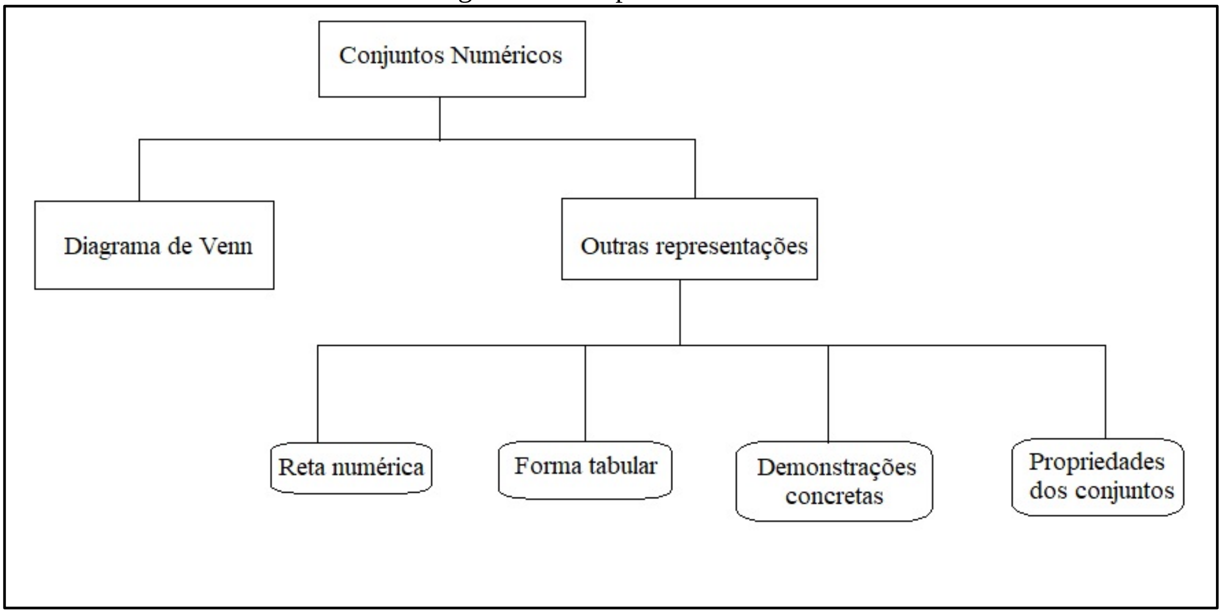
O Professor C prefere uma abordagem pelo caminho da exclusão, onde os números irracionais são apresentados como aqueles que não pertencem aos conjuntos dos números racionais. Esta estratégia de definir por negação pode simplificar a introdução do conceito, mas também pode deixar os alunos sem uma compreensão clara das características próprias dos números irracionais.

O Professor D utiliza uma estratégia similar aos Professores A e C. Ele também usa uma abordagem de diferenciação entre racionais e irracionais, enfatizando que os números irracionais são os que não se encaixam na definição de racionais. Ele afirma que essa metodologia é a que tem dado melhor resultado nas aulas. Essa abordagem parece eficiente em transmitir uma noção básica de separação entre os dois tipos de números, mas também, como no caso dos professores A e C, pode resultar numa compreensão mais superficial, limitada à classificação sem grande ênfase na natureza dos números irracionais.

A abordagem pedagógica desempenha um papel fundamental na forma como os alunos internalizam o conteúdo. A utilização de métodos visuais (diagrama de Venn) ou excludentes pode facilitar a introdução do conteúdo, contudo pode levar os alunos a apenas memorizarem, sem que compreendam o conceito dos números irracionais em profundidade. Isto pode ser observado nas respostas dos alunos no questionário aplicado, onde 61% dos alunos da Escola A e 83% dos alunos da Escola B não sabem dizer a diferença entre números racionais e irracionais. A maior dificuldade observada na Escola B, especialmente pelo alto número de respostas em branco (51%), indica a necessidade de se rever as estratégias de ensino utilizadas (baseadas no caminho da exclusão) a fim de permitir uma melhor compreensão dos conceitos de números racionais e irracionais pelos dos alunos (vide análise das respostas à questão 6, páginas 80 a 82).

4.2.9 Análise das respostas da pergunta 5 que trata da utilização pelos professores regentes do diagrama de Venn e de outras representações para os conjuntos numéricos.

Figura 53 – Mapa temático 5.



Fonte: Elaboração própria.

O Diagrama de Venn aparece como a principal ferramenta de representação de conjuntos numéricos entre os professores entrevistados. Ele é amplamente utilizado para demonstrar a relação de pertencimento dos conjuntos, ilustrando que um conjunto está contido no outro. A escolha dessa ferramenta parece estar relacionada à clareza visual que oferece para explicar relações matemáticas abstratas.

a. O Diagrama de Venn e a compreensão das relações entre os conjuntos numéricos

Professores como A, C e D destacam a importância do diagrama para mostrar a relação de pertencimento entre os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais). Por exemplo, o Professor A utiliza o diagrama para mostrar que um conjunto não é maior nem menor que o outro, mas que um está contido no outro.

b. Outras representações

Ainda que o Diagrama de Venn seja uma ferramenta comum entre os professores entrevistados, há uma variação nas formas de representação complementares adotadas por cada professor. O Professor A combina o diagrama de Venn com a reta numérica, destacando que a reta é útil para explicar a existência de infinitos números racionais e irracionais entre dois inteiros, ainda que os alunos sintam dificuldade em entender a infinidade desses números. O Professor B, por sua vez, prefere utilizar a forma tabular para apresentar os números naturais ($\mathbb{N} =\{1,2,3,4,5,6,...\}$) e os números inteiros ($\mathbb{Z} =\{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$), não mencionando outras representações além dessa.

c. Uso de demonstrações concretas para reforçar conceitos abstratos

O Professor C vai além do uso tradicional do diagrama de Venn ao incluir demonstrações concretas com materiais físicos como latinhas e caixas de sapato. Esse método visa ilustrar de forma palpável a relação de pertencimento e sobreposição entre conjuntos, ajudando os alunos a visualizarem esses conceitos matemáticos. Ele também destaca que, apesar da reta numérica ser útil, o diagrama de Venn se mostra mais intuitivo para os alunos.

d. Limitações do Diagrama de Venn

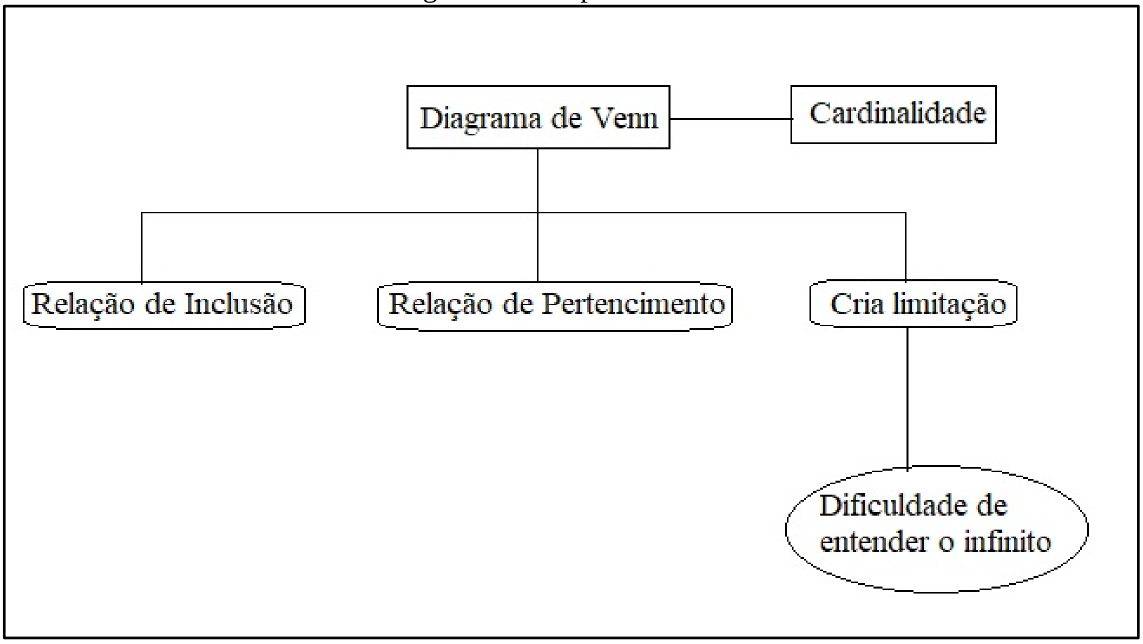
Apesar de ser elogiado, o Diagrama de Venn também apresenta limitações. O Professor D aponta que essa representação pode dificultar a visualização de certas propriedades ao colocar uma região infinita dentro de um espaço finito. Essa crítica nos diz que, embora eficaz em muitos contextos, o diagrama não é suficiente para abordar todos os aspectos do conteúdo de conjuntos numéricos, em especial a cardinalidade dos conjuntos numéricos, uma vez que o diagrama de Venn, por sua natureza, é mais adequado para representar conjuntos finitos.

e. Conclusão

A análise revela que o Diagrama de Venn é uma ferramenta pedagógica amplamente utilizada pelos professores no ensino dos conjuntos numéricos, favorecendo a visualização das relações de pertencimento e hierarquia entre os conjuntos numéricos. Cada professor adapta o uso do diagrama de acordo com sua prática pedagógica, combinando-o com outras representações como a reta numérica ou formas tabulares. A criatividade do professor, com o uso de materiais concretos, aparece como uma tentativa de tornar conceitos abstratos mais acessíveis aos alunos. As limitações do diagrama são reconhecidas, especialmente no que tange à visualização de conjuntos infinitos. Contudo, a utilização do diagrama de Venn nas escolas onde esta pesquisa foi realizada, apesar da sua simplicidade, não está cumprindo o seu papel, uma vez que a maior parte dos alunos errou a representação dos conjuntos numéricos por meio do diagrama de Venn nos questionários aplicados (79% na escola A e 92% na escola B) (vide análise das respostas à questão 4, páginas 73 a 77).

4.2.10 Análise das respostas da pergunta 6 que trata do o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos.

Figura 54 – Mapa temático 6.



Fonte: Elaboração própria.

a. Relação de Inclusão e de Pertencimento

As respostas recorrentes dos Professores A, B e C está relacionada ao entendimento de que o diagrama de Venn facilita a visualização das relações de inclusão entre os conjuntos numéricos ($\mathbb{N} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q}$). O diagrama de Venn é visto como uma ferramenta que ajuda os alunos a perceberem que um conjunto está contido no outro. A função do diagrama de Venn é destacada como central para entender essa hierarquia (relação de inclusão de um conjunto no outro), mas sem abordar a questão do tamanho infinito desses conjuntos. O Professor B também menciona o uso do diagrama de Venn para explorar a noção de pertencimento, destacando como ele facilita aos alunos perceberem se um número ou um conjunto pertence a outro. Essa abordagem contribui para uma melhor compreensão dos conceitos de inclusão, ainda que não trate da questão da quantidade de elementos em cada conjunto numérico (cardinalidade).

b. Impacto Positivo

O Professor C avalia o uso do diagrama de Venn de forma positiva, apontando que ele ajuda os alunos a entenderem a sequência de inclusão dos conjuntos. Isso reflete uma visão otimista quanto à utilidade dessa representação no ensino de conjuntos numéricos.

c. Dificuldade com o Infinito

O Professor D destaca que tanto professores quanto alunos podem ter dificuldades em entender o conceito de infinito. O uso do diagrama de Venn, segundo ele, pode criar uma limitação visual, especialmente na representação de conjuntos infinitos dentro de áreas limitadas.

d. Análise

Os professores, em sua maioria, veem o diagrama de Venn como uma ferramenta útil para ilustrar a inclusão e o pertencimento entre os conjuntos numéricos. Contudo, a questão da cardinalidade (o número de elementos) dos conjuntos numéricos não recebe a devida atenção por parte dos professores e dos livros didáticos, como bem destaca o Professor D.

4.2.11 Análise das respostas da pergunta 7 que trata da utilização do livro didático no ensino dos números irracionais.

Figura 55 – Mapa temático 7.

Fonte: Elaboração própria.

a. Utilização do livro didático

O Professor A e o Professor B mencionam a utilização do Livro Didático, mas com diferentes graus de dependência. O Professor A usa o Livro Didático como um recurso, apesar de haver problemas na distribuição deles, e o Professor B o utiliza principalmente para exercícios, complementando com seu próprio material.

O Professor C e o Professor D são mais críticos. O Professor C usa o Livro Didático "muito pouco" e prefere outras formas de ensino, como o registro em caderno e exemplos concretos. O Professor D menciona que já utilizou o Livro Didático, mas atualmente não o usa devido à baixa qualidade dos materiais fornecidos.

Broetto (2016) em sua tese de doutorado expõe esta deficiência pedagógica existente nos livros didáticos do ensino fundamental, e repetida na revisão dos conjuntos numéricos, que normalmente aparece nos livros didáticos utilizados na primeira série ensino médio, que se limita a repetir erros conceituais e métodos inadequados, o que acaba por não contribuir para uma compreensão mais profunda sobre o conteúdo:

> Nos primeiros capítulos dos livros didáticos destinados a 1ª série do ensino médio, é frequente a presença de uma revisão dos conjuntos numéricos, um momento que julgamos oportuno para avançar um pouco mais em relação ao que foi discutido nos últimos anos do ensino fundamental. [...] essa revisão no ensino médio não representa avanços significativos em relação ao que foi visto no ensino fundamental, porque muitas vezes repete os mesmos equívocos e formas inadequadas de abordagem dos números irracionais discutidos anteriormente (Broetto, 2016, p. 36-37).

Com relação à "qualidade" dos livros didáticos presentes no PNLD 2024 – Ensino Fundamental Anos Finais - e no PNLD 2021 – Ensino Médio – podemos observar que os conteúdos referentes aos números irracionais aparecem nestas coleções da seguinte forma: a) na sua representação numérica na forma simbólica ou decimal, como $\sqrt{2}$ ou 1,41421356237...; b) na sua representação geométrica, onde a $\sqrt{2}$ aparece como o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1; c) na sua representação gráfica na reta numérica (representação gráfica de $\sqrt{2}$ na reta numérica); e d) representados por meio de diagramas de Venn. Embora a variedade de representações presentes (numérica, geométrica, gráfica e por diagramas de Venn) seja positiva, falta uma compreensão mais profunda do conceito de números irracionais. Por exemplo, ao representar os números irracionais apenas como decimais infinitos ou símbolos como $\sqrt{2}$, o conceito de incomensurabilidade e a diferença principal entre números racionais e irracionais não são tratados com a devida importância. Podemos destacar a utilização do diagrama de Venn nos Livros Didáticos como uma ferramenta para tentar facilitar o entendimento de inclusão de um conjunto numérico no outro. Contudo, por sua natureza o diagrama de Venn é mais adequado para representar conjuntos finitos, uma vez que pode gerar interpretações equivocadas sobre a cardinalidade dos conjuntos numéricos.

b. Problemas na distribuição do Livro Didático

Os Professores A, C, e D destacam problemas relacionados à distribuição do livro didático. O Professor A menciona uma quantidade insuficiente de livros, enquanto o Professor C destaca que o Livro Didático foi entregue para o ensino fundamental, mas não foi disponibilizado para o ensino médio. O Professor D acrescenta que os livros chegam tarde e em quantidade insuficiente, destacando falhas na previsão de demanda.

c. Material próprio

O Professor B e o Professor D utilizam materiais próprios durante as aulas. O Professor B menciona ter desenvolvido uma apostila ao longo do tempo e o Professor D prepara apostilas a partir de livros antigos. Essa prática demonstra uma tentativa de suprir as lacunas deixadas pelo Livro Didático e adaptar o conteúdo às suas necessidades pedagógicas.

d. Recursos alternativos

Além dos livros e materiais próprios, existem relatos do uso de outros recursos pedagógicos. O Professor D menciona o uso de vídeos do YouTube e grupos no WhatsApp para complementar o ensino e manter contato com os alunos. Esses recursos alternativos são indicativos de uma tentativa de adaptar as aulas à realidade dos alunos e às limitações dos materiais fornecidos.

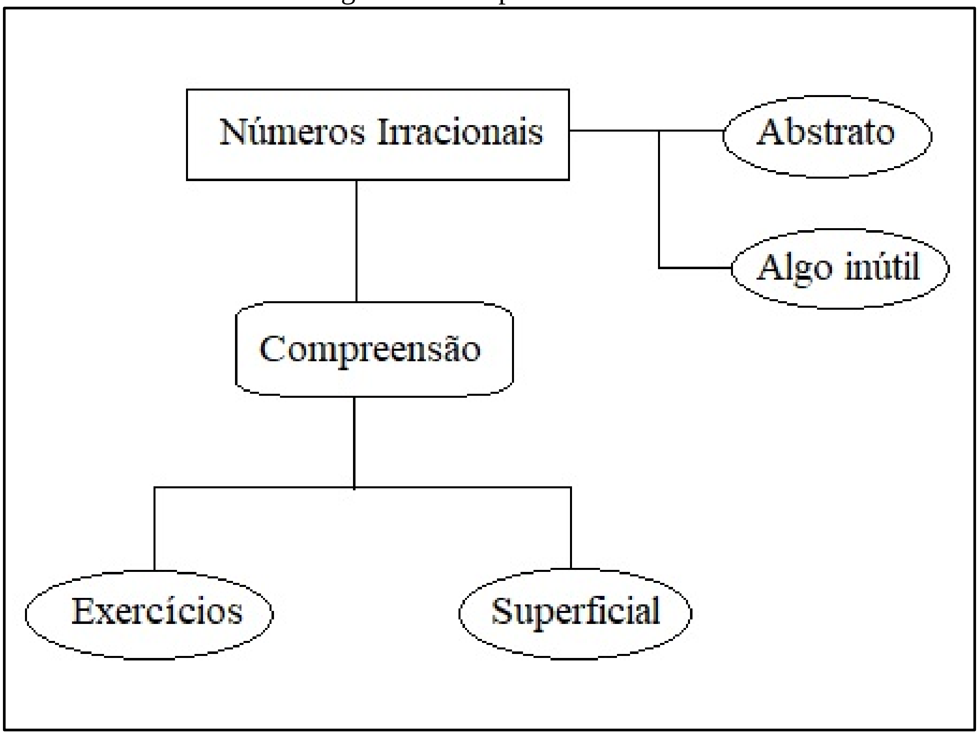
e. Interpretação temática das respostas dos professores

A análise revela um quadro diversificado no uso do Livro Didático. Há um contraste entre professores que ainda utilizam o Livro Didático em maior ou menor grau (A e B) e aqueles que não o utilizam (C e D). Os problemas de distribuição do Livro Didático são um tema recorrente, com impacto direto na qualidade do ensino. A dependência de materiais próprios e de recursos digitais (como vídeos) aparece como uma estratégia para tentar suprir essas deficiências.

A principal crítica ao Livro Didático parece estar relacionada à sua inadequação em termos de conteúdo e quantidade, o que leva os professores a buscarem alternativas que melhor atendam às necessidades dos alunos.

4.2.12 Análise das respostas da pergunta 8 que trata da compreensão dos alunos sobre os números irracionais.

Figura 56 – Mapa temático 8.



Fonte: Elaboração própria.

a. Abstração do conteúdo

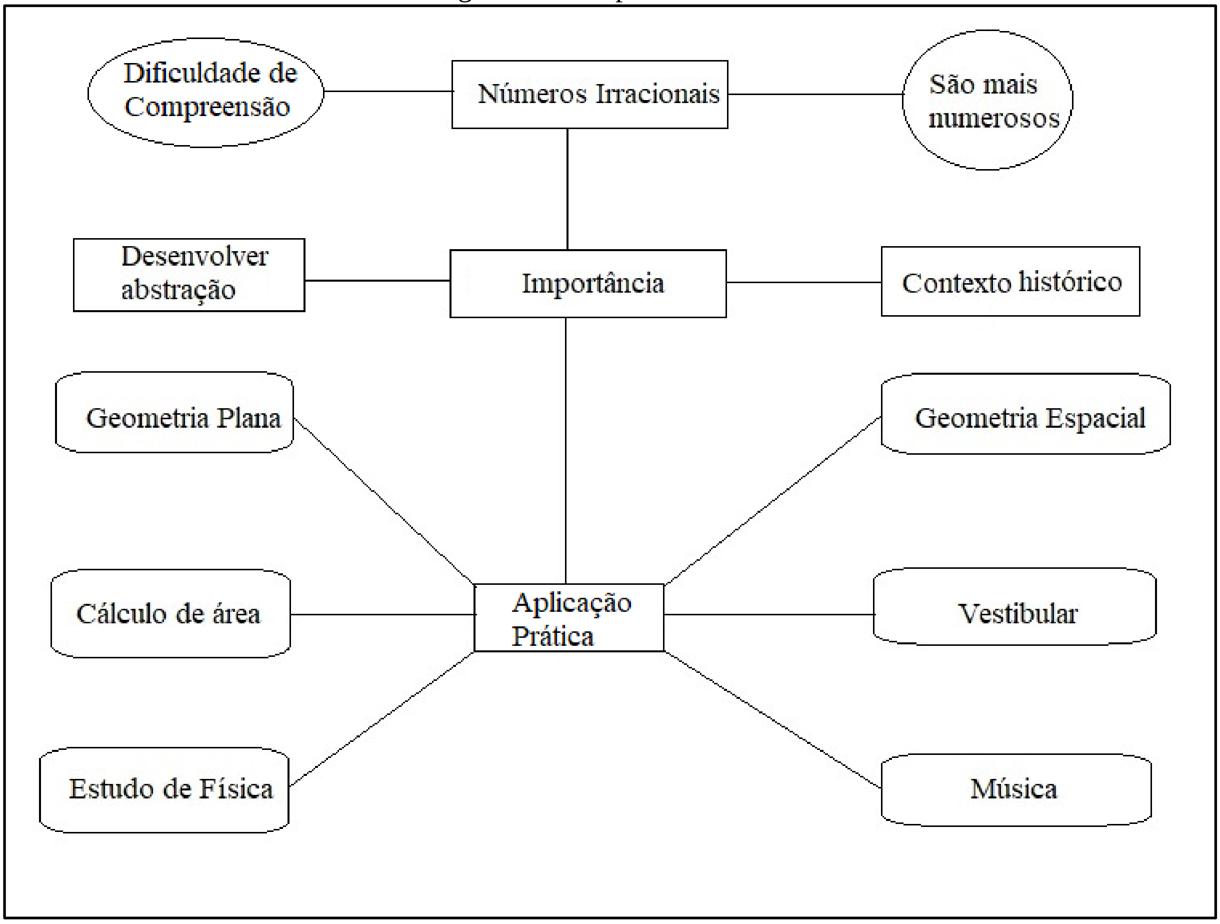
O Professor A destacou a dificuldade dos alunos em lidar com a abstração dos números irracionais, algo reforçado pelo Professor C, que menciona que, sem o uso de experimentos práticos, o conteúdo permanece abstrato e de difícil compreensão pelos alunos. O Professor C destaca que "os alunos consideram o estudo dos números irracionais como "algo inútil" (transcrição da fala do professor C). Isso sugere que a complexidade teórica dos números irracionais pode ser um obstáculo ao entendimento.

b. Compreensão

O Professor B destacou que os alunos compreendem o conteúdo durante a resolução de exercícios, mas não tem certeza se os alunos percebem a sua aplicação prática na vida cotidiana ou profissional, exemplificando a aplicação dos números irracionais em cálculos de engenharia. A Professor C reforça essa visão, ao dizer que os alunos atuais são pragmáticos e precisam de uma razão clara para estudar. O Professor D aponta que a aprendizagem dos alunos é superficial, aprendendo alguns símbolos e números sem uma compreensão profunda da essência dos números irracionais. Ele também menciona que essa desconexão pode estar relacionada à falta de atenção ao conteúdo desde o ensino fundamental, sugerindo lacunas na construção do conhecimento sobre os números irracionais ao longo da trajetória escolar.

4.2.13 Análise das respostas da pergunta 9 que trata da importância da compreensão dos números irracionais pelos alunos.

Figura 57 – Mapa temático 9.



Fonte: Elaboração própria.

A análise temática desta pergunta (Figura 57) revela diferentes visões dos professores entrevistados, que podem ser divididas em torno de três temas principais:

a. Aplicações práticas e interdisciplinares.

O Professor A considera a compreensão dos números irracionais como fundamental para o estudo de determinadas áreas da matemática, como a geometria plana e espacial e o cálculo de áreas. O Professor D também destaca a importância dos números irracionais, ampliando a aplicação dos irracionais além da geometria para outras disciplinas, como a física e até mesmo a música. Ele destaca que, sem a compreensão numérica adequada, os alunos perdem oportunidades de desenvolvimento em diversas áreas.

b. Desenvolvimento cognitivo e abstrato.

O Professor C destaca a importância do estudo dos números irracionais não apenas por sua aplicação prática, como no vestibular, mas também pelo seu potencial de contribuir para o desenvolvimento da abstração nos alunos.

c. Dificuldades na compreensão

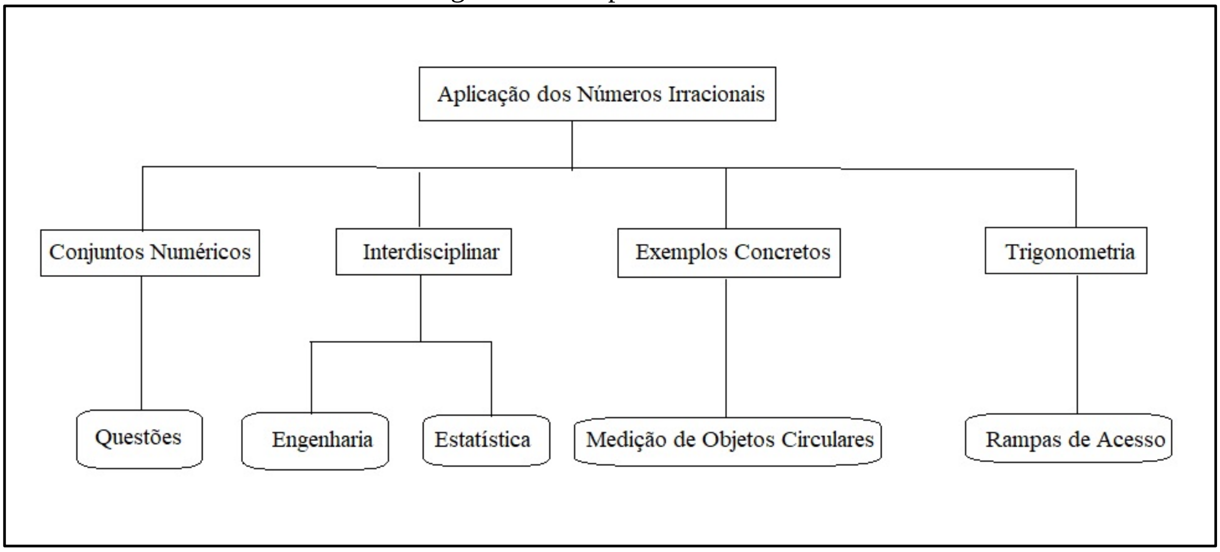
O Professor B traz uma perspectiva interessante ao apontar que os números irracionais são, na prática, mais frequentes do que os números naturais e inteiros no cotidiano, mas que os alunos enfrentam grandes dificuldades em localizá-los na reta numérica. Isso sugere uma lacuna considerável entre o ensino dos conceitos pelo professor e a capacidade dos alunos em aplicar esse conhecimento de forma prática e visual.

d. Interpretação temática das respostas dos professores

Os números irracionais são fundamentais em diversas áreas do conhecimento, como geometria, física e até música, destacando seu caráter interdisciplinar. Compreender os números irracionais pode estimular a capacidade de abstração e o desenvolvimento do pensamento crítico, preparando os alunos para estudos matemáticos mais avançados. Contudo, existe um desafio no sentido de fazer os alunos entenderem e aplicarem os conceitos dos números irracionais especialmente no contexto da reta numérica (conforme destacado pelo professor B), o que aponta para uma necessidade de revisão da metodologia de ensino utilizada a fim de permitir que os alunos possam superar essas dificuldades.

4.2.14 Análise das respostas da pergunta 10 que trata da maneira como os professores conectam o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela.

Figura 58 – Mapa temático 10.



Fonte: Elaboração própria.

A análise temática desta pergunta (Figura 58) revela diferentes visões dos professores entrevistados, que podem ser divididas em torno de quatro temas principais:

a. Aplicação dos Conjuntos Numéricos

O Professor A destaca a necessidade de um trabalho consistente com os conjuntos numéricos desde o ensino fundamental, conectando-os ao conteúdo de matemática do ensino médio. Destaca ainda que trabalha questões sobre conjuntos numéricos no primeiro ano do ensino médio.

b. Conexões Práticas e Interdisciplinares

O Professor B traz à tona a relevância dos números irracionais em áreas específicas, como engenharia e estatística, destacando a importância de relacionar o conteúdo com essas áreas de atuação profissional.

c. Exemplos Concretos para a Compreensão

O Professor C foca na utilização de exemplos concretos para ensinar números irracionais, como atividades práticas envolvendo objetos circulares e medições. A abordagem concreta é utilizada para ajudar na compreensão de conceitos abstratos, destacando que a dificuldade de abstração dos alunos pode ser amenizada com vivências experimentais.

d. Aplicação na Trigonometria

O Professor D menciona a percepção dos alunos sobre números irracionais no contexto de Trigonometria, dando como exemplo as rampas de acesso.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscou-se compreender as concepções de alunos e professores sobre o conceito de número irracional. Para tal, foram realizadas entrevistas com os professores regentes de turmas do primeiro ano do Ensino Médio de duas escolas públicas localizadas na região central da Cidade de Campos dos Goytacazes-RJ, bem como os alunos destes professores responderam a um questionário. Além disso, por meio do referencial teórico, buscou-se entender o processo de transposição didática do conhecimento que aparece materializado nos livros didáticos, o contexto histórico dos números irracionais e o processo de formação dos professores na Licenciatura em Matemática e a aplicação dos conhecimentos adquiridos pelos professores na Educação Básica.

Pode-se observar que a abordagem dos números irracionais na Educação Básica enfrenta desafios pedagógicos e metodológicos que dificultam a compreensão e a valorização desse conceito pelos alunos. Embora os livros didáticos e as práticas de ensino frequentemente destaquem técnicas procedimentais, há uma lacuna na abordagem conceitual que poderia enriquecer a aprendizagem. Números irracionais, como π e $\sqrt{2}$, têm papel fundamental não apenas na matemática pura, mas também em diversas aplicações práticas, da geometria à física, na engenharia, na estatística, e até na música.

As análises realizadas sugerem que muitos estudantes enfrentam dificuldades em reconhecer o valor dos números irracionais além da resolução de exercícios específicos. Para ilustrar isso, um professor regente disse que os alunos compreendem o conteúdo durante a resolução de exercícios, mas não tem certeza se os alunos percebem a sua aplicação prática na vida cotidiana ou profissional. Isso ocorre porque os exercícios são procedimentais. Na realidade, os alunos não compreendem o conceito acerca dos números irracionais, eles apenas aprendem a técnica para a resolução dos exercícios. Como nos diz Souto (2010), os exercícios são abordados nos livros didáticos de maneira mecânica, com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.

Quando o ensino se limita à aplicação mecânica de técnicas para a resolução de exercícios, sem explorar a aplicação prática e o contexto histórico dos irracionais, perde-se uma valiosa oportunidade de desenvolver o raciocínio abstrato e a visão crítica do aluno.

Na tentativa de facilitar o ensino dos números irracionais, outro professor faz experimentos práticos. Neste experimento, o comprimento da circunferência e o seu diâmetro são medidos e é calculada a sua razão para a obtenção de uma constante (com valor aproximado igual a 3). Contudo, não é possível provar que a constante encontrada é o número irracional π. A realização de experimentos práticos em sala de aula com o objetivo de ensinar os números irracionais apresenta limitações significativas, e pode evidenciar que o próprio professor tem uma concepção equivocada do que são os números irracionais, visto que todo experimento de medição terá como resultado um número racional.

Ademais, a ausência de números irracionais na maioria dos exercícios dos livros didáticos reforça uma visão distorcida de que os números racionais prevalecem. Na realidade, quando se faz a modelagem matemática das situações reais do cotidiano, observa-se que elas envolvem na maioria das vezes números irracionais, mas essa presença não é refletida na Educação Básica.

Nos livros didáticos, por exemplo, pode-se observar que todos os discriminantes apresentados nas equações do segundo grau são quadrados perfeitos, o que cria uma situação idealizada, distante da realidade matemática. Essa abordagem restringe o aluno a um contexto limitado, sem oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos sobre potenciação e radiciação de forma prática e abrangente.

Este distanciamento dos números irracionais é agravado pela própria estrutura de raciocínio do cérebro humano, que tende a buscar padrões. Como os números irracionais não seguem padrões que possam ser definidos, muitos alunos acabam achando que os números irracionais são uma coisa abstrata, que não serve para nada, que “não tem sentido”.

No Ensino Fundamental é importante ficar claro que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o seu diâmetro é invariável qualquer que seja a circunferência tomada. No entanto, vale questionar se é pertinente o estudo do número π como irracional nesse nível de ensino, dado que π é um dos números cuja irracionalidade é mais complexa de ser demonstrada.

A introdução do conceito de números irracionais sem a compreensão plena dos alunos parece não ser produtiva. Qual o objetivo de ensinar um conceito, que para os alunos parece abstrato, e que eles não têm maturidade matemática para compreender? A maneira pela qual o conteúdo é ensinado atualmente parece não agregar valor significativo ao entendimento dos alunos, uma vez que muitos apenas decoram o conteúdo para aplicar nas avaliações e logo esquecem. Respostas presentes nos questionários como “números irracionais são números que não fazem sentido”, e a associação dos números irracionais aos negativos, como se fosse algo ruim, evidenciam a necessidade de mudanças na forma em que os números irracionais são apresentados aos estudantes. Assim, talvez fosse mais apropriado reservar o estudo dos números irracionais para o Ensino Médio, quando os estudantes possuem maior maturidade matemática.

Outra questão que merece ser observada é a utilização das reticências. Será que os alunos estão compreendendo o seu significado? As reticências têm significados distintos dependendo do contexto: em dízimas periódicas ou em progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG), indicam a continuação de um padrão; já em números irracionais, indicam uma sequência infinita de casas decimais sem repetição. Esse tipo de ambiguidade pode comprometer a clareza do conteúdo para os estudantes.

O problema no estudo dos números irracionais na Educação Básica também parece ser fruto da transposição didática que se mostra presente nos livros didáticos utilizados. O conjunto dos números irracionais (I), mostrado nos diagramas de Venn presentes na maioria dos livros didáticos, não existe de forma independente, sendo um produto da transposição didática. Quando Georg Cantor estudou os conjuntos numéricos, estudou o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Os números irracionais nada mais são do que os reais que não são racionais. Essa construção didática pode dificultar ainda mais a compreensão dos alunos se não for bem explicada e contextualizada. Portanto, parece ser necessário o debate sobre a pertinência do ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental, onde a falta de desenvolvimento do raciocínio matemático se mostra um entrave evidente para a assimilação do conceito dos números irracionais pelos alunos.

A partir dos dados levantados no presente trabalho, que revelaram erros e dificuldades dos alunos em relação aos conjuntos numéricos, sugere-se a criação de uma sequência didática com o objetivo de facilitar a compreensão e a identificação dos números irracionais, diferenciando-os dos racionais.

Para pesquisas futuras, sugere-se uma investigação das perspectivas dos alunos sobre os símbolos que a Matemática se apropria, ou seja, símbolos que são utilizados na Matemática, mas que existem em outros contextos, como as reticências, parênteses, colchetes e chaves.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Geraldo Peçanha de. **Transposição didática:** por onde começar? - 2. ed. - São Paulo: Cortez, 2011.

ALMEIDA, Theodoro Becker de. **Uma Revisitação aos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional) -Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/133662/000985750.pdf. Acesso em: 25 abr. 2024.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARBOSA, Francisco Ellivelton; SOUSA, Damião Macêdo de; SANTOS, Maria Irilene Alves dos. Números irracionais: irracionalidade e incomensurabilidade. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 440–450, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2861. Acesso em: 16 jun. 2024.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Uma entrevista com Yves Chevallard sobre a teoria antropológica do didático. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.25, p.11-22, maio.-ago. 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/download/7019/5003/20306. Acesso em: 07 mai. 2024.

BONGIOVANNI, Vincenzo. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido**:** a teoria das proporções e o método de exaustão. [S. l.]. **União - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 2, p. 91-110, 2005.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma Matemática**: Conjuntos e Funções - Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto. *et al*. **Amplitude matemática 8**: ensino fundamental anos finais. 1ª. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2022.

BORTOLETTO, Anésia Regina Schiavolin. **Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática do ensino fundamental.** 2008. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação). Faculdade de Ciências Humanas da Universidade Metodista de Piracicaba, 2008. Disponível em: https://iepapp.unimep.br/biblioteca_digital/pdfs/2006/RYXMQMJTVEXB.pdf. Acesso em: 09 ago. 2024.

BORTOLOSSI, Humberto José; MÓZER, Graziele Souza. Para que servem os Números Irracionais? Indo além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Anais eletrônicos.** 2016. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6902_2921_ID.pdf. Acesso em: 09 ago. 2024.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de: Eliza F. Gomide. Editora Edgar Blücher. 2. ed. São Paulo. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30 out. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2021: Matemática – guia de obras didáticas**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2021. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2021_proj_int_vida_pnld2021-didatico-matematica-e-suas-tecnologias.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2024: Matemática – guia de obras didáticas**. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2023. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2024_objeto1_obras_didaticas_pnld_2024_objeto1_obras_didaticas_matematica.pdf. Acesso em: 04 out. 2024.

BROETTO, Geraldo Claudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**, 2016. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufes.br/bitstream/10/8514/1/tese_10318_Tese%20Geraldo%20Broetto.pdf. Acesso em: 30 jul. 2024.

BROETTO, Geraldo Claudio, SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. (2019). O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/MtpgMFQwZXKxQVWffL9hDCG/abstract/?lang=pt. Acesso em: 11 out. 2024.

BURKERT, Walter. **Lore and Science in Ancient Pythagoreanism**. Cambridge, Harvard University Press, 1972.

CHEVALLARD, Yves. **La transpostion didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage Éditions: Grenoble, 1991.

CORBO, Olga. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na educação básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – São Paulo: [s.n.], 2012.

COSTA, Manoel Amoroso. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Formação do professor de Matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012.

DOMINGUINI, Lucas. A transposição didática como intermediadora entre o conhecimento científico e o conhecimento escolar. **Revista Eletrônica de Ciências da Educação**, Campo Largo, v. 7, n. 2, nov. 2008. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/pibidfilosofiasociologia/files/2021/03/Transposicao-como-intermediadora.pdf. Acesso em: 11 out. 2024.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FAVALLI, Déborah. **Incomensuráveis:** abordagem dos números irracionais na educação básica. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de São Carlos. Sorocaba, 2024 . Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/19440/_TCC-D%C3%A9borah%20Favalli_final.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 06 jun. 2024.

FOWLER, David. ***The mathematics of Plato´s Academy***. *A new Reconstruction*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press,1999.

GARCIA, Vera Clotilde; FRONZA, Juliana; SORES, Débora da Silva. **Ensino dos números irracionais e reais no ensino fundamental**: coleção cadernos para professores. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005. v.1. Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/GR%C1FICA-IRRACIONAIS.pdf. Acesso em: 09 ago. 2024.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, Antonio Rafael de Abreu. **A evolução do pensamento matemático**: de Platão a Gõdel. Dissertação (Mestrado Profissional) -Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7076&id2=171057237. Acesso em: 10 jun. 2024.

GOMES, Isabela Cardoso; QUEIROZ, Maria Luiza Tavares. **A noção do infinito na educação básica**: percepções dos alunos a partir dos conceitos de dízimas periódicas e números irracionais. Trabalho de conclusão de curso. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2023.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa, POSSANI Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na antiga Grécia, **Revista de Matemática Universitária,** São Paulo, v. 1 , n. 47, p. 16-24, 2009. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47_Artigo02.pdf. Acesso em: 06 jun. 2024.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. **The Fontana history of the mathematical sciences**. The rainbow of mathematics. London:FontanaPress,1997.

IFRAH, Georges. **Os números:** história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso de. **Números irracionais**: uma análise de livros didáticos dos ensinos fundamental II e médio. 2017. 51 p. TCC, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2017. Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/TCC%20Barbara.pdf. Acesso em: 10 jun. 2024.

JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso de; OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de. Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino. Instrumento: **Revista de Estudo e Pesquisa em Educação**, Juiz de Fora, v. 20, n. 2, jul./dez., p. 331-344, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/revistainstrumento/issue/view/786/239. Acesso em: 09 ago. 2024.

KINDEL, Dora Soraia. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade**. Dissertação de Mestrado, USU, Rio de Janeiro, 1998.

KINDEL, Dora Soraia; FRANT, Janete Bolite (org.). **Diálogos de alunos sobre infinito**. 1. ed. Curitiba: Editora Appris, 2015.

KLEIN, Felix. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**. Londres: Macmillian and Co. Ltd., 1932.

KNORR, Wilbur Richard. **The Evolution of the Euclidean Elements**: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1975.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões**: Matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. v. 1, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

LONGEN, Adilson. **Conexões & vivências Matemática 9**: ensino fundamental anos finais. 1ª. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2022.

LORIN, João Henrique. **Relações entre teoremas-em-ação e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito**. 2018. 182 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MACIEL, Letícia Carvalho. **Educação financeira e sala de aula invertida:** uma proposta para os anos finais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2021.

MICHAELIS: **Dicionário brasileiro da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2024. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/. Acesso em: 7 abr. 2024.

MILES, Matthew B.; HUBERMAN, A. Michael. (1994). **Qualitative data analysis**: An expanded sourcebook (2. ed). Thousand Oaks: Sage.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor**: formação na licenciatura e prática docente na escola básica, 2004. 202 f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-6ABMUH/1/2000000078.pdf. Acesso em: 21 out. 2024.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

MOSCA, Marcos Antônio. **Números Irracionais no Ensino Médio**: desdobrando o tema com equações polinomiais. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/762/2011_00538_MARCOS_ANTONIO_MOSCA.pdf?sequence=1. Acesso em: 06 jun. 2024.

POMMER, Wagner Marcelo. Números irracionais no ensino fundamental: uma análise em livros didáticos. In: VIII Encontro Paraense de Educação Matemática, 2011, Belém. **Anais eletrônicos.** Belém: Universidade da Amazônia, 2011, p. 1-11. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/298983281. Acesso em: 10 ago. 2024.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Joice Camargo dos. **Números reais**: um desafio na Educação Básica. Monografia. Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio. Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2007. Disponível em: https://livrozilla.com/doc/1214461/n%C3%BAmeros-reais--um-desafio-na-educa%C3%A7%C3%A3o-b%C3%A1sica. Acesso em: 09 ago. 2024.

SANTOS, Weverthon Felipe Trajano dos. **Aplicações dos diagramas de Venn**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2022.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Indiana University, Bloomington, 1993.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. In: GERHADT, Tatiana Angel; SILVEIRA, Denise Tolfo. (org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Unidade 2, p. 31-42. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 15 jul. 2024.

SOARES, Eliana Farias; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. **Números reais**: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. Zetetiké, Campinas, SP, v. 7, n. 12, p. 95-117, jul./dez. 1999.

SOUTO, Alexandre Machado. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, p. 106, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário Inicial

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Fluminense — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

matemática LICENCIATURA

Curso: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA 2023.2

Disciplina: TCC II ORIENTADORA: CARLA

ORIENTANDO: LEONARDO CÔRREA DE CASTRO

TESTE EXPLORATÓRIO

Questionário para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio - teste exploratório

Você já estudou sobre os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros (Z), racionais (Q) e reais (IR). Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão – Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

2ª Questão – O que são números irracionais?

3ª Questão - Qual a diferença entre números racionais e irracionais?

4ª Questão - Você acha que existem mais números racionais ou irracionais? Por quê?

5ª Questão - Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta.

Números	Racional	Irracional	
$\sqrt{2}$			
$\sqrt{3}$			
$\sqrt[3]{125}$			
$\frac{\sqrt{5}}{2}$			
3,1416			
$1{,}1333\ldots = 1{,}1\underline{3}$			
π			
$\frac{4\pi}{3}$			

6ª Questão – Em geometria, você estudou a circunferência. O quociente C/2r, em que c é o comprimento da circunferência e r é seu raio, é um número racional ou irracional? Você se recorda que número é esse?

7ª Questão - Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.
(B) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma parte que se repete (a chamada dízima periódica).
(C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.
(D) não me recordo de ter estudado a representação decimal de um número irracional.

8ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles que aparecem no quadro da questão 5? Caso conheça, dê algum exemplo.

APÊNDICE B – Questionário Final

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

matemática LICENCIATURA

Curso: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA 2024.1

Disciplina: TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES

ORIENTANDO: LEONARDO CORRÊA DE CASTRO

APLICAÇÃO

Você já estudou os conjuntos dos números naturais (IN), inteiros (), racionais () e reais (IR). Esse questionário faz parte de uma pesquisa que procura investigar quais são as suas percepções sobre os números irracionais. Não é preciso se preocupar se sua resposta vai estar certa ou errada. O importante, para nós, é que você consiga mostrar seus conhecimentos sobre o assunto. Portanto, tente responder todas as perguntas, usando suas próprias palavras, de acordo com o que você se lembra.

1ª Questão – Os números abaixo são racionais ou irracionais? Marque com um X a alternativa correta:

Números	Racional	Irracional
$\sqrt{2}$		
$\sqrt{3}$		
$\sqrt[3]{125}$		
$\frac{\sqrt{5}}{2}$		
$3{,}1416$		
$1{,}1333\ldots = 1{,}1\overline{3}$		
π		
$\frac{4\pi}{3}$		

2ª Questão – Você conhece outros números irracionais além daqueles assinalados por você no quadro da questão anterior? Caso conheça, dê algum(ns) exemplo(s).

3ª Questão – Quando escrevemos um número irracional na forma decimal, obtemos:

(A) um número inteiro.

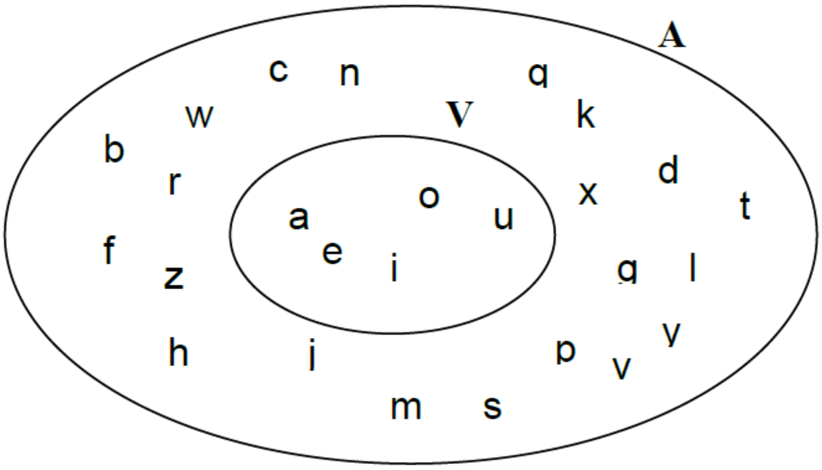
(B) um número decimal exato, ou seja, com um número finito de algarismos na parte não inteira.

(C) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente (chamado de dízima periódica).

(D) um número decimal cuja parte não inteira possui infinitos algarismos e não há uma parte que se repete, ou seja, não é uma dízima periódica.

4ª Questão – Em matemática, um conjunto é um grupo de objetos, chamados de elementos, que em geral possuem alguma característica em comum.

Por exemplo, o conjunto das vogais pode ser escrito como V = {a, e, i, o, u}, e o conjunto de todas as letras do alfabeto, por A = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}. Uma outra representação desses dois conjuntos, ressaltando que V está contido em A, é o que chamamos de representação por meio de diagramas. A figura a seguir ilustra como essa representação pode ser feita.



Você se lembra de ter estudado os conjuntos numéricos representados por diagramas? Faça um desenho do que você se recorda de ter estudado.

5ª Questão – Na questão anterior, observou-se que o conjunto V está contido no conjunto A. Também há conjuntos numéricos que estão contidos em outros conjuntos numéricos, como por exemplo, o conjunto dos números irracionais, que está contido no conjunto dos números reais. Você se recorda o que são números irracionais?

____

____

6ª Questão – Da mesma forma que o conjunto dos números irracionais, o conjunto dos números racionais também está contido no conjunto dos números reais. Você saberia dizer qual a diferença entre números racionais e irracionais?

____

____

7ª Questão – Qual dos conjuntos você acha que possui mais elementos, o dos racionais, ou o dos irracionais? No que você pensou para dar esta resposta?

____

____

APÊNDICE C – Versão Inicial do Roteiro de Entrevistas

Roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

1) Como o(a) senhor(a) define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

2) Quais estratégias o(a) senhor(a) utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

3) Como o(a) senhor(a) aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas? O diagrama de Venn é utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos?

4) Qual sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

5) Na sua opinião, qual a importância do livro didático no ensino dos números irracionais?

6) Quais são os principais desafios que o(a) senhor(a) enfrenta ao ensinar os números irracionais?

7) Como o(a) senhor(a) avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

8) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

9) Como o(a) senhor(a) conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações práticas? (Senos e cossenos, base do log natural, os próprios logaritmos, exponenciais de expoente racional, etc.)

APÊNDICE D – Versão Final do Roteiro de Entrevistas

Roteiro da entrevista para os professores regentes das turmas dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

1) Quais estratégias você utiliza para ensinar os números irracionais em suas aulas?

2) Quais são os principais desafios que você enfrenta ao ensinar os números irracionais?

3) Como você define os números irracionais para seus alunos do Ensino Médio?

4) Como você aborda a relação entre números irracionais e números racionais em suas aulas?

5) O diagrama de Venn é muito utilizado como ferramenta para ensinar os conjuntos numéricos, você utiliza? Utiliza alguma outra representação para esses conjuntos?

6) Quando estudamos os conjuntos numéricos na graduação, aprendemos que os conjuntos N, Z e Q têm a mesma cardinalidade, que é menor do que a do conjunto dos irracionais (R - Q). Levando isso em consideração, qual a sua opinião sobre o impacto do uso do diagrama de Venn na percepção dos alunos sobre a relação entre as cardinalidades (o número de elementos) dos conjuntos numéricos?

7) Você utiliza o livro didático no ensino dos números irracionais?

8) Como você avalia a compreensão dos alunos sobre números irracionais?

9) Qual é a importância, na sua opinião, de os alunos do Ensino Médio compreenderem os números irracionais?

10) Você conecta o conceito de números irracionais com situações do cotidiano ou aplicações dentro da matemática ou fora dela? Quais seriam?