

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**  
**CAMPUS CAMPOS CENTRO**  
**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ANA LAURA BARRETO DE ALMEIDA**

**RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma Intervenção  
Pedagógica contextualizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais**

**Campos dos Goytacazes/ RJ**

Maio – 2025

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE**  
**CAMPUS CAMPOS CENTRO**  
**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ANA LAURA BARRETO DE ALMEIDA

**RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma Intervenção  
Pedagógica contextualizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos  
Centro, como requisito parcial para conclusão do  
Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Paula Rangel de  
Andrade

Campos dos Goytacazes/RJ

Maio – 2025

Biblioteca Anton Dakitsch  
CIP - Catalogação na Publicação

A447r Almeida, Ana Laura Barreto de  
Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental: uma Intervenção Pedagógica contextualizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Ana Laura Barreto de Almeida - 2025.  
219 f.: il. color.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

Trabalho de conclusão de curso (graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos Centro, Curso de Licenciatura em Matemática, Campos dos Goytacazes, RJ, 2025.  
Referências: f. 155 a 161.

1. Análise Combinatória. 2. Contextualização. 3. Teoria dos Campos Conceituais. I. Andrade, Ana Paula Rangel de, orient. II. Título.

ANA LAURA BARRETO DE ALMEIDA

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma Intervenção  
Pedagógica contextualizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos  
Centro, como requisito parcial para conclusão do  
Curso de Licenciatura em Matemática.

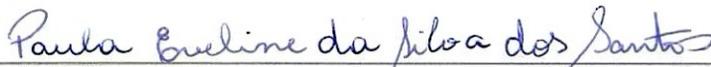
Aprovada em 23 de maio de 2025.

Banca Examinadora:



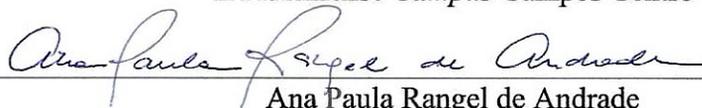
---

Carla Antunes Fontes  
Mestre em Matemática Aplicada/UFRJ  
IFFluminense *Campus* Campos Centro



---

Paula Eveline da Silva dos Santos  
Mestre em Matemática (PROFMAT)/UENF  
IFFluminense *Campus* Campos Centro



---

Ana Paula Rangel de Andrade  
Doutora em Planejamento Regional e Gestão da Cidade/UCAM  
IFFluminense *Campus* Campos Centro

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria, inicialmente, de agradecer à minha incrível orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Paula Rangel de Andrade, que esteve comigo durante toda essa caminhada, me incentivando, aconselhando e acalmado. Obrigada por confiar em mim.

Agradeço, também, à minha família, que sempre me ensinou a valorizar a educação e me estimulou a seguir essa caminhada.

Agradeço às professoras Carla Antunes Fontes e Paula Eveline da Silva dos Santos, por acompanharem este trabalho desde sua origem e aceitarem compor a banca examinadora.

Aos meus amigos, que aguentaram me ouvir falar desta pesquisa durante quase dois anos e que tornaram esse processo mais leve e divertido.

Agradeço aos professores da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense que fizeram parte da minha formação. Saibam que vocês me transformaram positivamente com seus ensinamentos, não somente como profissional, mas também como pessoa, e espero ser capaz de passá-los para frente.

[...] não é lógico nos atermos ao “que, como, por que e quando” ensinar sem procurar conhecer “a quem” ensinar. Permitir que os alunos se pronunciem é, antes de tudo, um sinal de respeito a eles e de crença neles.

Sergio Lorenzato

## RESUMO

A Análise Combinatória é comumente apresentada no Ensino Médio a partir da memorização de fórmulas. Essa prática dificulta o desenvolvimento do raciocínio combinatório do aluno, além de não levar em consideração as estratégias de resolução que ele utiliza. Além disso, o conteúdo é frequentemente abordado de forma desconectada com a realidade dos estudantes. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo identificar as contribuições de uma Intervenção Pedagógica contextualizada de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório. Para alcançar este objetivo, realizou-se uma pesquisa qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica, que se dividiu em três etapas: o Planejamento, a Implementação e a Avaliação. Durante o Planejamento, foram produzidos e aplicados o Questionário de interesses e a Primeira Lista de Exercícios em uma turma de 9º. ano do Ensino Fundamental, a fim de conhecer temas de interesse dos alunos e investigar as principais estratégias de resolução utilizadas por eles. A partir dos resultados, elaborou-se uma sequência didática, voltada para essa turma. As questões utilizadas nas listas de exercícios foram elaboradas pela autora e abordaram quatro diferentes classificações de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. A Implementação da ação interventiva foi realizada em um Instituto Superior de Educação do município de Campos dos Goytacazes e dividiu-se em dois encontros, totalizando 4 horas-aula. Como instrumentos de coleta de dados, utilizou-se a observação, as anotações no caderno de campo, as respostas dos alunos às atividades propostas, os questionários, as entrevistas semiestruturadas e a gravação em áudio. A turma em que foi feita a Intervenção Pedagógica contava com alguns alunos com necessidades educacionais especiais, para os quais foram elaborados materiais manipuláveis. Os dados coletados foram analisados à luz dos referenciais teóricos deste trabalho, em especial a Teoria dos Campos Conceituais. Os resultados indicam que a contextualização, quando feita levando em consideração a realidade e os interesses do aluno, é capaz de atrair e despertar a curiosidade no estudante. Foi possível identificar dificuldades na interpretação das questões e desafios quanto ao novo conteúdo. Apesar disso, notou-se um desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte de alguns estudantes nos quatro tipos de problemas apresentados. Por fim, foi elaborado um Produto Educacional voltado para professores.

**Palavras-chave:** Análise Combinatória. Contextualização. Teoria dos Campos Conceituais.

## **ABSTRACT**

Combinatorial Analysis is commonly presented in high school through the memorization of formulas. This practice hinders the development of students' combinatorial reasoning and fails to consider the problem-solving strategies they use. Furthermore, the content is often approached in a way that is disconnected from students' realities. In this context, the present study aims to identify the contributions of a contextualized Pedagogical Intervention in Combinatorial Analysis in elementary school, with an emphasis on combinatorial reasoning. To achieve this goal, a qualitative study of the Pedagogical Intervention type was conducted, divided into three stages: Planning, Implementation and Evaluation. During the Planning stage, an Interest Questionnaire and the First Exercise List were created and applied to a 9th-grade elementary school class in order to identify students' topics of interest and investigate the main problem-solving strategies they used. Based on the results, a didactic sequence was developed for this group. The questions used in the exercise lists were created by the author and addressed four different classifications of problems involving combinatorial reasoning. The Implementation of the intervention was carried out at a Higher Education Institute in the municipality of Campos dos Goytacazes and was divided into two sessions, totaling four class hours. Data collection instruments included observation, field notebook notes, students' responses to the proposed activities, questionnaires, semi-structured interviews, and audio recordings. The class in which the Pedagogical Intervention was carried out included some students with special educational needs (SEN), for whom manipulable materials were created. The collected data were analyzed considering the theoretical frameworks of this study, especially the Theory of Conceptual Fields. The results indicate that contextualization, when carried out with consideration of the students' reality and interests, can attract and spark curiosity in learners. Difficulties were identified in interpreting the questions and challenges related to the new content. Nevertheless, the development of some students' combinatorial reasoning across the four types of problems presented was observed. Finally, an Educational Product aimed at teachers was developed.

**Keywords:** Combinatorial Analysis. Contextualization. Theory of Conceptual Fields.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Resolução de um problema de permutação a partir do uso de listagens (a), desenhos (b) e quadros (c).....	28
Figura 2 – Questão sobre escolha de pares para uma festa junina .....	36
Figura 3 – Questão sobre eleição para vereador.....	37
Figura 4 – Questão envolvendo uma sessão de cinema .....	37
Figura 5 – Questão sobre o Mercado Comum do Sul.....	38
Figura 6 – Questão envolvendo uma final olímpica de natação.....	38
Figura 7 – Questão sobre a turnê da Taylor Swift.....	39
Figura 8 – Questão envolvendo o jogo Twister.....	39
Figura 9 – Questão envolvendo o mapeamento de uma sala de aula .....	40
Figura 10 – Questão sobre os jogos de vôlei nas Olimpíadas de Paris .....	40
Figura 11 – Questão envolvendo o jogo Among Us .....	41
Figura 12 – Questão sobre o jogo de tabuleiro “Detetive” .....	41
Figura 13 – Questão envolvendo a rede social “Instagram” .....	42
Figura 14 – Resoluções corretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios .....	45
Figura 15 – Resoluções incorretas da primeira questão envolvendo listagem incompleta e desenho.....	45
Figura 16 – Resoluções incorretas da primeira questão utilizando diagrama de árvore e listagem.....	46
Figura 17 – Solução correta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios .....	46
Figura 18 – Resoluções incorretas da segunda questão.....	47
Figura 19 – Resolução correta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios.....	48
Figura 20 – Solução incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios .....	48
Figura 21 – Resoluções incorretas da quinta questão que chegaram próximo do resultado ....	49
Figura 22 – Resoluções incorretas da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios.....	50
Figura 23 – Slides do primeiro item da questão envolvendo a série “Cobra Kai” .....	51
Figura 24 – Slide do segundo item da questão envolvendo Cobra Kai.....	52
Figura 25 – Vídeo apresentado para a segunda questão da Segunda Lista de Exercícios.....	52
Figura 26 – Slide da questão dois da Segunda Lista de Exercícios.....	53
Figura 27 – Slide da terceira questão da Segunda Lista de Exercícios .....	53
Figura 28 – Slide da quarta questão da Segunda Lista de Exercícios .....	54
Figura 29 – Slide da quinta questão da Segunda Lista de Exercícios .....	54

Figura 30 – Vídeo apresentado para a sexta questão da Segunda Lista de Exercícios.....	55
Figura 31 – Slide da sexta questão da Segunda Lista de Exercícios .....	55
Figura 32 – Slide da sétima questão da Segunda Lista de Exercícios.....	56
Figura 33 – Slide da oitava questão da Segunda Lista de Exercícios.....	57
Figura 34 – Slide da nona questão da Segunda Lista de Exercícios.....	57
Figura 35 – Slides do Segundo Teste Exploratório sobre o referencial teórico e os aspectos metodológicos.....	59
Figura 36 – Slides do Segundo Teste Exploratório sobre o Planejamento e os resultados do Questionário de interesses .....	60
Figura 37 – Slide do Segundo Teste Exploratório sobre alunos com NEE.....	61
Figura 38 -Pergunta adicionada no Questionário de interesses .....	63
Figura 39 – Alteração na quinta questão da Primeira Lista de Exercícios .....	64
Figura 40 – Uma das questões descartadas do Banco de Questões.....	65
Figura 41 – Alteração na primeira questão da Primeira Lista de Exercícios .....	66
Figura 42 – Alteração na segunda questão da Primeira Lista de Exercícios.....	66
Figura 43 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (I) .....	76
Figura 44 – Respostas corretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	77
Figura 45 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (III).....	77
Figura 46 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV).....	78
Figura 47 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (V).....	78
Figura 48 – Resolução da primeira questão utilizando a listagem, porém sem resultado final	79
Figura 49 – Resolução da primeira questão utilizando a listagem e contando possibilidades a mais.....	79
Figura 50 – Respostas incorretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (I) ....	80
Figura 51 – Resposta incorreta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	80
Figura 52 – Resposta incorreta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (III).....	81
Figura 53 – Respostas incorretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV) ..	81
Figura 54 – Resposta correta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios.....	82
Figura 55 – Respostas incorretas da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (I).....	83
Figura 56 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	84
Figura 57 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (III) .....	84
Figura 58 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (IV).....	84
Figura 59 – Respostas incorretas da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (V) ....	85
Figura 60 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (VI).....	86

Figura 61 – Resposta correta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios .....	86
Figura 62 – Resposta incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (I) .....	87
Figura 63 – Resposta incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (II).....	87
Figura 64 – Resposta incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (III) .....	87
Figura 65 – Respostas incorretas da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV) ....	88
Figura 66 – Respostas incorretas da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (V) ....	89
Figura 67 – Solução não compreendida da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios .	89
Figura 68 - Resposta correta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (I).....	90
Figura 69 - Resposta correta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	91
Figura 70 - Resposta incorreta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (I).....	91
Figura 71 – Solução não compreendida da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios ...	91
Figura 72 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (I).....	93
Figura 73 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (II).....	93
Figura 74 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (III) .....	94
Figura 75 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (IV) .....	94
Figura 76- Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (V).....	94
Figura 77 - Respostas incorretas da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (VI).....	95
Figura 78 – Solução não compreendida da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios ...	95
Figura 79 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (I).....	97
Figura 80 – Respostas incorretas da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	97
Figura 81 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (III) .....	98
Figura 82 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (IV).....	98
Figura 83 – Respostas incorretas da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (V).....	98
Figura 84 – Solução não compreendida da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios ...	100
Figura 85 – Slide da quinta questão utilizado na Correção dos Exercícios.....	101
Figura 86 – Resposta de uma licencianda para a primeira pergunta do questionário .....	101
Figura 87 – Resposta de uma licencianda para a terceira pergunta do questionário .....	102
Figura 88 – Questões não corrigidas durante a aula.....	103
Figura 89 – Alteração no enunciado da questão envolvendo o conceito de códon.....	104
Figura 90 – Alteração da figura utilizada na questão envolvendo futebol .....	105
Figura 91 – Enunciado da questão envolvendo a criptografia antes das alterações propostas .....	106
Figura 92 – Alteração na questão envolvendo a criptografia .....	106
Figura 93 – Adaptação da questão envolvendo as eleições municipais .....	108

Figura 94 – Interpretação da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore .....	110
Figura 95 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (I) .....	110
Figura 96 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (II) .....	111
Figura 97 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (III).....	111
Figura 98 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (IV) .....	112
Figura 99 – Interpretação da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore .....	113
Figura 100 – Apresentação de soluções incorretas da questão 2 da Primeira Lista de Exercícios (I) .....	113
Figura 101 – Apresentação de soluções incorretas da questão 2 da Primeira Lista de Exercícios (II).....	114
Figura 102 – Apresentação de uma solução correta da questão 3 da Primeira Lista de Exercícios .....	115
Figura 103 – Interpretação da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore .....	115
Figura 104 - Apresentação de soluções incorretas da questão 3 da Primeira Lista de Exercícios (I) .....	116
Figura 105 – Quadro do Torneio de Karatê com uma das possibilidades.....	117
Figura 106 – Árvore de possibilidades da primeira questão da Segunda Lista de Exercícios	118
Figura 107 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 2 da Segunda Lista de Exercícios .....	119
Figura 108 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 2 da Segunda Lista de Exercícios .....	121
Figura 109 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 3 da Segunda Lista de Exercícios .....	122
Figura 110 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 4 da Segunda Lista de Exercícios .....	123
Figura 111 – Utilização da árvore de possibilidades na questão 4 da Segunda Lista de Exercícios .....	124

Figura 112 – Escrita no quadro de alguns jogadores mencionados pelos estudantes.....	124
Figura 113 – Listagem de alguns possíveis códigos da questão 6 da Segunda Lista de Exercícios .....	126
Figura 114 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 6 da Segunda Lista de Exercícios .....	126
Figura 115 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 7 da Segunda Lista de Exercícios .....	127
Figura 116 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 8 da Segunda Lista de Exercícios .....	128
Figura 117 – Utilização da árvore de possibilidades na questão 8 da Segunda Lista de Exercícios .....	128
Figura 118 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 9 da Segunda Lista de Exercícios .....	129
Figura 119 – Árvore de possibilidades desenvolvida em uma folha imantada .....	134
Figura 120 – Material manipulável elaborado para a primeira questão .....	135
Figura 121 – Material manipulável elaborado para a segunda questão.....	136
Figura 122 – Material manipulável elaborado para a terceira questão.....	136
Figura 123 – Material manipulável elaborado para a quarta questão.....	137
Figura 124 – Material manipulável elaborado para a quinta questão.....	138
Figura 125 – Material manipulável elaborado para a sexta questão.....	138
Figura 126 – Utilização do material manipulável para desenvolver a árvore de possibilidades .....	141
Figura 127 – Utilização do material manipulável na questão 1 da Lista de Exercícios Adaptados .....	142
Figura 128 – Soluções de A1 (a), A2 (b) e A3 (c) para a questão 2 da Lista de Exercícios Adaptados .....	143
Figura 129 – Utilização do material manipulável na questão 3 da Lista de Exercícios Adaptados .....	144
Figura 130 – Soluções de A1 (a), A2 (b) e A3 (c) para a questão 3 da Lista de Exercícios Adaptados .....	144
Figura 131 – Soluções de A1 (a) e A2 (b) para a questão 4 da Lista de Exercícios Adaptados .....	146
Figura 132 - Solução de A3 para a questão 4 da Lista de Exercícios Adaptados .....	147

Figura 133 – Resposta de um aluno com NEE para a questão 5 da Lista de Exercícios	
Adaptados .....	147
Figura 134 – Utilização do material manipulável para a questão 6 da Lista de Exercícios	
Adaptados .....	148
Figura 135 – QR Code do Produto Educacional .....	151

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Respostas dos alunos à primeira pergunta do Questionário de interesses.....	67
Gráfico 2 – Resposta dos alunos à segunda pergunta do Questionário de interesses.....	68
Gráfico 3 – Resposta dos alunos à terceira pergunta do Questionário de interesses.....	68
Gráfico 4 – Respostas dos alunos à quarta pergunta do Questionário de interesses .....	69
Gráfico 5 – Respostas dos alunos à quinta pergunta do Questionário de interesses .....	70
Gráfico 6 – Respostas dos alunos à sexta pergunta do Questionário de interesses .....	71
Gráfico 7 – Resposta dos alunos à sétima pergunta do Questionário de interesses .....	72
Gráfico 8 – Resposta dos alunos à oitava pergunta do Questionário de interesses .....	72
Gráfico 9 – Respostas dos alunos à nona pergunta do Questionário de interesses .....	73
Gráfico 10 – Respostas dos alunos à décima pergunta do Questionário de interesses.....	73
Gráfico 11 – Respostas dos alunos à décima segunda pergunta do Questionário de interesses .....	74
Gráfico 12 – Respostas dos alunos à décima terceira pergunta do Questionário de interesses	75
Gráfico 13 – Respostas dos alunos para a primeira questão da Primeira Lista de Exercícios .	76
Gráfico 14 – Respostas dos alunos para a segunda questão da Primeira Lista de Exercícios ..	82
Gráfico 15 – Respostas dos alunos para a terceira questão da Primeira Lista de Exercícios ...	86
Gráfico 16 – Respostas dos alunos para a quarta questão da Primeira Lista de Exercícios .....	90
Gráfico 17 – Respostas dos alunos para a quinta questão na Primeira Lista de Exercícios .....	92
Gráfico 18 – Respostas dos alunos para a sexta questão da Primeira Lista de Exercícios.....	96

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Esquema de um problema de isomorfismo de medidas.....	29
Tabela 2 – Esquema de um problema de isomorfismo de medidas envolvendo divisão .....	29
Tabela 3 – Generalização de um problema de produto cartesiano .....	30

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>O estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>A Contextualização no processo de ensino e aprendizagem</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>Caracterização da pesquisa</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Detalhamento da Intervenção Pedagógica</b>	<b>33</b>
3.2.1	O Planejamento	33
3.2.1.1	Elaboração do Questionário de interesses	34
3.2.1.2	Elaboração do Banco de Questões	35
3.2.1.3	Elaboração do Questionário para o Primeiro Teste Exploratório	42
3.2.1.4	Aplicação do Primeiro Teste Exploratório	43
3.2.1.5	Aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios	43
3.2.1.6	Elaboração da sequência didática	44
3.2.1.7	Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com os alunos	57
3.2.1.8	Elaboração do Questionário para o Segundo Teste Exploratório	58
3.2.1.9	Aplicação do Segundo Teste Exploratório	59
3.2.2	A Implementação	61
3.2.3	A Avaliação	62
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>Primeiro Teste Exploratório</b>	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>Análise dos dados do Questionário de interesses</b>	<b>66</b>
<b>4.3</b>	<b>Análise dos dados da Primeira Lista de Exercícios</b>	<b>75</b>
<b>4.4</b>	<b>Segundo Teste Exploratório</b>	<b>100</b>
<b>4.5</b>	<b>Implementação e Avaliação</b>	<b>109</b>
4.5.1	Aplicação da sequência didática	109
4.5.2	Entrevista semiestruturada com os alunos	129
<b>5</b>	<b>ALUNOS COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS</b>	<b>133</b>
<b>5.1</b>	<b>Planejamento</b>	<b>133</b>
5.1.1	Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com uma mediadora	133

5.1.2	Elaboração do material adaptado para os alunos com necessidades educacionais especiais	133
5.1.3	Elaboração do Questionário para uma das mediadoras	139
<b>5.2</b>	<b>Implementação e Avaliação</b>	<b>139</b>
5.2.1	Entrevista semiestruturada com uma mediadora	139
5.2.2	Aplicação do material adaptado	140
5.2.3	Aplicação do Questionário com a mediadora	149
<b>6</b>	<b>PRODUTO EDUCACIONAL</b>	<b>151</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>152</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>155</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>162</b>
	<b>APÊNDICE A – Questionário de interesses</b>	<b>163</b>
	<b>APÊNDICE B – Banco de Questões</b>	<b>167</b>
	<b>APÊNDICE C – Questionário para o Primeiro Teste Exploratório</b>	<b>173</b>
	<b>APÊNDICE D – Slides da Primeira Lista de Exercícios</b>	<b>177</b>
	<b>APÊNDICE E – Slides da Segunda Lista de Exercícios</b>	<b>185</b>
	<b>APÊNDICE F – Roteiro de perguntas para a entrevista com os alunos</b>	<b>193</b>
	<b>APÊNDICE G – Questionário aplicado no Segundo Teste Exploratório</b>	<b>195</b>
	<b>APÊNDICE H – Slides utilizados no Segundo Teste Exploratório</b>	<b>198</b>
	<b>APÊNDICE I – Roteiro de perguntas para a entrevista com a mediadora</b>	<b>208</b>
	<b>APÊNDICE J – Lista de Exercícios Adaptados</b>	<b>210</b>
	<b>APÊNDICE K – Questionário para a mediadora</b>	<b>217</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A motivação para a escolha do tema do presente trabalho se deu em virtude da admiração da autora pelo conteúdo de Análise Combinatória aliada à sua curiosidade em buscar diferentes maneiras para solucionar um mesmo problema. Além disso, a participação como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) foi essencial para reacender o interesse pelo tema, visto que esse assunto foi abordado pelo professor supervisor com alunos da terceira série do Ensino Médio em um enfoque com base na memorização de fórmulas.

Apesar de constituir um recurso significativo para a resolução de problemas de Análise Combinatória, o destaque dado à utilização de fórmulas comumente gera uma limitação dos problemas a serem resolvidos e das estratégias empregadas nas resoluções, restringindo o estudo desse tema (Santos, 2019).

Montenegro (2018) defende que, embora seja mais comum o ensino de Combinatória no Ensino Médio, por meio do uso de fórmulas, é necessário que suas relações e propriedades sejam abordadas desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, Vergnaud (1986) ressalta que o desenvolvimento dos conhecimentos é um processo muitas vezes lento, sendo mais eficiente ir aprofundando as informações e introduzindo situações cada vez mais complexas o longo dos anos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) reforçam a importância do trabalho com a resolução de problemas de contagem no Ensino Fundamental, que irá permitir ao aluno desenvolver uma maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema que envolvam uma contagem sistematizada, além de servir como base para outros conteúdos, como probabilidade e estatística.

Vergnaud (1986) destaca que o saber é formado a partir de problemas a resolver e que as concepções dos alunos são modeladas a partir das situações enfrentadas por ele. Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais, concebida por Vergnaud, considera que a análise de uma única situação é capaz de evocar diversos conceitos e, de forma análoga, um único conceito precisa ser explorado por meio de uma classe de situações para que todas as suas propriedades sejam trabalhadas (Vergnaud, 1986).

Ademais, o desenvolvimento do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico favorece o exercício de uma cidadania plena, crítica e criativa, visto que as habilidades que permeiam esses raciocínios apresentam grande importância nos dias atuais devido à rápida circulação de informações (Borba; Souza; Carvalho, 2018).

Borba (2010) defende que o pensamento combinatório pode começar a ser desenvolvido antes da aprendizagem formal do conteúdo por meio de experiências sociais, que englobam tanto as vivências que têm como cenário contextos escolares quanto as que ocorrem fora desse ambiente.

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM) (Brasil, 2000) afirmam que a contextualização permite que o aluno mobilize competências cognitivas adquiridas previamente a partir de outros âmbitos da vida pessoal, social e cultural.

Apesar disso, os PCN (Brasil, 1998a, p.37) reforçam que é “relativamente recente a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas”. Atualmente, a escola costuma se organizar a partir de uma idealização de como os conhecimentos devem ser ensinados e aprendidos, sem levar em consideração a influência que o contexto cultural exerce no desenvolvimento das habilidades cognitivas (Brasil, 1998a).

Nesse sentido, os PCN (Brasil, 1998b, p.25) defendem que:

A educação para a cidadania requer que questões sociais sejam apresentadas para a aprendizagem e a reflexão dos alunos, buscando um tratamento didático que contemple sua complexidade e sua dinâmica, dando-lhes a mesma importância das áreas convencionais. Com isso o currículo ganha em flexibilidade e abertura, uma vez que os temas podem ser priorizados e contextualizados de acordo com as diferentes realidades locais e regionais e que novos temas sempre podem ser incluídos.

Além disso, Pessoa e Borba (2010) afirmam que é necessário reconhecer o conhecimento do aluno e aproveitar os diferentes recursos utilizados pelos estudantes na resolução de problemas combinatórios para a formalização e aprofundamento do conteúdo. Vergnaud (2009b) ressalta ainda que os exercícios frequentemente dispõem de diversos meios para chegar à resposta correta, sendo essencial saber os caminhos traçados pelos alunos.

Diante do que foi exposto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições de uma Intervenção Pedagógica contextualizada de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório?

Visando responder o problema proposto foi traçado o seguinte objetivo: identificar as contribuições de uma Intervenção Pedagógica contextualizada de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório.

A fim de alcançar esse objetivo, foi adotada a metodologia de pesquisa qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica. Os instrumentos de coleta dados utilizados foram a observação

da participação dos alunos, as anotações realizadas no caderno de campo, as respostas dos estudantes às atividades propostas, a aplicação de um questionário com os alunos e outro com uma mediadora dos alunos com necessidades educacionais especiais (NEE), uma entrevista semiestruturada com uma mediadora e outra com os estudantes e a gravação em áudio das entrevistas.

Vale ressaltar que a sequência didática foi elaborada de forma personalizada, ou seja, foi pensada para uma determinada turma. Além disso, as questões, com exceção de uma, são autorais, elaboradas pela autora para este trabalho.

Também foram desenvolvidos materiais manipuláveis para os estudantes com necessidades educacionais especiais (NEE) presentes na turma. Esses materiais “são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa” (Passos, 2006, p.78).

Ao fim da pesquisa, foi elaborado um Produto Educacional com questões contextualizadas de Análise Combinatória. O produto tem como objetivo auxiliar professores na elaboração de sequências didáticas que possuam os mesmos propósitos da que foi criada pela autora.

Este trabalho se divide em sete capítulos, sendo eles: Introdução, Revisão de Literatura, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões, Alunos com Necessidades Educacionais Especiais, Produto Educacional e Considerações Finais. O capítulo da Revisão da Literatura está subdividido em três seções: a primeira aborda o estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, a segunda versa sobre a Contextualização no processo de ensino e aprendizagem e a terceira disserta sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. O terceiro capítulo trata dos Procedimentos Metodológicos, que compreendem a metodologia de pesquisa a ser adotada, o público-alvo, os instrumentos de coleta de dados e as etapas que foram desenvolvidas. Está dividido em duas seções: a Caracterização da pesquisa e o Detalhamento da Intervenção Pedagógica, composto pelo Planejamento, pela Implementação e pela Avaliação. O quarto capítulo apresenta os resultados e discussões dos Testes Exploratórios, da Primeira Lista de Exercícios, do Questionário de interesses e da Implementação da ação interventiva. O quinto capítulo versa sobre as fases da Intervenção Pedagógica aplicadas aos alunos com necessidades educacionais especiais (NEE). O sexto capítulo discorre sobre a elaboração do Produto Educacional. Por fim, o último capítulo expõe as considerações finais deste trabalho.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo aborda a fundamentação teórica da presente pesquisa e está dividido em três seções. A primeira discorre sobre o estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, a segunda trata da Contextualização no processo de ensino e aprendizagem e a terceira aborda a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

### 2.1 O estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental

A contagem sempre se constituiu em uma atividade importante para diversas funções humanas. Na Antiguidade (cerca de 4000 a.C. até 476 d.C), essa tarefa era muitas vezes utilizada como uma forma de controle, comum durante trocas de mercadorias, mas com o tempo, os problemas desta natureza foram evoluindo conforme a necessidade da sociedade e se tornando cada vez mais complexos (Santos, 2019). Sendo assim, tornou-se necessário o desenvolvimento de diversos métodos e técnicas de contagem (Santos, 2019). A área da Matemática que trata dessas técnicas é a Análise Combinatória (Dante, 2016; Iezzi *et al.*, 2016).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) defendem que a abordagem dos problemas de contagem em sala de aula deve ser feita com o intuito de possibilitar ao estudante o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo visando, posteriormente, a sua aplicação no estudo de probabilidades.

O raciocínio combinatório assume grande importância na Educação Básica, visto que esse pensamento está presente em diversas situações cotidianas, além de apresentar aplicação em outras áreas do conhecimento, tais como: Biologia, Química, Estatística e Ciências da Computação (Borba; Rocha; Azevedo, 2015; Borba, 2010). Ademais, os problemas de Análise Combinatória impulsionam o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e promovem uma sistematização na organização de dados, pois exigem uma análise minuciosa na busca por estratégias de resolução (Borba, 2010; Rocha; Borba, 2010). De acordo com os PCN:

[...] o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental (Brasil, 1997, p.137).

Na prática, a Análise Combinatória costuma gerar dificuldades em sala de aula devido a necessidade da compreensão plena das situações descritas e a engenhosidade indispensável para a solução dos problemas combinatórios (Morgado *et al.*, 2016). Uma das principais dificuldades desta área consiste em identificar os elementos a serem combinados e a técnica ideal para a solução de uma determinada conjuntura (Nascimento, 2018). Além disso, o uso excessivo de fórmulas descontextualizadas acaba se tornando um empecilho para a aprendizagem de Análise Combinatória, ocasionando, por vezes, um sentimento de insegurança durante a resolução dos problemas (Nascimento, 2018).

Apesar dessas dificuldades, o ensino de Análise Combinatória priorizando as fórmulas e a padronização das respostas é bem comum (Nascimento, 2018). Pessoa e Borba (2010) afirmam que a utilização das fórmulas pelos alunos de Ensino Médio frequentemente é realizada de maneira incorreta, indicando que o ensino desses conteúdos pode estar ocorrendo de forma inadequada, sem instigar o estudante a pensar sobre a lógica adotada para cada problema. Nesse sentido, Morgado *et al.* (2016, p.2) defendem que:

[...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Dessa forma, ao resolver um problema de Análise Combinatória, é necessário que o destaque não esteja na fórmula que deverá ser utilizada, mas na estratégia a ser pensada que melhor atenderá às condições da questão proposta (Santos, 2019).

Visando encontrar o método mais adequado para cada aluno, os PCN (Brasil, 1997) defendem a utilização de procedimentos diversos, tais como a construção do diagrama de árvore e de tabelas. Nesse sentido, Pessoa e Borba (2010) verificaram, em pesquisa com alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio, que a utilização de variadas formas de representação simbólica pelos discentes para a resolução de problemas de Combinatória estava presente. Além disso, foi possível observar que, mesmo entre os estudantes que já haviam tido contato formal com o conteúdo, muitos apresentavam preferência por técnicas menos formais (Pessoa; Borba, 2010).

Apesar dessa diversidade de resoluções, Nascimento (2018) afirma que, durante as aulas, as técnicas mais frequentes são a enumeração e o uso de fórmulas e que o diagrama de árvores é pouco utilizado. Sendo assim, é fundamental que as escolas aproveitem as estratégias desenvolvidas espontaneamente pelos estudantes, seja por meio de desenhos, diagramas ou

listagens, e os auxiliie no processo de formalização e aprofundamento desses conhecimentos (Borba, 2010; Pessoa; Borba, 2010).

Segundo Borba (2016a), o raciocínio combinatório está presente em diversas decisões do dia a dia, tais como a combinação da roupa a ser utilizada, o caminho a ser escolhido para ir de um lugar a outro ou até mesmo a opção dos componentes de uma determinada refeição. Nesse sentido, esse raciocínio começa a ser desenvolvido antes de seu ensino formal, a partir dessas experiências do cotidiano (Borba, 2016a).

Pessoa e Borba (2010), em seus estudos sobre Análise Combinatória na Educação Básica, verificaram que os alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental apresentaram uma melhora significativa no desempenho em relação aos estudantes dos Anos Iniciais, apesar de não terem visto esse conteúdo formalmente em sala de aula. Diante disso, as autoras afirmam que a maturidade e as experiências, mesmo as que não apresentam relação direta com o ensino da Análise Combinatória, influenciam diretamente na compreensão desse tema. Nesse sentido, Borba (2016a) afirma que os conhecimentos prévios, trazidos pelos alunos, podem facilitar a aprendizagem. Entretanto, ressalta a autora, é necessário também compreender as limitações desse conhecimento, que muitas vezes se demonstram insuficientes para a resolução de determinadas questões.

Devido à complexidade da Combinatória, Borba (2016b) defende que seus conceitos devem ser trabalhados desde cedo com os alunos, permitindo que eles se habituem a esse conhecimento. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), sugere que os problemas de contagem sejam introduzidos desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, começando com situações em que as soluções podem ser obtidas por meio da listagem de todos os casos possíveis e progredindo sua complexidade de acordo com o nível dos discentes. A partir do contato com esse conteúdo em diversos níveis da Educação Básica, o estudante apresentará maiores possibilidades de desenvolver o raciocínio combinatório e o pensamento hipotético-dedutivo intrínseco a esse estudo (Borba; Souza; Carvalho, 2018).

É importante instigar os alunos a raciocinar em Matemática, visto que as pessoas demonstram maior interesse em problemas desta área que permitem o emprego de diversos métodos e a troca de ideias, não apresentando uma solução única e fechada (Boaler, 2018). A Análise Combinatória, apesar de dispor de algumas técnicas gerais para a solução de alguns problemas, muitas vezes exige dos estudantes criatividade para buscar pensamentos válidos (Morgado *et al.*, 2016). Boaler (2018, p.30) defende que “Os pensadores eficientes são aqueles que estabelecem conexões, pensam logicamente e usam espaço, dados e números de modo criativo”.

Este trabalho propõe questões que instiguem os alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental a desenvolverem o raciocínio combinatório.

## **2.2 A Contextualização no processo de ensino e aprendizagem**

Boa parte do ensino de Matemática está associada a um tipo de aprendizagem que é feita a partir da reprodução, sobrepondo a memorização de técnicas e algoritmos ao entendimento dos conceitos e justificativas (Brasil, 1998a; Lima, 2018). Além disso, o conteúdo costuma ser ensinado de maneira isolada, sem buscar conexões com outras disciplinas ou com a realidade vivida pelos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento de uma visão de realidade segmentada (Brasil, 2000; Nogueira Neto, 2019).

De acordo com os PCN (Brasil, 1998a), o conhecimento prévio dos alunos não costuma ser levado em consideração durante o aprendizado nos componentes curriculares, desvalorizando os saberes adquiridos fora do ambiente escolar e privando os estudantes dessa conexão do conteúdo com as experiências pessoais. Nesse sentido, a BNCC (Brasil, 2018, p.9) apresenta como uma das competências gerais da Educação Básica:

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Biserra, Souza e Paz (2012) analisaram em sua pesquisa que alguns professores se limitam a iniciar suas explicações a partir apenas do conhecimento escolar, desconsiderando as experiências anteriores dos alunos ou abordando-as somente após a formalização do conteúdo.

Lima (2018) defende um ensino que considere as necessidades do indivíduo e da sociedade como ponto de partida e de chegada, visando uma aprendizagem que possua sentido para o aluno. Nesse sentido, “a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola” (Brasil, 2006, p.83).

Para Lima (2018), a contextualização é uma prática de ensino que busca permitir que os estudantes relacionem o conteúdo a ser aprendido com as suas necessidades e com outros temas que estejam conectados ao que está sendo estudado.

Porém, apesar da relevância da contextualização para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, é necessário compreender que os contextos podem apresentar sentidos diferentes para as pessoas, sendo fundamental levar em consideração a realidade sociocultural e os contextos que despertam maior interesse dos alunos e que serão relevantes para a formação do conhecimento (Fernandes, 2014).

Lima (2018, p.76) define contexto no ensino da Matemática:

[...] como sendo o conjunto de circunstâncias e detalhes que acompanham um conteúdo matemático e contribuem para aclará-lo. Desse modo, tudo o que contribui para a compreensão de um conteúdo matemático poderia ser considerado como contexto, quer seja um fato, uma experiência, um texto, um material de ensino, ou um outro conteúdo.

Biserra, Souza e Paz (2012) constataram em pesquisa com alguns professores que muitos deles possuem uma concepção de contexto bastante reduzida, trabalhando apenas com situações que envolvam a realidade. Nesse sentido, cabe ressaltar que essa ideia não deve se limitar apenas a questões que fazem parte do dia a dia do estudante, pois existem diversos elementos que podem contribuir na atribuição de significado ao tópico a ser trabalhado (Brasil, 1998a).

Lima (2018) defende que a contextualização no ensino não deve reduzir o conteúdo ao cotidiano do aluno, visto que as necessidades dos indivíduos não são constituídas apenas por aquelas que podem ser identificadas nitidamente. A autora ainda afirma que limitar os conteúdos a uma necessidade imediata pode resultar na alienação, por apresentar apenas uma visão parcial da realidade, e reforça que, para diversos estudantes, a escola representa a única possibilidade de ampliar a percepção de mundo.

Dessa maneira, a contextualização deve ir na direção contrária do isolamento do conteúdo e da desvinculação desse conteúdo com sua História, suas aplicações ou outros temas relacionados (Lima, 2018). Fernandes (2014) ressalta ainda que a aprendizagem exige uma modificação do conhecimento, sendo necessário apresentar situações em que os saberes prévios dos estudantes se mostrem insuficientes.

Os PCN (Brasil, 1997) recomendam trabalhar alguns significados de maneira interligada por meio de situações contextualizadas que sejam capazes de proporcionar o desenvolvimento da interpretação, da análise e da argumentação. A contextualização do conhecimento permite que o aluno assumira uma postura mais ativa diante do que está sendo aprendido, possibilitando aos estudantes aprendizagens que trazem significado para eles (Brasil, 2000).

Dessa forma, a utilização de métodos contextualizados no processo de ensino-aprendizagem de Matemática contribui para a formação de alunos mais conscientes e críticos, capazes de debater e questionar sobre situações da realidade (Pepe, 2019).

Apesar da importância da contextualização, Vasconcelos (2007 *apud* Ferreira, 2015) obteve, em pesquisa com professores, um relato de um educador que declarou que a contextualização poderia inclusive ser um dificultador no ensino da Matemática, pois, segundo ele, os alunos já apresentavam dificuldades em conteúdos que envolviam apenas o cálculo direto. Assim, incluí-los em problemas de aplicação geraria ainda mais dúvidas (Vasconcelos, 2007 *apud* Ferreira, 2015).

Além disso, os docentes ressaltaram que não costumam propor atividades contextualizadas devido à dificuldade em relacionar outros contextos com o conteúdo matemático a ser abordado e destacaram, ainda, a escassez de materiais capazes de orientar o professor para uma prática contextualizada (Vasconcelos, 2007 *apud* Ferreira, 2015).

Em relação à Análise Combinatória, Ferreira (2015) constatou, a partir da análise de alguns livros didáticos, que esse tema tem sido cada vez mais abordado de forma contextualizada, podendo ser uma contextualização interna da Matemática ou com o cotidiano do aluno. Apesar disso, alguns materiais ainda trabalham com a contextualização apenas no final da seção por meio de questões envolvendo situações do cotidiano do aluno, ausentes na explicação do conteúdo, podendo gerar dificuldades na resolução desses exercícios (Ferreira, 2015).

Este trabalho aborda a Análise Combinatória de maneira contextualizada, a partir de conexões com a realidade e com outros conteúdos. Além disso, elaborou-se um produto educacional com o intuito de auxiliar professores na elaboração de sequências didáticas que tragam questões contextualizadas, autorais com ênfase no raciocínio combinatório e embasadas na Teoria dos Campos Conceituais.

### **2.3 A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud**

Ao trabalhar a Análise Combinatória é importante verificar a maneira de pensar dos alunos sobre problemas desse campo, levando em consideração suas dificuldades, as estratégias de resolução propostas, os conhecimentos prévios desses estudantes e a forma como eles desenvolvem esse raciocínio ao longo dos anos (Pessoa, 2009).

Essa mobilização de saberes é a base dos estudos de Vergnaud (1983), que define Campo Conceitual como sendo um conjunto de problemas e situações que exigem a aplicação

de diferentes conceitos, procedimentos e representações profundamente interligados (Vergnaud, 1983).

Gérard Vergnaud nasceu no dia 8 de fevereiro de 1933 na França e faleceu em 6 de junho de 2021; formou-se em Psicologia e recebeu o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade de Genebra, local em que foi aluno de Jean Piaget (Souza; Dias; Barros; Jófili, 2010). Em 1977, desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais e atuou como responsável pelo Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS) da França de 1975 a 1995 (Souza; Dias; Barros; Jófili, 2010).

Segundo ele, analisar a aquisição de conceitos interligados separadamente pode ser desafiador, visto que muitas vezes esses conceitos são dependentes uns dos outros, além de serem apresentados aos alunos simultaneamente (Vergnaud, 1983). Ademais, é comum que os estudantes mobilizem diferentes procedimentos e representações simbólicas para o domínio de uma mesma classe de problemas (Vergnaud, 1983). Sendo assim, Vergnaud (1983, p.128, tradução nossa) defende que “a estrutura dos Campos Conceituais permite estudar a organização de ideias, conceituações e representações conectadas ao longo de um período de tempo suficiente para tornar a abordagem psicogenética<sup>1</sup> significativa”.

A Teoria dos Campos Conceituais considera que a conceitualização constitui parte central do desenvolvimento cognitivo (Vergnaud, 1996 *apud* Moreira, 2023). De acordo com Vergnaud (1986, p. 83-84):

um conceito pode ser definido, com efeito, como um *triplet* de três conjuntos (S, I, J):

S: o conjunto das situações que dão sentido ao conceito;

I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito;

J: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.

O significado de um conceito não pode ser obtido por meio de apenas uma situação, e da mesma forma uma situação não deve ser analisada a partir de um único conceito, mas sim de diversos conceitos, formando sistemas (Vergnaud, 2009a). Nesse sentido, trabalhar conceitos a partir de apenas uma situação ou simbolismo não permite evocar todos os esquemas disponíveis (Moreira, 2023). O esquema é definido como a organização sequencial do comportamento para uma determinada situação ou classe de situações (Vergnaud, 2009a).

---

<sup>1</sup> O método psicogenético estuda a origem e transformação do conhecimento, interessando-se das etapas mais elementares de sua construção progressiva (Estévez, 2022).

Em relação aos invariantes, Pessoa (2009) os divide em dois tipos: os do conceito e os operatórios. Os invariantes do conceito consistem em propriedades de um determinado conceito que permanecem inalteradas independente da situação em que ele esteja inserido (Pessoa, 2009). Na Análise Combinatória, um exemplo de invariante do conceito de arranjo é que a ordenação dos elementos gera novas possibilidades, pois trata-se de uma propriedade que se mantém constante (Pessoa, 2009; Moreira, 2021).

Já os invariantes operatórios são passos fundamentais para atingir a conceitualização e constituem-se em operações mentais que não variam para a formação de um conceito, sendo divididos em duas principais categorias: conceito-em-ação e teorema-em-ação (Pessoa, 2009).

Os teoremas-em-ação são definidos como proposições relacionais implícitas, ou seja, são concepções que orientam a resolução dos problemas e estabelecem uma relação entre elementos ou conceitos, podendo ser verdadeiros ou falsos (Pessoa, 2009). Um exemplo é o de crianças brincando em uma gangorra. Para equilibrar o brinquedo é necessário que a pessoa mais pesada se aproxime do ponto de apoio, enquanto o mais leve deve se manter em uma posição mais afastada. Apesar de não compreenderem, as crianças estão aplicando na prática o Princípio Universal da Alavanca, assim, utilizando-se de um teorema-em-ação (Pessoa, 2009).

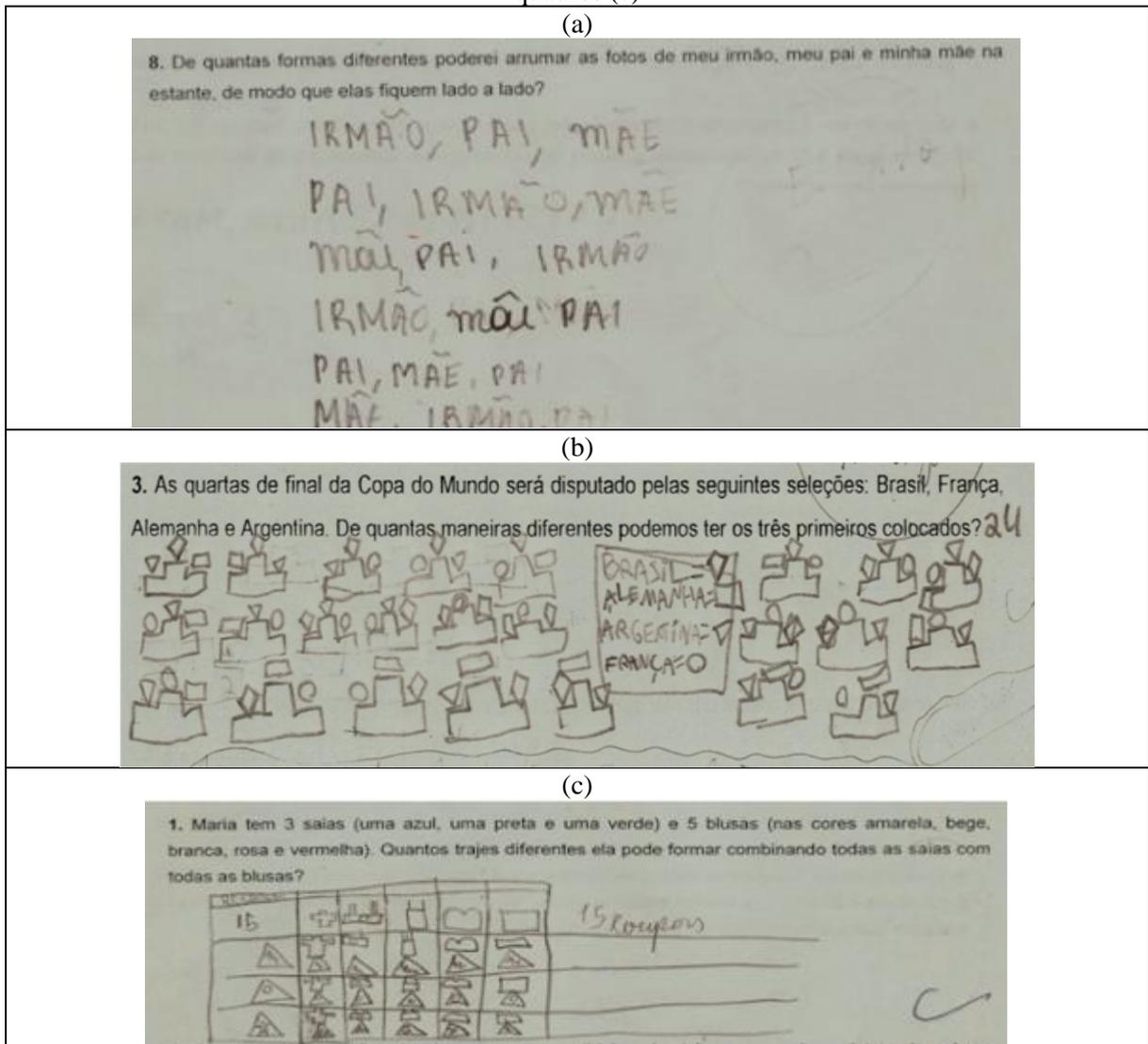
Os conceitos-em-ação consistem no uso prático de conceitos em desenvolvimento e podem ser considerados adequados ou inadequados para uma determinada classe de situações (Pessoa, 2009). Ao resolver problemas de permutação, por exemplo, o aluno pode listar sistematicamente as possibilidades mesmo sem compreender como se faz para obter todas as possíveis permutações dos elementos, assim fazendo uso do conceito-em-ação (Pessoa, 2009).

Apesar desses conhecimentos-em-ação serem muitas vezes utilizados de maneira inconsciente pelos sujeitos, eles desempenham papel fundamental para o avanço da compreensão de conceitos, pois possibilitam a reflexão sobre as relações e propriedades envolvidas nas situações (Pessoa, 2009). Dessa forma, é essencial atentar-se para as soluções e estratégias apresentadas pelos alunos e trabalhar os conceitos a partir das situações apontadas por eles, pois essa postura permite atuar de forma mais eficaz e mais próxima do nível em que os estudantes se encontram (Pessoa, 2009).

O terceiro conjunto a ser considerado na definição do que é um conceito é o das representações simbólicas que, segundo Vergnaud (2009a), é essencial, visto que sem a linguagem e os símbolos não seria possível comunicar ideias e experiências. Além disso, o pensamento normalmente é acompanhado, ou até mesmo impulsionado, por processos linguísticos e simbólicos (Vergnaud, 2009a).

Em seu trabalho, Pessoa (2009) expõe algumas das representações simbólicas utilizadas pelos alunos para a resolução das situações, sendo elas principalmente as listagens, os desenhos e os quadros e diagramas (Figura 1).

Figura 1 – Resolução de um problema de permutação a partir do uso de listagens (a), desenhos (b) e quadros (c)



Fonte: Pessoa, 2009, p. 2 (a), p. 45 (b), p.60 (c).

De acordo com Pessoa (2009), o conhecimento escolar é constituído pelo conhecimento cotidiano e científico. Vergnaud defende que a Teoria dos Campos Conceituais permite equilibrar esses dois conhecimentos, impedindo a educação escolar de se manter na dimensão empírica e também de se reduzir a uma ciência pura (Pessoa, 2009).

Diferente de Piaget que estudava o desenvolvimento intelectual com base nas capacidades gerais, Vergnaud considera necessário compreender as estruturas cognitivas a

partir da aquisição e desenvolvimento de conhecimentos específicos (Vergnaud, 1983; Pessoa, 2009).

Vergnaud (1983) concentrou seus estudos em dois principais campos conceituais: o das estruturas aditivas, que englobam problemas envolvendo noções e operações aritméticas do tipo aditivo, como a adição e a subtração, e o das estruturas multiplicativas que compreende as do tipo multiplicativo, como multiplicação, divisão, fração e razão. Para fins deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o foco será nas estruturas multiplicativas.

Assim como em todo campo conceitual, no campo das estruturas multiplicativas os estudantes são capazes de construir uma diversidade de conceitos que apresentam coerência em um grupo de problemas (Pessoa, 2009).

Vergnaud (1983) identificou três conjuntos diferentes de problemas nas estruturas multiplicativas: o isomorfismo de medidas, a proporção múltipla e o produto de medidas.

O isomorfismo de medidas envolve problemas de proporcionalidade direta entre duas medidas (Vergnaud, 1983). Uma questão desse tipo pode ser escrita da seguinte maneira: Ricardo comprou 4 bolos custando 15 reais cada. Quanto ele pagou?

Podemos representar esse problema a partir da Tabela 1:

Tabela 1 – Esquema de um problema de isomorfismo de medidas

Quantidade de Bolos	Preço (reais)
1	15
4	x

Fonte: Vergnaud (1983, p.129).

Além disso, essa categoria também abrange problemas de divisão que trabalham com proporção múltipla, como, por exemplo: Nove maçãs têm de massa 1,17 kg. Em média, qual a massa de uma maçã?

Esse exemplo pode ser representado a partir da Tabela 2:

Tabela 2 – Esquema de um problema de isomorfismo de medidas envolvendo divisão

Quantidade de Maçãs	Massa (kg)
9	1,17
1	x

Fonte: Vergnaud (1983, p.131).

A proporção múltipla abrange problemas em que uma medida é proporcional a duas outras que são independentes, e nenhuma dessas magnitudes pode ser reduzida ao simples

produto das outras (Vergnaud, 1983). Vergnaud (1983) traz como exemplo a produção de leite em uma fazenda, que é proporcional tanto a quantidade de vacas quanto ao período de tempo considerado para a análise.

O produto de medidas consiste em problemas com três variáveis envolvidas em que uma medida é o produto das outras duas (Vergnaud, 1983; Pessoa, 2009). De forma geral, problemas relativos à área, volume e produto cartesiano costumam ser categorizados como produto de medidas (Vergnaud, 1983; Pessoa, 2009). Dessa forma, encontrar a área de um retângulo ou descobrir o volume de um cilindro são considerados problemas pertencentes ao conjunto de produtos de medidas, visto que envolvem três magnitudes, sendo elas, no primeiro caso, a área, o comprimento e a largura, e no segundo caso o volume, a altura e a área da base (Vergnaud, 1983).

Outro problema que Vergnaud (1983) traz de produto de medida é o produto cartesiano, que ele exemplifica a partir da seguinte questão: Quatro meninas e três meninos estão em um baile. Se cada menino deseja dançar com todas as meninas e cada menina com todos os meninos, quantos casais diferentes de meninos e meninas são possíveis?

O Quadro 1 exibe as possibilidades de casais para esse problema.

Quadro 1 – Possibilidades de casais do problema

		Meninas			
		D	E	F	G
Meninos	A	AD	AE	AF	AG
	B	BD	BE	BF	BG
	C	CD	CE	CF	CG

Fonte: Vergnaud (1983, p.135).

A Tabela 3 apresenta uma generalização da questão acima.

Tabela 3 – Generalização de um problema de produto cartesiano

		Número de meninas				
		1	2	3	4	n
Número de meninos	1	1	2	3	4	n
	2	2	4	6	8	2n
	3	3	6	9	12	3n
	m	m	2m	3m	4m	mn

Fonte: Vergnaud (1983, p.135).

Apesar de Vergnaud tratar da Combinatória apenas a partir do produto cartesiano, será utilizada no presente trabalho a classificação de Pessoa (2009), que divide os problemas que

envolvem o raciocínio combinatório em quatro tipos: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação.

São considerados problemas de produto cartesiano aqueles em que dois ou mais conjuntos diferentes são combinados para formar um novo conjunto (Pessoa, 2009). O exemplo dado anteriormente é considerado produto cartesiano pois o conjunto de meninos e o conjunto de meninas são distintos e quando combinados formam um novo conjunto, que indica os pares para o baile (Vergnaud, 1983; Pessoa, 2009).

Os problemas de permutação simples (sem repetição) são caracterizados pelo uso de todos os elementos do conjunto em diferentes ordens (Pessoa, 2009). A formação de anagramas da palavra AMOR, por exemplo, é considerada uma questão de permutação, pois cada mudança na ordem em que as quatro letras são dispostas resulta em um novo anagrama, ou seja, AOMR é diferente de AORM (Pessoa, 2009).

Os problemas de arranjo simples (sem repetição) envolvem um conjunto com um número de elementos do qual são formados subconjuntos próprios em que a ordem desses elementos gera novas possibilidades (Pessoa, 2009). No caso de uma final de skate disputada por 8 esportistas, a classificação desses atletas entre as três primeiras colocações é compreendida como um problema de arranjo (Pessoa, 2009). Vale destacar que Pessoa (2009) não considera como arranjo questões em que o subconjunto formado equivale ao próprio conjunto, classificando essas como permutação.

Assim como em problemas de arranjo, a combinação simples (sem repetição) também envolve um grupo do qual são formados subconjuntos, porém a ordem desses elementos não gera novas possibilidades (Pessoa, 2009). A formação de uma comissão composta por três pessoas escolhidas dentre um grupo de cinco é considerada um problema de combinação, visto que uma comissão constituída por Pedro, Gabriel e Paula é a mesma que a formada por Paula, Pedro e Gabriel (Pessoa, 2009).

Embora os problemas possam ser classificados considerando qualquer um desses quatro tipos, as resoluções podem advir de caminhos distintos.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo trata sobre o tipo de pesquisa utilizado, os instrumentos de coleta de dados, o público-alvo e as etapas realizadas no desenvolvimento deste trabalho e está dividido em duas seções: a Caracterização da pesquisa e o Detalhamento da Intervenção Pedagógica, que envolve o Planejamento, a Implementação e a Avaliação.

#### 3.1 Caracterização da pesquisa

A metodologia adotada para esta pesquisa é a qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica. De acordo com André e Gatti (2008, p. 3), “A abordagem qualitativa defende uma visão holística dos fenômenos, isto é, que leve em conta todos os componentes de uma situação em suas interações e influências recíprocas”. Essa modalidade de pesquisa tem como um de seus objetivos romper com a divisão entre pesquisador, que costumava assumir uma posição de detentor do conhecimento, e pesquisado, que era reduzido a dados (André; Gatti, 2008, p. 4).

Sobre a metodologia do tipo Intervenção Pedagógica, Damiani *et al.* (2013, p.58) a define como sendo:

[...] investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências.

É possível perceber que essa abordagem convém ao presente trabalho, pela proposição de mudança na maneira como a Análise Combinatória pode ser estudada em sala de aula. Neste caso, evidenciando o raciocínio combinatório dos estudantes.

Os instrumentos de coleta de dados são: observação, anotações no caderno de campo, respostas dos alunos às atividades propostas, questionários, entrevistas semiestruturadas e gravação em áudio.

Gil (2021, p.137) define questionário como “a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc”. O autor ainda traz como vantagens desse método de coleta de dados a comodidade que oferece ao permitir que os pesquisados respondam no momento que for mais conveniente para eles, além de diminuir a influência do pesquisador nas

respostas.

Por outro lado, Lüdke e André (2017) afirmam que uma das vantagens da entrevista é permitir a apreensão da informação desejada de forma imediata e constante, além de possibilitar o aprofundamento de assuntos levantados a partir de outras técnicas de coleta de dados. A entrevista semiestruturada, utilizada neste trabalho, garante uma certa organização ao mesmo tempo que permite uma adequação em relação ao entrevistado (Gil, 2021).

O público-alvo desta pesquisa são alunos do 9º. ano do Ensino Fundamental. Essa escolha foi realizada levando em consideração que os estudantes não haveriam tido contato prévio com o conteúdo de Análise Combinatória de maneira formal.

Este trabalho foi dividido em quatro etapas, sendo elas:

- Revisão Bibliográfica;
- Planejamento da ação de intervenção com a elaboração de exercícios, questionários, roteiro de perguntas para as entrevistas, materiais adaptados, sequência didática e Testes Exploratórios;
- Implementação da ação interventiva por meio da aplicação da sequência didática;
- Avaliação desta ação, feita por meio dos instrumentos de coleta de dados mencionados anteriormente.

## **3.2 Detalhamento da Intervenção Pedagógica**

Esta seção é destinada ao Detalhamento da Intervenção Pedagógica, que está dividido em três etapas: o Planejamento, a Implementação e a Avaliação.

### **3.2.1 O Planejamento**

O Planejamento da Intervenção Pedagógica constitui-se da:

- elaboração do Questionário de interesses;
- elaboração do Banco de Questões;
- elaboração do questionário para o Primeiro Teste Exploratório;
- realização do Primeiro Teste Exploratório;
- aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios;
- elaboração da sequência didática;
- elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com os alunos;

- elaboração do questionário para o Segundo Teste Exploratório;
- realização do Segundo Teste Exploratório;

Vale ressaltar que também fizeram parte do Planejamento a elaboração: do roteiro de perguntas para a entrevista com uma mediadora, do material adaptado para os alunos com necessidades educacionais especiais e do questionário para uma mediadora, porém estes instrumentos serão apresentados no capítulo 5.

### **3.2.1.1 Elaboração do Questionário de interesses**

O Questionário de interesses (APÊNDICE A) foi elaborado com base no referencial sobre a contextualização que permite que “o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade” (Brasil, 2000).

Apesar disso, vale salientar que um mesmo contexto pode representar significados diferentes para as pessoas, sendo fundamental questionar se o contexto abordado desperta curiosidade na maioria da turma (Fernandes, 2014). Nesse sentido, Fernandes (2014, p.94) ressalta a “necessidade de o professor conhecer a realidade sociocultural dos seus alunos, visto que eles trazem consigo, para o interior da sala de aula, suas histórias de vida, as quais influenciam nos significados que serão atribuídos às atividades que realizarão”.

O Questionário é composto por treze perguntas que têm como objetivo identificar os assuntos de maior interesse para os estudantes. Os comentários apresentados nessa seção são referentes a versão final, definida após o Primeiro Teste Exploratório.

A primeira e a sétima questões trazem algumas opções de resposta, além de um item aberto para que eles possam acrescentar outras opções. Já as demais perguntas apresentam um espaço para o aluno discorrer.

A primeira pergunta busca averiguar os principais esportes praticados ou acompanhados pelos discentes.

O segundo questionamento indaga se os estudantes tocam algum instrumento e o terceiro busca saber se eles participam de algum grupo musical, como banda ou coral. O quarto trata de quais artistas do cenário cultural os alunos acompanham.

A quinta pergunta averigua quais livros os discentes têm lido recentemente, enquanto a sexta questiona a respeito dos filmes e séries assistidos por eles ultimamente.

A sétima pergunta indaga se os estudantes possuem o costume de jogar. A oitava questiona se os alunos colecionam algum objeto, como figurinhas ou histórias em quadrinhos.

A nona indagação busca averiguar quais disciplinas escolares despertam maior interesse nos estudantes e a décima, adicionada após o Teste Exploratório, investiga que tipo de atividades as aulas de Educação Física propõem.

A décima primeira pergunta indaga se eles participam de algum tipo de agremiação. A décima segunda questiona em quais situações os discentes utilizam senhas em seu cotidiano.

Apesar da décima e décima segunda questões não tratarem diretamente dos interesses dos estudantes, elas dão pistas de contextos que fazem parte da realidade deles e que podem ser trabalhados em problemas de Combinatória.

A última pergunta interroga se há outros temas que despertam interesse neles, além dos mencionados.

Os resultados da aplicação do Questionário de interesses serão exibidos no capítulo 4, seção 4.2.

### 3.2.1.2 Elaboração do Banco de Questões

O Banco de Questões (APÊNDICE B) é composto por doze exercícios e sua elaboração levou em consideração as quatro classificações de problemas envolvendo raciocínio combinatório trazidos por Pessoa (2009) e seus respectivos invariantes do conceito, apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Invariantes dos problemas envolvendo raciocínio combinatório

Classificação	Invariantes
Produto cartesiano	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto” (Pessoa, 2009, p. 78).</li> <li>• “A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado” (Pessoa, 2009, p. 78).</li> </ul>
Permutação simples	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez” (Pessoa, 2009, p.79).</li> <li>• “A ordem dos elementos gera novas possibilidades” (Pessoa, 2009, p.79).</li> </ul>
Arranjo simples	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os agrupamentos formados a partir de um conjunto envolvem subconjuntos próprios<sup>2</sup> (Pessoa, 2009).</li> <li>• “A ordem dos elementos gera novas possibilidades” (Pessoa, 2009, p.79).</li> </ul>
Combinação simples	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os agrupamentos formados a partir de um conjunto envolvem subconjuntos próprios (Pessoa, 2009).</li> <li>• “A ordem dos elementos não gera novas possibilidades” (Pessoa, 2009, p. 80).</li> </ul>

Fonte: Elaboração própria a partir de Pessoa (2009).

<sup>2</sup> Se A e B são conjuntos, A é subconjunto próprio de B se e somente se cada elemento de A está em B mas existe pelo menos um elemento de B que não está em A” (Costa *et al.*, 2023, p. 5).

A maioria das questões busca utilizar contextos que fazem parte da realidade dos estudantes desse nível de ensino e são de autoria própria, com exceção da primeira, que foi retirada de Pessoa (2009). Em algumas, busca-se trabalhar com temas atuais, como as eleições municipais e as Olimpíadas, que ocorreram em 2024, ano da aplicação das questões.

Nas demais, são trazidos outros contextos no sentido de ampliar a percepção dos estudantes quanto às aplicações de Combinatória (Lima, 2018). Lima (2018) afirma que a contextualização não deve tratar apenas da forma como o conteúdo está presente no cotidiano do aluno, mas também da sua relação com outros conteúdos e disciplinas.

Vale ressaltar que a elaboração das questões leva em consideração os invariantes do conceito de cada uma das classificações de problemas envolvendo raciocínio combinatório.

A primeira questão apresenta um problema de produto cartesiano e está inserida no contexto de escolha de casais para uma festa junina, questionando quantos pares compostos por um menino e uma menina podem ser formados de um grupo de 3 meninos e 4 meninas (Figura 2). Como a lista seria aplicada em agosto, o contexto foi considerado próximo, visto que os meses anteriores são conhecidos por essas festas.

Figura 2 – Questão sobre escolha de pares para uma festa junina

- |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Para a festa junina da escola, tem 3 meninos (Davi, Pablo e Heitor) e 4 meninas (Maria Eduarda, Sofya, Débora e Camila) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?<sup>1</sup></p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Adaptado de Pessoa (2009).

O segundo problema é de arranjo e envolve o cenário de uma eleição municipal, questionando de quantas seriam as possibilidades de números para um candidato a vereador de determinado partido (Figura 3).

Figura 3 – Questão sobre eleição para vereador

2. O número a ser digitado na urna eletrônica para vereador é composto por cinco dígitos. Os dois primeiros correspondem ao partido político e os três seguintes são os que identificam a candidata ou o candidato ao cargo.<sup>2</sup>



Um candidato a vereador do partido “PProf” deseja que os três últimos dígitos de seu número sejam pares diferentes de zero (2, 4, 6, 8) e que não haja repetição entre eles. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

Fonte: Elaboração própria.

O terceiro exercício da lista trata de um problema de permutação e aborda o contexto da quantidade de maneiras de se ocupar um determinado número de cadeiras em um cinema, questionando de quantas formas três pessoas podem ocupar três cadeiras para a sessão de um filme (Figura 4).

Figura 4 – Questão envolvendo uma sessão de cinema

3. Marcelo, Edgar e Thiago compraram três ingressos para uma sessão de cinema. De quantos modos eles podem ocupar as três poltronas? Considera-se um modo Marcelo ocupar a primeira poltrona, Edgar ocupar a terceira e Thiago ocupar a segunda.

Fonte: Elaboração própria.

A quarta questão é classificada como um problema de combinação e trata do bloco econômico Mercosul e os países que o compõem (Figura 5).

Figura 5 – Questão sobre o Mercado Comum do Sul

4. O Mercado Comum do Sul (Mercosul) é um bloco econômico que tem como objetivo principal propiciar um espaço comum capaz de gerar oportunidades comerciais e de investimentos mediante a integração competitiva das economias nacionais ao mercado internacional<sup>3</sup>. Em uma prova de geografia, é perguntado quais países compõem esse bloco econômico. Um aluno lembra que o Mercosul é formado pelo Brasil, Argentina, Uruguai e outros 2 países da América do Sul e que o continente é composto por 12 países. De quantas tentativas o estudante precisará para garantir que ele acertará a questão?

Fonte: Elaboração própria.

O quinto problema é de arranjo e está inserido no contexto dos resultados possíveis de uma final olímpica de natação, questionando quantas seriam as possibilidades para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final disputada por oito atletas (Figura 6). Durante a elaboração, cogitou-se diminuir o número de atletas, com o objetivo de diminuir o número de possibilidades, porém foi considerado que essa alteração comprometeria a veracidade do contexto utilizado, visto que uma final olímpica de natação é disputada por oito pessoas.

Figura 6 – Questão envolvendo uma final olímpica de natação

5. Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de natação que é disputada por 8 atletas?



Fonte: Elaboração própria.

A sexta questão trata de um problema de arranjo e está inserida no contexto da ordem das músicas que a cantora Taylor Swift executará em uma turnê. Durante as performances, a artista escolhia duas de suas composições que ainda não haviam sido cantadas em shows anteriores e tocava uma no violão e outra no piano. Nesse contexto, o exercício questiona quantas são as configurações de apresentação para o próximo show, sabendo que apenas catorze canções ainda não foram utilizadas (Figura 7).

Figura 7 – Questão sobre a turnê da Taylor Swift

6. Durante a “The Eras Tour”, a Taylor Swift estabeleceu que cantará duas músicas especiais, além do setlist já programado, em cada show — e não irá repeti-las em nenhum outro lugar. A primeira música é tocada no violão e a segunda no piano. Sabendo que apenas 14 de suas canções ainda não foram utilizadas e levando em consideração que tocar ‘Me!’ no violão e ‘So it goes’ no piano gera uma possibilidade diferente de tocar ‘So it goes’ no violão e ‘Me!’ no piano, quantas são as combinações de apresentação para o próximo show?

Fonte: Elaboração própria.

O sétimo exercício é classificado como um problema de produto cartesiano e envolve o jogo *Twister*. A pergunta refere-se ao número de possibilidades de jogada em uma rodada, considerando que cada uma das quatro partes do corpo mencionadas pode ser combinada com todas as quatro cores que compõem o jogo (Figura 8).

Figura 8 – Questão envolvendo o jogo Twister

7. O jogo Twister se baseia em um grande tapete com quatro linhas compostas por bolas de quatro cores diferentes: verde, amarelo, azul e vermelho. O jogo inclui também uma roleta dividida em quatro seções: pé direito, mão direita, pé esquerdo e mão esquerda.



A cada rodada, os participantes devem girar a roleta e colocar uma parte do corpo na cor indicada. Sabendo que todas as quatro partes do corpo podem ser combinadas com todas as quatro cores, quantas são as possibilidades de jogada em uma rodada? Considera-se um exemplo de jogada colocar a mão direita no amarelo.

Fonte: Elaboração própria.

A oitava questão trata de um problema de permutação e aborda o mapeamento de sala de aula, no qual será definida a posição em que cada estudante deve se sentar. Essa é uma estratégia comumente utilizada nas escolas com o objetivo de evitar conversas (Figura 9). O exercício traz o nome de alguns dos alunos da turma em que foi feita a Implementação, para que eles se identifiquem mais com a questão.

Figura 9 – Questão envolvendo o mapeamento de uma sala de aula

8. Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve sentar-se. Ele decide que as cinco carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Heitor, Luiz Phelipe e José em qualquer ordem. De quantas maneiras esses cinco alunos podem ser organizados na primeira fileira?

Fonte: Elaboração própria.

O nono problema é classificado como de combinação e traz o contexto do número de jogos de vôlei disputados em uma fase de grupos nas Olimpíadas de 2024. Indaga-se quantas partidas serão realizadas entre as seleções de um dos grupos, sabendo que cada seleção joga somente uma vez com todas as outras de seu grupo (Figura 10).

Figura 10 – Questão sobre os jogos de vôlei nas Olimpíadas de Paris

9. Nas Olimpíadas, o vôlei costuma ser disputado em quatro etapas: a fase de grupos, as quartas de final, as semifinais e as finais. Na primeira etapa, as seleções são divididas em três grupos, com quatro seleções cada. Em 2024, nas Olimpíadas de Paris, a divisão foi feita da seguinte maneira:

Women's Pools		
POOL A		
1		FRA
2		USA
3		CHN
4		SRB
POOL B		
1		BRA
2		POL
3		JPN
4		KEN
POOL C		
1		ITA
2		TUR
3		NED
4		DOM

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B nessa primeira etapa?

Fonte: Elaboração própria.

A décima questão, também classificada como um problema de combinação, aborda o jogo on-line “*Among Us*”<sup>3</sup>, apresentando uma situação com sete jogadores, sendo dois deles impostores (Figura 11).

Figura 11 – Questão envolvendo o jogo *Among Us*

10. *Among Us* é um jogo online em que os jogadores assumem os papéis de “Tripulação” ou “Impostor”. O objetivo do jogo é que os Companheiros de Tripulação identifiquem os jogadores que são os Impostores no jogo. Enquanto isso, os impostores no jogo têm que sabotar secretamente as tarefas no navio e eliminar os tripulantes antes que eles terminem suas tarefas. Em um jogo com 7 jogadores, sendo 2 deles impostores, quantas são as possibilidades de partida?



Fonte: Elaboração própria.

A décima primeira questão trata de um problema de produto cartesiano inserido no contexto do número de palpites no jogo de tabuleiro “*Detetive*”. O jogo é composto por vinte e uma cartas, sendo seis assassinos, seis armas e nove lugares. O exercício questiona quantos palpites podem ser feitos sobre o crime, sabendo que um palpite é dado por um assassino, uma arma e um lugar (Figura 12).

Figura 12 – Questão sobre o jogo de tabuleiro “*Detetive*”

11. O jogo de tabuleiro “*Detetive*” é composto por 21 cartas, sendo 6 de suspeitos, 6 de armas e 9 de lugares. Ao iniciar uma partida, é necessário embaralhar as cartas separadamente e sortear uma de cada categoria, que irão indicar as informações do assassinato a ser investigado na rodada. Quantos palpites podem ser feitos sobre o crime? Um exemplo de palpite é considerar que o assassinato foi realizado pela Médica com a Espingarda no Restaurante.

Fonte: Elaboração própria.

<sup>3</sup> Among Us é um jogo eletrônico desenvolvido pelo estúdio independente Inner Sloth. Ele envolve trabalho em grupo e uma traição em que os tripulantes, em conjunto, completam tarefas antes que o(s) impostores matem todos a bordo (InnerSloth, 2024).

O décimo segundo exercício da lista é classificado como um problema de permutação e envolve a rede social “Instagram”. A questão apresenta um dos possíveis formatos dessa rede chamado “carrossel”, que consiste em uma publicação com até dez mídias e pergunta de quantas maneiras uma pessoa pode postar cinco fotos nesse modelo, sabendo que a imagem da capa já foi definida (Figura 13).

Figura 13 – Questão envolvendo a rede social “Instagram”

12. O Instagram é uma rede social que permite o compartilhamento de imagens e vídeos diretamente do aplicativo de celular. Uma das possibilidades de formato dessa rede é o chamado “carrossel”, que permite a publicação de até 10 mídias, tanto imagem quanto vídeo, em uma única postagem. Uma pessoa deseja postar 5 fotos nesse formato. Sabendo que ela já escolheu uma das imagens para ser a capa, de quantas formas diferentes ela pode dispor as imagens restantes no carrossel?

Fonte: Elaboração própria.

Após o Primeiro Teste Exploratório, cuja análise dos dados será apresentada no capítulo 4, seção 4.1, decidiu-se fazer uma seleção de apenas seis questões, mantendo ao menos uma de cada classificação de Pessoa (2009), por acreditar que o tempo de dois horários de aula seria insuficiente para a resolução dos doze problemas, além do Questionário de interesses.

A Primeira Lista de Exercícios foi desenvolvida a partir da escolha de seis problemas do Banco de Questões, sendo eles: o primeiro, o quarto, o quinto, o sétimo, o oitavo e o nono, garantindo ao menos um de cada uma das quatro classificações de Pessoa (2009). Essa seleção se deu por acreditar que o tempo de dois horários de aula seria insuficiente para a resolução de todas as questões e do Questionário de interesses.

Os resultados da aplicação dessa Primeira Lista de Exercícios foram analisados no capítulo 4, seção 4.3.

### 3.2.1.3 Elaboração do Questionário para o Primeiro Teste Exploratório

O Questionário para o Primeiro Teste Exploratório (APÊNDICE C) se divide em duas seções, referentes às avaliações acerca do Questionário de interesses e do Banco de Questões.

Na seção sobre o Questionário de interesses, o primeiro questionamento indaga sobre a relevância das perguntas apresentadas e o segunda questiona se o licenciando adicionaria alguma outra pergunta.

Na seção referente ao Banco de Questões, a primeira pergunta busca saber se está claro que as questões abordam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação); a segunda investiga se a contextualização aparece de forma significativa nos exercícios; a terceira indaga se o tempo de dois horários, cada um com 50 minutos, é considerado adequado para a aplicação do questionário e da lista; a quarta pergunta questiona se as questões estão adequadas, quanto ao grau de dificuldade, para uma turma de 9º. ano e a quinta averigua se os contextos explorados nas questões estão claros mesmo para um estudante que não os conheça.

Os resultados desse questionário serão analisados no capítulo 4, seção 4.1.

#### **3.2.1.4 Aplicação do Primeiro Teste Exploratório**

O Primeiro Teste Exploratório foi realizado de forma on-line por meio de um questionário elaborado na plataforma *Google Forms* que ficou disponível do dia 8 de agosto de 2024 ao dia 13 de agosto de 2024. O teste buscou analisar as perguntas do Questionário de interesses e do Banco de Questões.

O público convidado para a realização desse teste foram os licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação que cursavam as disciplinas de TCC II ou TCC III no momento que o teste foi aplicado. A escolha desse público se deu pelo fato desses estudantes terem maior experiência no curso, o que possibilitou que eles analisassem as atividades de forma mais crítica. Participaram deste teste cinco pessoas.

Os resultados e a análise dos dados desse teste serão apresentados no capítulo 4, seção 4.1.

#### **3.2.1.5 Aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios**

A aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios, desenvolvida a partir da seleção de problemas do Banco de Questões, foi realizada no dia 21 de agosto de 2024 e contou com a participação de 27 estudantes.

Os resultados do Questionário de interesses serão apresentados no capítulo 4, seção 4.2 e a análise dos dados da Primeira Lista de Exercícios será desenvolvida no capítulo 4, seção 4.3.

Após o primeiro contato com a turma, notou-se a presença de alguns alunos com necessidades educacionais especiais (NEE). Com isso, decidiu-se fazer uma entrevista

semiestruturada com as mediadoras, com o objetivo de compreender o perfil desses discentes. O capítulo 5 versa sobre este momento e sobre o tratamento da aula com esses estudantes.

### **3.2.1.6 Elaboração da sequência didática**

A sequência didática está dividida em dois momentos: a correção da Primeira Lista de Exercícios e a realização de novos exercícios. Os comentários apresentados nessa seção são referentes a versão final, definida após o Segundo Teste Exploratório.

A correção da Primeira Lista é estruturada a partir das resoluções dadas pelos alunos, com o auxílio de uma apresentação de slides (APÊNDICE D). Todas as respostas são reescritas pela pesquisadora e exibidas sem nenhuma identificação, com o objetivo de evitar constrangimentos aos estudantes.

É válido ressaltar que a seleção conta com os quatro tipos de problemas de Combinatória previstos por Pessoa (2009). Vergnaud (1986) afirma que uma única situação é incapaz de mobilizar todas as propriedades de um conceito, sendo necessário trabalhar com uma diversidade de classes de problemas para que o aluno encontre todas essas propriedades. Nesse sentido, Montenegro (2018) defende que é essencial que os estudantes tenham contato com diferentes situações combinatórias, pois desperta a curiosidade e instiga a perseverança em busca de soluções, possibilitando um amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos.

Dessa forma, a elaboração da sequência levou em consideração os três conjuntos que compõem um conceito, sendo eles: o conjunto das situações que dão sentido ao conceito, o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito e o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.

Como comentado anteriormente na Introdução, a sequência didática que será apresentada foi elaborada de forma personalizada para a turma em que seria aplicada. Na primeira parte, são comentadas as resoluções desenvolvidas pelos estudantes nos problemas da Primeira Lista de Exercícios e, na segunda parte, a maioria das questões a serem resolvidas pelos estudantes foram elaboradas com base no Questionário de interesses respondido por esses mesmos alunos.

Dessa forma, não cabe uma replicação dessa sequência didática. Ela deve servir como um esboço de planejamento para o desenvolvimento de novas sequências didáticas, construídas, também, de forma personalizada.

No primeiro problema, o enunciado da questão é apresentado, para relembrar o que foi pedido, e são exibidas duas soluções corretas, uma utilizando o desenho e outra feita a partir da listagem de todas as possibilidades (Figura 14). Em seguida, é feita no quadro, conjuntamente com os alunos, a interpretação das respostas por meio da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo.

Figura 14 – Resoluções corretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios

*soluções corretas* ✦

Para a festa junina da escola, há três meninos (Davi, Pablo e Heitor) e três meninas (Maria Eduarda, Sofya e Débora) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?



$3 \times 3 = 9$

D+ME	P+ME	H+ME
D+S	P+S	H+S
D+D	P+D	H+D

9 pares

Fonte: Elaboração própria.

Depois, são apresentadas quatro resoluções incorretas, para que os discentes identifiquem os equívocos cometidos. A primeira solução conta com uma listagem incompleta das possibilidades (Figura 15a), enquanto a segunda indica um desenho em que o aluno conectou alguns pares, porém não considerou todas as possibilidades (Figura 15b).

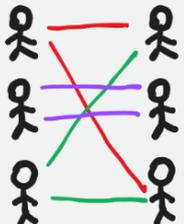
Figura 15 – Resoluções incorretas da primeira questão envolvendo listagem incompleta e desenho

(a)

Davi e Maria  
Pablo e Sofya  
Heitor e Débora

3 pares

(b)



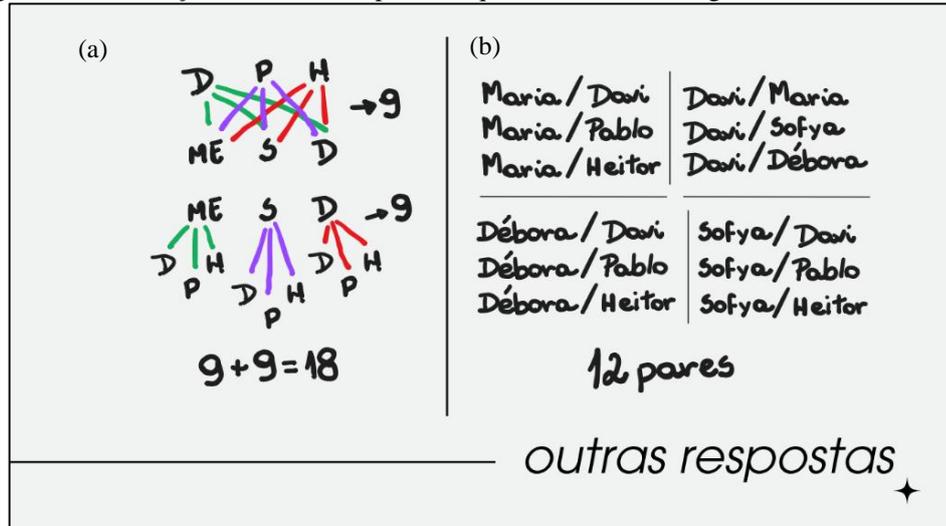
3 pares

*outras respostas* ✦

Fonte: Elaboração própria.

Na terceira resposta incorreta, o estudante realiza um esquema semelhante ao diagrama de árvore, porém considera cada possibilidade duas vezes (Figura 16a), e na outra ele realiza a listagem, no entanto conta cada par composto por Davi e uma menina duas vezes (Figura 16b).

Figura 16 – Resoluções incorretas da primeira questão utilizando diagrama de árvore e listagem



Fonte: Elaboração própria.

Simões (2016) defende que, nas aulas de Matemática, é necessário estar atento aos argumentos dados pelos alunos, não focando apenas em erros e acertos, pois o raciocínio que produz a resposta errada comumente está relacionado ao que produz a resposta certa.

Na segunda questão, é apresentada uma resolução correta e, seguindo a mesma estrutura da primeira, é feita a interpretação do problema a partir da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo (Figura 17).

Figura 17 – Solução correta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios

*soluções corretas* ✦

Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve se sentar. Ele decide que as quatro carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Luiz Phelipe e José, em qualquer ordem. De quantas maneiras esses quatro alunos podem ser organizados na primeira fileira?

L	L	L	L	L	L	$6 \times 4 = 24$
ML	ML	J	J	LP	LP	
LP	J	LP	ML	ML	J	
J	LP	ML	LP	J	ML	

Fonte: Elaboração própria.

Logo após, são mostradas quatro resoluções incorretas. A primeira considera que cada carteira pode ser ocupada por quatro pessoas, e, em seguida, adiciona esses valores, resultando em dezesseis maneiras (Figura 18a). A segunda indica uma multiplicação dos números que estão no enunciado da questão (Figura 18b). A terceira (Figura 18c) e a quarta (Figura 18d) realizam a listagem incompleta das possibilidades.

Figura 18 – Resoluções incorretas da segunda questão

<p>(a)</p> <p>L, M, LP, J → <math>\square</math> <math>\square</math> <math>\square</math> <math>\square</math></p> <p style="text-align: center;">4    4    4    4</p> <p style="text-align: center;">16 maneiras</p>	<p>(c)</p> <p>Maria, Layla, Luiz, José</p> <p>José, Maria, Layla, Luiz</p> <p>Luiz, José, Layla, Maria</p>
<p>(b)</p> <p>4 carteiras</p> <p>4 alunos</p> <p><math>4 \times 4 = 16</math></p>	<p>(d)</p> <p>4 maneiras</p> <p>L, M, LP, J</p> <p>J, LP, M, L</p> <p>LP, J, L, M</p> <p>M, L, J, LP</p>
<p><i>outras respostas</i> ✦</p>	

Fonte: Elaboração própria.

Na terceira questão, são exibidas duas resoluções corretas, sendo uma feita a partir da listagem de todas as possibilidades e outra por meio da multiplicação  $3 \times 2$  (Figura 19).

Figura 19 – Resolução correta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios

*soluções corretas* ✦

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B, nessa primeira etapa?

BRA x POL	POL x JPN	}	6 jogos	3 x 2 = 6
BRA x JPN	POL x KEN			
BRA x KEN	JPN x KEN			

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, é mostrada uma resposta incorreta que considera cada possibilidade de partida duas vezes. Diferentemente das questões anteriores, a interpretação por meio da árvore de possibilidades é realizada a partir da resolução incorreta, por se tratar de um problema de combinação. Com isso, é perguntado aos alunos o erro cometido na solução apresentada e espera-se que eles compreendam que o estudante considera cada partida duas vezes, visto que o jogo entre o Brasil e a Polônia é o mesmo que o disputado entre a Polônia e o Brasil (Figura 20).

Figura 20 – Solução incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios

BRA x POL	JPN x KEN	}	= 12 jogos
BRA x JPN	JPN x POL		
BRA x KEN	JPN x BRA		
POL x JPN	KEN x BRA		
POL x KEN	KEN x POL		
POL x BRA	KEN x JPN		

*outras respostas* ✦

Fonte: Elaboração própria.

Na quinta questão não houve nenhuma resposta correta. Sendo assim, é realizada no quadro uma parte do diagrama de árvore juntamente com os alunos e, em seguida, é feita a

interpretação da árvore a partir da multiplicação  $8 \times 7 \times 6$ . Depois, são exibidas cinco resoluções incorretas. As duas primeiras indicam produtos envolvendo números que se relacionam com a resposta correta, porém não foram compreendidas pela pesquisadora, sendo incentivado que os alunos explicassem o raciocínio utilizado (Figura 21).

Figura 21 – Resoluções incorretas da quinta questão que chegaram próximo do resultado

1 1 1 1 1 1 1

2 3 4 5 6 7 8

3 2 2 2 2 2 2

4 4 3 3 3 3 3

5 5 5 4 4 4 4

6 6 6 6 5 5 5

7 7 7 7 7 6 6

8 8 8 8 8 8 7

$8 \times 7 = 56$

A2  
B2  
C2  
D2  
E2  
F2  
G2  
H2

$14 \times 8 = 112$

outras respostas

13

Fonte: Elaboração própria.

Simões (2016) destaca, em sua pesquisa, a importância de considerar o erro como uma descoberta, sendo essencial discutir juntos o que fez o estudante considerar a abordagem adotada pertinente para a resolução do problema e os motivos pelos quais ela não funcionou.

Além dessas, são exibidas outras três soluções incorretas. A primeira indica apenas a multiplicação dos números presentes na questão (Figura 22a), a segunda apresenta a subtração dos mesmos números (Figura 22b) e a terceira considera as possibilidades para cada colocação (Figura 22c).

Figura 22 – Resoluções incorretas da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios

(a)

8 atletas  
3 lugares  
 $8 \times 3 = 24$

---

(b)

$8 - 3 = 5$

(c)

1 para o primeiro lugar  
1 para o segundo lugar  
1 para o terceiro lugar

outras respostas

14

Fonte: Elaboração própria.

Ao fim da correção das questões, é iniciada a Segunda Lista de Exercícios, composta por nove questões contextualizadas, elaboradas pela pesquisadora. Assim como no Banco de Questões, os exercícios foram desenvolvidos levando em consideração os invariantes do conceito de cada uma das classificações de problemas envolvendo o raciocínio combinatório: produto cartesiano, permutação simples, arranjo simples, combinação simples. As questões foram entregues uma a uma para os estudantes, além de serem apresentadas por meio de slides (APÊNDICE E).

Os exercícios serão entregues de forma gradativa com o objetivo de evitar que os estudantes iniciem a resolução de um problema antes da turma, como sugerido no Segundo Teste Exploratório. Todas as questões são resolvidas juntamente com os alunos, incentivando que eles apresentem suas soluções e raciocínios.

Os exercícios foram elaborados pela pesquisadora e levaram em consideração os dados obtidos no Questionário de interesses. Fernandes (2014) afirma que a utilização de contextos do interesse dos alunos ou que fazem parte do cenário cultural deles atua como uma ferramenta motivadora na aprendizagem e permite compreender a importância do conteúdo que está sendo estudado e suas aplicações.

Também foram trabalhadas questões que vão além dos temas trazidos pelos estudantes.

A primeira questão é classificada como um problema de produto cartesiano e aborda o contexto de possibilidades para a semifinal e final em um torneio de karatê exibido na série “Cobra Kai”. Considerando que os alunos fizeram bastante uso de listagens na Lista de Exercícios anterior, no primeiro item, eles devem completar os espaços em branco com uma das possibilidades viáveis para a questão (Figura 23).

Figura 23 – Slides do primeiro item da questão envolvendo a série “Cobra Kai”

Na primeira temporada da série Cobra Kai, ocorre o 50º. Torneio Regional de Karatê, no qual competem oito atletas: Miguel Diaz, Reid, Xander Stone, Aisha Robinson, Hawk (Falcão), Lee, Robbie Keene e Post. Os participantes são divididos em dois grupos de quatro pessoas.

Complete o quadro a seguir com uma das possibilidades.

(Cobra Kai, 2018) 01

**ALL VALLEY KARATE CHAMPIONSHIP**  
UNDER EIGHTEEN

**SEMI-FINALS**

**FINALS**

**ALL VALLEY CHAMPION**

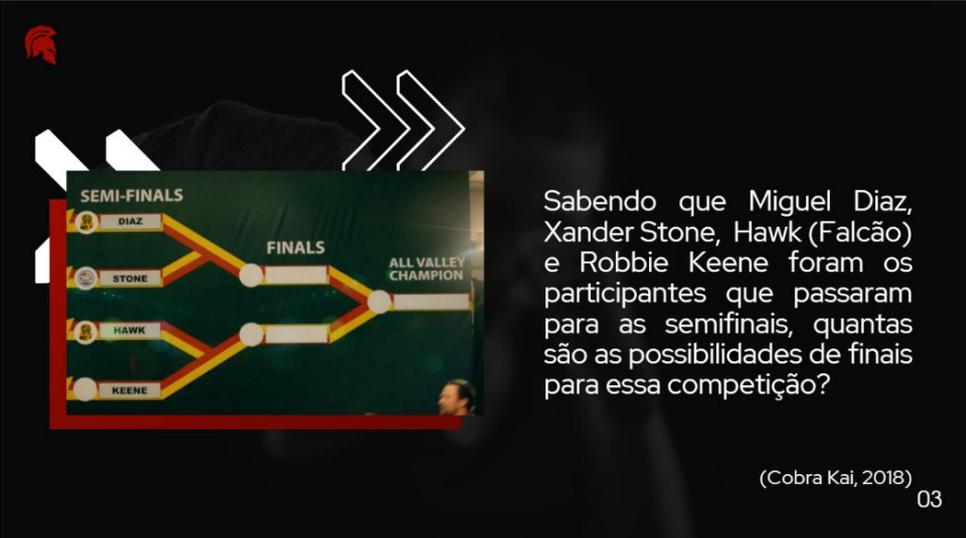
DIAZ  
REID  
STONE  
ROBINSON  
HAWK  
LEE  
KEENE  
POST

(Cobra Kai, 2018) 02

Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela.

O segundo item questiona quantas são as possibilidades de finais para a competição sabendo os participantes que passaram para as semifinais (Figura 24).

Figura 24 – Slide do segundo item da questão envolvendo Cobra Kai



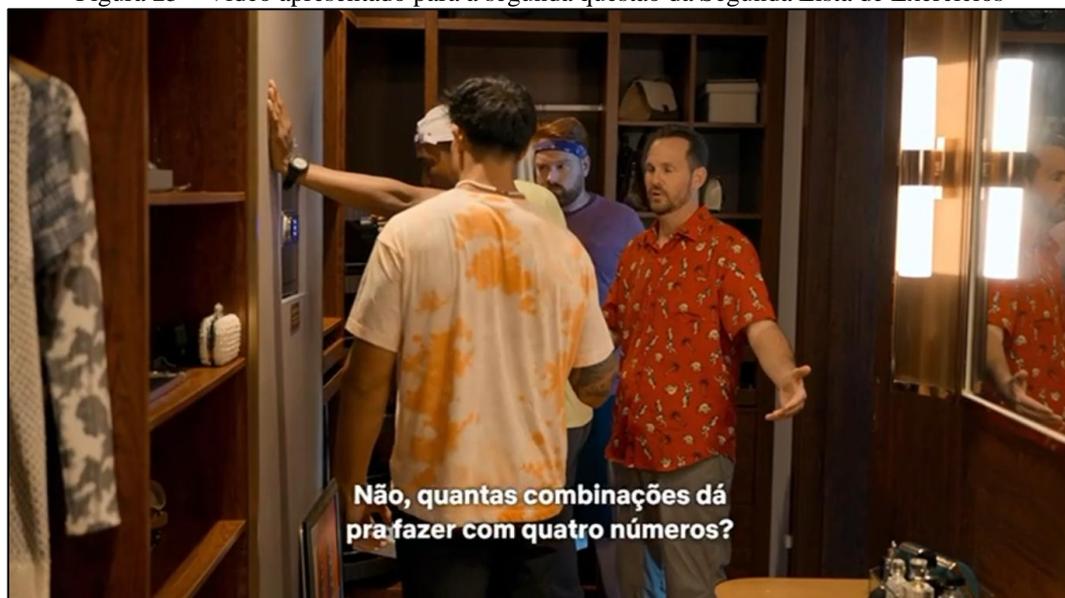
Sabendo que Miguel Diaz, Xander Stone, Hawk (Falcão) e Robbie Keene foram os participantes que passaram para as semifinais, quantas são as possibilidades de finais para essa competição?

(Cobra Kai, 2018) 03

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão é classificada como um problema de permutação e apresenta um vídeo de um reality show intitulado “O sabotador”, em que os participantes precisam descobrir a senha de um cofre de quatro dígitos após encontrar que ela é composta pelos números 3, 4, 6 e 8 (Figura 25).

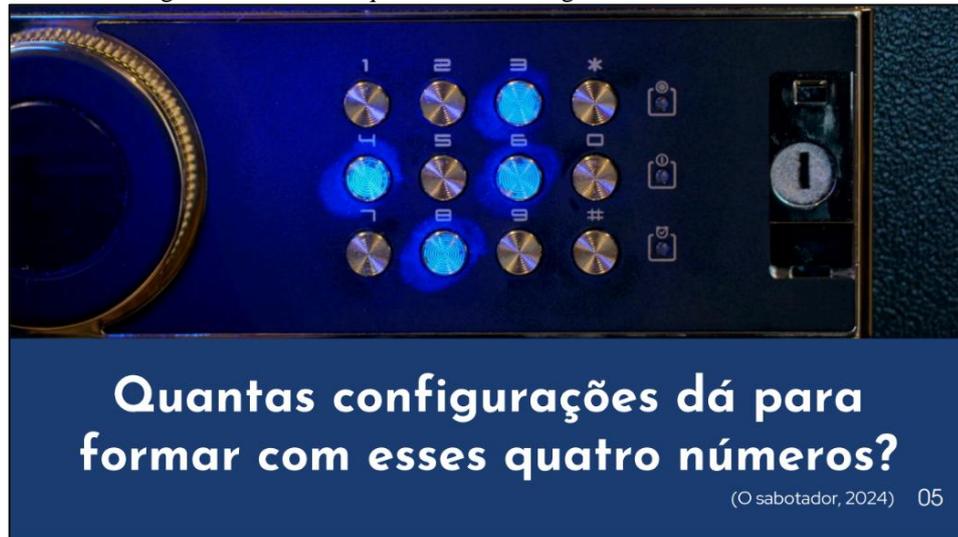
Figura 25 – Vídeo apresentado para a segunda questão da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela.

A partir disso, o exercício traz o questionamento feito por um dos participantes, de quantas seriam as configurações possíveis de serem formadas com quatro números (Figura 26).

Figura 26 – Slide da questão dois da Segunda Lista de Exercícios

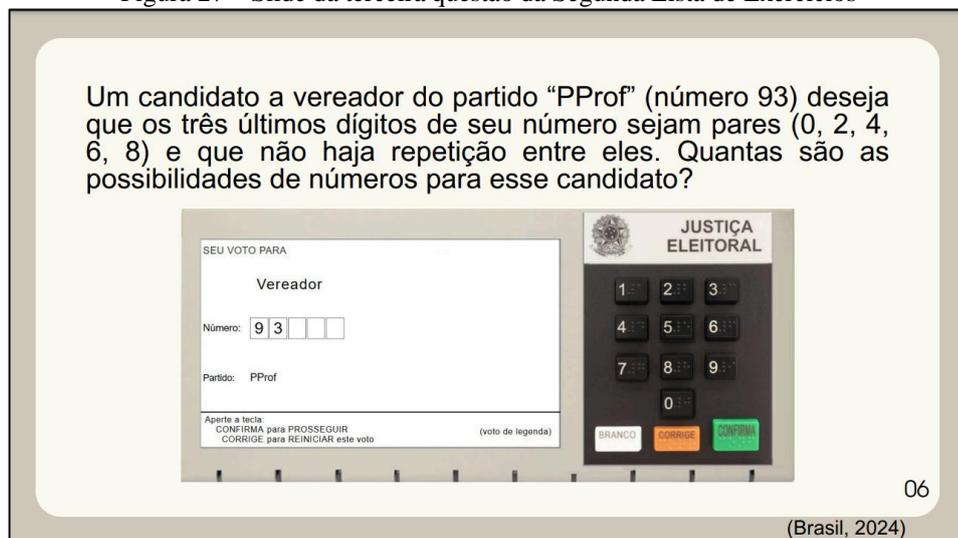


Fonte: Elaboração própria.

Gomes e Barrére (2024) defendem que o uso de vídeos pode servir como uma ferramenta motivadora para os alunos, além de gerar reflexões. Apesar disso, os autores reforçam a necessidade de que o uso desse instrumento esteja integrado com a finalidade da prática docente, sendo essencial o planejamento.

A terceira questão, que foi aproveitada do Banco de Questões, é considerada como um problema de arranjo e está envolvida no cenário das eleições municipais, indagando quantas são as possibilidades para o número de um vereador (Figura 27). Antes de iniciar a questão, é explicado aos alunos que os dois primeiros dígitos indicam o partido do candidato e é perguntado se eles já votaram em alguma eleição.

Figura 27 – Slide da terceira questão da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

A quarta questão trata de um problema de combinação. O exercício aborda um festival de música, trazendo alguns dos artistas da cena do rap que foram levantados pelos alunos, e questiona quantas diferentes configurações podem ser formadas para esse festival (Figura 28).

Figura 28 – Slide da quarta questão da Segunda Lista de Exercícios

Uma produtora está organizando um festival de música e precisa selecionar quatro artistas para o evento. Entre as atrações já confirmadas estão Cabelinho e Filipe Ret. As opções para os outros dois artistas ainda estão em fase de negociação e incluem Matuê, Teto, Orochi, BK e Hungria. Quantas diferentes configurações a produtora pode formar dos outros dois artistas para o festival?

Fonte: Elaboração própria.

O quinto problema é classificado como de arranjo e está inserido no contexto da escalação em um time de futebol, indagando quantas formações diferentes podem ser criadas na escolha de um lateral esquerdo e um lateral direito (Figura 29).

Figura 29 – Slide da quinta questão da Segunda Lista de Exercícios

UM TÉCNICO DE FUTEBOL PRECISA ESCOLHER UM LATERAL ESQUERDO E UM LATERAL DIREITO DE UM GRUPO DE 6 ATLETAS, ONDE CADA ATLETA PODE DESEMPENHAR QUALQUER UMA DESSAS POSIÇÕES. QUANTAS FORMAÇÕES DIFERENTES O TÉCNICO PODE CRIAR?

Fonte: Elaboração própria.

O sexto exercício traz um problema de produto cartesiano e aborda a máquina Enigma, muito utilizada na Segunda Guerra Mundial pelos nazistas. Para contextualizar a questão, é

exibido um vídeo<sup>4</sup> que explica o funcionamento do aparelho, que transforma uma palavra em um código diferente mudando as letras que a compõem (Figura 30).

Figura 30 – Vídeo apresentado para a sexta questão da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela.

A partir disso, é questionado quantos códigos podem ser criados da palavra “mar” usando apenas vogais. Em seguida, é esclarecido aos alunos que, enquanto as letras M e R podem ser substituídas pela vogal A, a letra A não pode ser substituída por ela mesma (Figura 31).

Figura 31 – Slide da sexta questão da Segunda Lista de Exercícios

Uma maneira de codificar uma frase é substituir cada letra do texto por outra do alfabeto. Uma pessoa deseja codificar a palavra MAR usando apenas vogais. Quantos códigos ela pode criar? Considere EEE e AIA exemplos de códigos válidos.





10

Fonte: Elaboração própria.

<sup>4</sup> Disponível em: [https://youtu.be/e-XFO28\\_InY?si=h58yFv2buLeDB9Mb](https://youtu.be/e-XFO28_InY?si=h58yFv2buLeDB9Mb).

Segundo Lima (2018), a contextualização no ensino deve se opor ao isolamento do conteúdo, sendo necessário trabalhar as relações entre um conteúdo e outros temas. Ela ainda reforça que a contextualização não deve ser reduzida ao cotidiano dos alunos, pois a escola tem como papel fundamental ampliar a percepção dos estudantes sobre a realidade e limitar a temática a uma necessidade imediata pode resultar na alienação, corroborando para uma visão parcial da realidade.

A sétima questão trata de um problema de arranjo inserido no contexto da formação de códons em Genética. O exercício traz uma explicação sobre o que constitui um códon, permitindo que o estudante compreenda a questão mesmo não tendo trabalhado esse conteúdo anteriormente nas aulas de Biologia, e pergunta quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas (Figura 32).

Figura 32 – Slide da sétima questão da Segunda Lista de Exercícios

Um códon é uma sequência de três bases nitrogenadas de RNA-m (RNA mensageiro). Sabendo que são encontradas apenas quatro bases nitrogenadas no RNA (citosina, guanina, adenina e uracila), quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas?

(Bernoulli, 2022) 11

Fonte: Elaboração própria.

O oitavo exercício, que foi aproveitado do Banco de Questões, é classificado como um problema de combinação e aborda o jogo on-line *Among Us*. A questão se inicia a partir da explicação de como funciona uma partida e indaga quantas são as possibilidades de um jogo com sete jogadores, em que dois deles são impostores. A figura utilizada no slide é animada, alternando os bonecos em vermelho, para que os alunos possam observar algumas das possibilidades (Figura 33).

Figura 33 – Slide da oitava questão da Segunda Lista de Exercícios

Among Us é um jogo online em que os jogadores assumem os papéis de “Tripulação” ou “Impostor”. O objetivo do jogo é que os Companheiros de Tripulação identifiquem os jogadores que são os Impostores no jogo. Enquanto isso, os impostores devem eliminar os tripulantes antes que eles terminem suas tarefas. Em um jogo com 7 jogadores, sendo 2 deles impostores, quantas são as possibilidades de partida?

GAMES  
GAMES  
GAMES

camii mafe duda naelly  
pedro thiago juliano

12  
(Among us, 2024)

Fonte: Elaboração própria.

A última questão é considerada um problema de produto cartesiano inserido no contexto da escolha de jogadores para a formação em um time de vôlei e questiona quantas formações diferentes podem ser criadas, na escolha de um atleta para a posição de líbero e outro para a posição de levantador (Figura 34).

Figura 34 – Slide da nona questão da Segunda Lista de Exercícios

**O técnico de um time de vôlei precisa selecionar um atleta para a posição de Levantador e outro para a posição de Líbero. Ele tem 4 atletas disponíveis para a posição de Levantador e 6 atletas para a posição de Líbero. Quantas formações diferentes o técnico pode criar?**

13

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados da aplicação dessa sequência didática serão analisados no capítulo 4, seção 4.5.1.

### 3.2.1.7 Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com os alunos

A entrevista realizada com os estudantes após a aplicação da sequência é semiestruturada em um roteiro com oito perguntas (APÊNDICE F) e tem como objetivo investigar as percepções dos alunos acerca da Intervenção Pedagógica.

A primeira pergunta busca saber se os temas abordados despertaram interesse para a aula. A segunda indaga se foi possível identificar as estratégias mais adequadas para cada questão. A terceira questiona se os estudantes conseguiram perceber situações do cotidiano ou de outras disciplinas que envolvem o conteúdo trabalhado.

A quarta pergunta investiga a contribuição do aproveitamento das estratégias utilizadas pelos discentes na primeira lista para o entendimento do conteúdo. A quinta questiona se eles apresentaram alguma dificuldade em relação ao enunciado das questões. A sexta indaga se o uso da listagem e do diagrama de árvore contribuíram para o entendimento do conteúdo.

A sétima pergunta busca compreender se o aluno percebe algum tipo de desenvolvimento de seu raciocínio combinatório em relação à Primeira Lista de Exercícios. A última questiona se os estudantes consideraram interessantes as questões que envolviam contextos de outras disciplinas.

As respostas desta entrevista serão analisadas no capítulo 4, seção 4.5.2.

### **3.2.1.8 Elaboração do Questionário para o Segundo Teste Exploratório**

O Questionário (APÊNDICE G) será aplicado ao final do Segundo Teste Exploratório, realizado com licenciandos, e tem como objetivo analisar a sequência didática e o roteiro da entrevista com os alunos.

A primeira pergunta questiona se está claro que as questões abordam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação). A segunda averigua se a contextualização aparece de forma significativa. A terceira indaga se o tempo de quatro horários está adequado para a aplicação da sequência didática e a realização da entrevista com os alunos.

A quarta pergunta investiga se as questões estão adequadas, quanto ao grau de dificuldade, para uma turma de 9º. ano do Ensino Fundamental. A quinta busca saber se os contextos explorados nas questões estão claros mesmo para um aluno que não os conheça. A sexta questiona se a sequência didática contempla o referencial teórico adotado.

A sétima pergunta pede sugestões para o tratamento da aula com os alunos que possuem NEE. A oitava averigua se as perguntas da entrevista com os alunos estão de acordo com o

referencial teórico e a nona indaga se o licenciando possui outra sugestão de pergunta para a entrevista. A última questiona se o participante gostaria de fazer outra observação.

A análise das respostas a este questionário é apresentada no capítulo 4, seção 4.4.

### 3.2.1.9 Aplicação do Segundo Teste Exploratório

O Segundo Teste Exploratório foi realizado de forma presencial no dia 23 de setembro de 2024, com duração de duas horas, e buscou analisar a sequência didática e as perguntas para a entrevista semiestruturada com os alunos, além de discutir como deveria ser o tratamento da aula em relação aos alunos com NEE.

O Teste Exploratório foi conduzido com o auxílio de uma apresentação de slides (APÊNDICE H). Inicialmente, retoma-se o objetivo da presente pesquisa e, em seguida, explica-se o referencial teórico e os aspectos metodológicos do trabalho (Figura 35).

Figura 35 – Slides do Segundo Teste Exploratório sobre o referencial teórico e os aspectos metodológicos

The slide is divided into two main sections. The top section is titled 'TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS' and contains a quote from Vergnaud (1990) about the relationship between knowledge and competence. The bottom section is titled 'ASPECTOS METODOLÓGICOS' and lists two key aspects: 'Pesquisa Qualitativa' (Qualitative Research) and 'Intervenção Pedagógica' (Pedagogical Intervention), each accompanied by a circular icon. A vertical decorative element on the right side consists of a sequence of 'X' and 'O' characters. A grid of dots is located in the bottom right corner.

**TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS**

—

"Vergnaud (1990) defende que o conhecimento está relacionado à competência, a qual ele define como ação julgada adequada para tratar uma situação. O conhecimento escolar – com suas competências – compõe-se do conhecimento cotidiano e do conhecimento científico. Nesta perspectiva, Vergnaud defende que a Teoria dos Campos Conceituais, por ele desenvolvida, permite atribuir aos conceitos um significado de natureza educacional, funcionando como um orientador para que a educação escolar não permaneça na dimensão empírica do cotidiano nem se perca na ciência pura – uma vez que conhecimentos cotidianos e científicos se inter-relacionam." (Pessoa, 2009, p. 38)

**ASPECTOS METODOLÓGICOS**

-  Pesquisa Qualitativa
-  Intervenção Pedagógica

Fonte: Elaboração própria.

Depois, é dado um panorama das etapas que fizeram parte do Planejamento da sequência e são exibidos os resultados da aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios (Figura 36).

Figura 36 – Slides do Segundo Teste Exploratório sobre o Planejamento e os resultados do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

Posteriormente, comenta-se acerca dos alunos com NEE presentes na turma e do trato da aula com esses estudantes e do resultado da entrevista com uma das mediadoras (Figura 37).

Figura 37 – Slide do Segundo Teste Exploratório sobre alunos com NEE



**ALUNOS COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS**

- 2 alunos autistas e com deficiência intelectual
- 1 aluna autista
- 1 aluna com deficiência intelectual
- Conversa com uma mediadora
- Material concreto
- Ludicidade
- Questões de fácil interpretação
- 5 a 6 questões utilizando números menores
- Não costumam prestar atenção durante as aulas

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, é apresentada a sequência didática, dividida entre a correção das questões da Primeira Lista de Exercícios e a realização de novos problemas, que compõem a Segunda Lista de Exercícios. Também são exibidas as perguntas que fazem parte do roteiro para a entrevista semiestruturada com os alunos.

O público convidado para a realização desse teste foram os licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação que cursavam as disciplinas de TCC II ou TCC III no momento que foi aplicado e contou com a participação de cinco pessoas. A escolha desse público se deu pelo fato desses estudantes estarem em contato com o ramo da pesquisa e terem maior experiência no curso, o que possibilitou que eles analisassem a sequência de forma mais crítica e avaliassem se estava de acordo com o referencial teórico utilizado.

Os resultados e a análise dos dados do Segundo Teste Exploratório serão apresentados no capítulo 4, seção 4.4.

### 3.2.2 A Implementação

A Implementação da ação interventiva se deu nos dias 23 e 30 de outubro de 2024, com 25 alunos do 9º. ano do Ensino Fundamental de uma Instituição Superior de Educação do município de Campos dos Goytacazes. A escolha da turma foi feita levando em consideração que os estudantes não poderiam ter estudado o conteúdo de Análise Combinatória formalmente.

Para a Implementação, foram disponibilizadas 4 horas aula, de 50 minutos cada, nos dias 23 e 30 de outubro de 2024. No dia 23, iniciou-se a sequência didática com a correção das questões da Primeira Lista de Exercícios e a realização de alguns problemas da Segunda Lista

de Exercícios. O dia 30 destinou-se ao término da Segunda Lista de Exercícios e à realização da entrevista com os alunos.

Vale informar que a aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios, foi feita em 2 horas aula, no dia 21 de agosto de 2024.

Os resultados e a análise dos dados referentes a fase da Implementação serão apresentados no capítulo 4, seção 4.5, e no capítulo 5, seção 5.2.

### **3.2.3 A Avaliação**

A Avaliação dos efeitos da intervenção proposta será feita por meio da observação, das anotações no caderno de campo, das respostas dos estudantes às atividades, dos questionários, da entrevista semiestruturada feita com os alunos e com uma das mediadoras e suas gravações em áudio.

Os dados coletados foram analisados de acordo com o referencial teórico do presente trabalho e serão apresentados no capítulo 4, seção 4.5, e no capítulo 5, seção 5.2.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente capítulo é destinado à análise dos dados obtidos nos Testes Exploratórios, na aplicação do Questionário de interesses e da Primeira Lista de Exercícios, na Implementação da sequência didática, nos questionários e nas entrevistas.

### 4.1 Primeiro Teste Exploratório

O Primeiro Teste Exploratório teve como objetivo analisar as perguntas referentes ao Questionário de interesses e o Banco de Questões, que seriam aplicados para o público-alvo da pesquisa antes da Implementação da sequência didática. O teste foi realizado com um grupo de licenciandos em Matemática que cursavam o TCC II ou o TCC III no momento da pesquisa por meio de um questionário on-line e contou com a participação de cinco estudantes.

O formulário foi dividido em duas partes: a primeira, que abordou sobre o Questionário de interesses, e a segunda, que disse respeito ao Banco de Questões.

Primeiramente, foi perguntado se as questões apresentadas no questionário eram relevantes, ao que todos responderam de forma afirmativa. Uma das licenciandas inclusive afirmou que elas serão muito úteis para a elaboração de questões contextualizadas de acordo com os interesses dos alunos.

Além disso, nessa primeira parte, também foi questionado se eles possuíam alguma outra sugestão de pergunta para adicionar à pesquisa de interesses, ao que todos responderam que não. Em uma das respostas, um licenciando ressaltou que as perguntas apresentadas abrangiam diversas áreas de interesse.

Apesar disso, em uma nova releitura do material, a pesquisadora acrescentou mais uma pergunta envolvendo as atividades praticadas pelos alunos nas aulas de Educação Física (Figura 38).

Figura 38 -Pergunta adicionada no Questionário de interesses

<p>10. Em sua escola, que tipo de atividades as aulas de Educação Física propõem (partidas de vôlei, futebol, jogos de queimada, dança, etc.)?</p> <hr/> <hr/>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda parte do formulário, que tratou do Banco de Questões, foi indagado, na

primeira pergunta, se estava claro que as questões abordavam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), ao que todos responderam de maneira afirmativa.

A pergunta seguinte questionou se a contextualização aparecia de forma significativa nos exercícios, ao que todos responderam que sim. Um dos licenciandos ainda destacou a escolha de exemplos envolvendo as Olimpíadas, por ser um evento que a maioria dos alunos estava acompanhando no momento.

Nesse contexto, a pesquisadora fez uma pequena alteração na questão cinco, que tratava de uma final olímpica de natação (Figura 39a), substituindo esta modalidade para uma final de *skate street* (Figura 39b) por considerá-la mais atual, visto que foi acrescentada nas Olimpíadas de 2020 e conta com a participação de diversos atletas brasileiros.

Figura 39 – Alteração na quinta questão da Primeira Lista de Exercícios

(a)

5. Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de natação que é disputada por 8 atletas?



(b)

5. Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de *skate street* que é disputada por oito atletas?



Fonte: Elaboração própria.

Ao serem perguntados se o tempo de dois horários seria adequado para a realização do Questionário de interesses e do Banco de Questões, a maioria respondeu que talvez o tempo fosse insuficiente para a resolução de todas as questões, o que geraria dificuldade em diferenciar os alunos que entregaram sem respostas por falta de tempo e os que não conseguiram fazer. Outro licenciando ainda expôs a possibilidade de alguns estudantes terminarem antes devido à desistência.

Diante disso, decidiu-se utilizar apenas seis questões das doze que foram expostas, mantendo no mínimo um problema de cada classificação de Pessoa (2009), totalizando dois de produto cartesiano, dois de combinação, um de permutação e outro de arranjo. A escolha foi feita priorizando questões com contextos mais recentes, como o das Olimpíadas e da festa junina, e a lista foi reordenada de forma que os exercícios mais difíceis estivessem no final. A Figura 40 traz uma das questões que foi descartada e que fazia parte do Banco de Questões.

Figura 40 – Uma das questões descartadas do Banco de Questões

11. O jogo de tabuleiro “Detetive” é composto por 21 cartas, sendo 6 de suspeitos, 6 de armas e 9 de lugares. Ao iniciar uma partida, é necessário embaralhar as cartas separadamente e sortear uma de cada categoria, que irão indicar as informações do assassinato a ser investigado na rodada. Quantos palpites podem ser feitos sobre o crime? Um exemplo de palpite é considerar que o assassinato foi realizado pela Médica com a Espingarda no Restaurante.

Fonte: Elaboração própria.

Também foi questionado se, em relação ao grau de dificuldade, os exercícios estavam adequados para uma turma de 9º. ano, ao que todos responderam que sim. Um dos licenciandos ainda ressaltou que, mesmo sem conhecimento da teoria, os alunos terão capacidade de resolvê-los com diferentes estratégias.

Apesar disso, a pesquisadora decidiu alterar a primeira questão, trocando o valor de quatro meninas (Figura 41a) para apenas três (Figura 41b), com o intuito de diminuir a quantidade total de pares.

Figura 41 – Alteração na primeira questão da Primeira Lista de Exercícios

(a)
1. Para a festa junina da escola, tem 3 meninos (Davi, Pablo e Heitor) e 4 meninas (Maria Eduarda, Sofya, Débora e Camila) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina? <sup>1</sup>
(b)
1. Para a festa junina da escola, há três meninos (Davi, Pablo e Heitor) e três meninas (Maria Eduarda, Sofya e Débora) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina? <sup>1</sup>

Fonte: Elaboração própria.

Com o mesmo objetivo, a segunda questão foi alterada, mudando de cinco cadeiras a serem ocupadas por cinco pessoas (Figura 42a) para quatro cadeiras e quatro pessoas (Figura 42b).

Figura 42 – Alteração na segunda questão da Primeira Lista de Exercícios

(a)
8. Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve sentar-se. Ele decide que as cinco carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Heitor, Luiz Phelipe e José em qualquer ordem. De quantas maneiras esses cinco alunos podem ser organizados na primeira fileira?
(b)
2. Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve se sentar. Ele decide que as quatro carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Luiz Phelipe e José, em qualquer ordem. De quantas maneiras esses quatro alunos podem ser organizados na primeira fileira?

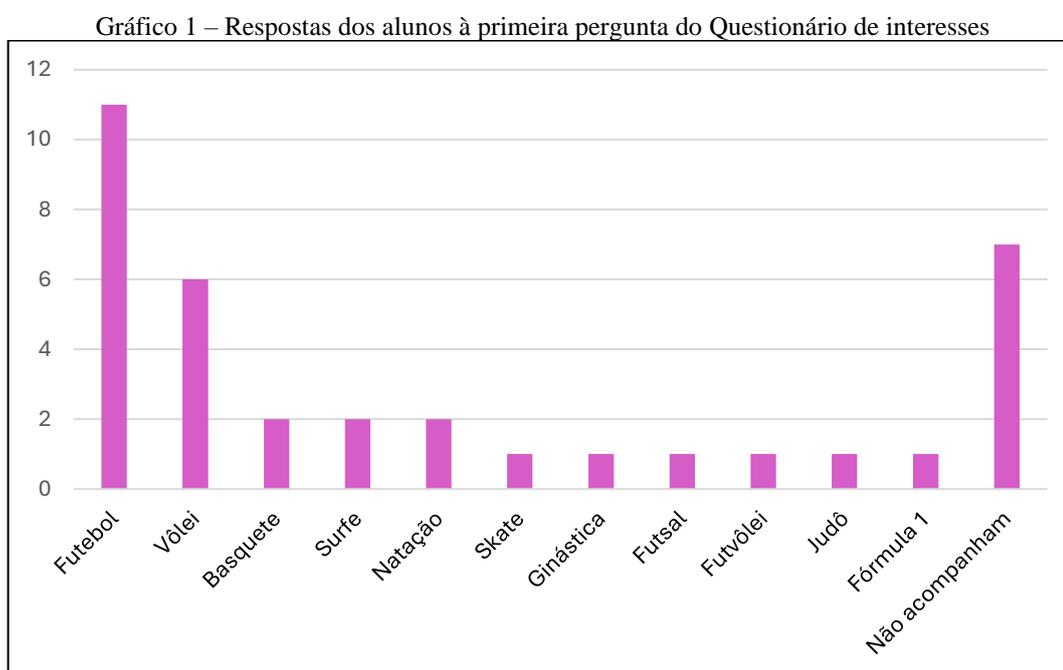
Fonte: Elaboração própria.

A última pergunta questionou se os contextos explorados nas questões estavam claros mesmo para um aluno que não os conhecesse, ao que todos responderam de forma afirmativa, destacando que tudo estava bem explicado.

## 4.2 Análise dos dados do Questionário de interesses

A aplicação do Questionário de Interesses se deu no dia 21 de agosto de 2024 e contou com a presença de 27 alunos, incluindo os com NEE.

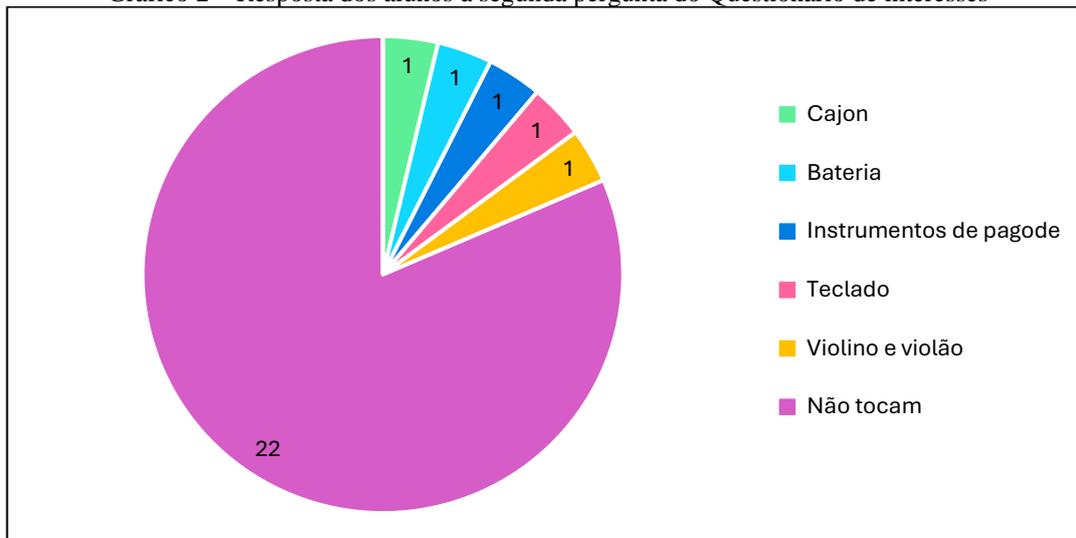
A primeira pergunta questionava quais esportes eles praticavam ou acompanhavam e permitia mais de uma resposta. Onze estudantes marcaram que acompanham futebol, seis assinalaram vôlei e sete responderam que não acompanhavam nenhum esporte. Alguns alunos responderam outros esportes. O Gráfico 1 indica as respostas dos alunos. Vale ressaltar que os valores dos dados superam o número de alunos, pois alguns estudantes indicaram mais de um esporte em suas respostas.



Fonte: Elaboração própria.

A segunda pergunta questionava se eles tocavam algum instrumento, ao que vinte e dois alunos responderam negativamente. O Gráfico 2 expõe as respostas dadas pelos estudantes.

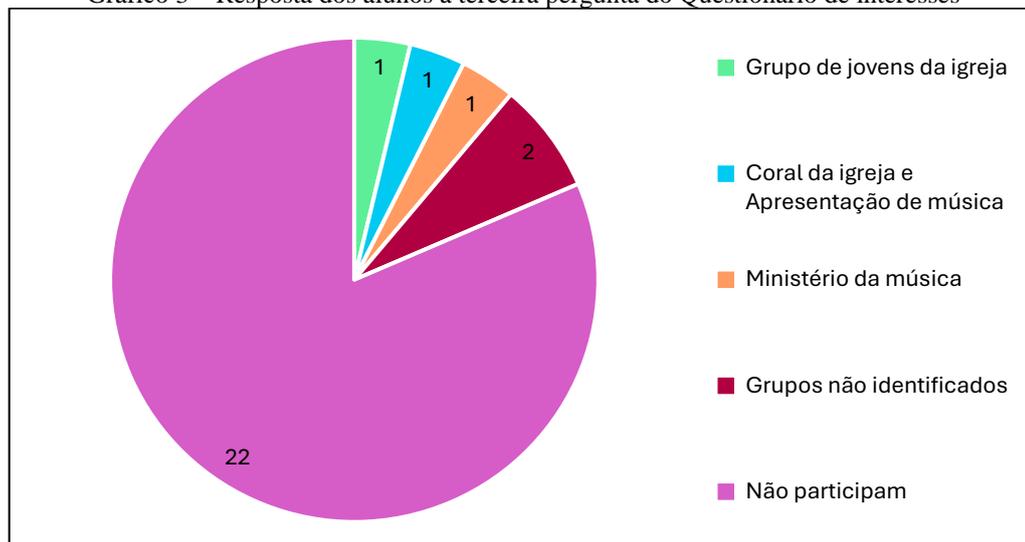
Gráfico 2 – Resposta dos alunos à segunda pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

O mesmo ocorreu na terceira questão, que perguntava se os estudantes faziam parte de algum grupo musical, e vinte e dois alunos responderam que não participavam, resultando na compreensão de que o assunto também não era atrativo para a classe. Dois alunos não indicaram que tipo de grupo eles participavam, como bandas ou corais, apenas responderam fazer parte de um grupo musical. O Gráfico 3 apresenta as respostas dadas pelos alunos.

Gráfico 3 – Resposta dos alunos à terceira pergunta do Questionário de interesses

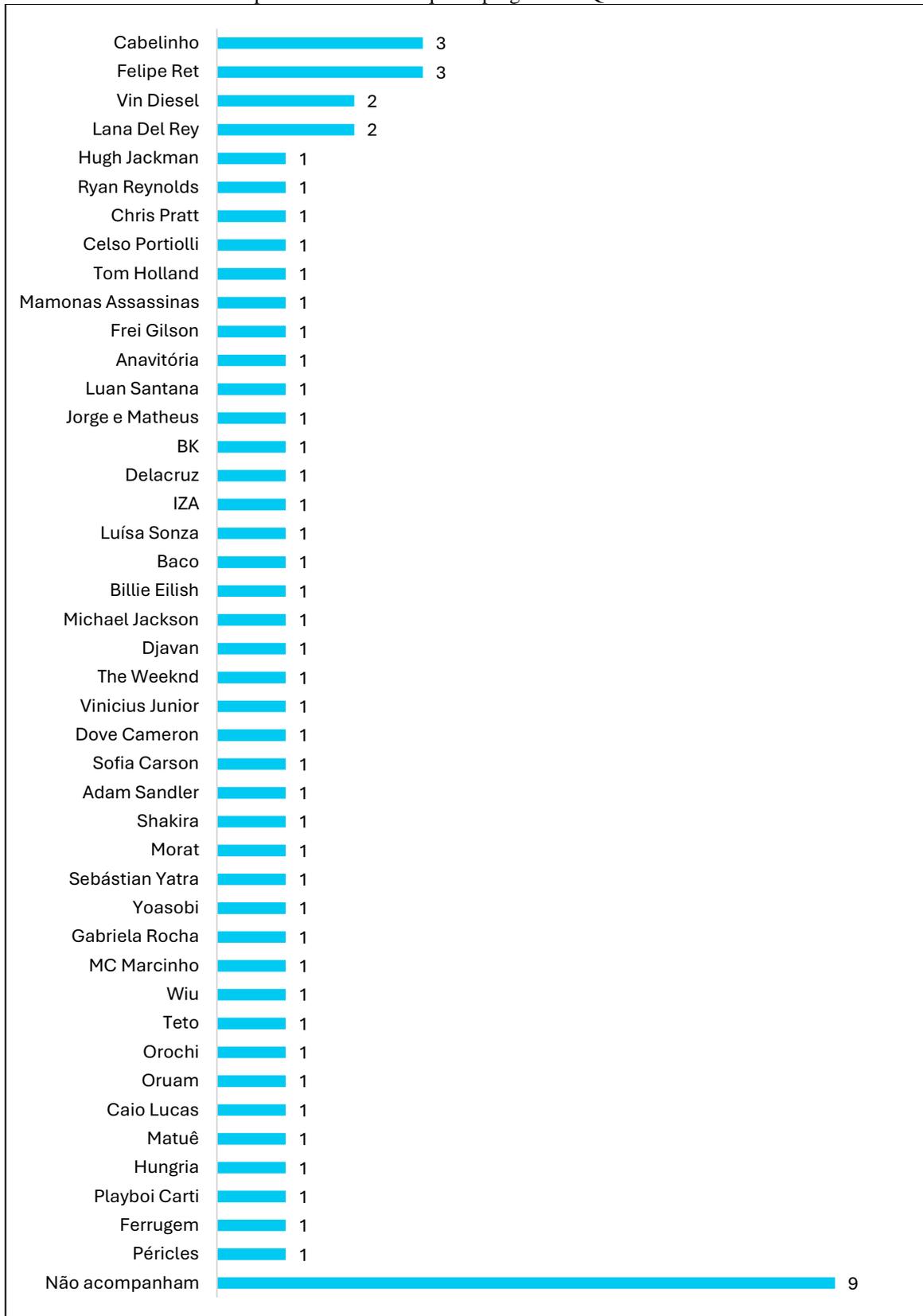


Fonte: Elaboração própria.

A quarta pergunta questionava quais artistas do cenário cultural os alunos acompanhavam, o que gerou respostas bem diversas. Sete pessoas responderam personalidades do cenário do rap e apenas nove estudantes relataram não se interessar por nenhuma figura do meio cultural (Gráfico 4). O número de respostas supera a quantidade de estudantes, pois muitos

responderam mais de um artista.

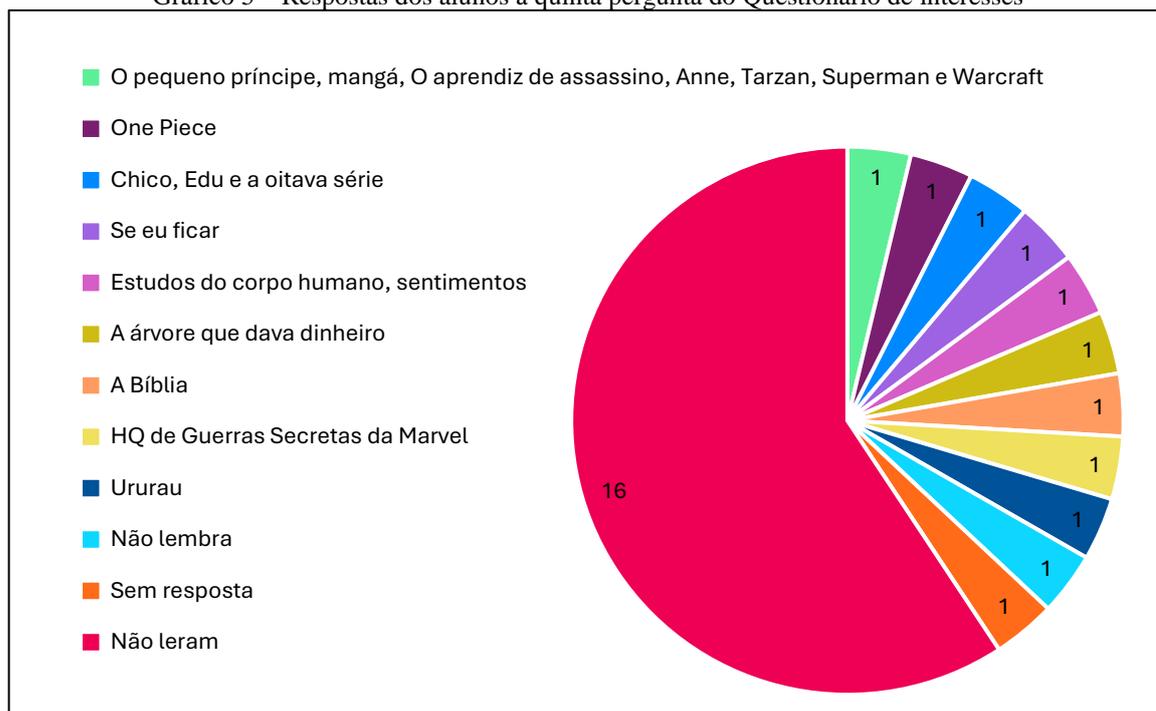
Gráfico 4 – Respostas dos alunos à quarta pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A quinta pergunta questionava se o estudante leu ou tinha lido algum livro recentemente, ao que dezesseis alunos responderam negativamente e um não deu nenhuma resposta, levando à conclusão de que esse não é um assunto de grande interesse deles. Os outros estudantes apresentaram respostas distintas (Gráfico 5).

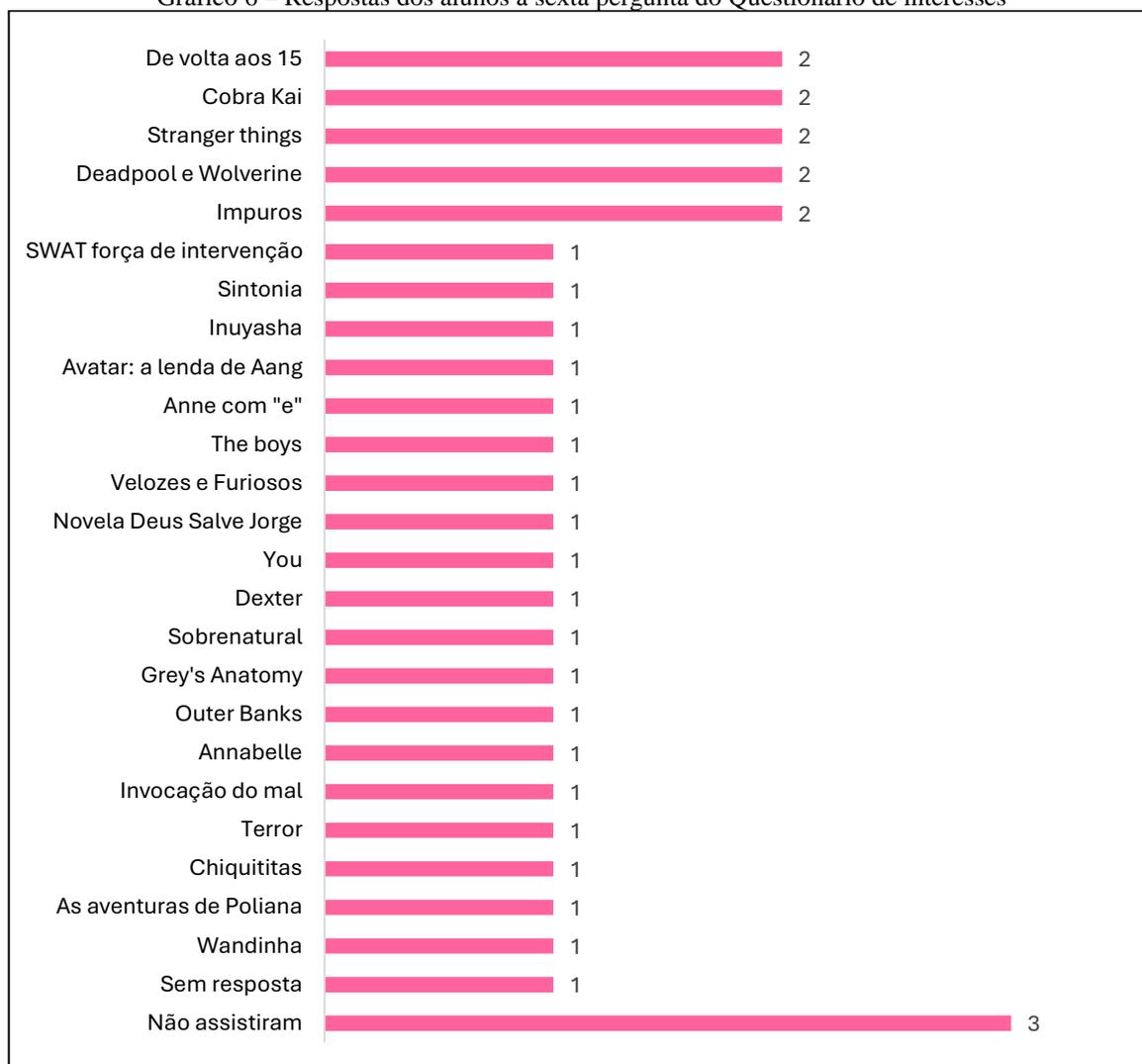
Gráfico 5 – Respostas dos alunos à quinta pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A sexta pergunta questionava os filmes e séries que os estudantes assistiam. Apenas três alunos responderam não ter visto nenhum recentemente e um não deu resposta. Apesar das respostas terem sido muito distintas, não havendo um filme ou série amplamente citado, foi possível notar que esse cenário do entretenimento é de interesse da turma devido ao baixo número de negativas. O Gráfico 6 apresenta as respostas obtidas e o valor ultrapassa a quantidade de estudantes, pois muitos deram mais de uma resposta.

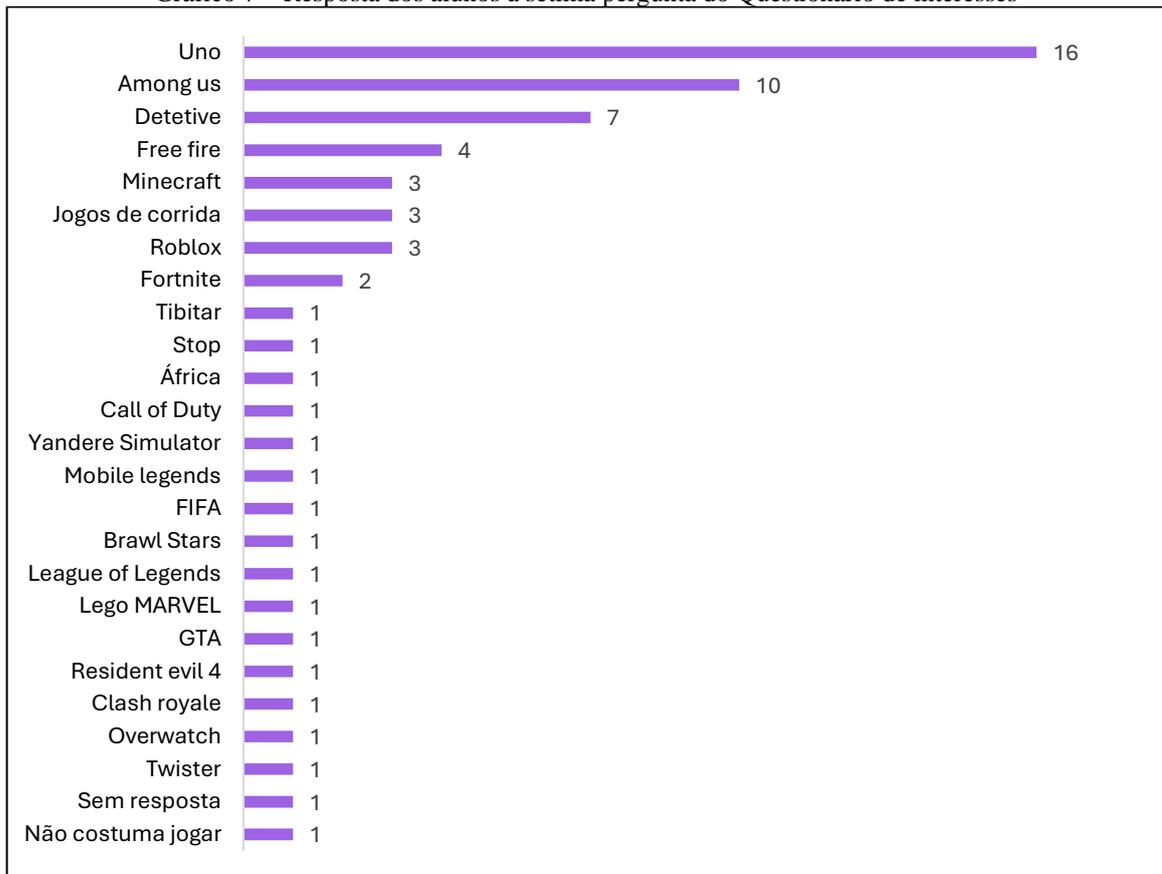
Gráfico 6 – Respostas dos alunos à sexta pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A sétima questão tratava dos jogos que os alunos costumavam jogar. Os mais citados foram o *Uno*, com dezesseis respostas, o *Among us*, com dez, e *Detetive*, com sete, indicando ser um assunto de interesse (Gráfico 7). Apenas um estudante respondeu que não tem o costume de jogar e um não deu resposta. A quantidade de dados ultrapassa o número de alunos, pois alguns responderam mais de um jogo.

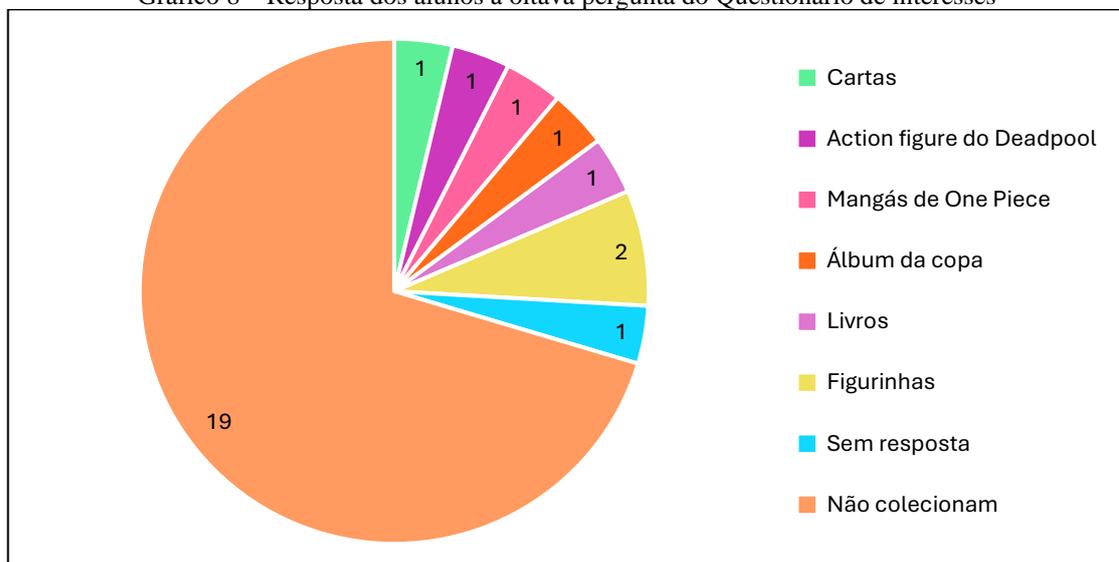
Gráfico 7 – Resposta dos alunos à sétima pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A oitava pergunta questionava se os estudantes tinham o costume de colecionar algum objeto, ao que dezenove responderam de forma negativa, mostrando um certo desinteresse por parte da turma (Gráfico 8).

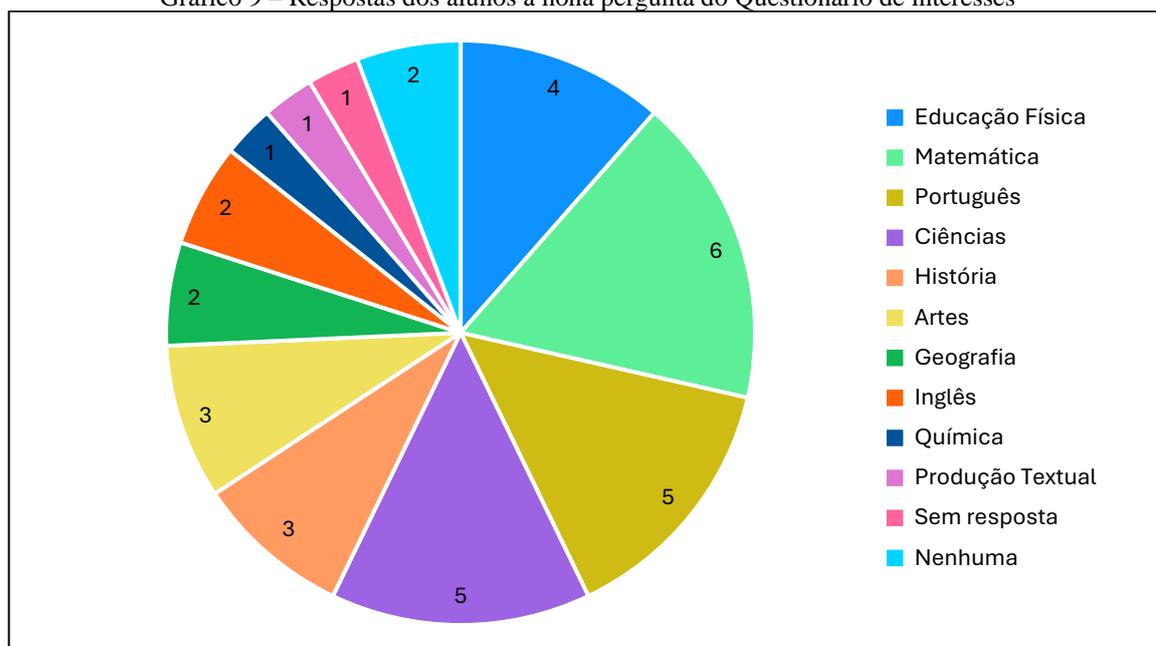
Gráfico 8 – Resposta dos alunos à oitava pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A nona questão tratava das disciplinas escolares que os estudantes mais gostavam. As respostas foram bem variadas e alguns estudantes escreveram mais de uma disciplina (Gráfico 9).

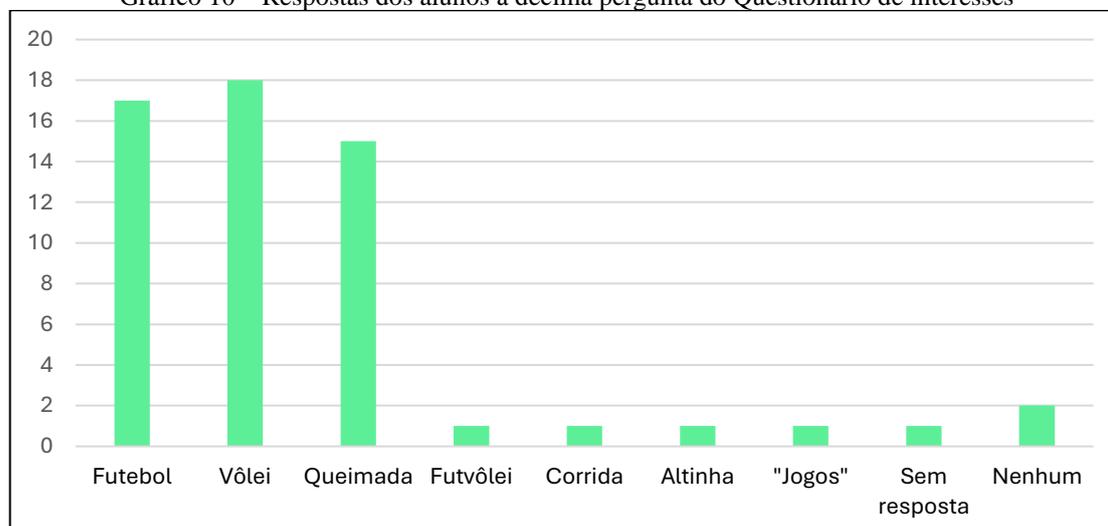
Gráfico 9 – Respostas dos alunos à nona pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

A décima pergunta abordava as atividades praticadas nas aulas de Educação Física e a maioria respondeu que eles costumavam jogar vôlei, futebol e queimada. O Gráfico 10 expõe as respostas dadas pelos estudantes. Alguns comentaram mais de uma atividade.

Gráfico 10 – Respostas dos alunos à décima pergunta do Questionário de interesses

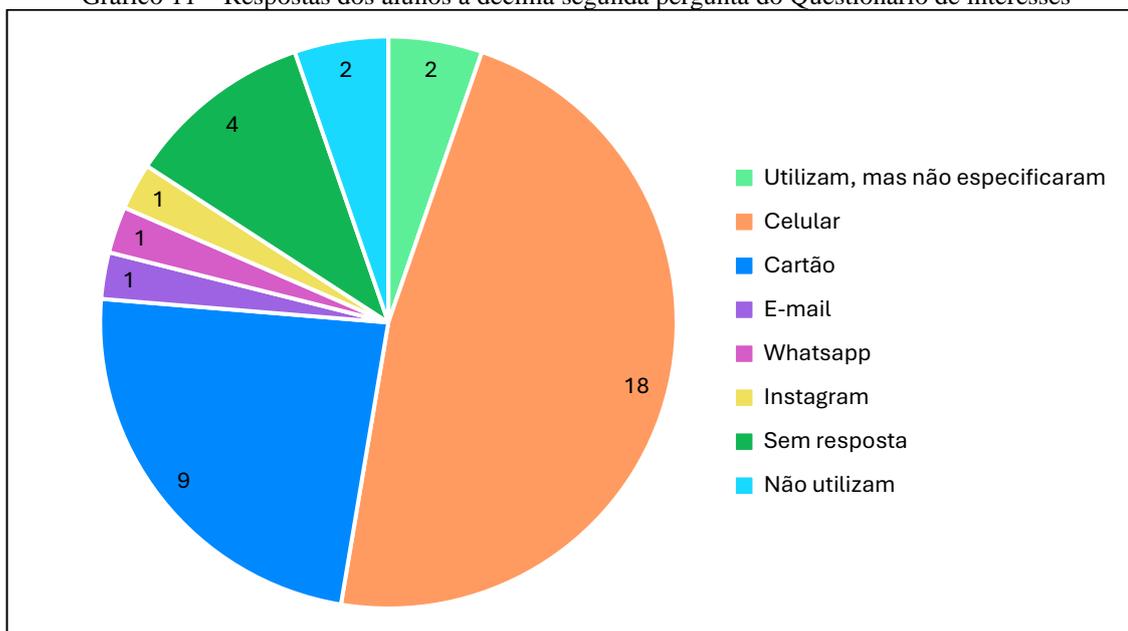


Fonte: Elaboração própria.

A décima primeira questionava se os estudantes faziam parte de alguma agremiação, porém apenas um afirmou que participava, enquanto os outros vinte e cinco alunos responderam negativamente e um não deu nenhuma resposta.

A décima segunda questão perguntava se eles utilizavam senhas no dia a dia, ao que a maioria respondeu que usavam em seus celulares ou bancos. Apenas dois afirmaram não utilizar e quatro não deram nenhuma resposta (Gráfico 11). Alguns deram mais de uma resposta.

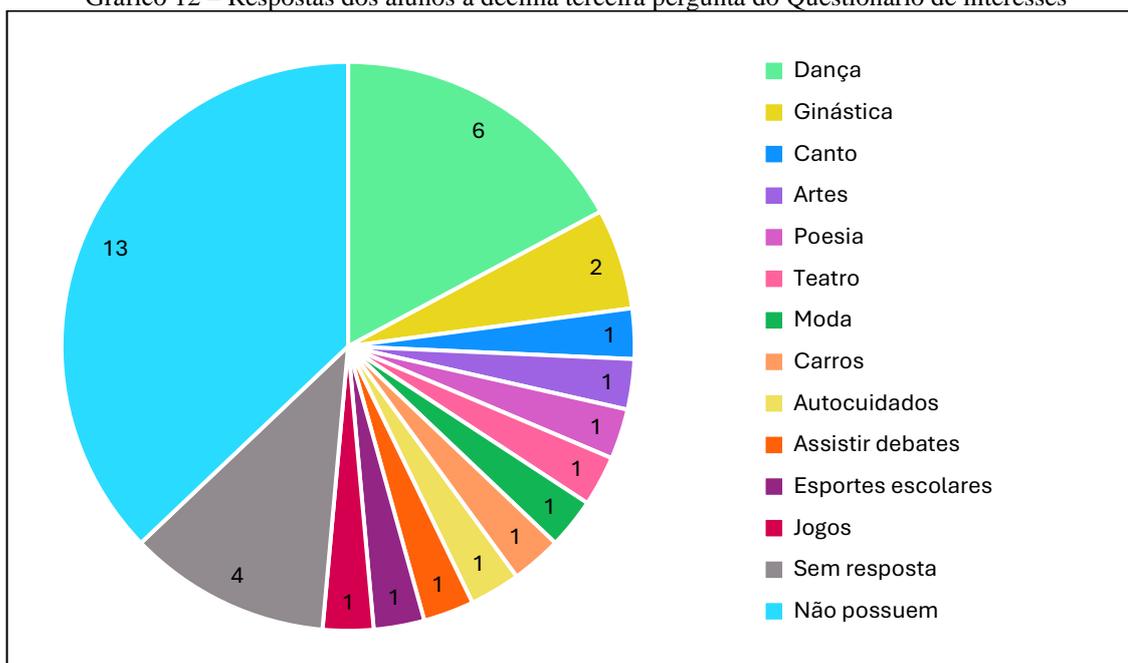
Gráfico 11 – Respostas dos alunos à décima segunda pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

Na última pergunta, os alunos podiam citar outros interesses e hobbies, além dos mencionados. Treze estudantes responderam que não praticam outras atividades e quatro não apresentaram nenhum retorno. Seis discentes indicaram gostar de dança de diversos tipos, como dança contemporânea e ballet. Dois alunos escreveram temas que já haviam sido mencionados no Questionário. As respostas estão indicadas no Gráfico 12.

Gráfico 12 – Respostas dos alunos à décima terceira pergunta do Questionário de interesses



Fonte: Elaboração própria.

Foi interessante observar que, durante a aplicação do questionário, uma das alunas comentou ser uma pessoa desinteressante, pois respondeu a maioria das perguntas de forma negativa.

A partir das respostas do questionário, concluiu-se que a maioria dos estudantes apresentava interesse em esportes, principalmente futebol e vôlei, artistas, em especial cantores da cena do *rap* e do *trap*, filmes e séries e jogos, como *Uno* e *Among Us*.

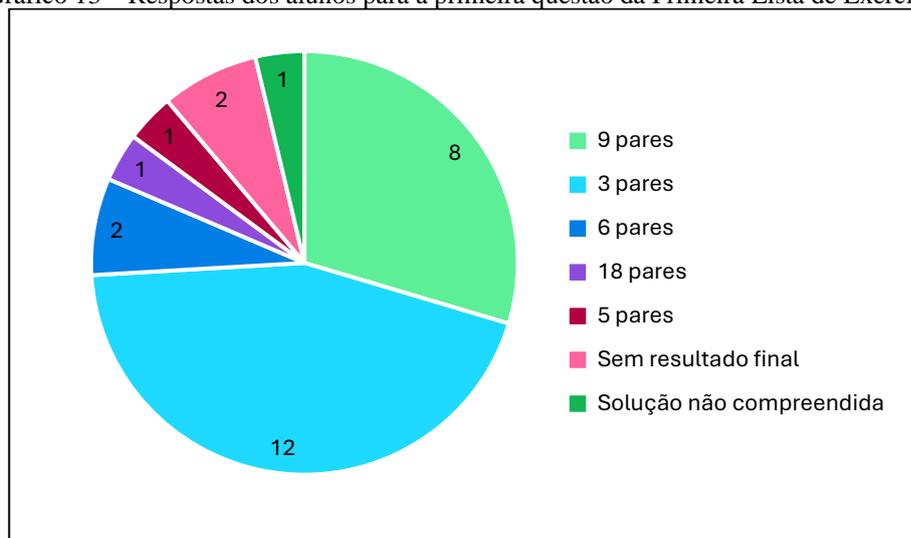
### 4.3 Análise dos dados da Primeira Lista de Exercícios

A aplicação da Primeira Lista de Exercícios se deu no dia 21 de agosto, no mesmo dia do Questionário de interesses, e contou com a presença de 27 alunos. Neste dia, foi pedido aos alunos que registrassem a forma como eles pensaram cada problema.

Vergnaud (1982, p.40, tradução nossa) afirma que “devemos saber quais procedimentos são utilizados mais naturalmente pela criança ou os mais fáceis de assimilar quando ensinados”. Sendo assim, estudos como este permitem uma melhor compreensão do comportamento da criança (Vergnaud,1982).

A primeira questão abordava um problema de produto cartesiano envolvendo o contexto de pares para a festa junina. O gráfico abaixo mostra os resultados encontrados pelos estudantes (Gráfico 13):

Gráfico 13 – Respostas dos alunos para a primeira questão da Primeira Lista de Exercícios

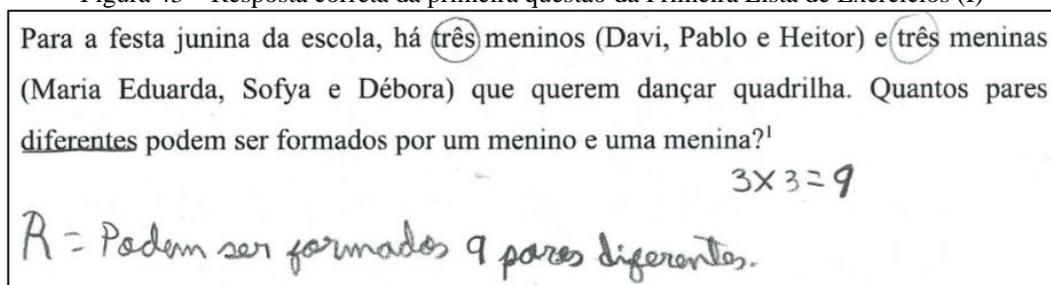


Fonte: Elaboração própria.

Ressalta-se que os números que estão no interior do gráfico se referem à quantidade de alunos que deram a resposta que está indicada pela mesma cor, na legenda. É necessário destacar que o item “Sem resultado final” se refere a casos em que o discente realizou desenhos ou a listagem das possibilidades, completa ou incompleta, porém não indicou o resultado numérico. Além disso, entende-se como “Solução não compreendida” soluções que não apresentaram nenhuma relação com o enunciado. A mesma observação vale para os outros gráficos desta seção.

Oito alunos chegaram à resposta correta: nove pares. Dois desses estudantes indicaram a solução apenas pela multiplicação  $3 \times 3$  (Figura 43).

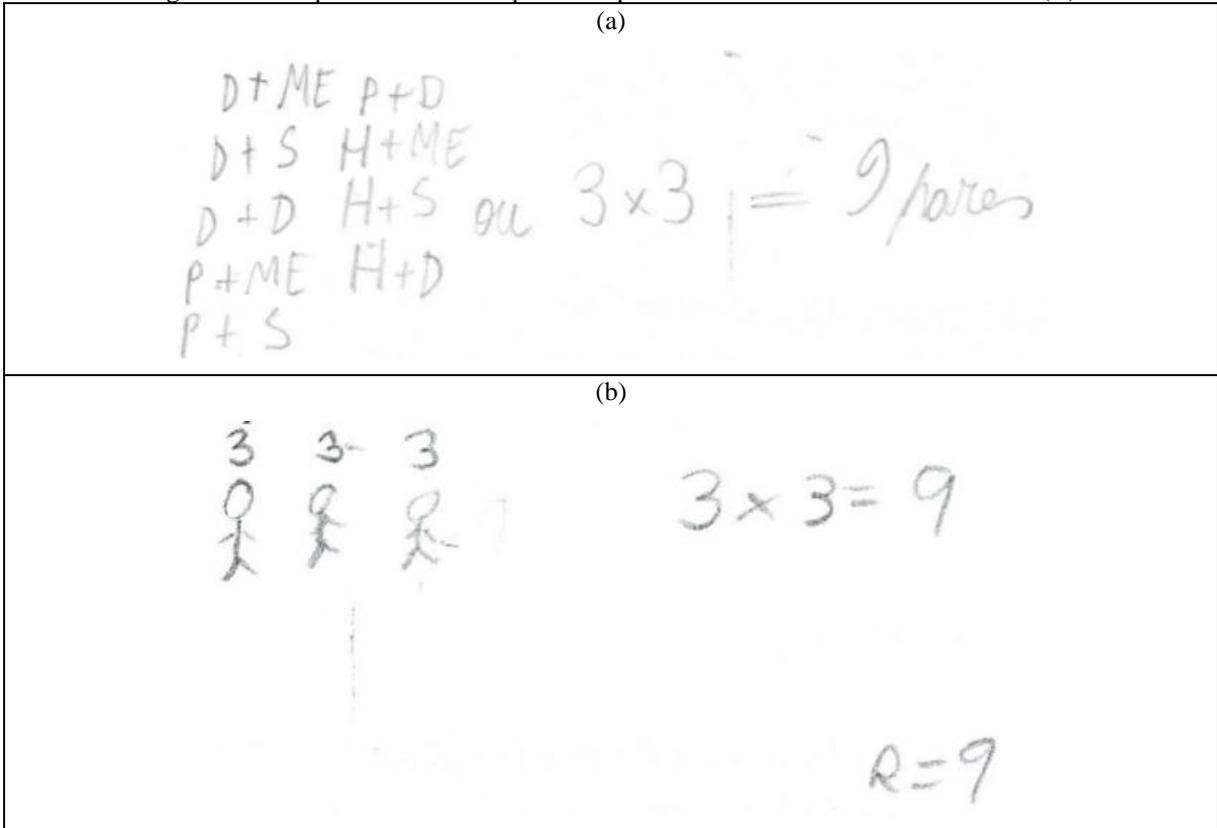
Figura 43 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (I)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ainda dentre esses oito alunos, um deles sugeriu duas formas de resolver o problema, uma usando a listagem e outra a partir da multiplicação  $3 \times 3$  (Figura 44a). Outro estudante deste grupo utilizou um desenho para indicar que cada menino tinha três possibilidades de pares e, em seguida, realizou a multiplicação (Figura 44b).

Figura 44 – Respostas corretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (II)

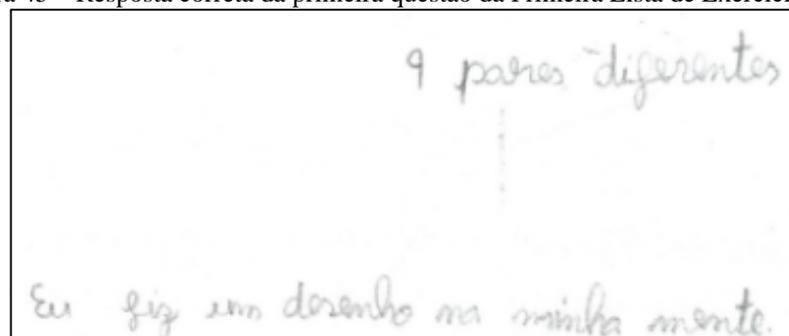


Fonte: Protocolo de pesquisa.

De acordo com Vergnaud (2009b), representações, como desenhos, gestos e operações, são importantes indicadores da maneira como o sujeito compreende a realidade e age sobre ela. Vergnaud (2009b) ainda afirma que a criança raciocina por meio da ajuda simultânea das diferentes representações, que podem ser explicitadas ou permanecer no campo mental, passando de uma representação a outra de acordo com sua necessidade.

Outro estudante indicou ter feito o desenho em sua mente (Figura 45).

Figura 45 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (III)

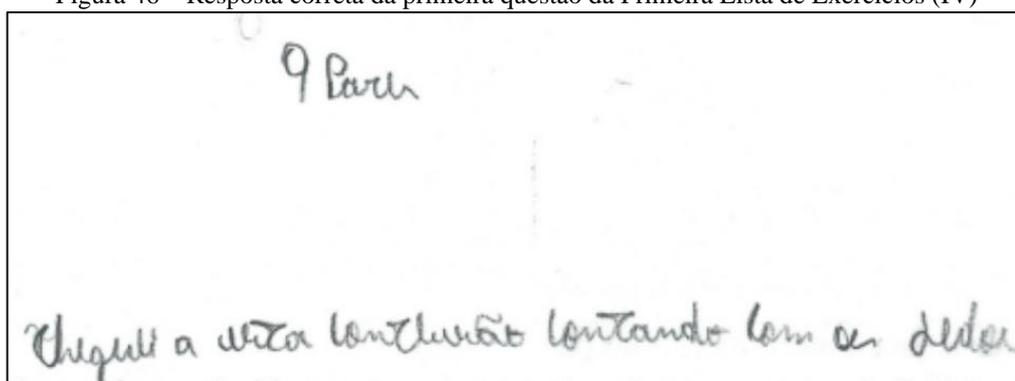


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vergnaud (2009a) traz o fluxo da consciência como um dos componentes da representação. Ele afirma que, embora muitas vezes não seja possível analisar essas percepções e ideias, pois elas costumam permanecer apenas no campo mental, esse fluxo mostra que a representação funciona de forma espontânea e irreprimível.

Um dos estudantes que acertou a resposta afirmou ter contado com os dedos (Figura 46).

Figura 46 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)

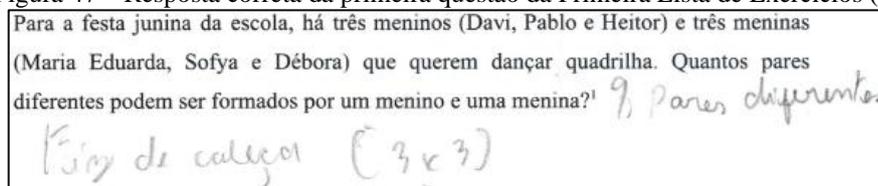


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Uma das primeiras referências de esquemas experienciado pela criança é a atividade sensório motora (Vergnaud, 2009a). Apesar dos gestos e percepções consistirem em formas simples de atividade, o processo de conceitualização está presente, pois essas ações não seriam eficientes sem a identificação de alguns objetos e propriedades (Vergnaud, 2009a).

Um dos estudantes que acertou a resposta comentou ter feito a multiplicação de cabeça (Figura 47).

Figura 47 – Resposta correta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (V)

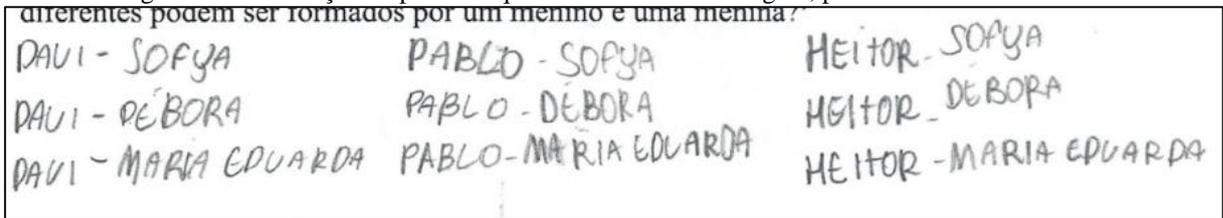


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vergnaud (1982) afirma que, ao resolver um problema, comumente as crianças fazem o cálculo antes e depois escrevem sua representação simbólica. Apesar disso, ele ressalta que o uso de representações simbólicas é fundamental, pois auxilia o estudante em problemas em que ele possivelmente teria dificuldade em resolver e permite que ele diferencie as várias estruturas e classes de problema.

Outros quatro alunos realizaram a listagem de todas as possibilidades, porém um deles não indicou o resultado final (Figura 48).

Figura 48 – Resolução da primeira questão utilizando a listagem, porém sem resultado final

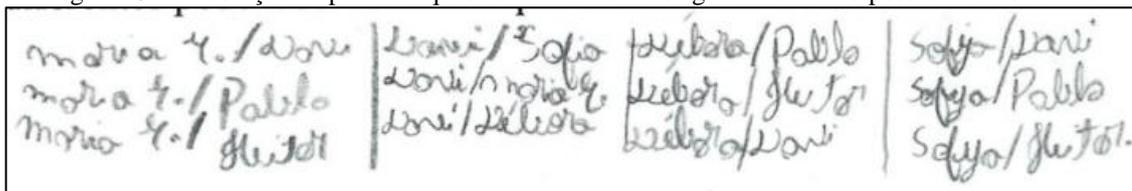


Fonte: Protocolo de pesquisa.

O uso dessa estratégia indica que, mesmo sem a apresentação formal do conteúdo de Análise Combinatória, o estudante compreende tratar-se de problemas de contagem de elementos (Pessoa, 2009). Nota-se, com isso, o uso do teorema-em-ação de que, nesse tipo de situação, os dois conjuntos, de meninos e de meninas, devem ser combinados para formar os pares válidos da questão, demonstrando compreender as relações invariantes do problema (Pessoa, 2009).

Outro discente fez a listagem das possibilidades, porém considerou todos os pares compostos por Davi e uma menina, em dobro (Figura 49). Percebe-se, em sua solução, uma certa sistematização de sua listagem, dividindo as duplas compostas por Maria Eduarda, Davi, Débora e Sofya. Apesar disso, o aluno não identificou que alguns pares se repetiam.

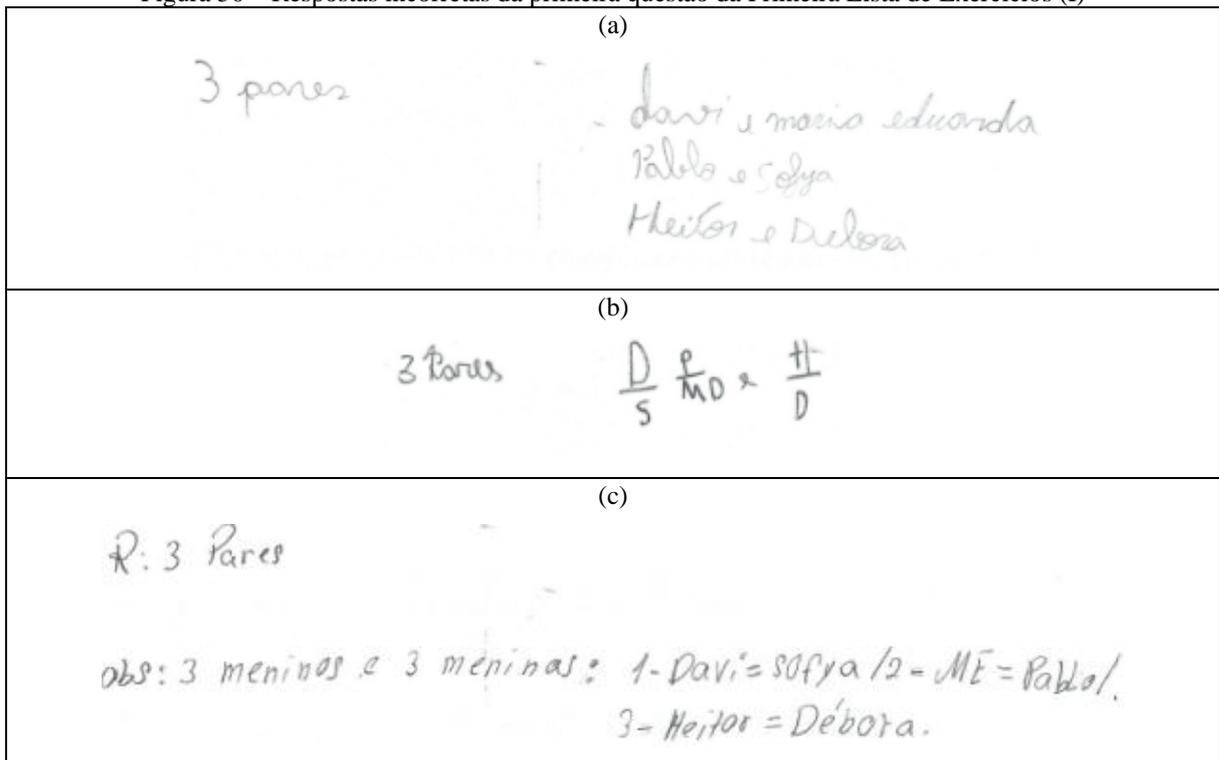
Figura 49 – Resolução da primeira questão utilizando a listagem e contando possibilidades a mais



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Doze dos estudantes responderam incorretamente três pares, pensando em juntar cada menino com uma menina (Figura 50). Um aluno indicou ter chegado a esse resultado a partir da listagem (Figura 50a) e outros dois apresentaram desenhos semelhantes aos símbolos matemáticos do traço de fração (Figura 50b) e do sinal de igual (Figura 50c), sem que esses manifestassem o sentido utilizado na Matemática.

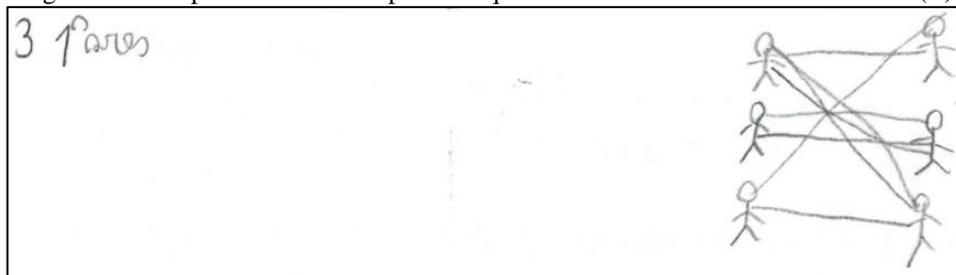
Figura 50 – Respostas incorretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (I)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outro discente indicou ter chegado no resultado de três pares a partir de um desenho de seis bonecos, conectando alguns deles com uma linha (Figura 51). Apesar disso, nota-se que alguns bonecos de fileiras diferentes estavam sendo conectados por mais de uma linha e outros não apresentavam nenhuma linha conectando-os.

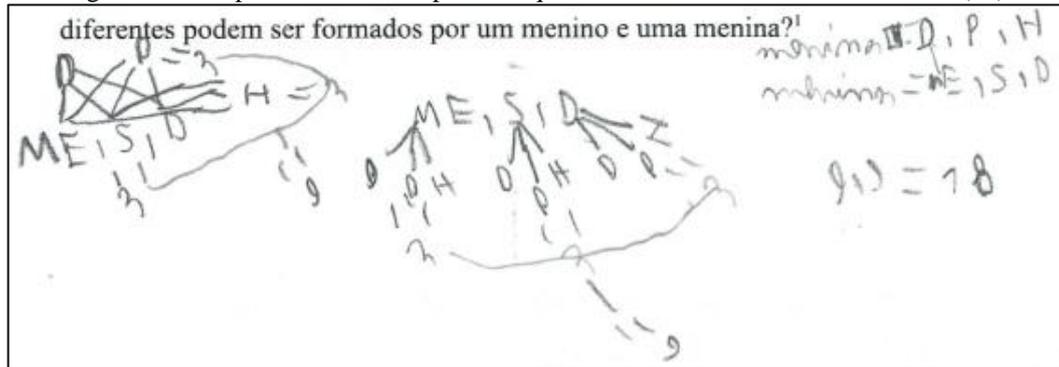
Figura 51 – Resposta incorreta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um dos alunos fez um esquema que se assemelha à árvore de possibilidades, porém contou cada opção duas vezes, considerando, por exemplo, Davi (D) e Sofya (S) um par diferente de Sofya (S) e Davi (D) e chegando assim ao resultado dezoito (Figura 52). Percebe-se que o estudante não compreendeu que a ordem dos pares não gerava novas possibilidades, indicando não compreender os invariantes envolvidos.

Figura 52 – Resposta incorreta da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (III)

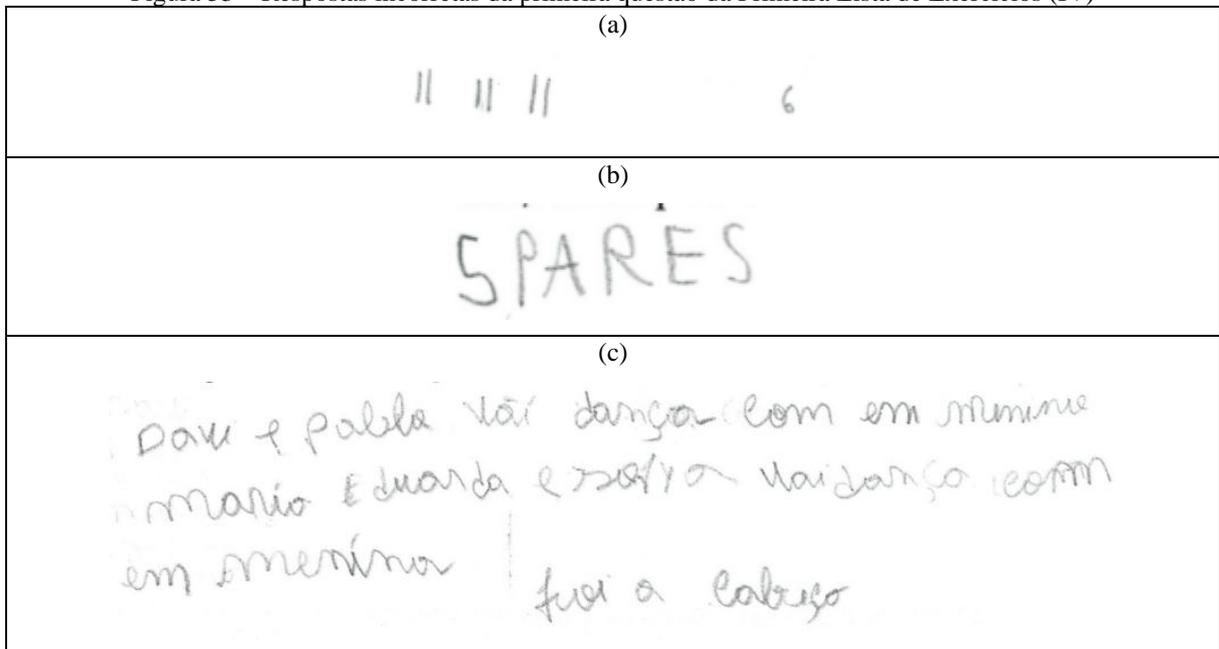


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vergnaud (1983) afirma que muitos procedimentos incorretos adotados estão de acordo com alguns aspectos da situação real apresentada. Dessa forma, é essencial estar atento aos erros dos discentes, pois estes evidenciam as dificuldades enfrentadas por eles (Vergnaud, 2009b).

Dois alunos responderam seis pares, sendo que um deles utilizou um desenho de palitinhos para chegar ao resultado (Figura 53a), outro aluno replicou que seriam cinco pares (Figura 53b), e um apresentou uma solução que não foi compreendida pela pesquisadora (Figura 53c).

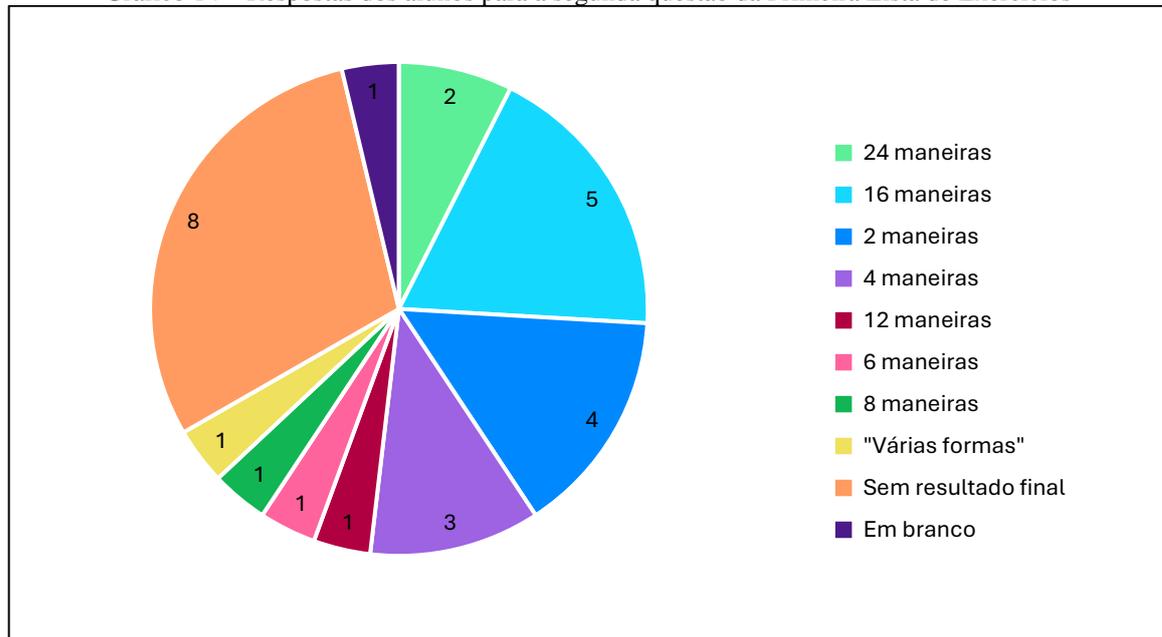
Figura 53 – Respostas incorretas da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A segunda questão abordou um problema de permutação. O Gráfico 14 apresenta os resultados encontrados pelos alunos.

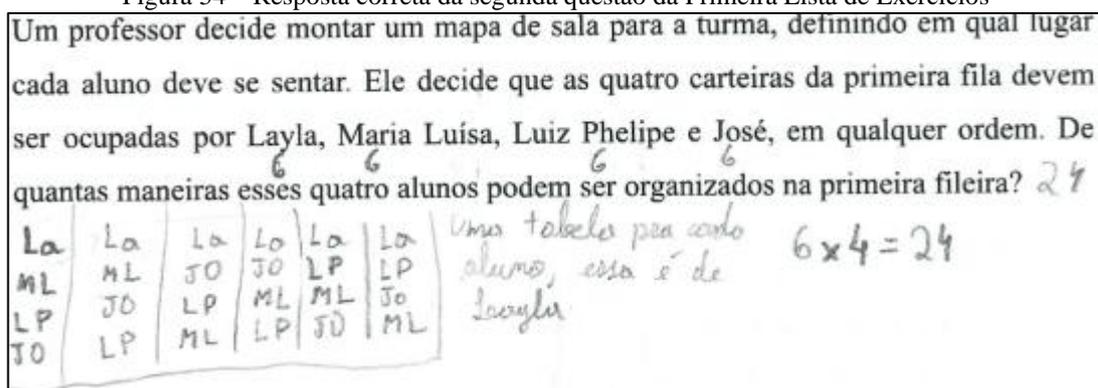
Gráfico 14 – Respostas dos alunos para a segunda questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

O problema contou com duas respostas corretas de vinte e quatro possibilidades. Os dois apresentaram resoluções semelhantes, fazendo a listagem fixando uma das pessoas na primeira posição e alterando os outros lugares. Em seguida, eles multiplicaram o resultado pelo número de pessoas que poderiam ocupar a primeira carteira, chegando na resposta  $6 \times 4 = 24$  (Figura 54).

Figura 54 – Resposta correta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios



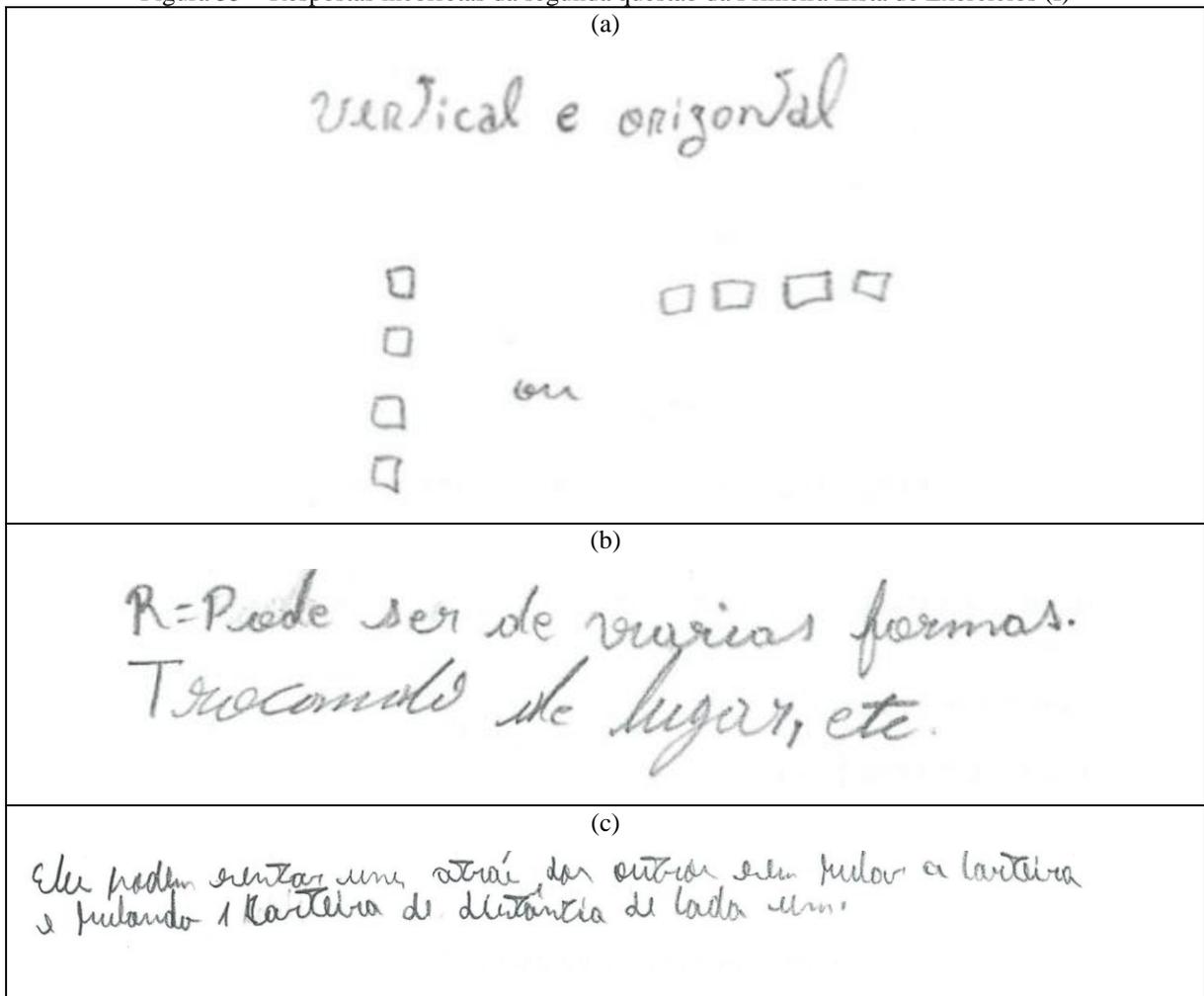
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Observa-se na figura acima que o estudante ainda indicou que a tabela se refere às possibilidades em que Layla assume a primeira posição, e que cada um dos alunos teria uma tabela equivalente. Essa estratégia é denominada por Pessoa (2009, p.190) como “percepção ou busca da regularidade”, em que o aluno inicia por meio de outro método, nesse caso a listagem,

e, ao notar um certo padrão, realiza uma multiplicação a partir do que foi percebido.

Três alunos apresentaram erros na interpretação do problema, compreendendo que haveria duas formas de organizar essa fila: na vertical e na horizontal (Figura 55a). Outro respondeu que poderiam ser de várias formas (Figura 55b). Um estudante afirmou que “Eles podem sentar um atrás dos outros ou pular a carteira e pulando uma carteira de distância de cada um” (Figura 55c).

Figura 55 – Respostas incorretas da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (I)

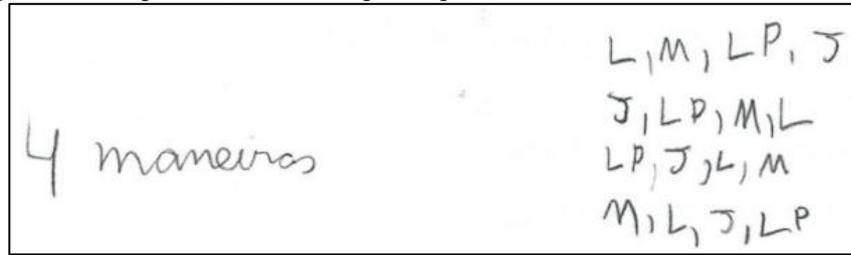


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nesse sentido, Pessoa (2009) afirma que uma das principais dificuldades da Análise Combinatória é a formulação e interpretação do enunciado dos problemas.

Cinco estudantes ainda realizaram a listagem incompleta das possibilidades (Figura 56). Santos (2019) aborda que, ao trabalhar com questões mais complexas, a listagem acaba se tornando um processo demorado e complicado, sendo necessário levar o aluno a pensar em outras estratégias.

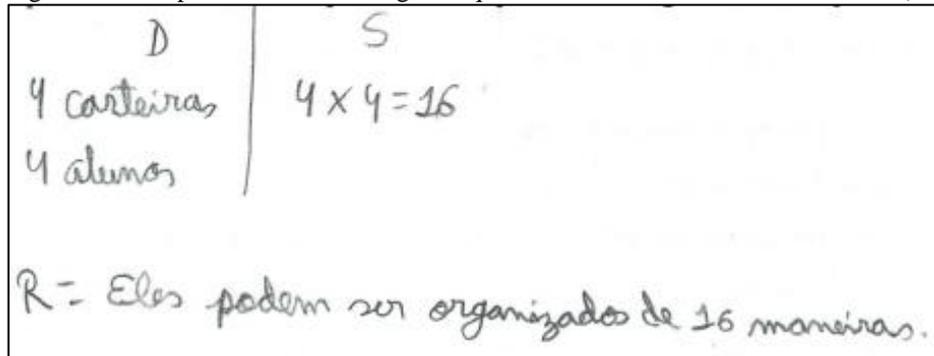
Figura 56 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros quatro alunos responderam que o resultado se dava a partir da multiplicação  $4 \times 4 = 16$ , pois há quatro carteiras e quatro alunos (Figura 57). Nesse sentido, Pessoa (2009, p.159) ressalta a necessidade de reforçar durante as aulas de Combinatória que, mesmo se tratando de um problema multiplicativo, deve-se “buscar a multiplicação adequada e não apenas o produto das quantidades envolvidas na questão”.

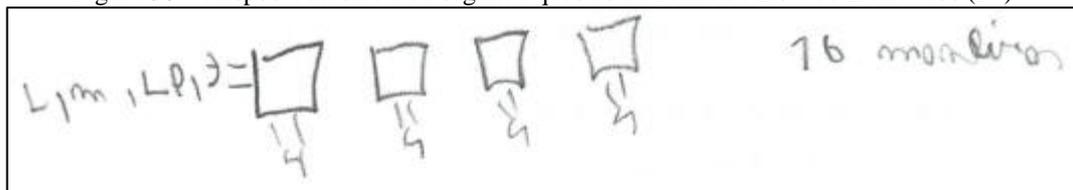
Figura 57 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (III)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um dos estudantes também chegou no resultado dezesseis maneiras, porém pareceu ter feito a partir da adição  $4 + 4 + 4 + 4$  (Figura 58).

Figura 58 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Três estudantes indicaram a resposta quatro, sendo que um deles declarou ter feito de cabeça e outro usou o desenho de palitinhos (Figura 59a); três sinalizaram algumas

possibilidades através de desenhos, porém não apresentaram a resposta final (Figura 59b); um estudante afirmou serem doze maneiras a partir de uma conta de cabeça (Figura 59c) e outro indicou que seriam seis probabilidades e comentou ter feito usando o braço (Figura 59d).

Figura 59 – Respostas incorretas da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (V)

(a)

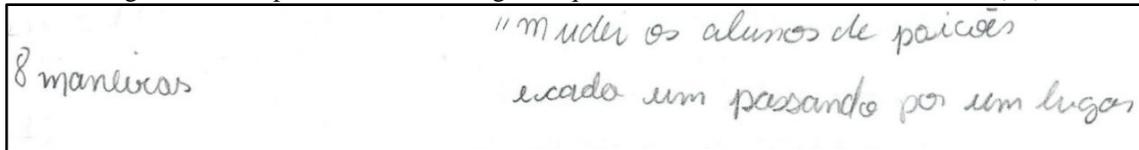
(b)
<p>Carteira</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> → Layla, LP, ML, José</li> <li><input type="checkbox"/> → ML, José, LP, Layla</li> <li><input type="checkbox"/> → LP, Layla, ML, José</li> <li><input type="checkbox"/> → José, ML, Layla, LP</li> </ul>
(c)
<p>12 maneiras:</p> <p>Eu fiz a conta na minha cabeça.</p>
(d)
<p>6. <del>10</del> probabilidade</p> <p>usando o braço</p>

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um discente sugeriu que seriam oito maneiras, explicando que pensou em mudar os alunos de posição, cada um ocupando uma cadeira (Figura 60). Um aluno deixou a questão em

branco.

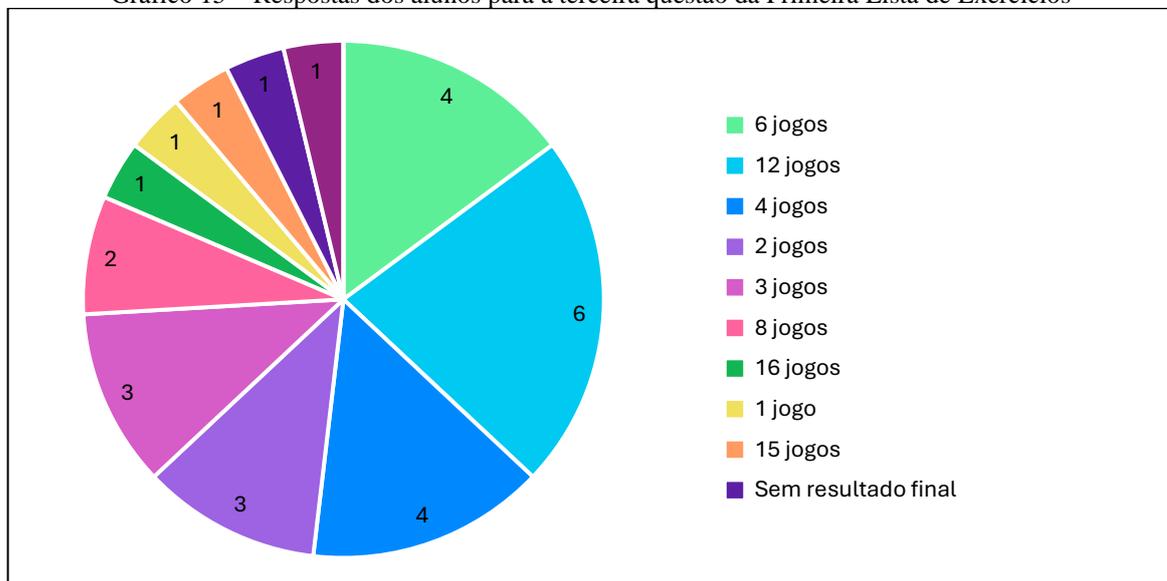
Figura 60 – Resposta incorreta da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios (VI)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A terceira questão abordou um problema de combinação. O gráfico abaixo mostra os resultados encontrados pelos alunos:

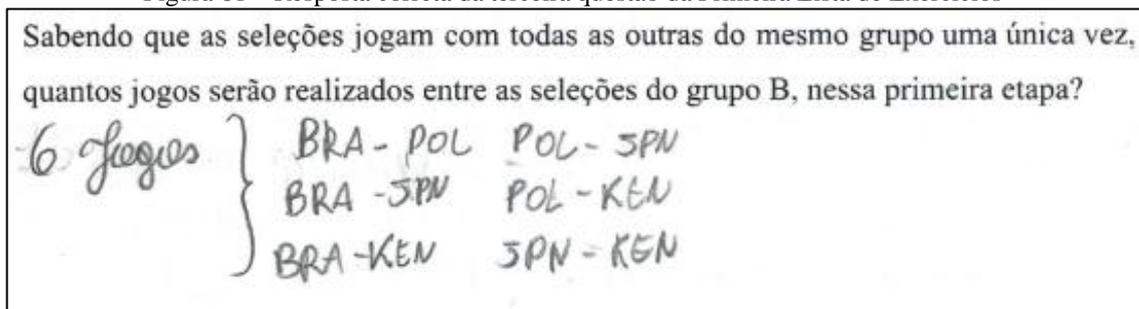
Gráfico 15 – Respostas dos alunos para a terceira questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

Contou com quatro respostas corretas de seis jogos, sendo que um dos alunos realizou a multiplicação  $3 \times 2$ , enquanto os outros três chegaram a esse resultado a partir da listagem (Figura 61).

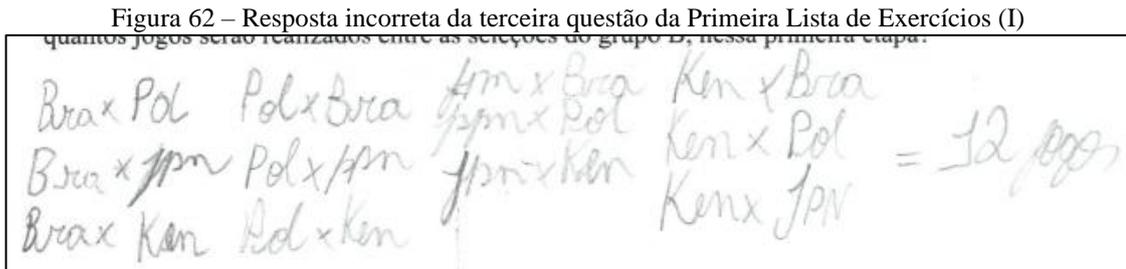
Figura 61 – Resposta correta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O uso da listagem de todos os casos pode ser vantajoso, pois possibilita que os alunos pensem mais lentamente acerca das situações a serem consideradas, permitindo refletir a respeito dos casos válidos (Azevedo, 2013).

Apesar disso, um aluno realizou a listagem incorreta, considerando cada possibilidade de partida duas vezes (Figura 62).



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A resolução indica que o estudante não compreendeu o invariante da combinação que garante que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (Pessoa, 2009).

Cinco discentes chegaram a esse mesmo resultado ao considerar que cada seleção participaria de três partidas, totalizando doze jogos (Figura 63). Outro aluno chegou a essa mesma conclusão, porém não apresentou o resultado final.

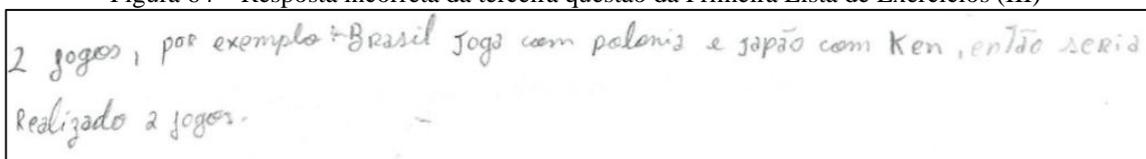
Figura 63 – Resposta incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Três estudantes responderam que existiam duas possibilidades de jogos, porém apenas um indicou o raciocínio empregado e o exemplo de duas partidas válidas, entendendo que a escolha de dois jogos já envolveria os quatro países de um mesmo grupo (Figura 64).

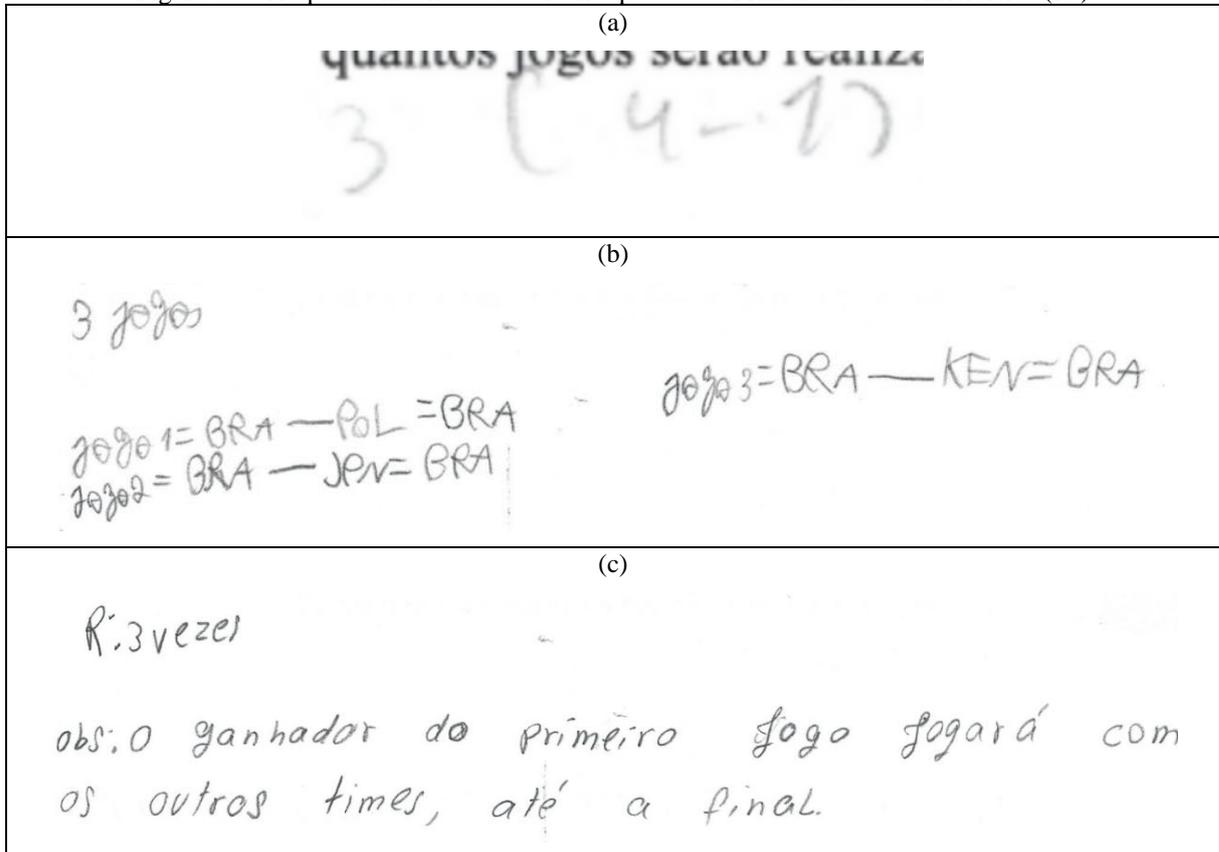
Figura 64 – Resposta incorreta da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (III)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Três alunos responderam três e um deles indicou ter realizado a subtração  $4 - 1$  (Figura 65a), outro considerou apenas as partidas com a seleção brasileira (Figura 65b) e o último pensou que apenas o ganhador do primeiro jogo competiria com os outros times (Figura 65c).

Figura 65 – Respostas incorretas da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Quatro discentes afirmaram ser quatro possibilidades, e um deles indicou ter considerado os jogos Brasil e Polônia, Polônia e Brasil, Japão e Quênia, Quênia e Japão (Figura 66a). Um respondeu dezesseis, a partir da multiplicação  $4 \times 4$  (Figura 66b) e outro comentou que seriam quinze jogos, pois o ganhador poderia jogar depois (Figura 66c). Esses estudantes demonstraram não compreender o trecho do enunciado que informa que “as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez”.

Figura 66 – Respostas incorretas da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios (V)

(a)

B+P, P+B, J+K, K+J      4 jogos

(b)

D	S	R
Grupo B: 4 seleções 4 seleções 4 jogos cada	$4 \times 4 = 16$	Serão realizados 16 jogos entre as seleções do grupo B.

(c)

15 jogos

Pois o ganhador do primeiro jogo, pode jogar depois

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nota-se que um erro comum nessa questão foi o de interpretação e compreensão do enunciado. Souto e Nogueira (2014) afirmam que essa é uma das principais dificuldades dos alunos e ressaltam a importância de trabalhar com textos em sala de aula.

Dois estudantes sugeriram que seriam oito partidas e outro respondeu um, porém não indicaram a forma como pensaram. Além disso, não foi possível compreender a solução de um dos alunos (Figura 67).

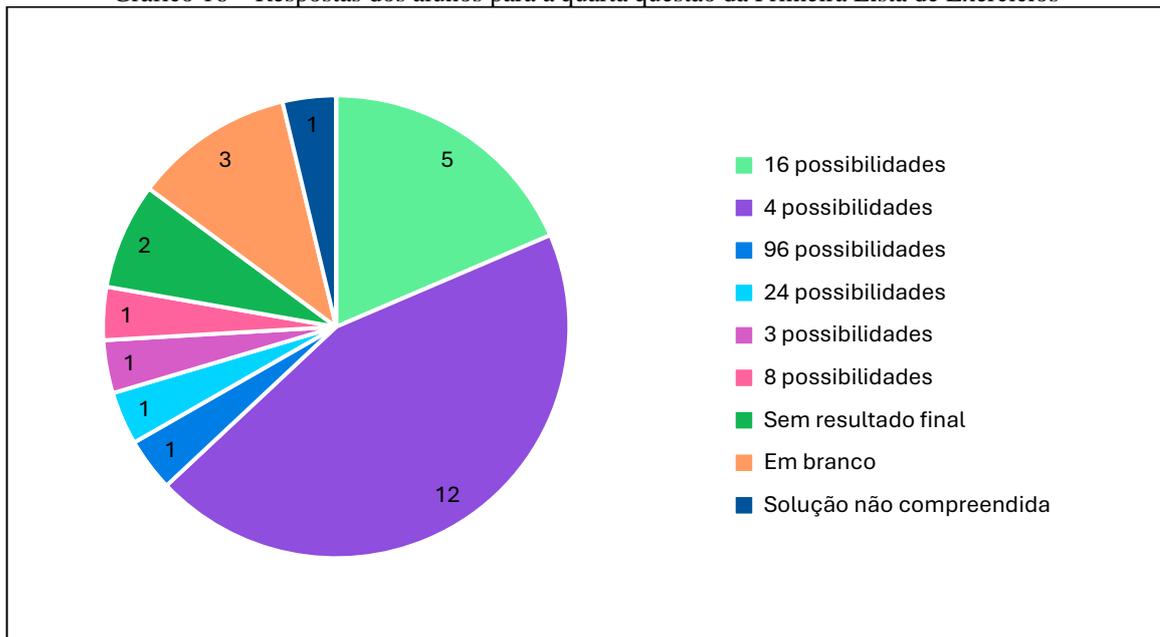
Figura 67 – Solução não compreendida da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios

o 1º do Brasil - foi a mão

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A quarta questão tratou de um problema de produto cartesiano. O Gráfico 16 expõe os resultados encontrados pelos alunos.

Gráfico 16 – Respostas dos alunos para a quarta questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

Contou com cinco respostas corretas de dezesseis possibilidades. Um dos estudantes fez uso de uma listagem sistematizada, separando os casos de cada parte do corpo e indicou que o resultado é dado pela multiplicação  $4 \times 4$  (Figura 68).

Figura 68 - Resposta correta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (I)

um círculo amarelo.

<p>mão direita + am m d + verde m d + azul m d + vermelho</p>	<p>pé direito + am pd + verde pd + azul pd + vermelho</p>
<p>mão esquerda + am me + verde me + azul me + vermelho</p>	<p>pe + am pe + verde pe + azul pe + vermelho</p>

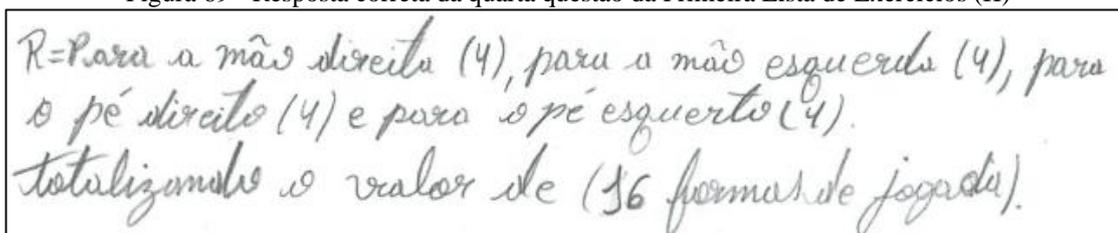
$4 \times 4 = 16$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Essa sistematização indica um nível superior de conceitualização e uma compreensão mais clara do problema a ser trabalhado (Pessoa, 2009). Azevedo (2013) ressalta que essa sistematização do pensamento é importante para que o aluno não se perca na contagem.

Outro estudante explicou que existiam quatro possibilidades para cada parte do corpo, totalizando dezesseis formas de jogadas (Figura 69).

Figura 69 - Resposta correta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (II)

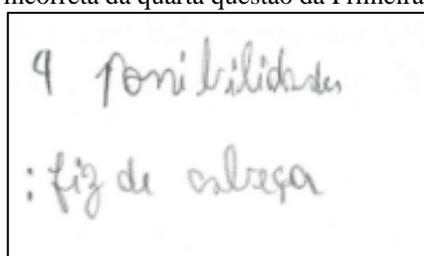


R=Para a mão direita (4), para a mão esquerda (4), para o pé direito (4) e para o pé esquerdo (4).  
Totalizando o valor de (36 formas de jogar).

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois alunos listaram todos os casos corretamente, porém não indicaram a resposta final. Outros doze alunos responderam quatro possibilidades, porém não explicaram o raciocínio traçado por eles (Figura 70).

Figura 70 - Resposta incorreta da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios (I)



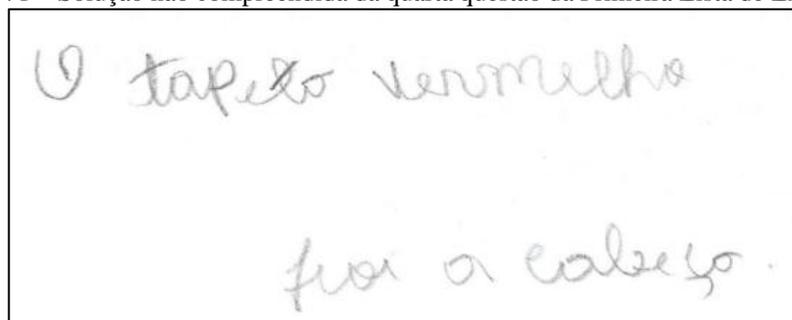
4 possibilidades  
: fiz de cabeça

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um dos estudantes apresentou a resolução  $24 \times 4 = 96$ . A pesquisadora acredita que esse aluno levou em consideração que cada um dos vinte e quatro círculos do tapete, ainda que de mesma cor, indicava quatro possibilidades diferentes (mão direita, mão esquerda, pé direito e pé esquerdo).

Um aluno respondeu vinte e quatro possibilidades, um afirmou serem três e outro considerou oito, porém não apresentaram a forma como eles pensaram o problema. Três alunos deixaram a questão em branco. Não foi possível compreender a solução de um dos alunos (Figura 71).

Figura 71 – Solução não compreendida da quarta questão da Primeira Lista de Exercícios



O tapete vermelho  
foi o cabeça.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A quinta questão abordou um problema de arranjo, que questionava quantos seriam os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final disputada por oito atletas. Não foi obtida nenhuma resposta correta, a saber, 336 possibilidades, dada pelo produto  $8 \times 7 \times 6$ . O exercício apresentou um número elevado de possibilidades, gerando dificuldades para os alunos. Silveira e Andrade (2022) ressaltam que problemas com um grande número de agrupamentos acabam tornando a atividade de listagem exaustiva para os estudantes, trazendo maior complexidade para o exercício e evidenciando a importância do Princípio Fundamental da Contagem

O Gráfico 17 apresenta os resultados encontrados por eles. O item “Possibilidades de cada posição separadamente” abrange os casos em que o estudante considerou possibilidades para o primeiro, segundo e terceiro lugar de forma independente, indicando três respostas finais.

Gráfico 17 – Respostas dos alunos para a quinta questão na Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

Um dos estudantes chegou à multiplicação  $8 \times 7 = 56$  (Figura 72), sem considerar as possibilidades para o terceiro lugar. Em sua solução, ele fixou o atleta 1 no primeiro lugar e altera os atletas da segunda posição e, sem seguida, realizou o produto, indicando ter utilizado a estratégia de percepção ou busca de regularidade (Pessoa, 2009).

Figura 72 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (I)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outro discente chegou no produto  $14 \times 8$ , envolvendo números semelhantes à multiplicação correta (Figura 73). Apesar disso, a pesquisadora não compreendeu a estratégia adotada por ele.

Figura 73 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Cinco alunos realizaram o produto  $8 \times 3$  (Figura 74). Pessoa (2009) verifica que a estratégia da multiplicação, mesmo que inadequada, indica uma certa percepção da relação entre problemas de Combinatória e essa operação matemática.

Figura 74 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (III)

ATJ=123  
AT2

$3 \times 8 = 24$  resultados

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros quatro alunos fizeram a subtração  $8 - 3$  (Figura 75). Em relação a essas duas operações  $8 \times 3$  e  $8 - 3$ , que trazem números presentes no enunciado da questão, Pessoa (2009, p.182-183) afirma que este é um procedimento muito comum que pode estar relacionado com um obstáculo didático: “o de que, em geral, apenas os números a serem utilizados na resolução de problemas fazem parte dos enunciados e, assim, é preciso operar com estes dois valores por meio de uma das operações aritméticas”.

Figura 75 – Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)

5.

só fiz auto menos.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Três estudantes consideraram as possibilidades para cada uma das posições separadamente (Figura 76). O raciocínio utilizado está incorreto, pois as divisões indicadas não apresentam relação com o que está sendo pedido.

Figura 76- Resposta incorreta da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (V)

Primeiro: 8

Segundo: 4

Terceiro: 2

$8 \overline{) 3} = 4$

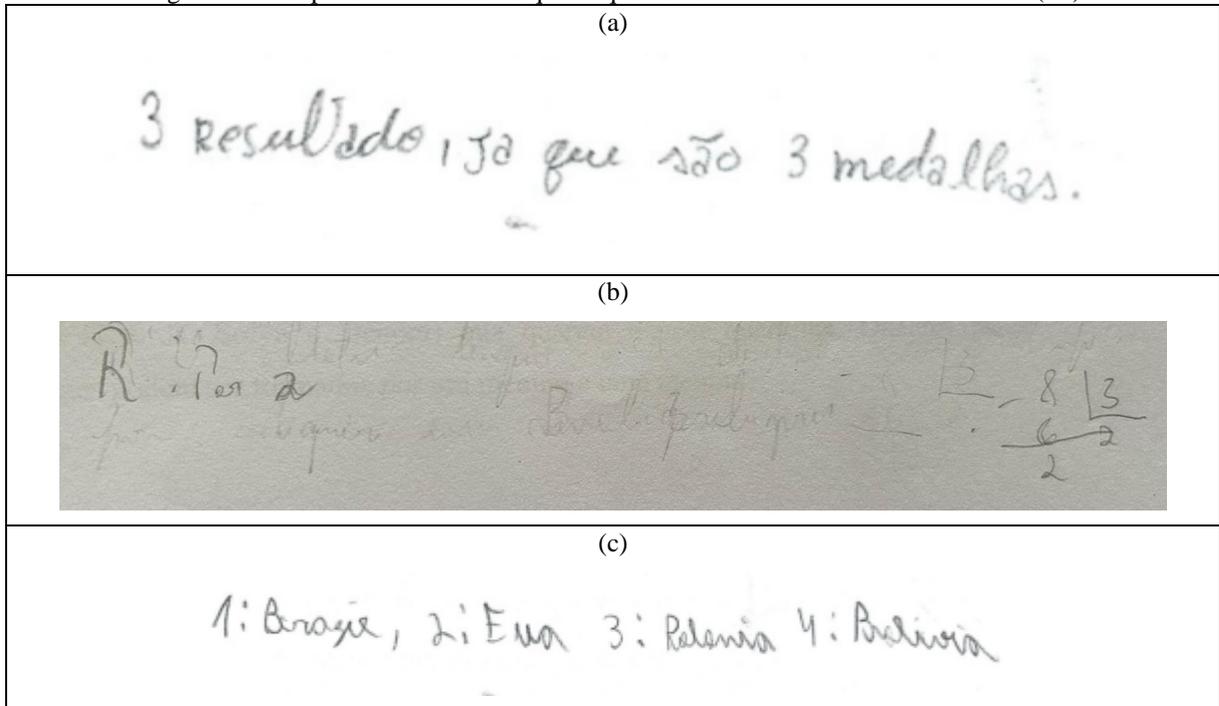
$4 \overline{) 2} = 2$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois responderam três, pensando que eram três medalhas (Figura 77a). Um realizou a divisão  $\frac{8}{3}$ , chegando ao resultado dois (Figura 77b), e outro apresentou uma possibilidade para

primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares (Figura 77c). Esses alunos demonstraram não ter compreendido o que estava sendo pedido na questão.

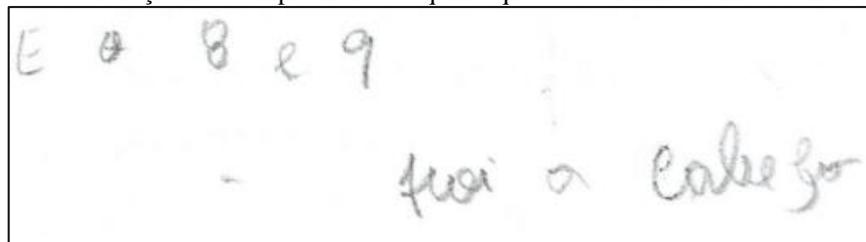
Figura 77 - Respostas incorretas da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios (VI)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois discentes consideraram que seriam oito possibilidades, um afirmou serem sessenta e quatro e outro respondeu trinta e seis, porém não explicaram o raciocínio utilizado. Além disso, quatro alunos deixaram a questão em branco. A pesquisadora não compreendeu a resolução de um dos estudantes (Figura 78).

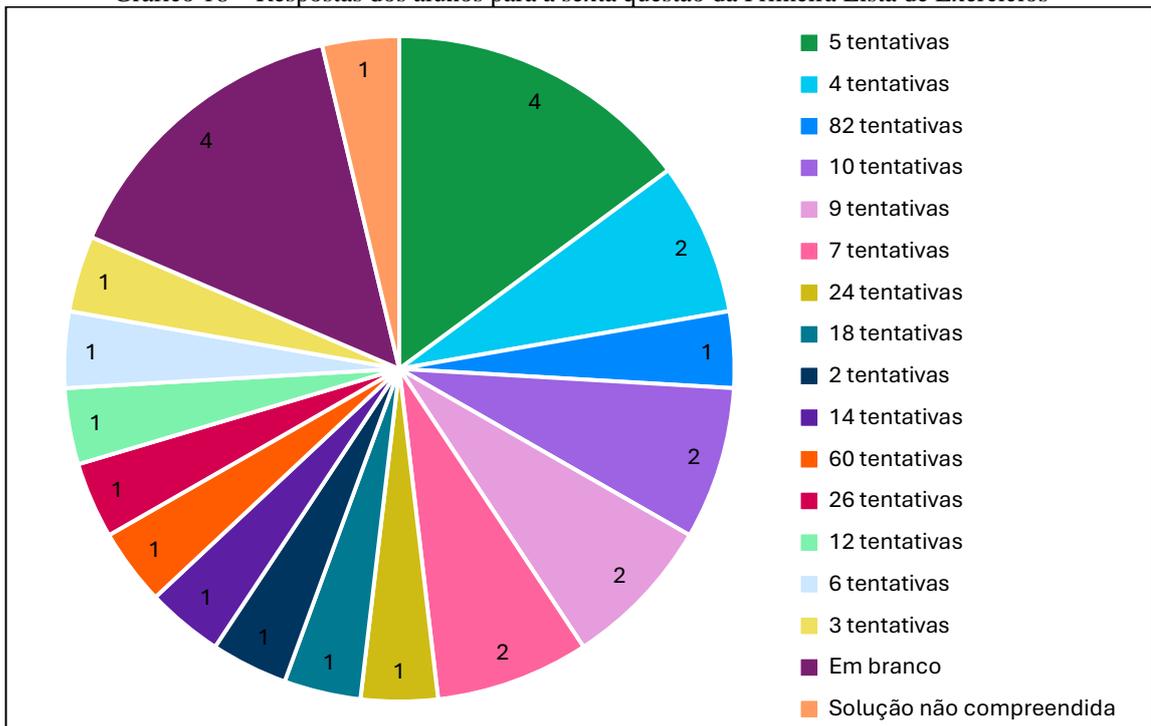
Figura 78 – Solução não compreendida da quinta questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A última questão tratou de um problema do tipo combinação e o gráfico abaixo expõe os resultados encontrados pelos alunos.

Gráfico 18 – Respostas dos alunos para a sexta questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

O exercício não teve nenhuma resposta correta de 36 tentativas, dado pela operação  $\frac{9 \times 8}{2}$ . Pessoa (2009) ressalta que problemas de combinação com números elevados exigem um procedimento mais formal, pois enumerar os elementos acaba se tornando uma tarefa muito difícil, resultando em um número baixo de acertos.

Um dos estudantes conseguiu chegar no produto  $9 \times 8$  por meio da estratégia de percepção ou busca de regularidade (Pessoa, 2009), porém realizou a multiplicação de forma incorreta, resultando em 82 possibilidades. Além disso, o discente também não dividiu o resultado por dois, indicando a falta de compreensão do invariante da combinação que garante que a ordem dos elementos não gera um novo resultado (Figura 79).

Figura 79 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (I)

BRA	BRA	B	B	B	B	B	B	B	$9 \times 8 = 82$
VRU	VRU	U	V	V	V	V	V	U	
ARG	ARG	A	A	A	A	A	A	A	
4	5	6	7	8	9	10	11	12	
5	4	4	4	4	4	4	4	4	
6	6	5	5	5	5	5	5	5	
7	7	7	6	6	6	6	6	6	
8	8	8	8	7	7	7	7	7	
9	9	9	9	9	8	8	8	8	
10	10	10	10	10	10	9	9	9	
11	11	11	11	11	11	11	10	10	
12	12	12	12	12	12	12	12	11	

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apesar disso, vale ressaltar que o mesmo aluno respondeu corretamente a terceira questão, chegando no resultado a partir da listagem.

Quatro alunos responderam cinco e um deles indicou que, por serem cinco países, seriam cinco tentativas (Figura 80a) e outro realizou a subtração  $8 - 3$  (Figura 80b). Nos dois casos, nota-se que os estudantes não compreenderam a pergunta.

Figura 80 – Respostas incorretas da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (II)

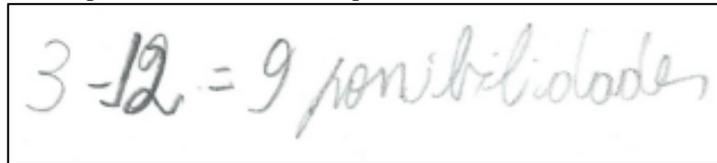
(a)
5 tentativas.
obs: 5 países, 5 tentativas.
(b)
5 (8-3)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois discentes indicaram a conta  $3 - 12$  e chegaram ao resultado de nove possibilidades, demonstrando não dominar a operação de subtração (Figura 81). Apesar disso, esses alunos revelaram compreender que o número doze englobava todos os países da América

do Sul e, como o Brasil, a Argentina e o Uruguai já haviam sido citados, era necessário retirar esses três países do número total, parte necessária para a resolução do problema.

Figura 81 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (III)

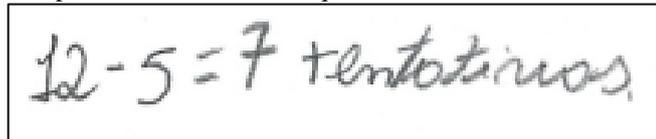


Handwritten student answer:  $3 - 12 = 9$  possibilidades

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outros dois estudantes realizaram a subtração  $12 - 5$ , indicando apenas usar números apresentados na questão, sem estabelecer uma relação lógica entre eles (Figura 82).

Figura 82 – Resposta incorreta da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (IV)



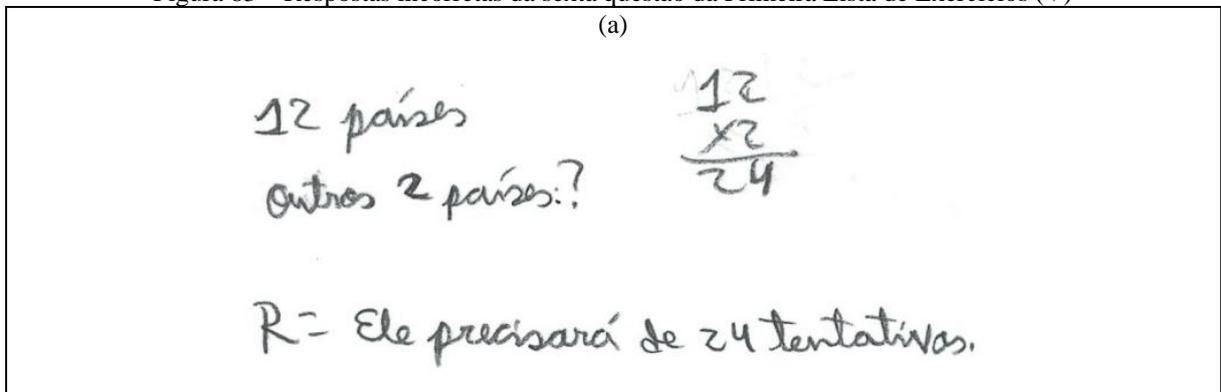
Handwritten student answer:  $12 - 5 = 7$  tentativas

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um discente afirmou serem vinte e quatro possibilidades, realizando a multiplicação  $12 \times 2$  (Figura 83a). Outro fez o produto  $13 \times 2$  e alegou ter tentado lembrar de todos os países e ter colocado cada um em uma posição passando pelo mesmo lugar (Figura 83b). Outro apresentou a adição  $12 + 2$  (Figura 83c). Um estudante chegou ao resultado sessenta, a partir do produto  $12 \times 5$  (Figura 83d). Um indicou a conta  $12 - 3$  e em seguida realizou a adição  $9 + 9$  (Figura 83e).

Figura 83 – Respostas incorretas da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (V)

(a)



Handwritten student answer:

12 países  
 outros 2 países:?

12
x 2
24

R = Ele precisará de 24 tentativas.

Figura 90 – Respostas incorretas da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios (V) (continuação)

<p>a questão?</p> $\begin{array}{r} 13 \\ + 12 \\ \hline 26 \end{array}$	<p>(b)</p> <p>Eu tentei lembrar de todos os Países, e coloquei cada um em uma posição passando pelo mesmo lugar". E eles se repetiram 26 vezes.</p>
	<p>(c)</p> $\begin{array}{r} 12 \\ + 2 \\ \hline 14 \end{array}$
<p>10 tentativas,</p>	<p>(d)</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$
	<p>(e)</p> $12 - 3 = 9$ $\begin{array}{r} 9 \\ + 9 \\ \hline 18 \end{array}$ <p>A = 18</p>

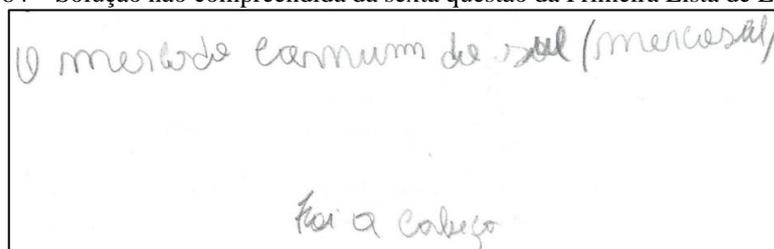
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dois alunos responderam quatro, enquanto outros dois afirmaram ser dez tentativas. Um estudante indicou ser duas tentativas, um respondeu doze e outro declarou serem seis, porém

não indicaram a forma como pensaram.

Quatro discentes deixaram a questão em branco. Uma das soluções não foi compreendida pela pesquisadora (Figura 84).

Figura 84 – Solução não compreendida da sexta questão da Primeira Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A partir das respostas à Primeira Lista de Exercícios, foi possível notar que a maioria dos alunos fez uso da listagem de possibilidades para chegar ao resultado. Além disso, outra estratégia muito adotada foi a multiplicação, porém empregada muitas vezes de forma inadequada.

#### 4.4 Segundo Teste Exploratório

O Segundo Teste Exploratório foi feito de maneira presencial com um grupo de licenciandos em Matemática que cursavam a disciplina de TCC II ou TCC III e contou com a participação de cinco pessoas.

Ao fazer a correção da quinta questão que já havia sido aplicada (Figura 85), uma das licenciandas sugeriu que, na explicação da questão para a turma, fosse utilizado um exemplo com números menores para, em seguida, utilizar os valores trazidos no enunciado. A recomendação não foi acatada e optou-se por fazer uso da árvore de possibilidades, e, a partir daí, chegar no princípio multiplicativo.

Figura 85 – Slide da quinta questão utilizado na Correção dos Exercícios



Fonte: Elaboração própria.

Além disso, na sexta questão, a participante recomendou deixar parte da árvore de possibilidades pronta nos slides, com o objetivo de facilitar a compreensão dos estudantes. Devido ao tempo da aplicação, decidiu-se não apresentar a explicação do sexto exercício no momento da aula, o que fez com que essa sugestão não fosse utilizada.

Ela também ressaltou a importância de deixar um tempo para que os alunos pudessem assimilar as novas questões antes de resolvê-las no quadro e a recomendação foi acatada.

No final do Teste Exploratório, na aplicação do questionário, ao perguntar se estava claro que as questões abordaram diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória, todos responderam de forma afirmativa, porém uma das licenciandas sugeriu enfatizar a diferença entre as estratégias de resolução utilizadas com os estudantes, pois eles poderiam não notar (Figura 86). Essa sugestão foi incorporada durante as falas da pesquisadora em aula.

Figura 86 – Resposta de uma licencianda para a primeira pergunta do questionário

01- Está claro que as questões abordam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo, Combinação)?

*Sim. Acredito que, durante a resolução, os alunos podem não perceber a diferença entre as estratégias utilizadas, então talvez seja interessante reforçar essas diferenças com eles.*

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A segunda pergunta questionava se a contextualização aparecia de forma significativa nos problemas e os licenciandos afirmaram que sim, exaltando a escolha dos temas e a maneira como eles foram apresentados.

Ao questionar se eles consideravam o tempo de quatro horários adequado, a maioria respondeu que, dependendo da participação dos estudantes, o tempo poderia não ser suficiente

para a correção da Primeira Lista de Exercícios e a resolução de todas as questões da Segunda Lista de Exercícios. Com isso, muitos sugeriram entregar as atividades separadamente, para ter mais controle da quantidade de questões discutidas, e, se necessário, descartar alguns exercícios, para que fosse possível realizar a entrevista (Figura 87). A sugestão foi aceita.

Figura 87 – Resposta de uma licencianda para a terceira pergunta do questionário

<p>03- Você considera o tempo de quatro horários adequado para a aplicação da sequência didática, considerando que em um dia será feita a correção dos exercícios e o outro será destinado para a resolução dos novos exercícios e a realização da entrevista?</p> <p>No segundo dia o tempo pode não ser suficiente, por isso é importante não entregar todas as atividades simultaneamente. Deste modo, caso não dê tempo realizar todos é possível pular para a entrevista.</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Diante disso, durante o momento de correção da Primeira Lista de Exercícios, resolvida previamente pelos alunos, priorizou-se a explicação de questões que abordavam as diferentes classificações dos problemas de Análise Combinatória dadas por Pessoa (2009). Dessa forma, a explicação da questão quatro, classificada como um problema de produto cartesiano (Figura 88a), assim como a da questão seis, classificada como um problema de combinação (Figura 88b), não foram realizadas pois outras duas, com as mesmas classificações, já iriam ser comentadas na aula.

Figura 88 – Questões não corrigidas durante a aula

(a)

4. O jogo *Twister* se baseia em um grande tapete com quatro linhas compostas por círculos de quatro cores diferentes: verde, amarelo, azul e vermelho. O jogo inclui também uma roleta dividida em quatro seções: pé direito, mão direita, pé esquerdo e mão esquerda.



A cada rodada, os participantes devem girar a roleta e colocar uma parte do corpo em um círculo da cor indicada. Sabendo que todas as quatro partes do corpo podem ser combinadas com todas as quatro cores, quantas são as possibilidades de jogada em uma rodada? Considera-se um exemplo de jogada colocar a mão direita em um círculo amarelo.

(b)

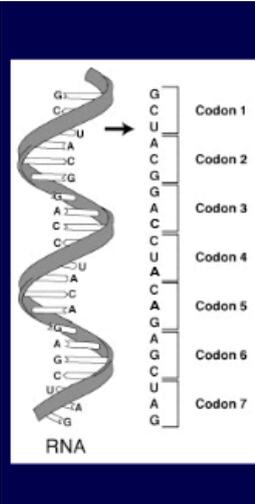
6. O Mercado Comum do Sul (Mercosul) é um bloco econômico que tem como objetivo principal propiciar um espaço comum capaz de gerar oportunidades comerciais e de investimentos mediante a integração competitiva das economias nacionais ao mercado internacional<sup>2</sup>. Em uma prova de geografia, é perguntado quais países compõem esse bloco econômico. Um aluno lembra que o Mercosul é formado pelo Brasil, Argentina, Uruguai e outros dois países da América do Sul e que o continente é composto por doze países. De quantas tentativas o estudante precisará para garantir que ele acertará a questão?

Fonte: Elaboração própria.

A quarta pergunta questionava se as perguntas estavam adequadas para uma turma de 9º. ano. Alguns licenciandos apontaram que a questão que envolvia o conceito de códon (Figura 89a), da Biologia, poderia gerar dificuldades. A partir dessas considerações, decidiu-se fazer uma modificação na questão, diminuindo o texto para que ele abordasse apenas o que fosse necessário (Figura 89b).

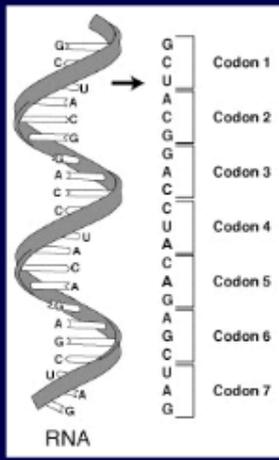
Figura 89 – Alteração no enunciado da questão envolvendo o conceito de códon

(a)



Um códon é uma sequência de três bases nitrogenadas de RNA-m (RNA mensageiro, responsável por levar a informação do DNA do núcleo ao citoplasma, local onde a proteína será produzida). O códon codifica um determinado aminoácido e, dependendo da sequência de códons, quantidade e tipos presentes no RNA-m, a proteína produzida será diferente. Sabendo que são encontradas apenas quatro bases nitrogenadas no RNA (citosina, guanina, adenina e uracila), quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas?

(b)



Um códon é uma sequência de três bases nitrogenadas de RNA-m (RNA mensageiro). Sabendo que são encontradas apenas quatro bases nitrogenadas no RNA (citosina, guanina, adenina e uracila), quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas?

Fonte: Elaboração própria.

Ao serem perguntados, os licenciandos também afirmaram que os enunciados estavam claros e bem explicados. Apesar disso, eles ressaltaram que a imagem da questão do futebol poderia gerar confusão, pois destacava a posição do volante (Figura 90a), enquanto o problema abordava as posições de lateral esquerdo e direito. Nesse sentido, foi feita uma alteração na ilustração que estava sendo utilizada, evidenciando as posições corretas (Figura 90b).

Figura 90 – Alteração da figura utilizada na questão envolvendo futebol



Fonte: Elaboração própria.

Outro problema que foi alterado foi o que envolvia a criptografia. Além de inicialmente estar escrita de uma forma muito complexa, a questão também poderia gerar dúvidas de quais seriam os códigos válidos, não deixando claro que a letra A não poderia ser substituída pela própria vogal A (Figura 91).

Figura 91 – Enunciado da questão envolvendo a criptografia antes das alterações propostas

Durante a Segunda Guerra Mundial, os alemães usavam máquinas capazes de transformar uma mensagem original em um código desconhecido, tornando-a intencionalmente incompreensível para evitar que fosse decifrada caso fosse interceptada por inimigos. Essa técnica é conhecida como criptografia. Uma das formas mais comuns de criptografar uma mensagem é substituir cada letra do texto por outra do alfabeto. Uma pessoa deseja criptografar a palavra MAR usando apenas vogais. Quantas códigos ela pode criar?

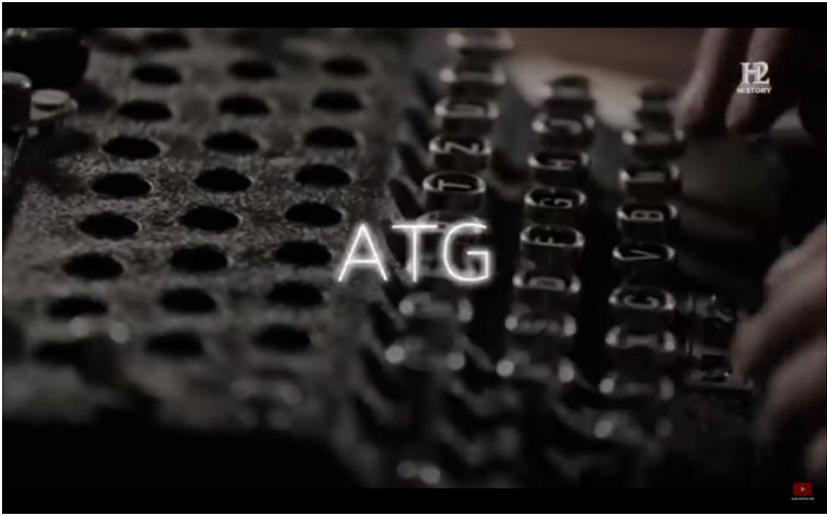


Fonte: Elaboração própria.

Com isso, foi adicionado um vídeo (Figura 92a) que explicava o funcionamento da máquina Enigma, utilizada durante a Segunda Guerra Mundial, e o texto da questão foi reduzido (Figura 92b).

Figura 92 – Alteração na questão envolvendo a criptografia

(a)



(b)

Uma maneira de codificar uma frase é substituir cada letra do texto por outra do alfabeto. Uma pessoa deseja codificar a palavra MAR usando apenas vogais. Quantos códigos ela pode criar? Considere EEE e AIA exemplos de códigos válidos.



Fonte: Elaboração própria.

Quando questionados se a sequência didática contemplava o referencial teórico adotado, todos responderam de maneira afirmativa.

Durante o Teste Exploratório, foi exposto que a turma em que a sequência didática seria aplicada contava com quatro alunos com NEE. Também foi dito, em conversa com a pesquisadora, que a mediadora sugeriu trabalhar questões de fácil interpretação com o uso de material manipulável.

A partir disso, foram discutidas algumas recomendações para o tratamento da aula com esses estudantes. Considerando que as questões seriam realizadas com a turma e objetivando não os excluir, os licenciandos sugeriram utilizar questões parecidas, porém com valores menores e informações reduzidas.

Além disso, duas participantes, que estavam estudando o tema de discentes com Transtorno do Espectro Autista em seu TCC, ressaltaram que aumentar a fonte do texto poderia ajudá-los a acompanhar melhor o problema e recomendaram enviar a lista para a mediadora antes, para que ela pudesse se habituar às questões e estar mais preparada para explicá-las. Todas essas sugestões foram acatadas, resultando em uma atividade com seis questões, que trabalhavam contextos similares aos abordados com a turma. A Figura 93a apresenta uma questão aplicada para a turma, enquanto a Figura 93b mostra a adaptação feita para os alunos com NEE. Vale lembrar que esta adaptação contou também com um material manipulável composto por uma imagem da urna eletrônica com imãs nos locais indicados para os dígitos do número do candidato e peças magnetizadas indicando os algarismos 6, 7 e 8. Todas as questões referentes a esta adaptação estão comentadas no capítulo 5, seção 5.1.2.

Figura 93 – Adaptação da questão envolvendo as eleições municipais

(a)

03- O número a ser digitado na urna eletrônica para vereador é composto por cinco dígitos. Os dois primeiros correspondem ao partido político e os três seguintes são os que identificam a candidata ou o candidato ao cargo.<sup>3</sup>



Um candidato a vereador do partido “PProf” (número 93) deseja que os três últimos dígitos de seu número sejam pares (0, 2, 4, 6, 8) e que não haja repetição entre eles. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

(b)

04- O número a ser digitado na urna eletrônica para prefeito é composto por dois dígitos.<sup>3</sup>



Um candidato a prefeito deseja que seu número seja composto pelos dígitos 6, 7 ou 8 e que não haja repetição entre eles. Alguns exemplos para este número seriam 67 ou 86. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, foram apresentadas as perguntas que seriam utilizadas na entrevista semiestruturada com os alunos e foi questionado se elas estavam de acordo com o referencial teórico, o que todos afirmaram que sim.

Ao serem indagados se possuíam alguma sugestão de pergunta para a entrevista, alguns licenciandos deram recomendações de pequenas modificações. Um deles sugeriu questionar aos estudantes se as contextualizações contribuem na compreensão do conteúdo abordado. Outro propôs alterar a ordem das perguntas, mantendo as questões quatro e sete próximas, sem explicar o motivo da alteração. Um licenciando indicou modificar a sétima pergunta, que questionava se o estudante percebe o desenvolvimento de seu raciocínio nesse tipo de questão, recomendando substituir o trecho “nesse tipo de questão” por “nessa temática”. Apesar dos comentários, nenhuma mudança foi feita, pois considerou-se que as alterações não gerariam grande impacto. Dessa forma, decidiu-se focar mais na modificação da sequência didática e na elaboração de materiais adaptados para os alunos com NEE.

#### **4.5 Implementação e Avaliação**

Esta seção aborda as etapas de Implementação e Avaliação da Intervenção Pedagógica, discutindo a aplicação da sequência didática na turma de 9º. ano do Ensino Fundamental e a análise da entrevista feita com os alunos.

##### **4.5.1 Aplicação da sequência didática**

A Implementação da ação interventiva ocorreu em uma turma do 9º. ano do Ensino Fundamental de um Instituto Superior de Educação do município de Campos dos Goytacazes e contou com a participação de 25 alunos, levando em consideração os presentes nos dois encontros.

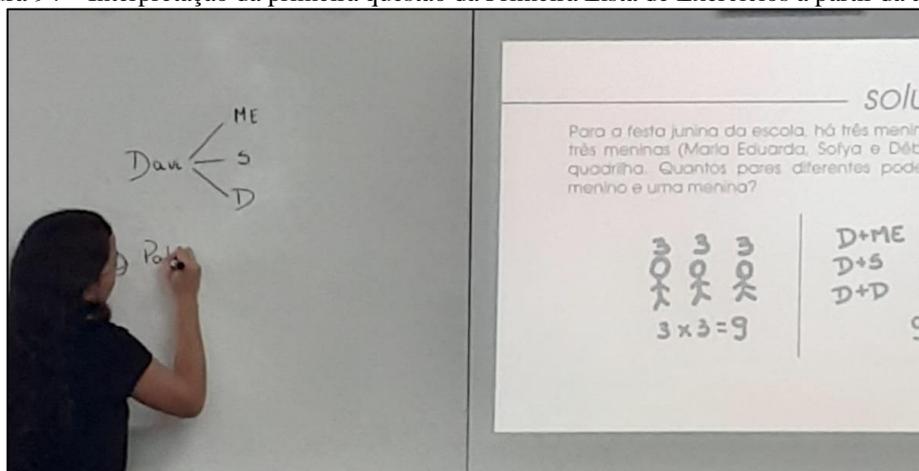
O primeiro encontro aconteceu no dia 23 de outubro de 2024 na sala de vídeo do Instituto, que dispunha de equipamento de projeção de imagem, necessário para a realização da aula, e contou com a presença de 30 estudantes.

Inicialmente, a autora recordou com os alunos a Lista de Exercícios resolvida por eles em agosto e explicou que seria feita a correção dessas questões a partir das resoluções apresentadas por eles.

A primeira questão abordou um problema classificado como produto cartesiano, pois envolveu dois conjuntos diferentes (meninos e meninas) que foram combinados para formar um novo conjunto (pares para a quadrilha) (Pessoa, 2009).

Foram apresentadas duas resoluções corretas e depois foi feita a interpretação dessas duas soluções a partir da árvore de possibilidades (Figura 94). A multiplicação  $3 \times 3$  foi indicada no final da árvore.

Figura 94 – Interpretação da primeira questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pessoa (2009) defende que as estratégias apresentadas pelo aluno são essenciais para compreender seu modo de pensar e os esquemas mobilizados por ele para resolver situações. Sendo assim, é importante estar atento às resoluções dos discentes para uma atuação mais eficaz e próxima do nível em que o aluno se encontra.

Em seguida, foram apresentadas algumas respostas incorretas para que eles identificassem os erros. Na primeira solução apresentada (Figura 95), eles identificaram que o aluno só considerou três casos possíveis, não esgotando todas as possibilidades de agrupamento.

Figura 95 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (I)

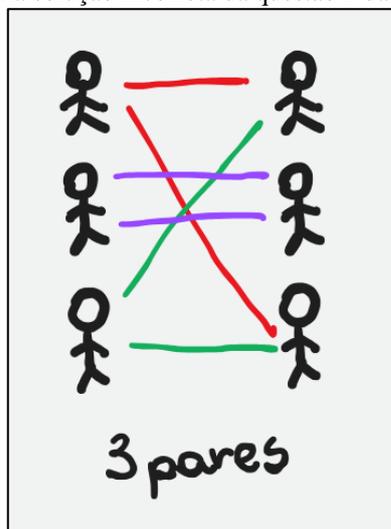
Davi e Maria  
Pablo e Sofya  
Heitor e Débora

3 pares

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na segunda solução apresentada (Figura 96), os estudantes responderam que faltou conectar algumas duplas.

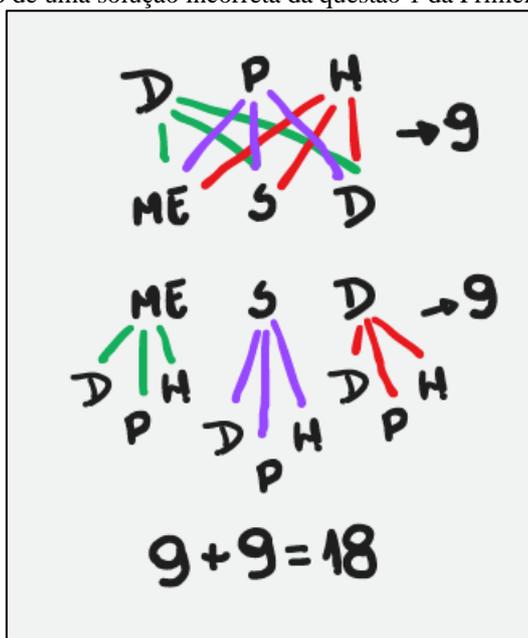
Figura 96 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na terceira solução apresentada (Figura 97), os alunos identificaram que cada par foi considerado duas vezes, por exemplo, o par gerado por Davi (D) e Sofya (S) é o mesmo par gerado por Sofya (S) e Davi (D).

Figura 97 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (III)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta solução apresentada, os estudantes relataram que, em parte, o erro era o mesmo do anterior, pois os pares compostos por Davi estavam aparecendo duas vezes (Figura 98).

Figura 98 – Apresentação de uma solução incorreta da questão 1 da Primeira Lista de Exercícios (IV)

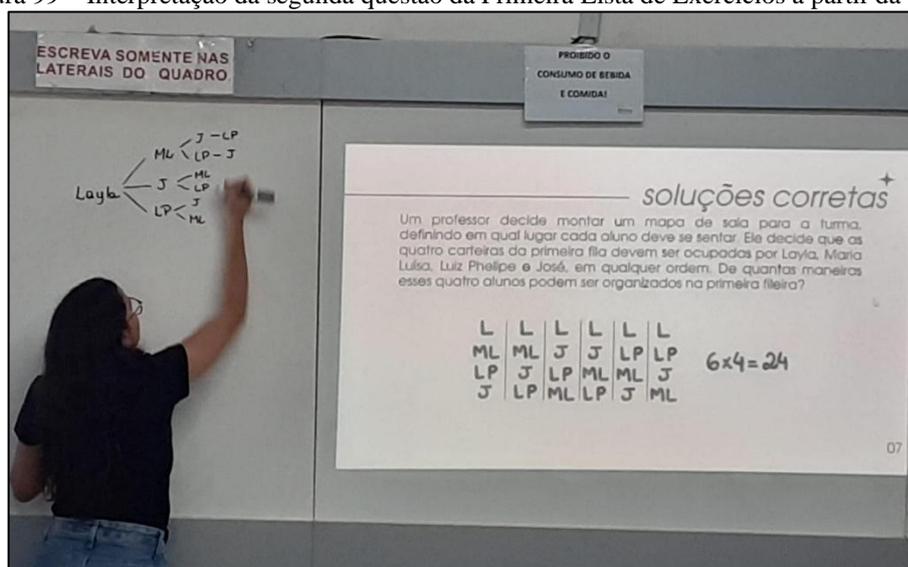
Maria / Davi	Davi / Maria
Maria / Pablo	Davi / Sofya
Maria / Heitor	Davi / Débora
<hr/>	
Débora / Davi	Sofya / Davi
Débora / Pablo	Sofya / Pablo
Débora / Heitor	Sofya / Heitor
12 pares	

Fonte: Protocolo de pesquisa.

O erro é parte natural e indispensável do processo de aprendizagem, além de possuir um importante valor formador, pois atua como uma oportunidade de crescimento e evolução para alunos e professores (Lorenzato, 2010). O erro pode ser visto como um indicador dos diferentes modos de pensar utilizados pelo aluno, oferecendo pistas de suas possíveis causas (Lorenzato, 2010).

A segunda questão abordou um problema classificado como permutação, pois era necessário que os quatro alunos ocupassem todas as quatro carteiras e a ordem em que esses alunos estavam dispostos resultava em uma nova possibilidade (Pessoa, 2009). Nessa questão, foi apresentada uma resolução correta dos estudantes e uma das alunas identificou que fez desse mesmo jeito (Figura 99). A partir dessa solução, foi feita uma árvore de possibilidades com os alunos.

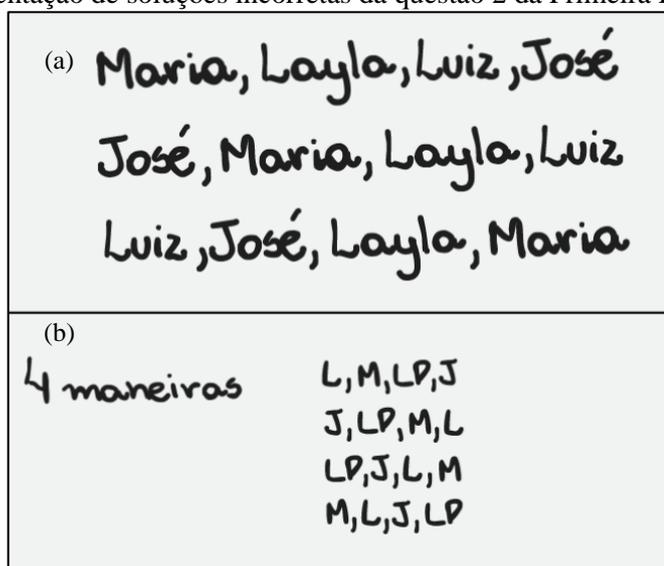
Figura 99 – Interpretação da segunda questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao serem questionados sobre o erro da primeira resposta incorreta apresentada (Figura 100a), os alunos logo identificaram que faltou listar algumas possibilidades e reconheceram esse mesmo equívoco na segunda resposta (Figura 100b).

Figura 100 – Apresentação de soluções incorretas da questão 2 da Primeira Lista de Exercícios (I)

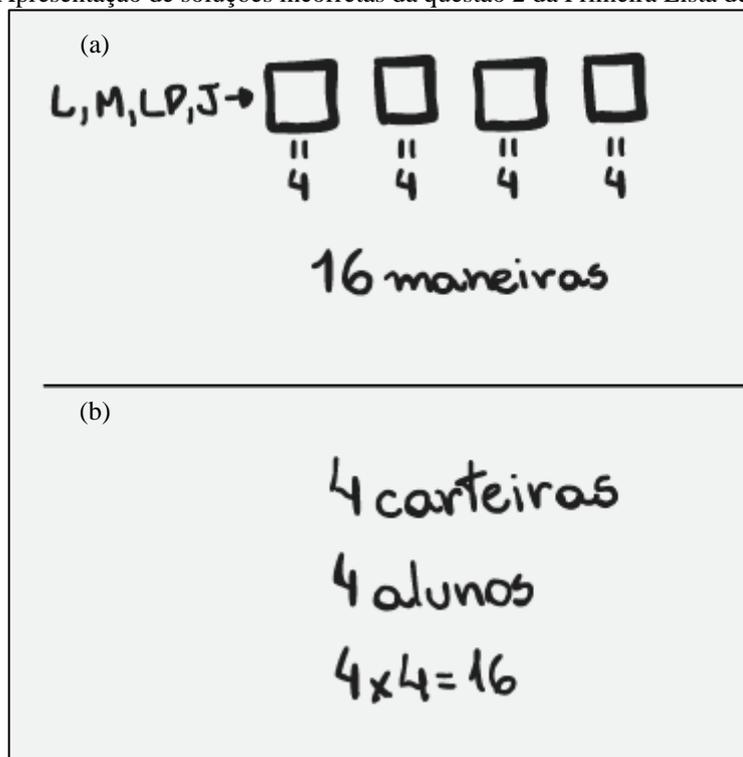


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao analisar as duas outras resoluções apresentadas, os alunos demonstraram certa dificuldade em explicar o erro. Justificaram que o correto seria fazer a multiplicação  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  ao invés de  $4 \times 4$  e comentaram que o equívoco era o mesmo nos dois. A pesquisadora chamou a atenção para as resoluções que dão pistas de pensamentos diferentes, visto que na segunda solução (Figura 101b), o estudante multiplica o número de alunos pela

quantidade de carteiras, enquanto na primeira solução (Figura 101a) ele considera que cada carteira pode ser ocupada por qualquer um dos quatro alunos e em seguida faz a soma dessas possibilidades.

Figura 101 – Apresentação de soluções incorretas da questão 2 da Primeira Lista de Exercícios (II)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como mencionado anteriormente, um conceito é constituído por três conjuntos, sendo um deles o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas (Vergnaud, 1986). Nesse sentido, Vergnaud (1986) reforça que existem diversas formas de representar um mesmo problema e cada aluno utiliza-se de diferentes símbolos em suas resoluções. Mesmo quando empregadas de maneira equivocada, essas representações podem ser úteis para a compreensão e o surgimento de soluções mais fortes, além de servir para identificar as dificuldades desses estudantes (Vergnaud, 1983).

A terceira questão abordou um problema classificado como combinação. O exercício envolveu um grupo maior, representado pelo grupo B com quatro seleções, do qual eram formados subconjuntos, que seriam as partidas de vôlei entre duas seleções. Além disso, a ordem das seleções em um jogo não gerava novas possibilidades, ou seja, a disputa composta pelo Brasil e pelo Japão era a mesma formada por Japão e Brasil. Nessa questão foi apresentada uma solução correta utilizando a listagem das possibilidades (Figura 102).

Figura 102 – Apresentação de uma solução correta da questão 3 da Primeira Lista de Exercícios

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B, nessa primeira etapa?

$BRA \times POL$      $POL \times JPN$   
 $BRA \times JPN$      $POL \times KEN$   
 $BRA \times KEN$      $JPN \times KEN$

} 6 jogos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi exibida uma solução incorreta e, a partir dessa resolução, foi feita a árvore de possibilidades considerando todos os doze jogos que foram levados em conta pelo aluno. Os alunos perceberam que algumas disputas estavam se repetindo, visto que o jogo entre Brasil e Polônia é o mesmo que o jogo entre Polônia e Brasil. Concluíram ao final que cada disputa estava sendo contada duas vezes, sendo necessário dividir a resposta encontrada por dois (Figura 103).

Figura 103 – Interpretação da terceira questão da Primeira Lista de Exercícios a partir da árvore

ESCREVA SOMENTE NAS LATERAIS DO QUADRO

PROIBIDO O CONSUMO DE BEBIDA E COMIDA!

$BRA \times POL$      $JPN \times KEN$   
 $BRA \times JPN$      $JPN \times POL$   
 $BRA \times KEN$      $JPN \times BRA$   
 $POL \times JPN$      $KEN \times BRA$   
 $POL \times KEN$      $KEN \times POL$   
 $POL \times BRA$      $KEN \times JPN$

= 12 jogos

outras respostas

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Borba e Azevedo (2010, p.25) defendem que o “uso de árvores de possibilidades pode ser um meio de entendimento das diferentes situações combinatórias, pois permite sistematicamente observar quais as possíveis combinações e selecionar os casos válidos para cada situação enunciada”.

A quinta questão abordou um problema classificado como arranjo. Envolveu um grupo maior, representado pelos oito atletas, do qual eram formados subconjuntos, que seriam as três primeiras posições da final, e a ordem em que esses atletas estavam dispostos resultava em uma nova possibilidade.

Para a explicação dessa questão, foi feita uma parte da árvore de possibilidades e, a partir daí, chegou-se ao princípio multiplicativo. Em seguida, foram exibidas as resoluções incorretas e a pesquisadora comentou não ter compreendido o raciocínio utilizado em algumas delas e incentivou que eles explicassem como pensaram (Figura 104). Uma das alunas reconheceu que sua resolução estava no quadro, porém não se lembrava muito bem (Figura 104a). O outro estudante não se pronunciou (Figura 104b).

Figura 104 - Apresentação de soluções incorretas da questão 3 da Primeira Lista de Exercícios (I)

(a)

1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8
3	2	2	2	2	2	2
4	4	3	3	3	3	3
5	5	5	4	4	4	4
6	6	6	6	5	5	5
7	7	7	7	7	6	6
8	8	8	8	8	8	7

$8 \times 7 = 56$

(b)

A2
B2
C2
D2
E2
F2
G2
H2

$14 \times 8 = 112$

outras respostas

13

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Depois, foi explicado que as questões quatro e seis não seriam resolvidas em aula devido ao tempo, porém, se eles quisessem, eles poderiam resolvê-las novamente em casa e a pesquisadora sanaria qualquer dúvida na próxima aula.

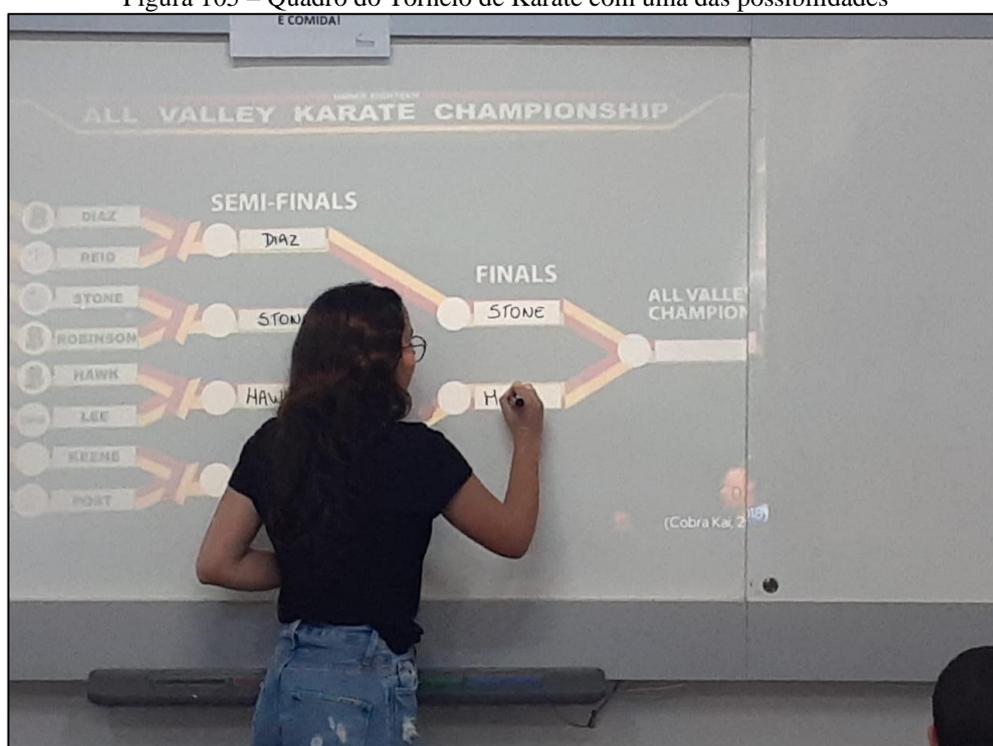
Durante esse primeiro momento, foi possível notar que alguns alunos demonstraram pouco interesse na aula, utilizando celulares em sala e não participando muito. Apesar disso, a maior parte dos estudantes manteve-se atenta ao longo da explicação, contribuindo de forma ativa nos momentos em que eram questionados acerca das soluções apresentadas.

A segunda parte da aula consistiu na realização de novas questões contextualizadas. Os exercícios foram entregues em folha, uma a uma, e a discussão contou com a apresentação de slides.

A primeira questão abordou o contexto da série “Cobra Kai”, o que surpreendeu alguns estudantes positivamente. Nesse momento, todos os alunos se mantiveram em silêncio, prestando atenção na aula. Os PCNEM (Brasil, 2000) defendem que o tratamento contextualizado do conhecimento possibilita que o aluno assuma uma postura mais ativa. Além disso, os PCN (Brasil, 1997) recomendam trabalhar os problemas de forma contextualizada, para que o estudante desenvolva ainda mais a habilidade de interpretar e analisar.

Com o objetivo de atrair ainda mais o interesse dos alunos e instigar a participação deles, foi perguntado quem assistiu e o que achavam da série. A maioria dos alunos respondeu que já tinha assistido pelo menos a primeira temporada, alguns comentaram estar esperando sair novos episódios e outros disseram ter desistido da série no meio. Ao pedir para completar o quadro com uma das possibilidades de Semifinal e Final, um estudante começou a sugerir a situação que ocorreu na série, com os mesmos vencedores, porém, ao ser questionado quanto a isso, ele decidiu alterar alguns dados (Figura 105).

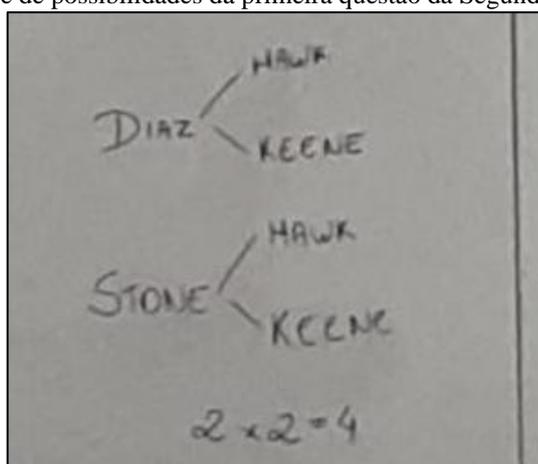
Figura 105 – Quadro do Torneio de Karatê com uma das possibilidades



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na letra b da primeira questão, que perguntava quantas seriam as possibilidades de finais sabendo os quatro atletas que passaram para as semifinais, um dos alunos sugeriu que a resposta seria oito, pensando que existiam oito competidores na primeira parte da questão. Outros estudantes começaram a listar as possibilidades, e, como forma de evitar que os alunos ficassem presos a listagem, a pesquisadora desenvolveu no quadro a árvore de possibilidades junto com os estudantes, seguida da aplicação do princípio multiplicativo (Figura 106).

Figura 106 – Árvore de possibilidades da primeira questão da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em problemas de Análise Combinatória, espera-se que os alunos consigam pensar em estratégias para a contagem sem que precisem listar todas as possíveis maneiras (Santos, 2019).

Na segunda questão, antes de reproduzir o vídeo, foi dado um pequeno contexto da série, explicando que se tratava de um reality show em que os participantes precisavam completar missões para avançar e que, neste episódio, eles precisavam abrir um cofre com uma senha de quatro dígitos (Figura 25).

Figura 25 – Vídeo apresentado para a segunda questão da Segunda Lista de Exercícios

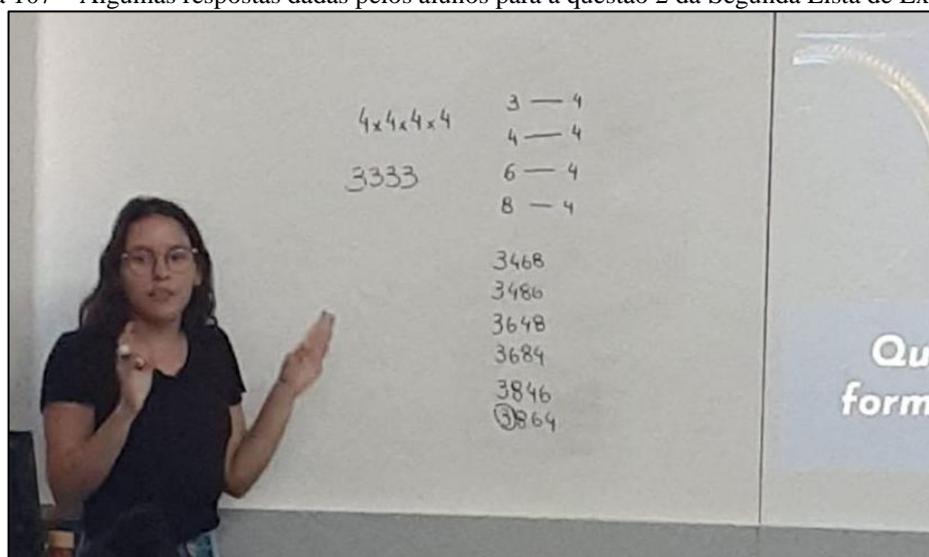


Fonte: Elaboração própria a partir da captura de tela.

Para este problema, um dos alunos sugeriu a solução  $4 \times 4 \times 4 \times 4$ , pensando que são quatro possibilidades de dígitos em quatro posições diferentes. Com isso, ressaltou-se que os quatro dígitos deveriam estar presentes na senha não podendo, assim, haver repetição de algarismos.

Alguns alunos começaram a listar as possibilidades considerando o três como primeiro dígito, chegando em seis possibilidades, porém tiveram dificuldade em pensar quantas seriam no total. Nesse momento, um dos estudantes comentou que seria mais fácil se eles soubessem qual era o primeiro dígito da senha (Figura 107).

Figura 107 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 2 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

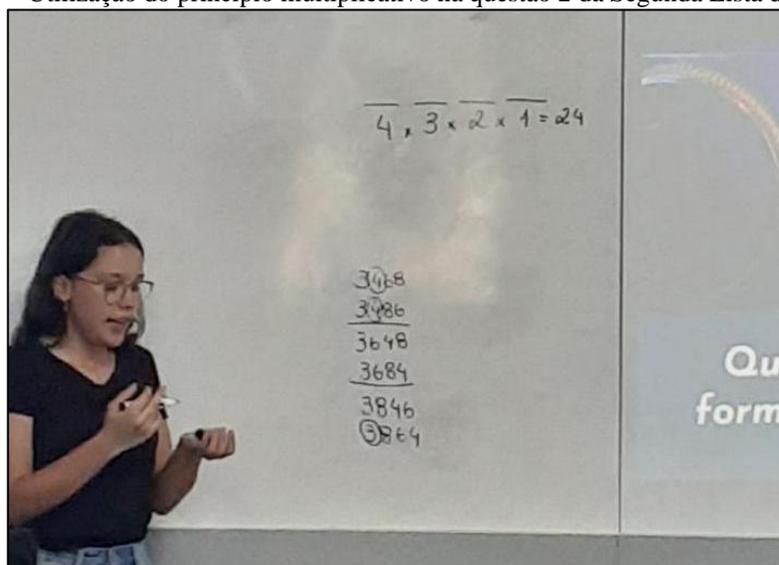
Santos (2019) aborda que, ao trabalhar questões mais complexas, é importante que os alunos tentem elaborar estratégias que não se resumem somente a listagem de todos os possíveis casos, pois este procedimento acaba se tornando muitas vezes demorado. Sendo assim, é necessário levar o aluno a analisar o problema, entendendo como o objeto deste problema se comporta (Santos, 2019).

Em seguida, a turma foi liberada para o intervalo e, durante esse período, alguns estudantes se aproximaram do quadro e abordaram a pesquisadora, indagando se a resposta correta seria  $4 \times 6$ , pois, ao fixar um dos algarismos na primeira posição, existem seis possibilidades de senha e qualquer um dos quatro dígitos poderia ocupar essa posição. A pesquisadora afirmou que a resposta estava certa e incentivou que eles comentassem essa resolução para toda a turma, quando retornassem.

Pessoa (2009, p.190) denomina essa estratégia como “percepção ou busca de regularidade”, e afirma que, apesar de não muito utilizada, é um procedimento muitas vezes eficiente. Nesse tipo de resolução, o estudante começa por meio de outro método, que no caso acima refere-se a listagem, e nota um certo padrão, geralmente realizando uma multiplicação a partir do que foi percebido, não havendo necessidade de continuar a escrita de possibilidades (Pessoa, 2009).

Ao voltarem do intervalo, a turma foi questionada novamente acerca da questão que estava sendo trabalhada e os mesmos estudantes indicaram ter pensado na multiplicação  $4 \times 6$ , seguindo a lógica apresentada durante o intervalo. Buscando incentivar o desenvolvimento do princípio multiplicativo, foi feita a multiplicação no quadro de  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ , para que eles compreendessem, de outra forma, o  $4 \times 6$  que eles apresentaram (Figura 108).

Figura 108 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 2 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com o objetivo de retomar o contexto da série, a pesquisadora revelou que os participantes tinham apenas três tentativas para abrir o cofre, despertando interesse na turma em descobrir se eles conseguiram completar esse desafio.

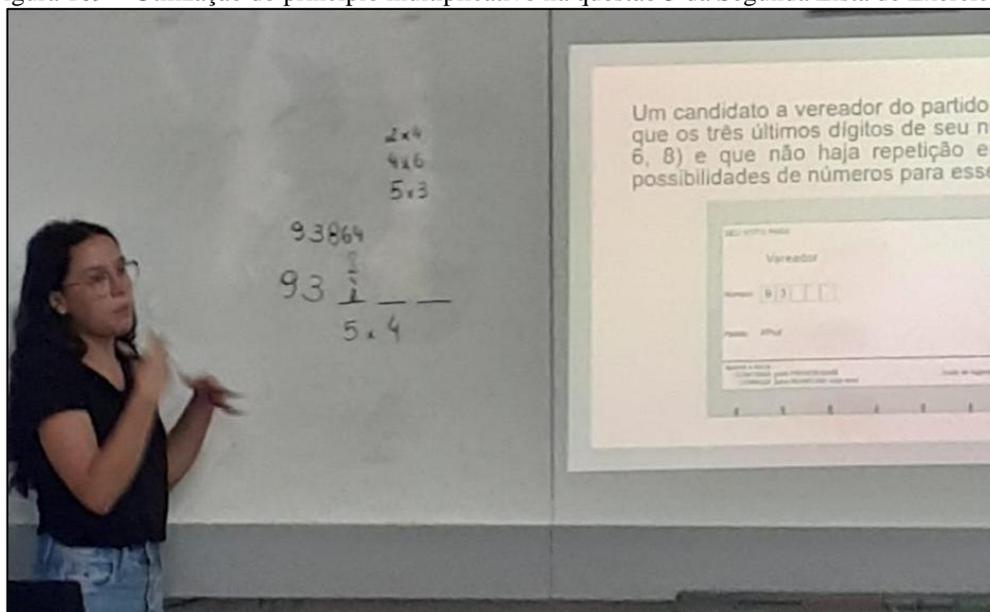
Anterior à leitura da questão três, a pesquisadora comentou um pouco sobre as eleições municipais, que ocorreram no início do mês em que a sequência didática estava sendo apresentada, e perguntou se algum dos estudantes havia votado. Eles responderam que ainda não possuíam idade suficiente para votar. Foi explicado que o número para vereador é composto por 5 dígitos e os dois primeiros indicam a qual partido ele pertence (Brasil, 2024).

Com isso, foi questionado quantas são as possibilidades de números para um candidato a vereador de um determinado partido, considerando que seus três últimos dígitos eram pares.

Após a leitura, um dos alunos sugeriu a solução  $2 \times 4$ , pensando nos dois algarismos fixos multiplicados com quatro possibilidades de algarismos, pois o aluno não se atentou que existiam cinco possibilidades no total. Além disso, outro aluno sugeriu a resposta  $3 \times 5$ , pois são cinco algarismos para três espaços. Também foram sugeridas outras respostas, porém os estudantes não sabiam explicar a forma como pensaram. Nascimento (2018, p.44) afirma que “uma das principais dificuldades consiste em interpretar qual tipo de elementos combinam, bem como qual esquema combinatório deve ser utilizado [...]”.

Com o objetivo de facilitar a compreensão dos alunos, a pesquisadora fixou os algarismos 9 e 3 e desenhou três traços após o número e questionou quais dígitos poderiam ocupar cada uma das posições, concluindo que a resposta seria dada pela multiplicação  $5 \times 4 \times 3$  (Figura 109).

Figura 109 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 3 da Segunda Lista de Exercícios

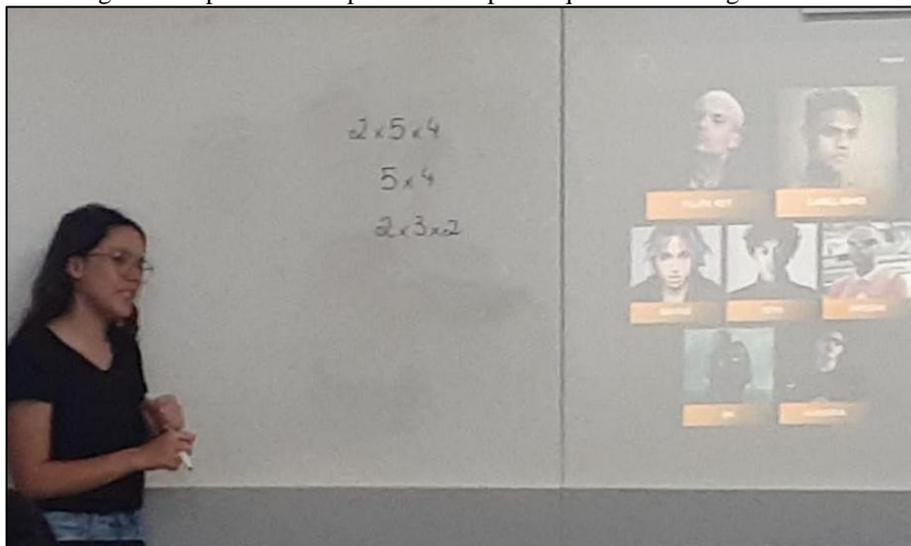


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em relação à quarta questão, que traz nomes populares da cena do rap, os alunos demonstraram bastante interesse, comentando sobre seus artistas favoritos. O problema indaga quantas diferentes configurações de dois artistas, dentre as cinco opções, podem ser formadas para o festival.

Uma das soluções sugeridas foi  $2 \times 5 \times 4$ , pensando nos dois artistas que já estavam confirmados, nos outros cinco que ainda seriam escolhidos e que, após a seleção de um dos artistas, sobrariam quatro cantores para a segunda escolha. Seguindo esse pensamento, uma aluna sugeriu o resultado  $5 \times 4$ , considerando que a produtora escolherá dois artistas dentre as cinco opções. Outra sugestão de resposta foi a multiplicação  $2 \times 3 \times 2$ , porém, ao ser questionado, o estudante disse “Não sei explicar, mas faz sentido para mim” (Figura 110).

Figura 110 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 4 da Segunda Lista de Exercícios



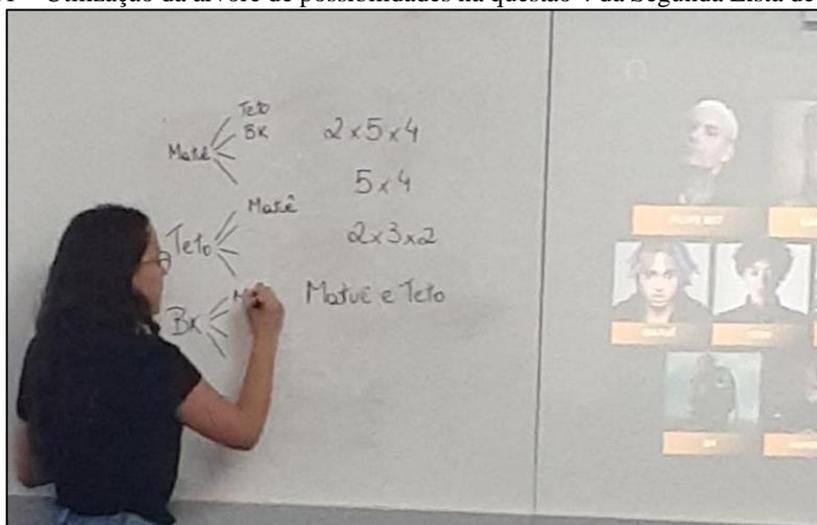
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vergnaud (2009a, p.89, tradução nossa) reforça que “a complexidade não vem apenas de fazer, mas também de colocar algo em palavras e dizê-lo”. O autor ainda enfatiza que não é possível comunicar as representações e experiências sem o uso de palavras e símbolos e que a enunciação apresenta papel fundamental nos processos de conceituação e raciocínio.

Durante todo o encontro, a pesquisadora buscou encorajar os estudantes a falarem e discutirem as resoluções e modos de pensar com o restante da turma. Nesse sentido, Lorenzato (2010) defende que é necessário incentivar que os alunos se expressem nas aulas, pois é a partir disso que eles revelam suas dificuldades, interpretações, raciocínios e bloqueios. O autor também ressalta que, além disso, é preciso que o professor saiba ouvi-los, estando atento para analisar e interpretar as diferentes manifestações do aluno.

Ao serem questionados se fazia diferença a produtora contratar Matuê e Teto ou Teto e Matuê, eles concluíram que essas duas combinações geravam a mesma dupla e, após visualizarem parte da árvore de possibilidades, compreenderam que o mesmo aconteceria com os outros casos. Sendo assim, a pesquisadora perguntou o que faltava para que a solução  $5 \times 4$ , dada pela aluna, estivesse correta, ao que os estudantes responderam que era necessário dividir por dois, chegando na resposta  $\frac{5 \times 4}{2}$  (Figura 111).

Figura 111 – Utilização da árvore de possibilidades na questão 4 da Segunda Lista de Exercícios

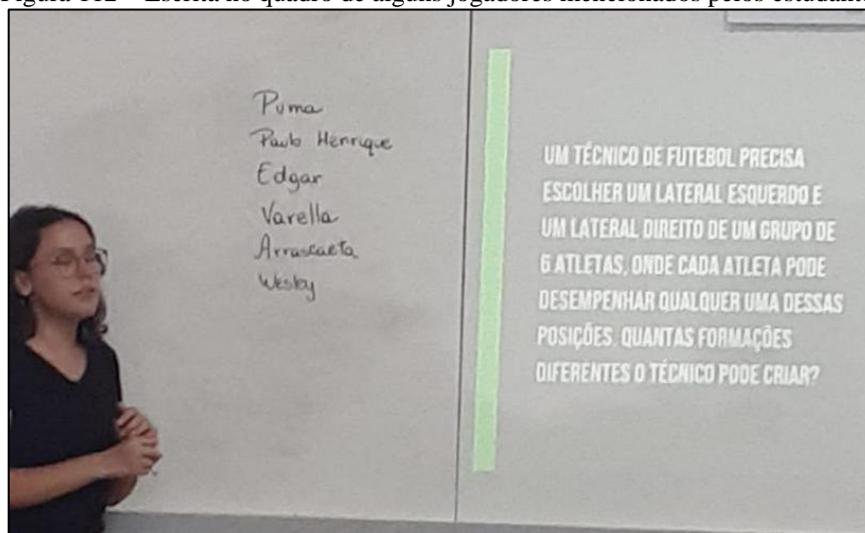


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um dos invariantes que envolvem o conceito das combinações é o fato de que a ordem em que os elementos são dispostos não gera novas possibilidades (Pessoa, 2009). A percepção dos invariantes envolvidos no conceito influencia na interpretação do problema pelo aluno e na sua maneira de operá-lo (Pessoa, 2009).

Ao iniciar a questão cinco, a pesquisadora perguntou se eles gostavam do esporte e se eles conheciam algum jogador que atuava na posição de lateral, anotando os nomes que eram falados, com o objetivo de incentivar uma maior participação deles (Figura 112). Nesse momento, notou-se que uma das alunas, que, apesar de estar atenta na aula, não estava participando de forma ativa, passou a se envolver mais na atividade.

Figura 112 – Escrita no quadro de alguns jogadores mencionados pelos estudantes



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Segundo Fernandes (2014), o uso da contextualização em sala de aula pode atuar como um motivador para a aprendizagem, pois, ao trabalhar com assuntos que interessam o estudante ou que fazem parte de seu contexto cultural, evidencia-se a relevância do conteúdo a ser estudado e suas aplicações, despertando no aluno mais vontade de aprender.

Nessa questão, alguns estudantes começaram a sugerir diferentes resultados, porém, ao serem questionados, não sabiam justificar como chegaram à essas respostas. Uma das alunas sugeriu  $5 \times 4$ , porém, quando perguntada acerca de seu raciocínio, ela concluiu que estava pensando em uma possibilidade com cinco atletas, e não seis, como mencionado na questão. A pesquisadora ainda perguntou se era necessário dividir por dois e, ao notar a dúvida dos alunos, explicou que o atleta Puma na posição de lateral direito e o atleta Varella na de lateral esquerdo gerava uma configuração diferente de ter o Varella na posição de lateral direito e o Puma na de lateral esquerdo.

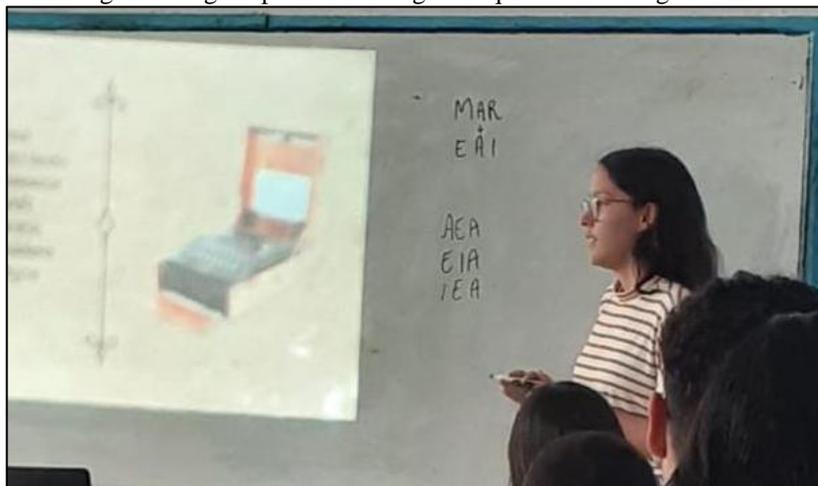
Ao fim da aula, um dos alunos comentou que nas questões finais ele estava entendendo melhor o conteúdo e solicitou permissão para tirar foto da questão quatro, que abordava o festival de rap, e da questão cinco, que tratava de futebol.

Nesse primeiro dia, notou-se que alguns estudantes apresentaram um comportamento desinteressado, possivelmente agravado pelo mau funcionamento do ar-condicionado e do interrompimento da aula pelo intervalo. Apesar disso, observou-se um maior envolvimento por parte dos alunos durante a realização dos novos exercícios, em detrimento da correção das questões da Primeira Lista de Exercícios.

O segundo encontro ocorreu no dia 30 de outubro na sala de aula regular da turma e contou com a presença de 30 alunos. Para a realização das atividades, a pesquisadora levou um retroprojektor.

Ao iniciar a questão seis, foi reproduzido um vídeo que abordava o uso da criptografia na Segunda Guerra Mundial e esclarecido que cada letra deveria ser substituída por uma diferente, sendo assim códigos como “EAI” não seriam válidos, pois o A não foi alterado. Os alunos começaram a listar algumas possibilidades e a pesquisadora questionou se o número não seria muito elevado para o uso desta estratégia, fazendo com que os estudantes parassem de sugerir opções válidas e comesçassem a pensar em outras maneiras de resolver o problema (Figura 113).

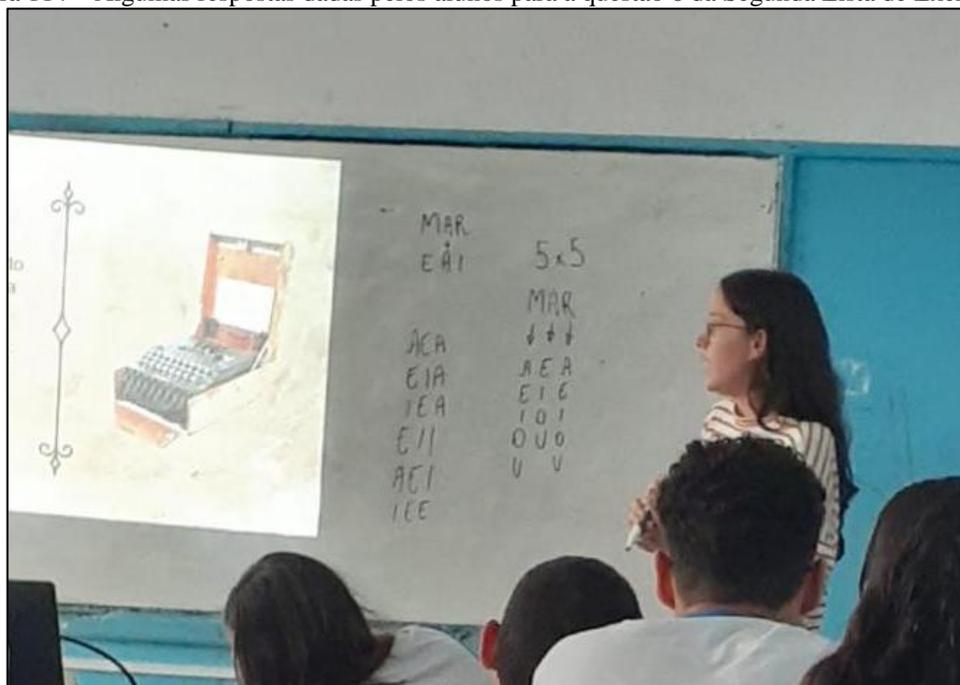
Figura 113 – Listagem de alguns possíveis códigos da questão 6 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, a pesquisadora escreveu a palavra “MAR” no quadro e questionou quais vogais cada letra da palavra poderia ser substituída ao que eles responderam que o M e o R poderiam ser substituídos por qualquer uma das cinco vogais e o A poderia ser substituído por qualquer uma das outras quatro vogais. Depois dessa explicação, um estudante sugeriu a solução  $5 \times 5$ , justificando que são cinco vogais, sem mencionar o motivo de ter usado o cinco duas vezes, e outro aluno complementou a resposta do colega concluindo que o correto seria  $5 \times 5 \times 4$  (Figura 114).

Figura 114 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 6 da Segunda Lista de Exercícios



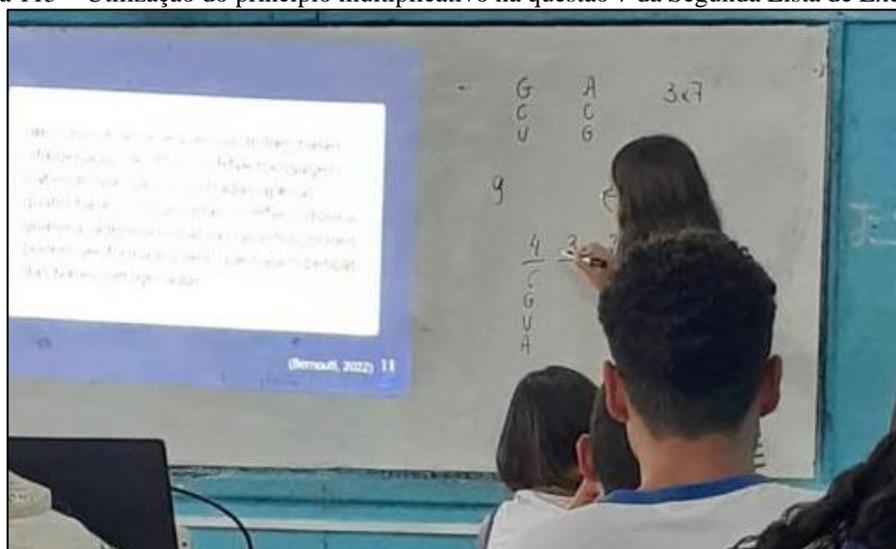
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Antes da leitura da questão sete, foi perguntado aos alunos se eles já tinham visto o conteúdo de genética e se eles entendiam o que era DNA e RNA. Eles relataram ter iniciado, porém não tiveram muito contato com essa parte. O problema questionava quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas. Foi possível perceber que eles apresentaram certa dificuldade em compreender a definição de um códon.

Um dos discentes sugeriu a solução  $3 \times 7$ , pois a imagem presente na questão indicava sete códons com três bases nitrogenadas.

Devido a essa dificuldade, foram desenhados três tracinhos no quadro, indicando as posições das bases nitrogenadas para a formação do códon e foi perguntado quais bases poderiam compor cada uma das posições. Com isso, os alunos chegaram à resposta  $4 \times 3 \times 2$  (Figura 115).

Figura 115 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 7 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao entregar a questão oito, os estudantes logo se empolgaram ao verem seus nomes, brincando que o colega era o impostor. Um dos alunos sugeriu a resposta 5, pensando na subtração dos sete jogadores pelos dois impostores, enquanto outro pensou em multiplicar esses dois números. Em seguida, outro estudante sugeriu a solução  $6 \times 7$ , resposta que gerou concordância da maioria (Figura 116).

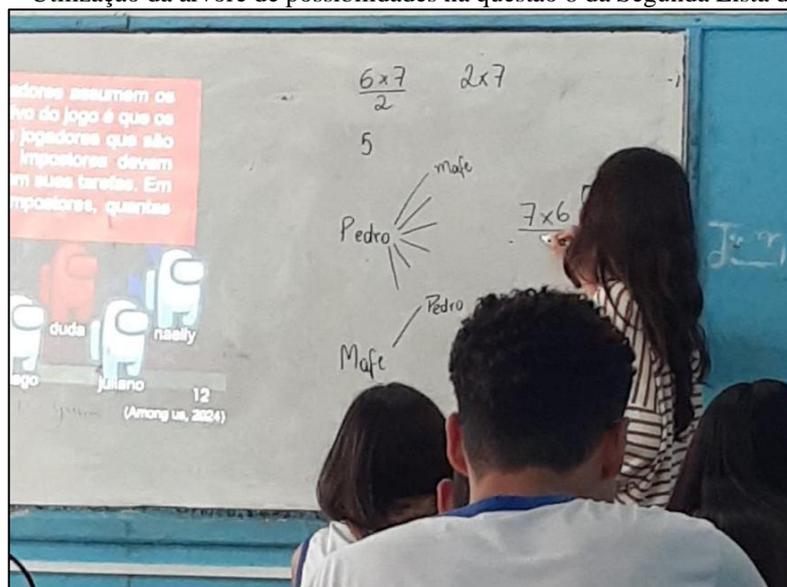
Figura 116 – Algumas respostas dadas pelos alunos para a questão 8 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Entretanto, uma aluna observou que a dupla composta por Pedro e Mafe seria a mesma que a composta por Mafe e Pedro, verificando que cada dupla estava sendo contada duas vezes. Para que os outros discentes compreendessem, foi feita uma parte da árvore de possibilidades e dessa forma, alguns alunos concluíram que era necessário dividir a solução sugerida por dois, encontrando o resultado  $\frac{6 \times 7}{2}$  (Figura 117).

Figura 117 – Utilização da árvore de possibilidades na questão 8 da Segunda Lista de Exercícios

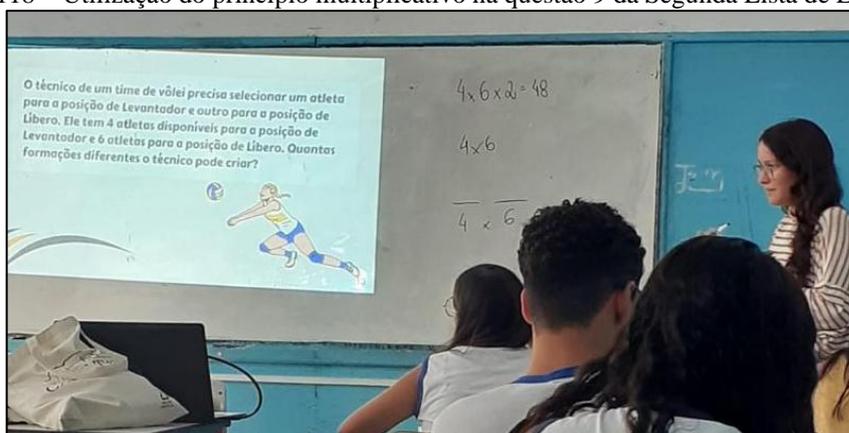


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Vergnaud (2009a) destaca que as representações possuem o papel fundamental de organizar e nortear a ação e percepção, assim como são resultado da ação e da percepção. Nesse sentido, a árvore de possibilidades é um recurso bastante vantajoso para o aprendizado da Combinatória, pois “permite que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias” (Azevedo, 2013, p.122).

Na nona questão, um dos estudantes sugeriu a resposta  $4 \times 6 \times 2$ , pois são quatro levantadores, seis líberos e duas posições (levantador e líbero). Outro apresentou a solução  $4 \times 6$ , que foi a mais aceita entre os alunos. Depois, a pesquisadora questionou se era necessário dividir por dois, ao que uma aluna respondeu que não, pois tratava-se de posições diferentes (Figura 118).

Figura 118 – Utilização do princípio multiplicativo na questão 9 da Segunda Lista de Exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi possível verificar uma melhora significativa dos alunos nesse segundo encontro. Os estudantes estavam mais participativos e demoravam menos tempo para chegar à solução correta. Segundo Moreira (2021), a compreensão de um Campo Conceitual desenvolve-se durante um longo período de tempo, sendo necessário trabalhar novos problemas e propriedades no decorrer dos anos para que o aluno domine cada vez mais o conteúdo.

#### 4.5.2 Entrevista semiestruturada com os alunos

No dia 30 de outubro, ao finalizar a sequência didática, foi realizada uma entrevista com os alunos. Antes de iniciar, foi esclarecido que a participação deles era essencial para o presente trabalho e que eles poderiam ser honestos sobre suas opiniões e percepções.

Primeiramente, foi questionado se os temas abordados despertaram maior interesse deles para a aula, ao que os alunos responderam de maneira afirmativa. Em seguida, foi

perguntado se eles já tiveram aulas com situações contextualizadas, como as que foram propostas neste trabalho, e alguns comentaram que não tiveram essa experiência na escola, mas fora da instituição, em cursos como o Pré-IFF.

Fernandes (2014) afirma que a contextualização pode contribuir de forma positiva em sala de aula, pois atua como um motivador para a aprendizagem, além de dar significado para os conceitos a serem trabalhados. Apesar disso, observa-se que esse recurso não é muito utilizado no dia a dia das escolas, que reforçam uma análise segmentada da realidade, sem estimular a conexão entre os conhecimentos (Brasil, 2000).

Depois, foi questionado se foi possível identificar quais estratégias seriam mais adequadas para cada questão, ao que eles responderam que sim, porém alguns revelaram terem sentido uma certa dificuldade, especialmente na interpretação e no entendimento do que era pedido nas questões.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) afirmam que os problemas de Combinatória possuem natureza variada e muitas vezes não apresentam indicações claras de estratégias para a sua solução, exigindo mais atenção e gerando mais complexidade para a resolução.

Ao questionar se foi possível perceber situações do cotidiano e de outras disciplinas no conteúdo apresentado, ao que os alunos responderam de forma afirmativa. Os discentes ainda destacaram cenários que haviam sido apresentados em aula, como as possíveis senhas de um cofre.

Em seguida, foi perguntado se apresentar as estratégias que eles haviam utilizado na primeira lista favoreceu o entendimento do conteúdo, ao que os estudantes responderam que sim e um deles revelou ter achado interessante saber como cada um pensou para resolver uma mesma questão.

As concepções dos alunos são moldadas não apenas pelo que é aprendido nas escolas, mas também por situações cotidianas que vão para além da sala de aula (Vergnaud, 1986; Borba, 2016a). Nesse sentido, é necessário que o professor entenda com o que está trabalhando, reconhecendo as concepções iniciais dos discentes, seus erros e as situações e processos capazes de modificar essas ideias e concepções (Vergnaud, 1986).

Ao questionar se eles tiveram dificuldade com o enunciado das questões, os estudantes afirmaram que a interpretação das questões foi o maior obstáculo para eles. Depois disso, foi perguntado se eles acreditavam que a contextualização contribuiu para tornar a interpretação das questões mais complicada, ao que eles responderam que essa já é uma dificuldade da turma e que também se deu pelo conteúdo novo e não pela contextualização, e que após as explicações da pesquisadora os problemas se tornavam mais compreensíveis.

De acordo com os PCN (Brasil, 1997, p.32), “só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada”. Souto e Nogueira (2014) ressaltam que, mesmo comumente associadas somente ao campo da Língua Portuguesa, as habilidades de leitura e interpretação de textos são essenciais para o aprendizado matemático e constituem uma das principais dificuldades dos alunos, sendo necessário que a leitura se torne cada vez mais presente na Matemática.

Logo após, foi questionado se o uso das listagens e da árvore de possibilidades contribuiu para o entendimento do conteúdo, ao que os discentes responderam que sim, por serem novas maneiras de organizar o pensamento. Afirmaram que a árvore foi a estratégia favorita.

A utilização de representações visuais facilita a comunicação e ajuda na compreensão e organização das situações (Vergnaud, 1986). Nesse sentido, Azevedo (2013) reforça que o uso do diagrama de árvore possibilita a visualização das relações e propriedades das diferentes situações combinatórias.

Em seguida, foi perguntado se eles perceberam um desenvolvimento de seu raciocínio em relação a Primeira Lista de Exercícios, ao que a maioria respondeu de forma afirmativa, porém uma das alunas comentou, em suas palavras, “não, porque eu sou burra”. Os outros estudantes logo a repreenderam, falando que a entrevista estava sendo gravada. Depois disso, a pesquisadora deixou claro que aquele momento se tratava de um espaço aberto para que eles comentassem e que eles poderiam se sentir confortáveis para falar o que pensam livremente, porém reforçou que a aluna não era burra e que o conteúdo era mesmo desafiador.

Foi questionado se os discentes gostaram das questões que iam para além dos interesses deles, como as que envolviam História e Biologia, e as respostas ficaram divididas. Alguns declararam preferir os problemas que envolviam música e vôlei, por exemplo, por terem afinidade com esses temas, enquanto outros afirmaram que também se interessaram pelos outros assuntos que foram abordados.

Um dos estudantes comentou que as questões que mais atraíram sua atenção foram a do cofre e a da criptografia e os outros afirmaram ter gostado bastante do uso de vídeos. Outra aluna declarou que esse recurso facilitou a compreensão das questões “a do cofre [...], se você falasse eu jamais ia entender e com o vídeo eu entendi mais ou menos o que tava pedindo”.

Gomes e Barrére (2024) afirmam que, quando bem planejado, o uso de vídeo atua como recurso motivador capaz de provocar reflexões e transformações nas práticas pedagógicas, permitindo estimular a criatividade e curiosidade do aluno, além de tornar as aulas mais dinâmicas e significativas.

Por fim, foi questionado se os discentes gostariam de fazer mais algum comentário, ao que eles negaram e encerraram a entrevista batendo palmas para a pesquisadora.

## **5 ALUNOS COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS**

Como mencionado anteriormente, após o primeiro contato com a turma, notou-se a presença de alguns alunos com necessidades educacionais especiais (NEE).

Diante disso, foram elaborados e aplicados alguns instrumentos para o tratamento da aula com esses estudantes, apresentados nesse capítulo.

### **5.1 Planejamento**

Esta seção trata da etapa de Planejamento da Intervenção Pedagógica com alunos com necessidades educacionais especiais, apresentando a elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com uma mediadora, a elaboração do material adaptado e a elaboração do Questionário para uma das mediadoras.

#### **5.1.1 Elaboração do roteiro de perguntas para a entrevista com uma mediadora**

Os alunos com NEE eram assistidos por duas mediadoras, mas a entrevista ocorreu com apenas uma, no dia 16 de setembro de 2024 e teve como objetivo compreender melhor o perfil dos estudantes com NEE. A outra mediadora não pode estar presente no dia em que foi marcada a entrevista por questões pessoais.

Os pontos abordados foram: número de alunos e tipo de diagnóstico, comportamento nas aulas de Matemática, ações por parte do professor de Matemática para manter a atenção desses alunos nas aulas e os principais interesses deles (APÊNDICE I).

Para a realização da entrevista, contatou-se a profissional responsável pelo setor que cuida da inclusão de alunos com NEE no Instituto Superior de Educação em que foi realizada a Intervenção Pedagógica, que sugeriu realizar esse diálogo com a mediadora da turma.

Os dados dessa entrevista serão apresentados no capítulo 5, seção 5.2.1.

#### **5.1.2 Elaboração do material adaptado para os alunos com necessidades educacionais especiais**

A elaboração do material adaptado levou em consideração as sugestões dadas no Segundo Teste Exploratório e a entrevista com a mediadora.

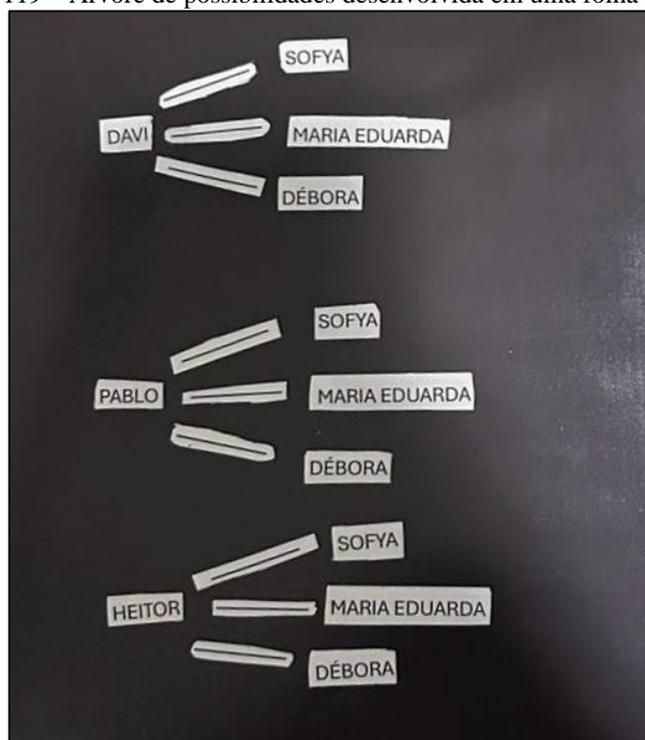
O material constitui-se de uma Lista de Exercícios adaptados (APÊNDICE J) e dos materiais manipuláveis fornecidos para auxiliar na resolução dessas questões.

Lorenzato (2012, p.18) define como material didático “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”. Ele reforça que alguns desses materiais didáticos podem ser modificados e transformados, permitindo uma maior participação do aluno e facilitando a percepção de propriedades e a realização de descobertas, sendo estes considerados materiais manipuláveis.

Durante a entrevista semiestruturada, a mediadora revelou que os alunos com NEE da turma apresentavam dificuldade em se manter focados no decorrer da parte teórica da aula. Morgado, Santos e Takinaga (2016, p.96) ressaltam que “o ensino de Matemática possui muitas vezes conceitos abstratos e as crianças gostam de realizar descobertas utilizando os sentidos”. Dessa forma, os materiais pedagógicos permitem que os alunos disponham de seus sentidos para aprender e explorar conceitos matemáticos (Morgado; Santos; Takinaga, 2016).

Com o objetivo de estimular a concentração desses estudantes no início da aula, é fornecida uma folha imantada, ou seja, uma folha com propriedades magnéticas, e algumas fichas magnetizadas para que eles montem, juntamente com a pesquisadora no quadro, a árvore de possibilidades (Figura 119).

Figura 119 – Árvore de possibilidades desenvolvida em uma folha imantada



Fonte: Elaboração própria.

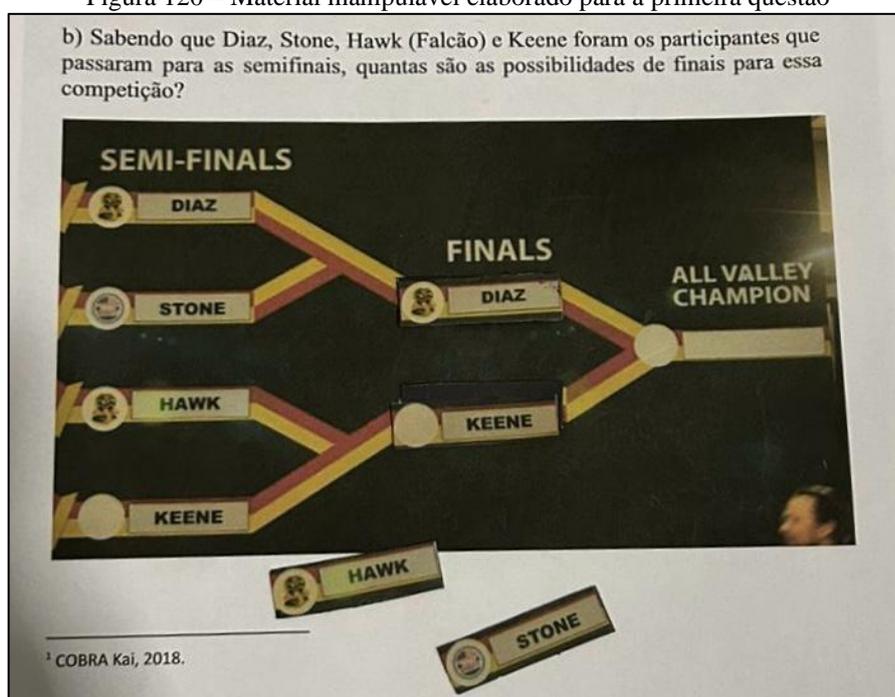
A Lista de Exercícios adaptados para alunos com NEE segue contextos similares aos trabalhados com o restante da turma. Ferreira (2016) afirma que a flexibilização dos recursos existentes beneficia o aprendizado desses alunos, permitindo ampliar as possibilidades cognitivas do aluno.

A primeira questão está inserida no cenário da série *Cobra Kai* e o primeiro item pede para completar o quadro com uma das chances de semifinais e final do Torneio de Karatê. O segundo item questiona quantas são as possibilidades de finais para essa competição, sabendo os participantes que compõem a semifinal.

Nesse exercício, a fim de diminuir o enunciado, são mantidos apenas o segundo nome dos participantes, e a fonte e as imagens são ampliadas.

Para auxiliar na resolução desse exercício, é entregue uma folha com o quadro geral do torneio que possui um ímã colado nos espaços referentes às finais e papéis imantados contendo o nome dos participantes, para que os alunos possam movimentá-los para exibir as diferentes possibilidades (Figura 120).

Figura 120 – Material manipulável elaborado para a primeira questão

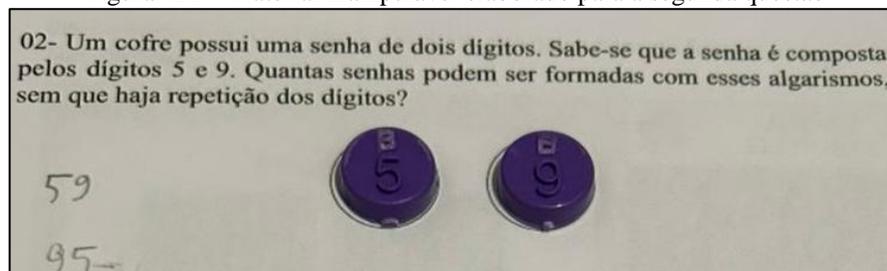


Fonte: Elaboração própria.

O segundo problema envolve a senha de um cofre de dois dígitos, composta por dois algarismos conhecidos, e indaga quantas senhas podem ser formadas com esses números. Juntamente com a questão, são dadas aos estudantes duas peças de bingo que indicam os

algarismos cinco e nove, para que eles possam visualizar as senhas movimentando-as (Figura 121).

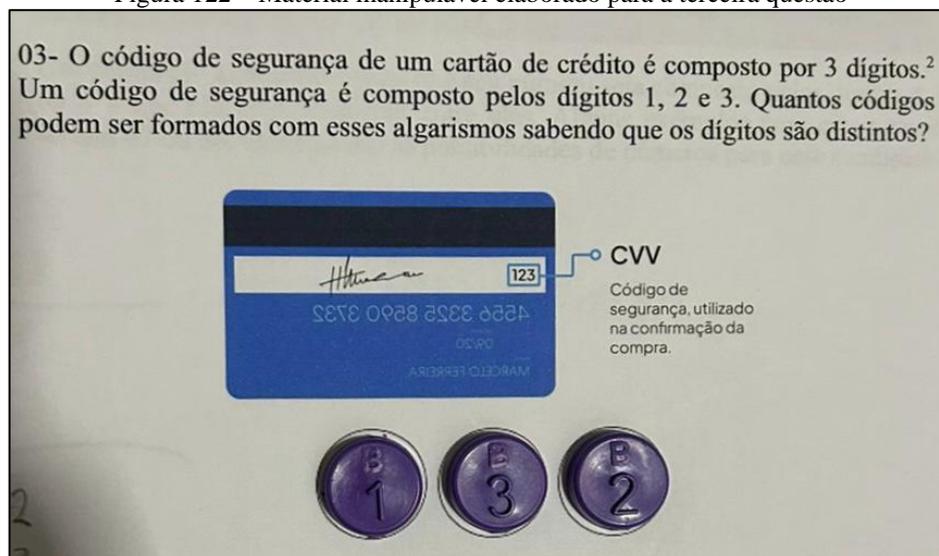
Figura 121 – Material manipulável elaborado para a segunda questão



Fonte: Elaboração própria.

O terceiro exercício aborda o código de segurança utilizado nos cartões de crédito, que é composto por três dígitos, e pergunta quantos códigos podem ser formados com os algarismos 1, 2 e 3, sem que haja repetição. De forma similar à questão anterior, também são usadas peças de bingo que indicam os números um, dois e três, permitindo aos alunos movimentarem os objetos para formar possíveis configurações de códigos de segurança (Figura 122).

Figura 122 – Material manipulável elaborado para a terceira questão



Fonte: Elaboração própria.

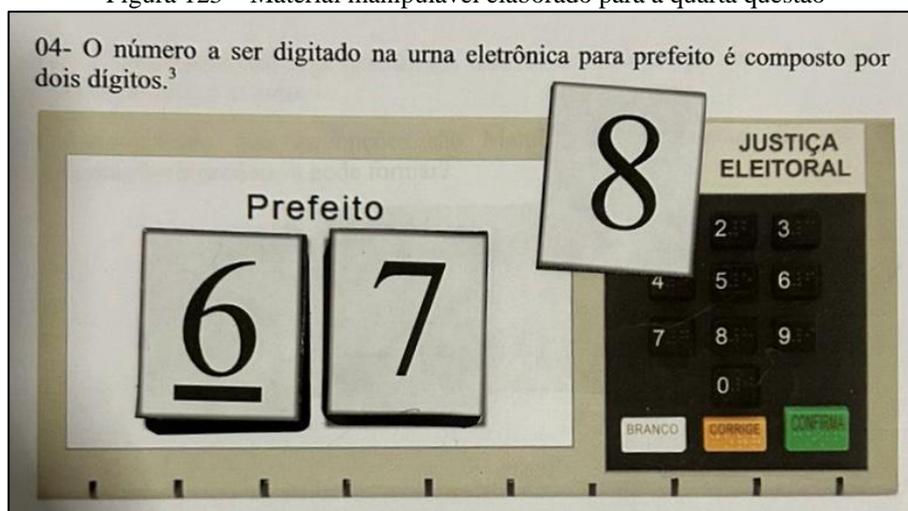
As duas questões anteriores buscam se relacionar com a questão dois da Segunda Lista de Exercícios, que aborda as possibilidades de senha para um cofre na situação apresentada pelo *reality show* “O sabotador”. Porém, avaliou-se que seria irreal manter o contexto do programa de televisão. Diante disso, foram formuladas duas questões que envolviam códigos,

uma de cofre e outra de um cartão de crédito. Nos dois problemas, o número de dígitos foi reduzido a fim de diminuir as possibilidades.

O quarto problema trata sobre a eleição municipal, assim como no material aplicado para a turma. Entretanto, o material adaptado para alunos com NEE questiona quantas são as possibilidades de números para um candidato a prefeito que seja composto pelos dígitos 6,7 ou 8, sem que haja repetição entre eles, enquanto o outro envolve as possibilidades para vereador, além de dar mais opções de algarismos.

Para auxiliar na resolução dessa questão, é entregue uma folha com a imagem de uma urna que possui um ímã colado nos espaços referentes aos dígitos e papéis imantados indicando os algarismos seis, sete e oito, para que os alunos possam exibir as diferentes possibilidades (Figura 123).

Figura 123 – Material manipulável elaborado para a quarta questão



Fonte: Elaboração própria.

O quinto exercício envolve a organização de um festival de música. O primeiro item indaga quantas configurações de dois artistas podem ser formadas para o festival considerando que as opções são Matuê e Teto e o segundo item interroga quantas seriam as configurações para o mesmo festival considerando três opções de artistas: Matuê, Teto e Orochi. São dadas aos alunos fichas com o rosto e o nome dos músicos para que eles possam manuseá-las (Figura 124).

Figura 124 – Material manipulável elaborado para a quinta questão



Fonte: Elaboração própria.

Nessa questão, o número de artistas disponíveis para o festival foi reduzido, assim como as informações do enunciado.

A sexta questão busca saber quantas formações diferentes um técnico de futebol pode criar ao escolher um lateral esquerdo e um lateral direito de um grupo de três atletas. O problema apresenta o mesmo contexto da quinta questão da Segunda Lista de Exercícios, porém com um número reduzido de atletas, diminuindo, assim, a quantidade de possibilidades

Para solucionar o problema, os alunos dispõem de três bonecos de jogadores de futebol, representando os atletas, e uma folha de EVA texturizada com marcações das posições de lateral esquerdo e lateral direito, que simula o campo (Figura 125).

Figura 125 – Material manipulável elaborado para a sexta questão



Fonte: Elaboração própria.

A partir desses materiais, os estudantes podem explorar as diferentes possibilidades da questão. Os resultados da aplicação do material adaptado serão analisados no capítulo 5, seção 5.2.2.

### **5.1.3 Elaboração do Questionário para uma das mediadoras**

O questionário para a mediadora (APÊNDICE K) é composto por seis perguntas e tem como objetivo coletar informações sobre a utilização dos materiais adaptados com os alunos com NEE. O questionário será aplicado para apenas uma das mediadoras pois a outra não estava presente durante a aplicação da sequência didática.

A primeira pergunta questiona se o uso do material manipulável na primeira parte, sobre a correção dos exercícios, auxiliou no entendimento do conteúdo. A segunda indaga se na segunda parte, que tratava dos novos exercícios, o material também auxiliou.

A terceira averigua se houve alguma mudança no comportamento do aluno durante a resolução das questões devido ao uso do material manipulável e se eles se sentiram mais motivados. A quarta busca saber outros desafios na compreensão do conteúdo por parte desses estudantes.

A quinta pergunta investiga se a mediadora achou interessante receber o material antes da aula e se isso ajudou para que ela se sentisse mais preparada. A última questiona se a profissional gostaria de adicionar algum outro comentário.

Os dados desse Questionário serão analisados na seção 5.2.3 do capítulo 5.

## **5.2 Implementação e Avaliação**

Esta seção aborda as etapas de Implementação e Avaliação da Intervenção Pedagógica com alunos com necessidades educacionais especiais, discutindo a entrevista semiestruturada realizada com uma mediadora, a aplicação do material adaptado e a aplicação do Questionário.

### **5.2.1 Entrevista semiestruturada com uma mediadora**

A entrevista com a mediadora foi realizada de forma presencial no dia 16 de setembro de 2024, para compreender melhor o perfil dos estudantes com NEE. O diálogo ocorreu com apenas uma das mediadoras, pois a outra não estava disponível no dia.

A profissional revelou que a turma era composta por dois alunos com transtorno do espectro autista e deficiência intelectual, uma aluna com deficiência intelectual e uma aluna com transtorno do espectro autista. Ela ainda comentou que a aluna com transtorno do espectro autista não precisava de material adaptado, pois conseguia acompanhar bem as atividades com o restante da turma.

Os discentes eram acompanhados por duas mediadoras, uma que auxiliava os dois meninos com transtorno do espectro autista e deficiência intelectual e uma que assistia a aluna com deficiência intelectual.

A mediadora ressaltou que os três estudantes tinham muita dificuldade em prestar atenção na parte teórica da aula, sendo recomendado utilizar elementos lúdicos para mantê-los concentrados.

A profissional também afirmou que os alunos apresentam muita dificuldade em Matemática, sugerindo utilizar números menores, problemas de fácil interpretação e diminuir questões nas atividades adaptadas. Além disso, ela também recomendou a utilização de material manipulável para que eles possam ter uma visão melhor do conteúdo.

Ao ser questionada sobre os principais interesses desses estudantes, a mediadora comentou que um dos meninos gostava muito de futebol e que ele compreendia melhor o conteúdo quando ela trazia o problema para esse contexto. Ela também falou que o outro aluno se interessava por jogos e apostas e que a menina costumava ficar apenas no celular.

Segundo Nogueira (2018, p.58), “a adaptação ou criação de recursos para mediar a aprendizagem matemática, exige, dentre outros aspectos, que o professor conheça, ao menos minimamente, as características gerais de seu aluno, para poder compreender quais são suas necessidades educativas especiais e tomá-las em consideração no seu fazer pedagógico”.

### **5.2.2 Aplicação do material adaptado**

No dia 17 de outubro, foi enviado às mediadoras, via *whatsapp*, os materiais adaptados das aulas, com uma mostra dos materiais manipuláveis confeccionados. O objetivo era garantir que eles estivessem adequados para os alunos com NEE, além de possibilitar o acesso antecipado das questões para que elas pudessem se familiarizar com o conteúdo e a forma como seriam abordados.

Uma das mediadoras respondeu que a atividade estava apropriada para os estudantes e relatou que muitos professores não costumam adaptar seus materiais dessa maneira, sendo ela

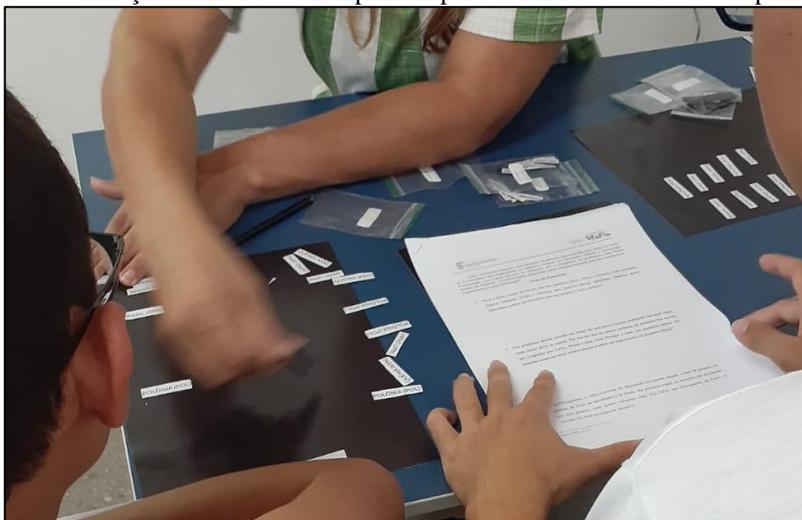
a responsável por fazer, do seu jeito, todo esse processo. A outra mediadora aceitou receber os materiais, porém não fez nenhum comentário.

Nogueira (2018) afirma ser essencial buscar a colaboração de profissionais especializados do Atendimento Educacional Especializado para a adaptação de atividades, porém reforça que a aprendizagem da criança que recebe este tipo de atendimento não é responsabilidade somente desse profissional.

A aplicação foi feita no dia 23 de outubro e contou com a participação dos três alunos com NEE e apenas a mediadora que havia participado da entrevista estava presente. No início da aula, foram entregues à mediadora três pacotes, cada um contendo uma folha de imã e sacos plásticos com peças magnéticas para a construção da árvore de possibilidades referentes à primeira e à terceira questões da correção da Primeira Lista de Exercícios.

Durante a explicação no quadro, a mediadora auxiliou os alunos na construção da árvore de possibilidades com as peças magnéticas (Figura 126). A profissional relatou que dois alunos (A1 e A2) conseguiram acompanhar enquanto a pesquisadora fazia no quadro, porém o outro aluno (A3) possuía uma dificuldade maior, o que fez com que ele levasse mais tempo para realizar a mesma tarefa.

Figura 126 – Utilização do material manipulável para desenvolver a árvore de possibilidades



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Santos (2022) ressalta a necessidade de que haja um currículo adaptado que leve em consideração as potencialidades do aluno com NEE, sendo dever da escola propor estratégias que gerem interesse e oportunizem a aprendizagem desses estudantes.

A primeira questão do material adaptado, referente à Segunda Lista de Exercícios, era bastante semelhante à entregue para os outros alunos, o que resultou em um bom acompanhamento por parte dos alunos com NEE (Figura 127).

Figura 127 – Utilização do material manipulável na questão 1 da Lista de Exercícios Adaptados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A mediadora considerou que seria melhor realizar as outras questões com os estudantes durante o intervalo, para que eles pudessem se concentrar melhor.

Apesar de compreender a necessidade da inclusão de alunos com NEE, nota-se que o desenvolvimento de uma prática pedagógica comum para todos e que, ao mesmo tempo, leva em consideração as diferenças individuais dos alunos constitui um dos principais desafios para muitos professores (Santos, 2022).

Santos (2022) também cita como obstáculo a infraestrutura das escolas, que muitas vezes dispõe de salas pequenas e superlotadas, além de não dispor de materiais pedagógicos para trabalhar com esses estudantes.

Na questão dois, os estudantes listaram todas as possibilidades e em seguida contaram quantas senhas foram formadas. Os círculos deixados na questão buscavam auxiliar na ideia da senha, para que eles posicionassem as peças de bingo nas marcações, porém eles também utilizaram esse espaço para escrever a resposta final. A Figura 128 traz as três resoluções apresentadas. De forma geral, verifica-se que os alunos se sentem mais confortáveis ao trabalhar com quantidades menores, pois a manipulação e sistematização dos elementos é menos complexa (Pessoa, 2009).

Figura 128 – Soluções de A1 (a), A2 (b) e A3 (c) para a questão 2 da Lista de Exercícios Adaptados

(a)

02- Um cofre possui uma senha de dois dígitos. Sabe-se que a senha é composta pelos dígitos 5 e 9. Quantas senhas podem ser formadas com esses algarismos, sem que haja repetição dos dígitos?

0 2 59  
95

---

(b)

59  
95

0 2

---

(c)

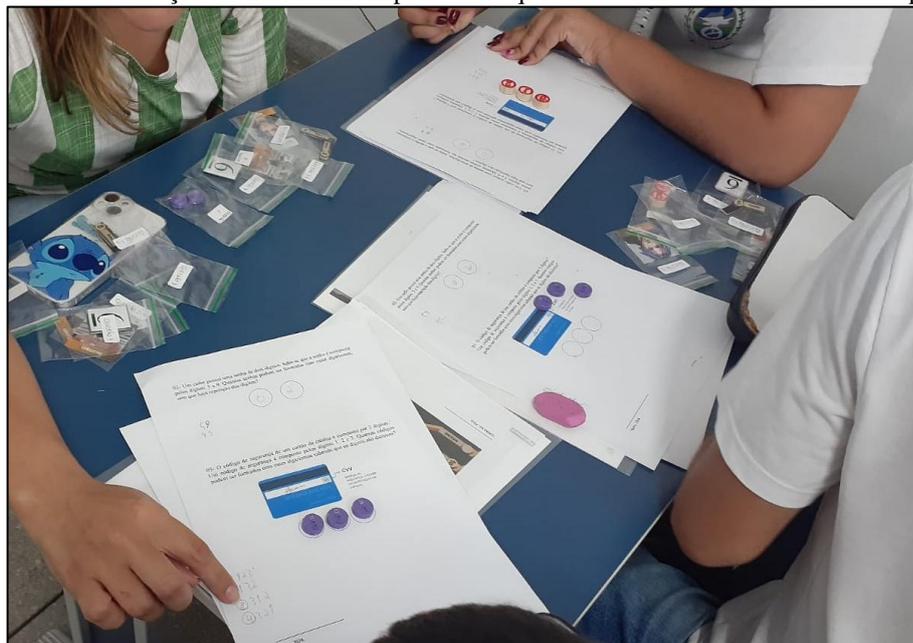
0 2

59  
95

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na terceira questão, a mediadora auxiliou os alunos com o uso do material manipulável para que eles organizassem as possibilidades de código, válidas para esse problema (Figura 129).

Figura 129 – Utilização do material manipulável na questão 3 da Lista de Exercícios Adaptados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ferreira (2016, p. 61) comenta que o uso desses materiais “permite que os alunos sejam capazes de se expressar, elaborar perguntas, resolver problemas e se tornar mais participativos[...].”

Os estudantes também fizeram a listagem de todas as possibilidades. Foi possível notar que os três estudantes agruparam os possíveis códigos de acordo com o seu primeiro número, indicando uma certa organização e sistematização do pensamento para garantir que todas as possibilidades seriam contempladas (Figura 130). O uso dessa listagem sistemática indica um nível de conceitualização superior, revelando que os estudantes compreendem melhor o problema trabalhado (Pessoa, 2009).

Figura 130 – Soluções de A1 (a), A2 (b) e A3 (c) para a questão 3 da Lista de Exercícios Adaptados

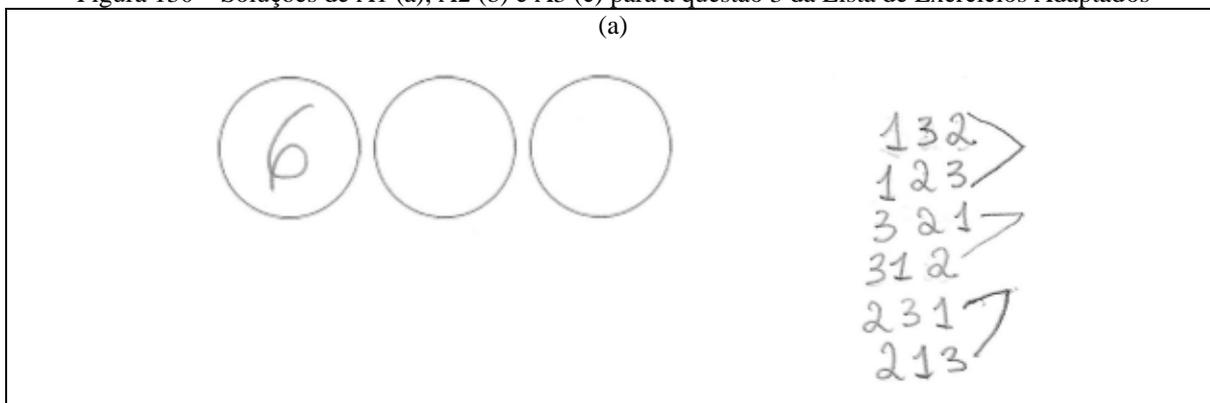


Figura 130 – Soluções de A1 (a), A2 (b) e A3 (c) para a questão 3 da Lista de Exercícios Adaptados (cont.)

(b)

(c)

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na questão quatro, nota-se a utilização dessa mesma estrutura na resolução dos alunos um e dois (A1 e A2), isolando os números de acordo com seu primeiro algarismo (Figura 131). Montenegro (2018) defende que o uso de representações simbólicas sistematizadas contribui para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e é essencial para o sucesso dessa aprendizagem.

Figura 131 – Soluções de A1 (a) e A2 (b) para a questão 4 da Lista de Exercícios Adaptados

(a)

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 68 \\
 \hline
 78 \\
 76 \\
 \hline
 87 \\
 86
 \end{array}$$

6 possibilidades

(b)

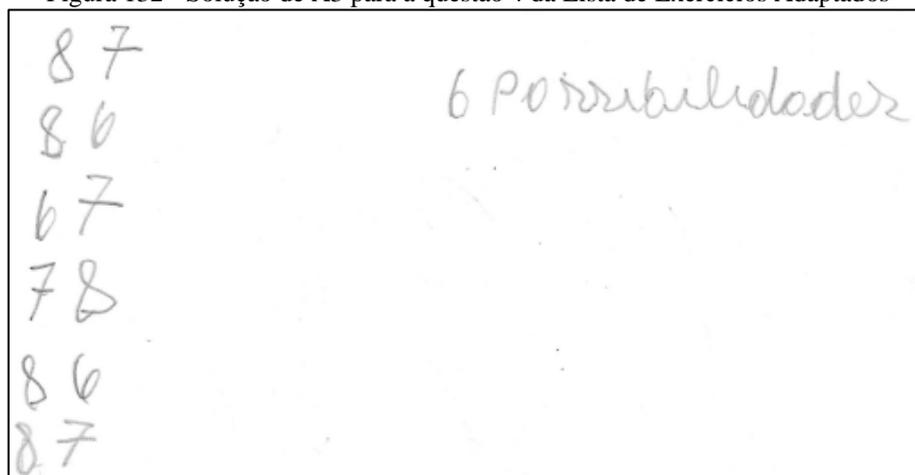
$$\begin{array}{r}
 67 \\
 68 \\
 \hline
 78 \\
 76 \\
 \hline
 87 \\
 86
 \end{array}$$

possibilidades 6

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apesar do aluno três (A3) ter chegado à resposta correta de seis possibilidades, verifica-se que, em sua resolução, ele considera as opções 87 e 86 duas vezes (Figura 132). Essa forma não sistemática de listar as possibilidades demonstra que o aluno se encontra em um nível de conceitualização mais básico em comparação com os outros (Pessoa, 2009).

Figura 132 - Solução de A3 para a questão 4 da Lista de Exercícios Adaptados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

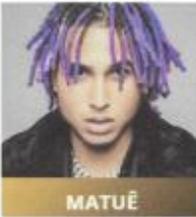
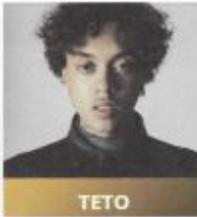
Na questão cinco, a mediadora perguntou à pesquisadora se a ordem dos artistas importava e se a resposta da letra **a** era realmente um. Foi explicado que a ordem não gerava novas possibilidades e dessa forma, a escolha por Matuê e Teto seria a mesma de Teto e Matuê, resultando em apenas uma configuração para o festival.

Nos dois itens da questão, os alunos responderam corretamente, porém indicaram apenas o resultado (Figura 133).

Figura 133 – Resposta de um aluno com NEE para a questão 5 da Lista de Exercícios Adaptados

(a)

a) Considerando que as opções são Matuê e Teto, quantas diferentes configurações a produtora pode formar?

1

---

(b)

b) Se agora a produtora tivesse como opção os artistas Matuê, Teto e Orochi, quantas diferentes configurações de dois artistas poderiam ser formadas?





3 Pares

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em certo momento, os alunos e a mediadora começaram a comemorar e bater palmas, pois o estudante A3, que apresentava maior dificuldade, conseguiu compreender e concluir um dos exercícios rapidamente.

Para o segundo encontro, que ocorreu no dia 30 de outubro, a mediadora que estava na aula anterior havia alertado que não poderia comparecer e sugeriu que a pesquisadora acompanhasse a realização da última questão.

Apenas os alunos A1 e A3 estavam presentes, porém outra aluna não laudada também participou desse momento a pedido da mediadora. Com isso, ao fim da aula, foram entregues aos estudantes os materiais que simulavam os atletas e um campo de futebol e eles logo notaram que os jogadores tinham os nomes dos discentes A1 e A3.

A pesquisadora questionou quais seriam as possíveis configurações de lateral direito e lateral esquerdo para esse jogo e, à medida que os discentes iam respondendo, foi sendo feita a listagem no quadro. Em alguns momentos, os estudantes sugeriram algumas opções que já estavam presentes no quadro. Com isso, a pesquisadora chamou atenção, questionando se a possibilidade já não estava sendo considerada, ao que eles verificaram que sim (Figura 134).

Figura 134 – Utilização do material manipulável para a questão 6 da Lista de Exercícios Adaptados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final, foi questionado quantas foram as possibilidades, ao que eles responderam seis após contarem as configurações listadas no quadro.

### 5.2.3 Aplicação do Questionário com a mediadora

Após a Implementação realizada no dia 23 de outubro, foi aplicado um questionário com a mediadora. O questionário foi enviado de forma on-line e respondido no dia 1 de novembro.

A primeira e a segunda perguntas questionavam se o uso do material manipulável na parte da correção de exercícios e na realização das novas questões auxiliou no entendimento do conteúdo, ao que a mediadora respondeu de forma afirmativa.

Em seguida, foi questionado se ela notou alguma diferença no comportamento dos alunos durante a resolução das questões, com o uso do material manipulável, ao que ela replicou que os estudantes se sentiram mais confiantes e confortáveis.

A quarta questão perguntava que outros desafios a mediadora identificava na compreensão do conteúdo por parte desses estudantes. Ela respondeu que o tempo de aprendizagem deles é diferente dos alunos neurotípicos<sup>5</sup>, sendo necessário repetir a explicação diversas vezes e utilizar formas mais lúdicas.

A quinta pergunta indagava se ela achou interessante receber o material antes da aula e se isso contribuiu para que ela se sentisse mais preparada. A profissional respondeu que considerou importante e ressaltou que, devido à sua convivência com os estudantes, ela tinha maior conhecimento acerca de suas dificuldades, do modo como aprendem e da forma como eles se sentem mais confortáveis.

Por fim, foi disponibilizado um espaço para que a mediadora pudesse fazer outros comentários. Ela discorreu que os materiais foram muito importantes para a resposta dos alunos, pois auxiliou na resolução das questões.

A profissional também comentou que um dos alunos (A3), que apresenta muita dificuldade, não soube formar todos os possíveis códigos nas questões. Então, seria interessante uma adaptação ainda maior para ele. Apesar disso, os outros alunos foram muito bem e souberam utilizar o material. Ela ainda falou que gostou muito da qualidade dos materiais elaborados.

---

<sup>5</sup> Diz-se de ou aquele cujas funções mentais funcionam de maneira considerada típica, não demonstrando autismo nem outras atipidades neurológicas (Houaiss, 2025).



## 6 PRODUTO EDUCACIONAL

Ao longo do trabalho, foi desenvolvido um Produto Educacional, em formato de livro, intitulado “Permutando Ideias: exercícios contextualizados de Análise Combinatória”. A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) traz como uma das possibilidades de Produto Educacional o “desenvolvimento de material didático e instrucional (propostas de ensino tais como sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficinas, material textual tais como manuais, guias, textos de apoio, [...])”. (Brasil, 2019, p. 10)

O Produto elaborado tem como objetivo auxiliar professores na criação de sequências didáticas que tragam questões contextualizadas, autorais com ênfase no raciocínio combinatório e embasadas na Teoria dos Campos Conceituais.

O livro constitui uma conversa com o professor. Ele explica a maneira como a sequência didática foi criada e apresenta o embasamento teórico utilizado para o seu desenvolvimento, além de exibir algumas questões contextualizadas elaboradas pela autora.

Vale ressaltar que é sugerido ao professor utilizar este instrumento como um guia para o planejamento de sua sequência didática, levando em consideração os temas de interesse de sua turma e outros que ele julgue importante.

O livro está dividido em cinco capítulos: a Apresentação, a Contextualização no processo de Ensino e Aprendizagem, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Produto Educacional, que se subdivide em planejamento da sequência didática e questões contextualizadas, e as Considerações Finais.

O Produto pode ser acessado por meio do QR Code abaixo (Figura 135) ou pelo link de acesso.

Figura 135 – QR Code do Produto Educacional



Fonte: Elaboração própria.

Link de acesso: <https://drive.google.com/file/d/1NodLhWTlyznmIY37zxp7MRsO7YS-kdh/view?usp=sharing>

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi motivado tanto pelo interesse da autora em Análise Combinatória quanto por sua curiosidade pelas diversas resoluções de um único problema. Ademais, o contato com esse conteúdo a partir de uma experiência no PIBID em que ele foi apresentado com um enfoque na memorização de fórmulas reforçou a vontade e necessidade de trabalhar com esse tema.

A pesquisa utilizou-se da metodologia qualitativa do tipo Intervenção Pedagógica, composta por três etapas: o Planejamento, a Implementação e a Avaliação. Antes da elaboração da sequência didática, foram desenvolvidos o Questionário de interesses, com o objetivo de investigar os temas de maior interesse dos alunos, e a Primeira Lista de Exercícios, que visava averiguar as principais estratégias utilizadas por eles na resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Os dois instrumentos foram analisados em um Teste Exploratório com licenciandos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação e aplicados em uma turma de 9º. ano do Ensino Fundamental.

Após a análise dos dados obtidos, elaborou-se uma sequência didática, aplicada nessa mesma turma, que se dividiu em dois momentos: a correção da Primeira Lista de Exercícios e a realização da Segunda Lista de Exercícios, ambas com questões autorais. Essa sequência foi analisada, antes da Implementação, em um Segundo Teste Exploratório que contou, assim como no primeiro, com a participação de licenciandos de Matemática.

A sequência didática utilizou-se de slides e trabalhou com problemas contextualizados que abordaram as quatro classificações de Pessoa (2009) para questões de raciocínio combinatório: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Ao longo de todo o encontro, os estudantes foram incentivados a participar e compartilhar suas resoluções com o restante da turma. Percebeu-se que os alunos se surpreenderam positivamente e ficaram mais atentos devido à utilização de contextos que faziam parte do interesse deles.

Apesar disso, foi possível observar uma grande dificuldade na interpretação de questões e, por diversas vezes, alguns estudantes foram incapazes de explicar o raciocínio utilizado por eles para a resolução dos problemas.

Notou-se, porém, um desenvolvimento significativo do raciocínio combinatório de alguns discentes e um amadurecimento, em relação à Primeira Lista de Exercícios, no enfrentamento de questões desta natureza.

Durante o primeiro encontro com a turma identificou-se a presença de alunos com necessidades educacionais especiais. Com isso, foi elaborado um material adaptado para esses

discentes, que consistiu em uma Lista de Exercícios semelhante à trabalhada com o restante da turma e materiais manipuláveis para que eles pudessem investigar as diferentes possibilidades de casos envolvidos na solução de cada questão. Foi possível notar que os estudantes se sentiram mais confiantes e confortáveis devido ao uso do material manipulável, o qual auxiliou na resolução das questões.

Ao longo do trabalho, foi possível identificar diversas contribuições da Intervenção Pedagógica realizada:

- a percepção da presença da Análise Combinatória em problemas contextualizados, com temas de interesses da turma e outros;
- a compreensão de diferentes invariantes dos conceitos trabalhados nas questões estudadas;
- a passagem da listagem de casos para o uso do princípio multiplicativo;
- o uso da árvore de possibilidades na visualização dos casos;
- o desenvolvimento do raciocínio combinatório;
- o envolvimento dos alunos com NEE nas atividades devido à utilização do material manipulável.

Vale destacar que algumas dessas contribuições não ocorreram para todos os estudantes. É preciso observar que muitos desafios foram percebidos quanto à dificuldade na interpretação e na compreensão de questões. Alguns alunos não conseguiram expressar oralmente o seu raciocínio e, em certos casos, as respostas às questões não foram compreendidas pela pesquisadora, seja pela escrita ou pelas operações indicadas.

Dessa forma, considera-se que o objetivo geral da pesquisa, que era o de identificar as contribuições de uma Intervenção Pedagógica contextualizada de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório, foi alcançado.

Essa pesquisa contribuiu substancialmente para a formação da autora, possibilitando que esta: i) expandisse seu conhecimento na área de Análise Combinatória, ii) compreendesse a importância da contextualização no processo de ensino e aprendizagem, iii) aprimorasse a habilidade de elaborar questões, iv) desenvolvesse sua visão matemática, permitindo identificar a disciplina em momentos cotidianos, v) adquirisse uma compreensão mais profunda acerca de como tratar o processo de ensino e aprendizagem de alunos com necessidades educacionais especiais, e vi) aperfeiçoasse habilidades de pesquisa, leitura e escrita.

Para trabalhos futuros, sugere-se a elaboração de um minicurso voltado para professores de Ensino Fundamental que estimule a criação de questões contextualizadas, além da aplicação

de um trabalho contextualizado que aborde os diferentes tipos de problema em Combinatória, assim como este, em outros níveis de ensino.

## REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli; GATTI, Bernardete Angelina. Métodos qualitativos de pesquisa em educação no Brasil: origem e evolução. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO-ALEMÃO DE PESQUISA QUALITATIVA E INTERPRETAÇÃO DE DADOS*, 1., 2008, Brasília. **Anais eletrônicos** [...]. Brasília: UnB, 2008. Disponível em: <https://www.uffs.edu.br/uffs/conteudo/pastas-ocultas/bd/pro-reitoria-de-pesquisa-e-pos-graduacao/repositorio-de-arquivos/arquivos-do-programa-de-formacao/M%C3%B3dulo%20VII%20Pesquisa%20Qualitativa%20parte%20II.pdf>. Acesso em: 15 maio 2025.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades: É melhor no papel ou no computador?** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13237>. Acesso em: 4 dez. 2024.

BISERRA, Aloisio João; SOUZA, Gresiela Ramos de Carvalho; PAZ, Peterson da. Concepções sobre a contextualização no ensino da matemática apresentadas por professores da rede estadual do município de Várzea Grande - MT: análise de um questionário qualitativo. *In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 3., 2012, Fortaleza. **Anais eletrônicos** [...]. Mato Grosso: UFMT, 2012. Disponível em: <https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/482/submission/director/482.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2023.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; AZEVEDO, Juliana. Construindo Árvores de Possibilidades para Compreensão de Relações Combinatórias. **Educação Matemática em Revista**, Pernambuco, n. 31, p. 24-32, nov. 2010. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/191>. Acesso em: 2 jun. 2025.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O raciocínio combinatório na Educação Básica. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2010, Salvador. **Anais Eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFPE, 2010. p. 1-16. Disponível em: [atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra15.pdf](http://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra15.pdf). Acesso em: 11 nov. 2023.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinando na vida e na escola: limites e possibilidades. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016a, São Paulo. **Anais eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFPE, 2016a. p. 1-12. Disponível em: [sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7248\\_4406\\_ID.pdf](http://sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7248_4406_ID.pdf). Acesso em: 9 nov. 2023.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. *In: ENCONTRO DE COMBINATÓRIA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE DOS ANOS INICIAIS*, 1., 2016b, Pernambuco. **Anais eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFPE, 2016b. p. 1-15. Disponível em: <http://anaisencepai.edumatec.net/index.php/2016-02-24-19-44-28/comunicacoes-cientificas/alphaindex/a>. Acesso em: 11 nov. 2023.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; SOUZA, Leandro de Oliveira; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. Desafios do ensino na educação básica de combinatória, estatística e probabilidade. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, v.9, n.1, p. 1-24, jun. 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/231908/pdf>. Acesso em: 11 nov. 2023.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e prática de ensino na Educação Básica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/9907>. Acesso em: 9 nov. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEF, 2018. Disponível em: [basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf). Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Documento orientador de APCN**. 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/ensino1.pdf>. Acesso em: 7 maio 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, SEF, 2006. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf). Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática**. Brasília: MEC, SEF, 1998a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Temas Transversais**. Brasília: MEC, SEF, 1998b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC, SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2024.

BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. **Vereador ou prefeito**: Conheça a ordem de votação nas Eleições 2024. Brasília: TSE, 2024. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2024/Abril/vereador-ou-prefeito-conheca-a-ordem-de-votacao-nas-eleicoes-2024>. Acesso em: 7 maio 2025.

DAMIANI, Magda Floriana *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/caduc/article/view/3822>. Acesso em: 11 jan. 2024.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 2.

ESTÉVEZ, Maria Gabriela Bálamo. Teoria Psicogenética de Jean Piaget: Aportes para comprender al niño de hoy que será el adulto del mañana. **Cuadernos de Psicología y Psicopedagogía**, Paraná, n.7, p. 1-41, 2022. Disponível em: <https://repositorio.uca.edu.ar/bitstream/123456789/13496/1/teor%C3%ADa-psicogen%C3%A9tica-jean-piaget.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2025.

FERNANDES, Maria Betania Sabino. **Funções Lineares no Ensino Médio**: contextualizações e representações. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/8594>. Acesso em: 7 maio 2025.

FERREIRA, Guilherme Lazarini. Salas de recursos/apoio para alunos com deficiência do Ensino Fundamental. *In*: MANRIQUE, Ana Lúcia; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; MOREIRA, Geraldo Eustáquio. **Desafios da Educação Matemática Inclusiva**: Práticas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. p. 47-68. v. 2.

FERREIRA, Jefferson de Araújo. **O ensino de combinatória**: uma análise de livros didáticos de matemática. 2015. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1335>. Acesso em: 7 maio 2025.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

GOMES, Amanda Colombo; BARRÉRE, Eduardo. Planejamento da prática pedagógica utilizando o vídeo como recurso didático no ensino de matemática. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 12, n. 22, p. 1-19, 2024. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/2357724X12222024e0113>. Acesso em: 30 jan. 2025.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2.

INNER SLOTH. **Jogos**: Among Us. 2024. Disponível em: <https://www.innersloth.com/inside-innersloth/>. Acesso em: 22 dez. 2024.

LIMA, Wanessa Aparecida Trevizan de. **Contextualização: o sentido e o significado na aprendizagem matemática**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-28112018-152839/pt-br.php>. Acesso em: 7 maio 2025.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012, p.3-38.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3 ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2017.

MOREIRA, Fabrícia Gomes. **Análise de estratégias de resolução mobilizadas por alunos do 9º ano frente a atividades envolvendo raciocínio combinatório**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2021. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/13307>. Acesso em: 21 maio 2024.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud. *In*: MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias da Aprendizagem**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023. p. 205-221.

MORGADO, Adriana Santos; SANTOS, Regiane Silva; TAKINAGA, Sofia Seixas. Sugestão de alguns materiais para o ensino e aprendizagem para inclusão. *In*: MANRIQUE, Ana Lúcia; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; MOREIRA, Geraldo Eustáquio. **Desafios da Educação: Matemática Inclusiva**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. p. 85-98.

MORGADO, Augusto César *et al.* **Análise combinatória e probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32446>. Acesso em: 30 jan. 2025.

NASCIMENTO, Roberto Alfredo. **Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/4824>. Acesso em: 7 maio 2025.

NEUROTÍPICO. *In*: HOUAISS ONLINE, Dicionário Houaiss on-line da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: [https://houaiss.uol.com.br/houaission/apps/uol\\_www/vopen/html/inicio.php/7a9/neurotipico](https://houaiss.uol.com.br/houaission/apps/uol_www/vopen/html/inicio.php/7a9/neurotipico). Acesso em: 17 abr. 2025

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Educação especial, Inclusão e Educação Matemática nos Anos Iniciais de escolarização. *In*: BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; CRUZ, Magna do Carmo Silva (org.). **Ciclo de Palestras**. Recife: Editora UFPE, 2018, p. 54-67. Disponível em: <https://editora.ufpe.br/books/catalog/book/265>. Acesso em: 15 mar. 2025.

NOGUEIRA NETO, Euclides. **A contextualização no ensino da matemática**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Rural do Semi-árido, Mossoró, 2019. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=7670765](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7670765). Acesso em: 15 abr. 2025.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de Matemática. *In*: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012, p.77-92.

PEPE, Juliana Bernardo. **Estimulando a Críticidade dos Alunos por meio de Atividades Contextualizadas a partir de Notícias de Jornais**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2019. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=8465785](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=8465785). Acesso em: 7 maio 2025.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFPE, 2010. p. 1-12. Disponível em: [https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T2\\_CC726.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T2_CC726.pdf). Acesso em: 9 nov. 2023.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189>. Acesso em: 20 mai. 2024.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFPE, 2010. p. 1-11. Disponível em: [https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T2\\_CC1113.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T2_CC1113.pdf). Acesso em: 9 nov. 2023.

SANTOS, Márcia Eliete Ribeiro dos. **A prática dos professores na inclusão de alunos com deficiência e seus desafios**. 2022. Dissertação (Mestrado em Gestão e Avaliação da Educação Pública) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2022. Disponível em: <https://mestrado.caedufjf.net/a-pratica-dos-professores-na-inclusao-de-alunos-com-deficiencia-e-seus-desafios/>. Acesso em: 15 mar. 2025.

SANTOS, Paulo Roberto. **Introduzindo temas da análise combinatória por meio de sequência didática**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2019. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=5054&id2=170960141](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5054&id2=170960141). Acesso em: 9 nov. 2023.

SILVEIRA, Adriano Alves da; ANDRADE, Silvanio de. Análise Combinatória no Ensino Médio: episódio de sala de aula via exploração, resolução e proposição de problemas. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v.23, n.2, p. 242-253, 2022. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/3263/2234>. Acesso em: 7 abr. 2025.

SIMÕES, Márcio. **Todo erro é uma descoberta**. 2016. Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2016/12/19/todo-erro-e-uma-descoberta/>. Acesso em: 16 abr. 2025.

SOUTO, Reinaldo Alves; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática. *In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2014, Campo Mourão. **Anais Eletrônicos** [...]. Paraná: UNESPAR, 2014. p. 1-13. Disponível em: <https://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/index.htm>. Acesso em: 15 mar. 2025.

SOUZA, Joseane; DIAS, Monica; BARROS, Rafael; JÓFILI, Zélia. As teorias de Guy Brousseau e Gérard Vergnaud como auxílio em uma intervenção matemática. *In: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE*, 4., 2010, Sergipe. **Anais eletrônicos** [...]. Pernambuco: UFRPE, 2010. p. 1-11. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10313/31/30.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2024.

VERGNAUD, Gérard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *In: CARPENTER, Thomas; MOSER, James; ROMBERG, Thomas. Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Broadway: Lawrence Erlbaum Associates, 1982. p. 39-59. Disponível em: [https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud\\_1982\\_cognitive-tasks-operation\\_addition-subtraction.pdf](https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1982_cognitive-tasks-operation_addition-subtraction.pdf). Acesso em: 7 abr. 2025.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2009b.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. *In: LESH, Richard; LANDAU, Marsha. Acquisition of mathematics concepts and processes*. Cambridge: Academic Press, 1983. p. 127-174. Disponível em: [https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud\\_1983\\_multiplicative-structures\\_acquisition-mathematics.pdf](https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1983_multiplicative-structures_acquisition-mathematics.pdf). Acesso em: 12 jun. 2024.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, n.1, 1986, p.75-90. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.12/2150>. Acesso em: 12 jun. 2024.

VERGNAUD, Gérard. The Theory of Conceptual Fields. *In: HUMAN DEVELOPMENT*, 52., 2009, Basíleia. **Anais eletrônicos** [...]. Saint-Denis: Université Paris 8, 2009a. p. 83-94. Disponível em: [https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud\\_2009\\_theory-conceptual-fields\\_human-development-52.pdf](https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_2009_theory-conceptual-fields_human-development-52.pdf). Acesso em: 20 maio 2024.

## APÊNDICES

**APÊNDICE A – Questionário de interesses**

Este questionário integra uma pesquisa acadêmica desenvolvida pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Ana Laura Barreto de Almeida, sob a orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade. As informações fornecidas serão tratadas somente para fins acadêmicos. Agradecemos a sua colaboração.

### Questionário de interesses

1. Você pratica ou acompanha algum esporte? Se sim, qual(is)?

Futebol

Vôlei

Basquete

Handebol

Natação

Skate

Surfe

Xadrez

Outro(s): \_\_\_\_\_

Não acompanho nenhum esporte

2. Você toca algum instrumento? Se sim, qual(is)?

---

---

3. Você participa de algum grupo musical (banda, coral ou algum outro)? Se sim, qual(is)? O grupo é formado por quantos participantes?

---

---

4. Você acompanha algum artista do cenário cultural (música, teatro, cinema, etc.)? Se sim, qual(is)?

---

---

5. Você leu ou tem lido algum livro recentemente? Qual(is)? Se não se lembrar do título, escreva sobre qual assunto ele trata.

---

---

6. Você assistiu a algum filme ou tem acompanhado alguma série recentemente? Qual(is)?

---

---

7. Você tem o costume de jogar? Qual(is) deste(s) você já jogou?

- Uno
- Detetive
- Twister
- Valorant
- Overwatch
- Among us
- Outro(s): \_\_\_\_\_
- Não costumo jogar

8. Você coleciona algum objeto, como figurinha, *action figure* (figuras de ação), revistas, histórias em quadrinhos (HQs), ou algum outro? Se sim, qual(is)?

---

---

9. Das disciplinas escolares, qual(is) delas te desperta(m) maior interesse?

---

---

10. Em sua escola, que tipo de atividades as aulas de Educação Física propõem (partidas de vôlei, futebol, jogos de queimada, dança, etc.)?

---

---

11. Você participa de alguma agremiação (grêmio estudantil, agremiações ligadas ao futebol, etc.)? Se sim, qual(is)?

---

---

12. Você utiliza senhas no seu dia a dia? Em qual(is) situação(ões) (celular, banco, etc.)?

---

---

13. Além dos itens mencionados como coleções livros, grupos musicais, jogos, esportes, filmes e séries, você possui interesse por algum outro tema?

---

---

**APÊNDICE B – Banco de Questões**

Estes exercícios integram uma pesquisa acadêmica desenvolvida pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Ana Laura Barreto de Almeida, sob a orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade. As informações fornecidas serão tratadas somente para fins acadêmicos. Agradecemos a sua colaboração.

### Banco de Questões

1. Para a festa junina da escola, tem 3 meninos (Davi, Pablo e Heitor) e 4 meninas (Maria Eduarda, Sofya, Débora e Camila) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?<sup>1</sup>
2. O número a ser digitado na urna eletrônica para vereador é composto por cinco dígitos. Os dois primeiros correspondem ao partido político e os três seguintes são os que identificam a candidata ou o candidato ao cargo.<sup>2</sup>



Um candidato a vereador do partido “PProf” deseja que os três últimos dígitos de seu número sejam pares diferentes de zero (2, 4, 6, 8) e que não haja repetição entre eles. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

3. Marcelo, Edgar e Thiago compraram três ingressos para uma sessão de cinema. De quantos modos eles podem ocupar as três poltronas? Considera-se um modo Marcelo ocupar a primeira poltrona, Edgar ocupar a terceira e Thiago ocupar a segunda.

<sup>1</sup> Pessoa, 2009, p.117.

<sup>2</sup> TSE, 2024.

4. O Mercado Comum do Sul (Mercosul) é um bloco econômico que tem como objetivo principal propiciar um espaço comum capaz de gerar oportunidades comerciais e de investimentos mediante a integração competitiva das economias nacionais ao mercado internacional<sup>3</sup>. Em uma prova de geografia, é perguntado quais países compõem esse bloco econômico. Um aluno lembra que o Mercosul é formado pelo Brasil, Argentina, Uruguai e outros 2 países da América do Sul e que o continente é composto por 12 países. De quantas tentativas o estudante precisará para garantir que ele acertará a questão?
5. Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de natação que é disputada por 8 atletas?



6. Durante a “The Eras Tour” a Taylor Swift estabeleceu que cantará duas músicas especiais, além do setlist já programado, em cada show — e não irá repeti-las em nenhum outro lugar. A primeira música é tocada no violão e a segunda no piano. Sabendo que apenas 14 de suas canções ainda não foram utilizadas e levando em consideração que tocar ‘Me!’ no violão e ‘So it goes’ no piano gera uma possibilidade diferente de tocar ‘So it goes’ no violão e ‘Me!’ no piano, quantas são as combinações de apresentação para o próximo show?
7. O jogo Twister se baseia em um grande tapete com quatro linhas compostas por bolas de quatro cores diferentes: verde, amarelo, azul e vermelho. O jogo inclui também uma roleta dividida em quatro seções: pé direito, mão direita, pé esquerdo e mão esquerda.

---

<sup>3</sup> MERCOSUL, 2024.



A cada rodada, os participantes devem girar a roleta e colocar uma parte do corpo na cor indicada. Sabendo que todas as quatro partes do corpo podem ser combinadas com todas as quatro cores, quantas são as possibilidades de jogada em uma rodada? Considera-se um exemplo de jogada colocar a mão direita no amarelo.

8. Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve sentar-se. Ele decide que as cinco carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Heitor, Luiz Phelipe e José em qualquer ordem. De quantas maneiras esses cinco alunos podem ser organizados na primeira fileira?
9. Nas Olimpíadas, o vôlei costuma ser disputado em quatro etapas: a fase de grupos, as quartas de final, as semifinais e as finais. Na primeira etapa, as seleções são divididas em três grupos, com quatro seleções cada. Em 2024, nas Olimpíadas de Paris, a divisão foi feita da seguinte maneira:

Women's Pools		
POOL A		
1		FRA
2		USA
3		CHN
4		SRB
POOL B		
1		BRA
2		POL
3		JPN
4		KEN
POOL C		
1		ITA
2		TUR
3		NED
4		DOM

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B nessa primeira etapa?

10. Among Us é um jogo online em que os jogadores assumem os papéis de “Tripulação” ou “Impostor”. O objetivo do jogo é que os Companheiros de Tripulação identifiquem os jogadores que são os Impostores no jogo. Enquanto isso, os impostores no jogo têm que sabotar secretamente as tarefas no navio e eliminar os tripulantes antes que eles terminem suas tarefas. Em um jogo com 7 jogadores, sendo 2 deles impostores, quantas são as possibilidades de partida?



11. O jogo de tabuleiro “Detetive” é composto por 21 cartas, sendo 6 de suspeitos, 6 de armas e 9 de lugares. Ao iniciar uma partida, é necessário embaralhar as cartas separadamente e sortear uma de cada categoria, que irão indicar as informações do assassinato a ser investigado na rodada. Quantos palpites podem ser feitos sobre o crime? Um exemplo de palpite é considerar que o assassinato foi realizado pela Médica com a Espingarda no Restaurante.
12. O Instagram é uma rede social que permite o compartilhamento de imagens e vídeos diretamente do aplicativo de celular. Uma das possibilidades de formato dessa rede é o chamado “carrossel”, que permite a publicação de até 10 mídias, tanto imagem quanto vídeo, em uma única postagem. Uma pessoa deseja postar 5 fotos nesse formato. Sabendo que ela já escolheu uma das imagens para ser a capa, de quantas formas diferentes ela pode dispor as imagens restantes no carrossel?

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. Vereador ou prefeito: conheça a ordem de votação nas Eleições 2024. Brasília, DF, 2024. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2024/Abril/vereador-ou-prefeito-conheca-a-ordem-de-votacao-nas-eleicoes-2024>. Acesso em: 9 ago. 2024.

MERCOSUL. Em poucas palavras: O que é o MERCOSUL?. Montevideu, Uruguai, 2024. Disponível em: <https://www.mercosur.int/pt-br/quem-somos/em-poucas-palavras/>. Acesso em: 9 ago. 2024

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189>. Acesso em: 20 mai. 2024.

**APÊNDICE C – Questionário para o Primeiro  
Teste Exploratório**

## Teste Exploratório

O trabalho está sendo desenvolvido por mim, Ana Laura Barreto, e orientado pela professora Ana Paula Rangel de Andrade e tem como tema o estudo de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório a partir de uma abordagem contextualizada. A sequência didática será aplicada em uma turma de 9º. ano de uma escola pública. Para isso, foi planejado aplicar um questionário em sala antes da preparação da sequência didática para compreender os interesses dos alunos da turma e incluí-los na aula que será ministrada. Além disso, também será aplicada uma lista de exercícios para que eles tentem resolver sem que haja nenhuma instrução sobre o conteúdo antes, com o objetivo de identificar as principais estratégias utilizadas por eles. A lista terá questões de diferentes níveis de Análise Combinatória. É válido ressaltar que este TCC contará com dois testes exploratórios, o primeiro com o objetivo de analisar essas questões iniciais e realizar uma pesquisa de interesse e o segundo, para o teste da sequência didática. Pretende-se selecionar de quatro a oito questões iniciais, mas neste primeiro teste exploratório será feito o envio de doze questões para a sua apreciação. Caso tenha interesse e possa participar, peço que envie seus comentários neste formulário até o dia 13/08 (terça-feira).

Nome

.....

Matrícula

.....

E-mail

.....

Sobre o Questionário de Interesses

Link para a visualização:

<https://drive.google.com/file/d/1b9eGmCv7JClI3WOqX096EByI089ZRWZu/view?usp=drivesdk>

Na sua opinião, as perguntas apresentadas são relevantes? \*

.....

Você adicionaria alguma outra pergunta? \*

.....

Sobre o Banco de Questões

Link para a visualização: <https://drive.google.com/file/d/11kWgpeaZTqolrec-trN3qr4CZWqRhZc6/view?usp=drivesdk>

Está claro que as questões abordam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo, Combinação)? \*

.....

A contextualização aparece de forma significativa nas questões? \*

.....

Você considera o tempo de dois horários adequado para a aplicação do questionário e da lista de exercícios? \*

.....

Você considera que as questões estão adequadas, quanto ao grau de dificuldade, para uma turma de 9º ano? \*

.....

Os contextos explorados nas questões estão claros mesmo para um aluno que não os conheça? \*

---

Este formulário foi criado em Instituto Federal Fluminense.

Google Formulários

**APÊNDICE D – Slides da Primeira Lista de  
Exercícios**

---



---

# CORREÇÃO

*lista de exercícios*

---

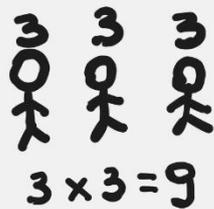


## primeira questão

Para a festa junina da escola, há três meninos (Davi, Pablo e Heitor) e três meninas (Maria Eduarda, Sofya e Débora) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?

## *soluções corretas*

Para a festa junina da escola, há três meninos (Davi, Pablo e Heitor) e três meninas (Maria Eduarda, Sofya e Débora) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?



$$3 \times 3 = 9$$

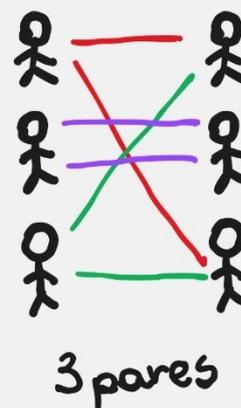
D+ME	P+ME	H+ME
D+S	P+S	H+S
D+D	P+D	H+D

9 pares

03

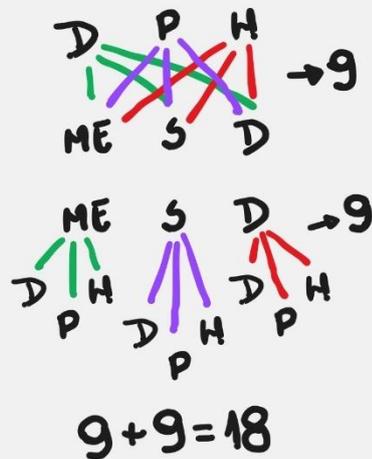
Davi e Maria  
Pablo e Sofya  
Heitor e Débora

3 pares



## *outras respostas*

04



Maria / Davi	Davi / Maria
Maria / Pablo	Davi / Sofya
Maria / Heitor	Davi / Débora

Débora / Davi	Sofya / Davi
Débora / Pablo	Sofya / Pablo
Débora / Heitor	Sofya / Heitor

12 pares

*outras respostas*

05

## segunda questão

Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve sentar-se. Ele decide que as quatro carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Luiz Phelipe e José em qualquer ordem. De quantas maneiras esses cinco alunos podem ser organizados na primeira fileira?

06

## soluções corretas ✦

Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve se sentar. Ele decide que as quatro carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Luiz Phelipe e José, em qualquer ordem. De quantas maneiras esses quatro alunos podem ser organizados na primeira fileira?

L	L	L	L	L	L	$6 \times 4 = 24$
ML	ML	J	J	LP	LP	
LP	J	LP	ML	ML	J	
J	LP	ML	LP	J	ML	

07

L, M, LP, J →  $\square$   $\square$   $\square$   $\square$

4    4    4    4

16 maneiras

Maria, Layla, Luiz, José  
 José, Maria, Layla, Luiz  
 Luiz, José, Layla, Maria

4 carteiras

4 alunos

$4 \times 4 = 16$

4 maneiras

L, M, LP, J

J, LP, M, L

LP, J, L, M

M, L, J, LP

## outras respostas

08

## terceira questão

Nas Olimpíadas, o vôlei costuma ser disputado em quatro etapas: a fase de grupos, as quartas de final, as semifinais e as finais. Na primeira etapa, as seleções são divididas em três grupos, com quatro seleções cada. Em 2024, nas Olimpíadas de Paris, a divisão foi feita da seguinte maneira:

POOL A		POOL B		POOL C	
1	FRA	1	BRA	1	ITA
2	USA	2	POL	2	TUR
3	CHN	3	JPN	3	NED
4	SRB	4	KEN	4	DOM

09

## soluções corretas

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B, nessa primeira etapa?

POOL B	
1	BRA
2	POL
3	JPN
4	KEN

BRA x POL    POL x JPN  
 BRA x JPN    POL x KEN  
 BRA x KEN    JPN x KEN

} 6 jogos

10

BRA x POL	JPN x KEN	
BRA x JPN	JPN x POL	
BRA x KEN	JPN x BRA	
POL x JPN	KEN x BRA	= 12 jogos
POL x KEN	KEN x POL	
POL x BRA	KEN x JPN	

---

*outras respostas*

11

## quinta questão

Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de skate street que é disputada por oito atletas?



12

1 1 1 1 1 1 1

2 3 4 5 6 7 8

3 2 2 2 2 2 2

4 4 3 3 3 3 3

5 5 5 4 4 4 4

6 6 6 6 5 5 5

7 7 7 7 7 6 6

8 8 8 8 8 8 7

$$8 \times 7 = 56$$

A2

B2

C2

D2

E2

F2

G2

H2

$$14 \times 8 = 112$$

*outras respostas*

13

8 atletas

3 lugares

$$8 \times 3 = 24$$

$$8 - 3 = 5$$

1 para o primeiro lugar

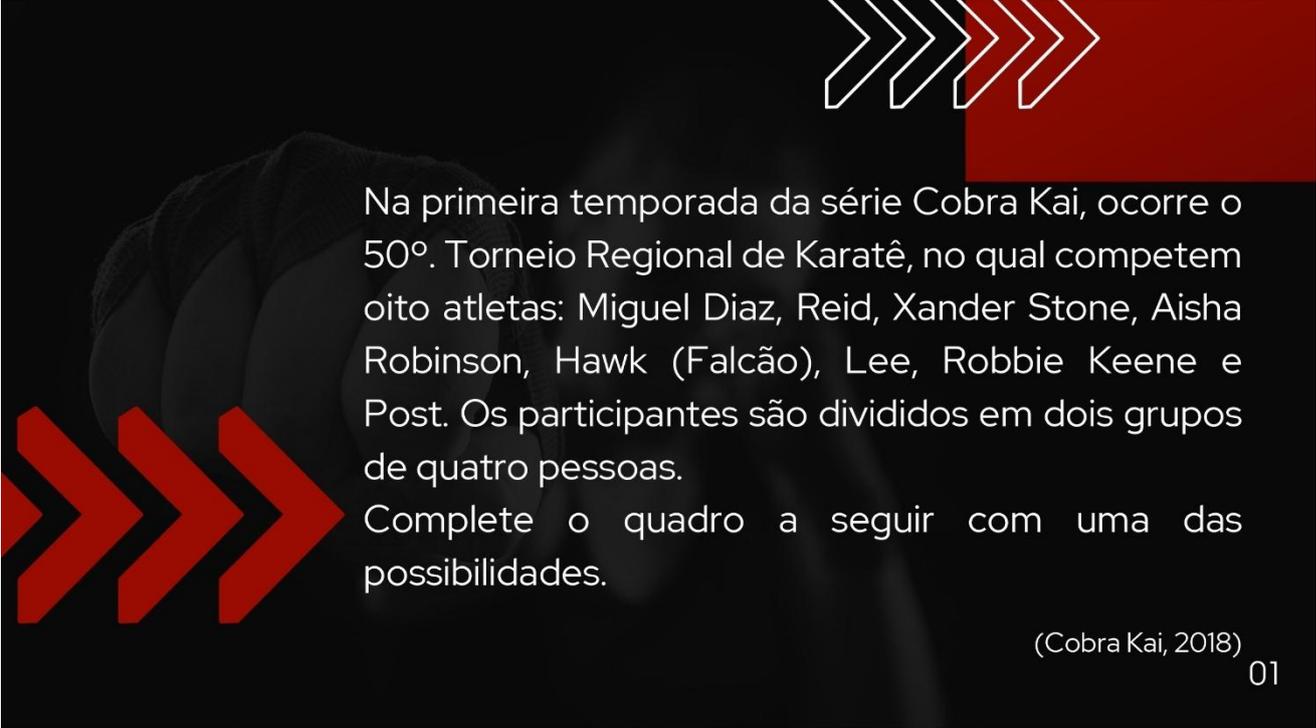
1 para o segundo lugar

1 para o terceiro lugar

*outras respostas*

14

**APÊNDICE E – Slides da Segunda Lista de  
Exercícios**



Na primeira temporada da série Cobra Kai, ocorre o 50º. Torneio Regional de Karatê, no qual competem oito atletas: Miguel Diaz, Reid, Xander Stone, Aisha Robinson, Hawk (Falcão), Lee, Robbie Keene e Post. Os participantes são divididos em dois grupos de quatro pessoas. Complete o quadro a seguir com uma das possibilidades.

(Cobra Kai, 2018) 01

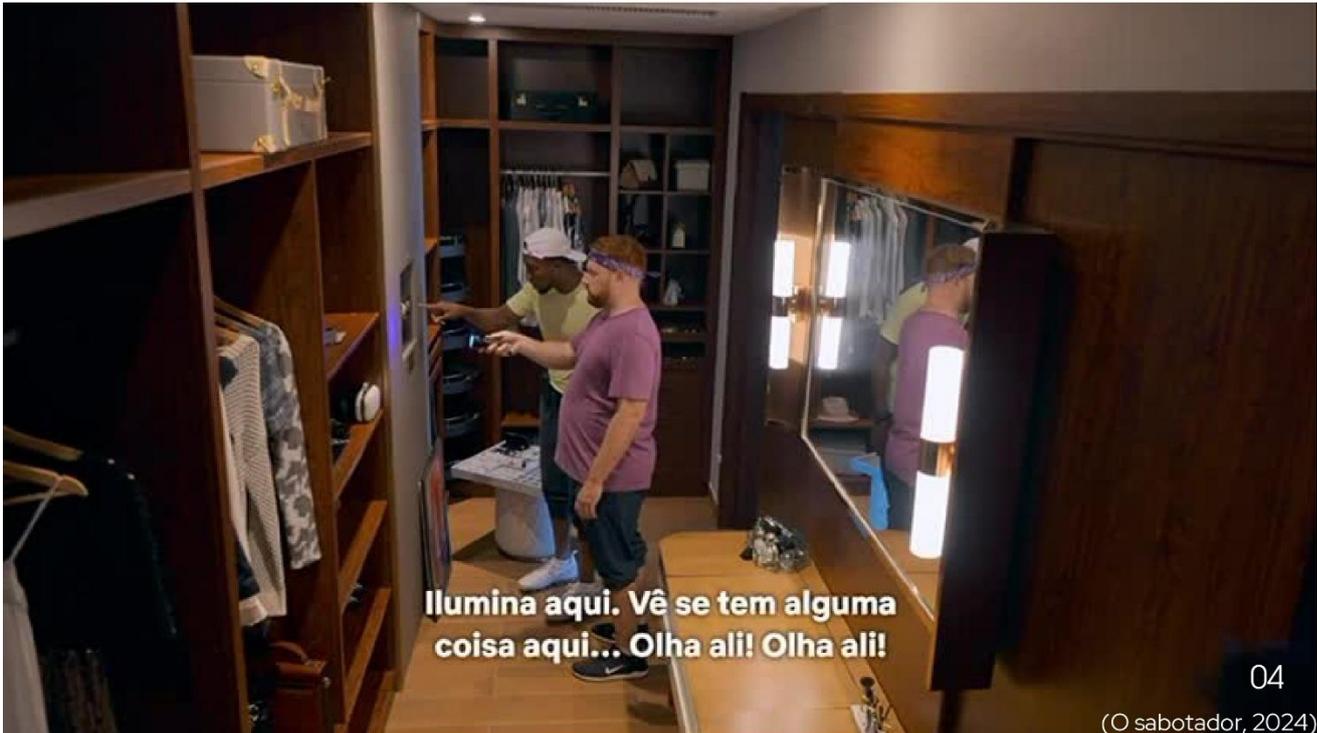




Sabendo que Miguel Diaz, Xander Stone, Hawk (Falcão) e Robbie Keene foram os participantes que passaram para as semifinais, quantas são as possibilidades de finais para essa competição?

(Cobra Kai, 2018)

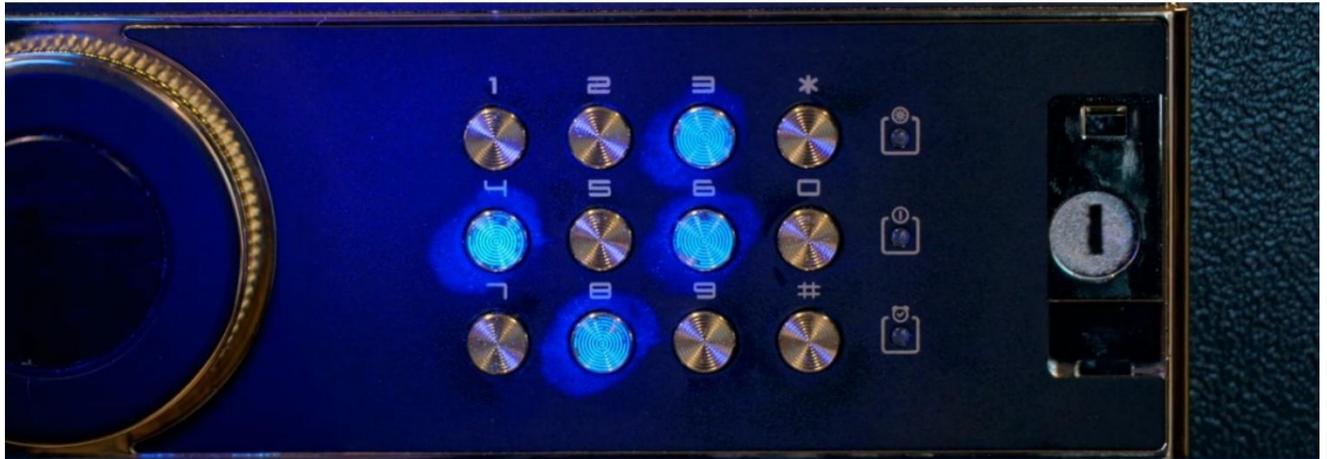
03



**Ilumina aqui. Vê se tem alguma coisa aqui... Olha ali! Olha ali!**

04

(O sabotador, 2024)



**Quantas configurações dá para formar com esses quatro números?**

(O sabotador, 2024) 05

Um candidato a vereador do partido “PProf” (número 93) deseja que os três últimos dígitos de seu número sejam pares (0, 2, 4, 6, 8) e que não haja repetição entre eles. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

06

(Brasil, 2024)



Home Music About Us Contact Search . . . .

FILIFE RET CABELINHO

MATUÊ TETO OROCHI

BK HUNGRIA

Uma produtora está organizando um festival de música e precisa selecionar quatro artistas para o evento. Entre as atrações já confirmadas estão Cabelinho e Filipe Ret. As opções para os outros dois artistas ainda estão em fase de negociação e incluem Matuê, Teto, Orochi, BK e Hungria. Quantas diferentes configurações a produtora pode formar dos outros dois artistas para o festival?

07

UM TÉCNICO DE FUTEBOL PRECISA ESCOLHER UM LATERAL ESQUERDO E UM LATERAL DIREITO DE UM GRUPO DE 6 ATLETAS, ONDE CADA ATLETA PODE DESEMPENHAR QUALQUER UMA DESSAS POSIÇÕES. QUANTAS FORMAÇÕES DIFERENTES O TÉCNICO PODE CRIAR?

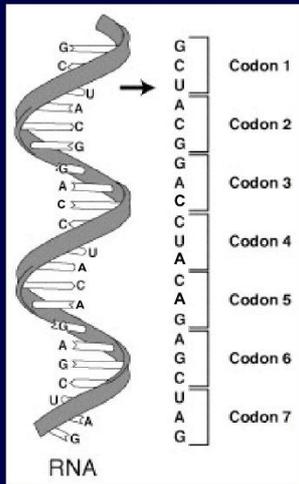


08



Uma maneira de codificar uma frase é substituir cada letra do texto por outra do alfabeto. Uma pessoa deseja codificar a palavra MAR usando apenas vogais. Quantos códigos ela pode criar? Considere EEE e AIA exemplos de códigos válidos.





Um códon é uma sequência de três bases nitrogenadas de RNA-m (RNA mensageiro). Sabendo que são encontradas apenas quatro bases nitrogenadas no RNA (citosina, guanina, adenina e uracila), quantos códons podem ser formados sem que haja repetição das bases nitrogenadas?

(Bernoulli, 2022) 11

Among Us é um jogo online em que os jogadores assumem os papéis de “Tripulação” ou “Impostor”. O objetivo do jogo é que os Companheiros de Tripulação identifiquem os jogadores que são os Impostores no jogo. Enquanto isso, os impostores devem eliminar os tripulantes antes que eles terminem suas tarefas. Em um jogo com 7 jogadores, sendo 2 deles impostores, quantas são as possibilidades de partida?

GAMES  
GAMES  
GAMES



12

(Among us, 2024)

**O técnico de um time de vôlei precisa selecionar um atleta para a posição de Levantador e outro para a posição de Líbero. Ele tem 4 atletas disponíveis para a posição de Levantador e 6 atletas para a posição de Líbero. Quantas formações diferentes o técnico pode criar?**



## REFERÊNCIAS

AMONG us. v2024.8.13. Redmond: Inner Sloth, 2024. Jogo eletrônico.

BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. **Vereador ou prefeito**: conheça a ordem de votação nas Eleições 2024. Brasília, DF, 2024. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2024/Abril/vereador-ou-prefeito-conheca-a-ordem-de-votacao-nas-eleicoes-2024>. Acesso em: 9 ago. 2024.

COBRA Kai: primeira temporada. Direção: Jon Hurwitz. [S. l.]: Netflix, 2018. Disponível em: <https://www.netflix.com/br/title/81002370>. Acesso em: 02 out. 2024.

COMO funciona o código nazista “Enigma”?, 2021. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo Canal History Brasil. Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=e-XF028\\_InY&t=3s](https://www.youtube.com/watch?v=e-XF028_InY&t=3s). Acesso em: 12 out. 2024.

O SABOTADOR: segunda temporada. Direção: Kate Douglas Walker. Produção: Chris Culvenor; Paul Franklin; David Tibballs; Judy Smart; Peter Faherty; Michiel Devlieger. [S. l.]: Netflix, 2024. Disponível em: <https://www.netflix.com/br/title/81286686>. Acesso em: 02 out. 2024.

**APÊNDICE F – Roteiro de perguntas para a  
entrevista com os alunos**

---

### **Roteiro de perguntas para a entrevista com os alunos**

1. Os temas abordados (como séries, jogos, etc...) despertaram maior interesse em vocês para a aula?
2. Foi possível identificar quais estratégias seriam mais adequadas para cada questão?
3. Foi possível perceber situações do cotidiano e de outras disciplinas que envolvem o conteúdo apresentado?
4. O aproveitamento das estratégias utilizadas por vocês na Primeira Lista de Exercícios contribuiu para o entendimento do conteúdo?
5. Vocês tiveram dificuldade com o enunciado das questões?
6. O uso das listagens e do diagrama de árvore contribuiu para o entendimento do conteúdo?
7. Da Primeira Lista de Exercícios para a Segunda você percebe o desenvolvimento do seu raciocínio nesse tipo de questão?
8. Vocês acharam interessantes as questões que envolviam contextos de outras disciplinas, como história, biologia?

**APÊNDICE G – Questionário aplicado no  
Segundo Teste Exploratório**

Este teste exploratório integra uma pesquisa acadêmica desenvolvida pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Ana Laura Barreto de Almeida, sob a orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade. As informações fornecidas serão tratadas somente para fins acadêmicos. Agradecemos a sua colaboração.

01- Está claro que as questões abordam diferentes tipos de agrupamento em Análise Combinatória (Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo, Combinação)?

---

---

---

02- A contextualização aparece de forma significativa nas questões?

---

---

---

03- Você considera o tempo de quatro horários adequado para a aplicação da sequência didática, considerando que em um dia será feita a correção dos exercícios e o outro será destinado para a resolução dos novos exercícios e a realização da entrevista?

---

---

---

04- Você considera que as questões estão adequadas, quanto ao grau de dificuldade, para uma turma de 9º ano?

---

---

---

05- Os contextos explorados nas questões estão claros mesmo para um aluno que não os conheça?

---

---

---

06- A sequência didática contempla o referencial teórico adotado?

---

---

---

07- Você tem alguma sugestão para o tratamento da aula com os alunos que possuem necessidades educacionais específicas?

---

---

---

---

08- Você acredita que as perguntas para a entrevista estão de acordo com o referencial teórico?

---

---

---

09- Você tem alguma outra sugestão de pergunta para a entrevista?

---

---

---

---

10- Você gostaria de fazer alguma outra observação?

---

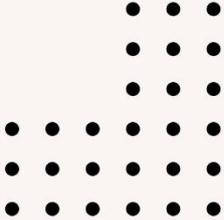
---

---

---

---

**APÊNDICE H – Slides utilizados no Segundo  
Teste Exploratório**



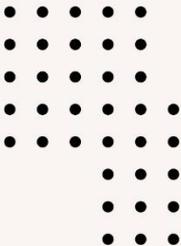
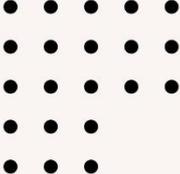
---

# RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Ana Laura Barreto de Almeida  
Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

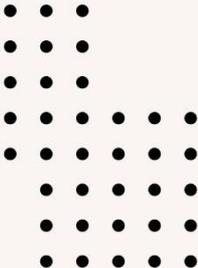
---

Teste Exploratório 2 - Setembro 2024



---

## OBJETIVO



Identificar as contribuições de uma sequência didática com uma abordagem contextualizada de Análise Combinatória no Ensino Fundamental com ênfase no raciocínio combinatório.

---

## O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL



“Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.” (Brasil, 1997, p. 52)



## CONTEXTUALIZAÇÃO



Para Lima (2018), a contextualização é uma prática de ensino que busca permitir que os estudantes relacionem o conteúdo a ser aprendido com as suas necessidades e com outros temas que estejam conectados ao que está sendo estudado.



## TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS



“Vergnaud (1990) defende que o conhecimento está relacionado à competência, a qual ele define como ação julgada adequada para tratar uma situação. O conhecimento escolar – com suas competências – compõe-se do conhecimento cotidiano e do conhecimento científico. Nesta perspectiva, Vergnaud defende que a Teoria dos Campos Conceituais, por ele desenvolvida, permite atribuir aos conceitos um significado de natureza educacional, funcionando como um orientador para que a educação escolar não permaneça na dimensão empírica do cotidiano nem se perca na ciência pura – uma vez que conhecimentos cotidianos e científicos se inter-relacionam.” (Pessoa, 2009, p. 38)



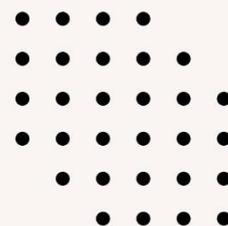
## ASPECTOS METODOLÓGICOS



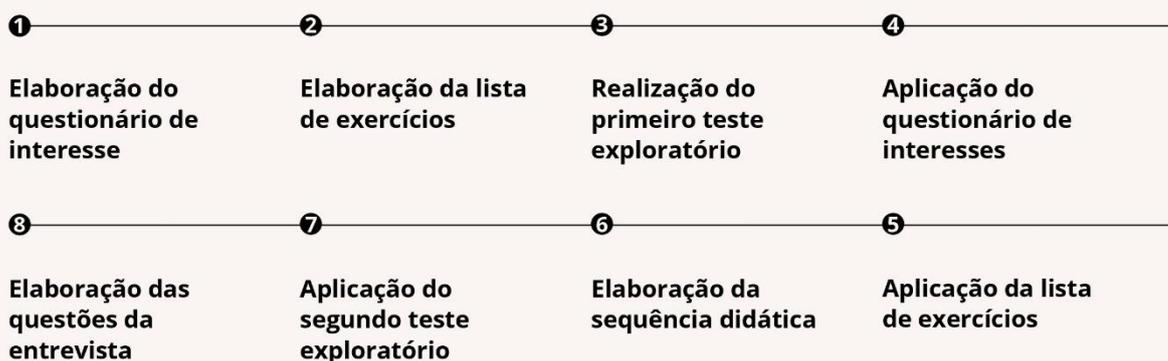
Pesquisa Qualitativa



Intervenção Pedagógica



# PLANEJAMENTO



## QUESTIONÁRIO DE INTERESSES

- |                          |                                |
|--------------------------|--------------------------------|
| <b>1</b> Esportes        | <b>7</b> Jogos                 |
| <b>2</b> Instrumentos    | <b>8</b> Coleções              |
| <b>3</b> Grupo Musical   | <b>9</b> Disciplinas escolares |
| <b>4</b> Artistas        | <b>10</b> Agremiações          |
| <b>5</b> Livros          | <b>11</b> Senhas               |
| <b>6</b> Filmes e Séries | <b>12</b> Outros hobbies       |

## LISTA DE EXERCÍCIOS APRESENTADA NO TESTE EXPLORATÓRIO



## LISTA DE EXERCÍCIOS APLICADA

### 01 – PRODUTO CARTESIANO

Para a festa junina da escola, há três meninos (Davi, Pablo e Heitor) e três meninas (Maria Eduarda, Sofya e Débora) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podem ser formados por um menino e uma menina?

### 02 – PERMUTAÇÃO

Um professor decide montar um mapa de sala para a turma, definindo em qual lugar cada aluno deve se sentar. Ele decide que as quatro carteiras da primeira fila devem ser ocupadas por Layla, Maria Luísa, Luiz Phelipe e José, em qualquer ordem. De quantas maneiras esses quatro alunos podem ser organizados na primeira fileira?

### 03 – COMBINAÇÃO

Nas Olimpíadas, o vôlei costuma ser disputado em quatro etapas: a fase de grupos, as quartas de final, as semifinais e as finais. Na primeira etapa, as seleções são divididas em três grupos, com quatro seleções cada. Em 2024, nas Olimpíadas de Paris, a divisão foi feita da seguinte maneira:

Women's Pools		
<b>POOL A</b>	<b>POOL B</b>	<b>POOL C</b>
1 FRA	1 BRA	1 ITA
2 USA	2 POL	2 TUR
3 CHN	3 JPN	3 NED
4 SRB	4 KEN	4 DOM

Sabendo que as seleções jogam com todas as outras do mesmo grupo uma única vez, quantos jogos serão realizados entre as seleções do grupo B, nessa primeira etapa?

## LISTA DE EXERCÍCIOS APLICADA

### 04 – PRODUTO CARTESIANO

O jogo Twister se baseia em um grande tapete com quatro linhas compostas por círculos de quatro cores diferentes: verde, amarelo, azul e vermelho. O jogo inclui também uma roleta dividida em quatro seções: pé direito, mão direita, pé esquerdo e mão esquerda.



A cada rodada, os participantes devem girar a roleta e colocar uma parte do corpo em um círculo da cor indicada. Sabendo que todas as quatro partes do corpo podem ser combinadas com todas as quatro cores, quantas são as possibilidades de jogada em uma rodada? Considera-se um exemplo de jogada colocar a mão direita em um círculo amarelo.

### 05 – ARRANJO

Quantos são os resultados possíveis para primeiro, segundo e terceiro lugares de uma final olímpica de skate street que é disputada por oito atletas?

### 06 – COMBINAÇÃO

O Mercado Comum do Sul (Mercosul) é um bloco econômico que tem como objetivo principal propiciar um espaço comum capaz de gerar oportunidades comerciais e de investimentos mediante a integração competitiva das economias nacionais ao mercado internacional. Em uma prova de geografia, é perguntado quais países compõem esse bloco econômico. Um aluno lembra que o Mercosul é formado pelo Brasil, Argentina, Uruguai e outros dois países da América do Sul e que o continente é composto por doze países. De quantas tentativas o estudante precisará para garantir que ele acertará a questão?

## IMPLEMENTAÇÃO

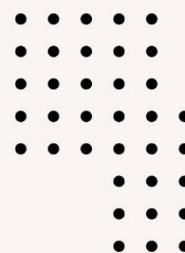
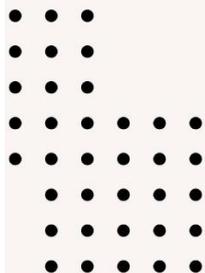
- Público alvo: 9º ano do Ensino Fundamental.
- Dias 23 e 24 de outubro.
- Quatro tempos de aula, sendo metade de um para a realização da entrevista.
- Instrumentos de coleta de dados: Anotações no caderno de campo, observação, resposta dos alunos às atividades e entrevista com os alunos.

## ALUNOS COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS



- 2 alunos autistas e com deficiência intelectual
- 1 aluna autista
- 1 aluna com deficiência intelectual  
Conversa com uma mediadora
- Material concreto
- Ludicidade
- Questões de fácil interpretação
- 5 a 6 questões utilizando números menores
- Não costumam prestar atenção durante as aulas

## SEQUÊNCIA DIDÁTICA

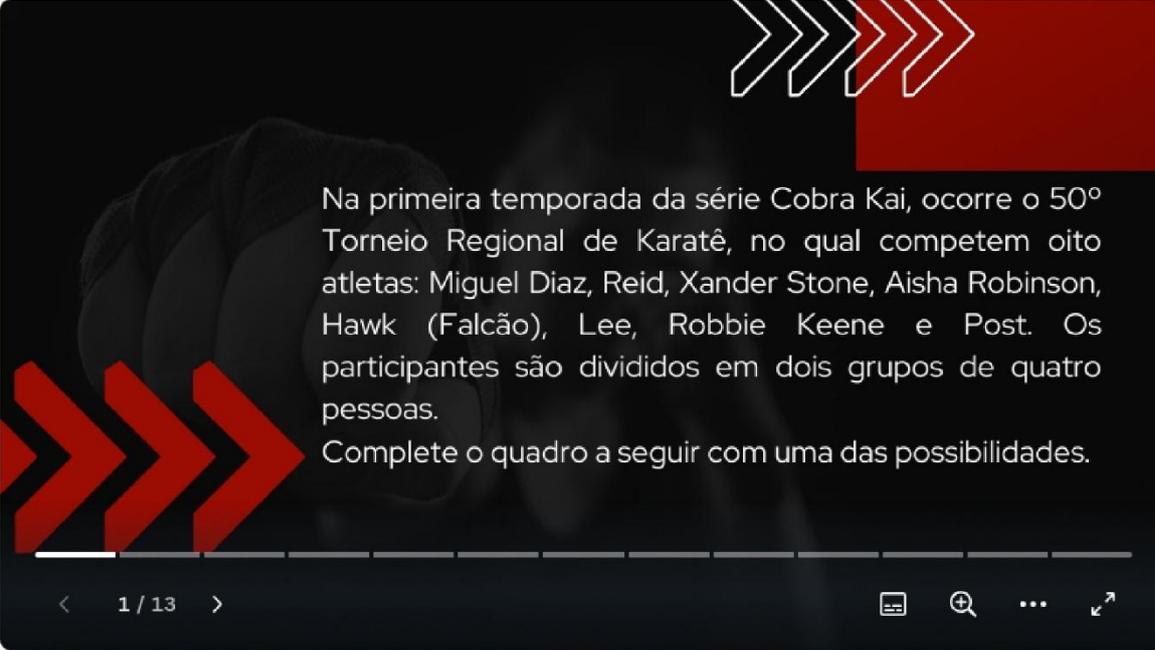
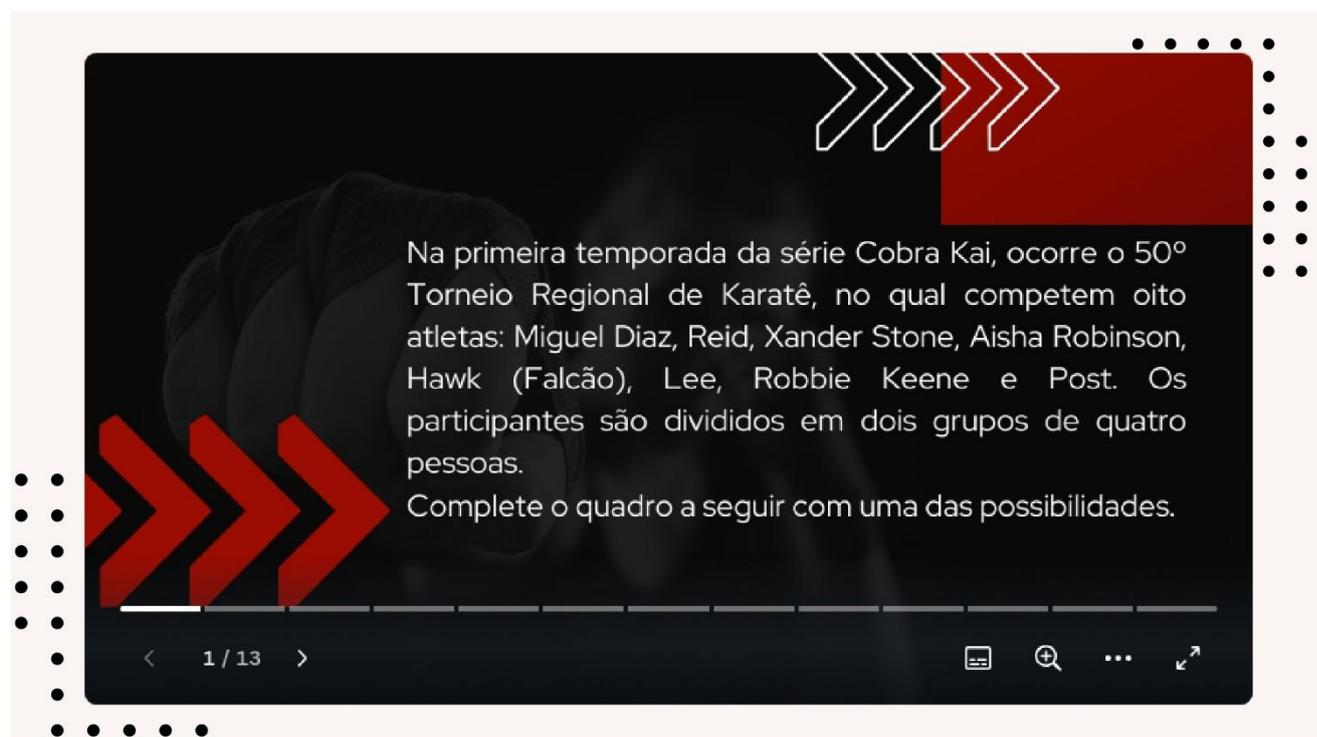




# CORREÇÃO

*lista de exercícios*

< 1 / 21 > 🔍 ... ↗



Na primeira temporada da série Cobra Kai, ocorre o 50º Torneio Regional de Karatê, no qual competem oito atletas: Miguel Diaz, Reid, Xander Stone, Aisha Robinson, Hawk (Falcão), Lee, Robbie Keene e Post. Os participantes são divididos em dois grupos de quatro pessoas.

Complete o quadro a seguir com uma das possibilidades.

< 1 / 13 > 📄 🔍 ... ↗

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC, SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2024.

LIMA, Wanessa Aparecida Trevizan de. Contextualização: o sentido e o significado na aprendizagem matemática. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-28112018-152839/pt-br.php>. Acesso em: 28 nov. 2023.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189>. Acesso em: 20 mai. 2024.

**APÊNDICE I – Roteiro de perguntas para a  
entrevista com a mediadora**

---

### **Roteiro de perguntas para a entrevista com a mediadora**

1. Qual a orientação que os professores recebem no trato das aulas com esses alunos?
2. Quais alunos da turma precisam de material adaptado e quais são as necessidades educacionais especiais deles?
3. Quais são os principais interesses desses estudantes?
4. Como deve ser adaptado o material para os alunos com necessidades educacionais especiais?
5. Quantas questões costumam ter as atividades destinadas a estes alunos? E qual o grau de dificuldade dessas questões?

**APÊNDICE J – Lista de Exercícios Adaptados**

Estes exercícios integram uma pesquisa acadêmica desenvolvida pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Ana Laura Barreto de Almeida, sob a orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade. As informações fornecidas serão tratadas somente para fins acadêmicos. Agradecemos a sua colaboração.

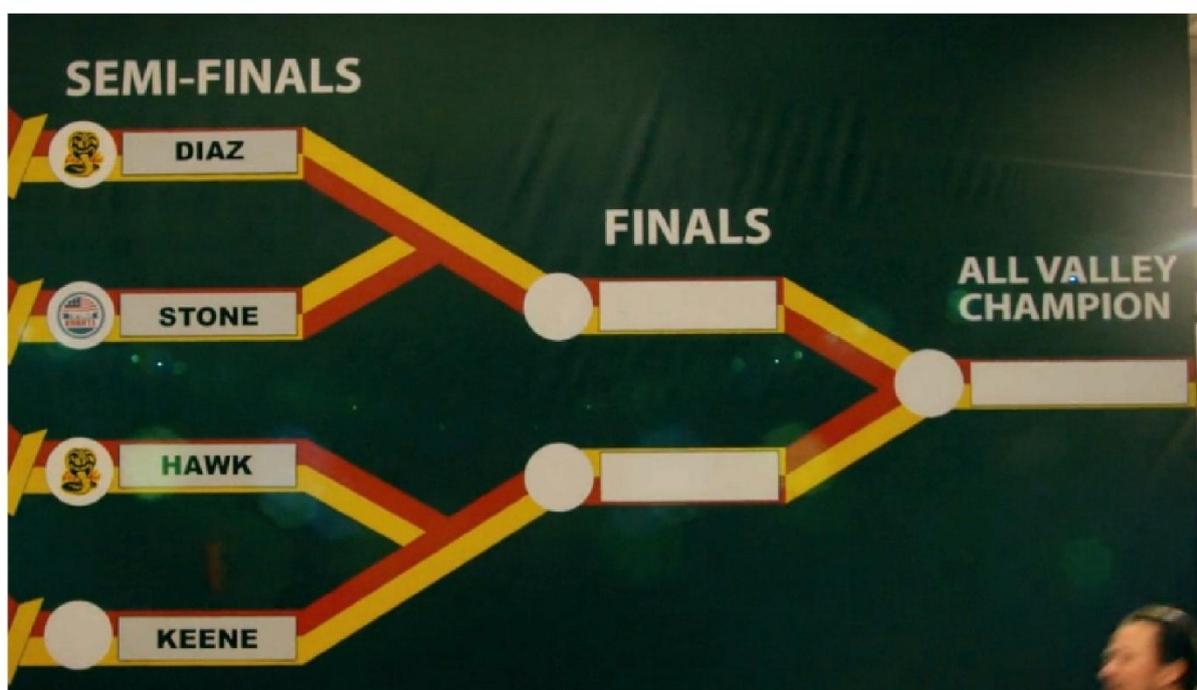
Aluno: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

### Lista de exercícios

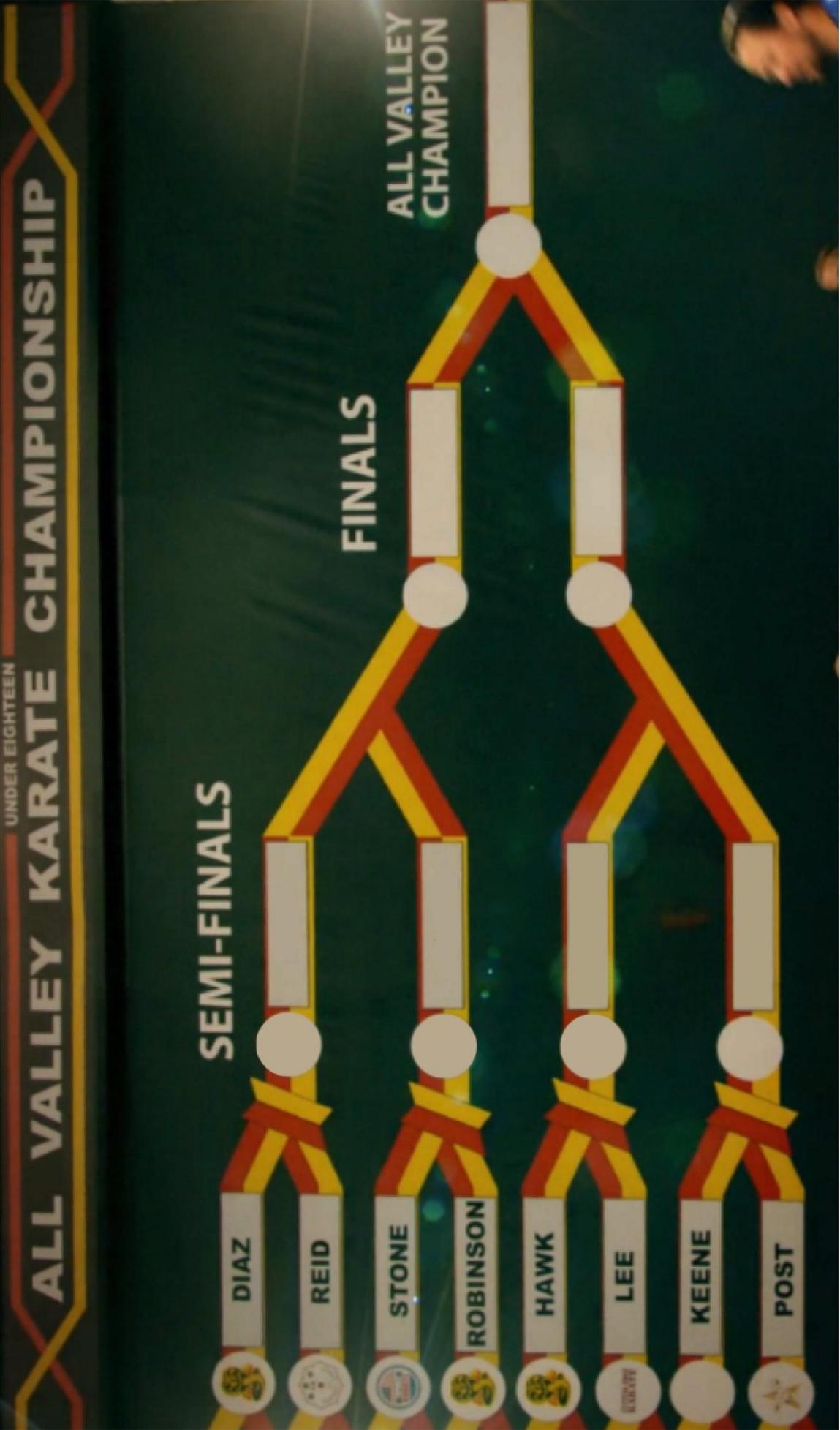
01- Na primeira temporada da série Cobra Kai, ocorre o 50º. Torneio Regional de Karatê, no qual competem oito atletas: Diaz, Reid, Stone, Robinson, Hawk (Falcão), Lee, Keene e Post. Os participantes são divididos em dois grupos de quatro pessoas.<sup>1</sup>

a) Complete o quadro da página seguinte com uma das possibilidades

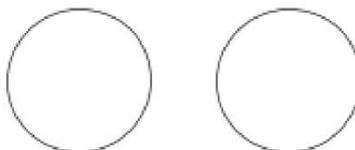
b) Sabendo que Diaz, Stone, Hawk (Falcão) e Keene foram os participantes que passaram para as semifinais, quantas são as possibilidades de finais para essa competição?



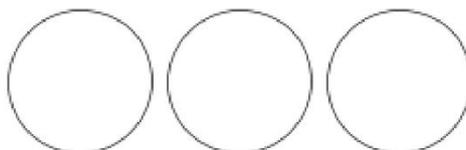
<sup>1</sup> COBRA Kai, 2018.



02- Um cofre possui uma senha de dois dígitos. Sabe-se que a senha é composta pelos dígitos 5 e 9. Quantas senhas podem ser formadas com esses algarismos, sem que haja repetição dos dígitos?



03- O código de segurança de um cartão de crédito é composto por 3 dígitos.<sup>2</sup> Um código de segurança é composto pelos dígitos 1, 2 e 3. Quantos códigos podem ser formados com esses algarismos sabendo que os dígitos são distintos?



---

<sup>2</sup> Burin, 2024.

04- O número a ser digitado na urna eletrônica para prefeito é composto por dois dígitos.<sup>3</sup>



Um candidato a prefeito deseja que seu número seja composto pelos dígitos 6, 7 ou 8 e que não haja repetição entre eles. Alguns exemplos para este número seriam 67 ou 86. Quantas são as possibilidades de números para esse candidato?

---

<sup>3</sup> Brasil, 2024.

05- Uma produtora está organizando um festival de música e precisa selecionar dois artistas para o evento.

a) Considerando que as opções são Matuê e Teto, quantas diferentes configurações a produtora pode formar?



b) Se agora a produtora tivesse como opção os artistas Matuê, Teto e Orochi, quantas diferentes configurações de dois artistas poderiam ser formadas?



06- Um técnico de futebol precisa escolher um lateral esquerdo e um lateral direito de um grupo de 3 atletas, onde cada atleta pode desempenhar qualquer uma dessas posições. Quantas formações diferentes o técnico pode criar?



---

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. **Vereador ou prefeito**: conheça a ordem de votação nas Eleições 2024. Brasília, DF, 2024. Disponível em:

<https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2024/Abril/vereador-ou-prefeito-conheca-a-ordem-de-votacao-nas-eleicoes-2024>. Acesso em: 9 ago. 2024.

BURIN, Renato. **O que é CVV e onde fica o código de segurança do cartão de crédito?**.

2024. Disponível em: <https://www.nuvemshop.com.br/blog/o-que-e-cvv/>. Acesso em: 10 out. 2024.

COBRA Kai: primeira temporada. Direção: Jon Hurwitz. [S. l.]: Netflix, 2018. Disponível em: <https://www.netflix.com/br/title/81002370>. Acesso em: 02 out. 2024.

**APÊNDICE K – Questionário para a  
mediadora**

## Questionário Mediadora

Esse questionário faz parte do Trabalho de Conclusão de Curso que tem como título "Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental: uma intervenção pedagógica contextualizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais". A pesquisa está sendo desenvolvida pela licencianda Ana Laura Barreto de Almeida, sob a orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade, vinculada ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos Centro.

Você acredita que o uso do material manipulável na parte, sobre a correção dos exercícios, \* auxiliou no entendimento do conteúdo?

.....

E na segunda parte, sobre os exercícios novos, também auxiliou? \*

.....

Você sentiu alguma mudança no comportamento do aluno durante a resolução das \* questões, com o uso de material manipulável? Eles se sentiram mais motivados?

.....

Mesmo com a utilização do material manipulável, que outros desafios você identifica na \* compreensão do conteúdo por parte desses estudantes?

.....

Você achou interessante receber o material antes da aula? Ajudou para que você se sentisse mais preparada? \*

---

Você gostaria de adicionar mais algum comentário?

---

Este formulário foi criado em Instituto Federal Fluminense.

Google Formulários